СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА КОРАБЛЯ И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В 2 ТОМАХ

ТОМ 2

Изгиб и устойчивость стержней, стержневых систем, пластин и оболочек

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по специальности «Судостроение и судоремонт»

Ленинград
«Судостроение»
1987

ББК 39.42-01
С 86
УДК [629.12.001.11 : 539.3/.4](075.8)

Авторы: **В. А. Постнов, Д. М. Ростовцев, В. П. Суслов, Ю. П. Кочанов**

Рецензенты: кафедра Горьковского политехнического института (д-р техн. наук **В. М. Волков**), д-р техн. наук **В. А. Родосский**

Одобрена секцией строительной механики, прочности и конструкции судна редсовета издательства

Научный редактор засл. деятель науки и техники, д-р техн. наук, проф. **В. А. Постнов**

С 86 **Строительная** механика корабля и теория упругости: Учеб. для вузов: В 2 т.— Л.: Судостроение, 1987. Т. 2: Постнов В. А., Ростовцев Д. М., Суслов В. П., Кочанов Ю. П. Изгиб и устойчивость стержней, стержневых систем, пластин и оболочек. — 416 с.: ил.

ИСБН

В т. 2 учебника изложены теория и методы расчета на изгиб и устойчивость отдельных элементов судового корпуса: балок, рам, перекрытий, гладких и подкрепленных ребрами пластин и оболочек. Много внимания уделено теории естественного кручения тонкостенных стержней и теории составных стержней. Рассмотрены методы и расчетные схемы определения предельных нагрузок многих характерных элементов судового корпуса: однопролетных и неразрезных многопролетных балок, судовых рам и перекрытий.

Предназначен для студентов, аспирантов, инженерно-технических работников, занимающихся решением задач прочности судового корпуса. Может быть полезен специалистам, выполняющим расчеты прочности других инженерных конструкций.

С $\frac{3605030000-071}{048(01)-87}$ 11-87 **ББК 39.42-01**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современный этап развития судостроения характеризуется появлением все новых и новых типов судов, конструктивно заметно отличающихся от традиционных. По этой причине существовавшие ранее приближенные методы оценки прочности судового корпуса и его отдельных элементов оказываются часто непригодными. В связи с этим стало необходимым построение более строгих физических моделей, описывающих поведение судовых конструкций при действии внешних нагрузок, с последующим использованием для их расчета аппарата механики твердого деформируемого тела и современных численных методов, ориентированных на широкое использование ЭВМ.

В т. 1 данного учебника достаточно полно изложены основные положения механики твердого деформируемого тела, современные численные методы решения задач теории упругости и строительной механики. Там же приведены многочисленные примеры, иллюстрирующие применение численных методов к расчету прочности основных элементов судового корпуса: стержней, балок, пластин.

В настоящем томе учебника рассмотрены изгиб и устойчивость стержней и стержневых систем (судовых рам и перекрытий), гладких и подкрепленных ребрами судовых пластин и оболочек. Таким образом, учебник охватывает практически все наиболее распространенные и важные судовые конструкции. Большое внимание уделено выбору физической модели для реальных элементов судового корпуса. Это не только повышает практическое значение изучаемой дисциплины, но и способствует дальнейшему развитию творческих навыков у студентов.

При написании книги авторы ставили перед собой цель изложить в достаточно простой форме современное состояние рассматриваемой науки. Причем основное внимание уделялось методам расчета различных судовых конструкций со всеми их характерными особенностями. Изучив эти методы, учащийся сам сможет рассчитать любые судовые конструкции. Вследствие этого учебник разгружен от различных частных примеров, не содержащих в себе никаких специфических особенностей в методологическом отношении.

Распределение материала данного тома учебника между авторами следующее: предисловие, введение, гл. 13, 18, 22—24 написаны В. А. Постновым, гл. 15—17 — Д. М. Ростовцевым, гл. 14 — В. П. Сусловым, гл. 21 — Ю. П. Кочановым, гл. 19, 20 — В. П. Сусловым и Ю. П. Кочановым совместно.

Авторы с благодарностью примут критические замечания читателей, направленные в адрес издательства «Судостроение», 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8.

ВВЕДЕНИЕ

Корпус судна представляет собой сложную упругую систему, состоящую из большого числа взаимосвязанных конструктивных элементов: пластин, оболочек и стержней. Каждый из этих элементов загружен определенной системой внешних нагрузок, реакциями взаимодействия со смежными элементами судового корпуса. Эти усилия вызывают в элементах деформации различных видов. Так, отдельные балки в зависимости от их назначения и роли в составе судового корпуса могут испытывать деформации растяжения-сжатия, кручения, изгиба или одновременно сразу несколько из указанных видов деформаций. Точно также и пластины как элементы судового корпуса могут подвергаться действию усилий, вызывающих в них плоское напряженное состояние или деформации изгиба, либо то и другое одновременно. Из простейших элементов (балок, пластин, оболочек) набираются более крупные конструктивные элементы судового корпуса: перекрытия, поперечные и продольные переборки и т. п.

Перекрытия и переборки входят в состав еще более крупных конструктивных модулей корпуса — судовых отсеков, из которых, по существу, и состоит судовой корпус в целом. В этой иерархии конструктивных элементов судового корпуса каждое звено (балка, пластина, перекрытие, отсек) должно обладать необходимой прочностью, чтобы обеспечить требуемую прочность судового корпуса в целом. Строгий расчет такой конструкции весьма сложен. Для упрощения расчета исходная задача разделяется на отдельные более простые и в значительной степени самостоятельные задачи.

Так, пользуясь тем, что длина судна велика по сравнению с размерами его поперечного сечения, часто судно рассматривают как непризматическую пустотелую балку, загруженную силами тяжести корпуса и груза, силами давления забортной воды, силами инерции, возникающими при качке судна. Изгиб корпуса судна как балки называется *общим продольным изгибом*.

В число конструктивных элементов корпуса входят так называемые поперечные связи — поперечные переборки, шпангоутные рамы, — препятствующие изменению формы поперечных сечений судна. Изгиб этих связей называется *общим поперечным изгибом* судна.

Ограничиться рассмотрением лишь общего продольного и поперечного изгиба судна, разумеется, нельзя. Такой расчет слишком упрощенно представляет работу корпуса как конструкции и не позволяет судить о прочности отдельных его элементов: перекрытий, наружной обшивки, настила палуб и платформ, подкрепляющих их ребер и т. п.

Многие связи судового корпуса, участвующие в общем продольном и поперечном изгибе судна, под действием приходящихся на них местных нагрузок дополнительно испытывают *местный изгиб*, вследствие чего возникающие в них напряжения будут складываться из напряжений от общего и местного изгибов. По уровню этих суммарных напряжений можно судить о прочности того или иного элемента судового корпуса, а следовательно, и судового корпуса в целом.

Ниже будут изложены задачи расчета типичных схематизированных конструкций, выделенных из состава судового корпуса, — балок, перекрытий, пластин и оболочек. По существу, к решению совокупности именно таких задач сводится, как правило, расчет напряженно-деформированного состояния не только судна, но и любого другого инженерного сооружения.

Таким образом, материал учебника ограничен решением второй основной проблемы строительной механики корабля — проблемы внутренних сил.

Курс «Прочность и вибрация корабля», к изучению которого студенты приступают вслед за настоящим курсом, уже комплексно рассматривает все составные части проверочного расчета прочности и методы проектирования судового корпуса. Здесь на основе изучения условий постройки и эксплуатации судов различных типов решается проблема внешних сил, изучаются способы построения физических моделей и расчетных схем для оценки общей и местной прочности судов различных типов, решается проблема нормирования прочности. Большое внимание в курсе «Прочность и вибрация корабля» уделяется методам проектирования рациональных судовых конструкций на основе прямого расчета, а также расчету корпуса и отдельных его элементов на действие различных динамических нагрузок.

В заключение приведем краткие сведения из истории строительной механики корабля.

Строительная механика корабля, основоположником которой по праву можно считать известного русского ученого-кораблестроителя, профессора Морской академии и кораблестроительного отделения Петроградского политехнического института И. Г. Бубнова (1872—1919 гг.), как самостоятельная наука начала формироваться в начале XX в. Труды И. Г. Бубнова, его книги [11, 12] составили целую эпоху в этой науке. В них были поставлены и частично решены почти все основные вопросы, привлекающие внимание исследователей почти до настоящего времени. И. Г. Бубновым были предложены первые нормы допускаемых напряжений для надводных кораблей, разработаны методы оценки прочности и устойчивости судовых перекрытий, подкрепленных пластин и круговых цилиндрических оболочек. Им были предложены расчетные схемы оценки общей и местной прочности судов, которые вплоть до настоящего времени используют в расчетной практике.

Дальнейшее развитие строительной механики корабля связано с деятельностью выдающихся советских ученых: акад. А. Н. Крылова (1863—1945 гг.), чл.-кор. АН СССР П. Ф. Папковича (1887—1946 гг.), акад. Ю. А. Шиманского (1883—1962 гг.). А. Н. Крыловым были разработаны методы расчета внешних нагрузок, действующих на судовой корпус в условиях морского волнения. П. Ф. Папковичем выполнены глубокие исследования по изгибу и устойчивости перекрытий и пластин, подкрепленных ребрами жесткости. Широко известные монографии П. Ф. Папковича [36—38] по отдельным разделам науки о прочности судовых конструкций являются поистине энциклопедией научных знаний в этой области и не имеют себе равных в мировой литературе. Капитальные книги Ю. А. Шиманского «Динамические расчеты судовых конструкций», «Проектирование прерывистых связей судового корпуса», «Изгиб пластин» и др. способствовали решению многих важных задач и проблем строительной механики корабля.

Значительный вклад в современное состояние строительной механики корабля внес проф. А. А. Курдюмов (1911—1968 гг.) — один из пионеров широкого внедрения вероятностных методов при оценке прочности судна, автор многочисленных оригинальных исследований по всем основным проблемам строительной механики корабля.

Появление новых типов судов, широкое внедрение в судостроение новых конструкционных материалов, новых более прогрессивных технологических процессов изготовления судовых корпусов, стремление к максимальному снижению материалоемкости корпуса сопровождается постановкой все новых и новых задач и проблем строительной механики корабля, требующих безотлагательного решения. Над решением этих проблем сегодня успешно работает большая группа советских ученых, специалистов по прочности судовых конструкций.

Раздел III ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Настоящий раздел полностью посвящен исследованию поведения стержней и стержневых систем. Почему же такое большое внимание уделяется в нашем курсе этим наиболее простым задачам строительной механики корабля? Объясняется это тем, что стержни и стержневые системы являются не только важнейшими прочностными элементами судового корпуса, но и

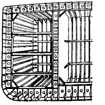


Рис. 13.1

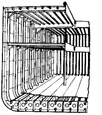


Рис. 13.2

весьма часто используются в качестве физических моделей при исследовании поведения других более сложных элементов судового корпуса.

Как объект расчета на прочность корпус судна представляет собой оболочку весьма сложной конфигурации, подкрепленную набором, поперечными и продольными переборками. На рис. 13.1 и 13.2 в качестве примеров показаны конструкции корпусов нефтеналивного и сухогрузного судов.

Балки набора корпуса вместе с наружной обшивкой и обшивкой переборок образуют монолитное тело, в котором все элементы взаимосвязаны и совместно противостоят воздействию внешних нагрузок. Хотя в настоящее время и нет принципиальных трудностей в определении напряженно-деформированного состояния, которое вызывается внешними нагрузками в судовом корпусе как довольно сложном упругом теле, однако практическая его реализация оказывается весьма дорогостоящей, требующей больших затрат при составлении входной информации для достаточно полного описания «содержания» конструкции и машинного времени, измеряемого десятками — сотнями часов. Вместе с тем такой «глобальный» анализ напряженно-деформированного состояния судового корпуса неизбежно будет давать большой объем излишней информации, так как проектировщику нужно знать напряжения далеко не во всех частях корпуса. Кроме того, известная условность назначения расчетной внешней нагрузки, ограниченность данных о допускаемых напряжениях в отдельных связях, неучет многих технологических факторов, влияющих на напряженное состояние, делают зачастую нецелесообразным уточнение данных по напряженно-деформированному состоянию (НДС) за счет усложнения расчетной схемы. Поэтому очень часто расчеты прочности отдельных частей корпуса выполняют при внесении в расчетную схему значительных упрощений, путем замены, например, реальной подкрепленной оболочки корпуса некоторыми конструкциями, состоящими из балок. Такая замена основана на выделении так называемых присоединенных поясков (участков обшивки), включаемых в состав балок набора.

Рис. 13.3

На рис. 13.3 в качестве примера показаны поперечное сечение днищевой продольной балки — вертикального киля с присоединенным пояском обшивки и сечение продольного ребра жесткости. Подобные пояски включены в состав всех балок, образующих продольный и поперечный наборы корпуса судна. Задача, связанная с определением размеров присоединенного пояска для широкополых судовых балок, была рассмотрена и решена в гл. 6.

С помощью выделения присоединенных поясков из состава судового корпуса может быть выделен ряд стержневых конструкций, каждая из которых позволяет выполнить приближенный анализ напряженного состояния отдельных конструкций корпуса (перекрытий, переборок и т. д.). Совокупность этих анализов позволяет получить в ряде случаев достаточно полное представление о величине и распределении напряжений в корпусе. Казалось бы все очень просто, однако фактическое выполнение упомянутой операции «выделения» требует глубокого понимания взаимодействия отдельных частей корпуса судна и может быть сделано только квалифицированными специалистами в области расчетов прочности инженерных конструкций.

Укажем на некоторые стержневые конструкции, которые могут быть выделены из состава корпуса судна с целью приближенной оценки напряженно-деформированного состояния отдельных частей

судового корпуса: а) однопролетные и многопролетные (неразрезные) балки; б) плоские рамы; в) плоские перекрытия; г) пространственные рамы.

Примеры использования перечисленных выше типов стержневых упругих систем при анализе напряжений различных конструкций судового корпуса будут приведены ниже в соответствующих главах учебника. Там же будут изложены и методы расчета этих стержневых систем.

Глава 13 ИЗГИБ ПРЯМЫХ БАЛОК

§ 13.1. Балка как один из основных конструктивных элементов судового корпуса и как физическая модель при расчете некоторых сложных судовых конструкций

Балка, как и стержень, — это тело, у которого один размер (длина) значительно больше двух других. Боковая поверхность балки описывается в пространстве контуром плоской фигуры при ее перемещении без вращения вдоль некоторой направляющей линии, называемой *осью балки*, так, что центр тяжести (ЦТ) фигуры остается на этой оси, а плоскость фигуры нормальна к ней. Указанная плоская фигура может изменять свою форму и площадь по длине балки и представляет собой плоские поперечные сечения балки, перпендикулярные ее оси.

Балка называется *прямой*, если ее ось есть прямая линия, а главные оси всех поперечных сечений балки лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Прямая балка именуется *призматической*, или *балкой постоянного сечения*, если все ее поперечные сечения имеют одинаковую форму и равную площадь. При изменении формы или площади поперечных сечений по длине прямая балка называется *непризматической*, или *балкой переменного сечения*.

Если положение главных центральных осей в плоскости поперечных сечений меняется по длине балки, то это *балка с естественно закрученной осью*.

В случае криволинейной оси различают балки малой и большой кривизны (кривые брусья), а также плоскокриволинейные и пространственно-криволинейные балки. К *балкам малой кривизны* относятся балки, у которых в любом сечении радиус кривизны оси в пять и более раз превышает размер этого сечения в направлении радиуса. Для таких балок можно применять без большой погрешности те же основные зависимости между элементами изгиба, что и для прямых балок. У *плоскокриволинейных балок* осью является плоская кривая, а одна из главных центральных осей каждого из поперечных сечений лежит в плоскости оси балки.

Как уже отмечалось, балка является распространенным конструктивным элементом судового корпуса. Она входит в состав конструкций судовых переборок, перекрытий, поперечных рам и т. п. Балкой часто моделируется поведение судового корпуса в целом при так называемом общем изгибе судна, при постановке судна в док, спуске судна. Дело в том, что корпус судов многих типов представляет собой весьма удлиненное тело (подкрепленную оболочку), которое обладает большой жесткостью в плоскости каждого из поперечных сечений. В результате при действии на такой корпус внешней нагрузки в реальных условиях эксплуатации судна каждое из поперечных сечений корпуса получает преимущественно лишь линейные и угловые перемещения как твердого целого. Но как известно из курса сопротивления материалов, деформации такого типа описываются технической теорией изгиба балок. Это позволяет во многих случаях напряжения в продольных связях корпуса определять его перемещения при общем изгибе на основе технической теории изгиба балок.

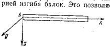


Рис. 13.4

Для применения этой теории необходимо поверхностные и объемные силы, фактически действующие на судно (силы тяжести судовых конструкций и грузов, давления забортной воды, силы инерции), привести к некоторой погонной нагрузке, условно приложенной к оси балки-корпуса. Такое приведение выполняется на основе вычисления в каждом сечении корпуса равнодействующей упомянутых выше объемных и поверхностных сил.

Совместим ось x с осью балки, а оси y и z с главными центральными осями поперечных сечений (рис. 13.4). Начало координат расположим в ЦТ одного из торцов балки.

Приведенные внешние нагрузки. На балку в общем случае могут действовать следующие нагрузки: на боковую поверхность — поверхностные нагрузки $P_{\nu x}(x, s)$, $P_{\nu y}(x, s)$, $P_{\nu z}(x, s)$ (ν — внешняя нормаль к боковой поверхности, s — криволинейная координата по периметру контура поперечного сечения); на торцевые поверхности ($x = \text{const}$) — нагрузки $P_{xx}(y, z)$, $P_{xy}(y, z)$, $P_{xz}(y, z)$.

Распределенные по площади боковой поверхности нагрузки можно привести к статически эквивалентным распределенным вдоль оси балки (погонным) нагрузкам

$$\left.\begin{aligned} q_x(x) &= \oint_s P_{\nu x}(x, s)\,ds, \quad q_y(x) = \oint_s P_{\nu y}(x, s)\,ds; \\ q_z(x) &= \oint_s P_{\nu z}(x, s)\,ds; \\ m_x(x) &= \oint_s [yP_{\nu x}(x, s) - zP_{\nu y}(x, s)]\,ds; \\ m_y(x) &= \oint_s zP_{\nu x}(x, s)\,ds; \quad m_z(x) = \oint_s yP_{\nu x}(x, s)\,ds, \end{aligned}\right| \tag{13.1}$$

где $q_x(x)$, $q_y(x)$, $q_z(x)$ — погонные интенсивности внешней осевой силы, внешней поперечной нагрузки в плоскости oxy и внешней поперечной нагрузки в плоскости oxz соответственно; $m_x(x)$, $m_y(x)$, $m_z(x)$ — погонные интенсивности внешних распределенных моментов относительно осей x, y и z соответственно. Интегралы в выражениях (13.1) берутся по всему периметру контура поперечного сечения.

Если на балку действуют объемные силы $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$, то они также могут быть учтены при определении погонных усилий (13.1) добавлением соответствующих интегралов по площади сечения балки.

Погонные нагрузки или моменты, распределенные на небольшом участке длины балки dc и имеющие большую интенсивность, можно заменить статически эквивалентными сосредоточенными силами или моментами, приложенными в сечении c_i под ЦТ соответствующих эпюр нагрузок на участке dc:

$$\left.\begin{aligned} T_i &= \int_{c_i}^{c_i+dc} q_x(x)\,dx; \quad P_{yi} = \int_{c_i}^{c_i+dc} q_y(x)\,dx; \\ P_{zi} &= \int_{c_i}^{c_i+dc} q_z(x)\,dx; \quad \mathfrak{M}_{xi} = \int_{c_i}^{c_i+dc} m_x(x)\,dx; \\ \mathfrak{M}_{yi} &= \int_{c_i}^{c_i+dc} m_y(x)\,dx; \quad \mathfrak{M}_{zi} = \int_{c_i}^{c_i+dc} m_z(x)\,dx, \end{aligned}\right| \tag{13.2}$$

где T_i, P_{yi}, P_{zi} — сосредоточенные осевая и поперечные по направлениям осей y и z силы, приложенные к ЦТ сечения балки $x = x_i$; $\mathfrak{M}_{xi}$, $\mathfrak{M}_{yi}$, $\mathfrak{M}_{zi}$ — сосредоточенные моменты относительно осей x, y и z соответственно, приложенные в сечении $x = x_i$.

Поверхностные нагрузки на каждом торце балки также приводятся к шести сосредоточенным усилиям, приложенным в центрах тяжести торцов. Для этих усилий можно сохранить обозначения, принятые в выражении (13.2), подразумевая под i индекс соответствующего торца.

Рассмотренная выше система нагрузок вызывает следующие виды общей деформации балки:

растяжение-сжатие вдоль оси x от действия нагрузок T_i, $q_x(x)$;

изгиб в плоскости oxy от нагрузок $q_y(x)$, P_{yi}, $m_z(x)$, $\mathfrak{M}_{zi}$;

изгиб в плоскости oxz от действия нагрузок $q_z(x)$, p_{zi}, $m_y(x)$, $\mathfrak{M}_{yi}$;

кручение вокруг оси x от действия крутящих моментов $m_{x_0}(x)$ и $\mathfrak{M}_{x_0}(x)$, вычисляемых так же, как и $m_x(x)$, $\mathfrak{M}_x(x)$, но относительно центра кручения сечения.

Кроме указанных деформаций будут возникать также местные деформации, зависящие от действительного характера распределения нагрузок P, P, P, X, Y, Z по поверхности и объему балки. Если балка является относительно жестким упругим телом, что и подразумевается в этой главе, то перечисленные выше ее деформации не будут оказывать взаимного влияния друг на друга и их можно рассматривать раздельно. Суммарное напряженно-деформированное состояние определится как сумма состояний, возникающих при каждом виде деформации[1].

Кручение и растяжение-сжатие уже были изучены ранее (см. гл. 5, т. 1). При отыскании местных деформаций и напряжений в тонкостенных балках можно пользоваться методами и результатами теории упругости (например, действием сил на плоскость, полуплоскость), а также теории изгиба пластин (см. гл. 21). Следует признать, что достаточно строгое решение для определения местных напряжений и деформаций получить оказывается не так легко. Правда, в этом и нет особой необходимости, если учесть, что местные напряжения и деформации, как правило, незначительны и локализуются в небольших областях.

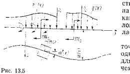


Рис. 13.5

Общий изгиб балки достаточно рассмотреть только для одной из плоскостей, например для плоскости oxz, в связи с чем индексы y и z в обозначениях нагрузок $q_z(x)$, P_{zi}, $\mathfrak{M}_{yi}$, $m_y(x)$ можно опустить. На рис. 13.5 показаны эти нагрузки, где балка схематически изображена одной линией, соответствующей положению ее оси.

Примем следующее правило знаков для внешних нагрузок: распределенные и сосредоточенные поперечные силы будут считаться положительными, если они действуют по направлению оси z, а распределенные и сосредоточенные моменты, — если они действуют по направлению движения часовой стрелки.

При деформации ось балки превращается в кривую линию, которая называется *упругой линией балки*. Перемещения точек оси балки по направлению оси z обозначим через $w(x)$, углы наклона упругой линии к оси x — через $w'(x)$, а углы поворота поперечных сечений, положительные при повороте по часовой стрелке, — через $\alpha(x)$. При искривлении поперечного сечения обозначение $\alpha(x)$ будем применять по отношению к некоторому среднему углу поворота поперечного сечения, определение которого будет дано позже.

Коэффициенты жесткости и податливости упругих заделок и опор. Действующие на балку внешние силы можно разделить на две группы: активные силы, характер и величина которых заданы, и реактивные силы или реакции, возникающие между балкой и ее опорными конструкциями, или просто опорами. Реактивные силы удерживают балку в равновесии и их определение является одной из задач расчета.

[1] Случай, когда изгиб и растяжение-сжатие балки (сложный изгиб) нельзя рассматривать раздельно, будет описан в гл. 19.

В дальнейшем будем полагать, что опора имеет контакт с балкой на очень малом участке ее длины. Без большой погрешности можно считать, что такая опора является точечной и связана только с одним из поперечных сечений балки, которое называется *опорным*.

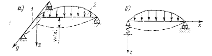


Рис. 13.6

Роль опорной конструкции, изображенной на рис. 13.6, *а*, играет однопролетная балка *1*, с которой шарнирно скреплена основная балка *2*. Такая опорная конструкция, препятствующая свободному перемещению опорного сечения основной балки, именуется *упругой опорой*. Ее условное изображение приведено на рис. 13.6, *б*.

Опорная конструкция рис. 13.7, *а*, наоборот, не оказывая сопротивления перемещению опорного конца балки, препятствует его повороту. Такая опорная конструкция называется *упругой заделкой*. Ее условное изображение приведено на рис. 13.7, *б*.

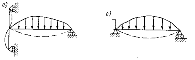


Рис. 13.7

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь так называемых линейно деформируемых упругих опор и упругих заделок.

Просадка упругой опоры w_i (рис. 13.8, *а*) линейно зависит от реакции той же опоры R_i:

$$w_i = A_i R_i;\quad A_i = w_i|_{R_i=1};\quad R_i = K_i w_i,\quad K_i = R_i|_{w_i=1},\qquad (13.3)$$

где A_i — коэффициент податливости упругой опоры; $K_i = 1/A_i$ — коэффициент жесткости упругой опоры.

Угол поворота упругой заделки α_i (рис. 13.8, б) линейно зависит от реактивного момента $\mathfrak{M}_i$:

$$\alpha_i = \mathfrak{A}_i \mathfrak{M}_i, \quad \mathfrak{A}_i = \alpha_i \big|_{\mathfrak{M}_i=1}; \quad \mathfrak{M}_i = L_i \alpha_i, \tag{13.3'}$$

где $\mathfrak{A}_i$ — коэффициент податливости упругой заделки; $L_i = 1/\mathfrak{A}_i$ — коэффициент жесткости упругой заделки.

При изгибе в поперечных сечениях балки возникают внутренние силы упругости, которые уравновешивают всю нагрузку (активную и реактивную), действующую на любую мысленно отсеченную данным сечением часть балки. Проекцию вектора внутренних сил упругости на ось x будем называть *осевой силой* балки и обозначать буквой T или $T(x)$, а на плоскость, перпендикулярную оси x, — *перерезывающей силой* и обозначать буквой N или $N(x)$. Момент всех внутренних сил упругости, действующих в поперечном сечении балки, относительно центральной оси поперечного сечения, будем называть *изгибающим моментом* и обозначать буквой M или $M(x)$. Если все силы (активные и реактивные), изгибающие балку, действуют в одной плоскости xoz, то перерезывающая сила действует параллельно оси z, а изгибающий момент определяется относительно оси y.

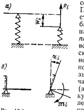


Рис. 13.8

Перерезывающая сила равна по значению и обратна по направлению проекции на ось z равнодействующей всех сил (включая реактивные), действующих на любую из двух частей балки

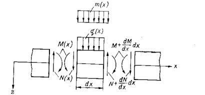


Рис. 13.9

по одну сторону от рассматриваемого поперечного сечения. Изгибающий момент равен суммарному моменту от всей внешней нагрузки и реактивных усилий, приложенных к любой из двух частей балки, относительно оси y данного поперечного сечения. Для

разных частей балки в одном поперечном сечении перерезывающие силы и изгибающие моменты, очевидно, равны и противоположно направлены, что предусмотрено при установлении правила знаков. Перерезывающая сила считается положительной, когда действие левой отсеченной части балки на правую часть эквивалентно положительной сосредоточенной силе, и наоборот. Изгибающий момент считается положительным в том случае, если он стремится выгнуть балку выпуклостью в сторону отрицательного направления оси z. Положительные направления перерезывающих сил и изгибающих моментов показаны на рис. 13.9.

§ 13.2. Основные гипотезы и зависимости технической теории изгиба балок

Из курса сопротивления материалов известно, что техническая теория изгиба балок основывается на так называемой гипотезе плоских сечений и предположении, что каждое продольное волокно балки находится в одноосном напряженном состоянии. Напомним, что согласно гипотезе плоских сечений точки балки, расположенные в одной плоскости, перпендикулярной оси балки до ее деформации, остаются в одной плоскости и после деформации, причем эта последняя плоскость перпендикулярна к изогнутой оси балки. Гипотеза плоских сечений строго выполняется лишь при чистом изгибе. Однако ее распространяют и на общий случай изгиба, т. е. изгиба при действии в сечениях балки перерезывающих сил.

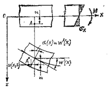


Рис. 13.10

Определение нормальных напряжений. В соответствии с гипотезой плоских сечений перемещение точек произвольного поперечного сечения вдоль оси x, которое, как и раньше, обозначим буквой u, можно записать в виде (рис. 13.10)

$$u(x, z) = -zw'(x). \tag{13.4}$$

При записи формулы (13.4) принято, что перемещение u точек, лежащих на оси $x (z = 0)$, равно нулю. Справедливость такого предположения в дальнейшем будет обоснована. Перемещению $u(x, z)$ соответствует линейная деформация продольного волокна

$$\varepsilon(x, z) = \frac{\partial u}{\partial x} = -zw''(x). \tag{13.5}$$

Нормальные напряжения в продольном волокне на основании закона Гука будут равны

$$\sigma_x(x, z) = E\varepsilon_x = -Ezw''(x). \tag{13.6}$$

Как видно, для балки из однородного материала нормальные напряжения при изгибе по высоте сечения изменяются по линейному закону.

Поскольку по условию задачи осевая сила отсутствует, равнодействующая напряжений σ_x по всей площади поперечного сечения F должна равняться нулю:

$$\iint_F \sigma_x\, dF = -Ew''(x)\int_F z\, dF = 0. \tag{13.7}$$

Из условия (13.7) следует, что статический момент площади поперечного сечения балки относительно оси y равен нулю, а следовательно, нейтральная ось проходит через ЦТ поперечного сечения.

Момент внутренних сил упругости (напряжений), действующих в поперечном сечении, относительно оси y по определению является изгибающим моментом M (см. рис. 13.10):

$$M = -\int_F \sigma_x z\, dF = Ew''\int_F z^2\, dF,$$

или

$$M(x) = EIw''(x), \tag{13.8}$$

где $I = \int_F z^2 dF$ — момент инерции площади поперечного сечения относительно оси y.

Определяя величину $w''(x)$ из уравнения (13.8) и подставляя ее в формулу (13.6), получаем выражение для определения нормальных напряжений

$$\sigma_x(x, z) = -M(x)\, z/I(x). \tag{13.9}$$

Как следует из выражений (13.5) и (13.9), линейные деформации и нормальные напряжения в направлении оси балки во всех точках прямой $z = 0$ равны нулю. Поэтому указанная прямая (при принятых обозначениях ось y), проходящая через ЦТ площади поперечного сечения перпендикулярно плоскости изгиба, называется *нейтральной осью* поперечного сечения. Поверхность, в которой лежат нейтральные оси всех поперечных сечений, именуются *нейтральной поверхностью* или *нейтральным слоем балки*.

Зависимости Журавского — Шведлера. Между изгибающим моментом, перерезывающей силой и интенсивностью внешней нагрузки существует связь, выражаемая теоремой Журавского — Шведлера.

Рассмотрим равновесие выделенного из балки элемента длиной dx, загруженного поперечной нагрузкой интенсивностью $q(x)$, моментной нагрузкой интенсивностью $m(x)$, изгибающими моментами и перерезывающими силами, заменяющими действие отсеченных левой и правой частей балки в местах разреза (см. рис. 13.9).

Если в левом сечении выделенного элемента действуют перерезывающая сила N и изгибающий момент M, то в правом сечении, которое отстоит от левого на расстоянии dx, каждое из этих

усилий получит приращение и их значения соответственно будут равны $N + \frac{dN}{dx}dx$; $M + \frac{dM}{dx}dx$.

Приравнивая нулю главный вектор и главный момент всех сил, действующих на выделенный элемент балки, получаем

$$N - \left(N + \frac{dN}{dx}dx\right) + q\, dx = 0;$$

$$M - \left(M + \frac{dM}{dx}dx\right) + N dx + m(x)\, dx + \frac{q\, dx^2}{2} = 0.$$

При $dx \to 0$ эти уравнения приводят к равенствам $\frac{dN}{dx} = q$; $\frac{dM}{dx} = N + m$. Распределенная моментная нагрузка $m(x)$ в практических задачах не встречается, поэтому полученные зависимости в дальнейшем будем использовать в виде

$$\frac{dN(x)}{dx} = q(x); \tag{13.10}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = N(x). \tag{13.11}$$

Из выражений (13.10) и (13.11) следует

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x). \tag{13.12}$$

Полученные зависимости (13.10)—(13.12) и определяют собою содержание теоремы Журавского — Шведлера.

Интегрированием выражений (13.10) и (13.11) можно получить общие выражения для перерезывающей силы и изгибающего момента в произвольном сечении x по длине балки:

$$N(x) = \int_0^x q(x)\, dx + N_0; \tag{13.13}$$

$$M(x) = \int_0^x \int_0^x q(x)\, dx\, dx + N_0(x) + M_0, \tag{13.14}$$

где N_0 и M_0 — значения перерезывающей силы и изгибающего момента балки в сечении $x = 0$.

Формулами (13.13) и (13.14) удобно пользоваться при построении эпюр $N(x)$ и $M(x)$ для статически определимых однопролетных балок, т. е. таких балок, у которых реакции опорных закреплений могут быть найдены на основании уравнений статики.

§ 13.3. Дифференциальное уравнение изгиба балок и его интегрирование

Дифференциальное уравнение изгиба непризматической балки с изгибной жесткостью $EI(x)$, загруженной поперечной нагрузкой интенсивностью $q(x)$, получим, если из зависимости Журавского — Шведлера (13.12) исключим с помощью (13.8) момент $M(x)$:

$$[EI(x)\,w''(x)]'' = q(x). \tag{13.15}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (13.15) последовательно четыре раза по x, можно получить выражения для определения элементов изгиба рассматриваемой балки:

$$\left.\begin{aligned}
&[EI(x)\,w''(x)]' = \frac{dM(x)}{dx} = N(x) = A + \int_0^x q(\zeta)\,d\zeta;\\
&EI(x)\,w''(x) = M(x) = B + \int_0^x N(\zeta)\,d\zeta = Ax + B + \\
&\qquad + \int_0^x \int_0^{\zeta_1} q(\zeta)\,d\zeta\,d\zeta_1;\\
&w'(x) = \alpha(x) = C + \int_0^x \frac{M(\zeta)}{EI(\zeta)}\,d\zeta = A\int_0^x \frac{\zeta\,d\zeta}{EI(\zeta)} + B\int_0^x \frac{d\zeta}{EI(\zeta)} + \\
&\qquad + C + \int_0^x \frac{d\zeta_2}{EI(\zeta_2)} \int_0^{\zeta_2} \frac{d\zeta_1}{EI(\zeta_1)} \int_0^{\zeta_1} q(\zeta)\,d\zeta;\\
&w(x) = D + \int_0^x \alpha(\zeta)\,d\zeta = A\int_0^x d\zeta_1 \int_0^x \frac{\zeta\,d\zeta}{EI(\zeta)} + B\int_0^x d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} \frac{d\zeta}{EI(\zeta)} + \\
&\qquad + Cx + D + \int_0^x d\zeta_3 \int_0^{\zeta_3} \frac{d\zeta_2}{EI(\zeta_2)} \int_0^{\zeta_2} d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} q(\zeta)\,d\zeta.
\end{aligned}\right\} \tag{13.16}$$

Здесь A, B, C и D — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий на концах балки ($x = 0$, $x = l$), т. е. из условий закрепления ее опорных сечений.

Постоянные интегрирования имеют вполне определенный физический смысл. В самом деле, если в зависимостях (13.16) положить $x = 0$, то получим

$$A = N(0) = N_0;\quad B = M(0) = M_0;$$
$$C = w'(0) = \theta_0;\quad D = w(0) = w_0, \tag{13.17}$$

где w_0, θ_0, M_0 и N_0 — соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и перерезывающая сила на левом конце балки ($x = 0$).

Граничные условия. Поскольку произвольных постоянных в общем выражении для $w(x)$ (13.16) четыре, то на каждом конце балки должны быть заданы по два условия, которые характеризовали бы условия закрепления ее опорных сечений.

Выпишем граничные условия для ряда наиболее характерных условий закрепления опорных сечений балки.

Ш а р н и р н а я о п о р а. Конец балки шарнирно оперт на жесткую несмещающуюся опору. Естественно, что при этом прогиб и

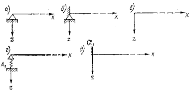


Рис. 13.11

момент в сечении балки над опорой будут равны нулю: $w = 0$, $M = EIw'' = 0$, или

$$w = w'' = 0. \tag{13.18}$$

Условное изображение такой опоры приведено на рис. 13.11, *а*.

Ж е с т к а я з а д е л к а н а ж е с т к о й о п о р е (рис. 13.11, *б*). Прогиб и угол поворота сечения балки над опорой равны нулю:

$$w = 0,\quad \alpha = w' = 0. \tag{13.19}$$

С в о б о д н ы й т о р е ц б а л к и (рис. 13.11, *в*). Момент и перерезывающая сила в опорном сечении балки равны нулю:

$$M = EIw'' = 0,\quad N = (EIw'')' = 0, \tag{13.20}$$

или, если принять во внимание, что $EI \neq 0$,

$$w'' = 0,\quad w''' = 0.$$

У п р у г а я о п о р а (рис. 13.11, *г*). Пусть коэффициент податливости упругой опоры на левом конце балки ($x = 0$) равен A_1. Тогда согласно зависимости (13.3)

$$w(0) = A_1 R(0). \tag{13.20'}$$

Реакция $R(0)$ на левом конце балки с учетом правила знаков будет равна по значению перерезывающей силе, но противоположна по знаку:

$$R(0) = -(EIw'')'_{x=0}$$

что позволяет зависимость (13.20′) переписать в следующем виде

$$w(0) = -A_1 (EIw'')'_{x=0}.$$

Второе граничное условие получим, приравнивая нулю опорный момент:

$$M(0) = EIw'' = 0, \quad w'' = 0.$$

Таким образом, окончательно для упругой опоры на левом конце балки граничные условия примут такой вид:

$$\text{при } x = 0 \quad w'' = 0; \quad w = -A_1 (EIw'')'. \qquad (13.21)$$

У п р у г а я з а д е л к а (рис. 13.11, *д*). Пусть коэффициент податливости упругой заделки левого торца балки ($x = 0$) равен $\mathfrak{A}_1$. Тогда согласно формуле (13.3)

$$w'(0) = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{M}(0), \qquad (13.21')$$

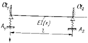


Рис. 13.12

где реактивный момент $\mathfrak{M}$ с учетом правила знаков будет равен изгибающему моменту в рассматриваемом сечении балки:

$$\mathfrak{M} = M(0) = EIw''(0). \qquad (13.21'')$$

С учетом выражения (13.21) из зависимости (13.21′) получим одно из граничных условий для упругой заделки на левом торце балки:

$$w'(0) = \mathfrak{A}_1 EIw''(0). \qquad (13.22)$$

Приравнивая нулю перерезывающую силу на левом конце балки, получим для рассматриваемого типа опорного устройства второе недостающее граничное условие

$$(EIw'')' = 0. \qquad (13.22')$$

О б а к о н ц а б а л к и у п р у г о о п е р т ы и у п р у г о з а д е л а н ы (рис. 13.12). Граничные условия балки для рассматриваемого наиболее общего случая могут быть найдены с помощью рассуждений, аналогичных ранее приведенным. В результате для левого торца балки получим два следующих граничных условия:

$$\left.\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad & w'(0) = \mathfrak{A}_1 EI(0)\, w''(0); \\ & w(0) = -A_1 [EI(0)\, w''(0)]'; \end{aligned}\right\} \qquad (13.23)$$

для правого торца балки:

$$\left.\begin{aligned} \text{при } x = l \quad & w'(l) = -\mathfrak{A}_2 EI(l)\, w''(l); \\ & w(l) = A_2 [EI(l)\, w''(l)]'. \end{aligned}\right\} \qquad (13.24)$$

Итак, для каждого конкретного случая закреплений торцевых сечений балки можно выписать четыре (по два для каждого торца) граничных условия. Внося в эти граничные условия элементы изгиба балки из выражений (13.16), получим систему четырех неоднородных алгебраических уравнений с неизвестными A, B, C и D. Решая эту систему и подставляя найденные при этом постоянные интегрирования A, B, C и D в зависимости (13.16), найдем окончательные формулы, с помощью которых сможем определить интересующие нас элементы изгиба в любом из сечений по длине балки.

Пример 1. Определить элементы изгиба призматической свободно опертой балки, загруженной сосредоточенными моментами M_0 и M_1 по концам и равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = \text{const}$ (рис. 13.13).

Р е ш е н и е. Концевые моменты целесообразно учесть при формулировке граничных условий:

$$\left.\begin{aligned} \text{при} \quad x = 0 \quad & w = 0, \quad EIw'' = M_0; \\ \text{при} \quad x = l \quad & w = 0, \quad EIw'' = M_1. \end{aligned}\right\} \qquad (13.24')$$

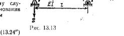


Рис. 13.13

Применительно к рассматриваемому случаю ($E_I = \text{const}$, $q = \text{const}$) на основании последней зависимости (13.16) получаем

$$w(x) = Ax^3/(6EI) + Bx^2/(2EI) + \\ + Cx + D + qx^4/(24EI). \qquad (13.24'')$$

Внося выписанное выражение для $w(x)$ в граничные условия (13.24′), получим четыре алгебраических уравнения, из совместного решения которых найдем значения A, B, C и D:

$$\left.\begin{aligned} & A = (M_1 + M_0)/l - ql/2; \quad B = -M_0; \\ & C = ql^3/(24EI) - M_1 l/(6EI) + M_0 l/(3EI); \quad D = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13.24''')$$

Подставляя (13.24‴) в (13.24″), получим окончательное выражение для упругой линии рассматриваемой балки:

$$w(x) = [ql^4/(24EI)]\,[(x/l)^4 - 2(x/l)^3 + x/l] + [M_0 l^2/(6EI)] \times \\ \times [(x/l)^3 - 3(x/l)^2 + 2x/l] - [M_1 l^2/(6EI)]\,[-(x/l)^3 + x/l]. \qquad (13.25)$$

Располагая выражением (13.25), можем определить любые интересующие нас элементы изгиба, в частности углы поворота опорных сечений, которые нам потребуются в дальнейшем:

$$\left.\begin{aligned} & w'(0) = M_0 l/(3EI) - M_1 l/(6EI) + ql^3/(24EI); \\ & w'(l) = -M_0 l/(6EI) + M_1 l/(3EI) - ql^3/(24EI). \end{aligned}\right\} \qquad (13.26)$$

§ 13.4. Метод начальных параметров

Полученными в § 13.3 формулами (13.16) для вычисления элементов изгиба удобно пользоваться лишь в случае действия на балку непрерывной распределенной нагрузки $q(x)$. При приложении к балке сосредоточенных сил и моментов, т. е. нагрузок, имеющих вид разрывных функций, более удобно для расчета изгиба однопролетных балок применять так называемый метод начальных параметров.

Пусть на балку в сечении $x = c_1$ действует сосредоточенная сила P. Выражение для нагрузки $q(x)$ в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$q(x) = P\delta(x - c_1), \qquad (13.27)$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака.

Как известно, функция $\delta(x)$ обращается в нуль при $x \neq 0$ и в бесконечность при $x=0$. При этом соблюдается дополнительное условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1. \qquad (13.28)$$

В соответствии с этими свойствами δ-функции

$$\int_{0}^{x} P\delta(x-c_1)\,dx = P\sigma(x-c_1), \qquad (13.29)$$

где $\sigma(x-c_1)=\sigma_{c_1}$ — функция единичного скачка:

$$\sigma_{c_1} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < c_1; \\ 1 & \text{при} \quad x \geqslant c_1. \end{cases} \qquad (13.30)$$

Выпишем дополнительно, основываясь на свойстве функции единичного скачка, ряд необходимых для дальнейшего изложения зависимостей:

$$q(x)\,\sigma_c = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant c; \\ q(x) & \text{при} \quad x > c; \end{cases} \qquad (13.31)$$

$$\int_{0}^{x} q(\zeta)\,\sigma_c\,d\zeta = \sigma_c \int_{c}^{x} q(\zeta)\,d\zeta. \qquad (13.32)$$

Если в сечении $x=c_2$ действует на балку сосредоточенный изгибающий момент $\mathfrak{M}$ (рис. 13.14, *а*), то его можно представить

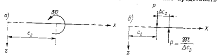


Рис. 13.14

в виде двух направленных в противоположные стороны сосредоточенных сил $P=\mathfrak{M}/\Delta c_2$, приложенных в сечениях $x=c_2$ и $x=c_2+\Delta c_2$ (рис. 13.14, *б*). При этом $\Delta c_2 \to 0$. Интенсивность поперечной нагрузки, соответствующей действию на балку этих двух сил, согласно (13.27) равна

$$q(x) = (\mathfrak{M}/\Delta c_2)\,\delta(x-c_2) - (\mathfrak{M}/\Delta c_2)\,\delta(x-c_2-\Delta c_2). \qquad (13.33)$$

Переходя в полученном выражении к пределу при $\Delta c_2 \to 0$, получим

$$q(x) = \mathfrak{M}\delta'(x-c_2), \qquad (13.34)$$

где в качестве производной δ-функции понимается предел

$$\delta'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [\delta(x+\Delta x) - \delta(x)]/\Delta x. \qquad (13.35)$$

Теперь вновь вернемся к задаче интегрирования дифференциального уравнения изгиба непризматической балки (13.15) для общего случая устройства опор и нагрузки. Схема балки, обозначения коэффициентов податливости упругих опор и задслок, а также нагрузки разных типов (по одной положительно направленной) изображены на рис. 13.15.

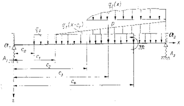


Рис. 13.15

Если в состав нагрузки входит не по одной, как показано на рис. 13.15, а по несколько простых нагрузок (например, несколько сосредоточенных в разных сечениях сил и моментов), то каждой из них присваивается дополнительный индекс, которым также отмечается соответствующая координата сечения.

Еще одно указание к составлению общего выражения для интенсивности поперечной нагрузки: любая распределенная нагрузка, начав действовать в некотором сечении, должна действовать по тому же закону до правого конца балки $x=l$, не прерываясь. Ну а как быть, если на самом деле заданная поперечная нагрузка действует только, например, до сечения $x=c$ (рис. 13.16)? В этом случае действие заданной нагрузки следует продлить до правого конца балки, с одновременным приложением с сечения $x=c$ нагрузки той же интенсивности, но обратного направления. Подобное изменение нагрузки не влияет на общий изгиб балки, так как дополнительные нагрузки (на рисунке показанные пунктиром) взаимно компенсируются.

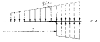


Рис. 13.16

Воспользовавшись свойствами δ-функции и функции единичного скачка [см. зависимости (13.27)—(13.32)], нетрудно написать общее выражение для интенсивности поперечной нагрузки, действующей на балку, изображенную на рис. 13.15. Тогда дифференциальное уравнение изгиба (13.15) для рассматриваемого случая загрузки балки примет вид

$$[EI(x)\,w''(x)]'' = q(x) =$$
$$= q_0\sigma + q_1(x-c_1)\,\sigma_{c_1} + q_2(x)\,\sigma_{c_2} + P\delta(x-c_3) + \mathfrak{M}\delta'(x-c_4).$$

В литературе по строительной механике корабля наличие функции единичного скачка σ_c принято изображать специальным знаком $\|_c 1$ (введен И. Г. Бубновым). С его использованием, например, выражения (13.29) и (13.32) перепишутся в виде

$$P\sigma(x-c) = \|_c P; \qquad \int_0^x q(\zeta)\,\sigma_c\,d\zeta = \|_c \int_c^x q(\zeta)\,d\zeta. \tag{13.36}$$

Таким образом, знак $\|_c$ показывает, что член, стоящий за ним, принимается во внимание лишь при $x \geqslant c$.

Воспользовавшись знаком $\|_c$, последнему уравнению можно придать такой вид

$$[EI(x)\,w''(x)]'' = \|_{c_0} q_0 + \|_{c_1} q_1(x-c_1) + \|_{c_2} q_2(x) + P\delta(x-c_3) + \mathfrak{M}\delta'(x-c_4). \tag{13.37}$$

Интегрируя уравнение (13.37) последовательно четыре раза по x и используя при этом зависимости (13.29), (13.31) и (13.32), получим необходимые формулы для определения всех элементов изгиба рассматриваемой балки

$$\left.\begin{aligned}
&[EI(x)\,w''(x)]' = N(x) = A + \int_0^x q(\zeta)\,d\zeta = A + \|_{c_0} q_0(x-c_0) + \\
&\quad + \|_{c_1} q_1(x-c_1)^2/2 + \|_{c_2}\int_{c_2}^x q_2(\zeta)\,d\zeta + \|_{c_3} P + \underline{\mathfrak{M}\delta(x-c_4)};\\
&EI(x)\,w''(x) = M(x) = B + \int_0^x N(\zeta)\,d\zeta = B + Ax + \\
&\quad + \|_{c_0} q_0(x-c_0)^2/2 + \|_{c_1} q_1(x-c_1)^3/6 + \|_{c_2}\int_{c_2}^x d\zeta_1 \int_{c_2}^{\zeta_1} q_2(\zeta)\,d\zeta + \\
&\quad + \|_{c_3} P(x-c_3) + \|_{c_4}\mathfrak{M};\\
&w'(x) = \alpha(x) = C + \int_0^x \frac{M(\zeta)}{EI(\zeta)}\,d\zeta = C + B\int_0^x \frac{d\zeta}{EI(\zeta)} + \\
&\quad + A\int_0^x \frac{\zeta\,d\zeta}{EI(\zeta)} + \|_{c_0}\frac{q_0}{2}\int_{c_0}^x \frac{(\zeta-c_0)^2}{EI(\zeta)}\,d\zeta + \|_{c_1}\frac{q_1}{6}\int_0^x \frac{(\zeta-c_1)^3}{EI(\zeta)}\,d\zeta + \\
&\quad + \|_{c_2}\int_{c_2}^x \frac{d\zeta_2}{EI(\zeta_2)}\int_{c_2}^{\zeta_2} d\zeta_1 \int_{c_2}^{\zeta_1} q_2(\zeta)\,d\zeta + \|_{c_3} P\int_{c_3}^x \frac{(\zeta-c_3)}{EI(\zeta)}\,d\zeta + \\
&\quad + \|_{c_4}\mathfrak{M}\int_{c_4}^x \frac{d\zeta}{EI(\zeta)};
\end{aligned}\right| \tag{13.38}$$

$$\left.\begin{aligned}
&w(x) = D + \int_0^x \alpha(x)\,dx = D + Cx + B\int_0^x d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} \frac{d\zeta}{EI(\zeta)} + \\
&\quad + A\int_0^x d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} \frac{\zeta\,d\zeta}{EI(\zeta)} + \|_{c_0}\frac{q_0}{2}\int_{c_0}^x d\zeta_1 \int_{c_0}^{\zeta_1} \frac{(\zeta-c_0)^2\,d\zeta}{EI(\zeta)} + \\
&\quad + \|_{c_1}\frac{q_1}{6}\int_{c_1}^x d\zeta_1 \int_{c_1}^{\zeta_1} \frac{(\zeta-c_1)^3}{EI(\zeta)}\,d\zeta + \|_{c_2}\int_{c_2}^x d\zeta_3 \int_{c_2}^{\zeta_3} \frac{d\zeta_2}{EI(\zeta_2)} \times \\
&\quad \times \int_{c_2}^{\zeta_2} d\zeta_1 \int_{c_2}^{\zeta_1} q_2(\zeta)\,d\zeta + \|_{c_3} P\int_{c_3}^x d\zeta_1 \int_{c_3}^{\zeta_1} \frac{(\zeta-c_3)}{EI(\zeta)}\,d\zeta + \\
&\quad + \|_{c_4}\mathfrak{M}\int_{c_4}^x d\zeta_1 \int_{c_4}^{\zeta_1} \frac{d\zeta}{EI(\zeta)}.
\end{aligned}\right|$$

Для призматической балки $I(x) = I = \text{const}$ выражения (13.38) для элементов изгиба упрощаются.

Выше при выводе выражения (13.33) для интенсивности поперечной нагрузки, соответствующей действию на балку сосредоточенного момента, предполагалось, что момент создается двумя бесконечно близкими вертикальными силами (см. рис. 13.14, *б*). Такие моменты принято называть *моментами первого рода*. При уменьшении расстояния Δc_z между вертикальными силами сами силы $P = \mathfrak{M}/\Delta c_z$ растут беспредельно, что должно было бы вызвать беспредельный рост в этом сечении касательных напряжений τ_{xz}. Отсюда можно заключить, что к балке сосредоточенного момента первого рода приложить нельзя: реальные балки могут выдержать внешние сосредоточенные моменты лишь в том случае, если последние создаются двумя продольными силами. Такие моменты называются *моментами второго рода*. В силу вышеупомянутого как внешние сосредоточенные моменты, так и реактивные моменты в опорных сечениях следует относить к разряду моментов второго рода.

Очевидно, что при прохождении через сечения приложения моментов второго рода эпюра перерезывающих сил не может получить каких-либо изменений и, следовательно, в первом выражении (13.38) для $N(x)$ последний подчеркнутый член следует опустить.

В выписанные выше выражения для элементов изгиба непризматической балки (13.38) входят в качестве неизвестных величин четыре постоянных интегрирования A, B, C и D. Для определения значений этих постоянных необходимо подчинить полученное решение (13.38) граничным условиям рассматриваемой задачи.

Момент инерции $I(x)$ для непризматической балки и интенсивность поперечной нагрузки $q(x)$ могут задаваться как в аналитической форме, так и в форме графиков или таблиц значений этих величин для ряда сечений по длине балки. В последнем случае вычисление интегралов с переменным верхним пределом или интегралов по всей длине балки в выражениях (13.38) производится численными методами (методом трапеций, методом Гаусса и т. п.).

Изложенный выше метод определения элементов изгиба однопролетных балок называется методом начальных параметров. Характерной его особенностью является то, что при любой нагрузке балки решение $w(x)$ содержит только четыре постоянных интегрирования — начальные параметры (13.17). Заметим, что известная простота промежуточных выкладок и окончательной формы записи выражений для элементов изгиба была получена благодаря использованию свойств δ-функции Дирака и функции единичного скачка $\sigma_c = \sigma(x-c) = \|_c 1$.

Наличие по существу готовых выражений для элементов изгиба (13.37) для непризматических и (13.38) для призматических балок (еще не окончательных из-за присутствия в них неизвестных постоянных интегрирования) приводит к тому, что метод начальных параметров можно считать одним из наиболее эффективных в практическом отношении методов расчета однопролетных балок на изгиб.

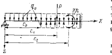


Рис. 13.17

Пример 2. Для призматической балки, изображенной на рис. 13.17, требуется с помощью метода начальных параметров определить упругую линию.

Решение. В методе начальных параметров любая распределенная нагрузка не должна обрываться до конца балки ($x = l$). Поэтому нагрузку q_0 необходимо продлить до конца балки, одновременно приложив с сечения $x_1 = c_0$ нагрузку той же интенсивности, но противоположного знака. Эти дополнительные изменения в нагрузке приведены на рис. 13.17 пунктиром.

Воспользовавшись последней зависимостью из (13.38), выпишем применительно к рассматриваемой балке выражение для ее упругой линии:

$$w(x) = \frac{Ax^3}{6EI} + \frac{Bx^2}{2EI} + Cx + D + \frac{q_0x^4}{24EI} - \|_{c_0} \frac{q_0(x-c_0)^4}{24EI} + $$
$$+ \|_{c_1} \frac{P(x-c_1)^3}{6EI} + \|_{c_2} \frac{\mathfrak{M}(x-c_2)^2}{2EI}. \tag{13.39}$$

Постоянные интегрирования A, B, C и D определяются из граничных условий балки:

$$\left.\begin{aligned} &w(0) = D = 0; \quad w''(0) = B = 0; \\ &w(l) = \frac{Al^3}{6EI} + \frac{Bl^2}{2EI} + Cl + D + \frac{q_0l^4}{24EI} - \frac{q_0(l-c_0)^4}{24EI} + \\ &\quad + \frac{P(l-c_1)^3}{6EI} + \frac{\mathfrak{M}(l-c_2)^2}{2EI} = 0; \\ &w'(l) = \frac{Al^2}{2EI} + \frac{Bl}{EI} + c + \frac{q_0l^3}{6EI} - \frac{q_0(l-c_0)^3}{6EI} + \\ &\quad + \frac{P(l-c_1)^2}{2EI} + \frac{\mathfrak{M}(l-c_2)}{EI} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13.40}$$

Подставляя найденные из решения полученной системы алгебраических уравнений (13.40) неизвестные A, B, C и D в формулу (13.39), получаем окончательное выражение для упругой линии рассматриваемой балки.

§ 13.5. Принцип наложения и справочные таблицы изгиба балок

Структура полученного в § 13.4 общего решения показывает, что все элементы изгиба балки линейно зависят от внешних сил. Каждой внешней силе в выражениях для элементов изгиба соответствует отдельное слагаемое, представляющее произведение силы в первой степени на коэффициент, зависящий от упругих и геометрических характеристик балки и ее опор. Указанный коэффициент не зависит от того, действуют ли на балку кроме рассматриваемой другие силы или нет. Следовательно, в случае действия на балку совокупности внешних сил элементы изгиба можно определить как сумму соответствующих элементов изгиба, вычисленных в предположении, что каждая сила действует в отдельности. Указанное свойство упругой системы называется принципом независимости действия сил или принципом наложения, с которым мы уже познакомились в разд. II при описании свойств линейно деформируемых упругих систем. Принцип наложения существенно упрощает расчет и, что особенно важно, позволяет пользоваться таблицами элементов изгиба балок, составленными для типичных простых нагрузок. Если на балку действует произвольная комбинация таких нагрузок одновременно, то элементы изгиба определяются суммированием табличных значений для соответствующих частных случаев. Следует помнить, что этот принцип справедлив только в том случае, если балка, включая ее опоры, является линейно деформируемой упругой системой.

В справочнике [51, т. I, гл. 5] приведены таблицы элементов изгиба некоторых наиболее часто встречающихся однопролетных призматических статически определимых и статически неопределимых балок. Этими таблицами и рекомендуется пользоваться в практических расчетах балок. Так, например, для определения элементов изгиба призматической балки, изображенной на рис. 13.18, *а*, необходимо с помощью этих таблиц предварительно найти соответствующие элементы изгиба для балок, изображенных на рис. 13.18, *б*, а затем полученные результаты сложить.

Раскрытие статической неопределимости балок. Способ раскрытия статической неопределимости, т. е. определения лишних реакций с помощью таблиц изгиба статически определимых балок, состоит в следующем. Необходимо установить степень статической неопределимости балки и лишние закрепления. Лишние закрепления мысленно отбрасывают и их действие заменяют соответствующими реактивными усилиями: для упругой или жесткой заделки моментом $\mathfrak{M}_i$, для упругой или жесткой опоры реакцией R_i. Из условий равновесия узла соединения балки и опорной конструкции следует, что такие же по значению, но противоположные по направлению усилия действуют на опорную конструкцию.

Для полученной статически определимой балки с помощью таблиц (или расчета) находят перемещения тех сечений, которые связаны с отброшенными опорами: для заделки — угол поворота, сечения α_i, для опоры — прогиб w_i. В выражения для элементов изгиба наряду с заданными внешними силами войдут все лишние реакции в виде буквенных обозначений, поскольку их численные значения еще неизвестны.

Далее составляют выражения для перемещений опорных конструкций, которые, как известно, равны произведению реактивного усилия (R или $\mathfrak{M}$) на соответствующий коэффициент податливости (A или $\mathfrak{A}$) с учетом правила знаков и принятого направления реактивных усилий.

Приравнивая соответствующие перемещения отброшенных закреплений и опорных сечений балки, которые по условиям работы конструкции должны быть, очевидно, одинаковыми, получаем уравнения совместности деформаций. Число

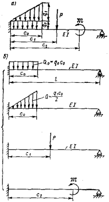


Рис. 13.18

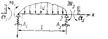


Рис. 13.19

таких уравнений равно числу отброшенных закреплений или числу лишних реакций.

После определения лишних реакций балку рассматривают как статически определимую, на которую в сечениях, где были отброшены опорные закрепления, действуют известные усилия, включаемые в состав внешней нагрузки.

Для пояснения изложенного раскроем статическую неопределимость призматической однопролетной балки с упругими опорами и упругими заделками по концам при действии произвольной нагрузки Q (рис. 13.19). Балка дважды статически неопределимая. В качестве лишних опорных закреплений удобно принять упругие заделки, которые отбрасываются и замсняются моментами $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_j$, как показано на рис. 13.19. Такие же по значению,

но обратные по направлению моменты действуют со стороны балки на заделки.

Углы поворота опорных сечений балки будут равны

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i(0) &= \alpha_i(Q) + \frac{\mathfrak{M}_i l}{3EI} - \frac{\mathfrak{M}_j l}{6EI} + \frac{1}{l}(w_j - w_i);\\ \alpha_j(l) &= \alpha_j(Q) - \frac{\mathfrak{M}_i l}{6EI} + \frac{\mathfrak{M}_j l}{3EI} + \frac{1}{l}(w_j - w_i).\end{aligned}\right\} \qquad (13.41)$$

Здесь $\alpha_i(Q)$ и $\alpha_j(Q)$ — углы поворота опорных сечений свободно опертой на жесткие опоры балки, загруженной нагрузкой Q; w_i и w_j — перемещения опорных сечений, равные

$$w_i = A_i R_i = A_i [R_i(Q) - (\mathfrak{M}_i + \mathfrak{M}_j)/l];$$
$$w_j = A_j R_j = A_j [R_j(Q) + (\mathfrak{M}_i + \mathfrak{M}_j)/l],$$

где $R_i(Q)$ и $R_j(Q)$ — реакции от нагрузки Q при свободном опирании балки на концах.

Приравнивая углы поворота опорных сечений балки углам поворота упругих заделок, получаем два следующих уравнения:

$$\alpha_i = -\mathfrak{A}_i \mathfrak{M}_i; \quad \alpha_j = -\mathfrak{A}_j \mathfrak{M}_j, \qquad (13.41')$$

из которых и определяем лишние реакции $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_j$.

Если необходимо учесть влияние сдвига, то при вычислении углов поворота от опорных моментов по формулам (13.41) следует воспользоваться зависимостями § 13.7.

После решения уравнений (13.41') и определения $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_j$ балка рассматривается как свободно опертая на упругие опоры, загруженная кроме нагрузки Q моментами $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_j$ в опорных сечениях.

§ 13.6. Определение касательных напряжений при изгибе балок

Гипотеза плоских сечений, положенная в основу теории изгиба балок, предполагает, что при изгибе балки поперечные сечения остаются плоскими и перпендикулярными оси балки, т. е. деформации сдвига между направлениями x и z (рассматривается изгиб балки в плоскости xoz) в каждой точке балки равны нулю. Это обстоятельство делает невозможным определение касательных напряжений, возникающих при изгибе балки, при помощи закона Гука, как это было сделано в § 13.2 при нахождении нормальных напряжений.

Данному факту можно дать и такое физическое толкование. Гипотеза плоских сечений в известной мере эквивалентна предположению о том, что сдвиговая жесткость балки $G\omega = \infty$. Это, естественно, приводит при любой конечной системе внешних нагрузок к нулевым значениям деформации сдвига $\gamma_{xz} = 0$. При этих условиях использование закона Гука для определения касательных напряжений τ_{xz} дает неопределенность вида $\tau_{xz} = G\omega\gamma_{xz} = \infty \cdot 0$.

Между тем очевидно, что касательные напряжения существуют. Они должны быть статически эквивалентны действующей в сечении балки перерезывающей силе, так же как нормальные напряжения в сечении балки статически эквивалентны изгибающему моменту.

Обычно поперечные сечения судовых балок являются тонкостенными профилями. Как и в задаче о кручении тонкостенных многосвязных профилей (см. гл. 5), полные касательные напряжения в таких профилях по значению можно считать приблизительно постоянными по толщине элемента профиля и направленными параллельно его средней линии s. В соответствии с общим правилом эти напряжения обозначаются τ_{xs} или просто τ_s.

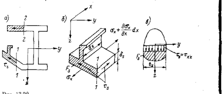


Рис. 13.20

Односвязный профиль. Рассмотрим открытый тонкостенный профиль. При этом расположим оси координат, как показано на рис. 13.20, *а*, совместив ось y с нейтральной осью поперечного сечения профиля. Для определения касательных напряжений, действующих в поперечном сечении профиля, выделим из него продольным разрезом по линии толщины $1—1$ и двумя бесконечно близкими поперечными сечениями элемент и рассмотрим условия его статического равновесия (выделенный элемент в увеличенном масштабе показан на рис. 13.20, *б*).

Поперечное сечение и пересекающаяся с ним по какой-либо линии площадка продольного разреза образуют взаимно перпендикулярные площадки. Поэтому в силу закона парности в продольных площадках будут действовать такие же касательные напряжения, как и на линии пересечения в поперечном сечении (см. рис. 13.20, *б*). В поперечных сечениях выделенного элемента кроме касательных напряжений действуют еще нормальные напряжения от изгиба, изменяющиеся по длине балки в соответствии с изменением изгибающего момента.

Уравнение равновесия отсеченного элемента профиля в проекциях на ось x запишется так:

$$\iint_{F_s} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\, dx\right) dF - \iint_{F_s} \sigma_x\, dF + \tau_s \delta_s\, dx = 0,$$

где F_s — площадь поперечного сечения отсеченной части профиля; δ_s — толщина профиля в месте разреза $1—1$.

Подставляя в это выражение σ_x согласно формуле (13.9) и предполагая, что $I(x) = I = \text{const}$, после очевидных преобразований с учетом зависимости (13.11) получим известную формулу И. Д. Журавского для определения касательных напряжений в односвязном поперечном сечении:

$$\tau_s = N(x)\, S_y / [I(x)\, \delta_s]. \tag{13.42}$$

Здесь $N(x)$ — перерезывающая сила в рассматриваемом сечении при изгибе балки в плоскости xoz; $S_y = \iint_{F_s} z\, dF$ — статический момент площади отсеченной части F_s относительно нейтральной оси y; $I(x)$ — момент инерции площади всего сечения профиля относительно нейтральной оси.

В формулу (13.42) можно подставлять статический момент любой из двух частей поперечного сечения, на которые оно делится линией толщины $1—1$, проведенной через точку определения напряжений τ_s. Статические моменты указанных частей равны и имеют разные знаки, так как суммарный статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси равен нулю. В результате с учетом правила знаков для $N(x)$ и S_y приходим к следующему правилу знаков для касательных напряжений τ_s в поперечном сечении той части балки, которая расположена в стороне больших значений x: положительное напряжение τ_s направлено в сторону той части поперечного сечения, статический момент которой подставлялся в формулу (13.42). На рис. 13.20, *а* в точках 1 и 2 показаны направления касательных напряжений, соответствующие их положительным значениям при подстановке статических моментов соответствующих заштрихованных площадей в выражение (13.42).

Формулу (13.42) применяют в расчетной практике и для многосвязных поперечных сечений (рис. 13.20, *в*). При этом определяют основной, параллельный перерезывающей силе, компонент τ_{xz} полного касательного напряжения в предположении постоянства его значения по ширине сечения (по линии, параллельной нейтральной оси).

На рис. 13.21 изображены эпюры касательных напряжений для некоторых типичных сечений.

У тонкостенных балок, состоящих из стенки в плоскости изгиба и развитых верхнего и нижнего поясков, касательные напряжения мало изменяются по высоте стенки и среднее их значение можно определить по формуле

$$\tau_{\text{ср}} = N/\omega, \tag{13.43}$$

где ω — площадь поперечного сечения стенки.

Формула (13.42) является точной только для призматических балок [так как предполагалось, что $I(x) = I = \text{const}$]. Однако практически ее можно применять и для непризматических балок, если изменение сечений происходит плавно, при малых углах наклона образующих к оси балки.

Можно показать, что проекция равнодействующей всех касательных напряжений, вычисленных по выражению (13.42), в сечении профиля на ось z равна перерезывающей силе $N_z(x)$, а проекция равнодействующей напряжений на ось y будет равна перерезывающей силе $N_y(x)$ [при выводе формулы (13.42) предполагалось $N_y = 0$].

При изгибе несимметричного профиля, такого, например, как показан на рис. 13.22, момент, который создается потоком касательных напряжений τ_s в сечении профиля относительно начала

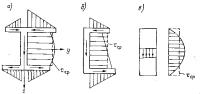


Рис. 13.21

координат (совпадающего с ЦТ сечения), не равен нулю. Поэтому, если плоскость действия нагрузки совпадает с плоскостью xoz, то изгиб балки с несимметричным профилем сечения будет сопровождаться ее закручиванием. В плоскости сечения такой балки существует точка, относительно которой момент касательных усилий от изгиба равен нулю. Эта точка (точка A на рис. 13.22) называется *центром изгиба*. Ясно, что если плоскость действия поперечной нагрузки параллельна плоскости xoz и проходит через линию центров изгиба поперечных сечений балки, изгиб балки в плоскости xoz не сопровождается ее закручиванием вокруг оси x.

Вопрос определения координат центра изгиба излагается в гл. 18.

Многосвязный профиль. Поперечное сечение корпуса судна, включающего в себя обшивку днища, второго дна, бортов, настил палуб и платформ, полотнища продольных переборок, продольные ребра, стрингеры, карлингсы, в общем случае представляет собой многосвязный тонкостенный профиль.

Изложим содержание и последовательность операций для определения касательных напряжений в тонкостенном многосвязном профиле при изгибе. При этом, не нарушая общности окон-

чательного результата, можно ограничиться рассмотрением изгиба однозамкнутого несимметричного профиля (рис. 13.23, *а*).

С помощью продольного разреза, например, по сечению *1—1* двухсвязный контур превращается в односвязный. Разрез образует две продольные торцевые площадки, относящиеся к ветвям профиля по обе стороны от разреза (рис. 13.23, *б*). К продольным площадкам вдоль плоскости разреза прикладываем неизвестные погонные усилия $T_1(x)$, направленные в противоположные стороны. Величина этих усилий определяется из условия равенства продольных перемещений противоположных кромок вдоль линии разреза. Это условие, исключающее возможность относительного

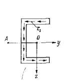


Рис. 13.22

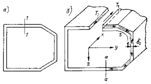


Рис. 13.23

смещения продольных кромок вдоль линии условного разреза, называют *условием сплошности* или *условием неразрывности деформаций*.

Обратимся теперь к определению продольных перемещений точек сечения профиля. Эти перемещения происходят в результате деформаций сдвига и линейных деформаций изгиба. Поскольку линейные деформации от изгиба, полученного разрезом открытого профиля, подчиняются закону плоских сечений (13.5), они не могут вызвать относительных смещений по краям условного разреза и их можно не учитывать. Таким образом, следует учитывать лишь перемещения, обусловленные деформацией сдвига.

Любым дополнительным разрезом *а—а* полученный ранее односвязный профиль (см. рис. 13.23, *б*) рассекается на две части. Для любой из этих частей можно составить уравнение равновесия всех сил по оси x, в которое войдет и неизвестное усилие $T_1(x)$. Из такого уравнения равновесия после несложных преобразований можно получить формулу для определения касательного усилия в любом продольном разрезе рассматриваемого стержня, положение которого на контуре определяется криволинейной координатой s:

$$T_s = T_1 + \tau_s^* \delta_s, \qquad (13.44)$$

где τ_s^* — касательное напряжение в сечении контура с координатой s, вычисляемое по формуле (13.42) для открытого профиля, изображенного на рис. 13.23, *б*; δ_s — толщина профиля в сечении контура с координатой *s*.

Пользуясь законом Гука и уравнениями Коши в координатах *x* и *s*, можно записать

$$\gamma_{xs} = \frac{\tau_s}{G} = \frac{T_s}{\delta_s G} = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial x}. \qquad (13.45)$$

Здесь u_s и v_s — перемещения точки контура с координатой *s* в направлении координат *s* и *x* соответственно. Из уравнения (13.45) получаем формулу для определения продольных перемещений точек контура

$$u_s = \frac{1}{G}\int_0^s \frac{T_s}{\delta_s}\,ds - \int_0^s \frac{\partial v_s}{\partial x}\,ds + u_0,$$

где u_0 — продольное перемещение для точки контура $s=0$ (сечения *1—1*).

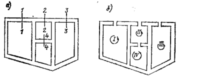


Рис. 13.24

При полном обходе контура в силу указанного выше условия сплошности приращение продольного перемещения равно нулю:

$$\oint \frac{\partial u_s}{\partial s}\,ds = \frac{1}{G}\oint \frac{T_s}{\delta_s}\,ds - \oint \frac{\partial v_s}{\partial x}\,ds = 0. \qquad (13.46)$$

В этом выражении интеграл берется по всему контуру.

При отсутствии кручения профиля (поворота поперечного сечения относительно оси балки) $\oint \frac{\partial v_s}{\partial x}\,ds = 0$, условие (13.46) упрощается и принимает вид

$$\oint \frac{T_s}{\delta_s}\,ds = 0. \qquad (13.47)$$

Отсюда, если учесть выражение (13.44) для T_s, получим формулу для определения неизвестного усилия T_1:

$$T_1 = -\oint \tau_s^* ds \Big/ \oint \frac{ds}{\delta_s}. \qquad (13.48)$$

Внося найденное усилие T_1 в формулу (13.44), получаем усилие T_s, а следовательно, и значения искомых касательных напряжений от изгиба для рассматриваемого двухсвязного профиля:

$$\tau_s = T_s/\delta_s. \qquad (13.49)$$

При расчете более сложных, с несколькими замкнутыми контурами, многосвязных профилей необходимо вводить уже несколько продольных разрезов, превращающих заданный профиль в открытый (рис. 13.24, *а*). В плоскости каждого из этих разрезов вводятся статически неопределимые касательные погонные усилия T_i ($i = 1, 2, 3, 4$), для определения которых могут быть написаны условия неразрывности деформаций по типу уравнений (13.47) на каждом из замкнутых контуров поперечного сечения (рис. 13.24, *б*).

§ 13.7. Изгиб балок с учетом деформаций сдвига

В предыдущих параграфах изложены методы определения перемещений балки, основанные на допущении об отсутствии деформаций сдвига, которое является следствием предположения о бесконечной жесткости балки на сдвиг ($G\omega = \infty$). Возникающие при этом перемещения являются результатом деформаций (растяжения-сжатия) продольных волокон балки, вызванных действием только нормальных напряжений. Эти перемещения в дальнейшем будем называть перемещениями от изгиба и обозначать через $w_1(x)$, $u_1(x, z)$, $w_1'(x) = \alpha_1(x)$.

Однако кроме нормальных напряжений $\sigma(x, z)$ в поперечном сечении балки при ее изгибе в плоскости *xoz* действуют касательные напряжения τ_{xz}, которые для балки с конечной жесткостью на сдвиг ($G\omega \neq \infty$) вызывают конечные деформации сдвига и соответствующие им перемещения от сдвига. Эти напряжения будем обозначать через $w_2(x)$, $u_2(x, z)$, w_2', $\alpha_2(x)$. В последнем случае вследствие угловой деформации угол поворота поперечного сечения не равен углу наклона упругой линии балки. Суммарные перемещения определятся по формулам

$$\left.\begin{aligned} &w(x) = w_1(x) + w_2(x); \quad u(x, z) = u_1(x, z) + u_2(x, z); \\ &w'(x) = w_1'(x) + w_2'(x); \quad \alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x) = w_1' + \alpha_2. \end{aligned}\right\} \qquad (13.50)$$

Характер изменения касательных напряжений по высоте балки с поясками и без поясков показан на рис. 13.25. Изменение касательных напряжений по высоте сечения балки вызывает появление соответствующих деформаций сдвига $\gamma_{xz} = \tau_{xz}/G$ и связанного с этим искажения плоскости поперечного сечения балки — его депланацию.

Как видно из эпюр касательных напряжений (см. рис. 13.25), наибольшие углы сдвигов будут у нейтральной оси балки, а наименьшие — в крайних точках по высоте.

При разработке приближенного метода определения перемещений от сдвига предполагается, что в плоскости изгиба балки есть вертикальная стенка, воспринимающая всю перерезывающую силу.

Касательные напряжения (рис. 13.25) и соответствующие им деформации сдвига распределяются по высоте стенки в общем случае неравномерно, вследствие чего поперечные сечения стенки будут искривляться (см. рис. 13.26).

Влияние сдвига на перемещения особенно сильно проявляется у судовых балок с развитыми поясками (стрингеры, флоры днищевого перекрытия с двойным дном), поскольку такие балки обладают повышенной изгибной жесткостью EI при относительно малой

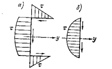


Рис. 13.25

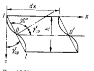


Рис. 13.26

жесткости на сдвиг $G\omega$. Для таких балок указанные выше неравномерности распределения касательных напряжений и сдвиговых деформаций по высоте стенки незначительны, поэтому можно принять

$$\tau_{xz} \approx \tau_{\text{ср}} = -N(x)/\omega(x); \quad \gamma_{xz} \approx \gamma_{\text{ср}} = -N(x)/G\omega(x), \quad (13.51)$$

где $N(x)$ и $\omega(x)$ — перерезывающая сила и площадь поперечного сечения стенки балки в сечении x. Знак «минус» в правой части формул (13.51) введен в связи с учетом правила знаков для τ_{xz}, γ_{xz} и N_z (рис. 13.27).

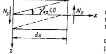


Рис. 13.27

Выражения (13.51) лежат в основе излагаемого ниже приближенного метода определения перемещений от сдвига.

Перемещение u_2, возникающее вследствие дополнительного поворота сечения балки на угол α_2 при сдвиге определится очевидной зависимостью $u_2(x, z) = -z\alpha_2(x)$. Поскольку это перемещение вызвано только касательными напряжениями, то соответствующая ему линейная деформация продольных волокон должна быть равна нулю:

$$\varepsilon_x = \partial u_2/\partial x = -z\frac{d\alpha_2(x)}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad \alpha_2(x) = \alpha_2 = \text{const}. \quad (13.52)$$

Таким образом, все поперечные сечения при сдвиге поворачиваются на один и тот же угол.

На основании зависимостей Коши

$$\gamma_{xz} = \gamma_{\text{ср}} = \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} = w_2'(x) - \alpha_2. \quad (13.53)$$

Приравнивая правые части (13.51) и (13.53), находим

$$w_2'(x) = \alpha_2 - N(x)/G\omega(x). \quad (13.54)$$

Интегрируя (13.54), получаем следующее выражение для дополнительного прогиба от сдвига:

$$w_2(x) = w_2(0) + \alpha_2 x - \int_0^x N(\xi)/G\omega(\xi)\,d\xi. \quad (13.55)$$

Далее в основу расчета будут положены такие соображения.

При расчете статически определимых балок учет перемещений от сдвига не влияет на реакции опор, а следовательно, и на перерезывающие силы и изгибающие моменты. Поэтому элементы изгиба $w_1(x)$, $\alpha_1(x) = w_1'(x)$, $M(x) = EI(x)w_1''(x)$, $N(x) = [EI(x)w_1''(x)]'$ определяются теми же зависимостями (13.16) или (13.38), что и в случае, когда учет сдвига не производится. Перерезывающая сила используется затем для определения перемещения от сдвига $w_2(x)$.

В случае статически неопределимых балок учет деформаций сдвига вызывает изменение опорных реакций и, следовательно, изгибающих моментов и перерезывающих сил, а также перемещений опорных сечений (при податливых опорах и заделках). Элементы изгиба и здесь следует определять выражениями (13.16) или (13.38), заменив в них $w(x)$ на $w_1(x)$, но постоянные интегрирования A, B, C и D должны определяться из граничных условий, в которых учтены дополнительные перемещения концевых сечений, вызванные сдвигом.

Граничные условия (13.23) — (13.24) балки, оба конца которой упруго оперты и упруго заделаны, при учете деформаций сдвига перепишутся в таком виде

$$\left.\begin{aligned} x = 0:\ \ \alpha(0) = \mathfrak{a}_1 M(0) \ \text{или}\ \ w_1'(0) + \alpha_2 = \mathfrak{A}_1 EIw_1''(0);\\ w(0) = -A_1 N(0) \ \text{или}\ \ w_1(0) + w_2(0) = -A_1[EIw''(0)]'; \end{aligned}\right\} \quad (13.56)$$

$$\left.\begin{aligned} x = l:\ \ \alpha(l) = -\mathfrak{a}_2 M(l) \ \text{или}\ \ w_1'(l) + \alpha_2 = -\mathfrak{A}_2 EIw_1''(l);\\ w(l) = A_2 N(l) \ \text{или}\ \ w_1(l) + w_2(l) = A_2[EIw''(l)]'. \end{aligned}\right\} \quad (13.57)$$

Поскольку добавление к сдвиговому перемещению $w_2(x)$ некоторой линейной величины $a + bx$ при одновременном вычитании той же величины из выражения для $w_1(x)$ не может изменить значения основных элементов изгиба $w(x)$, $\alpha(x)$, $M(x)$ и $N(x)$, представляется целесообразным полные перемещения опорных сечений как статически определимых, так и статически неопределимых балок целиком учитывать в составе прогиба от изгиба, т. е. при составлении граничных условий принимать:

$$w_1(0) = w(0); \quad w_1(l) = w(l), \quad (13.58)$$

что равносильно предположению

$$w_2(0) = w_2(l) = 0. \qquad (13.58')$$

Подчиняя выражение (13.55) условиям (13.58′), находим

$$\alpha_2 = 1/l \int_0^l [N(\xi)/G\omega(\xi)]\, d\xi; \qquad (13.59)$$

$$w_2(x) = x/l \int_0^l [N(\xi)/G\omega(\xi)]\, d\xi - \int_0^x [N(\xi)/G\omega(\xi)]\, d\xi. \qquad (13.60)$$

При $\omega(x) = \omega = \mathrm{const}$ полученные выше зависимости можно упростить. Для этого, используя принцип наложения, представим значения $N(x)$ и $M(x)$ в виде двух слагаемых:

$$N(x) = N_q(x) + N_M(x), \quad M(x) = M_q(x) + M_M(x), \qquad (13.61)$$

где $N_q(x)$ и $M_q(x)$ — составляющие, вызванные действием на балку лишь поперечных нагрузок;

$N_M(x)$ и $M_M(x)$ — то же от пролетных и опорных моментов $\mathfrak{M}_i$, $M(0)$, $M(l)$.

Понятно, что при действии поперечных нагрузок балка работает как бы в условиях свободного опирания на жесткие опоры по концам (независимо от их действительного опирания).

Тогда будут справедливы следующие зависимости:

$$M_q(x) = \int_0^x N_q(\xi)\, d\xi; \quad M_q(0) = M_q(l) = 0; \qquad (13.62)$$

$$N_M(x) = 1/l \left[- M(0) + M(l) - \sum_i \mathfrak{M}_i \right]. \qquad (13.63)$$

Подставляя в формулы (13.59) и (13.60) выражения (13.61) и учитывая при преобразованиях зависимости (13.62) и (13.63), получаем

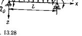


Рис. 13.28

$$w_2(x) = - M_q(x)/G\omega, \quad \alpha_2 = = \frac{1}{lG\omega} \left[- M(0) + M(l) - \sum_i \mathfrak{M}_i \right]. \qquad (13.64)$$

Из выражения для α_2 следует, что действующие на балку моменты (включая опорные) вызывают лишь поворот поперечных сечений на угол α_2 и не влияют на прогиб от сдвига $w_2(x)$.

Пример 3. Для балки, изображенной на рис. 13.28, найти стрелку прогиба от сдвига и углы поворота опорных сечений.

Решение. Для рассматриваемой балки

$$N_q(x) = - ql/2 + qx; \quad N_M = - (M_1 + M_0)/l; \qquad (13.65)$$

$$M_q(x) = - qlx/2 + qx^2/2; \quad M_M(x) = - M_0 [1 - (x/l)] + M_1 x/l. \qquad (13.66)$$

Тогда по формулам (13.64) найдем

$$w_2(x) = \frac{1}{G\omega} \frac{ql^2}{2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right); \quad \alpha_2 = \frac{1}{lG\omega}(M_0 + M_1). \qquad (13.67)$$

Для определения углов поворота опорных сечений воспользуемся формулой (13.50):

$$\alpha(0) = w_1'(0) + \alpha_2; \quad \alpha(l) = w_1'(l) + \alpha_2. \qquad (13.68)$$

Внося сюда найденное выше значение α_2, а также выражения (13.26) для углов поворота $w_1'(0)$ и $w_1'(l)$, окончательно полагаем

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \frac{ql^3}{24EI} + \frac{M_0 l}{3EI}\left(1 + \frac{3EI}{G\omega l^2}\right) - \frac{M_1 l}{6EI}\left(1 - \frac{6EI}{G\omega l^2}\right), \\ \alpha(l) &= -\frac{ql^3}{24EI} - \frac{M_0 l}{6EI}\left(1 - \frac{6EI}{G\omega l^2}\right) + \frac{M_1 l}{3EI}\left(1 + \frac{3EI}{G\omega l^2}\right). \end{aligned} \qquad (13.69)$$

Для сварных и катаных профилей, приваренных к обшивке корпуса, влияние сдвига на их прогиб невелико и в расчетах не учитывается. Для таких профилей влияние сдвига на прогиб достаточно хорошо оценивается величиной отношения длины к высоте балки (l/h). С увеличением этого отношения влияние сдвига уменьшается. При отношении $l/h \geqslant 10$ этим влиянием можно пренебречь.

Сдвиг следует учитывать при расчете коротких и высоких балок, таких, например, какие встречаются в конструкциях различных фундаментов и подкреплений.

§ 13.8. Многопролетные неразрезные балки на независимых упругих опорах. Теорема пяти моментов

Неразрезные балки, опирающиеся на несколько упругих или жестких опор, являются наиболее простыми и вместе с тем весьма распространенными статически неопределимыми балочными системами, имеющими широкое применение в различных инженерных сооружениях и в том числе в конструкции судового корпуса. Например, киль танкера опирается на несколько флоров, не обладающих достаточной жесткостью для создания жестких опор. То же относится к бортовому стрингеру, упругими опорами для которого являются шпангоуты, к корпусу судна в целом, поставленному в док на несколько упругих клеток, к мачте, поддерживаемой тросами такелажа и т. п. Еще более распространены в судовых конструкциях неразрезные балки на жестких опорах.

Определение понятия независимой линейно деформируемой упругой опоры, а также ее упругих характеристик — коэффициента жесткости и податливости — уже было дано в § 13.1. Просадка каждой из таких опор пропорциональна ее реакции и не зависит от посадок других опор.

Неразрезные балки относятся к категории статически неопределимых балочных систем: их внутренние усилия (изгибающие моменты и перерезывающие силы) в отдельных сечениях балки не могут быть определены на основании лишь уравнений статики.

Расчет такой статически неопределимой системы требует прежде всего ее преобразования в статически определимую, для чего необходимо найти так называемые лишние неизвестные.

Лишними неизвестными называются такие реакции опор, моменты в заделках или внутренние усилия (изгибающие моменты и перерезывающие силы) в отдельных сечениях балок системы, определение которых превращает рассматриваемую балочную систему в одну или несколько статически определимых систем. Число лишних неизвестных определяет степень статической неопределимости системы. Так, например, балка, изображенная на

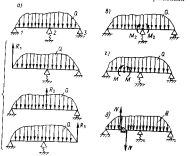


Рис. 13.29

рис. 13.29, *а*, имеет всего лишь одну лишнюю неизвестную реакцию любой из трех опор (рис. 13.29, *б*). В качестве лишней неизвестной можно было бы принять: изгибающий момент над средней опорой (рис. 13.29, *в*), так как его определение обращает рассматриваемую балку в две статически определимые двухопорные балки; внутренний момент (рис. 13.29, *г*) или перерезывающую силу (рис. 13.29, *д*) в любом из сечений по длине балки. При введении в качестве лишней неизвестной перерезывающей силы N, в том же сечении (см. рис. 13.29, *д*) вводится так называемый шарнир скольжения, обеспечивающий непрерывность угловых перемещений примыкающих к нему сечений балки.

Итак, выбор состава лишних неизвестных для статически неопределимых систем не однозначен. Забегая несколько вперед, укажем, что этот состав, по существу, обусловливает и содержание метода их определения, т. е. метода раскрытия статической не-

определимости рассматриваемой упругой системы. Если далее заметить, что каждый из этих методов имеет свои сильные и слабые стороны, то станут понятны причины, заставляющие расчетчика уделять особое внимание выбору состава лишних неизвестных.

При раскрытии статической неопределимости неразрезных многопролетных балок (рис. 13.30, *а*) наиболее естественным, на первый взгляд, было бы принять в качестве основных неизвестных реакции всех промежуточных опор и определить их из условия равенства прогибов балки, нагруженной заданной внешней нагрузкой и неизвестными реакциями опор R_i (рис. 13.30, *б*), просадкам соответствующих промежуточных упругих опор w_i:

$$w_i = w_i^0(Q) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ij} R_j$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad (13.70)$$

где $w_i^0(Q)$ — прогиб в i-м сечении балки (рис. 13.30, *в*), загруженной заданной внешней нагрузкой Q; α_{ij} — коэффициент влияния, численно равный перемещению i-го сечения балки (место расположения i-й опоры), загруженной в j-м сечении сосредоточенной силой $R_j = 1$ (рис. 13.30, *г*).

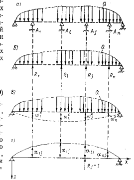


Рис. 13.30

Принимая во внимание, что для независимой линейно деформируемой опоры $w_i = A_i R_i$ (A_i — коэффициент податливости опоры), из (13.70) получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения реакций R_i:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha^{*}_{ij} R_j + w_i^0(Q) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n); \qquad (13.71)$$

$$\alpha^{*}_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} & \text{при} \quad i \neq j; \\ \alpha_{ii} = A_i & \text{при} \quad i = j. \end{cases}$$

Изложенный выше метод расчета статически неопределимых систем, при котором за основные неизвестные принимают внутренние усилия (в рассмотренном выше случае реакции опорных конструкций), называется *методом сил*.

После определения всех неизвестных реакций внутренние усилия в любом поперечном сечении неразрезной балки можно было бы найти простым расчетом однопролетной балки с использованием таблиц изгиба балок. Однако этот способ таит в себе определенные вычислительные трудности, связанные с необходимостью отыскания стрелок прогиба рассматриваемой балки над всеми ее промежуточными сечениями и с решением системы уравнений (13.71), каждое из которых содержит все неизвестные. Решение такой системы уравнений при относительно большом числе промежуточных опор (более четырех-пяти) требует вычисления малой разности близких величин, каждая из которых найдена с определенной погрешностью, следствием чего обычно является потеря точности всего расчета. Недостатком подобной схемы расчета является также и то, что изгибающие моменты в сечениях балки,

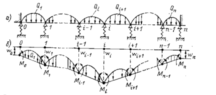


Рис. 13.31

необходимые для определения напряжений с последующей оценкой прочности, вычисляются на последнем этапе в результате алгебраического суммирования изгибающих моментов в однопролетной балке (см. рис. 13.30, б) от внешней нагрузки Q и найденных реакций опор R_i ($i=1, 2, \dots, n$). Это снова приводит к определению малых разностей близких величин и, как следствие, к увеличению погрешности расчета.

При выборе расчетной схемы (метода расчета) нужно всегда руководствоваться следующими основными соображениями:

1) в качестве основных неизвестных должны быть приняты те неизвестные величины, которые являются целью расчета;

2) составление разрешающей системы уравнений для определения этих неизвестных должно быть по возможности простым;

3) желательно, чтобы в каждое из уравнений системы входило как можно меньше неизвестных;

4) при решении уравнений не должно появляться малых разностей близких величин.

Всем этим требованиям в наибольшей степени удовлетворяет расчетная схема, известная под названием *теоремы трех моментов* для расчета неразрезных балок, лежащих на жестких опорах, или *теоремы пяти моментов* для расчета балок на упругих опорах.

Эта расчетная схема основана на том, что неразрезная балка во всех ее опорных сечениях мысленно разрезается и действие друг на друга двух смежных пролетов балки в местах разреза заменяется статически неопределимыми опорными моментами M_i (i — номер опоры). Естественно, что эти моменты для смежных пролетов в их общем сечении равны по значениям и обратны по направлению, что следует из условия равновесия (рис. 13.31). Опорный момент считается положительным, если его действие вызывает изгиб соответствующего пролета балки выпуклостью вверх. Положительные направления опорных моментов показаны на рис. 13.31, *б*. Каждый из пролетов рассматриваемой n-пролетной неразрезной балки, опертой на независимые линейно деформируемые упругие опоры (рис. 13.31, *а*), оказывается загруженным по концам неизвестными узловыми моментами и заданной пролетной нагрузкой (рис. 13.31, *б*).

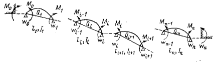


Рис. 13.32

В результате нагружения балки все ее опоры получают определенные смещения w_i ($i=0, 1, \dots, n$) (см. рис. 13.31, *б*).

Для определения неизвестных опорных моментов M_i ($i=0, 1, \dots, n$) необходимо составить условия неразрывности углов поворота неразрезной балки над каждой из ее опор (уравнения неразрывности угловых перемещений). Число уравнений равно числу промежуточных опор плюс число заделок на концевых опорах балки.

Введем следующие дополнительные обозначения: l_i — пролет балки между опорами $i-1$ и i; I_i — главный момент инерции поперечного сечения балки в том же пролете; Q_i — полная нагрузка того же пролета; $\alpha_i(Q_i)$ — угол поворота от поперечной нагрузки Q_i в правом опорном сечении i-го пролета, вычисленный в предположении, что оба конца этого участка балки свободно оперты на жесткие опоры; $\alpha_i(Q_{i+1})$ — то же для левого опорного сечения $i+1$-го пролета от нагрузки в этом пролете Q_{i+1}; A_i — коэффициент податливости i-й упругой опоры; $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_n$ — коэффициенты податливости упругих заделок на левом и правом концах неразрезной балки.

Выделим из балки крайний левый, два смежных средних и крайний правый пролеты (рис. 13.32) и приравняем углы поворота крайних опорных сечений балок соответствующим углам поворота упругих заделок, а углы поворота двух средних промежуточных участков балки на их общей опоре друг другу.

Поскольку каждый из рассматриваемых пролетов балки загружен по концам моментами, имеет смещение концевых опор и загружен пролетной нагрузкой, суммарный угол поворота на опорах может быть получен в виде суммы углов поворота от каждого из указанных факторов в отдельности. Как и ранее, углы поворота сечений считаются положительными при повороте по часовой стрелке. Используя выражения (13.26) и приведенные выше обозначения, получим следующую систему уравнений неразрывности угловых перемещений:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_0 M_0 = -\frac{M_0 l_1}{3EI_1} - \frac{M_1 l_1}{6EI_1} + \alpha_0(Q_1) + \frac{w_1 - w_0}{l_1};\\
&\frac{M_{i-1} l_i}{6EI_i} + \frac{M_i l_i}{3EI_i} + \alpha_i(Q_i) + \frac{w_i - w_{i-1}}{l_i} =\\
&= -\frac{M_i l_{i+1}}{6EI_{i+1}} - \frac{M_{i+1} l_{i+1}}{6EI_{i+1}} + \alpha_i(Q_{i+1}) + \frac{w_{i+1} - w_i}{l_{i+1}}\\
&(i = \overline{1,\ n-1});\\
&\frac{M_{n-1} l_n}{6EI_n} + \frac{M_n l_n}{3EI_n} + \alpha_n(Q_n) + \frac{w_n - w_{n-1}}{l_n} = -\mathfrak{A}_n M_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (13.72)$$

Входящие в эту систему уравнений величины $\alpha_i(Q_i)$ и $\alpha_i(Q_{i+1})$ определяются с помощью таблиц изгиба свободно опертых на две жесткие опоры балок, имеющихся в справочнике [51, т. 1], либо из расчета изгиба однопролетных балок методами, которые были изложены ранее. Второе из уравнений системы (13.72) справедливо при $1 < i < n - 1$.

В полученной системе $n + 1$ уравнений (13.72) смещения опор w_i могут быть равны нулю (при жестких несмещаемых опорах), заданы (когда при жестких опорах в ненагруженном состоянии балка не касается всех опор [1]) и, наконец, неизвестны (при независимых упругих опорах). В первых двух случаях полученная система называется системой уравнений трех моментов, поскольку в каждое из уравнений входит не более трех неизвестных моментов.

В случае упругих опор их просадки w_i, входящие в уравнения (13.72), являются неизвестными, подлежащими определению величинами, как и опорные моменты M_i. Следовательно, число неизвестных в системе уравнений (13.72) превышает число самих уравнений и для решения задачи необходимо составить дополнительные уравнения. Такими дополнительными уравнениями будут уравнения равновесия упругих опор.

[1] После расчета такой балки необходимо убедиться, что при действии заданной нагрузки балка будет касаться всех опор, т. е. реакции опор будут положительными. Опоры, для которых реакции окажутся отрицательными, следует отбросить, а расчет балки выполнить заново.

Реакция упругой опоры пропорциональна ее просадке и на основании формулы (13.3) выражается равенством

$$R_i = w_i/A_i. \qquad (13.73)$$

Эта же реакция может быть выражена через опорные моменты и нагрузки прилегающих к опоре смежных пролетов балки. Для i-й опоры (см. рис. 13.32)

$$R_i = (M_i - M_{i-1})/l_i + R_i(Q_i) + (M_i - M_{i+1})/l_{i+1} + R_i(Q_{i+1}), \qquad (13.74)$$

где $R_i(Q_i)$ — реакция от поперечной нагрузки Q_i на правой опоре i-го пролета, вычисленная в предположении, что оба конца этого пролета балки свободно оперты на жесткие опоры; $R_i(Q_{i+1})$ — то же для левой опоры $i + 1$-го пролета от нагрузки в этом пролете Q_{i+1}.

По условиям равновесия опор величины (13.73) и (13.74) должны быть равны, поэтому

$$w_i/A_i = (M_i - M_{i-1})/l_{i+1} + (M_i + M_{i+1})/l_{i+1} + R_i(Q_i) + R_i(Q_{i+1}). \qquad (13.75)$$

Число уравнений (13.75) равно числу упругих опор балки.

Полученная система основных (13.72) и дополнительных (13.75) уравнений дает возможность определить все неизвестные. Эту систему целесообразно преобразовать таким образом, чтобы коэффициенты при неизвестных моментах были безразмерными величинами, а каждый член уравнения имел бы размерность момента. Для этого достаточно умножить все члены уравнений (13.72) на множитель $6EI_0/l_0$, где I_0 и l_0 — произвольные величины, имеющие соответственно размерности момента инерции площади поперечного сечения и длины; обычно их принимают равными соответствующим величинам одного из пролетов рассматриваемой балки. После умножения уравнения (13.72) примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&(\gamma_0 + 2a_1) M_0 + a_1 M_1 + b_1 F_0 + b_1 F_1 = \alpha_0(Q_1)\, 6EI_0/l_0;\\
&a_i M_{i-1} + 2(a_i + a_{i+1}) M_i + a_{i+1} M_{i+1} - b_i F_{i-1} +\\
&+ (b_i + b_{i+1}) F_i - b_{i+1} F_{i+1} = [-\alpha_i(Q_i) + \alpha_i(Q_{i+1})]\, 6EI_0/l_0\\
&1 \leqslant i \leqslant n - 1;\\
&a_n M_{n-1} + (2a_n + \gamma_n) M_n - b_n F_{n-1} + b_n F_n = -\alpha_n(Q_n)\, 6EI_0/l_0,
\end{aligned}\right\} \qquad (13.76)$$

где в целях сокращения записи введен еще ряд дополнительных обозначений:

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_0 = (6EI_0/l_0)\,\mathfrak{A}_0; \quad \gamma_n = (6EJ_0/l_0)\,\mathfrak{A}_n;\\
&a_i = (l_i/l_0)(I_0/I_i); \quad F_i = (6EI_0/l_0^2)\, w_i; \quad b_i = l_0/l_i.
\end{aligned}\right\} \qquad (13.77)$$

Система уравнений равновесия упругих опор (13.75) после умножения на l_0 преобразуется к виду

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{K_0}\,[b_1 M_0 - b_1 M_1 + l_0 R_0(Q_1)];\\ F_i &= \frac{1}{K_i}\,[-b_i M_{i-1} + (b_i + b_{i+1}) M_i - b_{i+1} M_{i+1} +\\ &\quad + l_0 R_i(Q_i) + l_0 R_i(Q_{i+1})] \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1);\\ F_n &= \frac{1}{K_n}\,[b_n M_n - b_n M_{n-1} + l_0 R_n(Q_n)]. \end{aligned}\right\} \tag{13.78}$$

Здесь $K_i = l_0^3/(6EI_0A_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Нетрудно видеть, что величины F_i имеют размерность момента, а коэффициенты a_i и b_i — величины безразмерные.

После исключения из i-го уравнения системы (13.76) неизвестных F_{i-1}, F_i и F_{i+1} с помощью зависимостей (13.78) получим уравнение, которое в общем случае будет содержать пять неизвестных моментов: M_{i-2}, M_{i-1}, M_i, M_{i+1} и M_{i+2}. Отсюда и название этой системы — уравнения пяти моментов.

Решение полученной системы алгебраических уравнений целесообразно выполнить в табличной форме методом последовательного исключения неизвестных по схеме Гаусса либо воспользовавшись одной из существующих программ решения систем линейных алгебраических уравнений на ЭВМ.

После определения опорных моментов M_i каждый пролет рассматривается как отдельная однопролетная свободно опертая по концам, т. е. статически определимая, балка, несущая кроме пролетной нагрузки также известные моменты в опорных сечениях. Просадки опор определяются по формулам (13.75). Заметим, что моменты, для которых получены отрицательные значения, действуют в направлениях, обратных принятым на рис. 13.31.

Зная значения опорных моментов, величину и характер пролетной нагрузки, мы можем по принципу наложения с помощью таблиц или путем расчета изгиба однопролетных свободно опертых балок построить эпюры моментов для каждого из пролетов рассматриваемой балки. Соединяя все полученные эпюры для отдельных пролетов вместе, получаем эпюры изгибающих моментов $M(x)$ и перерезывающих сил $N(z)$ рассматриваемой неразрезной балки.

Пример 4. Требуется раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил для неразрезной балки постоянного сечения, изображенной на рис. 13.33, *а*.

Исходные данные: $I_1 = I_4 = 6I_0$; $I_2 = I_5 = 2{,}08I_0$; $I_3 = I_6 = 2{,}04I_0$; $l_1 = l_4 = 0{,}6l_0$; $l_2 = l_5 = 0{,}5l_0$; $l_3 = l_6 = l_0$; $P_1 = 0{,}5ql_0$; $P_2 = ql_0$ (I_0, l_0, q — постоянные величины, имеющие соответственно размерности момента инерции длины и интенсивности нагрузки).

Р е ш е н и е. Вертикальная балка $0-4$ создает упругое защемление 0-го узла основной балки $0-3$. Коэффициент податливости $\mathfrak{A}$ такого упругого защемле-

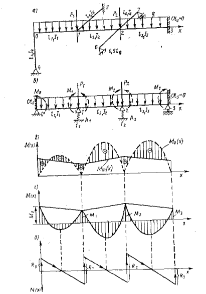


Рис. 13.33

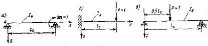


Рис. 13.34

ния будет равен [см. формулу (13.3)] углу поворота правого сечения балки, изображенной на рис. 13.34, *а*:

$$\mathfrak{A} = w'(x = l_4)\big|_{\mathfrak{M}=1} = \frac{\mathfrak{M} l_4}{3EI_4}\bigg|_{\mathfrak{M}=1} = \frac{1 \cdot 0{,}6 l_0}{3EI_0 6} = \frac{l_0}{30EI_0}.$$

Балки *1—5* и *6—7* поддерживают основную балку *0—3* в сечениях *1* и *2* и играют роль упругих опор.

Коэффициенты податливости первой и второй промежуточных опор определяются на основании зависимости (13.3) для расчетных моделей, приведенных соответственно на рис. 13.34, *б* и *в*:

$$A_1 = w(x = l_5)\big|_{P=1} = \frac{P l_5^3}{3EI_5}\bigg|_{P=1} = \frac{1 \cdot (0{,}5 l_0)^3}{3E \cdot 2{,}08 I_0} = \frac{l_0^3}{50EI_0};$$

$$A_2 = w\left(x = \frac{l_6}{2}\right)\bigg|_{P=1} = \frac{P l_6^3}{48EI_6}\bigg|_{P=1} = \frac{1 \cdot l_0^3}{48 \cdot 2{,}04 EI_0} = \frac{l_0^3}{100EI_0}.$$

Введение упругой заделки левого конца и упругих опор в узлах *1* и *2* позволяет значительно упростить расчетную модель заданной стержневой системы (см. рис. 13.33, *а*) и представить ее в виде неразрезной трехпролетной балки (см. рис. 13.33, *б*). Составим для полученной балки уравнения равенства углов поворота опорных сечений на основании выражений (13.72):

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_0 M_0 = -\frac{M_0 l_1}{3EI_1} - \frac{M_1 l_1}{6EI_1} + \frac{q l_1^3}{24EI_1} + \frac{w_1}{l_1};\\
&\frac{M_0 l_1}{6EI_1} + \frac{M_1 l_1}{3EI_1} - \frac{q l_1^3}{24EI_1} + \frac{w_1}{l_1} = -\frac{M_1 l_2}{3EI_2} - \frac{M_2 l_2}{6EI_2} + \\
&\qquad + \frac{q l_2^3}{24EI_2} + \frac{w_2 - w_1}{l_2};\\
&\frac{M_1 l_2}{6EI_2} + \frac{M_2 l_2}{3EI_2} - \frac{q l_2^3}{24EI_2} + \frac{w_2 - w_1}{l_2} = -\frac{M_2 l_3}{3EI_3} - \\
&\qquad - \frac{M_3 l_3}{6EI_3} + \frac{q l_3^3}{24EI_3} - \frac{w_2}{l_3};\\
&\frac{M_2 l_3}{6EI_3} + \frac{M_3 l_3}{3EI_3} - \frac{q l_3^3}{24EI_3} - \frac{w_2}{l_3} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (13.79)$$

а уравнения равновесия упругих опор согласно формуле (13.75):

$$\left.\begin{aligned}
w_1 &= A_1\left(\frac{M_1 - M_0}{l_1} + \frac{M_1 - M_2}{l_2} + \frac{q l_1}{2} + \frac{q l_2}{2} + P_1\right);\\
w_2 &= A_2\left(\frac{M_2 - M_1}{l_2} + \frac{M_2 - M_3}{l_3} + \frac{q l_2}{2} + \frac{q l_3}{2} + P_2\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (13.80)$$

Подставляя выражения (13.80) в систему (13.79) и используя найденные выше значения коэффициентов податливости упругой заделки $\mathfrak{A}$ и упругих опор A_1, A_2, а также заданные значения для нагрузки, длин и моментов инерции отдельных пролетов, получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&2{,}32M_0 + 0{,}8M_1 + 0{,}08M_2 = 0{,}46 q l_0^2;\\
&0{,}8M_0 + 5{,}36M_1 + 1{,}3M_2 + 0{,}04M_3 = 0{,}83 q l_0^2;\\
&0{,}08M_0 + 1{,}3M_1 + 5{,}22M_2 + 0{,}9M_3 = 1{,}01 q l_0^2;\\
&0{,}04M_1 + 0{,}9M_2 + 2{,}06M_3 = 0{,}385 q l_0^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (13.81)$$

Решение полученной системы дает возможность определить значения узловых моментов неразрезной балки (см. рис. 13.33, *б*):

$$M_0 = 0{,}160 q l_0^2; \quad M_1 = 0{,}095 q l_0^2; \quad M_2 = 0{,}146 q l_0^2; \quad M_3 = 0{,}124 q l_0^2.$$

Располагая значениями узловых моментов M_i и моментов от пролетной нагрузки, нетрудно построить эпюры изгибающих моментов для каждого из пролетов; их объединение образует эпюру изгибающих моментов по всей длине рассматриваемой неразрезной балки.

Обычно эпюры $M(x)$ строят методом наложения согласно выражению $M(x) = M_Q(x) + M_m(x)$, где $M_Q(x)$ — эпюра изгибающих моментов только от пролетной нагрузки, а $M_m(x)$ — линейная эпюра от опорных моментов. Эпюра $M_Q(x)$ строится для каждого пролета как для однопролетной свободно опертой балки с учетом всей действующей в данном пролете внешней нагрузки. Ординаты этой эпюры следует откладывать от оси балки в направлении расположения сжатых волокон балки. В нашем случае действие пролетной нагрузки изгибает каждый пролет (в предположении его работы как свободно опертой однопролетной балки) выпуклостью вниз. При этом сжатые волокна будут располагаться сверху от балки и, следовательно, ординаты эпюры $M_Q(x)$ нужно откладывать от оси балки вверх (на рис. 13.33, *в* эпюра $M_Q(x)$ нанесена пунктиром). Эпюра $M_m(x)$ строится на том же чертеже и в том же масштабе следующим образом: значения опорных моментов M_i откладываются в опорных сечениях в сторону растягиваемых данными моментами волокон, затем полученные узловые ординаты моментов соединяются прямыми линиями (сплошная ломаная линия на рис. 13.33, *в*). В результате указанного наложения двух эпюр $M_Q(x)$ и $M_m(x)$ ординаты результирующей эпюры $M(x)$ будут определяться отрезками между ломаной линией $M_m(x)$ и линией $M_Q(x)$ [эпюра $M(x)$ на рис. 13.33, *в* заштрихована с указанием на каждом участке ее знака].

Ломаную линию $M_m(x)$ можно рассматривать в качестве осевой линии результирующей эпюры $M(x)$. Это позволяет предложить несколько иной способ построения эпюры $M(x)$: эпюра $M_m(x)$ строится так, как указано выше, а ординаты эпюры $M_Q(x)$ откладываются от линии $M_m(x)$ в сторону растянутого волокна (см. рис. 13.33, *г*). Как видно из рис. 13.33, *г*, полученная при таком способе эпюра $M(x)$ более наглядна.

Для построения эпюры перерезывающих сил неразрезной балки предварительно найдем значения перерезывающих сил по концам каждого из пролетов. При этом, о чем уже говорилось выше, каждый из пролетов должен рассматриваться как свободно опертая на жесткие опоры однопролетная балка, загруженная своей внешней пролетной нагрузкой и найденными выше опорными моментами. В результате получим следующие значения перерезывающей силы:

на левой опоре ($i = 0$) $N_0 = -(M_0 - M_1)/l_1 - 0{,}5 q l_1 = -0{,}565 q l_0$;
слева от опоры *1* $N_{1-0} = -(M_0 - M_1)/l_1 + 0{,}5 q l_1 = 0{,}435 q l_0$;
справа от опоры *1* $N_{1+0} = -(M_1 - M_2)/l_2 - 0{,}5 q l_2 = -0{,}71 q l_0$;
слева от опоры *2* $N_{2-0} = -(M_1 - M_2)/l_2 + 0{,}5 q l_2 = 0{,}784 q l_0$;
справа от опоры *2* $N_{2+0} = -(M_2 - M_3)/l_3 - 0{,}5 q l_3 = 0{,}522 q l_0$;
на правом конце балки $N_3 = -(M_2 - M_3)/l_3 + 0{,}5 q l_3 = 0{,}478 q l_0$.

Располагая значениями перерезывающей силы в концевых сечениях отдельных пролетов, величиной и характером внешней нагрузки, можно построить эпюру перерезывающих сил $N(x)$ для рассматриваемой неразрезной балки (см. рис. 13.33, *д*).

Контрольные вопросы

1. Дайте классификацию возможных видов деформации балки.
2. Как классифицируются опоры балки и какими величинами характеризуются их упругие свойства?
3. Какие балки называются статически неопределимыми? Как определяется степень их статической неопределимости?
4. Дайте определение понятиям «изгибающий момент» и «перерезывающая сила».

5. На каких гипотезах основана техническая теория изгиба балок?

6. В чем заключается гипотеза плоских сечений и как она используется при выводе основных уравнений теории изгиба балок?

7. Выпишите и объясните формулы для определения нормальных и касательных напряжений в поперечных сечениях балки.

8. Выпишите и объясните дифференциальные зависимости изгиба балки.

9. Выпишите граничные условия балки, торцевые сечения которой упруго защемлены и упруго оперты.

10. Изложите общую схему определения упругой линии балки. Дифференциальное уравнение изгиба балки и граничные условия закрепления ее торцевых сечений заданы.

11. В чем сущность метода начальных параметров? Каковы преимущества метода начальных параметров по сравнению с методом интегрирования по участкам?

12. Какие существуют закономерности в относительном расположении нулевых точек перегиба и точек экстремума эпюр следующих разных элементов изгиба: упругой линии, углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил?

13. Как доказывается принцип наложения и как он используется для раскрытия статической неопределимости балок?

14. Каким образом производится учет влияния деформаций сдвига при изгибе балок?

15. Почему при расчете неразрезных балок целесообразно принимать за лишние неизвестные реакции опор?

16. Зависит ли степень статической неопределимости от выбора основной системы?

17. Что такое коэффициент податливости упругой опоры и коэффициент ее жесткости? Какая связь между ними?

18. Объясните общий ход вывода уравнений пяти моментов и их использование при расчете неразрезной балки на упругих опорах.

Глава 14. РАМЫ, СОСТАВЛЕННЫЕ ИЗ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 14.1. Рама как конструктивный элемент судового корпуса. Классификация и допущения

Корпус судна представляет собой сложную упругую систему, состоящую из множества пластинчатых элементов, на которую действуют нагрузки различной природы (гидростатическое и гидродинамическое давление воды, силы тяжести, силы инерции и др.).

Основными пластинами корпуса являются днищевая и бортовая обшивки и настилы палуб, которые воспринимают непосредственно давление воды и обеспечивают непроницаемость корпуса. Важную роль играют и другие пластины: переборки, стенки надстроек и рубок, второе дно. Однако сами эти пластины без соответствующих подкреплений, очевидно, не могут выдержать даже незначительного поперечного давления или действия продольной сжимающей нагрузки вследствие потери устойчивости (например, при общем изгибе корпуса). Поэтому перпендикулярно их плоскостям устанавливают на определенных расстояниях в продольном и поперечном направлениях подкрепляющие пластины-стенки с поясками на противоположных продольных кромках. Таким образом создается основной набор корпуса — флоры, стрингеры, бимсы, рамные стойки и др., — который служит клетчатым опорным контуром для обшивок (см. рис. 13.1).

Каждое поле пластины между опорными кромками в общем случае воспринимает поперечную нагрузку, вызывающую ее изгиб, и передает ее на стенки набора, которые, изгибаясь в своей плоскости, испытывают плоское напряженное состояние. Вследствие изгиба стенок в жестко связанных с ними по кромкам пластинах-поясках также возникает плоское напряженное состояние.

Очевидно, в самой строгой постановке расчет напряженно-деформированного состояния корпуса судна следовало бы выполнять методами плоской задачи теории упругости по следующей принципиальной схеме. Корпус судна разбивают на множество пластин, кромки которых загружены неизвестными усилиями взаимодействия со смежными пластинами. Распределение этих неизвестных усилий по кромкам можно аппроксимировать с учетом условий равновесия подходящим набором функций с достаточным числом неопределенных коэффициентов (например, в виде полиномов или тригонометрических рядов). Для каждой пластины решают плоскую задачу при указанных кромочных нагрузках, в результате чего напряжения, деформации и перемещения выражаются как функции координат и неопределенных коэффициентов аппроксимации нагрузок. Затем составляют условия совместности деформаций (перемещений) по всем смежным кромкам между пластинами, из которых определяют все указанные коэффициенты, и тем самым решают задачу.

При использовании этой расчетной схемы (модели) пришлось бы иметь дело со множеством пластин и неизвестных коэффициентов, которые необходимо определять из совместной системы уравнений большого порядка, что полностью исключает возможность выполнения такого расчета без применения мощного программного комплекса на ЭВМ. Хотя в принципе в настоящее время подобный комплекс и может быть разработан (см. гл. 10, 11), его практическая реализация нецелесообразна как из-за чрезмерно большого машинного времени, затрачиваемого на каждый расчет, так и вследствие огромного объема исходной информации, подготовка которой может занять несколько месяцев.

Вместе с тем можно утверждать, что такое совместное рассмотрение всех элементов корпуса, которое и приводит к столь сложной расчетной схеме, не является обязательным. Так, очевидно, что напряженно-деформированные состояния элементов, расположенных, например, в одном из кормовых перекрытий и те же состояния элементов, расположенных в одном из носовых перекрытий, не влияют друг на друга и могут определяться независимо. В связи с этим при разработке практических расчетных схем (моделей) и методов целесообразно в максимальной степени использовать возможности исключения второстепенных факторов, а также слабого взаимодействия или производить приближенный их учет упрощенными способами.

Применительно к рассматриваемой общей задаче возможны следующие уровни упрощений или, как их иногда называют, идеализаций.

Во-первых, как было показано в § 6.3, пластину-стенку (балку-стенку), а также пластинчатую систему, состоящую из пластины-стенки и пластин-поясов, при действии поперечной нагрузки в плоскости стенки (т. е. при изгибе в этой плоскости), можно рассматривать как единый элемент — балку, особенности напряженно-деформированного состояния и методы расчета которой подробно изложены в гл. 13. Напомним, что такую модель можно применять, если пролет балки не менее чем в 3—4 раза превышает высоту стенки и вместо реальной ширины поясов в соответствующих случаях в расчет вводится их приведенная (эффективная) ширина (см. § 6.3). Этим условиям отвечают практически все элементы судового набора, и таким образом корпус судна может быть представлен в виде совокупности соединенных между собой балок, составляющих единую стержневую систему. Балки-стержни такой системы жестко соединены между собой в узлах, вследствие чего как линейные, так и угловые перемещения всех примыкающих к данному узлу сечений стержней равны между собой и равны соответствующим перемещениям узла в целом. Балки-стержни, воспринимающие поперечную нагрузку, испытывают в основном деформацию изгиба, которая передается на смежные стержни через узловые соединения. Такая система относится к типу рамных стержневых систем или просто рам, методы расчета которых и будут изложены в данной главе.

При представлении корпуса судна в виде стержневой рамной системы (стержневой идеализации) достигается существенное упрощение расчетов. Вместе с тем в некоторых отношениях она недостаточно соответствует реальным свойствам системы, что необходимо учитывать при ее применении. Основными ограничениями использования стержневой модели являются следующие.

Сплошные настилы (палубы, днище и др.) участвуют одновременно в качестве поясов в изгибе пересекающихся балок общих направлений, в результате чего в них возникает плоское напряженное состояние. В этом случае редукционные коэффициенты и ширина приведенных поясов существенно зависят от соотношения нормальных напряжений, действующих в двух направлениях, что не позволяет дать даже приближенную рекомендацию по их определению, которое возможно при одноосном напряженном состоянии пояска (см. § 6.3). Как правило, этим обстоятельством пренебрегают, что достаточно оправдано при односторонних настилах, а при двусторонних (двойное дно) может давать погрешность в напряжениях до 15—20 % и в прогибах до 30—40 %.

Стержневая модель в описанном выше виде недостаточна также при выполнении расчетов прочности корпуса на кручение. Необходимость в таких расчетах возникает для судов с широкими палубными люками, которые резко снижают жесткость и прочность корпуса на кручение. В этих случаях применяют специальные модели и методы расчета (см. гл. 18).

Дополнительные решения плоской задачи приходится производить для зон концентрации напряжений, вырезов и резких изменений сечений, при действии значительных местных нагрузок в плоскости стенок балок, палуб, переборок и других настилов.

Таким образом, с учетом сделанных выше замечаний стержневая модель может приниматься в качестве вполне приемлемой при решении ряда прочностных задач, что позволяет уже на первом уровне упрощений по крайней мере на один-два порядка уменьшить ее сложность по сравнению с точной пластинчатой моделью.

Для того чтобы можно было рассчитать каждый элемент — балку такой системы в отдельности, необходимо кроме пролетной нагрузки знать еще граничные условия, которые характеризуют условия взаимодействия рассматриваемой балки с прилегающими к ней элементами судового корпуса.

Из изложенного выше должно быть ясно, что расчет корпуса судна как единой стержневой системы, имеющей тысячи узлов, в результате которого необходимо определить множество неизвестных перемещений узлов или узловых усилий из совместной системы уравнений, также представляет весьма трудоемкую задачу даже при использовании современных ЭВМ. Поэтому часто вводят следующий уровень упрощений, которого можно достичь путем расчленения такой системы на отдельные части для самостоятельного расчета каждой из них. Возможность расчленения появляется благодаря наличию поперечных переборок, которые разделяют корпус на отсеки. Вследствие большой жесткости в своей плоскости поперечные переборки создают практически жесткие (несмещаемые) опоры для продольных балок на границах отсеков. В этом случае силовое взаимодействие балок смежных отсеков сводится к появлению только изгибающих моментов, влияние которых быстро затухает в последующих отсеках [так же, как и у многопролетных балок (см. гл. 13)]. Поэтому расчет какого-либо отсека можно производить, включая в состав системы только по одному смежному с ним отсеку с каждой стороны, а граничные условия во внешних сечениях этих отсеков, учитывая их слабое влияние на средний отсек, назначать приближенно. Если нагрузка смежных отсеков, а также их конструкции точно или приблизительно симметричны относительно разделяющей их переборки, то продольные балки на этой переборке можно считать жестко защемленными. При наличии таких условий с двух сторон каждый отсек можно рассматривать как отдельную рамную систему с известными граничными условиями, что снижает трудоемкость ее расчета уже до приемлемого (хотя все еще значительного) уровня при использовании специальных программ на ЭВМ.

Следующий уровень упрощений достигается при расчленении пространственной рамной стержневой системы — отсека — на ряд отдельных плоских конструкций. Этот уровень был совершенно необходим в период, предшествовавший появлению ЭВМ, но продолжает сохранять свое важное значение и в настоящее время.

Прежде всего в каждом отсеке можно выделить плоские стержневые системы, воспринимающие нагрузки, перпендикулярные их плоскости, — днищевые, бортовые и палубные перекрытия, набор переборок. Так, например, для днищевого перекрытия граничные условия на поперечных переборках в ряде случаев можно определить, как указывалось выше, а на бортах при небольшой жесткости шпангоутов по сравнению с жесткостью флоров последние можно считать свободно опертыми. В других случаях определение граничных условий на кромках перекрытия может быть не столь очевидным и требует дополнительных исследований или последовательных уточнений. Методы расчета таких конструкций будут подробно изложены в гл. 17.

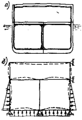


Рис. 14.1

Другой конструкцией, которую можно выделить из отсека для самостоятельного расчета, является поперечная шпангоутная плоская рама, состоящая в простейшем случае из днищевого флора, бортовых шпангоутов и палубного бимса. При наличии продольных переборок и нескольких палуб их стойки и бимсы также входят в состав шпангоутной рамы. На рис. 14.1 показан пример конструктивной (*а*) и расчетной (*б*) схем шпангоутной рамы. В средней части отсека шпангоутная рама слабо взаимодействует с продольными балками и ее можно рассматривать как самостоятельную работающую конструкцию, воспринимающую нагрузку, приходящуюся на данную шпацию и действующую в плоскости рамы (давление забортной воды и противодавление грузов). Расчет такой рамы позволяет более детально определить условия силового взаимодействия стержней, входящих в смежные перекрытия и оценить возможные наихудшие условия их работы. Аналогичной плоской рамой являются сочленения таких стержней, как вертикальный киль — стойки поперечных переборок — карлингс или бортовые стрингеры — шельфы поперечных и продольных переборок — распорки. Пространственными рамами, в состав которых входят плоские рамы, являются наборы судового корпуса (рис. 14.2, *а*), надстроек и рубок, многостержневые мачты и некоторые другие конструкции (рис. 14.2, *б*).

Отличительной чертой всех рамных конструкций, как уже указывалось, является то, что их стержни-балки воспринимают значительные пролетные нагрузки и основным видом их напряженно-деформированного состояния является поперечный изгиб. Вызываемые осевыми силами напряжения имеют второстепенное значение. Вследствие жесткой связи стержней в узлах рамы имеют высокую степень статической неопределенности.

Стержневые конструкции другого основного в строительной механике типа — *фермы* отличаются тем, что их стержни в узлах соединяются шарнирно и благодаря наличию необходимого числа раскосов, а также узловому характеру нагрузки испытывают в основном растяжение-сжатие осевыми силами. Фермы в судовых конструкциях применяют редко.

Итак, как видно из изложенного выше, строительная механика корабля должна располагать методами расчета прочности в общем

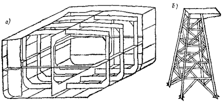


Рис. 14.2

случае пространственных рам и, в частных случаях, плоских рам.

Вначале будут рассмотрены *плоские рамы*, у которых продольные оси всех стержней располагаются в одной плоскости. В этой же плоскости действует приложенная к раме внешняя нагрузка. Кроме того, одна из главных осей поперечных сечений всех стержней лежит также в плоскости рамы или возможность изгиба стержней из этой плоскости устранена конструктивно (например, при наличии сплошной обшивки). Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то изгиб стержней будет иметь пространственный характер и рама будет относиться к типу пространственных. Предполагается, что все стержни рамы прямолинейны. При наличии криволинейных стержней их можно заменить ломаными стержнями с достаточным числом участков, а каждый из этих участков рассматривать как прямолинейный стержень с узлами в местах стыков между ними. В случаях, когда такая замена не целесообразна (вследствие значительного увеличения числа узлов), раму с криволинейными стержнями рассчитывают специальными методами, излагаемыми в гл. 15.

Плоские рамы классифицируются еще по двум признакам, определяющим особенности применяемых к ним методов расчета.

По числу сходящихся в одном узле стержней рамы делятся на *простые*, у которых это число равно двум, и *сложные* при соединении хотя бы в некоторых узлах трех и более стержней.

По признаку линейной подвижности узлов различают рамы с *линейно-неподвижными узлами* и с *линейно-подвижными узлами*. Узлы рамы будут линейно-неподвижными при соблюдении одного из следующих условий: а) шарнирная схема рамы является геометрически неизменяемой фермой и все стержни считаются недеформируемыми по отношению к растяжению-сжатию; б) неподвижность всех узлов обеспечивается конструктивно, например присоединением их к жестким несмещаемым конструкциям; в) конструкция рамы, а также ее нагрузка, при которой все узлы сохраняют неизменное положение, являются симметричными. Если указанные условия не имеют места, то рама относится к категории рам со смещаемыми узлами. Линейная подвижность узлов, очевидно, усложняет их расчет. Характерной особенностью рам судового корпуса является то, что их узлы, как правило, располагаются на линиях пересечения сплошных пластин-полотнищ, в результате чего обеспечивается линейная несмещаемость этих узлов. Так, жесткие поперечные переборки препятствуют относительным смещениям палуб и днища, бортов и продольных переборок, что исключает общий перекос поперечных сечений корпуса и смещение узловых линий. Смещаемые узлы образуются обычно только на стержнях, не связанных со сплошными настилами (пиллерсах, распорках и т. п.).

При разработке методов расчета прочности рам используют следующие допущения.

1. Возникающие в прямых стержнях рамы продольные силы относительно малы и практически не влияют на изгиб этих стержней [эффект продольного изгиба незначителен (см. гл. 19)].

2. Относительные линейные перемещения узлов за счет изменения длины стержней в результате действия в них осевых сил пренебрежимы. Это допущение либо полностью устраняет, либо существенно уменьшает степень кинематической подвижности узлов рамы, а следовательно, и количество подлежащих определению линейных перемещений, что сильно упрощает расчет и повышает устойчивость вычислительного алгоритма [обусловленность матрицы системы уравнений (см. гл. 11)]. Однако для рам с линейно-подвижными узлами в число основных неизвестных приходится включать осевые силы, что в общем случае усложняет структуру алгоритма. Поэтому при разработке универсального метода (алгоритма) расчета на ЭВМ предпочитают не использовать это допущение, что, хотя и увеличивает объем вычислений, но в то же время значительно упрощает саму программу (см. § 14.4).

3. Стержни в пролетах между узлами — призматические. Непризматические стержни следует представить в виде ступенчато призматических, а границы участков считать узлами рамы. Увеличением жесткости стержней за счет книц вблизи узловых сечений можно пренебрегать.

4. Деформации сдвига, возникающие в результате действия перерезывающих сил, мало влияют на элементы изгиба и обычно их не учитывают.

Геометрия рамы определяется линиями, проходящими через ЦТ поперечных сечений. Определение всех исходных данных производится на основе анализа реальных условий работы конструкций корпуса и рассматривается подробно в курсе прочности судов.

§ 14.2. Плоские простые рамы

Рамы с линейно-неподвижными узлами. Рамы этого типа являются, по существу, неразрезными балками, имеющими изломы в узлах, в которых должно быть установлено необходимое количество жестких опор для устранения любых линейных смещений всех узлов.

Примеры таких рам показаны на рис. 14.3. Контур рамы бывает замкнутым или разомкнутым. В последнем случае крайние сечения могут иметь упругие заделки на жестких опорах (см. рис. 14.3, *а* и *б*). Рамой с замкнутым контуром является простейшая шпангоутная рама, состоящая из флора, шпангоутов и бимса (см. рис. 14.3, *в*).

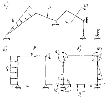


Рис. 14.3

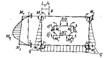


Рис. 14.4

Несмещаемость узлов показывается на схеме рамы введением жестких опор, количество которых устанавливается с учетом продольной недеформируемости стержней. Реакции указанных опор уравновешивают также нагрузку рамы в целом. Роль опор, например, для шпангоутной рамы выполняют в вертикальном направлении борта, а в горизонтальном — палуба и днище. В действительности реакции этих опор распределены по длине стержней в виде касательных напряжений. Однако с учетом предполагаемой продольной недеформируемости стержней опоры можно считать точечными, расположенными в узлах. Такая замена влияет лишь на величину осевых сил в стержнях, которые, как правило, при расчете рам интереса не представляют.

Расчет простых рам с несмещаемыми узлами можно производить так же, как и неразрезных балок. Для этого достаточно, учитывая линейную несмещаемость узловых сечений, определить моменты взаимодействия стержней и свести дальнейший расчет к расчету каждого стержня. Как и в неразрезных балках, узловые моменты должны удовлетворять условиям равновесия узлов и условиям равенства углов поворота, примыкающих к данному узлу сечений обоих стержней (совместность перемещений). Указанные условия позволят составить достаточное число уравнений для определения узловых моментов.

Расчет производят в следующем порядке (см. рис. 14.4):

1) нумеруют поочередно узлы рамы порядковыми номерами;

2) на схеме рамы изображают стрелками узловые изгибающие моменты M_i в стержнях, которые по условиям равновесия должны быть в каждом узле для обоих стержней равны по значению и обратны по направлению (i — номер узла);

3) составляют выражения для углов поворота узловых сечений всех стержней как свободно опертых на жесткие опоры в узлах балок с учетом заданных пролетных нагрузок и узловых моментов M_i; углы поворота считают положительными по часовой стрелке, а узловые моменты вводят в выражения для углов поворота со знаком, соответствующим принятому для данного момента направлению;

4) для каждого узла составляют уравнение совместности угловых перемещений, приравнивая выражения для углов поворота, примыкающих к данному узлу сечений обоих стержней $\alpha_{ik} = \alpha_{ij}$, где j и k — номера узлов, смежных с i-м узлом;

5) решая полученную систему алгебраических уравнений, определяют значения узловых моментов M_i; при отрицательном значении момента его направление противоположно принятому в начале расчета;

6) каждый стержень рассчитывают отдельно как свободно опертую на жесткие опоры в узлах балку с заданной пролетной нагрузкой и известными моментами M_i на опорах; эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов рамы целесообразно строить, пользуясь принципом наложения, как и для многопролетных балок (см. гл. 13).

Указанный метод расчета, в котором за основные неизвестные принимают моменты, т. е. силовые факторы, относится к категории методов, носящих общее название *метода сил*.

Если рама имеет ось упругой симметрии, то это обстоятельство можно использовать с целью упрощения расчета, для чего необходимо разложить нагрузку на симметричную и обратносимметричную части и выполнить расчеты отдельно для каждой из них с последующим суммированием результатов. В каждом расчете моменты в симметричных узлах будут равны по значению и в первом случае симметрично, а во втором обратносимметрично направлены, что в каждом расчете уменьшает практически вдвое число совместно решаемых уравнений по сравнению с общим случаем.

Пример 5. Составить уравнение совместности угловых перемещений в узлах рамы, изображенной на рис. 14.4, для определения узловых моментов.

Исходные данные: $l_{12} = l_{34} = l_1$, $l_{13} = l_{24} = l_2$, $I_{34} = 2I_{13} = 2I_{24} = 4I_{12} = I$.

Решение. Условия совместности угловых перемещений запишутся так:

$$\alpha_{12} = \alpha_{13};\quad \alpha_{21} = \alpha_{24};\quad \alpha_{34} = \alpha_{31};\quad \alpha_{42} = \alpha_{43}. \tag{а}$$

Углы поворота α_{ij} определяют по таблицам изгиба однопролетных свободно опертых в узлах балок с учетом пролетной нагрузки и узловых моментов. Например

$$\alpha_{12} = -M_1 l_{12}/(3EI_{12}) - M_2 l_{12}/(6EI_{12}) + 7Pl_{12}^2/(128EI_{12}).$$

Подставляя значения этих углов в условия совместимости (а), после переноса в левую часть и группировки членов с неизвестными M_i, а также после сокращений на общие множители, получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&(2+\gamma)\,M_1 + M_2 + \frac{1}{2}\gamma M_3 = \frac{7}{120}\gamma^3 q l_1^2 + \frac{21}{64}Pl_1;\\
&M_1 + (2+\gamma)\,M_2 + \frac{1}{2}\gamma M_4 = \frac{7}{120}\gamma^3 q l_1^2 + \frac{15}{64}Pl_1;\\
&\gamma M_1 + (1+2\gamma)\,M_3 + \frac{1}{2}M_4 = \left(\frac{2}{15}\gamma^3 + \frac{1}{8}\right) q l_1^2;\\
&\gamma M_2 + \frac{1}{2}M_3 + (1+2\gamma)\,M_4 = \left(\frac{2}{15}\gamma^3 + \frac{1}{8}\right) q l_1^2,
\end{aligned}\right\} \tag{б}$$

где $\gamma = l_2/l_1$.

Если силу P разложить на симметричную и обратносимметричную составляющие (см. рис. 14.4, *а* и *б*) и составить уравнения совместимости отдельно ля симметричной и обратносимметричной нагрузок рамы, то получим следующие две системы: для симметричной нагрузки $\left(M_1' = M_2',\ M_3' = M_4'\right)$

$$\left.\begin{aligned}
&(6+2\gamma)\,M_1' + \gamma M_3' = \frac{7}{60}\gamma^3 q l_1^2 + \frac{9}{16}Pl_1;\\
&\gamma M_1 + (1{,}5+2\gamma)\,M_3' = \left(\frac{2}{15}\gamma^3 + \frac{1}{8}\right) q l_1^2;
\end{aligned}\right\}$$

для обратносимметричной нагрузки $\left(M_1'' = -{}_2''M,\ M_3'' = -M_4''\right)$

$$\left.\begin{aligned}
&(1+\gamma)\,M_1'' + \frac{1}{2}M_3'' = \frac{3}{64}Pl_1;\\
&\gamma M_1'' + \left(\frac{1}{2} + 2\gamma\right) M_3'' = 0.
\end{aligned}\right\}$$

После решения этих двух систем уравнений, значительно более простых, чем решение полученной ранее общей системы (б), окончательные значения узловых моментов определятся формулой

$$M_i = M_i' + M_i'' \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Рамы с линейно-подвижными узлами. Рамы этого типа представляют собой ломаный стержень с разомкнутой или замкнутой осью.

Рассмотрим разомкнутую раму, имеющую две опоры произвольного типа в концевых сечениях (рис. 14.5). Степень статической неопределимости такой рамы в общем случае не превышает трех независимо от количества неопорных узлов (изломов оси). Действительно, если в некотором сечении рамы сделать разрез и ввести все три возможные в плоскости рамы усилия взаимодействия — осевую силу, перерезывающую силу и изгибающий момент, то после нахождения указанных сил каждую часть рамы можно рассматривать как статически определимую ломаную консольную балку. Силы взаимодействия приобретают такие значения, при которых сохраняется равенство перемещений сечений рамы в месте разреза, что и позволяет их определить. При введении сил взаимодействия в разрезе необходимо соблюдать условия равновесия — одноименные силы, относящиеся к разным частям рамы, должны быть равны по значению и противоположны

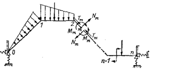


Рис. 14.5

по направлению. Рассматривая каждую статически определимую часть рамы, можно составить выражения для перемещений сечения с учетом как внешней нагрузки этой части рамы, так и действующих на нее в разрезе сил взаимодействия. Указанных перемещений в общем случае будет три — угол поворота сечения и две составляющие линейного перемещения по взаимно перпендикулярным направлениям в плоскости рамы. Приравнивая одноименные перемещения одной и другой половины рамы, можно получить три уравнения совместности перемещений в месте разреза, из которых и определятся три усилия взаимодействия. После этого расчет каждой статически определимой части рамы производится без затруднений.

Самой трудоемкой частью расчета по описанному здесь методу сил является составление выражений для перемещений. Действительно, каждая часть рамы может состоять из нескольких стержней, расположенных под разными углами и имеющих разные поперечные сечения и длины. Перемещения концевого сечения в разрезе получаются как результат влияния угловых и линейных перемещений всех узловых сечений ломаного стержня, а также перемещений опорного сечения в случае упругой опоры. В гл. 15 будет изложен общий энергетический метод составления выражений для перемещений произвольной статически определимой стержневой системы, в том числе и ломаных или криволинейных стержней. Однако этот метод также связан с трудоемкими опера-

циями и не приводит к существенному упрощению по сравнению с методом последовательного суммирования перемещений при рассмотрении каждого стержня как консольной балки.

Для перемещений концевого сечения произвольного ломаного стержня можно составить общие выражения, которые в значительной степени упрощают составление таких выражений в каждом конкретном случае. Достаточно рассмотреть ломаный стержень, состоящий из двух и из трех участков, чтобы заметить общую структуру искомых выражений и записать их для общего случая, т. е. для ломаного стержня, состоящего из m участков.

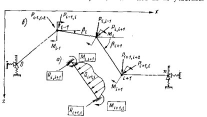


Рис. 14.6

Расчет удобно выполнять в два этапа. На первом этапе следует рассчитать каждый стержень в предположении жесткого опирания и жесткой заделки в узловых сечениях, в результате чего определяются реактивные силы $\boxed{R_H}$ и реактивные моменты $\boxed{M_H}$ в заделках. Моменты будут считаться положительными, если они действуют на стержень по направлению движения часовой стрелки (на заделки против), а реакции положительными, если они действуют на стержень так, как указано на рис. 14.6, *а* при движении от одного конца рамы к другому в направлении возрастающих номеров узлов. Поскольку на самом деле жестких заделок нет, то, устраняя их, необходимо передать воспринимающиеся ими реакции на саму раму, т. е. рассчитать ее на втором этапе на действие усилий, равных найденным на первом этапе реакциям, но имеющим обратное им направление. Такой прием называется *приведением нагрузки к узловому виду*. Окончательно результаты расчетов первого и второго этапов суммируются.

Таким образом, на втором этапе рама загружена в каждом i-м узле моментами $M_i = \boxed{M_{i,\,i-1}} + \boxed{M_{i,\,i+1}}$ и силами $P_{i,\,i+1} =$

$=\boxed{R_{i,\,i+1}}$ и $P_{i,\,i-1}=\boxed{R_{i,\,i-1}}$ ($i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, где 0 и n — номера крайних опорных узлов рамы). Принятые положительные направления всех усилий показаны на рис. 14.6, *б*.

Составим теперь общие выражения для перемещений ломаного стержня.

Первый, примыкающий к 0-й опоре, стержень рассматриваем как консольную балку при действии на ее 1-м конце (консольном) сосредоточенной силы и момента, статически эквивалентных узловым нагрузкам всех узлов данной части рамы. Также рассматриваем второй стержень в предположении, что его 1-е сечение (опорное) получило перемещения, равные перемещениям 1-го сечения первого стержня, а на 2-м конце (консольном) действуют

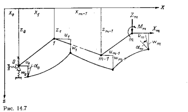


Рис. 14.7

сила и момент, статически эквивалентные нагрузке 2-, 3-, …, m-го узлов, где m — номер крайнего узла (сечения) в разрезе. Аналогично определяются перемещения концевых сечений всех последующих стержней.

Общие выражения для перемещений m-го сечения можно получить в следующем виде (рис. 14.7):

$$\left.\begin{aligned} u_m&=u_0+u_m(R)-\alpha_0(z_m-z_0)+a_{11}X_m-a_{12}Z_m-a_{13}\mathfrak{M}_m;\\ w_m&=w_0+w_m(R)+\alpha_0(x_m-x_0)-a_{21}X_m+a_{22}Z_m+a_{23}\mathfrak{M}_m;\\ \alpha_m&=\alpha_0+\alpha_n(R)-a_{31}X_m+a_{32}Z_m+a_{33}\mathfrak{M}_m.\end{aligned}\right\}\qquad(14.1)$$

Здесь u_m, w_m, α_m — линейные перемещения относительно осей x, z и угол поворота m-го сечения при учете всех факторов; u_0, w_0, α_0 — те же перемещения в 0-м опорном узле (могут быть заданы или возникают в случае упругой опоры и заделки в узле);

$$\left.\begin{aligned} u_m(R)&=B\left[-\sum_{i=1}^{m}\lambda_iP_i(0{,}5\bar z_i+\bar z_{i-1})-\frac{1{,}5}{l_0}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overline{\mathfrak{M}}_i(\bar z_i+\bar z_{i-1})\right];\\ w_m(R)&=B\left[\sum_{i=1}^{m}\lambda_iP_i(0{,}5\bar x_i+\bar x_{i-1})+\frac{1{,}5}{l_0}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overline{\mathfrak{M}}_i(\bar x_i+\bar x_{i-1})\right];\\ \alpha_m(R)&=1{,}5\,\frac{B}{l_0}\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_iP_i+\frac{2}{l_0}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overline{\mathfrak{M}}_i\right)\end{aligned}\right\}\qquad(14.2)$$

— перемещения m-го сечения, вызванные внешней нагрузкой рамы на втором этапе [сосредоточенными силами P_{ij} и моментами M_i (исключая X_m, Z_m, $\mathfrak{M}_m$) при условии несмещаемости сечения в 0-м опорном узле]; X_m, Z_m, $\mathfrak{M}_m$ — усилия взаимодействия в разрезе: проекции силы на оси x и z соответственно, положительные при действии по направлению осей, и момент, положительный при действии по направлению движения часовой стрелки;

$$\left.\begin{aligned} a_{11}&=B\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[(\bar z_{i-1}+\bar z_i)^2-\bar z_{i-1}\bar z_i\right];\\ a_{12}=a_{21}&=B\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[x_{i-1}\bar z_{i-1}+\bar x_i\bar z_i+0{,}5(\bar x_{i-1}\bar z_i-\bar x_i\bar z_{i-1})\right];\\ a_{13}=a_{31}&=1{,}5\,\frac{B}{l_0}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(\bar z_{i-1}+\bar z_i);\\ a_{22}&=B\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[(\bar x_{i-1}+\bar x_i)^2-\bar x_{i-1}\bar x_i\right];\\ a_{23}=a_{32}&=1{,}5\,\frac{B}{l_0}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(\bar x_{i-1}+\bar x_i);\\ a_{33}&=3\,\frac{B}{l_0^2}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\end{aligned}\right\}\qquad(14.3)$$

— коэффициенты влияния усилий X_m, Z_m, $\mathfrak{M}_m$ на перемещение m-го сечения при условии несмещаемости сечения в 0-м опорном узле.

В формулах (14.2) и (14.3)

$$B=l_0^3/(3EI_0);\quad \lambda_i=l_iI_0/(l_0I_i);\qquad(14.4)$$

$$\left.\begin{aligned} P_i&=P_{i,\,i-1}+\sum_{j=1}^{m-1}(P_{j,\,j+1}+P_{j+1,\,j})\cos(\beta_i-\beta_{j+1});\\ \overline{\mathfrak{M}}_i&=\sum_{j=i}^{m}M_j+\sum_{j=i+1}^{m}(P_{j,\,j+1}\cos\beta_{i+1}+P_{j,\,j-1}\cos\beta_j)(x_j-x_i)+\\ &+\sum_{j=i+1}^{m}(P_{i,\,j+1}\sin\beta_{i+1}+P_{j,\,j-1}\sin\beta_j)(z_i-z_j);\end{aligned}\right\}\qquad(14.5)$$

$$\bar z_i=(z_m-z_i)/l_0;\quad \bar x_i=(x_m-x_i)/l_0,\qquad(14.6)$$

5 Зак. 545

где l_0, I_0 — характерные значения длины и момента инерции площади; l_i, I_i — длина и момент инерции поперечного сечения стержня между $(i-1)$-м и i-м узлами; β_i — угол между положительным направлением оси x и направлением оси стержня из $(i-1)$-го узла в i-й узел, измеряемый по движению часовой стрелки; x_i, z_i — координаты i-го узла в осях oxz.

В 0-м опорном узле действуют суммарные усилия

$$X_0 = X_m + P_0(\beta_0 = \pi/2); \quad Z_0 = Z_m + P_0(\beta_0 = 0);$$
$$\mathfrak{M}_0 = \overline{\mathfrak{M}}_0 + X_m(z_m - z_0) + z_m(x_m - x_0) + \mathfrak{M}_m. \tag{14.7}$$

Здесь $P_0(\pi/2)$ и $P_0(0)$ — усилия, определяемые по формуле (14.5) для P_i при $i = 0$, полагая $P_{0i} = 0$ и β_0 равным указанным в скобках значениям.

Перемещения этого узла u_0, w_0 и α_0 можно определить, если рассчитать опорную конструкцию на усилия X_0, Z_0 и $\mathfrak{M}_0$. В общем случае эта зависимость имеет вид

$$\begin{aligned} u_0 &= X_0 b_{11} + Z_0 b_{12} + \mathfrak{M}_0 b_{13};\\ w_0 &= X_0 b_{21} + Z_0 b_{22} + \mathfrak{M}_0 b_{23};\\ \alpha_0 &= X_0 b_{31} + Z_0 b_{32} + \mathfrak{M}_0 b_{33}, \end{aligned} \tag{14.8}$$

где b_{ij} — коэффициенты податливости опорной конструкции в 0-м узле.

Расчетное m-е сечение чаще всего удобно вводить в одном из средних узлов рамы. Если же расчетное сечение выбрано в крайнем правом узле, то в этом случае в выражениях (14.1) следует принять $m = n$ и перемещения этого сечения рамы u_n, w_n, α_n должны быть равны соответственно перемещениям n-й опоры, выражения для которых будут аналогичны выражениям (14.8) при замене индексов 0 на n и коэффициентов податливости 0-й опоры b_{ij} на коэффициенты податливости n-й опоры c_{ij}. Условия совместности перемещений n-й опоры и примыкающего к ней n-го сечения рамы запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} A_{11}X_n + A_{12}Z_n + A_{13}\mathfrak{M}_n &= A_1;\\ A_{21}X_n + A_{22}Z_n + A_{23}\mathfrak{M}_n &= A_2;\\ A_{31}X_n + A_{32}Z_n + A_{33}\mathfrak{M}_n &= A_3, \end{aligned}\right\} \tag{14.9}$$

где

$$A_{11} = c_{11} + a_{11} - \bar{b}_1 + \bar{b}_2(z_n - z_0);$$
$$A_{12} = A_{21} = c_{12} - a_{12} + \bar{b}_3 + \bar{b}_2(x_n - x_0);$$
$$A_{13} = A_{31} = c_{13} - a_{13} + \bar{b}_2; \quad A_{22} = c_{22} + a_{22} + \bar{b}_6 + \bar{b}_5(x_n - x_0);$$
$$A_{23} = A_{32} = c_{23} + a_{23} + \bar{b}_5; \quad A_{33} = a_{33} + c_{33} + b_{33};$$
$$A_1 = -u_n(R) - P_0(\pi/2)\,\bar{b}_1 - P_0(0)\,\bar{b}_3 - \overline{\mathfrak{M}}_0\bar{b}_2;$$
$$A_2 = -w_n(R) - P_0(\pi/2)\,\bar{b}_4 - P_0(0)\,\bar{b}_6 - \overline{\mathfrak{M}}_0\bar{b}_5;$$
$$A_3 = -\alpha_n(R) - b_{31}P_0(\pi/2) - b_{32}P_0(0) - \overline{\mathfrak{M}}_0 b_{33}.$$

Здесь

$$\bar{b}_1 = b_{11} - b_{31}(z_n - z_0); \quad \bar{b}_2 = b_{13} - b_{33}(z_n - z_0);$$
$$\bar{b}_3 = b_{12} - b_{32}(z_n - z_0); \quad \bar{b}_4 = b_{21} + b_{31}(x_n - x_0);$$
$$\bar{b}_5 = b_{23} + b_{33}(x_n - x_0); \quad \bar{b}_6 = b_{22} + b_{32}(x_n - x_0).$$

Для частных случаев устройства опор эти зависимости существенно упрощаются. Из уравнений (14.9) определяются статически неопределимые усилия X_n, Z_n и $\mathfrak{M}_n$, чем и заканчивается основная часть расчета.

Окончательно изгибающие моменты в узловых сечениях стержней равны

$$M_{i,\,i-1} = M_{i,\,i+1} = \boxed{M_{i,\,i-1}} + \overline{\mathfrak{M}}_i + \mathfrak{M}_n +$$
$$+ X_n(z_i - z_n) + Z_n(x_n - x_i). \tag{14.9'}$$

Если разрез введен в промежуточном узле рамы, что целесообразно делать при числе стержней более пяти-шести для уменьшения влияния малых разностей при вычислениях по формулам (14.9), то для каждой части рамы составляют выражения для перемещений согласно зависимостям (14.1), которые приравниваются в соответствии с условиями совместности перемещений. Из полученных уравнений определяют усилия взаимодействия в разрезе X_m, Z_m, $\mathfrak{M}_m$, после чего для каждой части рамы применяют формулы (14.9).

§ 14.3. Плоские сложные рамы

Рамы с линейно-неподвижными узлами. Рассмотрим произвольный i-й узел рамы, в котором сходятся несколько стержней, соединяющих этот узел с j-, k-, m-м узлами (рис. 14.8). В общем случае в состав заданной нагрузки рамы кроме пролетных нагрузок стержней Q_{ij} могут входить сосредоточенные моменты $\mathfrak{M}_i$, прикладываемые непосредственно к узлам.

Для изгибающих моментов, действующих на стержни в узловых сечениях, применим такие же обозначения и правило знаков, как и для внешних моментов: $\mathfrak{M}_{ij}$, $\mathfrak{M}_{ik}$, $\mathfrak{M}_{ji}$, $\mathfrak{M}_{ki}$ и т. д. (первый индекс указывает на номер сечения, а оба индекса — на номер стержня, на который действует момент), положительное направление по часовой стрелке.

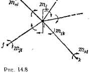


Рис. 14.8

Если за основные неизвестные, как и при расчете простых рам, принять указанные узловые моменты $\mathfrak{M}_{ij}$, то для каждого узла можно составить одно уравнение, выражающее условие равновесия узла, и $(m-1)$ уравнений совместности угловых перемещений узловых сечений стержней (m — число стержней в узле):

$$\mathfrak{M}_i - \mathfrak{M}_{ij} - \mathfrak{M}_{ik} - \ \dots \ - \mathfrak{M}_{im} = 0, \quad \text{или} \quad \sum_j \mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_i; \tag{14.10}$$

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ij} = \ \dots \ = \alpha_{im}, \tag{14.11}$$

где j — номера всех узлов, смежных с i-м узлом. В уравнениях равновесия (14.10) знаки соответствуют суммированию моментов, действующих со стороны стержней на узел и имеющих, очевидно, противоположное направление действующим на стержни моментам $\mathfrak{M}_{ij}$, показанным на рис. 14.8.

Поскольку, согласно уравнению равновесия узла (14.10), один из неизвестных моментов легко выражается через остальные и исключается из уравнений совместности (14.11), можно считать, что в каждом узле будет $(m-1)$ неизвестных. Следовательно, если в простых рамах в каждом простом узле $(m=2)$ есть только один неизвестный момент, то в сложных узлах $(m>2)$ таких моментов может быть 2, 3 и более. Аналогично увеличивается число уравнений совместности, из которых определяются неизвестные моменты. Хотя матрица коэффициентов при неизвестных моментах в уравнениях совместности имеет много нулей (в одно уравнение входит не более четырех моментов), что облегчает решение, тем не менее увеличение количества неизвестных для сложных рам по сравнению с простыми при том же числе узлов существенно усложняется расчет.

Как известно, каждую балку можно рассчитать отдельно, если кроме пролетной нагрузки для нее известны четыре граничных условия, или, как частный случай таких условий, любые четыре из восьми элементов изгиба в концевых сечениях: линейные перемещения, угловые перемещения, перерезывающие силы (реакции опор) и изгибающие моменты.

Для стержневой рамы с неподвижными узлами два элемента изгиба — линейные перемещения узловых сечений — всегда известны и равны нулю. В качестве двух других определяемых в первую очередь элементов изгиба — основных неизвестных — для неразрезных балок и простых рам целесообразно принять изгибающие моменты. Для сложных рам, у которых число неизвестных моментов в узловых сечениях стержней значительно превышает число узлов, в качестве основных определяемых в первую очередь неизвестных целесообразно принять углы поворота узловых сечений. Действительно, в силу равенства углов поворота всех узловых сечений стержней в одном узле для каждого i-го узла будет существовать только одно неизвестное — угол поворота узла α_i.

При таком выборе основных неизвестных для удовлетворения уравнений совместности узловых деформаций (14.11) достаточно лишь положить

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ik} = \ \dots \ = \alpha_{im} = \alpha_i. \tag{14.12}$$

Чтобы удовлетворялись также и уравнения равновесия узлов (14.10), необходимо выразить в этих уравнениях моменты $\mathfrak{M}_{ij}$ через пролетную нагрузку и углы поворота узловых сечений или, что то же, узлов (α_i) и определить значения их из полученной системы уравнений. Очевидно, число уравнений равновесия равно числу неизвестных углов поворота узлов α_i.

Решив уравнения (13.41) относительно узловых моментов, имеем

$$\mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_i = -(2EI_{ij}/l_{ij})\,[2\alpha_i(Q_{ij}) + \alpha_j(Q_{ij})] + + (2EI_{ij}/l_{ij})\,(2\alpha_i + \alpha_j - 3\psi_{ij});$$

$$\mathfrak{M}_{ji} = \mathfrak{M}_j = -(2EI_{ij}/l_{ij})\,[2\alpha_j(Q_{ij} + \alpha_i(Q_{ij})] + + (2EI_{ij}/l_{ij})\,(2\alpha_j + \alpha_i - 3\psi_{ij}),$$

где $\psi_{ij} = (w_j - w_i)/l_{ij}$ — угол поворота стержня $(i-j)$ как твердого тела. Принимая в полученных выражениях $\alpha_i = \alpha_j = \psi_{ij} = 0$, получаем значения опорных моментов рассматриваемой балки (стержня), вычисленные в предположении, что балка жестко заделана на жестких опорах. Для сокращения обозначим эти моменты так:

$$\boxed{\mathfrak{M}_{ij}} = -(2EI_{ij}/l_{ij})\,[2\alpha_i(Q_{ij}) + \alpha_j(Q_{ij})];$$

$$\boxed{\mathfrak{M}_{ji}} = -(2EI_{ij}/l_{ij})\,[2\alpha_j(Q_{ij}) + \alpha_i(Q_{ij})].$$

Тогда формулы для узловых изгибающих моментов могут быть записаны в следующем удобном для расчета виде:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_{ij} &= \boxed{\mathfrak{M}_{ij}} + (2EI_{ij}/l_{ij})\,(2\alpha_i + \alpha_j - 3\psi_{ij}); \\ \mathfrak{M}_{ji} &= \boxed{\mathfrak{M}_{ji}} + (2EI_{ij}/l_{ij})\,(\alpha_i + 2\alpha_j - 3\psi_{ij}). \end{aligned}\right\} \tag{14.13}$$

Напомним, что углы α_i, α_j и ψ_{ij} считаются положительными при повороте по часовой стрелке.

Подставляя выражение (14.13) при $j = j, k, \dots, m$ в уравнение (14.10) и полагая в силу несмещаемости узлов $\psi_{ij} = 0$, можно получить уравнение равновесия i-го узла в следующем общем виде:

$$4\alpha_i \sum_j \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} + 2\sum_j \frac{EI_{ij}}{l_{ij}}\alpha_j = \mathfrak{M}_i - \sum_j \boxed{\mathfrak{M}_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{14.14}$$

где i — номер рассматриваемого узла; j — общее обозначение номеров узлов, смежных с i-м узлом, по которым производится суммирование; n — число узлов рамы, которые могут поворачиваться.

Разделив и умножив члены в левой части уравнений (14.14) на величину $2EI_0/l_0$, после преобразований можно придать этим уравнениям удобный для вычислений вид:

$$m_i + \sum_j m_j \eta_{ij} = m_i^0. \tag{14.15}$$

В выражении (14.15)

$$m_i = 2EI_0\alpha_i/l_0; \qquad (14.16)$$

$$\eta_{ij} = k_{ij}/K_i; \qquad (14.17)$$

$$m_i^0 = \frac{1}{K_i}\left(\mathfrak{M}_i - \sum_j \boxed{\mathfrak{M}_{ij}}\right). \qquad (14.18)$$

Здесь

$$k_{ij} = k_{ji} = I_{ij}l_0/(I_0 l_{ij}); \qquad K_i = 2\sum_j k_{ij} \qquad (14.18')$$

(I_{ij}, l_{ij} — момент инерции поперечного сечения и длина стержня ij; I_0, l_0 — произвольно выбранные значения момента инерции площади сечения и длины одного из стержней рамы).

Величины m_i, пропорциональные углам поворота узлов α_i и имеющие размерность момента, будем называть коэффициентами углов поворота узлов. Коэффициенты η_{ij} являются коэффициентами влияния угла поворота узла j на угол поворота узла i, причем $\eta_{ij} \neq \eta_{ji}$.

Решив систему уравнений равновесия узлов (14.14) или (14.15) и определив углы поворота узлов α_i или коэффициенты углов m_i, можно по формулам (14.13) вычислить моменты $\mathfrak{M}_{ij}$. Если в формулах (14.13) заменить углы α_i коэффициентами углов m_i, то они запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_{ij} &= \boxed{\mathfrak{M}_{ij}} + k_{ij}(2m_i + m_j); \\ \mathfrak{M}_{ji} &= \boxed{\mathfrak{M}_{ji}} + k_{ji}(m_i + 2m_j). \end{aligned}\right\} \qquad (14.19)$$

После вычисления моментов в узловых сечениях эти моменты включают в состав нагрузки стержней, которые затем рассматривают в качестве статически определимых свободно опертых в узлах балок.

Определение элементов изгиба стержней и построение эпюр сложной рамы производят так же, как и для многопролетных балок и простых рам.

Изложенный метод расчета, в котором за основные неизвестные были приняты угловые перемещения, называется *методом перемещений* или *методом деформаций*.

Решение системы уравнений равновесия (14.14) или (14.15) можно выполнить последовательным исключением неизвестных, причем при $n > 3$ следует пользоваться табличной формой схемы Гаусса.

Для симметричной рамы при действии симметричной нагрузки углы поворота и моменты симметричных узлов, например i и j, будут равны по значению и противоположны по направлению: $\alpha_i = -\alpha_j$, $m_i = -m_j$, а при действии обратносимметричной нагрузки — одинаковы как по значению, так и по направлению: $\alpha_i = \alpha_j$, $m_i = m_j$. Эти соотношения позволяют сократить число неизвестных в уравнениях с n до $0{,}5(n - p)$ при симметричной нагрузке и до $0{,}5(n + p)$ при обратно-симметричной нагрузке, где n — общее число узлов рамы, p — число узлов, расположенных на оси симметрии рамы.

Для сложных рам, имеющих ось симметрии, целесообразно произвольную несимметричную нагрузку разбивать на симметричную и обратносимметричную составляющие и производить раздельный расчет этих нагрузок с последующим суммированием результатов.

Пример 6. Рассчитать шпангоутную раму (рис. 14.9) танкера с двумя продольными переборками.

Исходные данные: $l_{13} = l_{11'} = l_{24} = l_{33'} = 2l_{12} = 2l_{1'2'} = 2l_{34} = l_0$; $I_{24} = I_{34} = I_{12}/3 = I_{13}/3 = I_{11'}/5 = I_{33'}/2 = I_0$; q — интенсивность погонной нагрузки.

Решение. В силу симметрии конструкции рамы и действующей на нее нагрузки будем иметь $\alpha_1 = -\alpha_1'$; $\alpha_3 = -\alpha_3'$; $\alpha_2 = -\alpha_2'$; $\alpha_4 = -\alpha_4'$.

Для определения неизвестных углов поворота α_1, α_2, α_3, α_4 необходимо составить уравнения равновесия 1-, 2-, 3-, 4-го узлов:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{M}_{13} + \mathfrak{M}_{12} + \mathfrak{M}_{11'} = 0; \\ &\mathfrak{M}_{21} + \mathfrak{M}_{24} = 0; \\ &\mathfrak{M}_{31} + \mathfrak{M}_{34} + \mathfrak{M}_{33'} = 0; \\ &\mathfrak{M}_{42} + \mathfrak{M}_{43} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14.20)$$

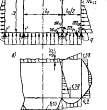


Рис. 14.9

По таблицам изгиба определяем изгибающие моменты на опорах стержней, считая их жестко заделанными по концам:

$\boxed{\mathfrak{M}_{13}} = 0$; $\boxed{\mathfrak{M}_{12}} = ql_0^2/48$; $\boxed{\mathfrak{M}_{11'}} = -ql_0^2/12$; $\boxed{\mathfrak{M}_{21}} = -ql_0^2/48$; $\boxed{\mathfrak{M}_{24}} = ql_0^2/45$; $\boxed{\mathfrak{M}_{31}} = 0$; $\boxed{\mathfrak{M}_{34}} = 0$; $\boxed{\mathfrak{M}_{33'}} = 0$; $\boxed{\mathfrak{M}_{42}} = -7ql_0^2/360$; $\boxed{\mathfrak{M}_{43}} = 0$.

Для безразмерных коэффициентов k_{ij} (14.18′) получим следующие значения: $k_{12} = 6$, $k_{13} = 3$; $k_{11'} = 5$, $k_{24} = 1$, $k_{34} = 2$, $k_{33'} = 2$.

Значения опорных моментов $\mathfrak{M}_{ij}$ найдем по формулам (14.19):

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{M}_{13} = \boxed{\mathfrak{M}_{13}} + k_{13}(2m_1 + m_3) = 3(2m_1 + m_3); \quad \mathfrak{M}_{12} = ql_0^2/48 + \\ &+ 6(2m_1 + m_2); \quad \mathfrak{M}_{11'} = -ql_0^2/12 + 5(2m_1 + m_1') = -ql_0^2/12 + 5m_1; \\ &\mathfrak{M}_{21} = -ql_0^2/48 + 6(2m_2 + m_1); \quad \mathfrak{M}_{24} = ql_0^2/45 + 2m_2 + m_4; \\ &\mathfrak{M}_{31} = 3(2m_3 + m_1); \ \mathfrak{M}_{34} = 2(2m_3 + m_4); \ \mathfrak{M}_{33'} = 2(2m_3 + m_{3'}) = 2m_3; \\ &\mathfrak{M}_{42} = -7ql_0^2/360 + 2m_4 + m_2; \quad \mathfrak{M}_{43} = 2(2m_4 + m_3). \end{aligned}\right\} \qquad (14.20')$$

Подставляя эти выражения для опорных моментов в уравнения равновесия (14.20), получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 23m_1 + 6m_2 + 3m_3 = 3ql_0^2/48; \\ 6m_1 + 14m_2 + m_4 = -ql_0^2/720; \\ 3m_1 + 12m_3 + 2m_4 = 0; \\ m_2 + 2m_3 + 6m_4 = 7ql_0^2/360. \end{cases}$$

В данной системе уравнений коэффициенты при неизвестных симметричны относительно главной диагонали.

Решение полученной системы уравнений позволяет определить неизвестные m_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, а затем по формулам (14.20′) узловые моменты $\mathfrak{M}_{ij}$. Далее по значениям опорных моментов и нагрузок нетрудно построить эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил для каждого стержня рамы, а следовательно, и для рамы в целом. На рис. 14.9, *б* приведена в качестве примера эпюра изгибающих моментов рассматриваемой рамы. Для определения опорных моментов необходимо соответствующие числовые значения, приведенные на рис. 14.9, *б*, умножить на ql_0^2.

Рамы с линейно-подвижными узлами. Узлы рассматриваемых рам помимо угловых перемещений получают также и линейные перемещения. Вследствие этого угловые перемещения стержней ψ_{ij} входят в выражения (14.13) для моментов в узловых сечениях стержней наряду с углами поворота сечений. Следовательно, величины ψ_{ij} войдут и в уравнения равновесия узлов (14.14).

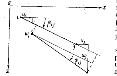


Рис. 14.10

Угловые перемещения стержней ψ_{ij} могут быть выражены через линейные перемещения смещаемых узлов рамы. Хотя линейное перемещение любого узла плоской рамы характеризуется двумя независимыми составляющими, например v_i и w_i, общее число независимых линейных перемещений узлов не будет равно удвоенному числу узлов, если принять во внимание недеформируемость стержней в продольном направлении.

Рассмотрим стержень рамы, соединяющий *i*-й и *j*-й узлы в общей для всей рамы координатной системе *oxz* (рис. 14.10). Условием недеформируемости стержня в продольном направлении при малых линейных перемещениях узлов является равенство проекций этих перемещений на ось стержня:

$$u_i \cos\beta_{ij} + w_i \sin\beta_{ij} = u_j \cos\beta_{ij} + w_j \sin\beta_{ij}, \tag{14.21}$$

или

$$(u_i - u_j)\cos\beta_{ij} + (w_i - w_j)\sin\beta_{ij} = 0, \tag{14.22}$$

где β_{ij} — угол между положительным направлением оси x и направлением оси стержня ij, измеряемый от оси x по часовой стрелке.

Угол поворота стержня ψ_{ij} определяется через координатные перемещения узлов (см. рис. 14.10) по следующей формуле:

$$\psi_{ij} = [(w_j - w_i)\cos\beta_{ij} - (u_j - u_i)\sin\beta_{ij}]/l_{ij}. \tag{14.23}$$

Число уравнений (14.22) равно числу стержней рамы. Количеством независимых линейных перемещений узлов, через которые можно выразить с помощью уравнений (14.22) все остальные линейные перемещения узлов, определяется степень кинематической подвижности узлов рамы, которую обозначим буквой *t*. Такое же количество степеней свободы *t* имеет шарнирная схема рамы, которую можно получить, вводя во всех узлах вместо жестких соединений стержней шарнирные соединения. Через указанные основные линейные перемещения узлов общим числом *t* можно выразить и все угловые перемещения стержней ψ_{ij}. Можно также принять в качестве основных перемещений угловые перемещения некоторых стержней ψ_{ij} общим числом *t* и выразить через них угловые перемещения остальных узлов. С учетом изложенного в уравнения совместности деформаций (метод сил) и в уравнения равновесия (метод перемещений) войдет дополнительно *t* угловых перемещений ψ_{ij} или линейных перемещений u_i, w_i.

Дополнительными уравнениями для определения указанных *t* перемещений могут служить уравнения равновесия узлов по отношению к действующим на них со стороны стержней силам. В каждом узле можно составить два таких уравнения: суммы проекций на взаимно перпендикулярные оси всех сил, действующих на узел со стороны примыкающих стержней, должны равняться нулю. При этом следует учитывать как перпендикулярные осям стержней перерезывающие силы, так и возникающие в стержнях продольные (осевые) силы T_{ij}.

Перерезывающие силы могут быть выражены через нагрузку и опорные моменты, а следовательно, с помощью формул (14.13) через углы поворота концевых сечений, их линейные перемещения или углы ψ_{ij} и пролетную нагрузку стержней. Таким образом, при использовании любого из двух методов — метода сил или метода перемещений — перерезывающие силы можно исключить из уравнений равновесия. Осевые силы T_{ij} вследствие предположения о продольной недеформируемости стержней не могут быть выражены через перемещения; их необходимо ввести особо.

Следовательно, при применении метода угловых деформаций в уравнения равновесия узлов по силам войдут *n* углов поворота узлов, *t* независимых линейных перемещений узлов или угловых перемещений стержней ψ_{ij} и *s* осевых сил T_{ij} (*n* — общее число узлов, в которых возможен поворот; *s* — число стержней рамы).

Если шарнирная схема рамы является статически определимой фермой, то $t = 0$ и узлы рамы будут линейно-неподвижными узлами $(u_i = w_i = \psi_{ij} = 0)$. В этом случае узловые моменты в методе сил или углы поворота узлов в методе перемещений определяют из самостоятельных систем уравнений, после чего осевые силы в стержнях при необходимости можно найти из s уравнений равновесия сил в узлах.

Если шарнирная схема рамы является статически неопределимой фермой, то узловые моменты или углы поворота узлов вычисляют так же, как и в предыдущем случае, а уравнений равновесия сил в узлах окажется меньше числа стержней и осевые силы T_{ij} не могут быть вычислены. Для определения сил T_{ij} в этом случае необходимо отказаться от предположения о продольной недеформируемости стержней, вследствие чего все неопорные узлы рамы станут линейно-подвижными.

Если стержни рамы во всех узлах сходятся под прямыми углами, такая рама называется *рамой с прямоугольными полями*. В этом случае нет необходимости составлять дополнительные уравнения равновесия для всех узлов с учетом всех продольных сил

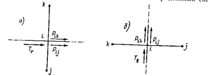


Рис. 14.11

в стержнях в явном виде. Для рамы с прямоугольными полями необходимое число дополнительных уравнений, равное числу независимых перемещений u_i, w_i или ψ_{ij}, можно получить, составляя уравнения равновесия горизонтальных и вертикальных прямолинейных сочленений стержней — ригелей или стоек, соединяющих подвижные в соответствующем направлении узлы и уравнивающих перемещения этих узлов.

На рис. 14.11, *а* изображен один из узлов, расположенных на одном из горизонтальных ригелей. При действии нагрузки на рамы ригель может смещаться в горизонтальном направлении. Все узлы ригеля, которые, очевидно, будут иметь одинаковые горизонтальные перемещения (вследствие продольной недеформируемости ригеля), обозначим общим индексом i, связанные стержнями с i-ми узлами верхние узлы рамы — индексом k, а такие же нижние узлы — индексом j.

Пользуясь общими формулами (14.13), можно получить для определения горизонтальных усилий, прикладываемых вертикальными стержнями к ригелю в i-х узлах, следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} P_{ik} &= \boxed{P_{ik}} + 6EI_{ik}(2\psi_{ik} - \alpha_i - \alpha_k)/l_{ik}; \\ P_{ij} &= \boxed{P_{ij}} - 6EI_{ij}(2\psi_{ij} - \alpha_i - \alpha_j)/l_{ij}, \end{aligned}\right\} \qquad (14.24)$$

где P_{ik}, P_{ij} — силы, прикладываемые стержнями ik и ij к ригелю в i-м узле в горизонтальном направлении; $\boxed{P_{ik}}$, $\boxed{P_{ij}}$ — те же силы, но вычисленные в предположении несмещаемости i-, k-, j-х узлов и жесткой заделки стержней в этих узлах при действии пролетной нагрузки; ψ_{ik}, ψ_{ij} — углы поворота стержней ik и ij как твердых тел вследствие горизонтальных смещений i-, k-, j-х узлов; α_i, α_k, α_j — углы поворота i-, k-, j-х узлов.

В формулах (14.24) все силы считаются положительными при действии на ригель вправо, а углы α и ψ — при повороте по направлению движения часовой стрелки.

Суммируя усилия (14.24) во всех i-х узлах, принадлежащих данному ригелю, а также горизонтальную составляющую T_r всей внешней нагрузки, приложенной непосредственно к ригелю (положительная при действии вправо), можно записать условие равновесия ригеля в следующем виде: $\sum_i (P_{ik} + P_{ij}) + T_r = 0$. Подставляя в это уравнение выражения (14.24), получаем

$$\sum_i (6EI_{ik}/l_{ik})(2\psi_{ik} - \alpha_i - \alpha_k) - \sum_i (6EI_{ij}/l_{ij})(2\psi_{ij} - \alpha_i - \alpha_j) = = -\sum_i \left(\boxed{P_{ik}} + \boxed{P_{ij}}\right) - T_r. \qquad (14.25)$$

Раскрывая суммы в этом уравнении, необходимо иметь в виду, что каждому номеру i-го узла соответствуют свои номера k-х и j-х узлов. Если какой-либо i-й узел не связан с верхним k-м узлом или с нижним j-м узлом, то соответствующие значения I_{ik} или I_{ij} следует полагать равными нулю.

Аналогичное уравнение равновесия можно составить для каждой прямолинейной вертикальной стойки рамы, имеющей перемещение в вертикальном направлении. В этом случае индексом i обозначают все узлы рассматриваемой вертикальной стойки, перемещения которых в вертикальном направлении одинаковы, индексом k — левые узлы, индексом j — правые узлы по отношению к i-м узлам (рис. 14.11, *б*), а все усилия в зависимостях (14.24) и (14.25) считают положительными при действии на стойку вверх.

Таким образом, общий порядок расчета сложной рамы со смещаемыми узлами и прямоугольными полями будет следующим.

1. Устанавливают степень кинематической подвижности рамы, выбирают соответствующее число независимых угловых перемещений стержней ψ_{ij} и через них выражают угловые перемещения всех других стержней; выявляют смещаемые вдоль своей оси ригели и стойки, для которых необходимо составить дополнительные уравнения равновесия.

2. Составляют уравнения равновесия узлов по моментам (14.10), используя те же, что и для рам с несмещаемыми узлами, зависимости (14.13), но с учетом угловых перемещений стержней ψ_{ij}.

3. Составляют дополнительные уравнения равновесия (14.25) смещаемых в продольном направлении ригелей и стоек рамы, как указывалось выше.

4. В уравнениях равновесия (14.10) и (14.25) угловые перемещения всех стержней ψ_{ij} выражают через основные с помощью зависимостей, полученных так, как указано выше.

5. В результате описанных в предыдущих пунктах операций получают систему $(n+t)$ уравнений, в которые будут входить в качестве неизвестных n углов поворота узлов α_i и t независимых углов поворота стержней ψ_{ij} (n — общее число узлов рамы, имеющих углы поворота, t — число степеней свободы шарнирной схемы рамы). Решая полученную систему уравнений, определяют все неизвестные α_i и ψ_{ij}, чем и заканчивают основную часть расчета. Изгибающие моменты в узловых сечениях стержней находят по формулам (14.13), после чего каждый стержень рамы рассматривают как однопролетную балку, свободно опертую по концам, с заданной пролетной нагрузкой и известными опорными изгибающими моментами.

Если некоторые стержни сложной рамы, соединяющие смещаемые узлы, расположены наклонно по отношению к другим стержням, то в число основных неизвестных следует включить осевые силы, действующие в этих стержнях. Указанные силы войдут в уравнения равновесия узлов, примыкающих к наклонным стержням рамы. Таким образом, число дополнительных уравнений равновесия увеличится на число наклонных подвижных стержней рамы, что и позволит определить все неизвестные перемещения α_i, ψ_{ij} и осевые силы T_{ij} в наклонных стержнях. В остальном расчетная схема остается прежней.

§ 14.4. Пространственные рамы. Метод конечных элементов

Выше были изложены методы расчета плоских рам. При небольшом числе узлов плоской рамы расчет может быть выполнен вручную с применением таблиц изгиба однопролетных балок. При большом числе узлов уже требуется использование методов, ориентированных на использование ЭВМ с автоматизацией многих трудоемких операций.

Для рам общего вида — пространственных и плоских с пространственной нагрузкой (плоскопространственных) число определяемых неизвестных перемещений или усилий, как правило, велико (более 10). Поэтому до появления ЭВМ инженерные расчеты пространственных рам практически не выполняли, а использовали приближенные методы расчленения пространственной конструкции на плоские фрагменты, что существенно снижало точность результатов. Но результаты таких приближенных подходов к оценке напряженно-деформированного состояния пространственных стержневых конструкций уже не отвечают современным требованиям.

Учитывая большую трудоемкость составления и отладки про-

грамм расчета пространственных стержневых конструкций и вместе с тем высокое быстродействие ЭВМ, для программирования целесообразно выбирать не самые экономичные по объему вычислений, но достаточно универсальные методы с простой, однообразной логикой.

Этим условиям в достаточной степени отвечает МКЭ в варианте метода перемещений. Он основан на тех же общих теоремах и зависимостях, что и метод перемещений в случае плоской рамы: основные неизвестные — перемещения узлов — должны удовлетворять условиям совместности перемещений узловых сечений стержней, примыкающих к одному узлу, а усилия в этих стержнях, возникающие в результате воздействия внешней нагрузки и перемещений, должны удовлетворять условиям равновесия узлов. Этот метод способен учесть все особенности геометрии стержневой конструкции, распределение ее жесткостных параметров и внешних нагрузок, условия закрепления и физические свойства используемых в конструкции материалов.

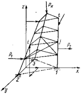


Рис. 14.12

Рассмотрим содержание основных операций МКЭ при расчете произвольной пространственной стержневой системы (рис. 14.12).

Дискретизация. Это представление пространственной стержневой рамы в виде совокупности взаимосвязанных между собой в узловых сечениях конечных элементов.

Не всегда удается в качестве конечных элементов стержневой системы выбрать ее отдельные стержни. Так, если стержень имеет переменную по длине жесткость, то его следует разбить на несколько призматических конечных элементов. Точно также следует поступать и с криволинейными стержнями в составе рамы: представлять их в виде жестко сочлененных в узловых точках прямолинейных призматических конечных элементов. Необходимо, однако, иметь в виду, что увеличение числа конечных элементов приводит к повышению точности расчета, но одновременно может заметно увеличить его общую трудоемкость. К сожалению, каких-либо строгих рекомендаций по выбору оптимальных размеров конечных элементов дать затруднительно. Здесь во многом приходится полагаться на имеющийся у расчетчика практический опыт, на его инженерную интуицию.

Конечно, всегда имеется возможность произвести числовой эксперимент, т. е. уменьшить размеры конечных элементов и посмотреть, к каким изменениям результатов расчета это приведет.

Исходные данные о конструкции. Для рамы вводят общую левую систему координат $oxyz$ (см. рис. 14.12), оси которой целесообразно располагать в плоскостях упругой симметрии рассматриваемой конструкции (если таковые имеются), а также так, чтобы по возможности большее число узлов, особенно опорных, располагалось на этих осях.

Далее все узлы, включая опорные, нумеруют порядковыми номерами $i = 1, 2, \ldots, t$, а **их положение определяется** координатами x_i, y_i, z_i. Для обеспечения минимальной ширины ленты коэффициентов системы разрешающих уравнений МКЭ (уменьшается время счета системы уравнений) нумерацию узлов требуется производить так, чтобы разность между номерами узловых сечений для каждого конечного элемента была как можно меньше.

В дополнение к общей системе координат для каждого ij-го конечного элемента вводят местную правую систему координат $x_{ij}y_{ij}z_{ij}$, которую рекомендуется располагать так (рис. 14.13): ось x_{ij} направлять вдоль оси стержня от узла с меньшим номером к узлу с большим номером; оси y_{ij} и z_{ij} совмещать с направлениями главных центральных осей инерции сечения рассматриваемого элемента.

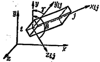


Рис. 14.13

Затем для каждого ij-го элемента должно быть указано:

1. Расположение его узловых точек в общей системе координат $oxyz$.

2. Значения жесткостей элемента на изгиб в главных плоскостях $EI_{y_{ij}}$ и $EI_{z_{ij}}$, на растяжение-сжатие EF_{ij}, на кручение C_{ij}.

3. Матрица ориентации местной системы координат относительно общей координатной системы

$$[l]_{ij} = \begin{bmatrix} l_{x_{ij}x} & l_{x_{ij}y} & l_{x_{ij}z} \\ l_{y_{ij}x} & l_{y_{ij}y} & l_{y_{ij}z} \\ l_{z_{ij}x} & l_{z_{ij}y} & l_{z_{ij}z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{x_{ij}} & m_{x_{ij}} & n_{x_{ij}} \\ l_{y_{ij}} & m_{y_{ij}} & n_{y_{ij}} \\ l_{z_{ij}} & m_{z_{ij}} & n_{z_{ij}} \end{bmatrix}. \qquad (14.26)$$

Поскольку известны координаты концов элемента стержня в общей системе координат, значения направляющих косинусов оси x_{ij} могут быть определены с помощью следующих очевидных зависимостей:

$$l_{x_{ij}} = (x_j - x_i)/a_{ij}; \quad m_{x_{ij}} = (y_j - y_i)/a_{ij}; \quad n_{x_{ij}} = (z_j - z_i)/a_{ij}, \qquad (14.27)$$

где

$$a_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \qquad (14.28)$$

— длина элемента стержня.

Для определения остальных шести направляющих косинусов матрицы $[l]_{ij}$ можно воспользоваться известными тригонометрическими соотношениями

$$\left.\begin{aligned} l^2_{y_{ij}} + m^2_{y_{ij}} + n^2_{y_{ij}} = 1; \quad l^2_{z_{ij}} + m^2_{z_{ij}} + n^2_{z_{ij}} = 1; \\ l_{x_{ij}}l_{y_{ij}} + m_{x_{ij}}m_{y_{ij}} + n_{x_{ij}}n_{y_{ij}} = 0; \\ l_{x_{ij}}l_{z_{ij}} + m_{x_{ij}}m_{z_{ij}} + n_{x_{ij}}n_{z_{ij}} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (14.29)$$

дополненными данными о расположении главных центральных осей инерции сечения элемента, например (см. рис. 14.13) $l_{z_{ij}y} = \cos\beta$; $l_{y_{ij}y} = \cos\gamma$.

4. Данные об интенсивностях $q_{y_{ij}}$, $q_{z_{ij}}$ поперечных нагрузок, $p_{x_{ij}}$ растягивающей нагрузки в направлении оси x_{ij}, крутящего момента $\tau_{x_{ij}}$, а также данные о внешних нагрузках, приложенных непосредственно к узлам (сосредоточенных силах и моментах).

5. Данные об условиях закрепления в опорных узлах рамы.

Выбор основных неизвестных. В качестве основных неизвестных в каждом i-м узле пространственной рамы принимаются: u_i, v_i, w_i —

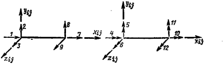


Рис. 14.14

проекции на оси x, y и z линейного перемещения узла и всех примыкающих к нему сечений стержней соответственно и α_i, β_i, γ_i — углы поворота узла относительно тех же осей.

В каждом сечении стержня, в том числе и в узловых, возникают внутренние силы упругости, которые эквивалентны силе и моменту, определяемым тремя проекциями на оси общей системы координат, т. е. также шестью величинами. В вычислении этих величин и состоит основная часть расчета.

Определение матрицы жесткости и вектора узловых нагрузок конечного элемента в местной системе координат. Если заданные внешние нагрузки привести к узлам, то деформированное положение элемента стержня однозначно определяется заданием 12 узловых перемещений: трех линейных перемещений для каждого узла в направлении осей x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} соответственно и трех углов поворота каждого из узловых поперечных сечений вокруг этих же осей.

Нумерация и положительные направления для узловых перемещений и узловых усилий приведены на рис. 14.14. Заметим, что принятая здесь нумерация для перемещений и усилий является наиболее удобной, если возникает необходимость преобразования матрицы жесткости и вектора эквивалентных узловых усилий конечного элемента при переходе к другой системе координат.

Для рассматриваемого конечного элемента связь между вектором узловых усилий $\{R\}_{ij}=\{R_1R_2\ldots R_{12}\}_{ij}$ и вектора узловых перемещений $\{q\}_{ij}=\{q_1q_2\ldots q_{12}\}$ в местной системе координат определяется зависимостью (11.85):

$$\{R\}_{ij}=[K]_{ij}\{q\}_{ij}. \tag{14.30}$$

Остановимся теперь на вопросе приведения внешних нагрузок, действующих на конечный элемент, к узловому виду. Если интенсивности внешних поперечных $q_{y_{ij}}$, $q_{z_{ij}}$ и продольных $p_{x_{ij}}$ нагрузок постоянны, то вектор узловых приведенных нагрузок $\{P\}_{ij}$ определится зависимостью (11.86). Для нагрузок, изменяющихся по линейному закону, вектор $\{P\}_{ij}$ можно вычислить по формуле (11.87). Если же по длине призматического стержня (конечного элемента) внешняя нагрузка изменяется по более сложному закону, то значения компонентов вектора узловых нагрузок можно найти либо по общим формулам приведения (11.31)—(11.33), либо с помощью таблиц изгиба жестко заделанных по торцевым сечениям призматических балок. При этом отдельные компоненты вектора $\{P\}_{ij}$, если учесть принятое для них правило знаков (см. рис. 14.14), а также правило знаков для перерезывающих сил $N(x)$ и изгибающих моментов $M(x)$ в технической теории изгиба балок (см. рис. 13.9), будут равны

$$\left.\begin{aligned} &P_2=N_{y_{ij}}(0);\quad P_3=N_{z_{ij}}(0);\quad P_8=-N_{y_{ij}}(a_{ij});\\ &P_9=-N_{z_{ij}}(a_{ij});\quad P_5=-M_{y_{ij}}(0);\quad P_6=M_{z_{ij}}(0);\\ &\qquad P_{11}=-M_{y_{ij}}(a_{ij});\quad P_{12}=M_{z_{ij}}(a_{ij}), \end{aligned}\right\} \tag{14.31}$$

где $N_{y_{ij}}$ и $M_{z_{ij}}$ — перерезывающая сила и изгибающий момент жестко заделанного по торцам ij-го стержня, загруженного приложенной к нему поперечной нагрузкой интенсивностью $q_{y_{ij}}$; $N_{z_{ij}}$ и $M_{y_{ij}}$ — то же при действии на стержень нагрузки $q_{z_{ij}}$.

Преобразование матрицы жесткости $[K]_{ij}$ и вектора узловых нагрузок $\{P\}_{ij}$ конечного элемента при переходе от местной к общей системе координат. Эта операция выполняется с помощью зависимостей (11.88) и (11.89):

$$[\bar K]_{ij}=[T]^{\mathrm{T}}_{ij}[K]_{ij}[T]_{ij};\qquad \{\bar P\}_{ij}=[T]^{\mathrm{T}}_{ij}\{P\}_{ij}[T]_{ij}, \tag{14.32}$$

где

$$[T]_{ij}=\begin{bmatrix} [l]_{ij} & & & \\ & [l]_{ij} & 0 & \\ & 0 & [l]_{ij} & \\ & & & [l]_{ij} \end{bmatrix}. \tag{14.33}$$

Здесь $[l]_{ij}$ — матрица ориентации местной системы координат ij-го стержня относительно общей системы (14.26).

Матрица $[\bar K]_{ij}$ позволяет связать вектор узловых усилий $\{\bar R\}_{ij}$ с вектором узловых перемещений $\{\bar q\}_{ij}$ ij-го стержня в общей системе координат: $\{\bar R\}_{ij}=[\bar K]_{ij}\{\bar q\}_{ij}$.

Положительные направления компонентов векторов $\{\bar q\}$, $\{\bar R\}$ и $\{\bar P\}$ приведены на рис. 14.15.

Составление матрицы индексов. Эта матрица формируется на основании данных об основных неизвестных узловых перемещениях $\{Q\}$ и узловых перемещениях конечных элементов $\{\bar q\}_{ij}$ в общей системе координат.

Рассмотрим в качестве примера пространственную раму, изображенную на рис. 14.16. Приложенная к раме внешняя нагрузка вызывает в каждом из ее стержней все виды деформаций: кручение, растяжение-сжатие, изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Если стержни рамы призматические, то каждый из стержней можно рассматривать в качестве конечного элемента. Если условия закрепления 1-, 3- и 4-го узловых сечений таковы, что линейные и угловые смещения в этих узлах отсутствуют, то вектор $\{Q\}$ основных узловых неизвестных в общей системе координат будет включать лишь три линейных и три угловых перемещения 2-го узла $\{Q\}=\{Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6\}$.

Теперь, руководствуясь данными о компонентах вектора $\{Q\}$ и векторов $\{\bar q\}_{ij}$, нетрудно составить для рассматриваемой пространственной рамы матрицу индексов:

№ стержней	Индексы стержней $i-j$	Индексы i, j узловых перемещений $\{\bar q\}_{ij}$ элемента											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		Индексы s, l перемещений $\{Q\}$ узловых точек											
I	1—2	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6
II	2—3	1	2	3	4	5	6	0	0	0	0	0	0
III	2—4	1	2	3	4	5	6	0	0	0	0	0	0

Составление основной системы уравнений МКЭ. Суммарные узловые усилия (реакции в узловых сечениях) ij-го стержня, вызванные действием на стержень внешних нагрузок и смещением его узловых сечений, определяются зависимостью

$$\{\bar R\}^{\Sigma}_{ij}=[\bar K]_{ij}\{\bar q\}_{ij}-\{\bar P\}_{ij}. \tag{14.34}$$

Со стороны ij-го стержня на прилегающие к нему узлы будут действовать те же усилия, но с обратным знаком. Тогда из условия равновесия i-го узла получим следующее уравнение (предполагается, что вся внешняя нагрузка приложена к стержням рамы):

$$\sum_j\{\bar R\}^{\Sigma}_{ij}=\sum_j[\bar K]_{ij}\{\bar q\}_{ij}-\sum_j\{\bar P\}_{ij}=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots \tag{14.35}$$

Здесь суммирование производится по всем стержням, которые сходятся в i-м узле.

В общем случае матричное уравнение (14.35) эквивалентно шести скалярным уравнениям равновесия i-го узла.

Переход от перемещений $\{\bar{q}\}_{ij}$ к вектору основных узловых неизвестных $\{Q\}$ позволяет переписать систему уравнений (14.35) в виде одного матричного уравнения

$$[K^*]\{Q\}=\{F\}, \qquad (14.36)$$

которое представляет собой основную систему уравнений равновесия МКЭ для рассматриваемой рамы. Составление этой системы сводится к определению общей матрицы жесткости рамы $[K^*]$ и вектора узловых нагрузок в общей системе координат $\{F\}$. Подробное описание процедуры определения этих величин с помощью матрицы индексов дано в § 11.8.

В рассматриваемом случае матричное уравнение (14.35) представляет собой совокупность шести скалярных уравнений равновесия 2-й узловой точки пространственной рамы, изображенной на рис. 14.16.

Определение основных узловых неизвестных. Решая систему алгебраических линейных уравнений (14.35), получаем значения компонентов вектора $\{Q\}$, располагая которыми нетрудно выписать значения векторов $\{\bar{q}\}_{ij}$ для каждого из стержней рамы, а затем с помощью зависимости (14.34) определить узловые усилия.

Зная значения внутренних усилий $\{\bar{R}\}_{ij}$ в узловых сечениях каждого из стержней рамы, не представляет особых затруднений построить для этих стержней эпюры изменения внутренних усилий (осевого усилия, перерезывающих сил, крутящего и изгибающего моментов). После этого можно произвести оценку прочности

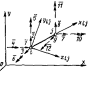


Рис. 14.15

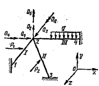


Рис. 14.16

каждого из стержней, а следовательно, и пространственной рамы в целом.

В заключение необходимо сделать ряд следующих дополнительных замечаний.

1. Если рама не имеет опорных узлов (свободная рама) и, следовательно, загружена самоуравновешенной нагрузкой, то необходимо позаботиться о таком закреплении рамы, при котором будут ликвидированы ее перемещения как абсолютно жесткого тела. Для этого достаточно произвольно задать все шесть перемещений одного из узлов рамы (например, положить их равными нулю). Уравнения равновесия, соответствующие этим перемещениям, исключают из системы (14.35), а в оставшихся уравнениях данной системы соответствующие этим перемещениям члены как уже известные переносят в правые части.

2. В упругих закреплениях отдельных узловых сечений возникают реакции, которые должны вводиться в соответствующие уравнения равновесия. Процедура учета упругого защемления отдельных узловых сечений подробно рассмотрена в § 11.9 на примере расчета плоской стержневой рамы по МКЭ.

3. При расчете пространственных рам по МКЭ сравнительно просто для отдельных стержней (или рамы в целом) учитывается влияние деформаций сдвига, наличие упругого основания.

Такие матрицы жесткости известны [51, т. 2].

§ 14.5. Общая характеристика методов расчета стержневых систем

В предыдущей и настоящей главах были изложены методы расчета статически неопределимых стержневых систем нескольких типов. Несмотря на различия этих стержневых систем, можно заметить принципиальную общность методов их расчета. Как правило, стержневая система мысленно расчленялась на отдельные стержни с целью последующего расчета каждого такого стержня по известным из теории сопротивления материалов расчетным формулам. Однако для раздельного расчета стержня кроме заданной пролетной нагрузки необходимо знать еще граничные условия на их концах. Граничные условия определяются характером взаимодействия стержней в сечениях, где они соединяются, т. е. в узлах стержневой системы. Они представляют собой либо узловые перемещения, либо узловые усилия, либо комбинацию узловых перемещений и усилий.

Определение необходимого числа граничных значений элементов изгиба каждого такого стержня (конечного элемента в МКЭ) и является основной задачей расчета стержневой системы.

В зависимости от того, какие граничные значения элементов деформирования стержней выбраны в качестве основных, вычисляемых в первую очередь, неизвестных, различают два основных метода расчета — метод сил и метод перемещений (деформаций). В методе сил в качестве основных неизвестных выбирают силовые факторы — крутящие и изгибающие моменты, осевые и перерезывающие силы (реакции) в концевых сечениях стержней. В методе перемещений за основные неизвестные принимают линейные и угловые перемещения концевых сечений (узлов).

В ряде случаев некоторые граничные значения элементов изгиба бывают известны и без расчета. Например, для неразрезных балок на жестких опорах или для рам с несмещаемыми узлами линейные перемещения узловых сечений равны нулю. В подобных случаях количество определяемых расчетом граничных величин уменьшается.

Элементы деформирования стержней в концевых сечениях должны удовлетворять как условиям совместности перемещений стержней в указанных сечениях, так и условиям равновесия узлов. Уравнения, составленные по указанным условиям, и дают возможность определять необходимые граничные значения элементов деформирования стержней.

Если за основные неизвестные принимают усилия, то для статически неопределимой системы число этих усилий окажется больше числа уравнений равновесия. Число лишних неизвестных всегда равно степени статической неопределимости системы. Уравнения равновесия позволяют выразить все искомые граничные усилия через те из них, которые приняты в качестве лишних. Следовательно, уравнения равновесия каждого из стержней и системы в целом будут удовлетворяться при произвольных значениях лишних усилий. Если теперь значения лишних усилий определить так, чтобы удовлетворялись также и уравнения совместности перемещений, то тем самым будет получено решение задачи. Для этого необходимо в уравнениях совместности перемещений концевых сечений стержней выразить перемещения через лишние усилия и решить полученную систему относительно последних. Всегда можно составить столько уравнений совместности перемещений, сколько в системе имеется лишних усилий.

В методе перемещений принятые в качестве неизвестных перемещения концевых сечений отдельных стержней можно выразить в общем виде через некоторые основные узловые перемещения так, чтобы тождественно удовлетворялись все уравнения совместности перемещений. Это всегда выполняется очень просто. Если теперь основные перемещения определить так, чтобы удовлетворялись также и уравнения равновесия, то полученные значения перемещений и дадут решение задачи. Для этого необходимо в уравнениях равновесия выразить усилия через основные перемещения и решить полученную систему уравнений. Указанных уравнений равновесия можно всегда составить столько, сколько система имеет основных неизвестных перемещений.

Кроме двух изложенных выше основных методов — метода сил и метода перемещений — можно применять и так называемый смешанный метод. В этом методе за основные неизвестные могут приниматься как узловые перемещения, так и узловые усилия. В качестве примера использования смешанного метода может служить метод расчета неразрезной балки, лежащей на независимых упругих опорах, который был изложен в гл. 13.

Необходимо иметь в виду, что применение описанных выше методов не требует обязательного расчленения системы на отдельные стержни. Стержневую систему можно расчленять и на более сложные части, состоящие из нескольких соединенных стержней. В таком случае для применения метода сил необходимо располагать формулами, позволяющими выражать перемещения на границах каждой части через приложенную непосредственно к ней внешнюю нагрузку и усилия взаимодействия (основные неизвестные) с другими частями. Это требуется для составления уравнений совместности перемещений, выраженных через основные неизвестные — усилия.

Чтобы при этом применять метод перемещений, нужно иметь формулы, позволяющие выражать усилия взаимодействия данной части с другими частями через перемещения ее граничных сечений и пролетную нагрузку. Это необходимо для составления уравнений равновесия сил через перемещения (основные неизвестные). В остальном схемы расчета остаются прежними. Примером применения такого метода является описанное в § 14.2 раскрытие статической неопределимости плоской рамы с подвижными узлами. Полученные там общие формулы для перемещений части рамы, состоящей из произвольного числа последовательно соединенных стержней, позволяют рассматривать подобную часть рамы как один ее элемент.

В каждом конкретном случае можно выбирать тот метод расчета, при котором будем иметь меньшее количество основных неизвестных или они будут определяться из более простой системы уравнений. Если степень статической неопределимости системы больше числа основных неизвестных перемещений, которые необходимо определить для последующего раздельного расчета каждого стержня или части системы, то выгоднее применять метод перемещений. В противном случае предпочтения заслуживает метод сил. Поэтому, например, для расчета сложных рам удобнее использовать метод перемещений, а для расчета простых рам — метод сил.

При выборе основных неизвестных необходимо стремиться к тому, чтобы каждое неизвестное входило в возможно меньшее число уравнений разрешающей системы и чтобы при ее решении не возникали малые разности больших величин.

Примером удачного выбора основных неизвестных в методе сил для многопролетной балки является выбор опорных моментов, а неудачного — выбор реакций опор.

Как уже указывалось, при выборе метода для программирования расчетов на ЭВМ первоочередное значение имеет простота его логической структуры, а другие соображения вторичны.

Необходимо также отметить полную принципиальную аналогию между методами расчета стержневых систем и методами решения основной задачи теории упругости.

В задачах теории упругости основным элементом упругой системы (тела) является бесконечно малый (элементарный) параллелепипед, усилия взаимодействия которого со смежными элементами характеризуются напряжениями на гранях. Эти напряжения должны удовлетворять уравнениям равновесия элементарного параллелепипеда, а на границах тела и уравнениям равновесия элементарного тетраэдра. Уравнения закона Гука позволяют выражать деформации (перемещения) параллелепипеда через напряжения и наоборот, что, в свою очередь, позволяет записывать уравнения равновесия в деформациях (перемещениях), а уравнения совместности деформаций (перемещений) через напряжения.

Как видно, стержню или сочленению стержней соответствует элементарный параллелепипед, уравнениям равновесия узлов стержневой системы — уравнения равновесия элементарного параллелепипеда, уравнениям совместности деформаций Сен-Венана — уравнения совместности перемещений сечений на стыках стержней или частей системы. Однако в теории упругости в силу бесконечной малости и бесконечного множества элементов, на которые расчленяется система (тело), все уравнения являются дифференциальными, а в теории расчета стержневых систем эти уравнения дискретные, алгебраические.

Методу сил соответствует прямая задача теории упругости в напряжениях, а методу перемещений — прямая задача теории упругости в перемещениях.

В заключение остановимся на использовании симметрии упругих свойств стержневых систем для упрощения расчетов. Упругая стержневая система является симметричной, если в каждой паре симметричных относительно некоторой оси точек все ее упругие свойства одинаковы. Указанная ось называется осью упругой симметрии системы. Следовательно, кроме геометрической симметрии все симметричные стержни и симметричные опоры системы должны обладать совершенно одинаковыми упругими характеристиками.

Если на систему действует нагрузка, симметричная относительно оси упругой симметрии, то элементы изгиба, включая и основные неизвестные, в каждой паре симметричных сечений будут равны по абсолютному значению, а их направления будут симметричны по отношению к оси симметрии. При действии обратносимметричной нагрузки элементы изгиба в симметричных сечениях также равны по значению, но направлены обратносимметрично по отношению к оси симметрии. Таким образом, расчет симметричной системы при действии на нее симметричной или обратносимметричной нагрузки значительно упрощается вследствие уменьшения числа основных неизвестных.

Если действующая на симметричную систему нагрузка является несимметричной, то она всегда может быть разложена на две составляющие — симметричную и обратносимметричную. Такое разложение для типичных нагрузок показано на рис. 14.17, *а*. Пусть в точке *1* действует сосредоточенная сила *P*, в точке *2* — сосредоточенный момент $\mathfrak{M}$ и по линии *3—3* — распределенная нагрузка *q*. Для разложения этих нагрузок на симметричную и обратносимметричную части необходимо в симметричных точках *1*, *2*, *3—3* и по

симметричным направлениям приложить нулевые нагрузки, состоящие из противоположно направленных половинных величин разлагаемых нагрузок. Очевидно, что введение таких нулевых нагрузок не приводит к изменению состояния системы. Каждую из заданных нагрузок необходимо также представить состоящей из двух половинных частей. Комбинируя соответствующим образом половинные части заданных нагрузок и нулевых нагрузок, можно получить две системы нагрузок, одна из которых будет симметричной (рис. 14.17, *б*), а другая — обратносимметричной (рис. 14.17, *в*).

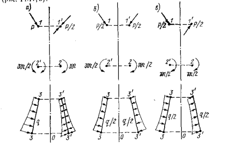


Рис. 14.17

При расчете упругой системы на действие каждой из этих нагрузок можно использовать преимущества симметрии.

Если при расчете системы на несимметричную нагрузку общее число основных неизвестных было *m*, то при расчете на каждую из составляющих нагрузок число основных неизвестных будет m_1 и m_2 соответственно, причем $m_1 + m_2 = m$. Выигрыш заключается в том, что определение общего числа неизвестных *m* из общей системы *m* уравнений всегда сложнее по сравнению с определением того же числа неизвестных двумя группами m_1 и m_2 из двух самостоятельных систем уравнений.

Окончательные значения основных неизвестных находят суммированием значений, полученных при расчете на симметричную и обратносимметричную части нагрузки.

Контрольные вопросы

1. Какие конструкции называются рамами и как они классифицируются в строительной механике?
2. На каких допущениях основаны методы расчета рам и каково значение этих допущений?

3. В чем сущность метода сил и как он применяется при расчете простых рам с несмещаемыми узлами?

4. Почему для расчета сложных рам с неподвижными узлами целесообразно применять метод угловых деформаций, а не метод сил?

5. Объясните общую схему расчета сложной рамы с неподвижными узлами методом угловых деформаций.

6. Как определяется степень линейной подвижности узлов рамы и независимые перемещения?

7. Какие дополнительные неизвестные появляются при расчете рам, имеющих подвижные узлы? Как устанавливается количество этих неизвестных и дополнительные условия для их определения?

8. Как практически рассчитываются простые рамы с подвижными узлами?

9. Выпишите в общем виде и объясните систему уравнений, из которых определяются угловые и независимые линейные перемещения узлов рамы со смещаемыми узлами и прямоугольными полями.

10. Объясните основные зависимости и уравнения метода перемещений для пространственной рамы.

11. Дайте общую характеристику метода сил применительно к расчету стержневых систем.

12. В каких случаях метод перемещений имеет преимущества по сравнению с методом сил при расчете стержневых систем? В чем суть этого метода?

13. Как разложить произвольную систему нагрузок на симметричную и обратносимметричную части относительно заданной оси?

14. Какие упрощения при расчете стержневых систем можно получить, используя упругую симметрию конструкции?

15. В чем суть МКЭ применительно к задачам изгиба стержневых систем?

Глава 15. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ РАМЫ

§ 15.1. Криволинейные рамы как конструктивный элемент судового корпуса. Основные допущения

Стержневые системы (плоские или пространственные), имеющие в своем составе стержни с криволинейной осью, принято называть *криволинейными рамами*.

Такие судовые конструкции, как шпангоутные рамы быстроходного корабля (рис. 15.1) и подводной лодки (рис. 15.2) могут служить типичными примерами плоских криволинейных рам.

Для судовых криволинейных рам характерны следующие соотношения размеров: 1) отношение высоты h сечений профилей криволинейных стержней рамы к радиусам их кривизны ρ мало, практически $h/\rho < 0{,}1$; 2) жесткости рамы в целом и всех ее стержней настолько велики, что линейные перемещения узлов и сечений стержней можно считать *пренебрежимо малыми по сравнению* с длинами входящих в раму стержней и их радиусами кривизны. Эти свойства реальных судовых криволинейных рам приняты в качестве основополагающих допущений рассматриваемого ниже метода их расчета.

Из указанных допущений следует, во-первых, применимость зависимостей, основанных на гипотезе плоских сечений теории изгиба прямых балок, к криволинейным стержням, во-вторых, возможность определения изгибающих моментов, перерезывающих и осевых сил в сечениях стержней исходя из первоначальной (недеформированной) формы рамы и ее стержней. Кроме того, как и в расчетах рам с прямолинейными стержнями, можно пренебречь влиянием осевых сил на параметры изгиба стержней и не учитывать их закручивания, считая поперечную нагрузку действующей в той же плоскости, где расположены центры изгиба стержней.

В целом совокупность принятых допущений позволяет распространить рассмотренные выше методы расчета балок и рам на криволинейные рамы.

На рис. 15.3 изображена часть стержня, ограниченная поперечными сечениями, нормальными к его криволинейной нейтральной оси, с координатами $s = s_1$ и $s = s_2$, где s отсчитывается вдоль оси стержня от некоторой точки, выбранной за начало отсчета.

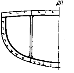


Рис. 15.1

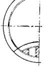


Рис. 15.2

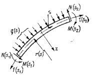


Рис. 15.3

Пусть $M(s)$, $N(s)$, $T(s)$ — изгибающий момент, поперечная (по нормали к нейтральной оси) и осевая (по касательной к нейтральной оси) силы, действующие в поперечном сечении с координатой s.

Положительные направления осей местной (привязанной к нормальному сечению) системы координат osz внешней нагрузки $q(s)$ и внутренних сил $M(s)$, $N(s)$, $T(s)$ показаны на рис. 15.3. Как следует из рисунка, изгибающий момент считается положительным, если стремится увеличить исходную кривизну оси стержня.

Сформулированные выше допущения позволяют развить теорию плоского изгиба криволинейных стержней, полностью эквивалентную технической теории изгиба прямых балок, и, в частности, вывести *дифференциальные уравнения* для отыскания перемещений точек нейтральной оси $v(s)$ и $w(s)$, направленных по касательной и по нормали к этой оси. Следует, однако, иметь в виду, что дифференциальные уравнения изгиба криволинейных стержней сложны и допускают относительно простые решения только для стержней постоянного сечения и постоянной кривизны (с осью, совпадающей с дугой окружности). Поэтому в практике расчета криволинейных рам применяют методы, основанные на использовании начала наименьшей работы и теоремы Кастильяно (см. § 10.4). Большие возможности расчета сложных криволинейных рам открылись с началом использования в строительной механике МКЭ.

Потенциальная энергия деформации криволинейного стержня складывается из потенциальных энергий изгиба, сдвига и растяжения (сжатия) [см. формулу (10.12)]:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\frac{M^2(s)}{EI(s)} + \frac{N^2(s)}{G\omega(s)} + \frac{T^2(s)}{EF(s)}\right] ds, \qquad (15.1)$$

где l — длина стержня, измеряемая по нейтральной оси; $I(s)$, $\omega(s)$, $F(s)$ — соответственно момент инерции, приведенная площадь стенки и площадь поперечного (нормального) сечения стержня. Если рама имеет упругие опоры и заделки, то их потенциальная энергия должна быть прибавлена к Π.

Для судовых криволинейных рам роль слагаемых выражения (15.1) различна. Так, в большинстве случаев можно пренебречь влиянием сдвига на параметры изгиба криволинейных стержней, и в этом плане криволинейные и прямолинейные судовые балки обладают схожими свойствами. Последний член для криволинейных балок может играть заметную роль, и возможность пренебрежения им должна быть оценена в каждом конкретном случае.

§ 15.2. Определение перемещений статически определимых криволинейных рам с помощью теоремы Кастильяно. Раскрытие статической неопределимости рам с использованием начала наименьшей работы

Рассмотрим несколько примеров применения теоремы Кастильяно и начала наименьшей работы к расчету криволинейных рам.

Определение перемещения верхнего конца шлюпбалки (рис. 15.4). Шлюпбалка нагружена силой P, составляющей с вертикалью угол α.

Разложим силу P на вертикальную $P_1 = P\cos\alpha$ и горизонтальную $P_2 = P_1 \sin\alpha$ составляющие и, пользуясь теоремой Кастильяно, найдем соответствующие проекции полного перемещения на направления осей x и z:

$$v_1 = \frac{\partial V}{\partial P_1}; \qquad v_2 = \frac{\partial V}{\partial P_2}. \qquad (15.2)$$

Согласно формуле (15.1) получим

$$v_i = \int_S \left[\frac{M(s)}{EI(s)}\frac{\partial M(s)}{\partial P_i} + \frac{N(s)}{G\omega(s)}\frac{\partial N(s)}{\partial P_i} + \frac{T(s)}{EF(s)}\frac{\partial T(s)}{\partial P_i}\right] ds, \qquad i = 1,\ 2, \qquad (15.3)$$

где S — полная длина оси шлюпбалки. Примем начало отсчета координаты s на свободном конце шлюпбалки. Интегралы в выражениях (15.3) могут вычисляться как сумма интегралов по криволинейному и прямолинейному участкам.

На криволинейном участке переменную интегрирования заменим угловой координатой φ: $ds = r d\varphi$. Изгибающий момент, перерезывающая сила и осевое усилие на криволинейном участке шлюпбалки вычисляют по следующим очевидным формулам:

$$\left.\begin{aligned} M(s) &= P_1 r \sin\varphi + P_2 r(1-\cos\varphi);\\ N(s) &= -P_1\cos\varphi - P_2\sin\varphi;\\ T(s) &= -P_1\sin\varphi + P_2\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (15.4)$$

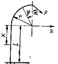


Рис. 15.4

На прямолинейном участке

$$\left.\begin{aligned} M(s) &= P_1 r + P_2(r+x);\\ N(s) &= -P_2;\\ T(s) &= -P_1. \end{aligned}\right\} \qquad (15.5)$$

В практических расчетах шлюпбалок можно не учитывать влияния деформаций сдвига и растяжения (сжатия), так как вносимые таким учетом поправки при обычных размерах шлюпбалок весьма незначительны.

Опуская в выражении (15.3) члены, зависящие от $N(s)$ и $T(s)$, получим

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{EI}\left[P_1\sin\varphi + P_2(1-\cos\varphi)\right] r^3 \sin\varphi\, d\varphi + \\ &\quad + \int_0^l \frac{1}{EI}\left[P_1 r + P_2(r+x)\right] r\, dx;\\ v_2 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{EI}\left[P_1\sin\varphi + P_2(1-\cos\varphi)\right] r^3(1-\cos\varphi)\, d\varphi + \\ &\quad + \int_0^l \frac{1}{EI}\left[P_1 r + P_2(r+x)\right](r+x)\, dx. \end{aligned}\right\} \qquad (15.4')$$

Для шлюпбалки постоянного сечения, у которой $I = I_0$, после вычисления интегралов найдем

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{r^3}{EI_0}\left[P_1\left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{r}\right) + P_2\left(\frac{1}{2} + \frac{l}{r} + \frac{l^2}{2r^2}\right)\right];\\ v_2 &= \frac{r^3}{EI_0}\left[P_1\left(\frac{1}{2} + \frac{l}{r} + \frac{l^2}{2r^2}\right) + P_2\left(\frac{3\pi}{4} - 2 + \frac{l}{r} + \frac{l^2}{r^2} + \frac{1}{3}\frac{l^3}{r^3}\right)\right], \end{aligned}\right\} (15.5')$$

а затем и полное перемещение конца шлюпбалки по формуле $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Раскрытие статической неопределимости шпангоутной рамы тоннеля гребного вала (рис. 15.5). Рама загружена реакцией пиллерса. Нижние концы стоек считаем свободно опертыми на несмещаемые опоры. Конструкция рамы, как и ее форма, симметрична относительно вертикальной оси.

Вследствие симметрии рассматриваемая рама однократно статически неопределима. За лишнюю неизвестную целесообразно принять изгибающий момент M_0 в наиболее нагруженном сечении на оси симметрии. Решение получим, пренебрегая деформациями сдвига и удлинением нейтральной оси.

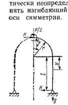


Рис. 15.5

Рассматривая правую половину рамы (см. рис. 15.5), получим следующие выражения для изгибающего момента: на криволинейном участке $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$

$$M(s) = M_0 + (P/2)\, r \sin\varphi - Hr(1 - \cos\varphi); \quad (15.6)$$

на прямолинейном участке $(0 \leqslant y \leqslant l)$

$$M(s) = M_0 + Pr/2 - H(r + y). \quad (15.7)$$

Для нижней опоры рамы $y = l$, $M = 0$, или

$$M_0 + Pr/2 - H(r + l) = 0, \quad (15.8)$$

откуда

$$H = M_0/b + Pr/(2b), \quad (15.9)$$

где $b = r + l$. Исключив H из зависимостей (15.6) и (15.7), найдем изгибающий момент: на криволинейном участке

$$M(s) = M_0[1 - (r/b)(1 - \cos\varphi)] + (Pr/2)[\sin\varphi - (r/b)(1 - \cos\varphi)]; \quad (15.10)$$

на прямолинейном участке

$$M(s) = M_0(l - y)/b + Pr(l - y)/(2b). \quad (15.11)$$

На основании начала о наименьшей работе получим уравнение для раскрытия статической неопределимости

$$\frac{\partial \Pi}{\partial M_0} = \int_0^S \frac{M(s)}{EI(s)} \frac{\partial M(s)}{\partial M_0} ds = 0. \quad (15.12)$$

Интервал интегрирования в (15.12) следует разбить на два участка: криволинейный и прямолинейный. Полагая на криволинейном участке $ds = r d\varphi$, а на прямолинейном $ds = dy$ и подставляя в выражение (15.12) значения $M(s)$ из формул (15.10) и (15.11), найдем

$$\frac{M_0 r}{EI_0} \int_0^{\pi/2} \frac{I_0}{I(s)} \left[1 - \frac{r}{b}(1 - \cos\varphi)\right]^2 d\varphi +$$

$$+ \frac{Pr^2}{2EI_0} \int_0^{\pi/2} \frac{I_0}{I(s)} \left[\sin\varphi - \frac{r}{b}(1 - \cos\varphi)\right]\left[1 - \frac{r}{b}(1 - \cos\varphi)\right] d\varphi +$$

$$+ \frac{M_0 + 0{,}5Pr}{EI_0} \int_0^{l} \frac{I_0}{I(s)} \left(\frac{l + y}{b}\right)^2 dy = 0, \quad (15.13)$$

где в качестве I_0 удобно выбрать одно из значений функции $I(s)$.

Для рамы постоянного сечения $(I(s) = I_0 = \text{const})$ из выражения (15.13) следует, что $M_0 = Prk_1$. Здесь

$$k_1 = 0{,}5 - \frac{(\gamma + 1)[2\gamma(\pi/2 - 1) + 1]}{4(\gamma^3/3 + \pi\gamma^2/2 + 2\gamma + \pi/4)}, \quad \text{где} \quad \gamma = l/r.$$

Определение внутренних усилий T_0, N_0, M_0 в сечениях кругового кольца (рис. 15.6). Кольцо нагружено в некотором произвольном сечении сосредоточенными силами P, Q и моментом $\mathfrak{M}$.

Под действием такой внешней нагрузки кольцо не может находиться в равновесии. Поэтому одно из сечений кольца будем считать жестко закрепленным, что обеспечит выполнение условий равновесия. При этом в закрепленном сечении кольца появятся реактивные силы и момент, которые и будем считать искомыми величинами T_0, N_0, M_0.

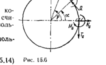


Рис. 15.6

Совместим начало отсчета угловой координаты φ с закрепленным сечением, считая нагрузку приложенной в произвольном сечении, определяемом углом α.

Для нахождения T_0, N_0 и M_0 воспользуемся началом наименьшей работы:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial T_0} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial N_0} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial M_0} = 0. \quad (15.14)$$

Пренебрегаем влиянием деформаций сдвига и растяжения (сжатия) оси кольца, т. е. будем определять потенциальную энергию по формуле

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{M^2(\varphi)}{EI} r\, d\varphi, \quad (15.15)$$

где $M(\varphi)$ — изгибающий момент в произвольном сечении кольца; I — момент инерции площади поперечного сечения кольца; r — радиус кольца.

Рассмотрим подробнее случай действия на кольцо только нормальной к его оси силы P.

Изгибающий момент в произвольном сечении кольца определяется следующей зависимостью:

$$M(\varphi) = M_0 + T_0 r(1 - \cos\varphi) - N_0 r \sin\varphi + \sigma(\varphi - \alpha) Pr \sin(\varphi - \alpha),$$

где $\sigma(\varphi - \alpha)$ — функция единичного скачка, обладающая следующим свойством:

$$\sigma(\varphi - \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \varphi - \alpha < 0; \\ 1 & \text{при} \quad \varphi - \alpha \geqslant 0. \end{cases} \quad (15.16)$$

Свойства функции единичного скачка таковы, что выражение, стоящее за $\sigma(\varphi - \alpha)$, учитывается только при $\varphi \geqslant \alpha$.

Уравнения для отыскания неизвестных M_0, T_0, N_0 следуют из выражений (15.14) и (15.15):

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} M(\varphi)\frac{\partial M(\varphi)}{\partial M_0} r\,d\varphi = 0;\\
&\int_0^{2\pi} M(\varphi)\frac{\partial M(\varphi)}{\partial T_0} r\,d\varphi = 0;\\
&\int_0^{2\pi} M(\varphi)\frac{\partial M(\varphi)}{\partial N_0} r\,d\varphi = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (15.17)$$

После подстановки формулы (15.10) в уравнения (15.17) они приобретают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&2\pi M_0 + 2\pi r T_0 + Pr(1-\cos\alpha) = 0;\\
&2\pi r M_0 + 3\pi r^2 T_0 + Pr^2(1-\cos\alpha + [(2\pi-\alpha)/2]\sin\alpha) = 0;\\
&\pi r^2 N_0 - (Pr^2/2)[(2\pi-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha] = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (15.18)$$

Решение уравнений (15.18) следующее:

$$\left.\begin{aligned}
M_0 &= \frac{Pr}{2\pi}[(2\pi-\alpha)\sin\alpha - (1-\cos\alpha)];\\
N_0 &= \frac{P}{2\pi}[\sin\alpha + (2\pi-\alpha)\cos\alpha];\\
T_0 &= -\frac{P}{2\pi}[2\pi-\alpha]\sin\alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (15.19)$$

Подобным образом могут быть получены выражения для M_0, N_0, T_0 при действии на кольцо сосредоточенного момента $\mathfrak{M}$:

$$\left.\begin{aligned}
M_0 &= [\mathfrak{M}/(2\pi)][(2\pi-\alpha) - 2\sin\alpha];\\
N_0 &= [\mathfrak{M}/(\pi r)](1-\cos\alpha);\\
T_0 &= [\mathfrak{M}/2\pi]\sin\alpha;
\end{aligned}\right\} \qquad (15.20)$$

сосредоточенной силы Q, направленной по касательной к оси кольца:

$$\left.\begin{aligned}
M_0 &= \frac{Qr}{2\pi}(2\pi-\alpha)(1-\cos\alpha);\\
N_0 &= \frac{Q}{2\pi}[(2\pi-\alpha)\sin\alpha + 2(1-\cos\alpha)];\\
T_0 &= \frac{Q}{2\pi}[(2\pi-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha];
\end{aligned}\right\} \qquad (15.21)$$

§ 15.3. Расчет круговых колец и конструкций из круговых дуг с распорками

Действие произвольной нагрузки. С помощью зависимостей (15.19)—(15.21) можно, используя метод наложения, найти внутренние усилия в сечениях кольца, нагруженного произвольной нор-

мальной, касательной или моментной нагрузкой, на распределение которой следует наложить лишь требования равенства нулю главного вектора и главного момента.

Пусть, например, круговое кольцо нагружено произвольной нормальной нагрузкой $q(\alpha)$. Выделим в сечении, определяемом углом α, элементарную силу $q(\alpha)r\,d\alpha$. Воспользовавшись зависимостями (15.19) и суммируя влияние всех элементов сил, найдем для произвольно выбранного сечения, совпадающего с началом отсчета угловых координат,

$$\left.\begin{aligned}
M_0 &= \frac{r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(\alpha)[(2\pi-\alpha)\sin\alpha - (1-\cos\alpha)]\,d\alpha;\\
N_0 &= \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(\alpha)[\sin\alpha + (2\pi-\alpha)\cos\alpha]\,d\alpha;\\
T_0 &= -\frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(\alpha)(2\pi-\alpha)\sin\alpha\,d\alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (15.22)$$

В случае равномерно распределенного давления $q(\alpha) = q = \mathrm{const}$

$$M_0 = 0; \quad N_0 = 0; \quad T_0 = -qr. \qquad (15.23)$$

Из выражений (15.23) следует, что равномерно распределенное давление вызывает лишь сжимающие напряжения в сечениях кольца, равные

$$\sigma = -qr/F, \qquad (15.24)$$

где F — площадь поперечного сечения.

Отметим очевидную приближенность этого результата, поскольку равномерное обжатие кольца неизбежно сопровождается увеличением его кривизны (уменьшением радиуса) и, следовательно, дополнительным изгибом. Можно показать, что значение наибольшего напряжения, вызванного изгибом кольца при его обжатии, удовлетворяет неравенству

$$|\sigma_{изг}|_{\max} \leqslant |\sigma|\,h/r, \qquad (15.25)$$

где h — высота профиля поперечного сечения кольца. Указанная погрешность неизбежно появляется в рассматриваемых решениях, основанных на предположении о малости отношения высоты профиля поперечного сечения рамы к радиусу кривизны ее оси.

Действие равномерно распределенной по контуру нагрузки. Расчет существенно упрощается при использовании следующего свойства такой нагрузки: *равномерно распределенная нагрузка, действующая на произвольный контур, статически эквивалентна нагрузке той же интенсивности, приложенной к хорде, соединяющей концы контура.*

На рис. 15.7, *а* показан произвольный контур, имеющий концевые точки A и B, с приложенной к нему равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q, а на рис. 15.7, *б* — замкнутый контур, в котором равномерно распределенная нагрузка той же интенсивности приложена к хорде, соединяющей концы исходного контура.

Две изображенные на рисунке нагрузки статически эквивалентны, т. е. их равнодействующие при совмещении рисунков совпадают. Убедиться в этом можно, приложив мысленно к замкнутому контуру равномерно распределенную внешнюю нагрузку, показанную на рис. 15.7, *в*, равнодействующая которой равна нулю (цилиндр любой формы находится в равновесии под действием равномерного внешнего или внутреннего давления).

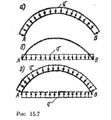


Рис. 15.7

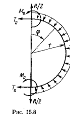


Рис. 15.8

Заметим, что эти рассуждения останутся справедливыми, если хорду заменить любой линией, соединяющей концы контура. С помощью отмеченного свойства легко найти как равнодействующую равномерно распределенной нормальной нагрузки, действующей на произвольный контур, так и точку ее приложения.

Пример 7. Рассмотрим задачу об изгибе кругового кольца, подкрепленного пиллерсом и нагруженного равномерно распределенным давлением (рис. 15.8).

Р е ш е н и е. В этой задаче важно принять во внимание деформации растяжения-сжатия как кольца, так и подкрепляющего его пиллерса. Будем считать, однако, возможным пренебрежение деформациями сдвига кольца. Обозначив через T_0 и M_0 осевое усилие и изгибающий момент в сечениях кольца, совпадающих с осью пиллерса, через R реакцию пиллерса, получим схему загрузки половины кольца, показанную на рис. 15.8.

При определении изгибающего момента и осевой силы в произвольном сечении с угловой координатой φ воспользуемся отмеченным выше свойством равномерно распределенной нагрузки. Заметив, что длина хорды дуги окружности с центральным углом φ составляет $r\sqrt{2(1-\cos\varphi)}$, найдем изгибающий момент

$$M(\varphi) = -(Rr\sin\varphi)/2 + M_0 + qr^2(1-\cos\varphi) + T_0 r(1-\cos\varphi) \qquad (15.26)$$

и осевую силу

$$T(\varphi) = T_0\cos\varphi + (R\sin\varphi)/2 - qr(1-\cos\varphi). \qquad (15.27)$$

По условию равновесия в проекциях на горизонтальную ось $T_0 = -qr$, поэтому

$$M(\varphi) = -(Rr\sin\varphi)/2 + M_0; \quad T(\varphi) = R\sin\varphi/2 - qr. \qquad (15.28)$$

Учитывая симметрию конструкции и нагрузки, определим потенциальную энергию кольца с пиллерсом:

$$\Pi = 2\int_0^{\pi/2}\frac{M^2(\varphi)}{EI}\,r\,d\varphi + 2\int_0^{\pi/2}\frac{T^2(\varphi)}{EF}\,r\,d\varphi + \frac{1}{2}\,\frac{R^2\cdot 2r}{Ef}, \qquad (15.29)$$

где I — момент инерции площади поперечного сечения кольца; F и f — площади поперечных сечений кольца и пиллерса соответственно. На основании теоремы о наименьшей работе должны удовлетворяться уравнения $\frac{\partial\Pi}{\partial M_0} = 0$; $\frac{\partial\Pi}{\partial T_0} = 0$, откуда с учетом выражений (15.29) и (15.28) для кольца постоянного сечения получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{r}{EI}\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{R}{2}r\sin\varphi + M_0\right)d\varphi = 0;\\
&-\frac{2r^2}{EI}\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{R}{2}r\sin\varphi + M_0\right)\sin\varphi\,d\varphi +\\
&+\frac{2r}{EF}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{R}{2}\sin\varphi - qr\right)\sin\varphi\,d\varphi + \frac{2Rr}{Ef} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (15.30)$$

Решение уравнений (15.30) дает

$$M_0 = Pr/\pi; \qquad (15.31)$$

$$R = [qrf/(2F)]\,\{1/[1 + \pi f/(8F) + 0{,}0744r^2f/I]\}. \qquad (15.32)$$

Изгибающий момент и осевая сила в произвольном сечении могут быть теперь вычислены с использованием зависимостей (15.28).

Оценим влияние пиллерса на напряженное состояние кольца. При отсутствии пиллерса (при $f = 0$) в сечениях кольца действуют сжимающие напряжения, определяемые формулой (15.24).

Рассмотрим случай установки мощного подкрепляющего пиллерса ($f > F$). Формулу (15.32) перепишем следующим образом:

$$R = (qr/2)\,[1/(F/f + \pi/8 + 0{,}0744r^2F/I)]. \qquad (15.33)$$

Для момента инерции площади поперечного сечения кольца можно использовать оценку

$$I = \eta Fh^2/2, \qquad (15.34)$$

где $\eta \approx 0{,}06$, и убедиться, что третий член в знаменателе выражения (15.33) значительно превосходит первые два, поскольку $h/r < 0{,}1$. Поэтому

$$R \approx 2qrh^2/r^2. \qquad (15.35)$$

Наибольший изгибающий момент действует в сечениях кольца, совпадающих с осью пиллерса, и равен M_0. Вызванные им изгибные напряжения удовлетворяют неравенству

$$|\sigma_{\text{изг}}| \leqslant |M_0h/I|,$$

или с учетом формулы (15.31)

$$|\sigma_{\text{изг}}| \leqslant Rhr/(\pi I) \approx 2{,}12qrh/(Fr). \qquad (15.36)$$

Влияние пиллерса на величину сжимающих напряжений может быть оценено для сечения $\varphi = \pi/2$:

$$T(\pi/2) = R/2 - qr \approx -qr(1 - 2h^2/r^2). \qquad (15.37)$$

Как следует из выражений (15.36) и (15.37) и их сравнения с напряжениями в кольце без пиллерса (15.24), влияние пиллерса на напряженное состояние кольца

7 Зак. 545

ничтожно и лежит в пределах точности рассматриваемой теории изгиба криволинейных рам. Отметим также, что установка пиллерса по диаметру кольца не только не уменьшает напряжений в его сечениях, но приводит к некоторому их возрастанию вследствие появления изгиба.

Вместе с тем установка пиллерсов и других подкреплений в кольцевых рамах, нагруженных внешним равномерно распределенным давлением, может потребоваться из иных соображений, не связанных с обеспечением их прочности.

Особенности расчета составных колец, в которые входят круговые дуги, нагруженные равномерно распределенной нагрузкой, и распорки. Из решения уравнений (15.23) вытекает, что любая дуга, вырезанная мысленно из кругового кольца, нагруженного равномерной нагрузкой q, будет находиться в равновесии, если к ее концам приложены усилия $T_0 = -qr$, направленные по каса-

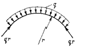


Рис. 15.9

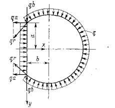


Рис. 15.10

тельной к дуге (рис. 15.9). Следовательно, и воздействие любой дуги на остальную часть кольца можно заменить усилиями qr, направленными по касательным в точках раздела.

Если в замкнутом равномерно нагруженном круговом кольце убрать его часть и заменить ее распоркой (рис. 15.10), то на распорку в ее концевых сечениях будут действовать силы qr, составляющие которых по направлениям осей координат ox и oy равны qa и qb (a — половина длины распорки; b — отстояние ее от центра кольца).

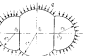


Рис. 15.11

Естественно, что в общем случае распорка будет вызывать изгиб кольца. Однако в реальных конструкциях, имеющих не нагруженные поперечной нагрузкой распорки, дополнительные напряжения связанные с изгибом кольца, будут иметь такую же относительную величину, как и в рассмотренной выше задаче об изгибе кольца, подкрепленного пиллерсом.

Определим внутренние усилия в сечениях стержней криволинейной рамы, состоящей из пересекающихся круговых балок, образующих замкнутый контур, и распорок (рис. 15.11). Применяя изложенные выше правила определения внутренних усилий в дугах кольца и распорках, получим осевые усилия, действующие в частях круговых колец, $T_i = qr_i$, и осевые усилия в распорках $R = q\overline{O_1O_2}$, где $\overline{O_1O_2}$ — расстояние между центрами окружностей.

Этот метод расчета может быть распространен на криволинейные рамы, состоящие из любого числа круговых дуг и распорок, при условии, что все узловые точки конструкции (точки соединения круговых дуг) располагаются на одной окружности. При выполнении этого условия рама и все ее стержни будут находиться в состоянии равновесия и в том случае, если в узловых точках расположить шарниры, что свидетельствует о близости напряженного состояния рассматриваемых рам к безмоментному (безызгибному).

§ 15.4. Применение метода конечных элементов в расчетах криволинейных рам

Для расчета криволинейных рам, так же как для расчета любых стержневых систем, можно использовать МКЭ. В соответствии с основными идеями метода, криволинейная рама должна быть представлена как система конечного числа стержневых элементов, соединенных друг с другом в узловых точках. Поскольку любую точку оси стержня можно принять за узловую, для упрощения вычислений узловые точки целесообразно располагать таким образом, чтобы участки стержней между ними могли считаться призматическими стержневыми элементами.

Рис. 15.12

При таком подходе криволинейные оси стержней аппроксимируются ломаными линиями, а криволинейная рама в целом — многоэлементной косоугольной рамой.

На рис. 15.12 показан пример аппроксимации шпангоутной рамы быстроходного корабля, изображенной на рис. 15.1. Исходные криволинейные переменного сечения стержни рамы заменены совокупностью призматических элементов с помощью выбора положения 10 узловых точек. После такой замены расчет криволинейной рамы по МКЭ не отличается от расчета сложных рам с призматическими стержнями.

Отметим некоторые особенности метода применительно к задаче расчета плоской криволинейной рамы.

Наиболее целесообразно для расчета судовых криволинейных рам использовать метод перемещений, первым шагом которого должно быть определение направлений возможных перемещений всех узловых точек. На этом шаге необходимо также установить ограничения смещений отдельных узлов, которые накладываются внешними связями (опорами, заделками и т. п.). Выполняя этот этап расчета, следует иметь в виду, что у судовых шпангоутных рам податливость в направлениях, нормальных к контуру рамы, значительно превосходит податливость в направлении касательной к их контуру. Это дает основание считать некоторые узлы рамы несмещаемыми.

Например, у рамы, изображенной на рис. 15.12, целесообразно считать узел *1* несмещаемым в вертикальном направлении. Кроме того, по симметрии конструкции и направлений нагрузки узлы *3* и *10* должны быть лишены свободы поворота и горизонтальных смещений.

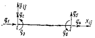


Рис. 15.13

Наряду с общей системой координат $oxyz$ должны быть введены локальные системы $o_{ij}x_{ij}y_{ij}z$, число которых равно числу стержневых элементов, (i, j — номера узловых точек, ограничивающих элемент). Длины стержней a_{ij} и их ориентация относительно осей общей системы координат oxy становятся известными, если определены координаты узловых точек x_i и y_i:

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}; \quad l_{x_{ij}x} = (x_j - x_i)/a_{ij}; \\ l_{x_{ij}y} = (y_j - y_i)/a_{ij}; \quad l_{y_{ij}x} = (-y_j + y_i)/a_{ij}; \\ l_{y_{ij}y} = (x_j - x_i)/a_{ij}, \end{aligned}\right\} \qquad (15.38)$$

где $l_{x_{ij}x}$, $l_{x_{ij}y}$ — направляющие косинусы оси $o_{ij}x_{ij}$; $l_{y_{ij}x}$, $l_{y_{ij}y}$ — то же оси $o_{ij}y_{ij}$.

Как показано в предыдущих параграфах, в расчетах судовых криволинейных рам существенное значение имеет учет наряду с деформациями изгиба деформаций растяжения-сжатия стержней. Поэтому наиболее подходящим типом конечного элемента является балочный элемент с шестью степенями свободы (рис. 15.13). Его матрица жесткости $[K_{ij}]$ в локальной системе координат может быть получена непосредственно из зависимости (11.85):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ K_{ij} = & \begin{bmatrix} EF/a & & & -EF/a & & \\ & 12EI/a^3 & 6EI/a^2 & & -12EI/a^3 & 6EI/a^2 \\ & & 4EI/a & & -6EI/a^2 & 2EI/a^2 \\ & & & EF/a & & \\ & & & & 12EI/a^3 & -6EI/a^2 \\ & & & & & 4EI/a \end{bmatrix}_{ij} \end{array} . \qquad (15.39)$$

В матрице (15.39) через F, I, a обозначены соответственно площадь поперечного сечения, момент инерции, длина ij-го балочного конечного элемента.

Воспользовавшись данными § 11.7, нетрудно выписать также для каждого из конечных элементов рамы вектор узловых нагрузок $\{P\}$, эквивалентный внешним нагрузкам, приложенным к данному конечному элементу. В частности, если на элемент действуют продольная нагрузка интенсивностью $p_0 = \text{const}$ и поперечная интенсивностью $q_0 = \text{const}$, то вектор эквивалентных узловых усилий в местной системе координат примет вид:

$$\{P\}_{ij} = \left\{ \frac{p_0 a}{2},\ \frac{q_0 a}{2},\ \frac{q_0 a^2}{12},\ \frac{p_0 a}{2},\ \frac{q_0 a}{2},\ -\frac{q_0 a^2}{12} \right\}_{ij}. \qquad (15.40)$$

Если интенсивности внешних нагрузок по длине элемента изменяются в соответствии с линейным законом $p(x) = p_0 x/a$, $q_x = q_0 x/a$, то вектор эквивалентных узловых усилий запишется так:

$$\{P\}_{ij} = \left\{ \frac{p_0 a}{6},\ \frac{3q_0 a}{20},\ \frac{q_0 a^2}{30},\ \frac{p_0 a}{3},\ \frac{7q_0 a}{20},\ -\frac{q_0 a^2}{20} \right\}. \qquad (15.41)$$

Преобразование матрицы жесткости $[K]_{ij}$ и вектора эквивалентных узловый усилий $\{P\}_{ij}$ при переходе от местной к общей системе координат oxy выполняется с помощью зависимостей (11.47) и (11.48)

$$[\bar{K}]_{ij} = [T]^{\mathrm{T}}_{ij} [K]_{ij} [T]_{ij}; \qquad (15.42)$$

$$\{\bar{P}\}_{ij} = [T]^{\mathrm{T}}_{ij} \{P\}_{ij}, \qquad (15.43)$$

в которых применительно к рассматриваемому случаю матрица преобразования $[T]_{ij}$ имеет вид

$$[T]_{ij} = \begin{bmatrix} [l]_{ij} & 0 \\ 0 & [l]_{ij} \end{bmatrix}, \qquad (15.44)$$

где

$$[l]_{ij} = \begin{bmatrix} l_{x_{ij}x} & l_{x_{ij}y} & l_{x_{ij}z} \\ l_{y_{ij}x} & l_{y_{ij}y} & l_{y_{ij}z} \\ l_{z_{ij}x} & l_{z_{ij}y} & l_{z_{ij}z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{x_{ij}} & m_{x_{ij}} & 0 \\ l_{y_{ij}} & m_{y_{ij}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

— матрица ориентации местной системы координат $o_{ij}x_{ij}y_{ij}z$ относительно общей системы $oxyz$. Заметим, что в общей системе координат принят тот же порядок нумерации и те же направления для положительных узловых перемещений (усилий), что и в местной системе координат (см. рис. 15.13).

После определения $[K]_{ij}$ и $[\bar{P}]_{ij}$ для всех конечных элементов рамы разрешающая система уравнений, перемещения узлов и усилия в узловых сечениях отыскиваются с использованием изложенной в § 11.9 процедуры МКЭ.

Контрольные вопросы

1. Какая стержневая система называется криволинейной рамой?
2. Какие основные допущения принимаются при расчете судовых криволинейных рам?
3. Какие методы наиболее целесообразно применять для определения перемещений и раскрытия статической неопределимости криволинейных рам?

4. Каково напряженное состояние кругового кольца, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой? Какие изменения внесет в напряженное состояние кольца установка пиллерса?

5. Какие свойства равномерно распределенной нагрузки, действующей на криволинейную раму, используются при определении изгибающих моментов, осевых и перерезывающих сил в произвольном сечении?

6. Как определяются условия в распорках и дугах составных колец? При каких условиях изгибом колец с распорками можно пренебречь?

Глава 16. ИЗГИБ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ И РОДСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

§ 16.1. Балка на упругом основании как модель в расчетах судовых конструкций

Для судовых конструкций характерна регулярность (периодичность) структуры, что связано с постоянством шпаций и размеров балок поперечного и продольного наборов на значительных участках корпуса судна. Такая регулярность приводит к необходимости расчета балок, опирающихся на большое число равноотстоящих упругих опор одинаковой жесткости (рис. 16.1).

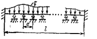


Рис. 16.1

Рис. 16.2

Подобная расчетная схема появляется также в задачах об изгибе судна на кильблоках (в доке) или на спусковом устройстве на стапеле. В этих случаях корпус судна может быть представлен в виде балки, имеющей сложную структуру поперечного сечения, а кильблоки или опоры спускового устройства в виде упругих опор (рис. 16.2).

Расчет балок на упругих опорах при любом их числе может быть выполнен методами, рассмотренными в гл. 13. Однако трудоемкость расчета с увеличением числа упругих опор может оказаться значительной.

Для балок с большим количеством упругих опор, т. е. при $a/l \ll 1$ (l — длина балки, a — расстояние между упругими опорами), имеется возможность такой замены расчетной схемы, при которой упругая линия может быть найдена на основе решения дифференциального уравнения изгиба.

С целью получения такой схемы заменим реакцию i-й упругой опоры балки R_i нагрузкой r_i, равномерно распределенной на малом участке длиной a, положив:

$$r_i = R_i/a. \tag{16.1}$$

Имеется возможность оценить погрешность в значениях изгибающих моментов и прогибов балки, возникающую при замене реакций всех промежуточных упругих опор распределенной кусочно-постоянной реактивной нагрузкой $r(x_i)$. Не останавливаясь на доказательстве, укажем, что эта погрешность имеет порядок $(a/l)^2$. Заметив, что реакция упругой опоры связана с ее просадкой w_i соотношением

$$R_i = K_i w_i, \tag{16.2}$$

получим

$$r(x_i) = (K_i/a)\, w_i = k_i w(x_i), \tag{16.3}$$

где $k_i = K_i/a$ — погонный коэффициент жесткости.

Следующим шагом является аппроксимация кусочно-постоянной реактивной нагрузки $r(x_i)$ некоторой непрерывной функцией $r(x)$. Наиболее естественно это сделать, положив

$$r(x) = k(x)\, w(x). \tag{16.4}$$

Здесь $w(x)$ — упругая линия балки. Соотношением (16.4) вводится понятие *непрерывного упругого основания* переменной жесткости $k(x)$, обладающего тем свойством, что его реакция в любом сечении балки пропорциональна прогибу в этом сечении.

Понятие сплошного упругого основания, реакция которого удовлетворяет соотношению (16.4), широко используют в технике. Причем не всегда им заменяют большое число равноотстоящих упругих опор. Возможны случаи, когда нагруженная поперечной нагрузкой балка действительно покоится на сплошном основании. Конструкции стапелей и стапель-палуб доков могут служить примерами таких сплошных оснований.

Однако соотношение (16.4) представляет лишь приближенное, предельно упрощенное описание свойств действительных сплошных оснований. Применительно к этим основаниям формула (16.4) выражает так называемую *гипотезу Винклера*, находящую широкое применение в расчетах прочности сооружений.

Отметим также, что упругое основание типа стапеля или стапель-палубы дока не сопротивляется отрыванию, поэтому применять (16.4) можно только при условии $w(x) \geqslant 0$.

§ 16.2. Дифференциальное уравнение изгиба балки на сплошном упругом основании и его интеграл

Дифференциальное уравнение изгиба балки на упругом основании. Рассмотрим изгиб балки переменного сечения, лежащей на сплошном упругом основании, погонная жесткость которого $k(x)$ (рис. 16.3). Расположение осей координат, правила знаков для прогибов, нагрузки, перерезывающих сил и изгибающих моментов примем такими же, как в задачах изгиба балок (см. гл. 13).

В соответствии с выражением (16.4) положительные реакции упругого основания направлены снизу вверх, поэтому полная нагрузка на балку равна

$$q_п(x) = q(x) - r(x), \tag{16.5}$$

где $q(x)$ — интенсивность внешней поперечной нагрузки на балку.

Дифференциальное уравнение изгиба балки переменного сечения (без учета деформаций сдвига)

$$[EI(x)\,w''(x)]'' = q_п(x) \tag{16.6}$$

после подстановки в него выражений (16.4) и (16.5) преобразуется к виду

$$[EI(x)\,w''(x)]'' + k(x)\,w(x) = q(x). \tag{16.7}$$

Уравнение (16.7) и представляет собой искомое дифференциальное уравнение изгиба балки, лежащей на сплошном упругом основании переменной жесткости.

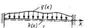


Рис. 16.3

Для балки постоянного сечения ($I=$ $=\mathrm{const}$), лежащей на упругом основании постоянной жесткости ($k=\mathrm{const}$), вместо формулы (16.7) получим

$$EIw^{\mathrm{IV}}(x) + kw(x) = q(x). \tag{16.8}$$

Общий интеграл уравнения (16.8) при $q(x) \equiv 0$. Как известно, общий интеграл линейного дифференциального уравнения представляет собой сумму общего интеграла соответствующего однородного уравнения и частного решения, зависящего от вида правой части.

Общий интеграл $w_0(x)$ однородного уравнения 4-го порядка

$$EIw_0^{\mathrm{IV}}(x) + kw_0(x) = 0 \tag{16.9}$$

является суммой четырех линейно независимых частных решений, для отыскания которых можно воспользоваться подстановкой Эйлера:

$$w_0(x) = Ae^{\eta x}. \tag{16.10}$$

После подстановки формулы (16.10) в выражение (16.9) получим характеристическое уравнение

$$EI\eta^4 + k = 0, \tag{16.11}$$

четыре корня которого и определят линейно независимые решения вида (16.10).

Из уравнения (16.11) следует, что

$$\eta^2 = \pm i\sqrt{k/(EI)},$$

где $i=\sqrt{-1}$. Поскольку $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$; $\sqrt{-i} = (1-i)/\sqrt{2}$, все четыре корня уравнения (16.11) равны

$$\eta_{1,2,3,4} = \pm\alpha(1 \pm i). \tag{16.12}$$

Здесь

$$\alpha = \sqrt[4]{k/(4EI)}. \tag{16.13}$$

Найденным значениям η соответствует общий интеграл уравнения (16.9):

$$w_0(x) = e^{\alpha x}(A_1e^{i\alpha x} + A_2e^{-i\alpha x}) + e^{-\alpha x}(A_3e^{i\alpha x} + A_4e^{-i\alpha x}), \tag{16.14}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные. Комплексные функции $e^{i\alpha x}$ и $e^{-i\alpha x}$ неудобны для вычислений, поэтому заменим их тригонометрическими с помощью формулы

$$e^{\pm i\alpha x} = \cos\alpha x \pm i\sin\alpha x.$$

Комплексные произвольные постоянные A_i также представим через вещественные:

$$A_{1,2} = (B_1 \pm iB_2)/2; \quad A_{3,4} = (B_3 \pm iB_4)/2.$$

В результате получим вместо выражения (16.14) формулу

$$w_0(x) = e^{\alpha x}(B_1\cos\alpha x + B_2\sin\alpha x) + e^{-\alpha x}(B_3\cos\alpha x + B_4\sin\alpha x). \tag{16.15}$$

Можно также воспользоваться известными зависимостями для гиперболических функций

$$\mathrm{ch}\,\alpha x = (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})/2; \quad \mathrm{sh}\,\alpha x = (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})/2. \tag{16.16}$$

Тогда из формулы (16.15) получим общий интеграл однородного уравнения в следующей форме:

$$w_0(x) = C_0\,\mathrm{ch}\,\alpha x\cos\alpha x + C_1\,\mathrm{ch}\,\alpha x\sin\alpha x + C_2\,\mathrm{sh}\,\alpha x\sin\alpha x + C_3\,\mathrm{sh}\,\alpha x\cos\alpha x. \tag{16.17}$$

Полученные выше три формы записи общего интеграла однородного уравнения, хотя их и используют для решения некоторых задач, неудобны для вычислений и, в частности, дифференцирования, так как содержат произведения функций. К тому же, ни одна из приведенных выше форм общего интеграла не позволяет получать решения по методу начальных параметров для балок на упругом основании. Целесообразно поэтому выразить общий интеграл однородного уравнения (16.9) через специально подобранные функции, которые удовлетворяли бы при $x=0$ условиям, обеспечивающим применение метода начальных параметров.

Пусть $V_0(x)$, $V_1(\alpha x)$, $V_2(\alpha x)$, $V_3(\alpha x)$ — четыре искомые функции, каждая из которых, кроме того, является частным решением уравнения (16.9). Тогда общий интеграл уравнения (16.9) можно представить в форме

$$w_0(x) = D_0V_0(\alpha x) + D_1V_1(\alpha x) + D_2V_2(\alpha x) + D_3V_3(\alpha x). \tag{16.18}$$

Естественно, что функции $V_i(\alpha x)$ линейно независимы между собой.

Очевидно, каждую из функций $V_i(\alpha x)$ можно отыскивать в форме

$$V_i(\alpha x) = a_i \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x + b_i \operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + \\ + c_i \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x + d_i \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{16.19}$$

поскольку выражение в правой части (16.19) представляет собой общий интеграл уравнения (16.9). Что касается постоянных a_i, b_i, c_i, d_i, то для достижения поставленных целей будем их определять, подчинив матрицу начальных значений функций $V_i(\alpha x)$ и их производных следующим условиям:

$$\begin{bmatrix} V_0(0) & V_0'(0) & V_0''(0) & V_0'''(0) \\ V_1(0) & V_1'(0) & V_1''(0) & V_1'''(0) \\ V_2(0) & V_2'(0) & V_2''(0) & V_2'''(0) \\ V_3(0) & V_3'(0) & V_3''(0) & V_3'''(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\,\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2}\,\alpha \end{bmatrix}. \tag{16.20}$$

Из общей теории линейных дифференциальных уравнений известно, что частные решения однородного дифференциального уравнения (16.9) будут линейно независимы, если определитель матрицы начальных значений функций и их производных (определитель Вронского) отличен от нуля. Это условие при выборе значений (16.20) выполнено. Кроме того, начальные значения функций выбраны таким образом, чтобы сделать удобным применение метода начальных параметров.

Постоянные a_0, b_0, c_0, d_0 исходя из условий, определяемых первой строчкой матричного равенства (16.20), равны $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = d_0 = 0$, следовательно, $V_0(\alpha x) = \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x$. Используя вторую строчку (16.20) для отыскания a_1, b_1, c_1, d_1, получим $V_1(\alpha x)$. Аналогично находим $V_2(\alpha x)$ и $V_3(\alpha x)$. Таким образом определяем четыре линейно независимых решения уравнений (16.9):

$$\left.\begin{aligned} V_0(\alpha x) &= \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x; \\ V_1(\alpha x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x \operatorname{ch} \alpha x); \\ V_2(\alpha x) &= \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x; \\ V_3(\alpha x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x - \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x). \end{aligned}\right\} \tag{16.21}$$

Функции (16.21) были получены Н. П. Пузыревским и носят его имя.

Выполняя дифференцирование, обнаруживаем следующие правила отыскания производных функций Пузыревского:

$$\left.\begin{aligned} V_3'(\alpha x) &= \sqrt{2}\,\alpha V_2(\alpha x); \qquad & V_2'(\alpha x) &= \sqrt{2}\,\alpha V_1(\alpha x); \\ V_1'(\alpha x) &= \sqrt{2}\,\alpha V_0(\alpha x); \qquad & V_0'(\alpha x) &= -\sqrt{2}\,\alpha V_3(\alpha x). \end{aligned}\right\} \tag{16.22}$$

Итак, производная функции $V_i(\alpha x)$ равна функции $V_{i-1}(\alpha x)$, умноженной на $\sqrt{2}\,\alpha$. Исключение составляет лишь функция $V_0(\alpha x)$, производная от которой равна $-\alpha\sqrt{2}\,V_3(\alpha x)$.

Для определения значений $V_i(\alpha x)$ имеются таблицы [51, т. 1], чем значительно облегчается применение этих функций в расчетах.

Функции Пузыревского весьма удобны для использования в различных задачах изгиба балок на сплошном упругом основании, если аргумент $\alpha x_0 = \sqrt[4]{k x_0^4/(4EI)}$ (x_0 — абсцисса сечения, для которого производят вычисление функции) имеет умеренные значения ($\alpha x_0 < 4$). При увеличении аргумента значения функций $V_i(\alpha x)$ быстро растут, что приводит к вычислительным трудностям — появлению малых разностей близких величин в решениях уравнений, определяющих произвольные постоянные D_i.

После подстановки в зависимости (16.21) выражений для гиперболических функций (16.16) получим, что каждая из функций Пузыревского представляет собой сумму убывающей и возрастающей частей. Например, $V_0(\alpha x) = e^{-\alpha x} \cos \alpha x/2 + e^{\alpha x} \cos \alpha x/2$. Для преодоления отмеченного выше вычислительного затруднения Г. В. Клишевич предложил использовать в расчетах лишь убывающие части функций Пузыревского, т. е. функции (множитель 1/2 опущен):

$$\left.\begin{aligned} W_0(\alpha x) &= e^{-\alpha x} \cos \alpha x; \\ W_1(\alpha x) &= e^{-\alpha x} (-\cos \alpha x + \sin \alpha x)/\sqrt{2}; \\ W_2(\alpha x) &= -e^{-\alpha x} \sin \alpha x; \\ W_3(\alpha x) &= e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x)/\sqrt{2}. \end{aligned}\right\} \tag{16.23}$$

Для функций $W_i(\alpha x)$ также имеются таблицы [50, 51].

Функции Клишевича (16.23), очевидно, являются частными интегралами однородного уравнения (16.10) и подчиняются тому же правилу дифференцирования, что и функции Пузыревского. Однако функции (16.23) линейно зависимы, и выражение $F(x) = c_0 W_0(\alpha x) + c_1 W_1(\alpha x) + c_2 W_2(\alpha x) + c_3 W_3(\alpha x)$ не является общим интегралом уравнения (16.9). В линейной зависимости функций Клишевича нетрудно убедиться, поскольку, например, $W_1(\alpha x) = -[W_0(\alpha x) + W_2(\alpha x)]/\sqrt{2}$; $W_3(\alpha x) = [W_0(\alpha x) - W_2(\alpha x)]/\sqrt{2}$ и т. д. Вместе с тем любые две функции (16.23) линейно независимы, так как их отношение не равно постоянному числу. Это позволяет представить общий интеграл однородного уравнения (16.9) в виде

$$W_0(x) = AW_i(\alpha x) + BW_j(\alpha x) + CW_g[\alpha(l - x)] + \\ + DW_h[\alpha(l - x)], \tag{16.24}$$

где $i \neq j$ и $g \neq h$. Индексы i, j, g, h могут принимать любые значения от 0 до 3; их выбор определяется удобством удовлетворения граничным условиям.

При обращении аргумента в нуль функции Клишевича принимают следующие значения:

$$W_0(0)=1;\quad W_1(0)=-1/\sqrt{2};\quad W_2(0)=0;\quad W_3(0)=1/\sqrt{2}. \qquad (16.25)$$

Общий интеграл (16.24) содержит два частных решения, убывающих с ростом абсцессы x, и два, возрастающих по мере увеличения x. Доказательство линейной независимости частных решений, входящих в выражение (16.24), можно получить, составив определитель Вронского и показав, что он не равен нулю.

Частные решения неоднородного уравнения (16.8). Остановимся далее на определении частных решений неоднородного уравнения (16.8). Рассмотрим прежде всего простейший случай, когда нагрузка $q(x)$ непрерывна на длине балки и может быть представлена полиномом степени не выше третьей:

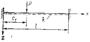


Рис. 16.4

$$q(x)=q_0+q_1(x/l)+ q_2(x/l)^2+q_3(x/l)^3. \qquad (16.26)$$

Подстановкой в уравнение (16.8) убеждаемся, что в этом случае

$$w_{\text{ч. р}}(x)=q(x)/k. \qquad (16.27)$$

Если нагрузка, действующая на балку, непрерывна, но изменяется по более сложному закону, ее можно представить в виде ряда Фурье по тригонометрическим функциям:

$$q(x)=q_0+\sum_m q_m^{(1)}\sin m\pi x/l+\sum_m q_m^{(2)}\cos m\pi x/l. \qquad (16.28)$$

Частное решение следует разыскивать также в виде ряда

$$w_{\text{ч. р}}(x)=q_0/k+\sum_m A_m\sin m\pi x/l+\sum_m B_m\cos m\pi x/l, \qquad (16.29)$$

коэффициенты которого A_m и B_m должны определяться после подстановки выражений (16.28) и (16.29) в уравнение (16.8):

$$A_m=q_m^{(1)}/[EI\,(m\pi/l)^4+k];\qquad B_m=q_m^{(2)}/[EI\,(m\pi/l)^4+k]. \qquad (16.30)$$

Метод начальных параметров. Представление в форме ряда (16.28) может быть применено и в случаях действия нагрузок, имеющих вид разрывных функций. Однако значительно более удобным и универсальным в таких задачах является метод начальных параметров.

Пусть на балку, лежащую на сплошном упругом основании, действует в сечении $x=c_1$ сосредоточенная сила P (рис. 16.4). Выражение для нагрузки в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$q(x)=P\delta(x-c_1). \qquad (16.31)$$

Дифференциальное уравнение изгиба балки

$$EIw^{\mathrm{IV}}(x)+kw(x)=P\delta(x-c_1) \qquad (16.32)$$

после однократного интегрирования перепишем в виде

$$EIw'''(x)+k\int_0^x w(x)\,dx=P\sigma(x-c_1)+N_0=\|_{c_1}P+N_0, \qquad (16.33)$$

где $\sigma(x-c_1)$ — функция единичного скачка (15.16); N_0 — произвольная постоянная, представляющая собой значение перерезывающей силы в начале координат.

Поскольку необходимое число произвольных постоянных, определяемых из граничных условий, содержится в общем интеграле однородного уравнения, при отыскании частного решения уравнения (16.33) достаточно найти такое выражение для $w(x)$, которое при подстановке в левую часть уравнения (16.33) обращает ее в $P\sigma(x-c_1)$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что выражение

$$w_{\text{ч. р}}(x)=\|_{c_1}PV_3[\alpha(x-c_1)]/(2\sqrt{2}\,\alpha^3EI) \qquad (16.34)$$

удовлетворяет этому условию. При дифференцировании этого выражения следует иметь в виду, что в точке $x=c_1$ определяется правосторонняя производная (при $x-c_1>0$). Тогда

$$EIw'''_{\text{ч. р}}(x)=\|_{c_1}PV_0[\alpha(x-c_1)];$$

$$k\int_0^x w_{\text{ч. р}}\,dx=k\int_{c_1}^x w_{\text{ч. р}}\,dx=-\|_{c_1}P\{V_0[\alpha(x-c_1)]-1\}.$$

Если в сечении $x=c_2$ действует сосредоточенный изгибающий момент (рис. 16.5, *а*), то его можно представить в виде двух направленных в противоположные стороны сосредоточенных сил $P=\mathfrak{M}/\Delta c_2$, приложенных в сечениях $x=c_2$ и $x=c_2+\Delta c_2$, при

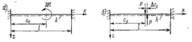


Рис. 16.5

$\Delta c_2\to 0$. При этом, если ввести в рассмотрение функцию Дирака, интенсивность поперечной нагрузки для балки, изображенной на рис. 16.5, *б*, определится выражением

$$q(x)=P\delta(x-c_2)-P\delta(x-c_2-\Delta c_2). \qquad (16.35)$$

Частное решение для каждого из слагаемых в правой части (16.35) может быть найдено по формуле (16.34):

$$w_{\text{ч. р}}(x)=\|_{c_2}P\{V_3[\alpha(x-c_2)]-V_3[\alpha(x-c_2-\Delta c_2)]\}/(2\sqrt{2}\,\alpha^3EI).$$

Умножив и разделив правую часть полученного выражения на Δc_2 и перейдя к пределу при $\Delta c_2 \to 0$, получим искомое частное решение

$$w_{\text{ч. р}}(x) = \|_{c_2} \mathfrak{M} V_2 [\alpha (x - c_2)] / (2\alpha^2 EI). \tag{16.36}$$

Располагая формулами (16.34) и (16.36) и используя метод наложения, можно найти частное решение уравнения (16.8) при любом виде нагрузки $q(x)$. Пусть, например, произвольная поперечная нагрузка действует на участке длины балки от $x = c_3$ до $x = l$ (рис. 16.6). Выделим на расстоянии c от начала координат элементарную силу $q(c)\,dc$. Соответствующее ей частное решение на основании выражения (16.34) равно

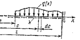


Рис. 16.6

$$dw_{\text{ч. р}}(x) = \|_c q(x)\,dc V_3 [\alpha (x - c)] \times \\ \times / (2\sqrt{2}\,\alpha^3 EI).$$

Суммируя действие всех элементарных сил для произвольного сечения $x \geqslant c_3$, получаем

$$w_{\text{ч. р}} = \|_{c_3} \int\limits_{c_3}^{x} q(c) V_3 [\alpha (x - c)]\,dc / (2\sqrt{2}\,\alpha^3 EI). \tag{16.37}$$

В частном случае при $q(x) = q = \text{const}$ из формулы (16.37) следует (удобно использовать замену переменных под интегралом $x - c = \xi$, $dc = -d\xi$)

$$w_{\text{ч. р}} = \|_{c_3} \frac{q}{4\gamma^4 EI} V_0 (d\xi) \Big|_{x-c_3}^{0} = \|_{c_3} \frac{q}{k} \{1 - V_0 [\alpha (x - c_3)]\}. \tag{16.38}$$

Если нагрузка $q(x)$ действует на ограниченном участке длины балки $c_3 \leqslant x \leqslant c_4$ ($c_4 < l$), ее следует продлить, сохранив непрерывность функции $q(x)$ до сечения $x = l$, приложив на участке балки $c_4 \leqslant x \leqslant l$ нагрузку той же интенсивности, но противоположно направленную. Этим приемом обеспечивается возможность применения решения (16.37) к обеим нагрузкам и неизменность исходной нагрузки балки.

§ 16.3. Определение параметров изгиба однопролетных балок на упругом основании

При расчете некоторых судовых конструкций необходимо определять элементы изгиба однопролетных балок, лежащих на упругом основании и нагруженных нагрузками простейшего вида: распределенной равномерно или по линейному закону, имеющей вид сосредоточенной силы, сосредоточенного момента и т. п.

Полезно поэтому для наиболее распространенных случаев нагрузки и условий закрепления располагать готовыми решениями и таблицами для определения параметров изгиба. Подчеркнем, что в рассматриваемых решениях не учитываются деформации сдвига.

Балка, свободно опертая на податливые опоры с коэффициентом податливости A и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой (рис. 16.7). Вследствие симметрии устройства и нагрузки балки ее упругая линия также будет симметричной относительно середины пролета. Расположив начало координат посередине балки, получаем, что $w(x)$ должна быть функцией, симметричной относительно сечения $x = 0$, т. е. функцией четной. Поэтому в общем интеграле дифференциального уравнения изгиба балки $EIw^{\text{IV}} + kw = q$ следует сохранить только четные функции.

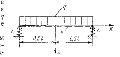


Рис. 16.7

Воспользуемся выражением (16.18) общего интеграла однородного уравнения через функции Пузыревского, заметив, что в соответствии с формулой (16.21) функции с четными индексами $V_0(\alpha x)$ и $V_2(\alpha x)$ являются четными, а $V_1(\alpha x)$ и $V_3(\alpha x)$ — нечетными. Частное решение примем в соответствии с зависимостью (16.27):

$$w(x) = q/k + D_0 V_0(\alpha x) + D_2 V_2(\alpha x). \tag{16.39}$$

Таким образом, понятие о четности функции $w(x)$ позволило определить две из четырех произвольных постоянных, содержащихся в интеграле (16.18): $D_1 = D_3 = 0$. Такой же результат, естественно, был бы получен и при удовлетворении граничных условий на обоих концах балки.

Постоянные D_0 и D_2 должны быть найдены из граничных условий

$$\text{при } x = 0{,}5l \quad w'' = 0; \quad w = AEIw'''. \tag{16.40}$$

После подстановки выражения (16.39) в (16.40) получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} D_2 V_0(u) - D_0 V_2(u) = 0; \\ -2\sqrt{2}\,\alpha^3 EIA [D_2 V_3(u) + D_0 V_1(u)] = q/k + D_0 V_0(u) + D_2 V_2(u), \end{aligned}\right\} \tag{16.41}$$

где

$$u = 0{,}5l\alpha = 0{,}5l \sqrt[4]{k/(4EI)} = \sqrt[4]{kl^4/(64EI)}. \tag{16.42}$$

Величина u является безразмерной характеристикой жесткости упругого основания. В частности, $u = 0$ означает, что упругое основание отсутствует.

Определив произвольные постоянные из уравнений (16.41), получим выражение для упругой линии

$$w(x) = \frac{q}{k} \left[1 - \frac{V_0(u) V_0(\alpha x) + V_2(u) V_2(\alpha x)}{V_0^2(u) + V_2^2(u)} \cdot \frac{1}{1 + B} \right]. \tag{16.43}$$

Здесь

$$B = Akl\mu_0(u)/2, \tag{16.44}$$

Таблица 16.1. **Значения вспомогательных функций для расчета балок на сплошном упругом основании**

u	φ_0	φ_1	χ_0	χ_1	χ_2	ψ_0	ψ_1	ψ_2	μ_0	μ_1	ν_0	ν_1
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	0,999	1,000	0,999	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000	1,005	0,998
0,3	0,993	0,999	0,995	0,999	0,999	0,997	0,994	0,995	0,996	1,000	1,011	0,990
0,4	0,979	0,996	0,983	0,996	0,997	0,990	0,980	0,983	0,987	0,999	1,036	0,968
0,5	0,950	0,990	0,959	0,991	0,993	0,976	0,953	0,961	0,968	0,995	1,085	0,926
0,6	0,901	0,979	0,919	0,982	0,985	0,951	0,906	0,923	0,936	0,988	1,171	0,852
0,7	0,827	0,961	0,895	0,967	0,973	0,916	0,838	0,866	0,882	0,978	1,289	0,744
0,8	0,731	0,935	0,781	0,946	0,956	0,868	0,747	0,791	0,828	0,967	1,468	0,604
0,9	0,619	0,899	0,689	0,917	0,931	0,812	0,641	0,702	0,755	0,948	1,672	0,442
1,0	0,498	0,852	0,591	0,878	0,899	0,752	0,529	0,609	0,678	0,920	1,898	0,274
1,1	0,380	0,795	0,494	0,830	0,859	0,692	0,420	0,517	0,602	0,889	2,132	0,114
1,2	0,272	0,728	0,405	0,774	0,813	0,636	0,321	0,431	0,531	0,856	2,364	−0,022
1,3	0,178	0,653	0,327	0,712	0,761	0,586	0,237	0,357	0,470	0,814	2,588	−0,130
1,4	0,100	0,573	0,262	0,645	0,705	0,542	0,167	0,294	0,417	0,769	2,803	−0,206
1,5	0,037	0,492	0,208	0,576	0,648	0,503	0,114	0,242	0,373	0,723	3,010	−0,254
1,6	−0,013	0,411	0,164	0,509	0,591	0,470	0,073	0,200	0,337	0,681	3,212	−0,276
1,7	−0,052	0,335	0,129	0,444	0,537	0,442	0,042	0,166	0,308	0,639	3,410	−0,278
1,8	−0,081	0,264	0,101	0,384	0,483	0,417	0,021	0,138	0,285	0,598	3,608	−0,264
1,9	−0,102	0,201	0,075	0,328	0,439	0,394	0,006	0,116	0,265	0,561	3,805	−0,238
2,0	−0,117	0,144	0,062	0,279	0,397	0,375	−0,003	0,099	0,249	0,527	4,002	−0,206
2,1	−0,133	0,054	0,037	0,197	0,325	0,341	−0,007	0,072	0,224	0,469	4,400	−0,136
2,2	−0,133	0,054	0,037	0,197	0,325	−0,341	−0,007	0,072	0,224	0,469	4,400	−0,136
2,4	−0,135	−0,009	0,021	0,136	0,269	0,313	−0,011	0,055	0,204	0,424	4,800	−0,072
2,6	−0,127	−0,051	0,011	0,092	0,226	0,289	−0,009	0,043	0,189	0,387	5,200	−0,024
2,8	−0,114	−0,074	0,005	0,060	0,193	0,268	−0,006	0,034	0,177	0,356	5,600	0,006
3,0	−0,098	−0,085	0,002	0,038	0,167	0,250	−0,003	0,028	0,166	0,333	6,000	0,020
3,2	−0,081	−0,087	−0,000	0,023	0,146	0,234	−0,001	0,023	0,156	0,311	6,400	0,021
3,4	−0,064	−0,082	−0,000	0,012	0,129	0,221	0,000	0,019	0,147	0,293	6,800	0,024
3,6	−0,049	−0,073	−0,002	0,006	0,115	0,208	0,000	0,016	0,139	0,278	7,200	0,015
3,8	−0,035	−0,063	−0,002	0,002	0,104	0,197	0,000	0,014	0,132	0,263	7,600	0,009
4,0	−0,024	−0,052	−0,002	−0,001	0,094	0,188	0,000	0,012	0,125	0,250	8,000	0,005
4,2	−0,015	−0,041	−0,002	−0,002	0,085	0,179	0,000	0,010	0,119	0,238	8,400	0,001
4,4	−0,008	−0,031	−0,001	−0,003	0,078	0,171	0,000	0,009	0,114	0,227	8,800	0,001
4,6	−0,002	−0,022	−0,001	−0,003	0,071	0,163	0,000	0,008	0,008	0,209	9,217	−0,001
4,8	0,001	−0,015	−0,001	−0,002	0,065	0,156	0,000	0,007	0,104	0,208	9,600	−0,001
5,0	0,004	−0,009	−0,001	−0,002	0,060	0,150	0,000	0,006	0,100	0,200	10,000	−0,001

где

$$\mu_0(u) = [V_0(u)\,V_1(u) + V_2(u)\,V_3(u)]/\{\sqrt{2}\,u\,[V_0^2(u) + V_2^2(u)]\}. \qquad (16.45)$$

Используя выражение упругой линии (16.43), можно определить параметры изгиба (прогибы, углы поворота, изгибающие моменты, перерезывающие силы) в любом сечении балки. Практический интерес, однако, представляют лишь их наибольшие значения в некоторых характерных сечениях. Так, наибольшая стрелка прогиба при $x = 0$ равна

$$w(0) = (q/k)\,[1 - \varphi_0(u)/(1 + B)], \qquad (16.46)$$

где

$$\varphi_0(u) = V_0(u)/[V_0^2(u) + V_2^2(u)]. \qquad (16.47)$$

Угол поворота сечений при $x = \pm 0{,}5l$ определяют по формуле

$$w'(\pm 0{,}5l) = \mp\,[(ql^3/24EI]\,[\psi_2(u)/(1 + B)], \qquad (16.48)$$

в которой

$$\psi_2(u) = (3/2\,\sqrt{2})\,[V_0(u)\,V_3(u) - V_1(u)\,V_2(u)]/\{u^3\,[V_0^2(u) + V_2^2(u)]\}. \qquad (16.49)$$

Изгибающий момент посередине пролета вычисляют так:

$$M(0) = EIw''\,|_{x=0} = -(ql^2/8)\,[\chi_0(u)/(1 + B)], \qquad (16.50)$$

где

$$\chi_0(u) = V_2(u)/\{u^2\,[V_0^2(u) + V_2^2(u)]\}. \qquad (16.51)$$

Наибольшее значение перерезывающей силы равно

$$N(\pm 0{,}5l) = \pm\,w(\pm 0{,}5l)/A = \pm\,ql\mu_0(u)/[2\,(1 + B)]. \qquad (16.52)$$

Интенсивность нагрузки балки посередине и в опорном сечении находят по формулам

$$\left.\begin{aligned} q_1(0) &= q - kw(0) = q\,[\varphi_0(u)/(1 + B)]; \\ q_1(0{,}5l) &= q - kw(0{,}5l) = q\,[1/(1 + B)]. \end{aligned}\right\} \qquad (16.53)$$

Выражения (16.48), (16.50), (16.52), (16.53) содержат в качестве первого сомножителя значение соответствующего параметра изгиба балки без упругого основания. Множителем $1/(1 + B)$ учитывается влияние податливости упругих опор, причем $B = 0$ при $A = 0$ и $B = 0$ при $u = 0$, поскольку при отсутствии упругого основания податливость опор не изменяет углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил рассматриваемой балки. Функциями $\varphi_0(u)$, $\psi_2(u)$, $\chi_0(u)$, $\mu_0(u)$ учитывается влияние жесткости упругого основания на параметры изгиба. Все эти функции обращаются в единицу при $u = 0$. Численные значения данных функций приведены в табл. 16.1.

Балка, жестко заделанная на податливых опорах с коэффициентом податливости A и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой (рис. 16.8). Эта задача отличается от предыдущей только тем, что общий интеграл (16.39) следует теперь подчинить граничным условиям жесткой заделки на проседающей опоре

$$\text{при } x = 0{,}5l \;\; w' = 0; \;\; w = AEIw'''. \qquad (16.54)$$

Выражение для упругой лининии получит вид

$$w(x) = \frac{q}{k}\left[1 - \frac{V_1(u)\,V_0(\alpha x) + V_3(u)\,V_2(\alpha x)}{V_0(u)\,V_1(u) + V_2(u)\,V_3(u)}\,\frac{1}{1 + B_1}\right], \qquad (16.55)$$

где

$$B_1 = Akl\mu_1(u)/2. \qquad (16.56)$$

В свою очередь,

$$\mu_1(u) = [V_1^2(u) + V_3^2(u)]/\{\sqrt{2}\,u\,[V_0(u)\,V_1(u) + V_2(u)\,V_3(u)]\}. \qquad (16.57)$$

Из выражения (16.55) следуют приведенные ниже формулы для параметров изгиба балки в характерных сечениях.

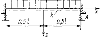


Рис. 16.8

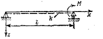


Рис. 16.9

Наибольшая стрелка прогиба при $x = 0$

$$w(0) = (q/k)\,[1 - \varphi_1(u)/(1 + B_1)], \qquad (16.58)$$

где

$$\varphi_1(u) = V_1(u)/[V_0(u)\,V_1(u) + V_2(u)\,V_3(u)]. \qquad (16.59)$$

Изгибающий момент посередине балки

$$M(0) = -(ql^2/24)\,[\chi_1(u)/(1 + B_1)], \qquad (16.60)$$

причем

$$\chi_1(u) = 3V_3(u)/\{u^2\,[V_0(u)\,V_1(u) + V_2(u)\,V_3(u)]\}. \qquad (16.61)$$

Изгибающий момент в заделке

$$M(\pm 0{,}5l) = (ql^2/12)\,[\chi_2(u)/(1 + B_1)], \qquad (16.62)$$

где

$$\chi_2(u) = \frac{3}{u^2}\,\frac{V_1(u)\,V_2(u) - V_0(u)\,V_3(u)}{V_0(u)\,V_1(u) + V_2(u)\,V_3(u)}. \qquad (16.63)$$

Перерезывающая сила на опорах равна

$$N(\pm 0{,}5l) = \pm\,w(\pm 0{,}5l)/A = \pm\,(ql/2)\,[\mu_1(u)/(1 + B_1)]. \qquad (16.64)$$

Интенсивность нагрузки балки посередине и в опорном сечении определяется соответственно формулами

$$q_1(0) = q\varphi_1(u)/(1 + B_1); \quad q_1(0{,}5l) = q/(1 + B_1). \qquad (16.65)$$

Численные значения функций $\varphi_1(u)$, $\chi_1(u)$, $\chi_2(u)$, $\mu_1(u)$ приведены в табл. 16.1.

Балка, свободно опертая на жесткие опоры и нагруженная в правом опорном сечении сосредоточенным изгибающим моментом (рис. 16.9). Общий интеграл дифференциального уравнения изгиба рассматриваемой балки примем в следующем виде ($q=0$):

$$w(x)=D_0V_0(\alpha x)+D_1V_1(\alpha x)+D_2V_2(\alpha x)+D_3V_3(\alpha x). \quad (16.66)$$

Для определения произвольных постоянных должны быть использованы граничные условия

$$\left.\begin{array}{l}\text{при } x=0 \;\; w=0; \quad w''=0;\\ \text{при } x=l \;\; w=0; \quad w''=M/(EI).\end{array}\right\} \quad (16.67)$$

Из условий при $x=0$ следует $D_0=D_2=0$. Условия при $x=l$ позволяют получить следующую систему уравнений для отыскания D_1 и D_3:

$$\left.\begin{array}{l}D_1V_1(2u)+D_3V_3(2u)=0;\\ -D_1V_3(2u)+D_3V_1(2u)=M/(2EI\alpha^2).\end{array}\right\} \quad (16.68)$$

Определив постоянные D_1 и D_3, на основании формулы (16.66) получим выражение для упругой линии

$$w(x)=\frac{M}{2\alpha^2EI}\,\frac{V_1(2u)\,V_3(\alpha x)-V_3(2u)\,V_1(\alpha x)}{V_1^2(2u)+V_3^2(2u)}. \quad (16.69)$$

Угол поворота правого (нагруженного) опорного сечения равен

$$w'(l)=[Ml/(3EI)]\,[\psi_0(u)], \quad (16.70)$$

где

$$\psi_0(u)=\frac{3\sqrt{2}}{4u}\,\frac{V_1(2u)\,V_2(2u)-V_3(2u)\,V_0(2u)}{V_1^2(2u)+V_3^2(2u)}. \quad (16.71)$$

Аналогично для левого (незагруженного) сечения

$$w'(0)=-[Ml/(6EI)]\,[\psi_1(u)]. \quad (16.72)$$

Здесь

$$\psi_1(u)=3\sqrt{2}\,V_3(2u)/\{2u\,[V_1^2(2u)+V_3^2(2u)]\}. \quad (16.73)$$

Формулы (16.70) и (16.72) построены таким образом, что функции $\psi_0(u)$ и $\psi_1(u)$ позволяют учесть влияние упругого основания на углы поворота опорных сечений балки, поскольку множители перед функциями представляют собой соответствующие углы поворота балки без упругого основания. При $u=0$ функции $\psi_0(u)$ и $\psi_1(u)$ равны единице. Численные значения функций приведены в табл. 16.1.

Расчет однопролетных балок на упругом основании. Приведенные выше примеры показывают, что параметры изгиба однопролетных балок удобно определять как произведения величин, найденных для соответствующих балок без упругого основания, и функций, зависящих от безразмерного коэффициента жесткости упругого основания. Для функций, определяющих влияние упругого основания на параметры изгиба в характерных сечениях балок, могут быть составлены таблицы, что значительно упрощает практические расчеты. В справочных материалах (например, [51]) приведены результаты решения задач для многих видов нагрузки однопролетных балок. Что касается устройства опор балок, то все известные формулы, за исключением рассмотренных выше, получены для случаев свободного опирания и жесткой заделки концевых сечений на непроседающих опорах. Существуют также формулы для определения прогибов и других параметров изгиба балок, не имеющих иных опор, кроме упругого основания. Пример решения такой задачи рассмотрен в § 16.4.

§ 16.4. Расчет упруго заделанных и неразрезных балок, лежащих на сплошном упругом основании

Расчет балок на упругой заделке опорных сечений. Коэффициент опорной пары. Формулы для расчета однопролетных балок на упругом основании, которые были получены в § 16.3, относились к двум предельным значениям коэффициентов податливости заделок опорных сечений: $\mathfrak{A}=\infty$ (свободное опирание) и $\mathfrak{A}=0$ (жесткая заделка). Между тем в реальных конструкциях нередки случаи упругой заделки концов балок. Поэтому большой интерес представляет получение расчетных зависимостей для параметров изгиба балок при промежуточных значениях коэффициентов податливости.

Обратим внимание, что для балок на упругом основании влияние податливости заделок опорных сечений на параметры изгиба в пролете уменьшается с ростом аргумента u. Оценим, например, отношение изгибающего момента посередине пролета балки, нагруженной равномерной нагрузкой, при изменении податливости заделок от бесконечно большой (свободное опирание) до нулевой (жесткая заделка).

В соответствии с выражениями (16.50) и (16.60), полагая опоры непроседающими ($B=B_1=0$), получаем

$$\beta_0=M(0)_{\text{с. о}}/M(0)_{\text{ж. з}}=3\chi_0(u)/\chi_1(u),$$

где $M(0)_{\text{с. о}}$ — момент свободно опертой балки в сечении $x=0$; $M(0)_{\text{ж. з}}$ — то же для жестко заделанной балки. Если для балки без упругого основания ($u=0$) $\beta_0=3$, то при $u=1$ $\beta_0=2{,}0$, а при $u=1{,}6$ $\beta_0=0{,}967$. Полученный результат свидетельствует, что опорные изгибающие моменты при $u>1{,}5$ у рассматриваемой балки изменяют упругую линию только вблизи сечений, где они действуют, т. е. вызывают лишь локальный (краевой) эффект. Это явление типично для балок на упругом основании.

Рассмотрим однопролетную балку на упругом основании, нагрузка которой симметрична относительно сечения посередине пролета, а коэффициенты податливости упругих заделок одинаковы (рис. 16.10).

Можно получить достаточно простые расчетные формулы, если наряду с коэффициентом податливости ввести силовую характеристику податливости упругой заделки — коэффициент опорной пары $\varkappa$, определив его как отношение опорного момента при упругой заделке концов $M_{\text{упр}}$ к опорному моменту при жесткой заделке обоих концов той же балки $M_{\text{ж. з}}$:

$$\varkappa = M_{\text{упр}}/M_{\text{ж. з}}. \qquad (16.74)$$

Для рассматриваемых однопролетных балок с одинаковой заделкой опорных сечений коэффициент опорной пары изменяется от нуля (свободное опирание) до единицы (жесткая заделка).

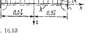


Рис. 16.10

Известно, что упругая линия балки является линейной функцией действующих на нее нагрузок и, в частности, опорных изгибающих моментов. Поскольку последние пропорциональны коэффициенту опорной пары, упругий прогиб в любом сечении балки, должен линейно зависеть от $\varkappa$, причем при $\varkappa = 0$ $w(x) = w_{\text{с. о}}(x)$; а при $\varkappa = 1$ $w(x) = w_{\text{ж. з}}(x)$, где $w_{\text{с. о}}(x)$ — упругая линия свободно опертой балки; $w_{\text{ж. з}}(x)$ — то же жестко заделанной балки. Этим условиям удовлетворяет зависимость

$$w(x) = (1-\varkappa)\, w_{\text{с. о}}(x) + \varkappa w_{\text{ж. з}}(x). \qquad (16.75)$$

Выражение (16.75) и представляет собой упругую линию балки, загруженной симметричной нагрузкой и симметрично заделанной на опорах.

Для случая действия на балку равномерно распределенной нагрузки на основании формулы (16.75), используя решения предыдущего параграфа, найдем

$$w(0) = \frac{q}{k}\left[1 - \frac{(1-\varkappa)}{1+B}\varphi_0(u) - \varkappa\frac{\varphi_1(u)}{1+B_1}\right]; \qquad (16.76)$$

$$w'\left(\pm\frac{l}{2}\right) = \mp(1-\varkappa)\frac{ql^3}{24EI}\frac{\psi_2(u)}{1+B}; \qquad (16.77)$$

$$M(0) = -\frac{ql^2}{8}\left[\frac{(1-\varkappa)\,\chi_0(u)}{1+B} + \frac{\varkappa\chi_1(u)}{1+B_1}\right]; \qquad (16.78)$$

$$M\left(\pm\frac{l}{2}\right) = \varkappa\frac{ql^2}{12}\frac{\chi_2(u)}{1+B_1}. \qquad (16.79)$$

В практических расчетах прочности судовых конструкций коэффициент опорной пары иногда назначается по прототипу или на основании опыта. В тех случаях когда известен или может быть определен коэффициент податливости заделки, можно воспользоваться зависимостью между коэффициентом опорной пары $\varkappa$ и коэффициентом податливости $\mathfrak{A}$. Для установления этой зависимости приравняем угол поворота, например, правого опорного сечения балки углу поворота опорной конструкции (см. рис. 16.10).

Воспользуемся формулами (16.70) и (16.72) для углов поворота, вызванных действием опорных моментов. Угол поворота опорного сечения, вызванный поперечной нагрузкой, обозначим через $\alpha(q)$. Получим уравнение

$$\frac{M_\varkappa l}{6EI}\psi_1(u) + \frac{M_\varkappa l}{3EI}\psi_0(u) + \alpha(q) = -\mathfrak{A}M_\varkappa, \qquad (16.80)$$

где $M_\varkappa$ — изгибающий момент в опорных сечениях упруго заделанной балки.

Если заделка жесткая, то $\mathfrak{A} = 0$, $M_\varkappa = M_{\text{ж. з}}$, и уравнение (16.80) принимает вид

$$\frac{M_{\text{ж. з}}l}{6EI}\psi_1(u) + \frac{M_{\text{ж. з}}l}{3EI}\psi_0(u) - \alpha(q) = 0. \qquad (16.81)$$

Определив из уравнения (16.81) величину $\alpha(q)$ и подставив ее в уравнение (16.80), получим

$$\frac{M_\varkappa l}{6EI}\left[\psi_1(u) + 2\psi_0(u) + \frac{6\mathfrak{A}EI}{l}\right] = \frac{M_{\text{ж. з}}l}{6EI}\left[\psi_1(u) + 2\psi_0(u)\right]. \qquad (16.82)$$

По определению

$$M_\varkappa = \varkappa M_{\text{ж. з}}, \qquad (16.83)$$

что после подстановки в (16.82) позволяет найти

$$\varkappa = \frac{1}{1 + (2\mathfrak{A}EI/l)\,\{3/[\psi_1(u) + 2\psi_0(u)]\}}. \qquad (16.84)$$

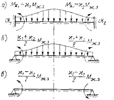


Рис. 16.11

Из выражения (16.84) следует, что при симметричной нагрузке и одинаковых коэффициентах податливости упругих заделок коэффициент опорной пары не зависит ни от величины, ни от характера изменения нагрузки.

Если коэффициенты податливости упругих заделок неодинаковы, а нагрузка ее симметрична относительно середины пролета (рис. 16.11, а), то могут быть введены коэффициенты опорных пар для левой и правой опор соответственно

$$\varkappa_1 = M_{\varkappa 1}/M_{\text{ж. з}}; \quad \varkappa_2 = M_{\varkappa 2}/M_{\text{ж. з}}, \qquad (16.85)$$

где $M_{\varkappa 1}$ и $M_{\varkappa 2}$ — изгибающие моменты в опорных сечениях при упругой заделке балки.

Нагрузка, действующая на балку, может быть представлена в виде суммы симметричной (рис. 16.11, б) и кососимметричной (рис. 16.11, в) относительно середины пролета нагрузок.

При действии кососимметричной нагрузки прогиб и изгибающий момент в середине пролета балки равны нулю. Следовательно, эти элементы изгиба определяются исключительно симметричной составляющей нагрузки, для которой коэффициент опорной пары равен полусумме коэффициентов (16.85):

$$\varkappa_{ср} = (\varkappa_1 + \varkappa_2)/2. \tag{16.86}$$

С помощью найденного таким образом коэффициента $\varkappa_{ср}$ изгибающий момент и прогиб посередине симметрично нагруженной балки, упругие заделки которой имеют неодинаковую податливость, вычисляют по формулам

$$\left.\begin{aligned} M(0) &= M_{с.\,о}(0)(1 - \varkappa_{ср}) + M_{ж.\,з}(0)\,\varkappa_{ср}; \\ w(0) &= w_{с.\,о}(0)(1 - \varkappa_{ср}) + M_{ж.\,з}(0)\,\varkappa_{ср}. \end{aligned}\right\} \tag{16.87}$$

Углы поворота и перерезывающие силы в опорных сечениях рассматриваемых балок следует определять как сумму соответствующих величин от действия симметричной и кососимметричной нагрузок. Элементы изгиба от действия симметричной части нагрузки определяются по формулам типа (16.87) с использованием коэффициента опорной пары (16.86). Кососимметричная нагрузка для балок рассматриваемого типа всегда имеет вид двух опорных моментов, одинаковых по абсолютному значению и одинаково направленных (см. рис. 16.11, *в*). Для отыскания элементов изгиба такой балки достаточно рассмотреть любую ее половину, например правую, считая сечение, соответствующее середине пролета исходной балки, свободно опертым (рис. 16.12).

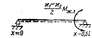


Рис. 16.12

Очевидно, к балке, изображенной на рис. 16.12, можно применить решение, полученное в § 16.3.

Для балки, имеющей в концевых сечениях упругие заделки различной податливости, могут быть получены формулы, связывающие коэффициенты опорной пары $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ с коэффициентами податливости $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Запишем для балки, изображенной на рис. 16.11, условия равенства углов поворота опорных сечений и опорных конструкций: для левой опоры

$$-\frac{M_{\varkappa 1} l}{3EI}\psi_0(u) - \frac{M_{\varkappa 2} l}{6EI}\psi_1(u) + \alpha(q) = \mathfrak{A}_1 M_{\varkappa 1}; \tag{16.88}$$

для правой опоры

$$\frac{M_{\varkappa 1} l}{6EI}\psi_1(u) + \frac{M_{\varkappa 2} l}{3EI}\psi_0(u) - \alpha(q) = -\mathfrak{A}_2 M_{\varkappa 2}. \tag{16.89}$$

В случае жесткой заделки опорных сечений $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = 0$, $M_{\varkappa 1} = M_{\varkappa 2} = M_{ж.\,з}$, и из любого уравнения (16.88) или (16.89) следует уравнение (16.81). Исключая из выражений (16.88) и (16.89) величину $\alpha(q)$ с помощью формул (16.81) и (16.85), получим два

уравнения относительно неизвестных $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Их решение может быть представлено в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{(\psi_1 + 2\psi_0)(2\psi_0 - \psi_1 + 6EI\mathfrak{A}_1/l)}{(2\psi_0 + 6EI\mathfrak{A}_1/l)(2\psi_0 + 6EI\mathfrak{A}_2/l) - \psi_1^2}; \\ \varkappa_2 &= \frac{(\psi_1 + 2\psi_0)(2\psi_0 - \psi_1 + 6EI\mathfrak{A}_2/l)}{(2\psi_0 + 6EI\mathfrak{A}_1/l)(2\psi_0 + 6EI\mathfrak{A}_2/l) - \psi_1^2}, \end{aligned}\right\} \tag{16.90}$$

где ψ_0 и ψ_1 — функции аргумента u.

Из формул (16.90) следует, что при симметричной поперечной нагрузке коэффициенты опорной пары не зависят ни от значения, ни от характера изменения нагрузки.

Коэффициенты опорной пары могут быть применены для расчета однопролетных балок и в тех случаях, когда поперечная нагрузка несимметрична относительно середины пролета, а податливость заделок концевых сечений различна. Нагрузку балки в этих случаях следует представлять в виде суммы симметричной и кососимметричной частей. Стрелка прогиба и изгибающий момент посередине пролета зависят только от симметричной части нагрузки и определяются по приведенным выше зависимостям. Для отыскания параметров изгиба, зависящих от кососимметричной нагрузки, следует рассмотреть половину балки, добавив к исходной схеме свободную опору в сечении посередине пролета.

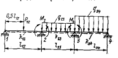


Рис. 16.13

Расчет неразрезных балок, лежащих на упругом основании. Решения, полученные для однопролетных балок на упругом основании, и таблицы вспомогательных функций позволяют относительно просто производить расчет неразрезных балок, лежащих на упругом основании и опертых на несмещаемые опоры.

Рассмотрим балку, показанную на рис. 16.13. Пронумеруем опоры балки от 1 до 4, всем величинам, относящимся к пролету между i-й и j-й опорами присвоим два индекса ij.

Разрежем мысленно балку на опорах, и действие прилегающих пролетов заменим сосредоточенными моментами M_2 и M_3. Воспользовавшись справочным материалом [51, табл. 7.4], найдем углы поворота, вызванные поперечной нагрузкой в пролетах балки. Так, для 1-го пролета найдем

$$\alpha_{1,\,2}(P_{12}) = \pm\frac{P_{12} l_{12}}{16EI_{12}}\chi_0(u_{12}).$$

Для 2-го и 3-го пролетов следует использовать решения § 16.3. Обычным путем составим уравнения равенства углов поворота балок слева и справа от мысленно проведенных разрезов над опорами *2* и *3*:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{P_{12}l_{12}}{16EI_{12}}\chi_0(u_{12})+\frac{M_2l_{12}}{3EI_{12}}\psi_0(u_{12})=\frac{q_{23}l_{23}^3}{24EI_{23}}\psi_2(u_{23})-\\ -\frac{M_2l_{23}}{3EI_{23}}\psi_0(u_{23})-\frac{M_3l_{23}}{6EI_{23}}\psi_1(u_{23});\\ -\frac{q_{23}l_{23}^3}{24EI_{23}}\psi_2(u_{23})+\frac{M_2l_{23}}{6EI_{23}}\psi_1(u_{23})+\frac{M_3l_{23}}{3EI_{23}}\psi_0(u_{23})=\\ =-\frac{M_3l_{34}}{3EI_{34}}\psi_0(u_{34})+\frac{q_2l_{34}^3}{24EI_{34}}\psi_2(u_{34}).\end{aligned}\right\} \quad (16.91)$$

Аргументы вспомогательных функций определяют по формуле

$$u_{ij}=(l_{ij}/2)\sqrt[4]{k_{ij}/(4EI_{ij})}. \quad (16.92)$$

После вычисления опорных моментов следует найти для всех пролетов коэффициенты опорной пары, для чего рассчитанные опорные моменты необходимо разделить на опорный момент при жесткой заделке концевых сечений рассматриваемого пролета. Затем для определения параметров изгиба в любом пролете можно использовать полученные выше формулы для однопролетных балок.

§ 16.5. Изгиб полубесконечной балки на упругом основании

Изгиб полубесконечной балки на упругом основании. Рассмотрим изгиб полубесконечной балки постоянного сечения, лежащей на упругом основании постоянной жесткости и нагруженной в сечении $x=0$ сосредоточенной силой P_1 и моментом M_1 (рис. 16.14). Как будет показано ниже, задача об изгибе такой балки имеет практический интерес в связи с расчетом прочности судна при постановке в док на килевую дорожку.

Граничные условия у такой балки имеют вид

$$\text{при } x=0 \qquad EIw''=M_1;\quad EIw'''=P_1. \quad (16.93)$$

Поскольку балка предполагается полубесконечной, приемлемо лишь такое решение дифференциального уравнения изгиба, которым обеспечивается стремление к нулю при $x\to\infty$ как прогибов балки, так и всех других элементов изгиба.

Поперечная нагрузка на балку отсутствует, поэтому общий интеграл дифференциального уравнения изгиба балки совпадает с интегралом однородного уравнения. Учитывая требование о стремлении $w(x)$ к нулю при $x\to\infty$, общий интеграл примем в форме (16.24), предложенной Клишевичем, положив постоянные C и D равными нулю, так как соответствующие члены неограниченно возрастают с ростом абсцисс x:

$$w(x)=AW_0(\alpha x)+BW_1(\alpha x), \quad (16.94)$$

где индексы функций выбраны из соображений получения наиболее простых уравнений при удовлетворении граничных условий (16.93).

В соответствии с правилом дифференцирования функций W_0 и W_1

$$\left.\begin{aligned} EIw''(x)&=2\alpha^2EI\left[-AW_2(\alpha x)-BW_3(\alpha x)\right];\\ EIw'''(x)&=2\sqrt{2}\,\alpha^3EI\left[-AW_1(\alpha x)-BW_2(\alpha x)\right].\end{aligned}\right\} \quad (16.95)$$

На основании граничных условий (16.93) с учетом формул (16.95) находим

$$A=P_1/(2EI\alpha^3);\quad B=-M_1/(\sqrt{2}\,\alpha^2EI). \quad (16.96)$$

Упругая линия балки определяется выражением

$$w(x)=\left[P_1W_0(\alpha x)-M_1\alpha\sqrt{2}\,W_1(\alpha x)\right]/(2\alpha^3EI). \quad (16.97)$$

Стрелка прогиба левого конца балки равна

$$w(0)=(P_1+\alpha M_1)/(2\alpha^3EI), \quad (16.98)$$

где, напомним,

$$\alpha=\sqrt[4]{k/(4EI)}. \quad (16.99)$$

Рассмотрим некоторые особенности полученного решения, ограничиваясь с целью наглядности простейшим случаем действия на балку сосредоточенной силы P_1, т. е. полагая $M_1=0$.

Рис. 16.14

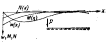


Рис. 16.15

На рис. (16.15) приведены эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил, а также упругая линия такой балки. Очевидны колебательный характер кривых и затухание их отклонений от нулевого значения по мере роста абсцисс x, что определяется множителем $e^{-\alpha x}$, содержащимся в выражениях функций Клишевича. Это затухание происходит тем более интенсивно, чем выше значение коэффициента α. При больших значениях коэффициента α изгиб, вызванный сосредоточенной силой, локализуется вблизи загруженного сечения. Такой же вывод был бы получен и при рассмотрении воздействия на балку сосредоточенного момента. Это позволяет применять полученные решения к балкам конечной длины, если их длина, момент инерции и коэффициент жесткости упругого основания таковы, что аргумент $u=\alpha l/2$ превышает 1,5—2,0. В этом случае влияние сосредоточенных силы и момента, приложенных, например, к левому концу балки, практически не проявляется в сечениях у правого конца, и наоборот.

Обратим также внимание, что прогиб полубесконечной балки при некоторых значениях абсциссы x оказывается отрицательным. Поэтому приведенное выше решение можно использовать только в тех случаях, если: а) упругое основание сопротивляется отрыву, т. е. является основанием «двустороннего действия»; б) прогиб балки, вызванный действием внешних нагрузок, всюду оказывается положительным. В противном случае балка на некоторых участках отрывается от упругого основания и его реакции на этих участках равны нулю.

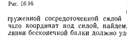


Рис. 16.16

Располагая выражением для упругой линии полубесконечной балки (16.97), можно получить решение задачи об изгибе бесконечной балки, нагруженной сосредоточенной силой (рис. 16.16). Расположив начало координат под силой, найдем, что выражение для упругой линии бесконечной балки должно удовлетворять условиям

$$\text{при } x=0 \ w'=0; \quad EIw'''=P/2. \tag{16.100}$$

Заменив в (16.97) P_1 на $P/2$, из условия равенства нулю угла поворота получим

$$-PW_3(0)/2-M_1\alpha\sqrt{2}\,W_0(0)=0, \tag{16.101}$$

или после подстановки значений функций (16.25)

$$M_1=-P/(4\alpha). \tag{16.102}$$

Упругую линию бесконечной балки получим из (16.97), заменив P_1 на $P/2$ и подставив значение M_1 из формулы (16.102):

$$w(x)=P\left[W_0(\alpha x)+W_1(\alpha x)/\sqrt{2}\right]/(4\alpha^3EI). \tag{16.103}$$

Выражение в квадратных скобках зависимости (16.103) после подстановки значений функций Клишевича (16.23) можно упростить:

$$W_0(\alpha x)+W_1(\alpha x)/\sqrt{2}=W_3(\alpha x)/\sqrt{2}.$$

Таким образом, окончательно получим

$$w(x)=\sqrt{2}\,PW_3(\alpha x)/(8\alpha^3EI). \tag{16.104}$$

Наибольшая стрелка прогиба балки равна

$$w_{max}=w(0)=P/(8\alpha^3EI), \tag{16.105}$$

а наибольшее значение интенсивности реакций упругого основания

$$r_{max}=kw_{max}=Pk/(8\alpha^3EI)=P\alpha/2. \tag{16.106}$$

Функция $\sqrt{2}\,W_3(\alpha x)$ характеризует изменение прогиба и интенсивности реакций упругого основания при удалении от нагруженного сечения балки. Из таблицы значений функции $\sqrt{2}\,W_3(\alpha x)$ следует, что уже при $\alpha x=2$ прогиб и интенсивность реакции

упругого основания составляет 6,7 % от соответствующих значений в начале координат. Это позволяет использовать решение (16.104) также для балок конечной длины, если удовлетворяется неравенство $\alpha l_1>2{,}0$, где l_1 — отстояние точки приложения силы от ближайшей к ней опоры или концевого сечения балки.

В качестве примера сравним прогиб, определенный по формуле (16.105), с прогибом посередине пролета свободно опертой балки, нагруженной в среднем сечении сосредоточенной силой:

$$w_{c.\,o}(0)=Pl^3\psi_2(u)/(48EI). \tag{16.107}$$

Получим

$$\beta=w_{c.\,o}(0)/w_{max}(0)=4\psi_2(u)\,u^3/3.$$

Например, при $u=2$ находим $\beta=1{,}056$, т. е. погрешность при использовании выражения (16.105) вместо формулы (16.107) не превосходит 6 %.

Изгиб судна при постановке в сухой док. Наиболее распространенным способом постановки судна в док для производства ремонта является постановка на один (основной случай), два или три ряда кильблоков в зависимости от размеров судна, наличия продольных переборок, состояния связей корпуса. Малые и средние суда, как правило, ставят на одну килевую дорожку.

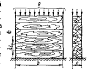


Рис. 16.17

Кильблоки представляют собой деревянные опоры, набранные из брусьев (рис. 16.17).

Обжатие кильблоков при предположении, что усилие, сжимающее кильблоки, равномерно распределено по опорной поверхности, определяют по формуле

$$f=\frac{R}{bc}\sum_{i=1}^{N}\frac{h_i}{E_i}, \tag{16.108}$$

где N — число брусьев, образующих кильблок; h_i и E_i — высота отдельных брусьев кильблока и их модуль упругости соответственно; b и c — длина и ширина брусьев кильблока соответственно.

Коэффициент жесткости отдельного кильблока равен

$$K=R_{f-1}=bc\Big/\sum_{i=1}^{N}\frac{h_i}{E_i},$$

а погонный коэффициент жесткости упругой килевой дорожки

$$k_1=K/a=bc\Big/\left(a\sum_{i=1}^{N}\frac{h_i}{E_i}\right). \tag{16.109}$$

где a — расстояние между осями кильблоков. При постановке на два или три ряда кильблоков погонный коэффициент жесткости дорожки должен быть увеличен в два или три раза соответственно.

Постановка судна на килевую дорожку сопровождается также деформацией днищевого набора корпуса. При определении изгиба судна в доке находят смещения нейтральной оси корпуса, поэтому податливость днища — это дополнительная податливость основания, на котором покоится балка-корпус.

Пусть погонная жесткость днищевых перекрытий при приложении реакций кильблоков составляет величину k_2. Тогда коэффициент жесткости упругого основания k при постановке судна в сухой док определяется зависимостью $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$. Отсюда

$$k = k_1 k_2/(k_1 + k_2). \tag{16.110}$$

При учете податливости днища корпуса коэффициент жесткости k_2, а следовательно, и k оказываются переменными по длине судна. Полный расчет прочности корпуса судна при постановке в док с учетом податливости днищевых конструкций достаточно трудоемок и в настоящем учебнике не рассматривается. В приближенных расчетах, однако, можно принимать k постоянным, определяя k_2 как среднюю величину для отсеков корпуса, расположенных на длине килевой дорожки.

Нагрузка балки-корпуса определяется весовой нагрузкой судна $q_c(\chi)$ и представляется достаточно сложной функцией абсциссы x, заданной в виде таблицы для двадцати теоретических шпаций. Кроме того, дополнительная нагрузка на корпус возникает вследствие того, что киль судна может иметь начальную (независящую от действующей на судно нагрузки) погибь, складывающуюся из строительной погиби корпуса, прогибов вследствие неравномерного нагрева корпуса, возможных остаточных прогибов и т. п. В общем случае и линия, по которой выставляются верхние кромки кильблоков, может отличаться от прямой. В целом, между килевой линией судна и верхними кромками кильблоков может существовать начальный зазор $\Delta(x)$.

При наличии начального зазора реакции упругого основания следует определять по формуле

$$r(x) = k(x)[w(x) - \Delta(x)]. \tag{16.111}$$

После подстановки $r(x)$ в зависимость (16.6) и дифференциальное уравнение (16.7), получим дополнительную нагрузку судна

$$q_{доп}(x) = k(x)\Delta(x). \tag{16.112}$$

Килевая дорожка выставляется только в пределах прямолинейного участка килевой линии, что приводит к появлению частей корпуса судна в оконечностях, свешивающихся за пределы килевой дорожки. Свешивающиеся части корпуса эквивалентны сосредоточенным силам и моментам, приложенным в концевых сечениях балки-корпуса.

Учитывая высказанные положения, получаем схему расчета корпуса при постановке судна в док, показанную на рис. 16.18.

Для определения упругой линии балки-корпуса необходимо найти интеграл дифференциального уравнения

$$[EI(x)w''(x)]'' + k(x)w(x) = q(x), \tag{16.113}$$

удовлетворяющий следующим граничным условиям (начало координат принято посередине балки):

$$\text{при } x = -0{,}5l\text{: } EIw'' = M_1;\quad (EIw'')' = P_1; \tag{16.114}$$

$$\text{при } x = 0{,}5l\text{: } EIw'' = M_2;\quad (EIw'')' = -P_2. \tag{16.115}$$

Решение поставленной задачи может быть получено численными методами, основные положения которых рассмотрены ниже.

Во многих случаях весьма полезным оказывается приближенный расчет, основанный на замене корпуса судна балкой постоянного сечения. Такая замена часто оказывается обоснованной, поскольку момент инерции корпуса судна изменяется существенно лишь в пределах свешивающихся за килевую дорожку частей. Выше уже отмечалась возможность в приближенных расчетах принимать $k = \text{const}$.

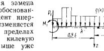


Рис. 16.18

При указанных упрощениях задача (16.113)—(16.115) может быть решена с использованием общего интеграла однородного уравнения (16.24) и частного решения в форме (16.37).

Принимая во внимание, однако, что жесткость упругого основания в задаче о постановке судна в док достаточно велика ($\alpha l > 2$), при учете влияния свешивающихся частей можно воспользоваться решением (16.97) об изгибе полубесконечной балки. В этом случае для балки, показанной на рис. 16.18, при $I = \text{const}$ и $k = \text{const}$ найдем

$$w(x) = [1/(2\alpha^3 EI)]\{P_1 W_0[\alpha(x + 0{,}5l)] - M_1\alpha\sqrt{2}\,W_1[\alpha(x + 0{,}5l)] + $$
$$+ P_2 W_0[\alpha(0{,}5l - x)] - M_2\alpha\sqrt{2}\,W_1[\alpha(0{,}5l - x)]\} + w_q(x), \tag{16.116}$$

где $w_q(x)$ — решение дифференциального уравнения

$$EIw_q^{\text{IV}}(x) + kw_q(x) = q(x), \tag{16.117}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\text{при } x = -0{,}5l\quad w_q'' = 0;\ w_q''' = 0;\quad \text{при } x = 0{,}5l\quad w_q'' = 0;\ w_q''' = 0. \tag{16.118}$$

При отыскании $w_q(x)$ целесообразно выделить из состава нагрузки составляющие, линейно зависящие от x:

$$q(x) = q_0 + 2q_1 x/l + q_2(x). \tag{16.119}$$

Если выбрать q_0 и q_1 из условий

$$q_0 = \frac{1}{l}\int_{-0{,}5l}^{0{,}5l} q(x)\,dx; \quad q_1 = \frac{3}{l^2}\int_{-0{,}5l}^{0{,}5l} q(x)\frac{2x}{l}\,dx, \qquad (16.120)$$

то нагрузка $q_2(x)$ будет иметь нулевые главный вектор и главный момент, т. е.

$$\int_{-0{,}5l}^{0{,}5l} q_2(x)\,dx = 0; \qquad \int_{-0{,}5l}^{0{,}5l} q_2(x)\frac{2x}{l}\,dx = 0. \qquad (16.121)$$

Определив ее из выражения (16.119) как разность

$$q_2(x) = q(x) - (q_0 + 2q_1x/l), \qquad (16.122)$$

можно для $q_2(x)$ использовать представление в виде ряда по формам главных свободных колебаний, ограничиваясь одним-двумя наиболее значительными членами. Следует иметь в виду, что нагрузка $q_2(x)$ невелика по сравнению с q_0 и имеет по крайней мере две нулевые точки на длине килевой дорожки. Поэтому влияние нагрузки $q_2(x)$ на величину реакций упругого основания незначительно.

В общем случае

$$q_2(x) = \sum_{n=1}^{N} p_n\varphi_n(x). \qquad (16.123)$$

Здесь N — число членов разложения нагрузки $q_2(x)$ в ряд; p_n — коэффициенты разложения; $\varphi_n(x)$ — фундаментальные функции — формы главных свободных колебаний безопорных балок, равные

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \frac{\operatorname{ch}\mu_n x/l}{2\operatorname{ch}0{,}5\mu_n} - \frac{\cos\mu_n x/l}{2\cos 0{,}5\mu_n} \quad \text{при } n = 1,\ 3,\ \ldots; \\ \varphi_n(x) &= -\frac{\operatorname{sh}\mu_n x/l}{2\operatorname{sh}0{,}5\mu_n} - \frac{\sin\mu_n x/l}{2\sin 0{,}5\mu_n} \quad \text{при } n = 2,\ 4,\ \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (16.124)$$

где μ_n — известные числа:

$$\mu_1 = 4{,}73; \quad \mu_2 = 7{,}85; \quad \mu_3 = 11{,}0; \quad \mu_{n>3} = \frac{2n+1}{2}\pi. \qquad (16.125)$$

Поскольку функции $\varphi_n(x)$ ортогональны, коэффициенты разложения p_n определяются зависимостью

$$p_n = \frac{4}{l}\int_{-0{,}5l}^{0{,}5l} q_2(x)\,\varphi_n(x)\,dx. \qquad (16.126)$$

Функции $\varphi_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\varphi_n^{\mathrm{IV}}(x) = (\mu_n/l)^4\varphi_n(x) \qquad (16.127)$$

и граничным условиям

$$\text{при } x = \pm 0{,}5l \quad \varphi_n'' = \varphi_n''' = 0. \qquad (16.128)$$

С учетом представления нагрузки в форме (16.119) упругая линия $w_q(x)$ имеет вид суммы решений, найденных для каждой составляющей нагрузки. Решение для нагрузки $q_0 + 2q_1x/l$, удовлетворяющее краевым условиям (16.121), определяется в соответствии с формулой (16.27). Чтобы отыскать решение, соответствующее составляющей нагрузки $q_2(x)$, примем

$$w_{q_2}(x) = \sum_{n=1}^{N} w_n\varphi_n(x). \qquad (16.129)$$

Ряд (16.129), очевидно, удовлетворяет краевым условиям (16.118), поскольку функции $\varphi_n(x)$ удовлетворяют условиям (16.128). Подставляя выражение (16.129) в левую часть уравнения (16.117), а (16.125) в его правую часть вместо $q(x)$, получаем

$$w_n = p_n/[EI(\mu_n/l)^4 + k]. \qquad (16.130)$$

Окончательно упругая линия получает вид

$$w_q(x) = \frac{1}{k}\left(q_0 + q_1\frac{2x}{l}\right) + \sum \frac{p_n}{EI(\mu_n/l)^4 + k}\varphi_n(x). \quad (16.131)$$

Подчеркнем еще раз приближенность приведенного выше решения задачи о постановке судна в док, связанную с неучетом как непризматичности балки-корпуса, так и зависимости коэффициента жесткости упругого основания от абсциссы x. При написании общего выражения упругой линии в форме (16.116) использовалось также предположение об относительно высокой жесткости упругого основания.

Задачу, близкую к рассмотренной, приходится решать для оценки прочности конструкций судна и опорных устройств при спуске судна со стапеля. Как и в задаче о постановке в док, судно на стапеле может быть представлено в качестве балки переменного сечения, лежащей на упругом основании переменной жесткости и имеющей свешивающиеся части. В первый период спуска, занимающий время от момента отдачи задержников до начала входа кормы в воду, реакция спускового устройства определяется теми же методами, что и реакции кильблоков при постановке судна в сухой док, причем влиянием наклона стапеля в этих расчетах можно пренебречь. Во втором периоде спуска — от начала входа кормы судна в воду до начала его отрыва от стапеля (всплытия) — происходит непрерывное изменение расчетной длины балки на упругом основании и ее нагрузки вследствие появления и возрастания сил поддержания. При выполнении расчетов приходится рассматривать несколько положений судна относительно порога стапеля с тем, чтобы точнее определить момент начала всплытия, поскольку в этот момент резко возрастает нагрузка на носовую опору спускового устройства и возникает опасность ее разрушения.

§ 16.6. Учет влияния сдвига при определении прогибов балок на упругом основании

В расчетах прочности некоторых судовых конструкций приходится рассматривать балки на упругом основании, имеющие относительно небольшую площадь поперечного сечения стенки. Для таких балок деформации сдвига оказывают существенное влияние на прогибы и другие параметры изгиба.

Изгиб балки с учетом деформаций сдвига был рассмотрен в § 13.7. Напомним ряд зависимостей этого параграфа, которые нам потребуются ниже.

Изгибающий момент $M(x)$ и перерезывающую силу $N(x)$ балки определяют соответственно по формулам (13.57) и (13.58). Дифференциальное уравнение изгиба балки, загруженной поперечной нагрузкой интенсивностью $q(x)$, имеет вид [см. формулу (13.59)]

$$[EI(x)\,w_1''(x)]'' = q(x), \qquad (16.132)$$

где $w_1(x)$ — изгибная стрелка прогиба балки. Стрелку прогиба от сдвига для частного случая $G\omega = \mathrm{const}$ находят по формуле (13.60) в предположении отсутствия сосредоточенных моментов в нагрузке:

$$w_2(x) = -EI(x)\,w_1''(x)/(G\omega). \qquad (16.133)$$

Заметив, что действующая на балку нагрузка складывается из внешней нагрузки $q(x)$ и интенсивности реакций упругого основания $k(x)(w_1 + w_2)$, получим из выражения (16.132)

$$[EI(x)\,w_1''(x)]'' = q(x) - k(x)\,[w_1(x) + w_2(x)],$$

или, если воспользоваться для $w_2(x)$ зависимостью (16.133),

$$[EI(x)\,w_1''(x)]'' - k(x)\,EI(x)\,w_1''(x)/(G\omega) + k(x)\,w_1(x) = q(x). \qquad (16.134)$$

При $EI(x) = \mathrm{const}$, $k(x) = \mathrm{const}$ уравнение (16.134) перепишется в таком виде:

$$EIw_1^{\mathrm{IV}}(x) - kEIw_1''(x)/(G\omega) + kw_1(x) = q(x). \qquad (16.135)$$

Общий интеграл уравнения (16.135), как и любого линейного неоднородного дифференциального уравнения, является суммой общего интеграла однородного уравнения и частного решения.

Ограничимся наиболее важным случаем, когда нагрузка $q(x)$ описывается линейной функцией

$$q(x) = q_0 + q_1 x/l. \qquad (16.136)$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (16.135) убеждаемся, что его частное решение имеет вид

$$w_{1\,\text{ч. р}} = q(x)/k. \qquad (16.137)$$

При более сложной зависимости интенсивности нагрузки от координаты x для отыскания частного решения следует применить разложение нагрузки в ряд Фурье, как это было сделано при получении частного решения (16.29).

Для вычисления общего интеграла однородного уравнения

$$EIw_{10}^{\mathrm{IV}}(x) - kEIw_{10}''(x)/(G\omega) + kw_{10}(x) = 0 \qquad (16.138)$$

воспользуемся подстановкой Эйлера

$$w_{10} = Ae^{\eta x}, \qquad (16.139)$$

где A — произвольная постоянная.

С помощью формулы (16.139) из выражения (16.138) получаем характеристическое уравнение для отыскания значений η:

$$\eta^4 - (k/G\omega)\,\eta^2 + k/EI = 0. \qquad (16.140)$$

Уравнение (16.140) — биквадратное, и его корни определяются формулой

$$\eta_s = \pm\sqrt{k/(2G\omega) \pm \sqrt{[k/(2G\omega)]^2 - k/(EI)}}, \qquad (16.141)$$

или

$$\eta_s = \pm\,\alpha\sqrt{2\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}\right)}, \quad s = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \qquad (16.142)$$

где

$$\alpha = \sqrt[4]{k/(4EI)}; \quad \beta = \sqrt{kEI}/(2G\omega). \qquad (16.143)$$

Каждому из четырех значений η_s, вытекающих из формулы (16.142), соответствует решение вида (16.139), сумма которых и представляет собой общий интеграл уравнения (16.138)

$$w_{10}(x) = \sum_{s=1}^{4} A_s e^{\eta_s x}. \qquad (16.144)$$

Как видно из формулы (16.142), характер корней η_s зависит от значения β, для оценки которого преобразуем второе выражение (16.143):

$$\beta = 4u^2 EI/(G\omega l^2), \qquad (16.145)$$

где, как и ранее,

$$u = \alpha l/2 = (l/2)\sqrt[4]{k/(4EI)}. \qquad (16.146)$$

Для типичных судовых балок на упругом основании отношение $I/(\omega l^2)$ удовлетворяет неравенству

$$I/(\omega l^2) < 0{,}02. \qquad (16.147)$$

Учитывая, что $G = E/[2(1+\mu)]$, получаем $\beta < 0{,}03$. Величина u в задачах изгиба судовых балок, лежащих на упругом основании, в подавляющем большинстве случаев не превосходит 5, поэтому представляющие интерес значения β лежат в следующих пределах:

$$0 < \beta < 1. \qquad (16.148)$$

На основании неравенства (16.148) из выражения (16.142) после выделения вещественной и мнимой частей находим

$$\eta_s = \pm \delta \pm i\gamma, \quad s = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{16.149}$$

где

$$\delta = \alpha\sqrt{1+\beta}; \quad \gamma = \alpha\sqrt{1-\beta}. \tag{16.150}$$

Общий интеграл однородного уравнения (16.138) с учетом формулы (16.149) может быть выписан в следующей эквивалентной форме:

$$w_{10} = e^{\delta x}\left(A_1 e^{i\gamma x} + A_2 e^{-i\gamma x}\right) + e^{-\delta x}\left(A_3 e^{i\gamma x} + A_4 e^{-i\gamma x}\right), \tag{16.151}$$

или, переходя к вещественным функциям и вещественным постоянным,

$$w_{10} = e^{\delta x}\left(B_1 \cos\gamma x + B_2 \sin\gamma x\right) + e^{-\delta x}\left(B_3 \cos\gamma x + B_4 \sin\gamma x\right). \tag{16.152}$$

Наконец, показательные функции можно заменить гиперболическими:

$$w_{10} = c_0 \operatorname{ch}\delta x \cos\gamma x + C_1 \operatorname{sh}\delta x \cos\gamma x + C_2 \operatorname{sh}\delta x \sin\gamma x + C_3 \operatorname{sh}\delta x \cos\gamma x. \tag{16.153}$$

Таким образом, для широкого круга задач о деформациях балок на упругом основании с учетом влияния сдвига общий интеграл неоднородного дифференциального уравнения (16.135) может быть представлен как сумма выражений (16.137) и (16.153).

Остановимся на выписывании типичных граничных условий для отыскания произвольных постоянных.

Балка свободно оперта на жесткие опоры. В этом случае стрелка прогиба и изгибающий момент на каждой из опор равны нулю, т. е.

$$w = w_1 + w_2 = 0; \quad EIw_1'' = 0.$$

Поскольку $w_2 = -EIw_1''/(G\omega)$, первое условие можно переписать следующим образом: $w_1 - EIw_1''/(G\omega) = 0$, откуда на основании условия равенства нулю изгибающего момента

$$w_1 = w_1'' = 0. \tag{16.154}$$

Балка жестко заделана на жестких опорах. Для такой балки

$$w = w_1 - EIw_1''/(G\omega) = 0; \quad w_1' = 0. \tag{16.155}$$

Балка не имеет иных опор, кроме упругого основания. У этой балки $EIw_1'' = 0$; $EIw_1''' = 0$, т. е.

$$w_1'' = w_1''' = 0. \tag{16.156}$$

Балка оперта на упругие опоры с коэффициентом податливости A. Для этого случая

$$w_1'' = 0; \quad w_1 - EIw_1''/(G\omega) = \pm AEIw_1''', \tag{16.157}$$

где верхний знак относится к правому опорному сечению, нижний к левому. Второе условие с учетом первого получит вид $w_1 = \pm AEIw_1'''$.

Балка упруго заделана на непроседающих опорах с коэффициентом податливости заделки $\mathfrak{A}$. У данной балки

$$w_1 - EIw_1''/(G\omega) = 0; \quad w_1' = \mp \mathfrak{A}EIw_1''. \tag{16.158}$$

После определения стрелки прогиба $w_1(x)$ от изгиба по формуле (16.133) может быть найдена стрелка прогиба от сдвига, а затем и упругая линия балки $w(x) = w_1(x) + w_2(x)$.

Следует, однако, заметить, что приведенный выше метод расчета балок на упругом основании с учетом влияния сдвига для вычислений неудобен, так как общий интеграл (16.153) содержит произведения функций и при удовлетворении граничным условиям приводит к достаточно громоздким выражениям для коэффициентов системы уравнений относительно неизвестных произвольных постоянных c_i. Поэтому целесообразно располагать приближенным приемом, позволяющим достаточно просто оценить влияние деформации сдвига на прогибы балок и реакции упругого основания. Такой прием можно предложить для наиболее распространенных случаев, когда сдвиг умеренно влияет на прогибы балок, т. е. когда выполняется неравенство (16.147). Для обоснования приближенного приема заметим, что закон изменения нагрузки на длине балки несущественно влияет на значения поправок на сдвиг к таким важнейшим параметрам изгиба, как прогиб и изгибающий момент посередине пролета, изгибающий момент в опорном сечении.

Рассмотрим в качестве примера прогиб посередине пролета свободно опертой балки без упругого основания для следующих случаев нагружения: а) при действии равномерно распределенной нагрузки

$$w(0) = w_1(0)\left[1 + 9{,}6EI/(G\omega l^2)\right]; \tag{16.159}$$

б) при действии сосредоточенной силы, приложенной посередине пролета,

$$w(0) = w_1(0)\left[1 + 12EI/(G\omega l^2)\right], \tag{16.160}$$

где $w_1(0)$ — прогиб, найденный без учета влияния сдвига.

В формулах (16.159) и (16.160) величина в квадратных скобках представляет собой поправку на влияние сдвига к прогибу посередине пролета балки. При условии выполнения неравенства (16.147) величина этой поправки при переходе от равномерно распределенной нагрузки к сосредоточенной силе изменяется менее чем на 10%. Влияние закона изменения нагрузки будет еще меньшим, если сравнивать результаты расчета балок при действии на них распределенных нагрузок с различными законами изменения интенсивности по длине. Поэтому с достаточной для технических расчетов степенью точности поправка на сдвиг при любой распределенной нагрузке может быть принята такой же, как для равномерной нагрузки.

Формулу, подобную (16.159), можно получить для симметрично заделанной балки с коэффициентом опорной пары $\varkappa$. Приведем ее без вывода:

$$w_1(0) = w_1(0)\{1 + 48EI/[(5 - 4\varkappa) G\omega l^2]\}. \qquad (16.161)$$

Применение формулы типа (16.161) означает, что прогибы балки можно определять без учета влияния сдвига, если момент инерции площади поперечного сечения заменить его приведенным значением

$$I_{\text{пр}} = I/\{1 + 48EI/[(5 - 4\varkappa) G\omega l^2]\}. \qquad (16.162)$$

При расчете прогибов балок, лежащих на упругом основании, с учетом влияния деформаций сдвига роль упругого основания сводится к появлению у балки дополнительной распределенной реактивной нагрузки $r(x)$. Поскольку значение поправки на сдвиг практически не зависит от закона изменения распределенной нагрузки, для приближенного учета влияния сдвига достаточно вместо действительного значения момента инерции I воспользоваться приведенным $I_{\text{пр}}$, которое можно определить по формуле (16.162). Аргумент вспомогательных функций, характеризующих влияние упругого основания на параметры изгиба, следует также заменить приведенным значением

$$u_{\text{пр}} = l/2 \sqrt[4]{k/(4EI_{\text{пр}})}. \qquad (16.163)$$

§ 16.7. Расчет непризматических балок, лежащих на упругом основании переменной жесткости

В расчетах прочности судов и судовых конструкций достаточно часто встречаются задачи, в которых нельзя игнорировать ни непризматичность балки, ни зависимость коэффициента жесткости упругого основания от абсциссы x. Например, в расчетах прочности при постановке судна в док или при спуске со стапеля необходимо учитывать переменность по длине судна как момента инерции площади поперечного сечения корпуса, так и коэффициента жесткости упругого основания и лишь при получении сугубо приближенных оценок, которые и были рассмотрены в § 16.5, эти величины можно принимать неизменными на всей длине балки.

Расчет непризматических балок, лежащих на упругом основании переменной жесткости, можно свести к интегрированию дифференциального уравнения

$$[EI(x) w''(x)]'' + k(x) w(x) = q(x) \qquad (16.164)$$

при удовлетворении граничных условий, вытекающих из существа задачи. При необходимости учитывать сдвиг под моментом инерции I можно понимать его приведенное значение (16.162).

Несмотря на кажущуюся простоту уравнения (16.164), точное его интегрирование возможно лишь при некоторых частных, не представляющих практического интереса законах изменения функций $I(x)$ и $k(x)$. Поэтому применение находят методы отыскания приближенных решений: Ритца, Бубнова — Галеркина, конечных разностей, МКЭ и многие другие. Содержание каждого из этих методов, включая многочисленные примеры их использования, было изложено в гл. 8—11. Поэтому ниже мы ограничимся лишь некоторыми краткими пояснениями и дополнениями.

Метод Ритца. Метод Ритца и пример его использования для приближенного решения задачи изгиба непризматической балки на упругом основании переменной жесткости (см. рис. 10.8) были описаны в § 10.6. Упругая линия рассмотренной в этом примере балки задавалась в виде ряда

$$w(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, N, \qquad (16.165)$$

где a_k — неизвестные параметры; $f_k(x)$ — фундаментальные функции (вопросы, связанные с их выбором, подробно обсуждались в § 10.6).

Для определения параметров a_k с помощью метода Ритца была получена система алгебраических уравнений (10.76'):

$$\sum_{k=1}^{N} A_{ik} a_k = B_i \quad k = 1, 2, \ldots N. \qquad (16.166)$$

Здесь коэффициенты A_{ik} зависят от геометрических и жесткостных параметров балки а значения коэффициентов B_i — от параметров внешней нагрузки и закона ее изменения по длине балки.

Будем в дальнейшем полагать, что параметры a_k найдены и, следовательно, определено выражение (16.165) для упругой линии балки. Остальные элементы изгиба, в частности изгибающий момент и перерезывающую силу, казалось бы, можно определить путем дифференцирования ряда (16.165) с последующим использованием известных зависимостей Журавского — Шведлера

$$M(x) = EI(x) w''(x); \quad N(x) = [EI(x) w'(x)]'. \qquad (16.167)$$

Однако получаемые при этом ряды сходятся относительно плохо, что заставляет либо удерживать в рядах большое число членов, либо применять специальные приемы усиления сходимости.

Одним из таких приемов является отыскание изгибающих моментов и перерезывающих сил с помощью интегрирования суммарной поперечной нагрузки, действующей на балку. Реакции упругого основания при этом определяются зависимостью

$$r(x) = k(x) \sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x), \qquad (16.168)$$

а суммарная нагрузка на балку (см. рис. 13.8)

$$q_1(x) = q(x) + P\delta(x-a) + \mathfrak{M}\delta'(x-b) - k(x)\sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x). \quad (16.169)$$

Интегрируя выражение (16.169), находим

$$N(x) = \int_0^x q_1(x)\,dx + N_0; \quad M(x) = \int_0^x\int_0^x q_1(x)\,dx^2 + N_0 x + M_0,$$

или, если воспользоваться формулой (16.169) для $q_1(x)$ и учесть, что момент $\mathfrak{M}$ является моментом второго рода,

$$\left.\begin{aligned} N(x) &= \int_0^x q(\xi)\,d\xi + \|_a P - \sum_{k=1}^{N} a_k \int_0^x k(\xi) f_k(\xi)\,d\xi + N_0; \\ M(x) &= \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} q(\xi)\,d\xi + \|_a P(x-a) + \\ &+ \|_b \mathfrak{M} - \sum_{k=1}^{N} a_k \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} k(\xi) f_k(\xi)\,d\xi + N_0 x + M_0, \end{aligned}\right\} \quad (16.170)$$

где N_0, M_0 — постоянные интегрирования, представляющие собой значения перерезывающей силы и изгибающего момента в начале координат, которые для рассматриваемой балки определяются из граничных условий ее закрепления:

$$\text{при } x = l \;\; M(l) = 0; \quad w(l) = AN(l). \quad (16.171)$$

Внося сюда найденные выше значения $w(l)$, $M(l)$ и $N(l)$, получаем два алгебраических уравнения, из которых сможем найти значения N_0 и M_0.

Метод начальных параметров. Суть данного метода была изложена в гл. 8. Там же был приведен пример, иллюстрирующий его использование для приближенного решения задач изгиба непризматических балок. С помощью этого метода сравнительно легко можно получить приближенное решение и для более сложных задач, в частности задач изгиба непризматических балок, лежащих на упругом основании.

Изгиб таких балок с учетом деформаций сдвига описывается дифференциальным уравнением (16.134):

$$[EI(x)\,w_1''(x)]'' - T(x)\,w_1''(x) + k(x)\,w_1(x) = q(x), \quad (16.172)$$

где

$$T(x) = k(x)\,EI(x)/(G\omega). \quad (16.173)$$

Уравнение (16.172) можно переписать в виде совокупности четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} w_1'(x) &= \theta(x); \\ \theta'(x) &= M(x)/[EI(x)]; \\ M'(x) &= N(x); \\ N'(x) &= q(x) + T(x)\,M(x)/[EI(x)] - k(x)\,w_1(x). \end{aligned}\right\} \quad (16.174)$$

Полученная система, в свою очередь, может быть представлена одним матричным уравнением

$$\mathbf{W}'(x) = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{W}(x) + \mathbf{B}(x), \quad (16.175)$$

где

$$\mathbf{W}(x) = \begin{Bmatrix} w_1(x) \\ \theta(x) \\ M(x) \\ N(x) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{B}(x) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q(x) \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/[EI(x)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k(x) & 0 & T/[EI(x)] & 0 \end{bmatrix}. \quad (16.176)$$

Обратимся к граничным условиям и рассмотрим наиболее общий случай закрепления балки. Пусть левый и правый концы балки оперты на упругие опоры с коэффициентами податливости A_1 и A_2 и одновременно упруго защемлены в закреплениях с коэффициентами $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, т. е.

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad & w_1' = \mathfrak{A}_1 EI w_1''; \\ & w_1 + w_2 = w_1 - EI w_1''/(G\omega) = -A_1 \left(EI w_1''\right)'; \\ \text{при } x = l \quad & w_1' = -\mathfrak{A}_2 EI w_1''; \\ & w_1 + w_2 = w_1 - EI w_1''/(G\omega) = A_2 \left(EI w_1''\right)', \end{aligned}$$

или, если воспользоваться обозначениями для элементов вектора $\mathbf{W}$,

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } x = 0 \quad \theta(0) = \mathfrak{A}_1 M(0); \quad w_1(0) - M(0)/(G\omega) = -A_1 N(0); \\ &\text{при } x = l \quad \theta(l) = -\mathfrak{A}_2 M(l); \quad w_1(l) - M(0)/(G\omega) = A_2 N(l). \end{aligned}\right\} \quad (16.177)$$

Полученные граничные условия можно переписать в матричной форме:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad & \mathbf{C}_1(0)\,\mathbf{W}(0) = \mathbf{D}_1(0); \\ \text{при } x = l \quad & \mathbf{C}_2(l)\,\mathbf{W}(l) = \mathbf{D}_2(l). \end{aligned} \quad (16.178)$$

Значения матриц $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ легко выписать непосредственно путем сопоставления выражений (16.177) и (16.178). Таким образом, все основные зависимости, описывающие изгиб рассматриваемой балки, представлены в матричной форме: уравнение изгиба (16.172) — в форме матричного дифференциального уравнения (16.175), а граничные условия (16.174) — в виде двух матричных зависимостей (16.178).

Использование метода начальных параметров для приближенного интегрирования дифференциального матричного уравнения типа (16.175) при граничных условиях типа (16.178) подробно излагалось в гл. 8.

Алгоритм метода начальных параметров обладает простотой и наглядностью. Однако увеличение жесткости упругого основания приводит к появлению в расчетном алгоритме малых разностей близких значений и, как следствие, к потере точности всего расчета. Поэтому для получения удовлетворительных результатов вычисления часто приходится вести с сохранением в мантиссе чисел 16—18-десятичных разрядов, т. е. применительно к машинам серии ЕС с удвоенной разрядной сеткой.

Известны методы численного решения одномерных задач строительной механики, в которых преодолевается указанный выше недостаток метода начальных параметров. К ним относится, в частности, метод прогонки [1] и метод парциальных откликов [64]. Эти методы в учебнике не рассматриваются, и желающим ознакомиться с ними следует обратиться к оригинальным работам авторов упомянутых методов. Изложение этих методов также содержится в работах [40; 51, т. 2].

Метод конечных элементов. При использовании МКЭ балка переменного сечения, лежащая на сплошном упругом основании переменной жесткости, может быть представлена в виде последовательности соединенных в узловых точках призматических элементов. Жесткость упругого основания в пределах длины каждого элемента можно считать постоянной.

Из материалов гл. 11 известны основные положения МКЭ применительно к расчету стержневых систем. Данная задача отличается от изученных ранее наличием упругого основания у балочных элементов, что скажется на их матрицах жесткости и векторах узловых сил.

Рассмотрим призматический балочный элемент на упругом основании постоянной жесткости. Элемент балки загружен усилиями взаимодействия R_1, R_2, R_3, R_4 со смежными конечными элементами. Введем в анализ также вектор узловых перемещений $\{q\}=\{q_1 q_2 q_3 q_4\}$. Положительные направления узловых усилий (перерезывающих сил и изгибающих моментов) и узловых перемещений (поперечных смещений и углов поворота) приведены на рис. 16.19.

[1] Гельфонд И. Н., Локуциевский О. В. Метод прогонки для решения разностных уравнений//Годунов С. К., Рябенький В. С. Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962. С. 440.

Вектор узловых усилий $\{R\}$ связан с вектором узловых перемещений $\{q\}$ зависимостью

$$\{R\}=[K]\{q\}, \tag{16.179}$$

где $[K]$ — матрица жесткости элемента балки на упругом основании, которую можно получить, применив для описания упругой линии общий интеграл однородного уравнения балки на упругом основании, выраженный, например, через функции Пузыревского:

$$w(x)=D_0V_0(\alpha x)+D_1V_1(\alpha x)+D_2V_2(\alpha x)+D_3V_3(\alpha x).$$

Для отыскания первого столбца матрицы жесткости общий интеграл необходимо подчинить условиям

$$\text{при } x=0 \quad q_1=w(0)=1; \quad q_2=w'(0)=0;$$
$$\text{при } x=a \quad q_3=w(a)=0; \quad q_4=w'(a)=0.$$

После определения произвольных постоянных должны быть найдены перерезывающие силы и изгибающие моменты в концевых сечениях элемента, которые и представляют собой компоненты первого столбца матрицы жесткости. Также можно определить и остальные столбцы этой матрицы.

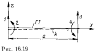


Рис. 16.19

Матрица, найденная таким образом, обладает высокой точностью и пригодна для использования при любой длине элемента, но весьма неудобна для вычислений. Для получения упрощенного выражения матрицы заметим, что влияние упругого основания на параметры изгиба элемента зависит от значения параметра

$$u=(a/2)\sqrt[4]{k/(4EI)}. \tag{16.180}$$

Величину u нетрудно оценить в каждой конкретной задаче и выбрать a (для каждого конечного элемента) таким, чтобы u не превосходило 0,1—0,2. При соблюдении этого условия упругая линия элемента, лежащего на упругом основании, будет близка к упругой линии такого же элемента, но без упругого основания [см. формулы (11.71), (11.72)]:

$$w(x)=\sum_{i=1}^{i=4} q_i \Theta_i(x), \tag{16.181}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_1(x)=1-3x^2/a^2+2x^3/a^3; \quad \Theta_2(x)=x-2x^2/a+x^3/a^2; \\ &\Theta_3(x)=3x^2/a^2-2x^3/a^3; \quad \Theta_4(x)=-x^2/a+x^3/a^2 \end{aligned}\right\} \tag{16.182}$$

— одномерные функции Эрмита.

Для получения матрицы жесткости элемента воспользуемся приемом, который требует предварительного определения потенциальной энергии элемента балки

$$П = \frac{EI}{2} \int_0^a [w''(x)]^2 \, dx + \frac{k}{2} \int_0^a w^2(x) \, dx. \qquad (16.183)$$

Первое слагаемое выражения (16.183) определяет потенциальную энергию изгиба элемента, второе — потенциальную энергию упругого основания.

Подставляя зависимость (16.181) в формулу (16.183), получаем

$$П = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=2}^{4} \left(k_{ik}^{(1)} + k_{ik}^{(2)}\right) q_i q_k. \qquad (16.184)$$

Здесь $k_{ik}^{(1)}$ — элементы матрицы жесткости балочного элемента $[K]_и = \left[k_{ik}^{(1)}\right]$ [см. формулу (11.77)], $k_{ik}^{(2)}$ — элементы матрицы жесткости упругого основания $[K]_{у.о} = \left[k_{ik}^{(2)}\right]$, равные

$$k_{ik}^{(1)} = EI \int_0^a Э_i''(x) \, Э_k''(x) \, dx; \quad k_{ik}^{(2)} = k \int_0^a Э_i(x) \, Э_k(x) \, dx. \qquad (16.185)$$

Выполняя перемножение функций, входящих во второе выражение (16.185), и интегрирование, находим матрицу жесткости упругого основания

$$[K]_{у.о} = \frac{ak}{35} \begin{bmatrix} 13 & 11a/6 & 9/2 & -13a/12 \\ & a^2/3 & 13a/12 & -a^2/4 \\ & & 13 & -11a/6 \\ \text{Симметрично} & & & a^2/3 \end{bmatrix}. \qquad (16.186)$$

Матрица жесткости балочного элемента, работающего на изгиб и лежащего на упругом основании, будет равна

$$[K] = [K]_и + [K]_{у.о}. \qquad (16.187)$$

Для определения эквивалентных узловых усилий $\{P\}$ следует воспользоваться формулой (11.32). В результате получим следующее выражение для определения i-го элемента матрицы $\{P\}$:

$$P_i = \int_0^a q(x) \, Э_i(x) \, dx, \qquad (16.188)$$

где $q(x)$ — *интенсивность поперечной нагрузки*, действующей на конечный элемент. Отсюда для $q(x) = q_0 = \text{const}$

$$\{P\} = \frac{q_0 a}{2} \left\{1, \ \frac{a}{6}, \ 1, \ -\frac{a}{6}\right\}; \qquad (16.189)$$

для $q(x) = q_0 x/a$

$$\{P\} = \frac{q_0 a}{20} \left\{3, \ \frac{2}{3} a, \ 7, \ -a\right\}. \qquad (16.190)$$

Располагая найденными выше значениями матрицы жесткости и вектора эквивалентных узловых нагрузок и руководствуясь схемой и последовательностью основных операций МКЭ (см. § 11.9), можно легко выполнить расчет любой неразрезной балки, лежащей на сплошном упругом основании переменной жесткости.

§ 16.8. Изгиб составных стержней с упругими связями

Составным называется такой стержень, который состоит из двух или нескольких монолитных стержней, соединенных по продольным кромкам упругими связями.

В зависимости от вида усилий, которые передаются связями, различают *связи сдвига*, передающие касательные усилия, и *поперечные*, передающие усилия, нормальные к оси стержня. В предельном случае, когда податливость связей равна нулю, составной стержень превращается в монолитный.

Расчет прочности ряда судовых конструкций сводится к рассмотрению изгиба составных стержней. Примером может служить задача о совместном изгибе плавучего дока и находящегося в нем судна. В этой задаче два стержня, моделирующие корпуса судна и плавучего дока, соединены упругими поперечными связями (кильблоками) и совместно противостоят действующей на док и судно поперечной нагрузке. Другим примером является задача об изгибе корпуса судна, имеющего одноярусную или многоярусную надстройку. Простейшая модель такой конструкции — составной стержень, отдельные монолитные стержни которого соединены связями, имеющими конечную жесткость на сдвиг и растяжение-сжатие.

Дифференциальное уравнение изгиба составного стержня. В дальнейшем ограничимся рассмотрением плоских составных стержней, у которых изгиб всех составляющих стержней происходит в одной плоскости, совпадающей с одной из главных плоскостей поперечных сечений всех стержней. Будем считать, что связи между стержнями идеально упруги и непрерывны, а их сопротивление действию сил может характеризоваться погонными коэффициентами жесткости на сдвиг k_c и на растяжение-сжатие k_n, равными

$$k_c = \tau/\delta_c; \quad k_n = r/\delta_n, \qquad (16.191)$$

где τ — интенсивность касательного усилия на кромках упругой связи; δ_c — относительное продольное перемещение кромок упругой связи под действием усилий τ; r — интенсивность нормального усилия на упругую связь; δ_n — относительное поперечное перемещение кромок упругой связи под действием усилий r. Как следует из формул (16.191), коэффициенты жесткости k_c и k_n имеют размерность силы, деленной на квадрат длины. Для конкретных связей определение k_c и k_n производят путем вычисления или измерения перемещений, вызванных приложением нагрузки единичной интенсивности. Заметим, что по физическому смыслу величина $k_п$ совпадает с уже известным понятием коэффициента жесткости упругого основания.

Излагаемая ниже теория изгиба составных стержней разработана А. Р. Ржаницыным и базируется на предположении о применимости технической теории изгиба балок к каждому из монолитных стержней, входящих в составной.

Рассмотрим стержень, состоящий из двух прямолинейных монолитных стержней, соединенных упругими связями с постоянными по длине стержня жесткостями на сдвиг и растяжение-сжатие (рис. 16.20).

Пусть первый стержень загружен поперечной нагрузкой $q_1(x)$, а к его концевым сечениям приложены растягивающие усилия T_1^0 и

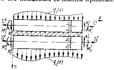


Рис. 16.20

Рис. 16.21

T_1^1, перерезывающие силы N_1^0 и N_1^1 и изгибающие моменты M_1^0 и M_1^1. Ко второму стержню приложена аналогичная нагрузка, компоненты которой $q_2(x)$, T_2^0, T_2^1, N_2^0, N_2^1, M_2^0, M_2^1.

Для составления дифференциального уравнения изгиба разрежем мысленно связи, соединяющие стержни, и их действие заменим реактивными касательной $\tau(x)$ и нормальной $r(x)$ нагрузками.

Нагрузки, действующие на стержни, включая и реактивные нагрузки $\tau(x)$ и $r(x)$, показаны на рис. 16.21.

Найдем выражение для изгибающих моментов в поперечных сечениях первого и второго стержней:

$$\left.\begin{aligned} M_1(x) &= \int_0^x\int_0^x \left[q_1(x) + r(x)\right] dx^2 + a_1\int_0^x \tau(x)\,dx + N_1^0 x + M_1^0;\\ M_2(x) &= \int_0^x\int_0^x \left[q_2(x) - r(x)\right] dx^2 + b_2\int_0^x \tau(x)\,dx + N_2^0 x + M_2^0.\end{aligned}\right\} \qquad (16.192)$$

Изгибающие моменты связаны с упругими линиями стержней зависимостями

$$E_1 I_1 w_1''(x) = M_1(x);\quad E_2 I_2 w_2''(x) = M_2(x), \qquad (16.193)$$

где E_1, E_2 — модули упругости стержней; I_1, I_2 — центральные моменты инерции площадей поперечных сечений стержней.

После двукратного дифференцирования выражений (16.193) с учетом формул (16.192) получим

$$\left.\begin{aligned} E_1 I_1 w_1^{IV} &= q_1(x) + r(x) + a_1\tau'(x);\\ E_2 I_2 w_2^{IV} &= q_2(x) - r(x) + b_2\tau'(x).\end{aligned}\right\} \qquad (16.194)$$

В уравнения (16.194) входят две неизвестные реактивные нагрузки $r(x)$ и $\tau(x)$. Для их определения необходимо рассмотреть условия совместности деформаций первого и второго стержней. По условиям связи разности перемещений верхней кромки второго стержня и нижней кромки первого связаны с усилиями $r(x)$ и $\tau(x)$ зависимостями (16.191):

$$\left.\begin{aligned} \delta_п &= w_2^{в}(x) - w_1^{н}(x) = r(x)/k_п;\\ \delta_с &= u_2^{в}(x) - u_1^{н}(x) = \tau(x)/k_с,\end{aligned}\right\} \qquad (16.195)$$

или

$$\left.\begin{aligned} r(x) &= k_п\left[w_2^{в}(x) - w_1^{н}(x)\right];\\ \tau(x) &= k_с\left[u_2^{в}(x) - u_1^{н}(x)\right].\end{aligned}\right\} \qquad (16.196)$$

Из уравнений (16.196) находим производную

$$\tau'(x) = k_с\left[\varepsilon_2^{в}(x) - \varepsilon_1^{н}(x)\right], \qquad (16.197)$$

где $\varepsilon_1^{н}(x) = \left[u_1^{н}(x)\right]'$, $\varepsilon_2^{в}(x) = \left[u_2^{в}(x)\right]'$ — линейные деформации в направлении оси x соответственно нижней кромки первого и верхней кромки второго стержней.

При определении деформаций $\varepsilon_1^{н}$ и $\varepsilon_2^{в}$ кромок стержней учтем влияние искривления плоских сечений стержней под действием касательных усилий $\tau(x)$. Перемещения кромок вследствие воздействия касательных усилий определим по приближенным зависимостям

$$\Delta u_1^{н} = \tau(x)/\lambda_1;\quad \Delta u_2^{в} = -\tau(x)/\lambda_2, \qquad (16.198)$$

где λ_1, λ_2 — коэффициенты жесткости на сдвиг первого и второго стержней соответственно.

Дополнительные деформации кромок, обусловленные сдвигом (искривлением поперечных сечений), равны

$$\Delta\varepsilon_1^{н}(x) = \tau'(x)/\lambda_1;\quad \Delta\varepsilon_2^{в}(x) = -\tau'(x)/\lambda_2. \qquad (16.199)$$

Добавляя к деформациям (16.199) деформации кромок, определяемые в соответствии с гипотезой плоских сечений, получаем

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1^{н}(x) &= \tau'(x)/\lambda_1 - w_1''(x)\,a_1 + \left[T_1^0 - \int_0^x \tau(x)\,dx\right]\Big/(E_1F_1);\\ \varepsilon_2^{н}(x) &= -\tau'(x)/\lambda_2 + w_2''(x)\,b_2 + \left[T_2^0 + \int_0^x \tau(x)\,dx\right]\Big/(E_2F_2).\end{aligned}\right\} \qquad (16.200)$$

Здесь E_iF_i — жесткость на растяжение-сжатие i-го стержня; $w_i(x)$ — прогиб i-го стержня.

После подстановки выражений (16.200) в зависимость (16.197) последняя преобразуется к следующему виду:

$$\frac{1}{k_0}\tau'(x) - \frac{\int\limits_0^x \tau(x)\,dx}{EF} + \frac{T_1^0}{E_1F_1} - \frac{T_2^0}{E_2F_2} = w_1''a_1 + w_2''b_2, \qquad (16.201)$$

где

$$1/k_0 = 1/k_c + 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2; \quad 1/(EF) = 1/(E_1F_1) + 1/(E_2F_2). \qquad (16.202)$$

Дифференцируя равенство (16.201) один раз по x, приходим к уравнению

$$\tau''(x) - k_0\tau(x)/(EF) = k_0(w_1'''a_1 + w_2'''b_2). \qquad (16.203)$$

Исключая из равенств (16.194) неизвестные усилия $r(x)$ с помощью зависимости (16.196), находим

$$\left.\begin{aligned} E_1I_1w_1^{IV} + k_п(w_1 - w_2) &= q_1(x) + a_1\tau'(x); \\ E_2I_2w_2^{IV} + k_п(w_2 - w_1) &= q_2(x) + b_2\tau'(x). \end{aligned}\right\} \qquad (16.204)$$

Совокупность уравнений (16.204) и (16.203) описывает изгиб составного стержня. Совместное интегрирование этих уравнений позволяет определить неизвестные функции $w_1(x)$, $w_2(x)$ и $\tau(x)$. Произвольные постоянные интегрирования, как обычно, определяют из граничных условий. Запись четырех граничных условий по концам каждого составляющего стержня не представляет особых затруднений, и здесь не приводится.

Нетрудно составить граничные условия и для определения двух произвольных постоянных, появляющихся при интегрировании уравнения (16.203). Действительно, составляя уравнения равновесия каждого из стержней по направлению оси x, получаем

$$\left.\begin{aligned} T_1^1 &= T_1^0 - \int\limits_0^l \tau(x)\,dx; \\ T_2^1 &= T_2^0 + \int\limits_0^l \tau(x)\,dx, \end{aligned}\right| \qquad (16.205)$$

где T_i^1 — осевые растягивающие силы, приложенные в правом сечении ($x = l$) i-го стержня. Тогда на основании выражения (16.201) с использованием зависимостей (16.205) и (16.202) можно получить искомые граничные условия для функции $\tau(x)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{k_0}\tau'(x)\big|_{x=0} &= -\frac{T_1^0}{E_1F_1} + \frac{T_2^0}{E_2F_2} + w_1''(0)a_1 + w_2''(0)b_2; \\ \frac{1}{k_0}\tau'(x)\big|_{x=l} &= -\frac{T_1^1}{E_1F_1} + \frac{T_2^1}{E_2F_2} + w_1''(l)a_1 + w_2''(l)b_2. \end{aligned}\right\} \qquad (16.206)$$

Аналогично могут быть получены необходимые уравнения и граничные условия для описания поведения составного стержня, состоящего из произвольного числа n монолитных призматических стержней, соединенных непрерывными упругими связями.

Изгиб судна при постановке в плавучий док. При постановке в плавучий док судно обычно располагается на килевой дорожке, установленной на стапель-палубе дока. Схема постановки судна показана на рис. 16.22.

Система док — судно представляет собой составной стержень, состоящий из двух монолитных стержней (судна и дока), соединенных килевой дорожкой, обладающей конечной жесткостью в поперечном направлении и практически нулевой жесткостью на сдвиг, т. е. для килевой дорожки $k_c = \tau(x) = 0$. Отсутствие касательных усилий взаимодействия между стержнями существенно

Рис. 16.22

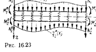


Рис. 16.23

упрощает задачу изгиба составного стержня, позволяя принять во внимание, что момент инерции площади поперечного сечения балок и коэффициент жесткости их упругой связи в общем случае зависят от координаты x.

При определении коэффициента жесткости поперечной связи $k_п$ учтем, что взаимное смещение нейтральных осей двух балок зависит от податливости кильблоков, поперечных ферм дока и днища судна. Если обозначить коэффициент жесткости кильблоков k_1, коэффициент жесткости поперечных ферм дока при изгибе их между башнями k_2, коэффициент жесткости днища судна k_3, то коэффициент жесткости поперечной связи между судном и доком определится из следующей зависимости:

$$1/k_п = 1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_3. \qquad (16.207)$$

При составлении уравнений следует также учесть, что между верхней кромкой кильблоков и линией киля судна может существовать зазор $\Delta(x)$, появление которого связано как со строительной погибью судна и технологической непрямолинейностью верхней кромки килевой дорожки, так и с прогибом поперечных ферм дока относительно башен дока, вызванным нагрузками, не зависящими от реакций кильблоков (собственным весом конструкций, весом балласта и т. п.).

С учетом сказанного вместо зависимостей (16.196) следует записать

$$\left.\begin{aligned} r(x) &= k_п(x)\,[w_2(x) - w_1(x) - \Delta(x)]; \\ \tau(x) &= 0, \end{aligned}\right. \qquad (16.208)$$

где величину $\Delta(x)$ полагаем известной.

Подставляя выражение (16.208) в формулы (16.194) и учитывая непризматичность балок, находим

$$\left.\begin{aligned} \left[E_1 I_1(x)\, w_1''(x)\right]'' + k_{\text{п}}(x)\left[w_1(x) - w_2(x)\right] = q_1^*(x);\\ \left[E_2 I_2(x)\, w_2''(x)\right]'' + k_{\text{п}}(x)\left[w_2(x) - w_1(x)\right] = q_2^*(x). \end{aligned}\right\} \qquad (16.209)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} q_1^*(x) = q_1(x) - k_{\text{п}}(x)\,\Delta(x);\\ q_2^*(x) = q_2(x) + k_{\text{п}}(x)\,\Delta(x). \end{aligned}\right\} \qquad (16.210)$$

Граничные условия для нахождения $w_1(x)$ и $w_2(x)$ определяются наличием свешивающихся за пределы килевой дорожки частей судна и дока. На рис. 16.23 показаны сосредоточенные силы и моменты, действующие в концевых сечениях балок, входящих в состав рассматриваемого составного стержня.

В соответствии с рис. 16.23 получим граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } x=0 \qquad & E_1 I_1 w_1'' = M_1^0; \quad & E_2 I_2 w_2'' = M_2^0;\\ & & (E_1 I_1 w_1'')' = N_1^0; \quad & (E_2 I_2 w_2'')' = N_2^0;\\ &\text{при } x=l \qquad & E_1 I_1 w_1'' = M_1^1; \quad & E_2 I_2 w_2'' = M_2^1;\\ & & (E_1 I_1 w_1'')' = -N_1^1; \quad & (E_2 I_2 w_2'')' = -N_1^2. \end{aligned}\right\} \qquad (16.211)$$

Здесь M_1^0, M_1^1 — моменты сил тяжести свешивающихся частей судна относительно кромки килевой дорожки; N_1^0, N_1^1 — силы тяжести свешивающихся частей судна; M_2^0, M_2^1 — моменты сил N_2^0 и N_2^1 относительно кромок килевой дорожки; N_2^0, N_2^1 — разности между силами тяжести и силами поддержаний частей дока, находящихся за пределами килевой дорожки.

Решение сформулированной задачи может быть получено одним из рассмотренных в § 16.7 методов.

Система двух балок (см. рис. 16.23), связанных упругим слоем, испытывает воздействие суммарного изгибающего момента $M(x)$, зависящего только от внешних нагрузок:

$$M(x) = (N_1^0 + N_2^0)\, x + M_1^0 + M_2^0 + \int_0^x \int_0^x (q_1 + q_2)\, dx^2. \qquad (16.212)$$

Заметим, что

$$q_1^* + q_2^* = q_1 + q_2. \qquad (16.213)$$

Распределение момента $M(x)$ между балками зависит от соотношения их жесткостей, жесткости упругого слоя, величины $\Delta(x)$.

Во всех случаях

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x), \qquad (16.214)$$

где $M_1(x)$ и $M_2(x)$ — изгибающие моменты в сечениях судна и дока соответственно.

В предельном случае, когда жесткость упругого слоя бесконечно велика, а зазор $\Delta(x)$ отсутствует, прогибы обеих балок одинаковы. Положив $w(x) = w_1(x) = w_2(x)$, из равенства (16.214) найдем

$$\left.\begin{aligned} M(x) = (E_1 I_1 + E_2 I_2)\, w''(x);\\ M_1(x) = E_1 I_1 w''(x) = E_1 I_1 M(x)/(E_1 I_1 + E_2 I_2);\\ M_2(x) = E_2 I_2 w''(x) = E_2 I_2 M(x)/(E_1 I_1 + E_2 I_2). \end{aligned}\right\} \qquad (16.215)$$

В общем случае

$$\bar{w}(x) = w_1(x) - w_2(x) \neq 0. \qquad (16.216)$$

Уравнения (16.209) и граничные условия (16.211) позволяют сформулировать задачу по определению функции $\bar{w}(x)$, представляющей собой разность упругих перемещений судна и дока.

Из уравнений (16.209) после двукратного интегрирования с учетом граничных условий (16.211) следует зависимость

$$\bar{w}''(x) = w_1''(x) - w_2''(x) = \frac{1}{E_1 I_1} \int_0^x \int_0^x q_1^*(x)\, dx^2 - \frac{1}{E_2 I_2} \int_0^x \int_0^x q_2^*(x)\, dx^2 - \\ - \frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x k_{\text{п}}(x)\left[w_1(x) - w_2(x)\right] dx^2 + \frac{M_1^0}{E_1 I_1} - \frac{M_2^0}{E_2 I_2} + x\left(\frac{N_1^0}{E_1 I_1} - \frac{N_2^0}{E_2 I_2}\right), \qquad (16.217)$$

где

$$1/(EI) = 1/(E_1 I_1) + 1/(E_2 I_2). \qquad (16.218)$$

Умножив уравнение (16.217) на EI и продифференцировав результат дважды, получим дифференциальное уравнение для отыскания $\bar{w}(x)$:

$$\left[EI \bar{w}''(x)\right]'' + k_{\text{п}} \bar{w}(x) = \bar{q}(x). \qquad (16.219)$$

Здесь

$$\bar{q}(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{EI}{E_1 I_1} \int_0^x \int_0^x q_1^*(x)\, dx^2 - \frac{EI}{E_2 I_2} \int_0^x \int_0^x q_2^*(x)\, dx^2 + \right. \\ \left. + \frac{EI}{E_1 I_1}(M_1^0 + x N_1^0) - \frac{EI}{E_2 I_2}(M_2^0 + x N_2^0)\right].$$

Заметим, что для балок постоянного сечения

$$\bar{q}(x) = EI q_1^*(x)/(E_1 I_1) - EI q_2^*(x)/(E_2 I_2). \qquad (16.220)$$

С помощью преобразований, аналогичных вышеприведенным, находим граничные условия, которым должна удовлетворять функция $\bar{w}(x)$:

при $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} EI \bar{w}''(x) = \frac{EI}{E_1 I_1} M_1^0 - \frac{EI}{E_2 I_2} M_2^0;\\ \left[EI \bar{w}''(x)\right]' = \frac{EI}{E_1 I_1} N_1^0 - \frac{EI}{E_2 I_2} N_2^0 + \left(\frac{EI}{E_1 I_1}\right)' M_1^0 - \left(\frac{EI}{E_2 I_2}\right)' M_2^0; \end{aligned}\right\} \qquad (16.221)$$

при $x=l$

$$\left.\begin{aligned} EI\bar{w}''(x) &= \frac{EI}{E_1I_1}M_1^1-\frac{EI}{E_2I_2}M_2^1;\\ [EI\bar{w}''(x)]' &= -\frac{EI}{E_1I_1}N_1^1+\frac{EI}{E_2I_2}N_2^1+\left(\frac{EI}{E_1I_1}\right)'M_1^1-\left(\frac{EI}{E_2I_2}\right)M_2^1. \end{aligned}\right\} \quad (16.222)$$

После определения $\bar{w}(x)$ найдем

$$\overline{M}(x)=EI\bar{w}''(x)=EIM_1(x)/(E_1I_1)-EIM_2(x)/(E_2I_2), \quad (16.223)$$

где $M_1(x)$ и $M_2(x)$ — изгибающие моменты в сечениях дока и судна соответственно.

Из равенств (16.214) и (16.223) следует:

$$\left.\begin{aligned} M_1(x) &= E_1I_1M(x)/(E_1I_1+E_2I_2)+\overline{M}(x);\\ M_2(x) &= E_2I_2M(x)/(E_1I_1+E_2I_2)-\overline{M}(x). \end{aligned}\right\} \quad (16.224)$$

Аналогично определяют значения перерезывающих сил в корпусах судна и дока.

С помощью введения функции $\bar{w}(x)$ исходная задача, требовавшая решения системы двух дифференциальных уравнений 4-го порядка (16.209), была сведена к одному дифференциальному уравнению (16.219).

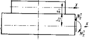


Рис. 16.24

Совместный изгиб корпуса судна и одноярусной надстройки. Корпус судна с одноярусной надстройкой является примером составного стержня, имеющего в своем составе два монолитных стержня — надстройку и корпус судна (рис. 16.24).

Будем считать, что борта судна и надстройки лежат в одной плоскости. Это позволяет принимать жесткость поперечных связей бесконечно большой ($k_n=\infty$). Что касается связей сдвига, то величину k_c также следует признать бесконечно большой, поскольку борта надстройки соединены с бортами судна сварным швом. Однако, как выше уже отмечалось, необходимо учитывать искривление поперечных сечений как надстройки, так и корпуса судна вследствие сдвига, что приводит к конечной величине коэффициента жесткости на сдвиг. Воспользовавшись зависимостью (16.202), найдем коэффициент сдвиговой жесткости упругой связи:

$$k_0=\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2),$$

где λ_1 и λ_2 — коэффициенты жесткости на сдвиг надстройки и судна, введенные зависимостями (16.198). Фактическое определение коэффициентов λ_1 и λ_2 требует решения задачи теории упругости о перемещениях, вызванных касательными усилиями $\tau(x)$ в надстройке и корпусе судна. Не останавливаясь на этих решениях, будем считать λ_1 и λ_2 известными.

С учетом сказанного в системе уравнений (16.204), (16.203) следует положить $w_1(x)=w_2(x)$. В результате упомянутая система преобразуется к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} \tau''(x)-\frac{k_0}{EF}\tau(x) &= k_0ew'''(x);\\ EI^*w^{\mathrm{IV}}(x) &= q_1(x)+q_2(x)+e\tau'(x), \end{aligned}\right\} \quad (16.225)$$

где $e=a_1+b_2$; $EI^*=E_1I_1+E_2I_2$. Дифференцируя первое из уравнений по x и исключая из него $w^{\mathrm{IV}}(x)$ с помощью второго, получаем

$$\tau'''(x)-\alpha^2\tau'(x)=q(x). \quad (16.226)$$

Здесь

$$\alpha^2=[1/(EF)+e^2/(EI^*)]\,k_0; \quad (16.227)$$

$$q(x)=[k_0e/(EI)]\,[q_1(x)+q_2(x)]. \quad (16.228)$$

Величина $q_1(x)+q_2(x)$ представляет собой интенсивность суммарной нагрузки, действующей на судно и надстройку. Предполагая, что надстройка занимает относительно небольшую часть длины судна, будем считать нагрузку $q(x)=q_1(x)+q_2(x)$ изменяющейся на длине надстройки по линейному закону. Тогда общий интеграл уравнения (16.226) имеет следующий вид:

$$\tau'(x)=A\operatorname{ch}\alpha x+B\operatorname{sh}\alpha x-q(x)/\alpha^2. \quad (16.229)$$

Постоянные интегрирования надо определить из граничных условий (16.206), которые в рассматриваемом случае равны:

$$\text{при } x=-0{,}5l \quad \tau'/k_0=M_2^0e/(EI^*); \qquad \text{при } x=0{,}5l \quad \tau'/k_0=M_2^1e/(EI^*). \quad (16.230)$$

Определяя постоянные A и B из граничных условий (16.230), получаем

$$\tau'(x)=\frac{k_0e}{EI}\left[\left(\frac{M_2^0+M_2^1}{2}+\frac{q}{\alpha^2}\right)\frac{\operatorname{ch}\alpha x}{\operatorname{ch}\alpha\frac{l}{2}}+\frac{M_2^1-M_2^0}{2}\,\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha\frac{l}{2}}-\frac{q}{\alpha^2}\right]. \quad (16.231)$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда изгибающие моменты в сечениях корпуса у концов надстройки одинаковы, а нагрузка в пределах надстройки постоянна: $M_2^0=M_2^1=M$; $q=\mathrm{const}$. В этом случае

$$\tau'(x)=[k_0e/(EI)]\,[(M+q/\alpha_2)\operatorname{ch}\alpha x/\operatorname{ch}\alpha l/2-q/\alpha^2]. \quad (16.232)$$

Интегрируя выражение (16.232), найдем

$$\tau(x)=[k_0e/(EI\alpha)]\,[(M+q/\alpha^2)\operatorname{sh}\alpha x/\operatorname{ch}\alpha l/2-qx/\alpha^2]+D. \quad (16.233)$$

Условие статического равновесия надстройки, мысленно отделенной от корпуса, в проекциях сил на ось ox приводит к условию $\int\limits_{-l/2}^{l/2}\tau(x)\,dx=0$, из которого следует, что $D=0$.

Окончательно для касательных усилий по линии присоединения надстройки к корпусу получим выражение

$$\tau(x) = [k_0 e/(EI\alpha)]\,[(M + q/\alpha^2)\operatorname{sh}\alpha x/\operatorname{ch}\alpha l/2 - qx/\alpha^2]. \quad (16.234)$$

Для отыскания изгибающих моментов, действующих в сечениях надстройки и корпуса, определим кривизну упругой линии рассматриваемого составного стержня. Из второго уравнения (16.225) следует, что

$$EI^{*}w''(x) = M(x) + e\int_{-0,5l}^{x}\tau(x)\,dx, \quad (16.235)$$

где $M(x) = M_2^0 + N_2^0 x + \int_{-0,5l}^{x}\int_{-0,5l}^{x} q(x)\,dx^2$ — изгибающий момент, действующий в сечении x составного стержня.

Изгибающие моменты в надстройке и корпусе судна определяют соответственно по формулам $M_1(x) = E_1 I_1 w''(x)$; $M_2(x) = E_2 I_2 w''(x)$. С учетом (16.235)

$$\left.\begin{aligned} M_1(x) &= \frac{E_1 I_1}{EI^{*}}\left[M(x) + e\int_{-0,5l}^{x}\tau(x)\,dx\right]; \\ M_2(x) &= \frac{E_2 I_2}{EI^{*}}\left[M(x) + e\int_{-0,5l}^{x}\tau(x)\,dx\right]. \end{aligned}\right\} \quad (16.236)$$

Как видно из формул (16.236), изгибающий момент на концах надстройки не равен нулю, что противоречит физическому смыслу задачи. Такой результат является следствием принятой нами гипотезы плоских сечений и допущения о бесконечной жесткости поперечных связей ($k_{п} = \infty$). Поэтому использовать полученное решение для определения напряжений в надстройке можно лишь для сечений, достаточно удаленных от ее концов.

Контрольные вопросы

1. При выполнении какого условия балка, опирающаяся на независимые упругие опоры, может быть рассчитана как балка, лежащая на сплошном упругом основании? Каков порядок погрешности в значениях прогибов и изгибающих моментов при такой замене расчетной схемы?
2. Каково отличие дифференциального уравнения изгиба балки, лежащей на сплошном упругом основании, от дифференциального уравнения изгиба балки без упругого основания?
3. Каким условиям удовлетворяют функции Пузыревского? Каковы правила определения их производных?
4. Являются ли линейно независимыми функции Клишевича? Какие из функций Клишевича следует взять при выписывании общего интеграла дифференциального уравнения изгиба балки, лежащей на сплошном упругом основании?
5. Как определить частное решение дифференциального уравнения изгиба призматической балки, лежащей на сплошном упругом основании постоянной жесткости при загрузке балки равномерной нагрузкой; сосредоточенной силой в произвольном сечении?
6. Как построены таблицы изгиба однопролетных призматических балок на упругом основании постоянной жесткости, нагруженных равномерной нагрузкой?
7. Как изменяется влияние заделки концов на прогиб посередине пролета однопролетной балки при возрастании жесткости упругого основания?
8. Что такое коэффициент опорной пары? Как он определяется и как используется при расчете балок, лежащих на сплошном упругом основании?
9. Какие изменения вносятся в теорему трех моментов при учете влияния упругого основания?
10. В каких практических задачах строительной механики корабля можно использовать решение об изгибе полубесконечной балки, лежащей на сплошном основании?
11. К какому изменению расчетной схемы приведет наличие зазора между балкой и упругим основанием?
12. Как изменится дифференциальное уравнение изгиба балки на сплошном упругом основании при учете влияния деформации сдвига?
13. В чем состоит приближенный метод учета влияния сдвига при расчете балок, лежащих на сплошном упругом основании?
14. Как определяется потенциальная энергия балки на упругом основании?
15. В чем состоит основной недостаток обобщенного метода начальных параметров применительно к задачам изгиба балок, лежащих на сплошном упругом основании?
16. Как изменится матрица жесткости элемента балки при учете влияния сплошного упругого основания, если предположить, что форма изгиба элемента неизменна?
17. Какие допущения используют в технической теории изгиба составных стержней?
18. Какие силы взаимодействия определяют совместную работу монолитных стержней, входящих в составной? Какие уравнения необходимо составить для определения этих сил?
19. Каковы основные свойства килевой дорожки, связывающей судно и плавучий док как элементы составного стержня?
20. К какой расчетной схеме сводится задача об изгибе судна совместно с плавучим доком?
21. Каковы свойства упругих связей, обеспечивающих совместный изгиб корпуса судна и надстройки?
22. Как составить дифференциальные уравнения для расчета изгиба корпуса судна совместно с одноярусной надстройкой?
23. Каковы граничные условия для корпуса и одноярусной настройки, рассматриваемых как составной стержень?
24. Можно ли точно выполнить граничные условия на концах надстройки, если применить теорию изгиба составного стержня, шов которого имеет конечную жесткость только на сдвиг?

Глава 17. ИЗГИБ ПЛОСКИХ ПЕРЕКРЫТИЙ

§ 17.1. Плоские перекрытия как модели судовых конструкций. Основные допущения

Плоским перекрытием называется система расположенных в одной плоскости пересекающихся балок, жестко соединенных между собой в точках пересечения, способная воспринимать нагрузку, действующую как по нормали к плоскости расположения балок, так и в этой плоскости. Перекрытие опирается на опорный контур, реакциями которого уравновешивается внешняя нагрузка. Плоским перекрытием следует, например, считать систему флоров и стрингеров, образующих днищевое перекрытие, систему бимсов и карлингсов, составляющих палубное перекрытие, систему шпангоутов и стрингеров, образующих перекрытие борта и т. п.

Опорный контур для перекрытия создается другими перекрытиями, расположенными в плоскостях, пересекающих рассматриваемую под углами, близкими к $\pi/2$.

Так, опорный контур днищевого перекрытия образуется бортами и поперечными переборками судна, опорный контур для бортового перекрытия создают днище, поперечные переборки и палуба и т. д.

Судовые перекрытия, как правило, имеют прямоугольный опорный контур, и образующие их балки пересекаются под прямыми углами.

То направление, параллельно которому идет большее число балок, называется *главным направлением*, а соответствующие балки — *балками главного направления*. Балки, расположенные перпендикулярно балкам главного направления, именуются *перекрестными связями* или *перекрестными балками*.

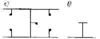


Рис. 17.1

Характерной чертой конструкций днища, бортов, палуб и переборок является наличие сплошных обшивок (настилов), к которым жестко прикреплен поперечный и продольный набор. Замена таких конструкций балочными системами производится с помощью назначения так называемых присоединенных поясков, включаемых в состав балок набора.

На рис. 17.1, *а* в качестве примера показано поперечное сечение центральной днищевой продольной балки (вертикального киля) с присоединенными поясками днищевой обшивки и настила второго дна, а на рис. 17.1, *б* изображено поперечное сечение продольного ребра жесткости либо элемента поперечного набора (шпангоута, бимса) с присоединенным пояском обшивки.

Определение ширины присоединенных поясков — специальная задача, которая решается методами теории упругости и рассмотрена в § 6.3.

После определения присоединенных поясков конструкции днища, бортов, поперечных переборок и палуб становятся системами перекрещивающихся балок (перекрытиями). Следует, однако, всегда иметь в виду условность такого подхода и учитывать наличие сплошных настилов при выборе схем расчета судовых перекрытий и оценке точности расчетов.

Перекрытие — многократно статически неопределимая система, для расчета прочности которой необходимо определить усилия взаимодействия балок в узлах пересечения и реакции опорного контура. Будем учитывать, что сплошные настилы (обшивки) обес-

печивают очень высокую жесткость относительно перемещений в плоскости перекрытия, в силу чего узловые точки перекрытия имеют только три степени свободы: линейное перемещение по направлению оси oz, нормальной к плоскости перекрытия, и углы поворота относительно осей ox и oy, лежащих в плоскости перекрытия. Между балками перекрытия в узловых точках появляются усилия взаимодействия. Из них важнейшую роль играет реакция, перпендикулярная плоскости перекрытия.

Сопротивление повороту узлов пересечения балок относительно осей ox и oy обусловлено не только изгибом соответствующей балки, но и закручиванием балки второго направления. Например, повороты сечений балки, ориентированной вдоль оси ox, вызовут закручивание балок, ориентированных вдоль оси oy, и наоборот.

Если жесткость на кручение балок велика, например у некоторых перекрытий типа двойного дна (с двумя настилами), то крутящие моменты, возникающие в балках, могут заметно сказаться на изгибе перекрытия и должны учитываться в расчетах. При этом перекрытие удобно представить не как систему пересекающихся балок, а как сложную (составную) ортотропную пластину. Теория изгиба таких пластин, позволяющая учесть не только сопротивление балок закручиванию, но и появление плоского напряженного состояния в настилах при изгибе конструкции, в данном учебнике не рассматривается.

У подавляющего большинства судовых перекрытий жесткость балок на кручение значительно ниже жесткости на изгиб, что позволяет пренебрегать упомянутыми крутящими моментами. Таким образом, усилия взаимодействия между балками перекрытия в узловых точках сводятся в рассматриваемом приближении лишь к реакциям, перпендикулярным плоскости перекрытия. Таким образом, балки перекрытия помимо внешней нагрузки оказываются нагруженными неизвестными реакциями в сечениях, соответствующих узловым точкам, причем этими реакциями обеспечивается совместность изгиба балок обоих направлений, т. е. одинаковость их прогибов в узловых точках.

Остановимся на определении внешней нагрузки балок перекрытия. Как уже отмечалось, балки судовых перекрытий имеют общий настил (обшивку), испытывающий действие внешней нагрузки, источником которой служит давление забортной воды, давление грузов, расположенных на перекрытии, вес оборудования и т. д. Во многих случаях действие внешних нагрузок локализовано на относительно малой части поверхности перекрытия и тогда нагрузка отдельных балок определяется очевидным образом в зависимости от зоны приложения нагрузки к перекрытию.

Рассмотрим распределение нагрузки между балками главного направления и перекрестными связями при действии на перекрытие равномерно распределенного давления p. Пусть перекрытие имеет относительно небольшое число балок главного направления и перекрестных связей (рис. 17.2). Выделим в перекрытии одну ячейку, например $ABCD$, ограниченную двумя балками главного направления и двумя перекрестными связями, и выясним, в какой пропорции приходящаяся на эту ячейку внешняя нагрузка делится между элементами набора, ее ограничивающими. Для получения исчерпывающего ответа на поставленный вопрос необходимо решить весьма трудоемкую задачу о совместном изгибе пластины

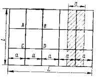


Рис. 17.2

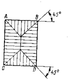


Рис. 17.3

обшивки и подкрепляющего ее набора. Для приближенного расчета можно воспользоваться следующим приемом: разделить ячейку $ABCD$ на четыре зоны, как это показано на рис. 17.3, а нагрузку, приходящуюся на каждую из зон, отнести к тому элементу набора, который к рассматриваемой зоне примыкает. Этот прием приводит к точному решению, когда ячейка $ABCD$ квадратная. Для прямоугольных ячеек с его помощью получаем удовлетворительное приближение.

Полученная с помощью указанного приема нагрузка балки главного направления и перекрестной связи перекрытия, приведенного на рис. 17.2, изображена на рис. 17.4, где показаны также

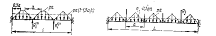


Рис. 17.4

реакции взаимодействия балок R_i, которые считаются положительными, если перекрестная связь поддерживает балки главного направления. Как видно из рисунка, рассмотренный прием приводит к достаточно сложной нагрузке балок перекрытия, и им следует пользоваться только в случаях проведения уточненных расчетов. В большинстве практических расчетов можно удовлетвориться заменой распределенных нагрузок, изображенных на рис. 17.4, равномерно распределенной средней интенсивностью (показанной на рисунке пунктиром).

При увеличении числа балок главного направления и уменьшении расстояния между ними [при $a/l \leqslant 0,1$ (a — расстояние между балками главного направления, l — длина балки главного на-

правления)] удовлетворительное приближение для значений изгибающих моментов и перерезывающих сил в поперечных сечениях балок можно получить, предполагая, что балками главного направления воспринимается вся внешняя нагрузка, действующая на заштрихованную полосу шириной a (см. рис. 17.2). Перекрестные

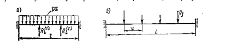


Рис. 17.5

связи считаются при этом загруженными только реакциями взаимодействия балок. Нагрузка балок, определенная в этом приближении, показана на рис. 17.5. Точность такого приближения тем выше, чем меньше отношение a/l.

Последний прием определения нагрузки на балки перекрытия широко используют в практических расчетах не только в случае нагружения перекрытия равномерным давлением, но и при действии других распределенных нагрузок (гидростатического напора; нагрузки, распределенной на части площади перекрытия, и т. п.).

§ 17.2. Изгиб перекрытий с небольшим числом балок

Перекрытия с небольшим числом (2—5) балок главного направления и одной или двумя перекрестными связями весьма часто встречаются в конструкциях корпуса нефтеналивных судов. В качестве примера рассмотрим днищевое перекрытие танкера с двумя продольными переборками (рис. 17.6). Опорный контур перекрытия образован двумя поперечными и двумя продольными переборками, а перекрытие — вертикальным килем и тремя одинаковыми флорами. Перекрытие предполагается нагруженным равномерно распределенным давлением. В силу особенностей конструкции и нагрузки все балки перекрытия можно считать жестко заделанными на опорах.

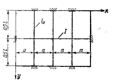


Рис. 17.6

При небольшом числе балок обоих направлений (небольшом числе узловых точек) за лишние неизвестные при раскрытии статической неопределимости удобно принять реакции взаимодействия балок. Необходимые уравнения следуют из условия равенства прогибов балок главного направления и перекрестных балок в узловых точках.

В данном случае имеется возможность выполнить анализ влияния двух допущений, упрощающих расчет перекрытия: допущения о возможности пренебрежения крутильной жесткостью балок; допущения о возможности отнесения всей внешней нагрузки к балкам главного направления (см. рис. 17.5). Выполним этот анализ путем последовательного изменения расчетной схемы.

Расчет перекрытия без учета жесткости балок на кручение при отнесении всей внешней нагрузки к балкам главного направления. Нагрузка балок главного направления и перекрестной связи показана на рис. 17.7, где принята во внимание симметрия устройства

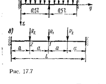


Рис. 17.7

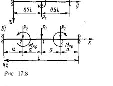


Рис. 17.8

и нагрузки перекрытия. Прогиб i-й балки главного направления в узловой точке определяется формулой

$$w_i = \beta pal^4/(Ei_0) - \gamma R_i l^3/(Ei_0), \qquad i = 1,\ 2, \tag{17.1}$$

где i — номер балки главного направления (средней балке приписан номер 1); β — коэффициент влияния распределенной нагрузки на прогиб в узловой точке; i_0 — момент инерции поперечного сечения; γ — коэффициент влияния сосредоточенной силы (реакции) на прогиб в узловой точке. Коэффициенты влияния определяют с помощью таблиц изгиба однопролетных балок. В рассматриваемом примере $\beta = 1/384 = 0{,}0026$; $\gamma = 1/192 = 0{,}0052$.

Прогиб перекрестной балки в точках *1* и *2* (рис. 17.7, *б*) равен

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \gamma_{11} R_1 L^3/(EI) + \gamma_{12} R_2 L^3/(EI);\\ w_2 &= \gamma_{21} R_1 L^3/(EI) + \gamma_{22} R_2 L^3/(EI). \end{aligned}\right\} \tag{17.2}$$

Здесь γ_{11} и γ_{21} — коэффициенты влияния силы R_1 на прогибы в точках *1* и *2* соответственно; L — длина перекрестной балки; I — момент инерции поперечного сечения перекрестной балки; $2\gamma_{12}$ и γ_{22} — коэффициенты влияния двух одинаковых симметрично приложенных сил R_2 на прогибы в точках *1* и *2*. Коэффициенты влияния на прогиб перекрестной связи также могут быть найдены по таблицам изгиба. Для рассматриваемого примера $\gamma_{11} = 0{,}0052$; $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0{,}0026$; $\gamma_{22} = 0{,}0033$.

Приравнивая прогибы балок главного направления и перекрестной связи в узловых точках, получим уравнения для определения реакций R_i:

$$\left.\begin{aligned} \left(\gamma_{11}\frac{L^3}{EI} + \gamma\frac{l^3}{Ei_0}\right) R_1 + \gamma_{12}\frac{2L^3}{EI} R_2 &= \beta\frac{al^4}{Ei_0}p;\\ \gamma_{21}\frac{L^3}{EI} R_1 + \left(\gamma_{22}\frac{L^3}{EI} + \gamma\frac{l^3}{Ei_0}\right) R_2 &= \beta\frac{al^4}{Ei_0}p. \end{aligned}\right\} \tag{17.3}$$

Для практического выполнения вычислений необходимо задать соотношения l/L и I/i_0. Примем для рассматриваемого примера $I/i_0 = 1{,}25$; $l/L = 1{,}0$ и приведем уравнения (17.3) к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} 1{,}17R_1 + 0{,}52R_2 &= 0{,}081pl^2;\\ 0{,}26R_1 + 0{,}976R_2 &= 0{,}081pl^2, \end{aligned}\right\} \tag{17.4}$$

откуда $R_1 = 0{,}036pl^2$; $R_2 = 0{,}073pl^2$.

Знание реакций позволяет произвести расчет параметров изгиба для любой балки перекрытия.

Расчет перекрытия с учетом влияния кручения балок. В рассматриваемом примере перекрестная балка и средняя балка главного направления расположены в плоскостях симметрии изогнутой поверхности перекрытия и не испытывают кручения. Закручиваться будут только первая и третья балки главного направления, и в соответствующих сечениях перекрестной связи появятся два одинаковых по значению реактивных момента $M_{кр}$. Нагрузка перекрестной связи и левой крайней балки главного направления при учете кручения балок показана на рис. 17.8.

Для составления уравнений, раскрывающих статическую неопределимость перекрытия, необходимо приравнять прогибы балок в узловых точках, а также угол поворота сечения перекрестной связи при $x = a$ углу закручивания соответствующей балки главного направления в сечении $y = l/2$.

Два первых уравнения вполне аналогичны уравнениям (17.3) с той лишь разницей, что прогибы перекрестной балки в узловых точках теперь зависят дополнительно еще и от момента $M_{кр}$:

$$\left.\begin{aligned} \left(\gamma_{11}\frac{L^3}{EI} + \gamma\frac{l^3}{Ei_0}\right) R_1 + \gamma_{12}\frac{2L^3}{EI} R_2 + \theta_1\frac{M_{кр}L^2}{EI} &= \beta\frac{pal^4}{Ei_0};\\ \gamma_{21}\frac{L^3}{EI} R_1 + \left(\gamma_{22}\frac{L^3}{EI} + \gamma\frac{l^3}{Ei_0}\right) R_2 + \theta_2\frac{M_{кр}L^2}{EI} &= \beta\frac{pal^4}{Ei_0}. \end{aligned}\right\} \tag{17.5}$$

Здесь θ_1 и θ_2 — коэффициенты влияния сосредоточенных моментов $M_{кр}$ на прогибы перекрестной связи в точках *1* и *2* соответственно (рис. 17.8, *б*).

Для получения третьего уравнения определяем угол поворота перекрестной балки в точке приложения $M_{кр}$:

$$w'_2 = \gamma'_{21} R_1 L^2/(EI) + \gamma'_{22} R_2 L^2/(EI) - \theta'_2 M_{кр} L/(EI), \tag{17.6}$$

где γ'_{21} и γ'_{22} — коэффициенты влияния сосредоточенных сил R_1 и R_2 на угол поворота перекрестной связи в сечении $x = a$; θ'_2 — коэффициент влияния сосредоточенного момента $M_{кр}$ на угол поворота перекрестной связи в сечении $x = a$.

Угол закручивания крайней балки главного направления, вызванный моментом $M_{кр}$ (см. рис. 17.8, *а*), можно найти по формуле

$$\varphi = M_{кр} l/(4C_{кр}). \tag{17.7}$$

Здесь $C_{кр}$ — жесткость балки главного направления на скручивание.

Приравнивая выражения (17.6) и (17.7), получаем

$$M_{кр} = (\gamma'_{21} R_1 + \gamma'_{22} R_2)\, L/[\theta'_2 + lEI/(4LC_{кр})]. \tag{17.8}$$

Коэффициент влияния θ'_2 — относительно небольшая величина (в рассматриваемом примере $\theta'_2 = 0{,}125$), поэтому $M_{кр}$, как следует из (17.8), оказывается обратно пропорциональным отношению

$$\alpha_{кр} = EI/C_{кр}. \tag{17.9}$$

Если балки имеют открытый профиль, что типично для подавляющего большинства конструкций нефтеналивных судов, то соотношение жесткостей на изгиб и кручение для судовых балок имеет порядок 10^4. Поэтому $M_{кр}$ составляет не более $10^{-3}(\gamma'_{21} R_1 + \gamma'_{22} R_2)\, L$. Как следует из уравнений (17.5), учет влияния кручения балок внесет в этом случае поправку в значения реакций R_1 и R_2, исчисляемую долями процента.

Из выполненного анализа следует, что учитывать кручение балок нужно в том случае, если порядок соотношения (17.9) не превосходит 10^2.

Расчет перекрытия с учетом влияния распределения нагрузки между балками главного направления и перекрестной связью. Оценим, насколько изменяется реакция взаимодействия балок перекрытия и параметры их изгиба при переходе к схеме определения нагрузок, показанной на рис. 17.4.

Имея в виду получение приближенных оценок, заменим действующие на балки распределенные по закону треугольника нагрузки равномерно распределенными средней интенсивности. При этом равномерную нагрузку балки главного направления (см. рис. 17.5, *а*) уменьшим на величину

$$\delta q = qa/l, \tag{17.10}$$

а к нагрузке перекрестной связи (рис. 17.5, *б*) добавим равномерную нагрузку

$$q_{ср} = q/2, \tag{17.11}$$

где $q = pa$. Соответственно изменятся формулы (17.1) и (17.2):

$$\left.\begin{aligned} w_i &= \beta p a l^4 (1 - a/l)/(Ei_0) - \gamma R_i l^3/(Ei_0), \quad i = 1,\ 2; \\ w_1 &= \gamma_{11} R_1 L^3/(EI) + 2\gamma_{12} R_2 L^3/(EI) + \alpha_1 L^4 pa/(2EI); \\ w_2 &= \gamma_{21} R_1 L^3/(EI) + \gamma_{22} R_2 L^3/(EI) + \alpha_2 L^4 pa/(2EI). \end{aligned}\right\} \tag{17.12}$$

Здесь α_1 и α_2 — коэффициенты влияния равномерной нагрузки $q_{ср}$ на прогиб перекрестной связи в соответствующих точках. Вместо уравнений (17.3) получим

$$\left.\begin{aligned} &\left(\gamma_{11}\frac{L^3}{EI} + \gamma\frac{l^3}{Ei_0}\right) R_1 + \gamma_{12}\frac{2L^3}{EI} R_2 = \\ &\quad = \beta\frac{al^4}{Ei_0} p\left[1 - \frac{a}{l} - \alpha_1\left(\frac{L}{l}\right)^4\frac{i_0}{I}\right]; \\ &\gamma_{21}\frac{L^3}{EI} R_1 + \left(\gamma_{22}\frac{L^3}{EI} + \gamma\frac{l^3}{Ei_0}\right) R_2 = \\ &\quad = \beta\frac{al^4}{Ei_0} p\left[1 - \frac{a}{l} - \alpha_2\left(\frac{L}{l}\right)^4\frac{i_0}{L}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{17.13}$$

Поправки на влияние распределения внешней нагрузки между балками главного направления и перекрестной связью определяются величинами, стоящими в квадратных скобках уравнений (17.13).

Поскольку величины α_i относительно малы (в рассматриваемом примере $\alpha_1 = 0{,}0026$, $\alpha_2 = 0{,}00143$), основной вклад в поправку вносит член $1 - 2a/l$. Пренебрегая в уравнениях (17.13) величинами, пропорциональными α_i, найдем, что реакции взаимодействия балок в рассматриваемом примере при учете перераспределения нагрузки уменьшаются на 25 % и составляют $R_1 = 0{,}025pl^2$; $R_2 = 0{,}0547pl^2$.

Оценим также изменения изгибающего момента в опорном сечении средней балки главного направления. При отнесении всей внешней нагрузки к балкам главного направления этот момент составляет $M_{оп} = pal^2/12 - R_1 l^2/8 = 0{,}0653pal^2$. При учете распределения нагрузки между балками по схеме, изображенной на рис. 17.4, он равен $M_{оп} = 0{,}049pal^2$.

Как видно из выполненного расчета, для перекрытия, показанного на рис. 17.6, переход от уточненного распределения нагрузки между балками главного направления и перекрестной связью (см. рис. 17.4) к упрощенному (см. рис. 17.5) приводит к существенной ошибке в значениях как реакции взаимодействия балок, так и параметров изгиба.

Основным параметром, от которого зависит погрешность, является

$$\chi_0 = na/l, \tag{17.14}$$

где n — число перекрестных связей.

Для перекрытий, близких к квадратным, значение χ_0 соизмеримо с относительным уменьшением как реакций взаимодействия балок, так и расчетного изгибающего момента средней балки главного направления в случае перехода от упрощенной схемы нагрузки к уточненной.

§ 17.3. Изгиб перекрытий с одной перекрестной связью и большим числом балок главного направления

В судовых конструкциях значительную долю составляют перекрытия, имеющие большое число балок главного направления (10 и более) и одну перекрестную связь.

Перекрытие с большим числом одинаковых балок главного направления. Рассмотрим прежде всего расчет перекрытия, имеющего большое число одинаковых равноотстоящих балок главного направления и одну призматическую перекрестную связь. Деформации сдвига на данном этапе учитывать не будем. Впервые и почти с исчерпывающей полнотой эта задача была решена И. Г. Бубновым [11]. Затем П. Ф. Папкович [36] внес в решение дополнения, распространив его на перекрытия, у которых некоторые из балок главного направления имеют измененную жесткость и иначе устроены на опорах.

Рис. 17.9

Как было показано в § 17.2, для перекрытий с большим числом балок главного направления можно без большой погрешности считать, что внешняя нагрузка воспринимается балками главного направления, а перекрестная связь загружена только реакциями взаимодействия балок (рис. 17.9).

Метод расчета перекрытий с большим числом балок главного направления основан на возможности замены сосредоточенных реакций R_j, действующих на перекрестную связь, непрерывной реактивной нагрузкой $r(x)$. Такая замена уже использовалась ранее при переходе от задач изгиба балок, опирающихся на независимые упругие опоры, к изгибу балок, лежащих на сплошном упругом основании (см. § 16.1). Погрешность при определении прогибов и изгибающих моментов балки в случае замены сосредоточенных сил R_j распределенной нагрузкой

$$r(x_j) = R_j/a \tag{17.15}$$

не превосходит величины $(a/L)^2$.

Заменив ступенчато-постоянную функцию (17.15) непрерывной $r(x)$, получим, что упругая линия перекрестной балки определяется дифференциальным уравнением

$$EIw^{\mathrm{IV}}(x) = r(x) \tag{17.16}$$

и, следовательно, любая реакция взаимодействия балок может быть найдена из зависимости

$$R_j = aEIw^{\mathrm{IV}}(x)|_{x=x_j}. \tag{17.17}$$

Рассмотрим балку главного направления, расположенную при $x = x_j$, и определим ее прогиб в узловой точке, т. е. при $y = c$:

$$w(x_j) = \beta(x_j)\, Q(x_j)\, l^3/(Ei_0) - \gamma R_j l^3/(Ei_0), \tag{17.18}$$

где $\beta(x_j)$ и γ — коэффициенты влияния на прогиб в узловой точке распределенной нагрузки $Q(x_j)$ и сосредоточенной реакции R_j. Остальные обозначения ясны из рис. 17.9.

Зависимость (17.18) определяет прогибы узловых точек всех балок главного направления. Эти прогибы должны быть равны прогибам перекрестной балки в сечениях $x = x_j$, поэтому можно воспользоваться зависимостью (17.17), с помощью которой из (17.18) найдем

$$w(x_j) + \gamma \frac{al^3}{Ei_0} EIw^{\mathrm{IV}}|_{x=x_j} = \beta(x_j) \frac{Q(x_j)\, l^3}{Ei_0}. \tag{17.19}$$

Уравнение (17.19) выполняется лишь в узловых точках $x = ja$. Учитывая, что число этих точек на длине перекрестной балки велико, распространим уравнение (17.19) на все значения x в интервале $0 \leqslant x \leqslant L$. Получим дифференциальное уравнение изгиба перекрестной балки

$$EIw^{\mathrm{IV}}(x) + kw(x) = q(x), \tag{17.20}$$

где

$$k = Ei_0/(a\gamma l^3); \tag{17.21}$$

$$q(x) = \beta(x)\, Q(x)/(\gamma a). \tag{17.22}$$

Вид уравнения (17.20) доказывает, что перекрестная связь представляет собой балку, лежащую на упругом основании. Упругое основание создается балками главного направления, причем жесткость любой из них в точке соединения с перекрестной связью равна $K = Ei_0/(\gamma l^3)$, деление которой на расстояние a между балками приводит к погонному коэффициенту жесткости упругого основания (17.21). Вместе с тем балки главного направления распределяют действующую на них нагрузку $Q(x_j)$ между опорами и перекрестной связью. Доля внешней нагрузки, приходящаяся на перекрестную связь, определяется выражением $P(x_j) = \beta(x_j) Q(x_j)/\gamma$, откуда и следует формула (17.22) для распределенной нагрузки перекрестной балки.

Подчиняя общий интеграл уравнения (17.20) граничным условиям, вытекающим из условий закрепления перекрестной балки, найдем уравнение ее упругой линии. После этого можно вычислить прогиб любой узловой точки и реакции взаимодействия балок:

$$R_i = ar(x_i) = aEIw^{IV}(x)|_{x=x_i} = a[q(x) - kw(x)]_{x=x_i}. \quad (17.23)$$

Параметры изгиба любой из балок главного направления определяются известными методами, как для изолированных призматических балок.

Перекрытия с большим числом балок главного направления, отдельные из которых усилены. В конструкциях бортовых перекрытий сухогрузных судов и судов ледового плавания, а также в конструкциях палуб применяют наряду с обычными так называемые рамные шпангоуты и бимсы, имеющие существенно увеличенную жесткость и иное закрепление опорных сечений, чем обычные (промежуточные) связи. Подобная система набора встречается и в днищевых перекрытиях, где бракетные флоры могут чередоваться со сплошными.

Рассмотрим перекрытие с большим числом балок главного направления и одной призматической перекрестной связью, считая, что некоторые балки главного направления имеют измененный момент инерции площади поперечного сечения и иные закрепления опорных сечений.

Стрелка прогиба обычной балки главного направления в точке пересечения ее с перекрестной балкой определяется выражением (17.1). По аналогии для измененной балки главного направления найдем

$$w_i = \beta^* Q(x_i) l^3/(Eni_0) - \gamma^* R_i^* l^3/(Eni_0), \quad (17.24)$$

где ni_0 — момент инерции измененной балки; R_i^* — реакция перекрестной балки в месте пересечения с измененной балкой главного направления.

Воспользовавшись формулами (17.18) и (17.24), определим приращение реакции перекрестной связи, вызванное изменением момента инерции и условий закрепления соответствующей балки главного направления:

$$\Delta R = R_i^* - R_i = (\beta^*/\gamma^* - \beta/\gamma) Q(x_i) - (\gamma n/\gamma^* - 1) Ei_0 w_i/(\gamma l^3). \quad (17.25)$$

Как видно из выражения (17.25), наличие измененной балки главного направления можно учесть путем приложения к перекрестной связи сосредоточенной силы

$$P = \beta^* Q(x_i)/\gamma^* \quad (17.26)$$

и установки упругой опоры жесткостью

$$K = (\gamma n/\gamma^* - 1) Ei_0/(\gamma l^3) \quad (17.27)$$

в месте пересечения ее с измененной балкой главного направления.

§ 17.4. Анализ изгиба перекрытия с одной перекрестной связью

Судовые перекрытия представляют собой статически неопределимые стержневые системы, для проектирования которых необходимо понимание особенностей взаимодействия балок, зависимости параметров их изгиба от соотношения жесткостей, длин и т. п. Наиболее целесообразно выяснение этих вопросов на примере простейшего перекрытия с одной призматической перекрестной связью и большим числом одинаковых балок главного направления. Наибольший интерес представляет анализ изгиба перекрытия, нагруженного равномерно распределенным давлением p. Рассмотрим перекрытие с одной перекрестной связью, пересекающей балки главного направления посередине их длины.

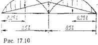


Рис. 17.10

Будем считать балки главного направления свободно опертыми в концевых сечениях, а перекрестную связь упруго заделанной по концам с одинаковым коэффициентом опорной пары $\varkappa$.

При расчетах прочности необходимо установить, в какой из балок главного направления и в каком ее сечении действуют наибольший изгибающий момент и наибольшая перерезывающая сила. В рассматриваемом случае балки главного направления нагружены равномерно распределенной нагрузкой $q_0 = pa$ и реакциями перекрестной балки

$$R = a[q - kw(x)], \quad (17.28)$$

где q — нагрузка перекрестной связи; $w(x)$ — упругая линия этой связи.

При известной реакции R изгибающий момент может быть найден в любом сечении балки главного направления. Из эпюры изгибающего момента, показанной на рис. 17.10 следует, что для практики достаточно ограничиться анализом значений изгибающего момента посередине пролета балки и в сечении, отстоящем от опоры на $l/4$. Эти величины составляют соответственно

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= -pal^2/8 + Rl/4; \\ m_{пр} &= m_0/2 - pal^2/32 = -3pal^2/32 + Rl/8. \end{aligned}\right\} \quad (17.28')$$

Из выражений (17.28') следует, что $m_0 > m_{пр}$, если $R > pal^2/4$, и наоборот.

Таким образом, значение изгибающего момента и положение сечения балки главного направления, где действует наибольший изгибающий момент, зависят от значения реакции R. В соответствии с (17.28) реакция взаимодействия балок достигает наибольшего значения в сечении, где $w(x)$ близко к нулю (вблизи опор), и минимального там, где прогиб перекрестной связи наибольший.

Как показано в § 17.3, перекрестная связь представляет собой балку, лежащую на сплошном упругом основании, жесткостью

$$k = Ei/(\gamma a l^3), \tag{17.29}$$

нагруженную в рассматриваемом случае равномерной нагрузкой

$$q = \beta q_0 l/(\gamma a) = \beta p l/\gamma. \tag{17.30}$$

Для балки на упругом основании, нагруженной равномерной нагрузкой, прогиб посередине пролета либо равен максимальному значению, либо близок к нему (при высокой жесткости упругого основания). Поэтому минимальное значение реакции взаимодействия определяется зависимостью

$$R = R_{\min} = a\,[q - kw\,(0)], \tag{17.31}$$

где $w(0)$ — прогиб посередине пролета перекрестной связи (начало координат системы $x = 0$ располагаем в центре перекрытия).

Используя формулу (16.76) при $B = B_1 = 0$, найдем реакцию на среднюю балку главного направления

$$R_{\min} = qa\,[1 - \varkappa)\,\varphi_0(u) + \varkappa\varphi_1(u)]. \tag{17.32}$$

В задаче определения изгиба перекрытий аргумент u функций И. Г. Бубнова $\varphi_0(u)$ и $\varphi_1(u)$ находят по следующей формуле:

$$u = \sqrt[4]{kL^4/(64EI)} = (L/l)\sqrt[4]{i_0 l/(64\gamma I a)}. \tag{17.33}$$

Максимального значения реакция достигает в точке пересечения крайней балки главного направления с перекрестной связью. Прогиб перекрестной балки при $x = \pm L/2$ вблизи опоры пренебрежимо мал, поэтому

$$R_{\max} = qa. \tag{17.34}$$

При $u = 0$, т. е .в соответствии с (17.33) при бесконечно большой жесткости перекрестной связи ($I \to \infty$) все балки главного направления оказываются в одинаковых условиях, и из (17.32) следует (17.34). Поэтому достаточно выполнить анализ изменения реакции и изгибающих моментов при изменении аргумента u для средней балки главного направления, поскольку при $u = 0$ значения этих параметров становятся такими же, как у крайней балки.

Для рассматриваемого перекрытия по таблицам изгиба балок находим $\beta = 5/384$; $\gamma = 1/48$, следовательно

$$q = 5pl/8. \tag{17.35}$$

Подставляя (17.35) в (17.32) и (17.28′), находим для средней балки главного направления

$$\left.\begin{aligned} R &= (5pal/8)\,[(1 - \varkappa)\,\varphi_0(u) + \varkappa\varphi_1(u)];\\ m_0 &= (pal^2/32)\,[5\,(1 - \varkappa)\,\varphi_0(u) + 5\varkappa\varphi_1(u) - 4];\\ m_{\text{пр}} &= (pal^2/64)\,[5\,(1 - \varkappa)\,\varphi_0(u) + 5\varkappa\varphi_1(u) - 6]. \end{aligned}\right\} \tag{17.36}$$

В формулах (17.36) множители перед квадратной скобкой представляют собой значения реакции, опорного и пролетного изгибающих моментов для крайней балки главного направления. Функции аргумента u, стоящие в квадратных скобках, характеризуют зависимость соответствующих параметров от относительной жесткости перекрестной связи.

На рис. 17.11 приведены кривые изменения безразмерных параметров $\bar{R} = 8R/(5pal)$; $\bar{m}_0 = 32m_0/(pal^2)$; $\bar{m}_{\text{пр}} = 32m_{\text{пр}}/(pal^2)$ в функции от аргумента u для перекрытия, у которого $\varkappa = 0{,}75$. Как следует из рассмотрения кривых, можно выделить четыре характерных диапазона изменений аргумента u:

1) при $u < 0{,}95$ жесткость перекрестной связи относительно велика, и наибольшим оказывается изгибающий момент в узловом сечении крайней балки главного направления;

2) при $0{,}95 \leqslant u \leqslant 1{,}5$ уменьшение реакции, действующей на среднюю балку главного направления, достигает таких значений, что наибольшим становится изгибающий момент $m_{\text{пр}}$ в ее пролете;

3) при $1{,}5 < u < 2{,}1$ перекрестная связь относительно слабая и расчетным становится изгибающий момент в узловом сечении средней балки главного направления;

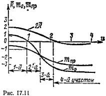


Рис. 17.11

4) при $u \geqslant 2{,}1$ реакция, действующая на среднюю балку главного направления, становится отрицательной; это означает, что перекрестная связь не только не поддерживает среднюю балку, но дополнительно ее нагружает, поэтому установка слабой перекрестной связи приведет к перекрытию, нагруженному равномерным давлением, к необходимости усиливать балки главного направления по сравнению с конструкцией, в которой перекрестная связь отсутствует полностью; однако даже слабая перекрестная связь может оказаться весьма полезной при воздействии на перекрытия сосредоточенных нагрузок, происходящие которых может быть связано с воздействием льда, усилий при швартовках, посадках на мель и т. п.

Разгружающее влияние перекрестной балки оказывается особенно сильным, если сосредоточенная сила приложена вблизи узлового сечения балки главного направления.

Выполненный анализ надо рассматривать как качественный, и не следует ориентироваться на полученные граничные значения аргумента u, поскольку они относятся к конкретному перекрытию. Однако он показывает, что для решения вопросов прочности балок главного направления необходимо построить эпюры изгибающих моментов для средней и крайней балок и по ним определить расчетный изгибающий момент.

Изгибающие моменты и перерезывающие силы в перекрестной связи рассматриваются известными методами, как в балке, лежащей на сплошном упругом основании.

§ 17.5. Изгиб перекрытий с несколькими перекрестными связями и большим числом балок главного направления

Метод главных изгибов. Рассмотрим перекрытие, имеющее большое число одинаковых балок главного направления и несколько перекрестных связей (рис. 17.12). Перекрестные связи считаем призматическими, имеющими различные моменты инерции поперечных сечений I_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Будем полагать, что внешняя нагрузка полностью воспринимается балками главного направления, перекрестные связи нагружены лишь реакциями взаимодействий балок.

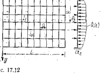


Рис. 17.12

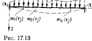


Рис. 17.13

Для произвольной балки главного направления определим прогиб в i-й узловой точке:

$$w_i = \beta_i(x)\frac{Q(x)\,l^3}{Ei_0} - \frac{l^3}{Ei_0}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}R_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{17.37}$$

где $\beta_i(x)$ — коэффициент влияния нагрузки $Q(x)$ на прогиб балки главного направления в i-й точке; γ_{ij} — коэффициент влияния j-й реакции на прогиб балки главного направления в i-й точке; n — число перекрестных связей. Остальные обозначения ясны из рис. 17.12.

Значения коэффициентов β_i и γ_{ij} зависят от устройства опор балки главного направления, вида распределенной нагрузки $Q(x)$, расположения узловых точек. Определение этих коэффициентов, как правило, можно выполнить по таблицам изгиба балок. В некоторых, особенно сложных случаях необходимо найти упругую линию изолированной балки главного направления (рис. 17.13).

По условию число балок главного направления велико, что позволяет действующие на j-ю перекрестную связь реакции заменить распределенной нагрузкой $r_j(x) = R_j(x)/a$. Следовательно, упругая линия любой перекрестной балки определяется дифференциальным уравнением

$$EI_j w_j^{\mathrm{IV}}(x) = R_j(x)/a. \tag{17.38}$$

Прогибы перекрестных балок и балок главного направления в узловых точках совпадают. Это позволяет в результате подстановки уравнения (17.38) в формулу (17.37) и распространения полученных равенств на любое значение x получить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$w_i(x) = \beta_i(x)\frac{Q(x)\,l^3}{Ei_0} - \frac{al^3}{Ei_0}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}EI_j w_j^{\mathrm{IV}}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{17.39}$$

Система уравнений (17.39), впервые полученная И. Г. Бубновым, описывает изгиб всех перекрестных связей перекрытия. Ее интегрирование возможно с помощью известных методов решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, например с использованием подстановки Эйлера. Однако это приводит при $n > 2$ к весьма сложным расчетам при определении произвольных постоянных.

Более рационален другой путь. С помощью замены переменных систему (17.39) можно преобразовать в систему, состоящую из независимых друг от друга дифференциальных уравнений, в каждое из которых входит лишь одна переменная. Таких подстановок известно две: подстановка Даламбера и подстановка Лагранжа. И. Г. Бубнов использовал для интегрирования системы (17.39) подстановку Даламбера, П. Ф. Папкович — подстановку Лагранжа. Более удобной является подстановка Лагранжа, которой и воспользуемся ниже:

$$w_i(x) = \frac{I_0}{I_i}\sum_{k=1}^{n}\nu_{ik}p_k(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{17.40}$$

где I_0 — некоторая постоянная величина, имеющая размерность момента инерции; ν_{ik} — неизвестные пока коэффициенты; $p_k(x)$ — функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнению изгиба балки, лежащей на упругом основании,

$$EI_0 p_k^{\mathrm{IV}}(x) + k_k p_k(x) = q_k(x), \tag{17.41}$$

в котором постоянная k_k и функция $q_k(x)$ подлежат определению.

Функции $p_k(x)$ были названы П. Ф. Папковичем *главными изгибами*, а коэффициенты ν_{ik} — *формами главных изгибов*.

Так как на основании выражений (17.40) и (17.41)

$$EI_i w_i^{\mathrm{IV}}(x) = EI_0\sum_{k=1}^{n}\nu_{ik}p_k^{\mathrm{IV}}(x) = \sum_{k=1}^{n}\nu_{ik}\left[q_k(x) - k_k p_k(x)\right], \tag{17.42}$$

то подставляя выражения (17.40) и (17.42) в систему (17.39), получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\nu_{ik}\frac{I_0}{I_i}-\frac{al^3k_k}{EI_0}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\nu_{jk}\right]p_k(x)=\beta_i\frac{Q(x)\,l^3}{EI_0}-\frac{al^3}{EI_0}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\sum_{k=1}^{n}\nu_{jk}q_k(x). \tag{17.43}$$

Воспользовавшись произвольностью коэффициентов ν_{jk}, определим их из условия обращения в нуль всех квадратных скобок в левой части полученной системы уравнений:

$$\nu_{ik}\frac{I_0}{I_i}\lambda_k=\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\nu_{jk},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{17.44}$$

где

$$\lambda_k=EI_0/(al^3k_k), \tag{17.45}$$

или

$$k_k=EI_0/(al^3\lambda_k). \tag{17.46}$$

Система алгебраических уравнений (17.44) может иметь решение, отличное от нуля, при условии равенства нулю основного определителя системы:

$$\begin{vmatrix}\gamma_{11}-I_0\lambda_k/I_1 & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}-I_0\lambda_k/I_2 & \ldots & \gamma_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \gamma_{nn}-I_0\lambda_k/I_n\end{vmatrix}=0. \tag{17.47}$$

Так как коэффициенты влияния γ_{ij} обладают свойством взаимности, т. е.

$$\gamma_{ij}=\gamma_{ji}, \tag{17.48}$$

приводящим к симметрии элементов матрицы определителя (17.47) относительно главной диагонали, уравнение (17.47) имеет n вещественных положительных корней $\lambda_k (k=1, 2, \ldots, n)$. Зная λ_k, по формуле (17.46) определяем $k_k (k=1, 2, \ldots, n)$.

Поскольку определитель системы однородных уравнений (17.44) равен нулю, формы главных изгибов ν_{ik} могут быть найдены с точностью до произвольного сомножителя, который обычно выбирается так, чтобы $\nu_{kk}=1$, если только $\nu_{kk}\neq 0$. Короче говоря, полагаем $\nu_{kk}=1$, отбрасываем одно из уравнений системы (17.44), подставляем в остальные значение корня λ_k и определяем формы главных изгибов $\nu_{ik} (i, k=1, 2, \ldots, n)$.

Формы главных изгибов ν_{ik} обладают так называемым свойством ортогональности. Приводим его без доказательства:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{I_0}{I_i}\nu_{ik}\nu_{ir}=0\quad\text{при}\quad r\neq k. \tag{17.49}$$

Найденные значения для форм главных изгибов ν_{ik} обращают в нуль квадратные скобки левой части уравнений (17.43). В результате упомянутые уравнения упрощаются и принимают такой вид:

$$\sum_{k=1}^{n}q_k(x)\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\nu_{jk}=\beta_iQ(x)/a,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{17.50}$$

или, если воспользоваться зависимостью (17.44),

$$\sum_{k=1}^{n}q_k(x)\,\nu_{ik}\frac{I_0}{I_i}\lambda_k=\beta_i\frac{Q(x)}{a},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{17.51}$$

Для определения функций $q_k(x)$ умножим i-е уравнение (17.51) на ν_{ir} и просуммируем по всем значениям i. Получим

$$\sum_{k=1}^{n}q_k(x)\,\lambda_k\sum_{i=1}^{n}\frac{I_0}{I_i}\nu_{ik}\nu_{ir}=\frac{Q(x)}{a}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\nu_{ir},$$

откуда на основании условия ортогональности (17.49) следует

$$q_k(x)=Q(x)\sum_{i=1}^{n}\beta_i\nu_{ik}\bigg/\left(a\lambda_k\sum_{i=1}^{n}\frac{I_0}{I_i}\nu_{ik}^2\right). \tag{17.52}$$

Итак, значения постоянных k_k и функций $q_k(x)$ уравнений (17.41) найдены. Чтобы получить возможность определить из этих уравнений главные изгибы, необходимо располагать граничными условиями для функций $p_k(x)$.

Выразим предварительно функции $p_k(x)$ через перемещения $w_i(x)$, воспользовавшись свойством ортогональности форм главных изгибов.

Умножив выражения (17.40) на ν_{ir} и просуммировав по всем i, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\nu_{ir}w_i(x)=\sum_{k=1}^{n}p_k(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{I_0}{I_i}\nu_{ik}\nu_{ir}.$$

Отсюда, воспользовавшись условием ортогональности (17.49), найдем

$$p_k(x)=\sum_{i=1}^{n}\nu_{ik}w_i(x)\bigg/\sum_{i=1}^{n}\frac{I_0}{I_i}\nu_{ik}^2. \tag{17.52'}$$

Дифференцируя результат (7.52'), нетрудно получить выражения для производных $p'_k(x)$, p''_k и p'''_k.

В общем случае, когда опорные сечения перекрестных балок упруго заделаны или упруго оперты, невозможно воспользоваться формулой (17.52') для определения граничных условий функции $p_k(x)$ по заданным граничным условиям для функций $w_i(x)$.

Если же все перекрестные связи заделаны одинаково, то главные изгибы в граничных условиях не будут связаны между собой, и постоянные интегрирования в каждом главном изгибе могут быть определены из своей системы уравнений.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Все перекрестные связи свободно оперты на жесткие опоры. В этом случае при $x=0$ и $x=L$ $w_i=0$ и $w_i''=0$. Подставляя эти значения в выражение (17.52′) и в формулу для $p_k''(x)$, находим

$$p_k(0)=p_k(L)=0; \quad p_k''(0)=p_k''(L)=0. \tag{17.53}$$

Все перекрестные связи жестко заделаны на жестких опорах. Для такого перекрытия $w_i(0)=w_i(L)=0$; $w_i'(0)=w_i'(L)=0$. На основании формулы (17.52′)

$$p_k(0)=p_k(L)=0; \quad p_k'(0)=p_k'(L)=0. \tag{17.54}$$

Все перекрестные связи свободно оперты на независимые упругие опоры, жесткость которых пропорциональна жесткости поддерживаемых балок. В этом случае функции $p_k(x)$ в граничных условиях не будут связаны. Докажем это. Пусть при $x=L$ перекрестные связи свободно оперты на упругие опоры указанного типа. Тогда

$$\text{при } x=L \quad \left.\begin{aligned} w_i &= A_i EI_i w_i'''; \\ w_i'' &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{17.55}$$

где A_i — коэффициент податливости опоры i-й перекрестной связи. Но так как по условию $EI_i : \frac{1}{A_i} = AEI_0$, ($AI_0$ — постоянная величина, не зависящая от индекса i), первое из условий (17.55) примет вид

$$w_i = AEI_0 w_i'''. \tag{17.56}$$

Подставив сюда выражение (17.40), получим

$$\frac{I_0}{I_i}\sum_{k=1}^{n} \nu_{ik} p_k(L) = AEI_0 \frac{I_0}{I_i}\sum_{k=1}^{n} \nu_{ik} p_k'''(L).$$

Умножив обе части этого равенства на ν_{ir}, просуммировав по всем i и воспользовавшись условием ортогональности (17.49), будем иметь

$$p_k(L) = AEI_0 p_k'''(L). \tag{17.57}$$

Нетрудно показать (представляем это читателю), что в том случае, когда все перекрестные связи упруго заделаны на жестких опорах, причем коэффициенты жесткости заделки пропорциональны жесткости соответствующей перекрестной связи, т. е.

$$EI_i \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A} EI_0 = \text{const}, \tag{17.58}$$

функции $p_k(x)$ в граничных условиях разделяются. Граничные условия в этом случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned} p_k' &= \mathfrak{A} EI_0 p_k'' = 0; \\ p_k &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17.59}$$

Перечислим в заключение последовательность вычислительных операций при расчете перекрытия по методу главных изгибов.

1. В зависимости от закона изменения внешней нагрузки, воспринимаемой балками главного направления, устройства их опор и расположения узловых точек определяют коэффициенты влияния на прогиб в узловых точках β_i от распределенной нагрузки и γ_{ij} от реакций перекрестных связей.
2. Из решения характеристического уравнения (17.47) находят корни λ_k $(k=1, 2, \ldots, n)$.
3. Для каждого найденного значения λ_k из системы уравнений (17.44) определяют соответствующие этому корню формы главных изгибов $\nu_{1k}, \nu_{2k}, \ldots, \nu_{nk}$ при условии $\nu_{kk}=1$ (если $\nu_{kk}\neq 0$). После этого полезно проверить правильность вычисления ν_{ik} путем проверки выполнения условий ортогональности (17.49).
4. По формулам (17.46) и (17.52) рассчитывают коэффициент жесткости упругого основания k_k и интенсивность поперечной нагрузки $q_k(x)$ для каждого главного изгиба.
5. Из условий закрепления концевых сечений перекрестной связи определяют граничные условия для главных изгибов $p_k(x)$.
6. Из дифференциальных уравнений (17.41), дополненных соответствующими граничными условиями, находят главные изгибы $p_k(x)$.
7. С помощью формулы (17.40) определяют упругие линии и другие параметры изгиба перекрестных связей.
8. Выделяют характерные балки главного направления (при одинаковой нагрузке балок — среднюю и крайнюю балки главного направления) и для них строят эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов.

Отметим некоторые особенности метода главных изгибов, которые необходимо учесть при практическом расчете перекрытий:

а) вычисление коэффициентов влияния β_i, γ_{ij}, а также чисел λ_k должно выполняться с большой степенью точности, так как определение форм главных изгибов ν_{ik} из системы однородных уравнений (17.44) и значений q_k по формуле (17.52′) связано с вычислением малых разностей близких величин;

б) обычно нет необходимости определять все функции $p_k(x)$; достаточная для практических целей точность может быть достигнута при сохранении в зависимости (17.40) двух или трех главных изгибов, соответствующих наибольшим значениям чисел λ_k;

в) учет симметрии в нагрузке и конструкции перекрытия приводит к значительному снижению трудоемкости расчета, так как позволяет ограничиться рассмотрением половины перекрытия.

Укажем на некоторые особенности вычисления коэффициентов влияния γ_{ij} для симметричных перекрытий. Коэффициенты влияния γ_{ij} можно определять для половины балки главного направления, считая угол поворота и перерезывающую силу на оси симметрии равными нулю. Однако то же значение коэффициентов получится, если рассматривать всю балку главного направления и определять прогиб в i-й узловой точке от двух единичных сил, приложенных симметрично относительно середины пролета в j-м сечении. При этом нумерацию узловых точек балки главного направления следует производить, начиная от ближайших к середине пролета и присваивая симметричным точкам одинаковые номера. Если число перекрестных связей в симметричном перекрытии нечетное, то одна из узловых точек балки главного направления лежит на оси симметрии. Этой точке следует присвоить номер 1, и приложить в ней две единичных силы. Одновременно в расчетах необходимо принимать среднюю перекрестную балку состоящей из двух балок половинной жесткости.

Пример 8. Рассчитать перекрытие (рис. 17.14), имеющее три симметрично расположенных перекрестных связи, жестко заделанных по концам на непроседающих опорах. Балки главного направления свободно оперты по концам, нагрузка на перекрытие — равномерно распределенное давление p.

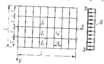


Рис. 17.14

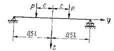


Рис. 17.15

Решение. Введем следующие обозначения: I_1, I_2 — моменты инерции средней и крайних перекрестных балок; i_0 — момент инерции балок главного направления. Положим $I_1 = 2I_0$; $I_2 = I_0$; $i_0 = 0{,}5I_0$; $L = 1{,}5l$; $a = L/8$, $c = l/4$. Покажем, как выполняется расчет перекрытия, следуя оговоренной выше его последовательности.

Определение коэффициентов влияния. В рассматриваемом примере нагрузка на перекрытие не изменяется в зависимости от координаты x, поэтому все балки главного направления нагружены одинаковой равномерно распределенной нагрузкой, сумма которой составляет $Q = pal$.

Упругая линия свободно опертой балки, нагруженной равномерной нагрузкой (начало координат посередине пролета), описывается выражением

$$w(y) = \frac{ql^4}{24Ei_0}\left[\left(\frac{y}{l}\right)^4 - \frac{3}{2}\left(\frac{y}{l}\right)^2 + \frac{5}{16}\right] = \frac{\beta(y)\,Ql^3}{Ei_0}, \tag{17.60}$$

откуда

$$\beta_i = \beta(y_i) = \frac{1}{24}\left[\left(\frac{y_i}{l}\right)^4 - \frac{3}{2}\left(\frac{y_i}{l}\right)^2 + \frac{5}{16}\right]. \tag{17.61}$$

Положив $y_1 = 0$; $y_2 = l/4$, получим $\beta_1 = 5/384$; $\beta_2 = 19/2048$.

Для определения коэффициентов γ_{ij} рассмотрим свободно опертую балку, нагруженную симметрично двумя сосредоточенными силами, отстоящими на расстоянии c от середины пролета (рис. 17.15). Упругая линия такой балки определяется выражением

$$w(y) = \frac{Pl^3}{Ei_0}\,\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{c}{l}\right)\left[\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{l}\right)^2\right] - 3\left(\frac{y}{l}\right)^2\left(1 - \frac{c}{l}\right) + \frac{(y-c)^3}{l^3}\,\sigma(y-c)\right\}. \tag{17.62}$$

Из зависимости (17.62) следует

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{c_j}{l}\right)\left[\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{c_j}{l}\right)^2\right] - 3\left(\frac{y_i}{l}\right)^2\left(1 - \frac{c_j}{l}\right) + \frac{(y_i - c_j)^3}{l^3}\,\sigma(y_i - c_j)\right\}. \tag{17.63}$$

Придавая y_i и c_j значения, соответствующие положениям узловых точек, получаем $\gamma_{11} = 1/24$; $\gamma_{12} = 11/384$; $\gamma_{21} = 11/384$; $\gamma_{22} = 1/48$.

Определение характеристических чисел λ_k. Подставляя значения γ_{ij} в определитель (17.47) при $n = 2$, находим

$$\begin{vmatrix} 1/24 - \lambda_k & 11/384 \\ 11/384 & 1/48 - \lambda_k \end{vmatrix} = 0. \tag{17.64}$$

Заметим, что в рассматриваемом перекрытии средняя перекрестная балка лежит на оси симметрии. Поэтому используется представление ее в виде двух балок половинной жесткости, т. е. в определитель (17.47) вместо I_1 подставлены $I_1^* = I_1/2$.

В развернутом виде (17.64) представляет собой квадратное уравнение

$$\lambda_k^2 - 62{,}5\cdot 10^{-3}\lambda_k + 47{,}5\cdot 10^{-6} = 0, \tag{17.65}$$

откуда $\lambda_1 = 61{,}71\cdot 10^{-3}$; $\lambda_2 = 0{,}79\cdot 10^{-3}$.

Определение форм главных изгибов v_{ik}. Система уравнений (17.44) при $n = 2$ принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &(\gamma_{11} - I_0\lambda_k/I_1)\,v_{1k} + \gamma_{12}v_{2k} = 0; \\ &\gamma_{21}v_{1k} + (\gamma_{22} - I_0\lambda_k/I_2)\,v_{2k} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17.66}$$

Поскольку определитель системы (17.66) равен нулю, одно из ее уравнений есть следствие другого. Поэтому, подставляя в ее первое уравнение $\lambda_k = \lambda_1$ и полагая $v_{11} = 1$, находим $v_{21} = 0{,}7$. Из ее второго уравнения при $\lambda_k = \lambda_2$, $v_{22} = 1$ следует, что $v_{12} = -0{,}7$.

Определение коэффициентов жесткости k_k, нагрузок q_k и функций главных изгибов $p_k(x)$. По формулам (17.46) и (17.52′) находим $k_1 = 16{,}2Ei_0/(al^3)$; $k_2 = 1265Ei_0/(al^3)$; $q_1 = 0{,}212Q/a$; $q_2 = 0{,}124Q/a$.

При жесткой заделке перекрестных балок на непроседающих опорах граничные условия для главных изгибов имеют вид (17.54): $p_k(\pm L/2) = p_k'(\pm L/2) = 0$.

Таким образом, каждая из функций $p_k(x)$ представляет собой упругую линию жестко заделанной по концам балки, лежащей на упругом основании жесткостью k_k и нагруженной равномерной нагрузкой интенсивностью q_k. Для определения $p_k(x)$, а также параметров изгиба в характерных сечениях перекрестных балок (например, при $x = 0$ и $x = \pm L/2$) можно воспользоваться формулами И. Г. Бубнова для балок на упругом основании.

Определение параметров изгиба перекрестных балок и реакций взаимодействия. Не останавливаясь на результатах вычислений, приведем только формулы для расчета параметров изгиба перекрестных балок и реакций их взаимодействия со средней и крайней балками главного направления.

Используя формулы И. Г. Бубнова, в соответствии с (17.40) найдем:
а) прогибы посередине пролета перекрестных балок

$$w_i(0) = \frac{I_0}{I_i} \sum_{k=1}^{2} \nu_{ik} p_k(0) = \frac{I_0}{I_i} \sum_{k=1}^{2} \nu_{ik} \frac{q_k}{k_k} [1 - \varphi_1(u_k)], \qquad (17.67)$$

где $\varphi_1(u_k)$ — вспомогательная функция И. Г. Бубнова;

$$u_k = (L/2)\sqrt[4]{k_k/(4EI_0)} = (L/l)\sqrt[4]{i_0 l/(64\lambda_k I_0 a)}; \qquad (17.68)$$

заметим, что при $i = 1$ вместо I_1 в формулу (17.67) следует подставлять $I_1^* = I_1/2$;

б) изгибающие моменты посередине пролета перекрестных балок

$$M_i(0) = EI_i w''(0) = \sum_{k=1}^{2} \nu_{ik} EI_0 p_k''(0) = -\sum_{k=1}^{2} \nu_{ik} \frac{q_k L^2}{24} \chi_1(u_k); \qquad (17.69)$$

в) изгибающие моменты в опорных сечениях перекрестных балок

$$M_i\left(\frac{L}{2}\right) = \sum_{k=1}^{2} \nu_{jk} \frac{q_k L^2}{12} \chi_2(u_k); \qquad (17.70)$$

г) реакцию, действующую на среднюю балку главного направления со стороны j-й перекрестной связи

$$R_j(0) = a \sum_{k=1}^{2} \nu_{jk} q_k \varphi_1(u_k); \qquad (17.71)$$

ф) реакцию, действующую на крайнюю балку, главного направления со стороны j-й перекрестной связи

$$R_j\left(\frac{L}{2}\right) = a \sum_{k=1}^{2} \nu_{jk} q_k. \qquad (17.72)$$

Вспомогательные функции φ_1, χ_1, χ_2 определяют по таблице 16.1 в зависимости от значений аргумента u_k.

Как известно, функции И. Г. Бубнова с ростом аргумента u_k быстро убывают. Анализируя результаты вычислений коэффициентов жесткости k_k, видим, что соотношение аргументов u_2 и u_1 составляет в рассматриваемом примере $u_2/u_1 = \sqrt[4]{86{,}419} = 3{,}05$. Увеличение аргумента u_2 более чем в 3 раза по сравнению с u_1 приведет к существенному уменьшению значения второго члена ряда по сравнению с первым в выражениях для параметров изгиба перекрестных балок. Исключение составляет лишь выражение (17.72), где первый и второй члены суммы соизмеримы.

§ 17.6. Учет влияния деформаций сдвига при расчете перекрытий

Учет деформаций сдвига может иметь существенное значение при расчете днищевых перекрытий, балки которых вследствие наличия вырезов в стенках и применения бракетных флоров могут иметь относительно низкую жесткость на сдвиг. Поскольку речь идет главным образом о днищевых конструкциях судов с двойным дном, ограничимся рассмотрением перекрытий с большим числом

балок главного направления и одной или несколькими перекрестными связями.

Деформации сдвига необходимо учитывать как при определении коэффициентов влияния на прогиб в узловых точках балок главного направления, так и при расчете упругих линий перекрестных связей.

Рассмотрим перекрытие с одной перекрестной связью, показанное на рис. 17.9. Для определения прогиба балки посередине пролета при учете влияния сдвига можно использовать вместо выражения (17.18) зависимость

$$w(x_j) = \beta(x_j) s_q Q l^3/(Ei_0) - \gamma s_R R_j l^3/(Ei_0), \qquad (17.73)$$

где s_q — поправка на сдвиг при действии распределенной нагрузки; s_R — то же при действии сосредоточенной силы.

Значения s_q и s_R можно определить с помощью известных методов расчета прогибов балок с учетом сдвига. Например, при равномерной нагрузке на перекрытие и расположении перекрестной связи посередине пролета балок главного направления (при $c = 0{,}5l$)

$$\left.\begin{aligned} s_q &= 1 + 48Ei_0/[(5 - 4\varkappa) G\omega_0 l^2]; \\ s_R &= 1 + 60Ei_0/[(5 - 4\varkappa) G\omega_0 l^2]. \end{aligned}\right\} \qquad (17.74)$$

Здесь $\varkappa$ — коэффициент опорной пары упругой заделки; ω_0 — площадь стенки балки главного направления. Используя выражение (17.73) вместо (17.18), найдем, что при учете сдвига балок главного направления изменяется нагрузка перекрестной связи и коэффициент жесткости упругого основания:

$$q(x) = \beta s_q Q/(\gamma s_R a); \quad k = Ei_0/al^3\gamma s_R. \qquad (17.75)$$

Из формул (17.75) вытекает, что в тех случаях, когда поправки на сдвиг к прогибу умеренны и не превосходят 20—30 % от прогибов, вызванных изгибом, сдвиг в балках главного направления можно не учитывать. Это обусловлено тем, что отношение s_q/s_R близко к единице, а изменение жесткости упругого основания не может существенно изменить параметры изгиба перекрестной балки.

Учет влияния сдвига в перекрестной связи приводит к необходимости интегрирования дифференциального уравнения [см. уравнение (16.134)]

$$EIw_1^{\mathrm{IV}}(x) - EIkw_1''(x)/(G\Omega) + kw_1(x) = q(x), \qquad (17.76)$$

где $w_1(x)$ — упругая линия перекрестной связи, обусловленная изгибом; Ω — площадь стенки перекрестной связи.

Далее по формуле (16.133) определяют прогиб перекрестной связи от сдвига:

$$w_2(x) = -EIw''(x)/(G\Omega).$$

Заметим, что решение подобной задачи изложено в § 16.6.

При расчете перекрытий с несколькими перекрестными связями можно рекомендовать следующий приближенный прием учета деформаций сдвига, предложенный В. В. Козляковым. Согласно этому приему при вычислении корней характеристического уравнения (17.47), форм главных изгибов v_{ik} из системы (17.44), интенсивности нагрузки (17.46) необходимо вместо действительных значений моментов инерции перекрестных связей I_i пользоваться приведенными их значениями, равными

$$\bar{I}_i = I_i/S_i, \tag{17.77}$$

где

$$S_i = 1 + 48EI_i/[\Omega_i L_2 (5 - 4\varkappa)]. \tag{17.78}$$

Коэффициенты же влияния γ_{ij} и β_i должны быть найдены с учетом деформаций сдвига в балках главного направления.

Элементы изгиба перекрестных связей будут при этом определяться формулами

$$\left.\begin{aligned} w_i = w_i^{(1)} S_i = \frac{I_0}{I_i} S_i \sum_{k=1}^{n} v_{ik} p_k(x); \\ \left[w_i^{(1)}\right]' = \frac{I_0}{I_i} \sum_{k=1}^{n} v_{ik} p_k'(x); \\ M_i = EI_i \left[w_i^{(1)}\right]'' = \sum_{k=1}^{n} v_{ik} \mathfrak{M}_k; \\ N_i = EI_i \left[w_i^{(1)}\right]''' = \sum_{k=1}^{n} v_{ik} n_k, \end{aligned}\right\} \tag{17.79}$$

где $p_k(x)$ — главные изгибы, определяемые дифференциальным уравнением (17.41); p_k', $\mathfrak{M}_k$, n_k — соответственно угол поворота, изгибающий момент, перерезывающая сила в k-м главном изгибе.

§ 17.7. Приближенные методы расчета плоских перекрытий

Расчет перекрытий с $n \geqslant 3$ по методу главных изгибов оказывается достаточно трудоемким. Наиболее сложными являются операции вычисления корней характеристического уравнения λ_k и последующее определение форм главных изгибов v_{ik} на основе решения систем однородных уравнений.

Нельзя не видеть, однако, определенной противоречивости применения метода главных изгибов в расчетах судовых перекрытий. При некоторых ограничениях, касающихся закона изменений характеристик жесткости на длине перекрестных балок, устройства опорных закреплений и т. п., этот метод позволяет получить практически точное решение системы дифференциальных уравнений

(17.39). Вместе с тем плоское перекрытие (система пересекающихся балок) лишь приближенно отражает свойства реальных судовых конструкций. Основные источники погрешности схемы плоского перекрытия как модели реальной судовой конструкции уже частично обсуждались. Они связаны с приблизительным распределением внешней нагрузки между балками главного направления и перекрестными связями, неучетом кручения балок, плоского напряженного состояния в настилах. Следует также иметь в виду, что такие исходные данные расчета, как коэффициенты податливости опор балок и внешняя нагрузка перекрытия, известны лишь приблизительно.

Все это делает зачастую бессмысленным получение ценой трудоемких вычислений точного решения дифференциальных уравнений, описывающих поведение модели, которая сама является лишь приближением к действительности. Поэтому для расчетов перекрытий большую ценность представляют приближенные методы, позволяющие значительно снизить трудоемкость вычислений, не внося в расчет бóльших погрешностей, чем погрешность самой модели. Приближенные методы позволяют также произвести расчет перекрытий, перекрестные балки которых имеют произвольные граничные условия.

Метод подбора нагрузки перекрестных связей. Расчет перекрытий по методу подбора нагрузки перекрестных связей был предложен Б. Л. Николаи и независимо от него М. Я. Маркеловым. Метод применяют при расчете перекрытий с большим числом одинаковых балок главного направления и несколькими перекрестными связями. При этом перекрестные связи могут быть непризматическими, и их устройство на опорах различно. Предполагая, что нагрузка, действующая на перекрытие, воспринимается балками главного направления, а перекрестные связи загружены реакциями взаимодействия, представим интенсивность нагрузки на j-ю перекрестную связь состоящей из двух слагаемых:

$$r_j(x) = q_j^{(0)}(x) - q_j \varphi_j(x), \tag{17.80}$$

где $q_j^{(0)}(x)$ — интенсивность нагрузки j-й перекрестной связи, определенная в предположении, что перекрестные связи не деформируются; q_j — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению; $\varphi_j(x)$ — выбираемая функция, близкая по форме к ожидаемой упругой линии j-й перекрестной балки, нормированная так, что для середины пролета перекрестной балки $\varphi_j(L/2) = 1$.

Систему уравнений для определения неизвестных q_j получим из условия равенства прогибов перекрестных балок посередине пролета и средней балки главного направления.

Поскольку под действием внешней нагрузки и реакций

$$R_j^{(0)} = a q_j^{(0)}(x) \tag{17.81}$$

прогибы балок главного направления в узловых точках отсутствуют, нагрузкой, вызывающей перемещения узловых точек средней балки главного направления, являются сосредоточенные силы

$$R_i = aq_i,\qquad(17.82)$$

приложенные в этих точках.

Стрелка прогиба средней балки главного направления в i-й узловой точке определяется зависимостью

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{R_j l^3}{EI_0} = \frac{al^3}{EI_0} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} q_j,\qquad(17.83)$$

где n — число перекрестных связей.

Если балки главного направления непризматические, под i_0 понимает некоторое среднее значение момента инерции поперечного сечения.

Упругая линия j-й перекрестной балки определяется дифференциальным уравнением

$$\left[EI_j(x)\, w_j''(x)\right]'' = r_j(x) = q_j^{(0)}(x) - q_j \varphi_j(x)\qquad(17.84)$$

и граничными условиями, соответствующими характеру закрепления перекрестной балки в опорных сечениях. Уравнение (17.84) интегрируется известными методами, и упругая линия $w_j(x)$ может быть определена для любых функций $I_j(x)$ и $r_j(x)$.

Пусть для $x = L/2$ решение уравнения (17.84) имеет вид

$$w_i\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L^4}{EI_0}\left(\alpha_i^{(0)} q_i^{(0)} - \alpha_i q_i\right),\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\qquad(17.85)$$

где I_0 — некоторое среднее значение функций $I_i(x)$; $\alpha_i^{(0)}$, α_i — определяемые в результате решения уравнения (17.84) коэффициенты влияния соответствующих нагрузок на прогиб i-й перекрестной балки посередине пролета; $q_i^{(0)}$ — среднее значение нагрузки $q_i^{(0)}(x)$.

Приравняв правые части выражений (17.83) и (17.85), получим следующую систему уравнений для определения неизвестных q_i:

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} q_j + \frac{Ei_0}{al^3} \alpha_i q_i = \frac{i_0}{I_0}\left(\frac{L}{l}\right)^3 \frac{L}{a} \alpha_i^{(0)} q_i^{(0)}.\qquad(17.86)$$

Определив q_j из системы уравнений (17.86), можно с помощью (17.84) выполнить расчет перекрестных связей. Элементы прогиба средней балки главного направления при известных смещениях узловых сечений w_i могут быть вычислены по теореме трех моментов.

Метод Ростовцева[1]. В этом методе используют приближенное разделение системы уравнений Бубнова

$$w_i(x) = \beta_i \frac{Q(x)\, l^3}{Ei_0} - \frac{al^3}{Ei_0} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} EI_j w_j^{\text{IV}}(x)\qquad(17.87)$$

на n независимых уравнений.

[1] Ростовцев Д. М. Приближенный метод расчета перекрытий с несколькими перекрестными связями/Труды ЛКИ. 1962. Вып. XXXVIII. С. 135—144.

Рассмотрим сначала перекрытие, у которого все балки главного направления одинаково устроены на опорах и имеют одинаковый закон изменения нагрузки, так что коэффициенты β_i и γ_{ij} не зависят от x. Перекрестные связи заделаны на опорах с произвольными, но соизмеримыми друг с другом по значению коэффициентами податливости.

Упругие линии балок главного направления при оговоренных условиях можно считать подобными. Поэтому для прогиба балок главного направления в узловых точках можно записать следующее выражение:

$$w(y_j)\big|_{x=x_m} = w_0\big|_{x=x_m} \varphi(y_j),\qquad(17.88)$$

где x_m — абсцисса рассматриваемой m-й балки главного направления; $w_0(x)$ — неизвестная функция, имеющая размерность прогиба; $\varphi(y)$ — выбираемая безразмерная функция, описывающая форму изгиба балки главного направления и, следовательно, удовлетворяющая граничным условиям в ее опорных сечениях.

Поскольку прогибы балок главного направления в j-х узловых точках и прогиб j-й перекрестной связи совпадают, из выражения (17.88) следует формула для упругой линии j-й перекрестной связи

$$w_j(x) = w_0(x)\, \varphi(y_j).\qquad(17.89)$$

Для i-й перекрестной балки получим выражение, аналогичное (17.89):

$$w_i(x) = w_0(x)\, \varphi(y_i).\qquad(17.90)$$

Исключив из зависимости (17.89) с помощью (17.90) неизвестную функцию $w_0(x)$, найдем

$$w_j(x) = w_i(x)\, \varphi(y_j)/\varphi(y_i).\qquad(17.91)$$

Подстановка (17.91) в систему уравнений (17.87) позволяет преобразовать ее к следующему виду

$$EI_i w_i^{\text{IV}}(x) \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{I_j}{I_i} \frac{\varphi(y_j)}{\varphi(y_i)} + \frac{Ei_0}{al^3} w_i(x) = \beta_i \frac{Q(x)}{a}.\qquad(17.92)$$

Обозначив

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{I_j}{I_i} \frac{\varphi(y_j)}{\varphi(y_i)} = \delta_i,\qquad(17.93)$$

получим для каждой перекрестной балки дифференциальное уравнение

$$EI_i w_i^{\text{IV}}(x) + k_i w_i(x) = q_i(x),\qquad(17.94)$$

где

$$k_i = Ei_0/(al^3\delta_i);\qquad(17.95)$$

$$q_i(x) = \beta_i Q(x)/(\delta_i a).\qquad(17.96)$$

Выписав интеграл уравнения (17.94) и подчинив его граничным условиям, найдем упругие линии и все параметры изгиба перекрестных связей. В большинстве практических задач удается определить наиболее важные параметры изгиба с помощью формул и вспомогательных функций И. Г. Бубнова.

Для вычисления величин δ_i необходимо располагать отношениями $\varphi(y_j)/\varphi(y_i)$, где $i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n$. Заметив, что в качестве $\varphi(y)$ можно принять форму упругой линии балки главного направления, загруженной заданной нагрузкой без учета влияния реакций перекрестных связей, получим

$$\varphi(y_j)/\varphi(y_i) = \beta_j/\beta_i. \tag{17.97}$$

Следовательно,

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{I_j}{I_i} \frac{\beta_j}{\beta_i}. \tag{17.98}$$

После определения прогибов перекрестных балок балки главного направления рассчитывают как многопролетные с заданными смещениями опор.

Приведенный метод при нагрузках, плавно меняющихся вдоль перекрестных связей, и при ограничении отношений I_j/I_i значениями не превышающими 2—3, дает результаты, практически совпадающие с результатами, полученными методом главных изгибов. Метод можно применять и в тех случаях, когда нагрузка действует лишь на некоторую часть балок главного направления или когда к перекрытию приложены сосредоточенные силы. Однако ошибка в значениях параметров изгиба перекрестных балок может при этом достигать 10—15 %.

Учет влияния сдвига производится в рамках рассматриваемого метода таким же образом, как и при расчете перекрытий с одной перекрестной связью.

Метод конечных элементов. Рассмотренные в предыдущих параграфах методы расчета перекрытий базировались на предположении о существовании определенной регулярности в конструкции перекрытий: балки главного направления считались расположенными на равных расстояниях друг от друга, перекрестные связи — призматическими, опорный контур — прямоугольным. Вводился также ряд других ограничений. Реальные судовые конструкции днища, бортов, палуб, переборок отличаются большим многообразием и присутствием элементов, вносящих существенные искажения в упомянутую регулярность структуры. К таким элементам относятся протяженные фундаменты, полупереборки, различные выгородки, жестко связанные с балками перекрытий, большие вырезы в настилах и т. п. В оконечностях судна опорный контур перекрытий нельзя считать прямоугольным. Ранее уже отмечалось, что для ряда перекрытий типа двойного дна и двойного борта оказывается важным учет сопротивления балок закручиванию.

Во всех подобных случаях расчет перекрытий с помощью метода конечных элементов может оказаться наиболее приемлемым. Естественно, метод конечных элементов как универсальный метод

анализа напряженного состояния конструкций может быть с успехом применен для расчета любого перекрытия, однако в регулярных многоэлементных системах методы, ориентированные на составление и решение дифференциальных уравнений, оказываются менее трудоемкими.

Рассмотренный в предыдущих главах применительно к балкам и рамам алгоритм МКЭ является универсальным для расчета любых стержневых систем, в том числе и перекрытий. Поэтому, не повторяя основ метода, изложенных в гл. 11, ограничимся лишь отдельными замечаниями.

Каждую узловую точку плоского перекрытия следует считать имеющей три возможных перемещения: одно линейное, нормальное к плоскости перекрытия, и два угловых, соответствующих поворотам относительно осей ox и oy, расположенных в плоскости перекрытия.

При решении задачи без учета сопротивления балок закручиванию следует применять простейший стержневой элемент, имеющий четыре степени свободы концевых перемещений (см. рис. 11.15). Более сложный стержневой элемент с шестью возможными перемещениями концевых сечений используется в случае учета кручения балок (к узловым перемещениям элемента, изображенного на рис. 11.15, добавляются углы закручивания в узловых точках).

Контрольные вопросы

1. Какая конструкция называется перекрытием? Привести примеры судовых перекрытий.
2. Как распределяется между балками перекрытия равномерная нагрузка, действующая на сплошной настил?
3. Какие усилия взаимодействия балок перекрытия в узловых точках наиболее существенно влияют на его изгиб?
4. Как составить уравнения, раскрывающие статическую неопределимость перекрытия с малым числом балок обоих направлений?
5. Какие допущения можно принять при расчете перекрытий с большим числом балок главного направления и одной или несколькими перекрестными связями?
6. Всегда ли перекрестная связь поддерживает среднюю балку главного направления?
7. Какова роль перекрестной связи перекрытия при действии на нее сосредоточенных нагрузок?
8. Как изменится схема расчета перекрестной связи, если одна из балок главного направления усилена?
9. Как определить формы главных изгибов перекрытия с большим числом балок главного направления и несколькими перекрестными связями?
10. Каковы основные свойства и физический смысл форм главных изгибов?
11. Как можно учесть влияние деформаций сдвига в балках главного направления на изгиб перекрытия? Насколько сильно это влияние для судовых перекрытий?
12. Как изменится дифференциальное уравнение изгиба перекрестной связи при учете сдвига?
13. Каковы основные допущения приближенных методов расчета перекрытий?
14. Какие возможные перемещения узловых точек перекрытия следует принимать во внимание при расчете его с использованием МКЭ?

Глава 18. СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 18.1. Основные зависимости теории стесненного кручения и изгиба тонкостенных стержней открытого профиля

В гл. 5 рассматривалось свободное кручение тонкостенных стержней открытого и замкнутого профилей.

На рис. 18.1 показан пример ничем не стесненной деформации тонкостенного стержня, происходящей под воздействием внешних, приложенных к торцам крутящих моментов. Как видно, в условиях свободного кручения происходит депланация торцов, а следовательно, и поперечных сечений.

Если деформация стержня стеснена, например один из торцов стержня жестко присоединен к массивной плите (рис. 18.2, *а*), то депланация поперечного сечения при продвижении от свободного

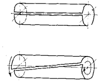


Рис. 18.1

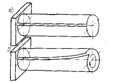


Рис. 18.2

торца к противоположному заделанному торцу уменьшается и в заделанном торце равна нулю — сечение остается плоским (рис. 18.2, *б*). Уменьшение депланации — это показатель степени стеснения деформации, проявляющегося в уменьшении перемещений точек стержня в направлении, параллельном его оси. Вследствие такого стеснения деформации в поперечных сечениях стержня возникают нормальные напряжения.

Различие в характере деформаций при свободном и стесненном кручении становится особенно наглядным при рассмотрении кручения двутавровой балки (рис. 18.3). При свободном кручении, когда поперечные сечения могут свободно искажаться (рис. 18.3, *а*), полки скрученной балки практически остаются прямыми. При этом сопротивляемость балки на скручивание обеспечивается жесткостью каждой из составляющих ее полос (полок и стенки) при чистом кручении [см. формулу (5.48)]. Когда же один из торцов балки заделан и тем самым исключена в этом сечении депланация, кручение балки сопровождается изгибом полок (рис. 18.3, *б*). Внешний изгибающий момент в каждом из поперечных сечений балки уравновешивается частично моментом от касательных напряжений при свободном кручении, а частично перерезывающими силами, возникающими в полках балки при их изгибе и образующими в каждом из поперечных сечений двутавра пару сил. Изгиб

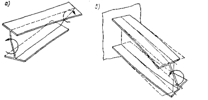


Рис. 18.3

полок двутавра приводит к появлению в поперечных сечениях нормальных продольных напряжений, о которых уже выше шла речь.

Стеснение деформации возникает и в случае, когда крутящий момент изменяется по длине стержня.

Стесненность кручения может существенно увеличить жесткость на кручение и изменить всю картину напряженно-деформированного состояния тонкостенных стержней открытого профиля. В меньшей степени влияние стесненности проявляется при кручении тонкостенных закрытых (многосвязных) стержней и еще в меньшей степени, если стержни имеют монолитные сечения.

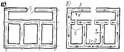


Рис. 18.4

Точное решение задачи о стесненном кручении отсутствует. Излагаемая ниже приближенная теория основана на некоторых допущениях, в достаточной степени справедливых применительно к тонкостенным стержням.

В общем случае поперечное сечение стержня может быть многосвязным, а некоторые из продольных кромок могут быть попарно соединены упругими связями, препятствующими их относительному сдвигу в продольном направлении (рис. 18.4, *а*). Путем введения соответствующих продольных разрезов в замкнутых контурах и удаления имеющихся упругих связей между продольными кромками поперечное сечение из многосвязного переводим в односвязное (рис. 18.4, б). На кромках продольных разрезов, а также вдоль кромок, где удалены упругие связи, необходимо приложить погонные усилия взаимодействия между кромками $T_i(x)$ (i — номера указанных кромок). Полученный таким образом односвязный профиль будем называть в дальнейшем *основным*.

На противоположных кромках каждого из продольных разрезов, а также на кромках, имевших упругие связи, погонные усилия взаимодействия T_j и T_i (j и i — номера кромок) должны быть равны по значению и противоположны по направлению. Определение усилий $T_i(x)$ из условий совместности перемещений кромок вдоль фиктивных разрезов рассмотрено ниже.

Излагаемая ниже теория кручения и изгиба тонкостенных стержней позволяет одновременно рассмотреть осевое растяжение, поперечные изгибы в двух ортогональных плоскостях и закручивание. Качественно новым по сравнению с ранее изложенным в предыдущих главах является учет стеснения депланации. Последнее можно было бы выполнить независимо от осевой деформации и изгиба стержня. Однако представляет интерес сам факт построения теории, учитывающей одновременно все основные виды деформации тонкостенных стержней. Тем более, что при стесненном кручении в общем случае одновременно с закручиванием в стержне могут возникать и все другие виды деформаций (растяжение вдоль его оси, изгиб в какой-либо плоскости).

Основные гипотезы и допущения. В основу излагаемой ниже теории положены следующие гипотезы.

1. Контур поперечного сечения не испытывает деформации в своей плоскости. Однако допускается выход из плоскости точек, лежащих до деформации в одной плоскости (депланация сечения).

Напомним, что гипотеза плоских сечений, используемая при построении технической теории изгиба балок, также предполагает недеформируемость поперечного сечения в своей плоскости при дополнительном ограничении: точки, лежащие до деформации в плоскости поперечного сечения, остаются в одной плоскости и после деформации. Поэтому гипотеза плоских сечений — частный случай сформулированной выше гипотезы о недеформируемости контура поперечного сечения.

2. Сдвиги в срединной поверхности тонкостенного стержня отсутствуют. Эта гипотеза используется лишь при определении осевой деформации волокон стержня, параллельных его оси, и связанных с ней напряжений.

Рассмотрим призматический односвязный тонкостенный стержень. Ось ox направим параллельно образующей, а оси oy и oz совместим с главными центральными осями инерции площади поперечного сечения. Именно такое направление координатных осей использовалось при изложении теории изгиба балок, которая, как будет показано ниже, является лишь частным случаем более общей теории — теории изгиба и кручения тонкостенных стержней.

Следует заметить, что при изложении теории чистого кручения, которую также можно рассматривать как частный случай приводимой ниже теории, принимались другие направления координатных осей: оси ox и oy совмещались с главными центральными осями инерции площади поперечного сечения, а ось oz направлялась параллельно образующей. Такая несогласованность в выборе направлений координатных осей, хотя и не вносит в дальнейшее изложение каких-либо принципиальных затруднений, требует от читателя повышенного внимания при использовании результатов, полученных ранее в иной системе координат.

В дальнейшем, как и в случае чистого кручения, в плоскости сечения профиля наряду с координатами y и z будем использовать

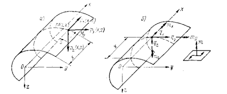


Рис. 18.5

криволинейную координату s, направленную вдоль срединной линии профиля, а также нормаль ν к этой линии в рассматриваемой точке. Положительное направление оси ν — вправо, если смотреть в сторону положительного направления оси s. Тогда положение произвольной точки M срединной поверхности тонкостенного стержня (рис. 18.5) можно определить координатами x и s. Криволинейная координата s изменяется вдоль контура поперечного сечения от некоторой точки $M_0(s=0)$, являющейся началом отсчета (рис. 18.5, a). Направление координаты s, принимаемое за положительное, как и начало отсчета этой координаты, можно выбрать произвольно. Следует лишь помнить, что точка начала отсчета ($s=0$) делит открытый контур на две части: для одной из них $s>0$, а для другой — $s<0$ (рис. 18.6). Таким образом,

$$y_M = y(s_M); \quad z_M = z(s_M). \tag{18.1}$$

Внешние силы. Будем считать, что к срединной поверхности стержня приложена распределенная нагрузка, составляющие интенсивности которой по осям x, y, z суть

$$p_x = p_x(x, s); \quad p_y = p_y(x, s); \quad p_z = p_z(x, s). \tag{18.2}$$

В каждом поперечном сечении нагрузку (18.2) приведем к точке, расположенной на оси x. Таким образом, статическим эквивалентом нагрузки (18.2) оказываются следующие силовые и моментные распределенные нагрузки:

$$\left.\begin{aligned} &q_x = \oint p_x\,ds; \quad q_y = \oint p_y\,ds; \quad q_z = \oint p_z\,ds; \\ &m_x = \oint [p_z(x, s)\,y(s) - p_y(x, s)\,z(s)]\,ds; \\ &m_y = \oint p_x(x, s)\,z(s)\,ds; \quad m_z = -\oint p_x(x, s)\,y(s)\,ds. \end{aligned}\right\} \tag{18.3}$$

Положительные направления этих сил и моментов указаны на рис. 18.5, *б*.

Перемещения. Рассмотрим произвольную точку $M(x, s)$ на срединной поверхности тонкостенного стержня. Проекции перемеще-

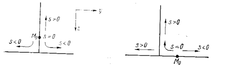


Рис. 18.6

ния этой точки на оси x, y, z обозначим соответственно через $u(x, s)$, $v(x, s)$ и $w(x, s)$.

Согласно гипотезе о недеформируемости контура поперечного сечения стержня перемещения точек контурной линии определяются перемещением контура как жесткого целого в плоскости поперечного сечения. Такое перемещение можно описать, задавая перемещение некоторой точки A, принадлежащей контуру или жестко связанной с ним, и поворот контура относительно этой точки.

На рис. 18.7 показано сечение, содержащее точку A, жестко связанную с контуром. Перемещения этой точки, а также угол поворота поперечного сечения как жесткого тела относительно этой точки обозначим соответственно через $u_A(x)$, $v_A(x)$, $w_A(x)$ и $\vartheta(x)$. Угол поворота ϑ считается положительным при вращении против часовой стрелки (если смотреть в положительном направлении оси x).

Из кинематических соображений легко выразить перемещения некоторой точки $B(y_B, z_B)$, жестко связанной с контуром поперечного сечения, но не обязательно расположенной на нем, через перемещение точки A:

$$v_B = v_A + (z_B - z_A)\,\vartheta; \quad w_B = w_A - (y_B - y_A)\,\vartheta. \tag{18.4}$$

Если точку B совместить с точкой $M(x, s)$, расположенной на самом контуре поперечного сечения, то формулы (18.4) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} v(x, s) &= v_A(x) + [z(s) - z_A]\,\vartheta; \\ w(x, s) &= w_A(x) - [y(s) - y_A]\,\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{18.5}$$

Здесь $y(s)$ и $z(s)$ — координаты точки M контурной линии.

Заметим, что и в теории чистого кручения формулы для компонентов перемещений выражали собой смещение поперечного сечения стержня в своей плоскости как жесткого тела [см. выражения (5.19)].

В дальнейшем нам потребуется располагать проекцией перемещения точки контура $M(x, s)$ на положительное направление каса-

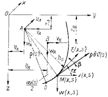


Рис. 18.7

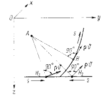


Рис. 18.8

тельной к контуру. Для определения этой величины, которую обозначим через ξ (см. рис. 18.7), воспользуемся следующей очевидной зависимостью:

$$\xi(x, s) = v(x, s)\cos\alpha(s) - w(x, s)\sin\alpha(s), \tag{18.6}$$

где $\alpha(s)$ — угол между осью y и положительным направлением касательной к контуру сечения; считается положительным при отсчете против часовой стрелки.

Подставляя выражения (18.5) в (18.6), получаем

$$\xi(x, s) = v_A(x)\cos\alpha - w_A(x)\sin\alpha + \\ + \{[z(s) - z_A]\cos\alpha + [y(s) - y_A]\sin\alpha\}\,\vartheta(x). \tag{18.7}$$

Из чисто геометрических построений, если воспользоваться данными рис. 18.7, можно установить, что

$$[z(s) - z_A]\cos\alpha + [y(s) - y_A]\sin\alpha = \rho(s)\cos\beta(s). \tag{18.8}$$

Здесь $\rho(s)$ — длина отрезка, соединяющего точку A с точкой $M(x, s)$ на контуре; $\beta(s)$ — угол между положительными направлениями касательной к контуру и положительным направлением

$\rho(s)\delta\vartheta(s)$ — вектором перемещения точки $M(x, s)$ при вращении контура вокруг точки A.

Величина

$$h(s) = \rho(s)\cos\beta(s) \tag{18.9}$$

есть длина перпендикуляра, опущенного из точки A на касательную к контуру в точке $M(x, s)$. Эта величина, как видно из формулы (18.9), в зависимости от знака $\cos\beta(s)$ может быть положительной или отрицательной. Установим правило определения знака величины $h(s)$. Рассматривая рис. 18.8, можно убедиться в том, что в точках H и H_1 проекция перемещения $\rho\vartheta$ направлена в положительном направлении касательной и при перемещении этих точек по контуру в положительном направлении радиусы ρ вращаются также в положительном направлении (против движения часовой стрелки). В точке H_2 проекция перемещения $\rho\vartheta$ совпадает с отрицательным направлением касательной к контуру, а радиус ρ вращается в отрицательном направлении (по ходу часовой стрелки) при перемещении точки H_2 по контуру в положительном направлении.

Таким образом, справедливо следующее правило: *если при перемещении от рассматриваемой точки по контуру в положительном направлении радиус-вектор $\rho(s)$ поворачивается против движения часовой стрелки, то $h(s) > 0$, если же радиус-вектор поворачивается по движению часовой стрелки, то $h(s) < 0$.*

Воспользовавшись зависимостями (18.8) и (18.9), формуле (18.7) можно придать вид

$$\xi(x, s) = v_A(x)\cos\alpha - w_A(x)\sin\alpha + h(s)\vartheta(x). \tag{18.10}$$

Для определения перемещения $u(x, s)$ точек контура в направлении оси x воспользуемся допущением об отсутствии деформаций сдвига в срединной поверхности:

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0. \tag{18.11}$$

Отсюда

$$u(x, s) = f(x) - \int_0^s \frac{\partial \xi}{\partial x}\, ds, \tag{18.12}$$

где $f(x)$ — произвольная функция переменной x. Подставляя в формулу (18.12) выражение (18.10) и замечая, что

$$ds\cos\alpha = dy; \quad ds\sin\alpha = -dz, \tag{18.12'}$$

после интегрирования находим

$$u(x, s) = f(x) - w_A'(x)[z(s) - z(0)] - \\ - v_A'(x)[y(s) - y(0)] - \vartheta'(x)\omega(s). \tag{18.13}$$

Здесь $\omega(s)$ — *секториальная площадь*, определяемая по формуле

$$\omega(s) = \int_0^s h(s)\, ds. \tag{18.14}$$

Величина $\omega(s)$ представляет собою удвоенную площадь сектора, ограниченного двумя радиусами, которые соединяют точку A с крайними точками дуги контура (см. рис. 18.7).

При перемещении точки $M(s)$ по контуру в положительном направлении координаты s секториальная площадь возрастает, если радиус-вектор ρ поворачивается против часовой стрелки.

Поскольку $f(x)$ — произвольная функция, выражение (18.13) можно переписать в виде

$$u(x, s) = u(x) - v_A'(x)y(s) - w_A'(x)z(s) - \vartheta'(x)\omega(s), \tag{18.15}$$

где $u(x)$ — продольное перемещение поперечного сечения при осевой деформации; $v_A(x)$ — прогиб при изгибе в плоскости xoy; $w_A(x)$ — прогиб при изгибе в плоскости xoz. Этой формулой выражен закон изменения продольных перемещений тонкостенного открытого призматического стержня, обладающего в поперечном сечении жестким контуром и не имеющего деформаций сдвига в срединной поверхности. Первые три члена в правой части зависимости (18.15) выражают гипотезу плоских сечений, согласно которой поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации.

Последний член в правой части формулы (18.15) определяет ту часть перемещения $u(x, s)$, которая не следует уже закону плоских сечений. Этим членом определяется так называемая *депланация* (искажение) первоначально плоского сечения, появляющаяся при кручении и изменяющаяся по закону секториальных площадей $\omega(s)$.

Полученный закон депланации поперечных сечений очень близок к закону депланации поперечных сечений при чистом кручении односвязного стержня. Отличие состоит лишь в том, что при чистом кручении угол поворота $\vartheta(x)$ является линейной функцией координаты x, а при стесненном кручении $\vartheta(x)$ может быть произвольной функцией x.

Напряжения. На основании закона Гука для изотропного тела

$$\varepsilon_x = [\sigma_x - \mu(\sigma_s - \sigma_v)]/E, \tag{18.16}$$

где σ_s и σ_v — нормальные напряжения для точек срединной поверхности стержня соответственно по направлениям координат s и v.

Как и в технической теории изгиба балок, напряжениями σ_s и σ_v можно пренебречь по сравнению с напряжением σ_x. Тогда на основании зависимости (18.16) $\sigma_x \cong E\varepsilon_x = E\frac{\partial u(x, s)}{\partial x}$, или, если внести сюда выражение для $u(x, s)$ согласно формуле (18.15),

$$\sigma_x(x, s) = E\left[u'(x) - v_A''(x)y(s) - w_A''(x)z(s) - \vartheta''(x)\omega(s)\right]. \tag{18.17}$$

Переходим к определению касательного напряжения τ_{xs} в срединной поверхности стержня. Оно может быть представлено в виде суммы касательных напряжений, возникающих при чистом кручении односвязного (основного) стержня $\tau_s^{ч.к}$, и дополнительных касательных напряжений, появляющихся вследствие изгиба $\tau_s^{\text{и}}$, многосвязности и стесненности его кручения $\tau_s^{\text{с}}$:

$$\tau_{xs} = \tau_s^{\text{ч.к}} + \tau_s^{\text{и}} + \tau_s^{\text{с}}. \tag{18.18}$$

Касательные напряжения $\tau_s^{\text{ч.к}}$ определяются по формуле (5.24) из теории чистого кручения, которая в принятых здесь обозначениях перепишется в виде

$$\tau_s^{\text{ч.к}}(x, s) = -\vartheta'(x)\, G\, \frac{\partial\psi}{\partial\nu}. \tag{18.18$'$}$$

Рис. 18.9

Для определения дополнительных касательных напряжений $\tau_s = \tau_s^{\text{и}} + \tau^{\text{с}}$ нельзя воспользоваться законом Гука, так как при выводе компонентов перемещений использовалось предположение о равенстве нулю деформаций сдвига; необходимо воспользоваться условием равновесия отсеченной части профиля. Рассмотрим равновесие отсеченной части профиля длиной dx. Положительные направления напряжений, характеризующих действие отброшенной части стержня, а также внешних нагрузок и обхода по контуру показаны на рис. 18.9. Составляя уравнение проекций всех сил, действующих на отсеченную часть профиля, на ось ox, получаем

$$\tau_s(x, s)\,\delta(s)\,dx - \int\limits_{s_{\text{отс}}} \sigma_x(x, s)\,\delta(s)\,dx + \int\limits_{s_{\text{отс}}} \sigma_x(x, s)\,\delta(s)\,dx + \frac{\partial}{\partial x}\Bigg[\int\limits_{s_{\text{отс}}} \sigma_x(x, s)\,\delta(s)\,ds\Bigg]dx + \Bigg[\int\limits_{s_{\text{отс}}} p_x(x, s)\,ds\Bigg]dx + \sum_{i_{\text{отс}}} T_i(x)\,dx = 0, \tag{18.19}$$

где s — координата сечения, в котором определяется τ_s; $\delta(s)$ — толщина профиля в точке s; $T_i(x)$ — касательные усилия взаимодействия на кромках продольных разрезов и на кромках с отброшенными упругими связями; i — номера концевых точек средней линии профиля, расположенных по одну сторону от точки s (включая точки на кромках продольных разрезов и на кромках с отброшенными упругими связями). Положительные направления $T_i(x)$ приняты совпадающими с положительным направлением оси ox.

Из выражения (18.19) получаем

$$\tau_s\delta(s) = -\sum_{i_{\text{отс}}} T_i - \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{s_{\text{отс}}} \sigma_x(x, s)\,\delta(s)\,ds - \int\limits_{s_{\text{отс}}} p_x(x, s)\,ds. \tag{18.20}$$

Подставляя в формулу (18.20) выражение для $\sigma_x(x, s)$ согласно (18.17), получаем следующую формулу для определения касательных напряжений:

$$\tau_s(x, s) = \tau_s^{\text{и}} + \tau_s^{\text{с}} = -\frac{E}{\delta(s)}\left[u''(x)\,F^{\text{отс}}(s) - w_A'''(x)\,S_y^{\text{отс}}(s) - v_A'''(x)\,S_z^{\text{отс}}(s)\right] + \frac{1}{\delta(s)}\Bigg[-\sum_{i_{\text{отс}}} T_i(x) - \int\limits_{s_{\text{отс}}} p_x(x, s)\,ds + E\vartheta'''(x)\,S_\omega^{\text{отс}}(s)\Bigg]. \tag{18.21}$$

Здесь первым слагаемым в правой части определяется касательное напряжение $\tau_s^{\text{и}}$, возникающее при растяжении и изгибе стержня, вторым слагаемым — касательное напряжение $\tau_s^{\text{с}}$, возникающее из-за многосвязности стержня и стесненности его кручения. В формуле (18.21) использованы следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} F^{\text{отс}}(s) &= \int\limits_{s_{\text{отс}}} \delta(s)\,ds; & S_y^{\text{отс}}(s) &= \int\limits_{s_{\text{отс}}} z\delta(s)\,ds; \\ S_z^{\text{отс}}(s) &= \int\limits_{s_{\text{отс}}} y\delta(s)\,ds; & S_\omega^{\text{отс}}(s) &= \int\limits_{s_{\text{отс}}} \omega(s)\,\delta(s)\,ds. \end{aligned}\right\} \tag{18.22}$$

Первой из формул (18.22) определяется площадь поперечного сечения отсеченной части профиля, второй и третьей — статические моменты отсеченной площади сечения относительно осей oy и oz соответственно, четвертой — новая характеристика, называемая *секториальным статическим моментом площади*. Секториальные характеристики будут предметом изучения в § 18.2.

Уравнения равновесия. Для определения четырех неизвестных функций $u(x)$, $v_A(x)$, $w_A(x)$ и $\vartheta(x)$ составим четыре уравнения равновесия элемента стержня, выделенного сечениями x и $x + dx$: три уравнения проекций всех сил соответственно на направления x, y, z и одно уравнение моментов относительно оси, параллельной оси x и проходящей через точку A. Уравнения моментов относительно осей, параллельных осям y и z, удовлетворяются вследствие использования при определении касательных напряжений теоремы о парности касательных напряжений.

Итак, проектируя все силы, действующие на выделенный элемент, на ось ox, получаем первое из упомянутых выше уравнений равновесия

$$\sum X = \frac{\partial}{\partial x}\oint \sigma_x(x, s)\,\delta(s)\,ds + q_x(x) = 0; \tag{18.23}$$

где $q_x(x)$ определяется по формуле (18.3). При получении уравнения (18.23) было учтено, что

$$\sum_{i=1}^{n} T_i(x) \equiv 0. \tag{18.23$'$}$$

Здесь n — общее число продольных кромок стержня, которые образовались при введении фиктивных продольных разрезов для получения односвязного основного профиля.

При составлении уравнений проекций на оси oy и oz следует учесть, что проекции нормальных напряжений на эти оси равны нулю.

Уравнение проекций всех сил на ось oy запишется в следующем виде:

$$\sum Y = -\oint \tau_s \delta(s) \cos\alpha \, ds + \oint \tau_s \delta(s) \cos\alpha \, ds + \frac{\partial}{\partial x}\left[\oint \tau_s \delta \cos\alpha \, ds\right] dx + q_y \, dx = 0, \tag{18.24}$$

или, если дополнительно учесть (18.12′),

$$\sum Y = \frac{\partial}{\partial x} \oint \tau_s(x, s)\, \delta(s)\, dy + q_y(x) = 0. \tag{18.25}$$

По аналогии с (18.25) можно выписать уравнение проекций всех сил на ось oz:

$$\sum Z = \frac{\partial}{\partial x} \oint \tau_s(x, s)\, \delta(s)\, dz + q_z(x) = 0. \tag{18.26}$$

При составлении уравнения моментов относительно точки A будем считать положительными моменты, направленные против часовой стрелки, т. е. по направлению вращения от оси oz к оси oy по кратчайшему пути. В результате получим

$$\sum M_A = -\oint \tau_s \delta(s)\, h(s)\, ds + \oint \tau_s \delta(s)\, h(s)\, ds + \frac{\partial}{\partial x}\left[\oint \tau_s \delta(s)\, h(s)\, ds\right] dx + C_к \vartheta''(x)\, dx + m_x(x)\, dx = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \oint \tau_s \delta(s)\, h\, d\omega + C_к \vartheta''(x) + m_x(x) = 0, \tag{18.27}$$

где $C_к \vartheta''(x)$ — часть крутящего момента, воспринимаемая стержнем при чистом кручении. Задача о чистом кручении рассматривалась в гл. 5.

Интегралы, входящие в уравнения равновесия (18.25)—(18.27), имеют одинаковую структуру:

$$\frac{\partial}{\partial x} \oint \tau_s \delta(s)\, dr = \oint (\tau_s \delta)'\, dr, \tag{18.28}$$

где знаком ( )′ обозначена производная по x, а r имеет в разных уравнениях значения y, z и ω.

Для удобства дальнейших вычислений эти интегралы целесообразно преобразовать. Замечая, что $d[(\tau_s\delta)' r] = r \frac{\partial}{\partial s}(\tau_s\delta)'\, ds + (\tau_s\delta)'\, dr$, или

$$(\tau_s\delta)'\, dr = d[(\tau_s\delta)' r] - r \frac{\partial}{\partial s}(\tau_s\delta)'\, ds. \tag{18.29}$$

Тогда интеграл (18.28) можно привести к такому виду:

$$\frac{\partial}{\partial x} \oint \tau_s \delta\, dr = \sum_{i=1}^{n} r(s_i)\, T_i'(x) - \oint r(s) \frac{\partial}{\partial s}(\tau_s\delta)'\, ds. \tag{18.30}$$

Здесь $|\tau_s\delta|_{s=s_i} = T_i(x)$. Замечая далее, что согласно (18.20)

$$\frac{\partial}{\partial s}(\tau_s\delta)' = -\delta(s) \frac{\partial^2 \delta_x(x, s)}{\partial x^2} - \frac{\partial p_x(x, s)}{\partial x},$$

правую часть (18.30) можно преобразовать к такому виду:

$$\frac{\partial}{\partial x} \oint \tau_s \delta\, dr = \sum r(s_i)\, T_i'(x) + \oint r\delta \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}\, ds + \oint r \frac{\partial p_x}{\partial x}\, ds. \tag{18.31}$$

С помощью полученной зависимости (18.31) уравнения равновесия (18.25)—(18.27) приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned}
&\sum Y = \oint y\delta \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}\, ds + \oint y \frac{\partial p_x}{\partial x}\, ds + q_y(x) = 0;\\
&\sum Z = \oint z\delta \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}\, ds + \oint z \frac{\partial p_x}{\partial x}\, ds + q_z(x) = 0;\\
&\sum M_A = \oint \omega\delta \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}\, ds + \oint \omega \frac{\partial p_x}{\partial x}\, ds + C_к \vartheta''(x) +\\
&\qquad + m_x(x) + \sum_{i=1}^{i=n} \omega(s_i)\, T_i'(x) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{18.32}$$

При получении выражений (18.32) учтено, что

$$\sum_{i=1}^{n} y_i T_i'(x) \equiv 0; \quad \sum_{i=1}^{n} z_i T_i'(x) \equiv 0.$$

Подставляя далее в уравнения (18.32) выражение (18.17) и принимая во внимание, что оси oy и oz совмещены с главными осями инерции площади поперечного сечения, и, следовательно,

$$\oint y\delta\, ds = 0; \quad \oint z\delta\, ds = 0; \quad \oint yz\delta\, ds = 0, \tag{18.33}$$

получаем

$$\left.\begin{aligned}
&EFu''(x) - \vartheta'''(x)\, E \oint \omega\delta\, ds = -q_x(x);\\
&EI_z v_A^{IV}(x) + \vartheta^{IV}(x)\, E \oint \omega y\delta\, ds = q_y(x) + \oint y \frac{\partial p_x}{\partial x}\, ds;\\
&EI_y w^{IV}(x) + \vartheta^{IV}(x)\, E \oint \omega z\delta\, ds = q_z(x) + \oint z \frac{\partial p_x}{\partial x}\, ds;\\
&-u'''(x)\, E \oint \omega\delta\, ds + v_A^{IV}(x)\, E \oint \omega y\delta\, ds +\\
&+ w_A^{IV}(x)\, E \oint \omega z\delta\, ds + \vartheta^{IV}(x)\, E \oint \omega^2\delta\, ds - C_к \vartheta''(x) =\\
&= m_x(x) + \oint \omega \frac{\partial p_x}{\partial x}\, ds + \sum_{i=1}^{n} \omega_i T_i'(x),
\end{aligned}\right\} \tag{18.34}$$

13 Зак. 545

где $F = \oint \delta\, ds$ — площадь поперечного сечения; $I_z = \oint y^2 \delta\, ds$ и $I_y = \oint z^2 \delta\, ds$ — главные центральные моменты инерции площади поперечного сечения относительно осей oz и oy соответственно; $I_\omega = \oint \omega^2 \delta\, ds$ — *главный секториальный момент инерции площади поперечного сечения.*

Ниже будет показано, что положение точки A и начало отсчета криволинейной координаты s_0 (точка M_0) могут быть всегда выбраны таким образом, что

$$\oint \omega\delta\, ds = 0; \quad \oint y\omega\delta\, ds = 0; \quad \oint z\omega\delta\, ds = 0. \tag{18.35}$$

Это приводит к дальнейшим упрощениям системы уравнений равновесия (18.34), которая преобразуется к четырем независимым дифференциальным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} EFu''(x) &= -q_x(x); \\ EI_z v_A^{\mathrm{IV}}(x) &= q_y(x) + \oint y \frac{\partial p_x}{\partial x}\, ds; \\ EI_y w_A^{\mathrm{IV}}(x) &= q_z(x) + \oint z \frac{\partial p_x}{\partial x}\, ds; \\ EI_\omega \vartheta^{\mathrm{IV}}(x) - C_x \vartheta''(x) &= m(x) + \oint \omega \frac{\partial p_x}{\partial x}\, ds + \sum_i^n \omega_i T_i'. \end{aligned}\right\} \tag{18.36}$$

В дифференциальные уравнения (18.36) входят неизвестные кромочные усилия $T_i(x)$. Для их определения необходимо составить условия совместности продольных перемещений соединенных между собой кромок. Пусть номера двух таких кромок будут i и j, а связь между ними осуществляется в общем случае через упругий слой, создающий при относительном смещении кромок в продольном направлении реактивное касательное усилие

$$T_i = -T_j = k_{ij}(x)\,[\bar{u}_j(x) - \bar{u}_i(x)], \tag{18.37}$$

где $k_{ij}(x)$ — коэффициент жесткости упругого слоя, работающего на сдвиг; $\bar{u}_j(x)$ и $\bar{u}_i(x)$ — полные продольные перемещения соответствующих кромок.

Ранее найденные перемещения $u(x, s)$ [см. формулу (18.15)] не учитывают влияния кромочных касательных усилий, т. е. влияния касательных напряжений τ_s^c [второе слагаемое в правой части формулы (18.21)], появляющихся в поперечных сечениях стержня в результате его многосвязности и стесненности кручения. Эти напряжения вызывают в стержне дополнительные перемещения в направлении оси ox, которые будем обозначать через $u^c(x, s)$.

Определим разность перемещений u^c для двух произвольных точек j и i средней линии контура поперечного сечения. На основании закона Гука $\gamma_{xs} = \frac{\partial u^c}{\partial s} + \frac{\partial \xi^c}{\partial x} = \frac{\tau_s^c}{G}$. Здесь ξ^c — дополнительное перемещение от стеснения и многосвязности точек средней линии поперечного сечения вдоль оси s. Производная от этого перемещения по x мала по сравнению с величиной $\frac{\partial u^c}{\partial s}$, поэтому $\frac{\partial u^c}{\partial s} \cong \frac{\tau_s^c}{G}$. Отсюда

$$u_j^c - u_i^c = \int_{s_i}^{s_j} \frac{\partial u^c}{\partial s}\, ds = \frac{1}{G} \int_{s_i}^{s_j} \tau_s^c(x, s)\, ds. \tag{18.38}$$

Разность полных перемещений тех же точек равна

$$\bar{u}_j - \bar{u}_i = (u_j - u_i) + (u_j^c - u_i^c), \tag{18.39}$$

или, если учесть формулу (18.15) и то, что в нашем случае $y_j = y_i$; $z_j = z_i$,

$$\bar{u}_j - \bar{u}_i = -\vartheta'(x)(\omega_j - \omega_i) + (u_j^c - u_i^c). \tag{18.40}$$

С учетом полученных зависимостей (18.38) и (18.40) условие совместности перемещений (18.37) принимает следующий вид:

$$T_i = -T_j = k_{ij}(x)\left[\frac{1}{G}\int_{s_i}^{s_j} \tau_s^c(x, s)\, ds - \vartheta'(x)(\omega_j - \omega_i)\right]. \tag{18.41}$$

Если кромки i и j принадлежат продольному разрезу в замкнутом контуре, то их относительное смещение равно нулю и в последней формуле следует положить $k_{ij} = \infty$. Отсюда

$$\int_{s_i}^{s_j} \tau_s\, ds - G\vartheta'(x)(\omega_j - \omega_i) = 0. \tag{18.42}$$

Чтобы развернуть левую часть условия (18.41) или (18.42), необходимо разделить путь интегрирования $s_j - s_i$ на участки между смежными разветвлениями контура и для каждого участка составить по формуле (18.21) выражение для касательного напряжения τ_s. При подстановке полученных выражений для τ_s под знак интеграла в (18.41) или (18.42) у них необходимо менять знак на обратный на тех участках, где движение происходит против положительного направления оси s.

Как видно из уравнений (18.36) и условий совместности перемещений (18.41), в рассматриваемом случае задачи стесненного кручения, растяжения и изгиба тонкостенного стержня разделились. Последнее дифференциальное уравнение системы (18.36) совместно с условиями совместности перемещений связанных между собой кромок (18.41) описывает стесненное кручение стержня. Решение этой задачи определяет угол поворота поперечных сечений $\vartheta(x)$ и усилия взаимодействия $T_i(x)$. Далее, первое из уравнений (18.36) описывает осевую деформацию, второе и третье — изгиб стержня соответственно в плоскостях oxy и oxz.

§ 18.2. Секториальные характеристики сечения. Центр изгиба и его определение

Центр изгиба. Определим теперь положение точки A (см. рис. 18.7) в плоскости поперечного сечения и положение начальной точки на контуре поперечного сечения, при которых выполняются условия (18.35). Точка A называется *центром изгиба*, так как при отсутствии продольной нагрузки ($p_x = 0$, $T_i = 0$) и прохождении равнодействующей поперечной нагрузки через точку A, интенсивность крутящего момента $m_x(x) = 0$ и, следовательно, как это видно из последнего уравнения (18.36), $\vartheta(x) = 0$, т. е. в этом случае изгиб стержня не сопровождается кручением.

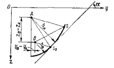


Рис. 18.10

Для определения положения точки A необходимо воспользоваться условиями (18.35). Но предварительно установим связь между секториальными площадями ω_A и ω_B, соответствующими двум различным полюсам; полюс B считается вспомогательным.

На основании рис. 18.10 можно записать

$$d(\omega_A - \omega_B) = (h_A - h_B)\,ds, \tag{18.43}$$

где

$$h_A - h_B = (z_B - z_A)\cos\alpha + (y_B - y_A)\sin\alpha. \tag{18.44}$$

Подставляя зависимость (18.44) в формулу (18.43) и используя соотношения (18.12′), после интегрирования полученного выражения найдём

$$\omega_A(s) = \omega_B(s) + (z_B - z_A)\,y(s) - (y_B - y_A)\,z(s) + D, \tag{18.45}$$

где D — произвольная постоянная. В выражении (18.45) величины y_B, z_B и ω_B являются известными, так как при вычислении вспомогательной секториальной площади $\omega_B(s)$ мы должны задаться как положением полюса B, так и началом отсчета дуги s ($s = s_0$).

Внося выражение (18.45) в условия (18.35), получим

$$\oint \omega_B \delta\, ds + DF = 0; \qquad \oint y\omega_B \delta\, ds + (z_B - z_A)\, I_z = 0;$$

$$\oint z\omega_B \delta\, ds - (y_B - y_A)\, I_y = 0,$$

где F, I_z и I_y — площадь и главные центральные моменты инерции площади поперечного сечения соответственно. Из полученных уравнений следует, что

$$D = -\frac{1}{F}\oint \omega_B \delta\, ds; \tag{18.46}$$

$$\left.\begin{aligned} y_A &= y_B - \frac{1}{I_y}\oint z\omega_B \delta\, ds; \\ z_A &= z_B + \frac{1}{I_z}\oint y\omega_B \delta\, ds. \end{aligned}\right\} \tag{18.47}$$

Формулами (18.47) определяется положение центра изгиба. Можно показать, что положение центра изгиба не зависит от выбора вспомогательного полюса B.

Секториальную площадь, удовлетворяющую условиям (18.35), будем называть *главной секториальной площадью*. Начало отсчета при определении главной секториальной площади (так называемую *нулевую секториальную точку*) найдем из условия $\omega_A(s) = 0$, или согласно выражению (18.45)

$$\omega_B(s) + (z_B - z_A)\,y(s) - (y_B - y_A)\,z(s) + D = 0, \tag{18.48}$$

где z_A, y_A и D — величины, определяемые по формулам (18.46) и (18.47), а s отсчитывается от вспомогательного начала отсчета. Внося значения y_A, z_A и D из (18.47) и (18.46) в (18.45), получим окончательное выражение для определения главной секториальной площади

$$\omega_A = \omega_B - \frac{y}{I_z}\oint y\omega_B \delta\, ds - \frac{z}{I_y}\oint z\omega_B \delta\, ds - \frac{1}{F}\oint \omega_B \delta\, ds. \tag{18.49}$$

Рекомендации по определению положения центра изгиба и нулевой секториальной точки. 1. Если профиль имеет ось симметрии, то центр изгиба лежит на этой оси, а секториальная нулевая точка — на пересечении этой оси с контуром. Это утверждение легко доказать. В самом деле, пусть ось oy есть ось симметрии и вспомогательный полюс B выбран на этой оси, т. е. $z_B = 0$. Тогда при начале отсчета на оси симметрии секториальная площадь ω_B в симметричных относительно оси oy точках профиля должна быть равна по значению и обратна по знаку, так что $\oint y\omega_B \delta\, ds = 0$, и, следовательно, на основании второй формулы (18.47) $z_A = 0$, т. е. точка A лежит на оси симметрии.

2. Если с осью симметрии совпадает стенка профиля, главную секториальную точку можно взять в любой точке стенки.

3. Если профиль имеет две оси симметрии, то центр изгиба расположен на их пересечении.

Заметим, что для наиболее распространенных типов профилей составлены таблицы, по которым можно определить положение центра изгиба и секториальные характеристики профиля.

В качестве примера рассмотрим определение секториальных характеристик профиля, показанного на рис. 18.11. Полюс A располагается на оси симметрии oy, поэтому и вспомогательный полюс B целесообразно расположить на этой оси, например в точке ее пересечения с контуром. Что же касается нулевой секториальной точки, то ее местоположение известно — она располагается на пересечении оси симметрии oy с контуром, т. е. в точке B.

Так как в рассматриваемом случае $z_A = 0$, то для определения положения центра изгиба нужно вычислить по формуле (18.47) лишь координату y_A или отстояние центра изгиба от стенки профиля $y_A - y_B = -\frac{1}{I_y}\oint z\omega_B(s)\,\delta(s)\, ds$.

Значение входящего в последнюю зависимость интеграла легко вычислить, если воспользоваться эпюрами изменения вдоль контура функций $z(s)$ и $\omega_B(s)$, которые приведены на рис. 18.11, *б* и *в* соответственно. В результате получим $\oint z\omega_B(s)\,\delta(s)\,ds=-\frac{1}{4}d_1^2d_2^2\delta_1$ и, следовательно, $y_A-y_B=\frac{1}{4I_y}d_1^2d_2^2\delta_1$. Видим, что центр изгиба находится справа от точки B.

Поскольку в рассматриваемом случае $z_A=z_B=0$ и $D=0$ [результат вычисления по формуле (18.46)], то для определения главной секториальной площади из выражения (18.45) получаем сле-

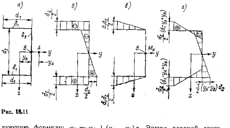


Рис. 18.11

дующую формулу: $\omega_A=\omega_B+(y_A-y_B)z$. Эпюра главной секториальной площади ω_A приведена на рис. 18.11, *г*. Располагая эпюрой ω_A, нетрудно вычислить значение главного секториального момента инерции поперечного сечения:

$$I_\omega=\oint\omega_A^2(s)\,\delta(s)\,ds=\frac{1}{6}\left[d_2-3(y_B-y_A)\right]\delta_2d_2^2d_1^2+(y_B-y_A)^2I_y.$$

§ 18.3. Обобщенные силы при изгибе и кручении тонкостенных профилей

Если ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned}&EFu'(x)=P(x);\quad EI_yw_A''(x)=M_y(x);\\&EI_zv_A''(x)=M_z(x);\quad -EI_\omega\vartheta''(x)=B(x),\end{aligned}\right\}\tag{18.50}$$

то полученное ранее выражение (18.17) для определения нормальных напряжений перепишется в виде

$$\sigma_x(x,s)=\frac{P(x)}{F}-\frac{M_y(x)}{I_y}z(s)-\frac{M_z(x)}{I_z}y(s)+\frac{B(x)}{I_\omega}\omega(s).\tag{18.51}$$

Формула (18.51) отличается от используемой в технической теории изгиба балок лишь наличием последнего члена в правой части. Величины $P(x)$, $M_y(x)$ и $M_z(x)$ — уже известные продольная сила и изгибающие моменты относительно осей oy и oz соответственно. Величина $B(x)$ представляет собой новую обобщенную силу, называемую *изгибно-крутящим бимоментом* или просто *бимоментом*. Бимоменту соответствуют самоуравновешенные нормальные напряжения, распределенные в поперечном сечении по закону секториальной площади $\omega(s)$.

Если обе части формулы (18.51) поочередно умножить на 1, z, y, ω и проинтегрировать каждое из полученных при этом выражений по площади поперечного сечения стержня, то с учетом зависимостей (18.33) и (18.35) можно получить следующие выражения для определения обобщенных сил:

$$\left.\begin{aligned}P(x)&=\oint\sigma(x,s)\,\delta(s)\,ds;\\M_y(x)&=-\oint z(s)\,\sigma(x,s)\,\delta(s)\,ds;\\M_z(x)&=-\oint y(s)\,\sigma(x,s)\,\delta(s)\,ds;\\B(x)&=\oint\sigma(x,s)\,\omega(s)\,\delta(s)\,ds.\end{aligned}\right\}\tag{18.52}$$

Касательные напряжения в срединной поверхности тонкостенного стержня, определяемые по формуле (18.21), также можно выразить через обобщенные усилия. В частном случае, когда продольные внешние нагрузки отсутствуют ($P_x=0$), формула (18.21) преобразуется к виду

$$\tau_s=\tau_s^{\text{и}}+\tau_s^{\text{с}}=\left[\frac{N_z(x)\,S_y^{\text{отс}}(s)}{I_y\delta(s)}+\frac{N_y(x)\,S_z^{\text{отс}}(s)}{I_z\delta(s)}\right]+\left[-\frac{1}{\delta(s)}\sum_{i_{\text{отс}}}T_i(x)-\frac{B'(x)\,S_\omega^{\text{отс}}(s)}{I_\omega\delta(s)}\right],\tag{18.53}$$

где

$$N_z(x)=EI_yw_A'''(x)=M_y'(x);\quad N_y(x)=EI_zv_A'''(x)=M_z'(x)\tag{18.54}$$

— перерезывающие силы от поперечной нагрузки в направлении осей oz и oy соответственно; $S_y^{\text{отс}}(s)$, $S_z^{\text{отс}}(s)$ и $S_\omega^{\text{отс}}(s)$ — статические моменты и секториальный статический момент отсеченной части площади поперечного сечения соответственно, определяемые по формулам (18.22);

$$B'(x)=-EI_\omega\vartheta'''(x).\tag{18.55}$$

Главный вектор касательных напряжений $\tau_s=\tau_s^{\text{с}}+\tau_s^{\text{ч.к}}$ в каждом из поперечных сечений стержня равен нулю; их действие статически эквивалентно крутящему моменту, который должен уравновешивать во всех поперечных сечениях внешний крутящий момент $M_{\text{к}}(x)$.

Пользуясь рис. 18.12, составим выражение для крутящего момента:

$$M_{\text{к}}(x) = \int\limits_F (\tau_s^{\text{c}} + \tau_s^{\text{ч. к}})\, h(s)\, dF = M_{\text{c}} + M_{\text{ч. к}}; \tag{18.56}$$

где h — длина перпендикуляра, опущенного из центра изгиба на направление s в рассматриваемой точке сечения; $M_{\text{ч. к}} = \int\limits_F \tau_s^{\text{ч. к}} h\, dF$ и $M_{\text{c}} = \int\limits_F \tau_s^{\text{c}} h\, dF$ — составляющие полного крутящего момента, соответствующие напряжениям чистого и стесненного кручения. Интегрирование в (18.56) производится по всей площади поперечного сечения стержня.

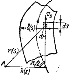


Рис. 18.12

Крутящий момент, создаваемый напряжениями чистого кручения, определяется формулой (5.45):

$$M_{\text{ч. к}} = \vartheta'(x)\, C_{\text{к}}. \tag{18.57}$$

Здесь $C_{\text{к}}$ — жесткость основного (односвязного) стержня при чистом кручении.

Выражение для крутящего момента, создаваемого напряжениями τ_s^{c}, можно получить, если воспользоваться формулами (18.56) и (18.21):

$$M_{\text{c}}(x) = \int\limits_F \tau_s^{\text{c}} h\, dF = E\vartheta'''(x) \oint S_\omega(s)\, d\omega + $$
$$+ \sum_{i=1}^{n} T_i(x)\, \omega_i = EI_\omega \vartheta'''(x) + \sum_{i=1}^{n} T_i(x)\, \omega_i. \tag{18.58}$$

Подставляя выражения (18.57) и (18.58) в формулу (18.56), получаем

$$EI_\omega \vartheta'''(x) - C_{\text{к}}\vartheta'(x) = -M_{\text{к}}(x) + \sum_{i=1}^{n} T_i(x)\, \omega_i(x)$$

или, после дифференцирования по координате x,

$$EI_\omega \vartheta^{\text{IV}}(x) - C_{\text{к}}\vartheta''(x) = m_x(x) + \sum_{i=1}^{n} T_i(x)\, \omega_i(x), \tag{18.59}$$

где $m_x(x) = -\frac{dM_{\text{к}}(x)}{dx}$ — интенсивность внешнего крутящего момента.

Уравнение (18.59) при $p_x(x) = 0$ точно совпадает с четвертым из уравнений (18.36).

§ 18.4. Интегрирование уравнений равновесия. Граничные условия. Алгоритм решения

Интегрирование уравнений равновесия. Первое из уравнений (18.36), дополненное соответствующими граничными условиями по торцам, определяет продольные перемещения поперечных сечений стержня; второе и третье — его изгиб в двух взаимно ортогональных плоскостях (xoy и xoz). Подобные задачи — растяжение призматического стержня под действием осевой нагрузки и его изгиб при действии поперечной нагрузки — детально рассматривались нами ранее и здесь мы на них не останавливаемся.

Четвертым из уравнений (18.36)

$$EI_\omega \vartheta^{\text{IV}}(x) - C_{\text{к}}\vartheta''(x) = m(x) \tag{18.60}$$

описывается закручивание стержня.

Общий интеграл уравнения (18.60) складывается из общего интеграла соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения уравнения (18.60):

$$\vartheta(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \operatorname{sh} kx/l + C_4 \operatorname{ch} kx/l + \vartheta_{\text{ч. р}}(x), \tag{18.61}$$

где

$$k = l\sqrt{C_{\text{к}}/(EI_\omega)}; \tag{18.62}$$

l — длина стержня; C_i — постоянные интегрирования.

Граничные условия. Для определения постоянных C_i необходимо выписать на каждом торце стержня по два из следующих граничных условий:

1) значение угла поворота ϑ;

2) значение производной ϑ'; при $\vartheta' = 0$ отсутствует депланация концевого сечения, т. е. оно остается плоским;

3) значение бимомента $B = -EI_\omega \vartheta''$; если $B = 0$, то стеснение депланации торцевого сечения отсутствует, и тогда мы наблюдаем случай так называемой свободной депланации;

4) значение крутящего момента; в случае когда продольные силы отсутствуют, $M_{\text{к}} = M_{\text{c}} + C_{\text{к}}\vartheta' = B'(x) + C_{\text{к}}\vartheta'$.

Несколько сложнее выписать граничные условия при наличии упругой заделки торцевого сечения по отношению к его закручиванию и депланации. Здесь нам может помочь очевидная аналогия в структуре уравнения (18.60) и уравнения сложного изгиба призматической балки, находящейся под действием поперечной нагрузки $q(x)$ и осевой растягивающей силы T,

$$EIw^{\text{IV}}(x) - Tw''(x) = q(x). \tag{18.63}$$

Видим, что функции $w(x)$ и $w'(x)$ в задаче изгиба балки аналогичны функциям $\vartheta(x)$ и $\vartheta'(x)$ в задаче стесненного кручения тонкостенного стержня.

Напомним граничные условия балки, торцевые сечения которой упруго защемлены и упруго оперты $(x=0, l)$:

$$\left.\begin{aligned} w' &= \pm \mathfrak{A} EI w''; \\ w &= \mp A\,(EI w''' - T w'). \end{aligned}\right\} \tag{18.64}$$

В выражениях (18.64) верхний знак относится к граничным условиям на левом торце $(x=0)$, а нижний — к условиям на правом $(x=l)$; $\mathfrak{A}$ — коэффициент податливости упругой заделки, A — коэффициент податливости упругой опоры.

При наличии упругой заделки в отношении закручивания торцевого сечения и в отношении его депланации по аналогии с (18.64) можно выписать соответствующие граничные условия для функции $\vartheta(x)$:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta' &= \pm \bar{\mathfrak{A}} EI_\omega \vartheta''; \\ \vartheta &= \mp \bar{A}\,(EI_\omega \vartheta''' - C_к \vartheta'). \end{aligned}\right\} \tag{18.65}$$

Здесь $\bar{\mathfrak{A}}$ — коэффициент упругого защемления торцевого сечения стержня в отношении его депланации; $\bar{A}$ — то же в отношении его угла поворота.

Алгоритм решения задачи. Общая схема решения задачи о стесненном кручении тонкостенного стержня в соответствии с полученными выше результатами будет следующей:

1. Если поперечное сечение стержня имеет замкнутые участки или соединенные упругими связями кромки, то необходимо стержень превратить в односвязный (основной) устройством сквозных продольных разрезов и отбрасыванием упругих связей. В разрезах и по линиям присоединения кромок к отброшенным упругим связям прикладываются неизвестные продольные усилия взаимодействия $T_i(x)$.

2. Для основного (односвязного) профиля устанавливают положительные направления координаты s для всего контура, определяют центр изгиба, начало отсчета координаты s, главную секториальную площадь $\omega(s)$, секториальный статический момент площади $S_\omega(s)$, секториальный момент инерции площади I_ω и жесткость стержня при чистом кручении $C_к$. Функции $\omega(s)$ и $S_\omega(s)$ проще всего получать графически в виде эпюр на среднем контуре профиля s.

3. Составляют выражения для напряжений τ_s^c [второго слагаемого в правой части формулы (18.21)] по участкам контура s с учетом правила знаков для $S_\omega(s)$ и принятых направлений для $T_i(x)$.

4. Составляют уравнения совместности перемещений связанных между собой кромок (18.41). Всего таких уравнений будет столько, сколько продольных разрезов было введено при образовании основного односвязного профиля.

5. Внося в уравнения совместности напряжения τ_s^c из (18.21), получают систему алгебраических уравнений относительно $T_i(x)$, при решении которой находят

$$T_i(x) = -T_j(x) = a_{ij}(x)\,\vartheta'''(x) + b_{ij}(x)\,\vartheta'(x), \tag{18.66}$$

где $a_{ij}(x)$ и $b_{ij}(x)$ — функции, зависящие от коэффициентов жесткости упругих связей $k_{ij}(x)$; если все $k_{ij} = \text{const}$, то все $a_{ij} = \text{const}$, $b_{ij} = \text{const}$. Здесь i и j — номера продольных кромок стержня, примыкающих к одному и тому же разрезу.

6. Значения $T_i(x)$, полученные из формул (18.66), вносят в четвертое уравнение системы (18.36). Получаемое при этом дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$F_1(x)\,\vartheta^{IV}(x) + F_2(x)\,\vartheta'''(x) + F_3(x)\,\vartheta''(x) + F_4(x)\,\vartheta'(x) = m(x). \tag{18.67}$$

При $k_{ij} = \text{const}$ $F_1(x) = EI_\omega$; $F_2(x) = F_4(x) = 0$; $F_3(x) = -C_к$ и уравнение (18.67) примет вид

$$EI_\omega \vartheta^{IV}(x) - C_к \vartheta''(x) = m(x). \tag{18.68}$$

7. Выписывают общее решение уравнения (18.67) или (18.68), содержащее четыре постоянные интегрирования. Решение дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (18.67) может быть получено с помощью одного из численных методов, изложенных в гл. 8.

8. Выписывают условия закрепления торцевых сечений стержня, после чего общее решение $\vartheta(x)$, найденное в п. 7, подчиняют граничным условиям. Из полученной при этом системы четырех алгебраических уравнений определяют постоянные интегрирования. Операция отыскания функции $\vartheta(x)$ закончена.

9. На основании формул (18.66) определяют усилия $T_i(x)$, а затем по формулам

$$\tau_s^c = -\frac{1}{\delta(s)}\left[\sum_{i_{отс}} T_i(x) + \int_{s_{отс}} p_x(x, s)\,ds + \vartheta'''(x)\,S_\omega^{отс}(s)\right];$$

$$\sigma_x^c = -E\vartheta''(x)\,\omega(s) \tag{18.69}$$

касательные и нормальные напряжения, возникающие при стесненном кручении тонкостенного стержня.

Контрольные вопросы

1. Чем отличается стесненное кручение от чистого кручения?
2. Какие основные допущения положены в основу приближенной теории стесненного кручения?
3. Почему при стесненном кручении тонкостенные стержни имеют бо́льшую жесткость, чем при чистом кручении?
4. Чем характеризуется отступление от гипотезы плоских сечений при кручении тонкостенных стержней?
5. Как определяются нормальные и касательные напряжения при расчете тонкостенных стержней?
6. Как распределяются касательные напряжения по толщине тонкостенного профиля?
7. Каков физический смысл правых частей дифференциальных уравнений равновесия?
8. Почему точка A называется центром изгиба и как определяются ее координаты? Где располагается центр изгиба в случае таврового профиля, в случае профиля с одной, двумя осями симметрии?

9. Как определяется начало отсчета дуги s на контуре? Что такое главная секториальная площадь и из каких условий она определяется?

10. Почему при рассмотрении кручения тонкостенных профилей появляется новая обобщенная сила — бимомент? Каков его физический смысл?

11. Какие граничные условия можно написать на концах тонкостенного стержня?

12. Установите аналогию между стесненным кручением тонкостенного стержня и сложным изгибом балки.

13. Каким образом выводятся дифференциальные уравнения пространственной устойчивости тонкостенных стержней?

Глава 19. СЛОЖНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

§ 19.1. Основные понятия, зависимости и уравнения теории сложного изгиба стержней

Сложным или *продольно-поперечным изгибом* называется деформация стержня, вызванная совместным действием поперечной нагрузки и продольных (осевых) усилий — растягивающих или сжимающих.

Задача о сложном изгибе стержней представляет для строительной механики корабля значительный практический интерес. Большинство продольных балок судового набора одновременно испытывает действие поперечных и продольных нагрузок, вызванных давлением воды или грузов и усилиями растяжения-сжатия от общего изгиба корпуса судна. Сложному изгибу подвергаются также стойки поперечных переборок, расположенные под карлингсами грузовых палуб и воспринимающие гидростатическое давление воды и продольную нагрузку в виде реакций карлингсов. Совместное действие поперечной нагрузки и усилий растяжения-сжатия испытывают пластины обшивки корпуса судна, и в ряде случаев оценка их прочности базируется на теории сложного изгиба стержней. При сложном изгибе существенное значение имеют начальные погиби стержней, являющиеся следствием неизбежных технологических отклонений от правильной геометрической формы и конструктивного искривления осей.

В некоторых случаях продольная сила значительно изменяет параметры изгиба стержня, вызванные поперечной нагрузкой, что требует разработки соответствующих методов расчета.

В теории сложного изгиба стержней для поперечной нагрузки и параметров изгиба сохраняются те же обозначения и правила знаков, что и в теории поперечного изгиба (см. гл. 13). Рассматривая сложный изгиб стержня в плоскости xoz (рис. 19.1), будем использовать те же допущения и гипотезы, что и в теории поперечного изгиба: гипотезу плоских сечений, закон Гука и предположения о малости прогибов по сравнению с пролетом и малости напряжений в параллельных оси балки сечениях.

Распределенные продольные усилия $p_x(x)$ считаются положительными, если они действуют в положительном направлении оси x. Продольное внутреннее усилие $T(x)$ в произвольном поперечном сечении считается положительным, если оно вызывает растяжение. Начальная погибь стержня $w_0(x)$ предполагается относительно малой и считается положительной при отклонении стержня в положительном направлении оси oz.

Основные зависимости. Основные зависимости сложного изгиба можно получить так же, как и в случае поперечного изгиба. В уравнениях должна быть учтена продольная сила T, которая при появлении изгиба стержня создает дополнительные изгибающие момент и перерезывающую силу. Эти дополнительные внутренние усилия даже при относительно малых деформациях могут достигать существенных значений и должны учитываться в уравнениях

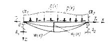


Рис. 19.1

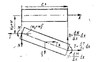


Рис. 19.2

равновесия элемента стержня. Следовательно, уравнения равновесия необходимо составлять для деформированного состояния стержня.

Рассмотрим элемент стержня, вырезанный двумя бесконечно близкими поперечными сечениями с координатами x и $x + dx$. На рассматриваемый элемент после деформации будут действовать внешние нагрузки q, p и внутренние силовые факторы в концевых сечениях T, N, M, показанные на рис. 19.2.

Уравнения равновесия элемента для проекций сил на ось x, на ось z и для моментов нетрудно составить, пользуясь рис. 19.2 и пренебрегая малыми высших порядков:

$$\frac{dN}{dx} = q; \quad -\frac{dT}{dx} = p; \quad N = \frac{dM}{dx} - T\,(w_0 + w)', \tag{19.1}$$

где q и p — интенсивность поперечной и продольной внешних нагрузок; $(w_0 + w)'$ — угол поворота элемента dx.

Зависимость между изгибающим моментом и прогибом стержня, очевидно, останется той же, что и при поперечном изгибе:

$$M(x) = EIw''. \tag{19.2}$$

Если в последнее уравнение (19.1) подставить выражение (19.2), то будем иметь

$$N = (EIw'')' - T\,(w_0 + w)'. \tag{19.3}$$

Дифференцируя по x обе части равенства (19.3) и учитывая первое из уравнений (19.1), получим следующее дифференциальное уравнение сложного изгиба:

$$(EIw'')'' - (Tw')' = q(x) + (Tw_0')'. \tag{19.4}$$

Интегрируя второе из уравнений (19.1), найдем

$$T(x) = T_0 - \int_0^x p(x)\,dx, \tag{19.5}$$

где T_0 — продольная сила в сечении стержня $x = 0$ (см. рис. 19.1).

Таким образом, при заданных нагрузках $q(x)$ и $T(x)$ задача сводится к определению прогиба w из дифференциального уравнения (19.4) при заданных граничных условиях, потом внутренних усилий $M(x)$ и $N(x)$ — по формулам (19.2) и (19.3), а затем и напряжений — по формулам

$$\sigma = T/F - Mz/I; \quad \tau = NS/(I\delta). \tag{19.6}$$

Здесь F — площадь поперечного сечения стержня, а остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в формулах (13.9) и (13.42) для поперечного изгиба.

Формулы (19.6) отличаются от аналогичных формул для поперечного изгиба только членом T/F, учитывающим нормальные напряжения от продольной силы T, которые считаются равномерными по площади сечения. Однако роль продольной силы этим не ограничивается, так как данная сила входит в основное дифференциальное уравнение (19.4) и тем самым влияет на $w(x)$ и на силовые факторы изгиба M и N.

Для прогибов, углов поворота и изгибающих моментов граничные условия выписываются при сложном изгибе точно так же, как и при поперечном изгибе, поскольку элементы изгиба связаны с прогибом одинаковыми зависимостями в обоих случаях. Граничные условия при сложном изгибе, если в них входит перерезывающая сила N, могут быть получены из соответствующих граничных условий поперечного изгиба при замене в них члена $(EIw'')'$ на $[(EIw'')' - T(w_0 + w)']$.

В соответствии с этим на основании формул (13.23)—(13.24), граничные условия сложного изгиба в общем случае упругих опор и упругих заделок запишутся так (см. рис. 19.1):

при $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} w(0) &= -A_1\left[(EJw'')' - T(w_0 + w)'\right]_{x=0}; \\ w'(0) &= \mathfrak{A}_1 EI(0)\,w''(0); \end{aligned}\right\} \tag{19.7}$$

при $x = l$

$$\left.\begin{aligned} w(l) &= A_2\left[(EIw'')' - T(w_0 + w)'\right]_{x=l}, \\ w'(l) &= -\mathfrak{A}_2 EI(l)\,w(l). \end{aligned}\right\} \tag{19.8}$$

В более простых случаях заделки концов стержня можно получить: для свободно опертого на жесткую опору конца стержня ($A_i = 0$, $\mathfrak{A}_i = \infty$)

$$w = 0; \quad w'' = 0;$$

для жестко заделанного конца на жесткой опоре ($A_i = \mathfrak{A}_i = 0$)

$$w = 0; \quad w' = 0;$$

для совершенно свободного конца ($A_i = \mathfrak{A}_i = \infty$)

$$EIw'' = 0; \quad (EIw'')' - T(w_0 + w)' = 0. \tag{19.9}$$

Потенциальная энергия и работа внешних сил. При малых прогибах зависимость между изгибающим моментом и прогибом выражается формулой (19.2), поэтому, как и при поперечном изгибе, потенциальная энергия изгиба при сложном изгибе будет равна

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2(x)}{EI(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)(w'')^2\,dx. \tag{19.10}$$

Силовая функция внешней поперечной нагрузки при сложном изгибе выражается через прогиб теми же формулами, что и при поперечном изгибе. Например, в случае распределенной поперечной нагрузки

$$U_1 = \int_0^l q(x)\,w(x)\,dx. \tag{19.11}$$

Силовая функция внешней продольной нагрузки определяется как работа этих сил в предположении, что их значение постоянно в процессе деформации. Деформации растяжения-сжатия оси стержня, как правило, интереса не представляют вследствие своей малости, а при необходимости могут быть найдены по элементарным формулам. Поэтому работу продольных сил следует вычислять только на перемещениях, вызванных изгибом стержня.

Рассматривая элемент dx (см. рис. 19.2), можно установить, что работа сил T равна работе создаваемого этими силами момента на угловом перемещении w' при изгибной деформации стержня. При условии постоянства сил T в процессе деформации указанный момент можно представить как сумму следующих составляющих: момента в начальном недеформированном состоянии $\Delta M_1 = -Tw_0'dx$, который в процессе деформации остается постоянным, и момента $\Delta M_2 = -Tw'dx$, который в процессе деформации изменяется пропорционально w'. Суммарная работа (силовая функция) обоих составляющих, очевидно, будет равна

$$dU_2 = \Delta M_1 w' + \frac{1}{2}\Delta M_2 w' = -Tw'(w_0 + w'/2)\,dx,$$

а силовая функция всей осевой нагрузки

$$U_2 = -\frac{1}{2}\int_0^l T(x)\left[(w')^2 + 2w_0'w'\right]dx. \qquad (19.12)$$

Знак «минус» в полученных формулах учитывает, что положительная (растягивающая) сила $T(x)$ при изгибе всегда производит отрицательную работу, так как создает момент, направленный против углового перемещения w'.

Этот результат можно также получить, если работу продольных сил, действующих на элемент dx, вычислять как произведение силы на изменение расстояния между точками приложения сил в результате поворота элемента.

На основании формул (19.10)—(19.12) при сложном изгибе стержня суммарная силовая функция будет равна

$$\Pi - U = \Pi - (U_1 + U_2) = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)(w'')^2 dx -$$

$$-\int_0^l q(x)\,w(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l T(x)\left[(w')^2 + 2w_0'w'\right]dx. \qquad (19.13)$$

Здесь $(U_1 + U_2)$ — силовая функция всех внешних сил. Выражение (19.13) используют при расчете стержней на сложный изгиб энергетическими методами.

Принцип независимости действия сил при сложном изгибе. Из дифференциального уравнения сложного изгиба (19.4) и граничных условий (19.7) и (19.8) видно, что прогиб w линейно зависит от поперечной нагрузки и нелинейно от продольной силы T. Поэтому принцип независимости действия сил и способ наложения применимы только в отношении поперечных нагрузок, т. е.

$$w(T, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i(T, Q_i), \qquad (19.14)$$

где w — прогиб стержня при совместном действии на него поперечных нагрузок $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ и продольной силы T; $w_1, w_2, \ldots, w_n$ — прогибы стержня от поперечных нагрузок $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ при действии совместно с каждой из них силы T.

Очевидно, аналогичные формулы можно выписать также для перерезывающих сил, изгибающих моментов и углов поворота w' поперечных сечений стержня, т. е. для всех элементов изгиба, линейно зависящих от прогиба w.

Принцип наложения позволяет находить параметры сложного изгиба стержня при комбинированных поперечных нагрузках суммированием соответствующих параметров сложного изгиба стержня от элементарных поперечных нагрузок при одной и той же продольной силе.

§ 19.2. Сложный изгиб призматических стержней. Оценка влияния осевых сил на параметры изгиба

Для призматического стержня, находящегося под действием какой-либо поперечной нагрузки и постоянной по длине продольной силы T, в уравнении (19.4) следует положить $EI = \text{const}$, $T = \text{const}$:

$$EIw^{\text{IV}} - Tw'' = q(x) + Tw_0''. \qquad (19.15)$$

Аналогичные упрощения необходимо сделать и в формулах (19.3)—(19.9). Дифференциальное уравнение (19.15) является линейным уравнением четвертого порядка с постоянными коэффициентами и ненулевой правой частью. Общий интеграл такого уравнения при растягивающей продольной силе T может быть получен в виде

$$w = w_{\text{ч. р}}(x) + A_0 + A_1\beta x + A_2 \operatorname{ch}\beta x + A_3 \operatorname{sh}\beta x, \qquad (19.16)$$

где $w_{\text{ч. р}}(x)$ — частное решение уравнения (19.15), соответствующее заданной правой части; A_i, $i = 0, 1, 2, 3$ — произвольные постоянные;

$$\beta = \sqrt{T/EI}. \qquad (19.17)$$

Если продольная сила T является сжимающей, то, как видно из формулы (19.17), β окажется мнимым. Обозначая в этом случае

$$\beta^* = \sqrt{|T|/EI}, \qquad (19.18)$$

общий интеграл уравнения (19.15) можно записать в виде

$$w = w_{\text{ч. р}}(x) + B_0 + B_1\beta^* x + B_2\cos\beta^* x + B_3\sin\beta^* x. \qquad (19.19)$$

Здесь B_i, $i = 0, 1, 2, 3$ — произвольные постоянные.

Если при $T < 0$ учесть, что на основании (19.17) и (19.18) $\beta = i\beta^*$, а также известные формулы Эйлера

$$\operatorname{sh} i\beta^* x = i\sin\beta^* x, \quad \operatorname{ch} i\beta^* x = \cos\beta^* x, \qquad (19.20)$$

то решение (19.19) в случае сжимающей продольной силы нетрудно получить из решения (19.16) для растягивающей продольной силы.

Формулы (19.20) позволяют очень просто переходить от случая растягивающей продольной силы к сжимающей. Для этого необходимо поменять знак с «плюса» на «минус» у силы T, а β в формулах (19.16) заменить на $i\beta^*$ с одновременным переходом от гиперболических функций к тригонометрическим по формулам (19.20).

Частное решение $w_{\text{ч. р}}$ уравнения (19.15) в общем случае может быть найдено известным из курса математики методом Лагранжа (вариациями произвольных постоянных). В простых и практически важных случаях, когда поперечная нагрузка $q(x)$ и начальная погибь $w_0(x)$ заданы в виде

$$q(x) = q_0 + q_1 x/l; \quad w_0(x) = a_0 \sin \pi x/l, \qquad (19.21)$$

частное решение уравнения (19.15) можно представить следующим выражением: $w_{ч.\,р} = Ax^2 + Bx^3 + C \sin \pi x/l$, где A, B, C — неизвестные пока постоянные, а l — длина стержня. После подстановки $w_{ч.\,р}$ и выражений (19.21) в дифференциальное уравнение (19.15) и сравнения в левой и правой его частях коэффициентов при одинаковых функциях получим

$$w_{ч.\,р}(x) = -\left(\frac{q_0 x^2}{2T} + \frac{q_1 x^3}{6Tl} + \frac{Ta_0 \sin \pi x/l}{T + \pi^2 EI/l^2}\right). \qquad (19.22)$$

В выражении (19.22) продольная сила положительна в случае растяжении и отрицательна при сжатии.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения сложного изгиба призматического стержня (19.15) при нагрузках (19.21) дается в зависимости от знака продольной силы T формулами (19.16), 19.19) и (19.22). Входящие в общее решение произвольные постоянные должны быть определены из граничных условий по концам стержня, что будет показано ниже на примерах.

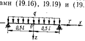


Рис. 19.3

Свободно опертый призматический стержень с равномерной поперечной нагрузкой (рис. 19.3). Положим, что начальная погибь у такого стержня отсутствует ($w_0 = 0$), а продольная сила растягивающая ($T > 0$). Учитывая симметрию прогиба w, начало координат расположим посредине длины стержня. В рассматриваемом случае $q_0 = q$; $q_1 = a_0 = 0$. Выражение для прогиба w на основании формул (19.16) и (19.22) будет следующим:

$$w = -qx^2/(2T) + A_0 + A_2 \operatorname{ch} \beta x,$$

где в силу симметрии прогиба относительно точки $x = 0$ опущены нечетные функции x, т. е. $A_1 = A_3 = 0$.

Произвольные постоянные A_0 и A_2 должны быть определены из условий свободного опирания стержня $w = 0$, $w'' = 0$ на концах $x = \pm 0{,}5l$. Подставляя выражение для прогиба w в указанные граничные условия, получаем

$$A_0 + A_2 \operatorname{ch} \beta l/2 = ql^2/8T; \quad A_2 \beta^2 \operatorname{ch} \beta l/2 = q/T.$$

Определяя A_0 и A_2 и подставляя их значения в выражение для w, после преобразований находим

$$w(x) = \{ql^4/[(2u)^4 EI]\}\left[\operatorname{ch} \beta x/\operatorname{ch} u - 1 + \frac{1}{2}(u^2 - \beta^2 x^2)\right], \quad (19.23)$$

где

$$u = \beta l/2 = (l/2)\sqrt{T/(EI)}. \qquad (19.24)$$

Углы поворота поперечных сечений и изгибающие моменты будут равны

$$w'(x) = \{ql^3/[(2u)^3 EI]\}(\operatorname{sh} \beta x/\operatorname{ch} u - \beta x); \qquad (19.25)$$

$$M(x) = EIw'' = [ql^2/(2u)^2](\operatorname{ch} \beta x/\operatorname{ch} u - 1). \qquad (19.26)$$

Наибольших значений прогиб и изгибающий момент достигают посередине пролета при $x = 0$, а углы поворота на опорах при $x = \pm 0{,}5l$:

$$\left.\begin{aligned} w(0) &= 5ql^4 f_0(u)/(384EI); \\ w'(\pm l/2) &= \mp ql^3 \psi_0(u)/(24EI); \\ M(0) &= -ql^2 \varphi_0(u)/8, \end{aligned}\right\} \qquad (19.27)$$

где

$$f_0(u) = \frac{24}{5u^4}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{1}{\operatorname{ch} u} - 1\right), \quad \psi_0(u) = \frac{3}{u^3}(u - \operatorname{th} u);$$

$$\varphi_0(u) = \frac{2}{u^2}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} u}\right). \qquad (19.28)$$

Функции f_0, ψ_0, φ_0 аргумента u были введены И. Г. Бубновым и называются его именем. Нетрудно заметить, что эти функции в выражениях (19.27) являются множителями при параметрах изгиба стержня в случае поперечного изгиба, т. е. при $T = 0$. Таким образом, указанные функции учитывают влияние продольной силы T, входящей в выражения посредством аргумента u, на элементы изгиба стержня. Очевидно, при $T = 0$ аргумент $u = 0$ и все функции И. Г. Бубнова должны быть равны единице, в чем нетрудно убедиться, вычисляя пределы функций (19.28) при $u \to 0$.

С ростом значения растягивающей силы T функции f_0, ψ_0, φ_0 убывают и при $T \to \infty$ ($u \to \infty$) они стремятся к нулю, как и все элементы изгиба стержня. Физически это вполне понятно, поскольку растягивающая сила стремится «распрямить» стержень.

В случае сжимающей продольной силы ($T < 0$) выражение для прогиба w может быть получено из формулы (19.23) при замене β на $i\beta^*$ с учетом формул (19.20):

$$w(x) = \frac{ql^4}{(2u^*) EI}\left[\frac{\cos \beta^* x}{\cos u^*} - 1 - \frac{1}{2}\left(u^{*2} - \beta^{*2} x^2\right)\right], \qquad (19.29)$$

где β^* — определяется формулой (19.18), а

$$u^* = 0{,}5\beta^* l. \qquad (19.30)$$

Аналогично из формул (19.27) и (19.28) можно получить выражения для наибольших значений элементов изгиба в случае сжимающей продольной силы, для чего необходимо заменить u на iu^* и учесть формулы (19.20):

$$\left.\begin{aligned} w(0) &= 5ql^4 f_0^*(u^*)/(384EI); \\ w'(\pm l/2) &= \mp ql^3 \psi_0^*(u^*)/(24EI); \\ M(0) &= -ql^2 \varphi_0^*(u^*)/8. \end{aligned}\right\} \qquad (19.31)$$

Здесь

$$f_0^*(u^*) = \frac{24}{5(u^*)^4}\left(\frac{1}{\cos u^*} - \frac{u^{*2}}{2} - 1\right); \quad \psi_0^*(u^*) = \frac{3}{u^{*3}}(\operatorname{tg} u^* - u^*);$$

$$\varphi_0^*(u^*) = \frac{3}{u^{*2}}\left(\frac{1}{\cos u^*} - 1\right). \qquad (19.32)$$

Функции f_0^*, ψ_0^*, φ_0^* при $T = u^* = 0$ (поперечный изгиб) равны единице и с ростом сжимающей силы T возрастают. Это показывает, что продольная сжимающая сила увеличивает элементы изгиба стержня.

Если $u^* = 0{,}5\pi$, значение сжимающей силы оказывается равным $T = \pi^2 EI/l^2$, стержень теряет устойчивость, а функции И. Г. Бубнова (19.32) и элементы изгиба (19.31) обращаются в бесконечность. При оценке этого теоретического результата необходимо иметь в виду, что он получен на базе зависимостей, справедливых лишь в случае малых прогибов, и его не следует понимать буквально. В действительности при некотором значении прогиба начнутся пластические деформации, а затем разрушение

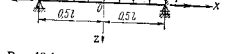


Рис. 19.4

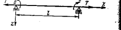


Рис. 19.5

стержня. Для точного описания поведения стержня при больших прогибах необходимо пользоваться более точной нелинейной теорией.

Жестко заделанный призматический стержень с равномерной поперечной нагрузкой (рис. 19.4). Выражение для прогиба этого стержня такое же, как и в предыдущем примере:

$$w(x) = -qx^2/2T + A_0 + A_2 \operatorname{ch} \beta x,$$

а граничные условия в жесткой заделке при $x = +0{,}5l$ следующие: $w = w' = 0$. Подставляя в эти условия выражение w, получаем

$$A_0 + A_2 \operatorname{ch} u = ql^2/(8T); \quad A_2\beta \operatorname{ch} u = ql/(2T).$$

Находя A_0 и A_2 из этих уравнений, выражение для прогиба стержня можно представить в виде

$$w(x) = \frac{ql^4}{(2u)^4 EI}\left(\frac{u^2 - \beta^2 x^2}{2} + \frac{u \operatorname{ch} \beta x}{\operatorname{sh} u} - \frac{u}{\operatorname{th} u}\right). \qquad (19.33)$$

Изгибающий момент равен

$$M = EIw'' = [ql^2/(4u^2)](u \operatorname{ch} \beta x/\operatorname{sh} u - 1). \qquad (19.34)$$

Максимальный прогиб при $x = 0$ и изгибающие моменты в среднем сечении $x = 0$ и на опорах $x = \pm 0{,}5l$ равны

$$\left.\begin{aligned} &w(0) = ql^4 f_1(u)/(384EI);\\ &M(0) = -ql^2\varphi_1(u)/24; \quad M(\pm 0{,}5l) = ql^2\chi(u)/12, \end{aligned}\right\} \qquad (19.35)$$

где

$$f_1(u) = \frac{24}{u^3}\left(\frac{u}{2} - th\,\frac{u}{2}\right); \quad \varphi_1(u) = \frac{6(\operatorname{sh} u - u)}{u^2 \operatorname{sh} u}; \quad \chi(u) = \frac{3(u - \operatorname{th} u)}{u^2 \operatorname{th} u}. \qquad (19.36)$$

Функции И. Г. Бубнова f_1, φ_1, χ учитывают влияние продольной силы на элементы изгиба рассматриваемого жестко заделанного стержня. При $T = u = 0$ все они равны единице, а при $T \to \infty$ стремятся к нулю.

В случае действия сжимающей продольной силы в формулах (19.33)—(19.36) необходимо положить $u = iu^*$ и перейти от функций $f_1(u)$, $\varphi_1(u)$, $\chi(u)$ к функциям $f_1^*(u^*)$, $\varphi_1^*(u^*)$, $\chi^*(u^*)$, которые при $T = u^* = 0$ равны единице, а при $u^* = \pi$ обращаются в бесконечность, что соответствует потере устойчивости жестко заделанного стержня при сжимающей нагрузке $T = 4\pi^2 EI/l^2$.

Свободно опертый стержень, нагруженный моментами в опорных сечениях (рис. 19.5). В рассматриваемом случае $q(x) = 0$ и $w_0 = 0$, следовательно, частное решение $w_{ч.\,р} = 0$ и прогиб на основании выражения (19.16) равен

$$w(x) = A_0 + A_1\beta x + A_2 \operatorname{ch} \beta x + A_3 \operatorname{sh} \beta x.$$

Для определения произвольных постоянных A_i выпишем граничные условия при $x = 0$ и $x = l$, полагая пока $M_1 = 0$, $M_2 \neq 0$: $w(0) = w''(0) = w(l) = 0$; $EIw''(l) = M_2$. Подчиняя прогиб w граничным условиям, находим произвольные постоянные:

$$A_0 = A_2 = 0; \quad A_1 = -M_2/(2u\beta^2 EI); \quad A_3 = M_2/(\beta^2 EI \operatorname{sh} 2u),$$

подставив которые в выражения для прогиба w, получим следующие элементы изгиба:

$$\left.\begin{aligned} w(x) &= [M_2 l^2/(4u^2 EI)]\,[\operatorname{sh} \beta x/\operatorname{sh} 2u - \beta x/(2u)];\\ w' &= [M_2 l/(2uEI)]\,[\operatorname{ch} \beta x/\operatorname{sh} 2u - 1/(2u)];\\ M(x) &= M_2 \operatorname{sh} \beta x/\operatorname{sh} 2u. \end{aligned}\right\} \qquad (19.37)$$

Углы поворота опорных сечений $x = 0$ и $x = l$ равны

$$w'(0) = -M_2 l\psi_2(u)/(6EI); \quad w'(l) = M_2 l\psi_1(u)/(3EI), \qquad (19.38)$$

где

$$\psi_1(u) = \frac{3}{2u}\left(\frac{1}{\operatorname{th} 2u} - \frac{1}{2u}\right); \quad \psi_2(u) = \frac{3}{u}\left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{\operatorname{sh} 2u}\right). \qquad (19.39)$$

Выражения (19.38) отличаются от аналогичных выражений при поперечном изгибе наличием множителей $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$, которые являются функциями И. Г. Бубнова и учитывают влияние растягивающей силы на углы поворота опорных сечений.

Если принять также и $M_1 \neq 0$, то все элементы изгиба можно найти, пользуясь методом наложения. В частности, для углов поворота опорных сечений с учетом зависимостей (19.38) получим

$$\left.\begin{aligned} w'(0) &= -M_1 l\psi_1(u)/(3EI) - M_2 l\psi_2(u)/(6EI);\\ w'(l) &= M_1 l\psi_2(u)/(6EI) + M_2 l\psi_1(u)/(3EI). \end{aligned}\right\} \qquad (19.40)$$

Если продольная сила сжимающая, то в формулы (19.38) и (19.40) вместо функций $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ следует вводить функции

$$\psi_1^*(u^*) = \frac{3}{2u^*}\left(\frac{1}{2u^*} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2u^*}\right); \quad \psi_2^*(u^*) = \frac{3}{u^*}\left(\frac{1}{\sin 2u^*} - \frac{1}{2u^*}\right). \qquad (19.41)$$

Выражения (19.40) использованы в дальнейшем при расчете многопролетных стержней. Они будут играть ту же роль, что и аналогичные формулы при поперечном изгибе.

Стержень с начальной синусоидальной погибью (рис. 19.6). В реальных случаях ось стержня может иметь начальную кривизну, в связи с чем представляет интерес оценить влияние этого фактора на элементы сложного изгиба.

При начальной синусоидальной погиби (19.21) и при отсутствии поперечной нагрузки ($q = 0$) общее выражение для упругого прогиба w на основании формул (19.16) и (19.22) имеет вид

$$w(x) = A_0 + A_1\beta x + A_2 \operatorname{ch} \beta x + A_3 \operatorname{sh} \beta x - Ta_0 \sin \pi x/l/(T + \pi^2 EI/l^2). \qquad (19.42)$$

Для свободно опертого стержня $w = w'' = 0$ при $x = 0$ и $x = l$, все произвольные постоянные равны нулю и выражение (19.42) принимает следующий простой вид:

$$w(x) = -[Ta_0/(T + \pi^2 EI/l^2)] \sin \pi x/l. \qquad (19.43)$$

Изгибающий момент равен

$$M(x) = EIw'' = \{Ta_0/[1 + Tl^2/(\pi^2 EI)]\} \sin \pi x/l, \qquad (19.44)$$

а нормальные напряжения в наиболее опасном среднем сечении $x = 0{,}5l$ на основании (19.6) равны

$$\sigma = \frac{T}{F}\left\{1 - \frac{Fa_0 z}{I[1 + Tl^2/(\pi^2 EI)]}\right\}. \qquad (19.45)$$

Если $a_0 > 0$, т. е. начальная погибь направлена вниз, то наибольшие нормальные напряжения будут в верхних волокнах стержня при $z < 0$. Если $a_0 < 0$, наибольшие нормальные напряжения будут в нижних волокнах стержня при $z > 0$. Выражение в фигурных скобках формулы (19.45) для максимального напряжения всегда больше единицы, и, следовательно, эти напряжения при наличии начальной погиби всегда больше, чем напряжения растяжения или сжатия прямого стержня, равные $\sigma_0 = T/F$. Итак, начальная погибь отрицательно влияет на прочность как растянутых, так и сжатых стержней. Особенно существенно отрицательное влияние начальной погиби при сжимающих продольных силах. В этом случае по мере роста силы элементы изгиба интенсивно возрастают, а при сжимающей силе $T = -\pi^2 EI/l^2$ прогиб, изгибающий момент и наибольшие нормальные напряжения, определяемые формулами (19.43)—(19.45), обращаются в бесконечность, что свидетельствует о потере устойчивости стержня.

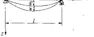


Рис. 19.6

Качественно аналогичное влияние начальной погиби будет и при других условиях закрепления концов стержня. Например, для

жестко заделанного по концам стержня, подчиняя прогиб (19.42) условиям $w = w' = 0$ при $x = 0$ и $x = l$, получаем в случае растягивающей продольной силы

$$w(x) = \frac{Ta_0}{T + \pi^2 EI/l^2}\left\{\frac{\pi}{2u \operatorname{th} u}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} \beta (x - 0{,}5l)}{\operatorname{ch} u}\right] - \sin\frac{\pi x}{l}\right\}, \qquad (19.46)$$

а в случае сжимающей продольной силы

$$w(x) = \frac{|T|\,a_0}{\pi^2 EI/l^2 - |T|}\left\{\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{\pi[\cos u^* - \cos \beta^*(x - 0{,}5l)]}{2u^* \sin u^*}\right\}. \qquad (19.47)$$

По формулам (19.2) и (19.6) можно найти изгибающие моменты и нормальные напряжения, соответствующие прогибам (19.46), (19.47), и показать, что и в этом случае начальная синусоидальная погибь отрицательно влияет на прочность.

Отрицательное влияние начального прогиба, имеющего форму n-узловой синусоиды, сохраняется, хотя и уменьшается по мере увеличения числа полуволн n. Поэтому вывод об отрицательном влиянии начальной погиби на прочность стержней, особенно при сжимающих продольных усилиях, относится к начальной погиби любой формы, что и заставляет регламентировать начальные погиби при постройке и ремонте судов соответствующими технологическими допусками.

Влияние осевых продольных сил на элементы изгиба балок судового набора. В условиях сложного изгиба находятся главным образом продольные балки судового набора, которые одновременно загружены поперечной нагрузкой и продольными усилиями от общего изгиба корпуса судна. Элементы сложного изгиба балок в рассмотренных выше случаях заделки их концов могут быть определены по полученным выше формулам как произведения элементов поперечного изгиба на соответствующие функции Бубнова. Аргументами этих функций являются величины, связанные с продольной силой и параметрами балки зависимостью

$$u = u^* = (l/2)\sqrt{|T|/(EI)}. \qquad (19.48)$$

Расчеты показывают, что для балок судового набора при характерных для них численных значениях l, T, EI аргументы u и u^* оказываются равными примерно 0,5. При $u = u^* = 0{,}5$ полученные выше функции Бубнова имеют следующие значения [51, табл. 6.3—6.5]: $f_0 = 0{,}908$; $\psi_0 = 0{,}909$; $\varphi_0 = 0{,}905$; $f_0^* = 1{,}11$; $\psi_0^* = 1{,}11$; $\varphi_0^* = 1{,}12$; $f_1 = 0{,}976$; $\varphi_1 = 0{,}972$; $\chi = 0{,}984$; $\psi_1 = 0{,}939$; $\psi_2 = 0{,}894$; $\psi_1^* = 1{,}07$; $\psi_2^* = 1{,}13$.

Таким образом, все функции при $u \leqslant 0{,}5$ незначительно отличаются от единицы, что свидетельствует о несущественном влиянии продольных сил на элементы изгиба судовых балок. Поэтому в практических расчетах балок судового набора, как правило, прогибы, изгибающие моменты, перерезывающие силы вычисляют по формулам для поперечного изгиба, т. е. без учета влияния продольных сил. Напряжения определяют по формулам (19.6) с учетом продольной силы T. Следует иметь в виду, что, не учитывая влияния продольной силы на элементы поперечного изгиба, делается ошибка в безопасную сторону в случае растяжения и в опасную в случае сжатия.

При аргументах $u = u^* > 0{,}5$, т. е. для гибких стержней (относительно большая длина l или малая изгибная жесткость EI), влияние продольных сил значительно и пренебрегать им нельзя. Такие случаи будут рассматриваться при расчете пластин (см. § 21.11). Значительным оказывается влияние продольной силы на изгиб стоек поперечных переборок, расположенных под карлингсами грузовых палуб, и это должно учитываться при практических расчетах стоек на прочность.

В случае $u = u^* > 0{,}5$ практический расчет призматических стержней при сложном изгибе может быть выполнен с помощью справочных таблиц сложного изгиба балок [51, с. 172], составленных для простейших поперечных нагрузок и постоянных (растягивающих и сжимающих) продольных сил. При действии совокупности поперечных нагрузок параметры сложного изгиба определяются с помощью указанных таблиц методом наложения в соответствии с принципом независимости действия сил (см. § 19.1). Поэтому общее решение (19.6) или (19.9) дифференциального уравнения (19.15) приходится использовать при практических расчетах только в случаях, выходящих за рамки справочных таблиц сложного изгиба призматических стержней.

§ 19.3. Сложный изгиб стержня с упругим распором

В рассмотренных выше задачах сложного изгиба предполагалось, что продольная сила является заданной и неизменной в процессе изгиба стержня, что возможно при беспрепятственном перемещении опор стержня в продольном направлении. Если опоры балки совершенно не могут перемещаться в продольном направлении или их перемещения в этом направлении стеснены упругими связями, то такие опоры препятствуют сближению концов стержня, которое происходит при его изгибе. В результате возникает продольная сила. Значение ее, очевидно, будет тем больше, чем больше прогиб стержня. В этом случае появляется взаимное влияние продольной силы на прогиб балки и прогиба на продольную силу. Последняя становится статически неопределимой. Такие случаи сложного изгиба приходится рассматривать при расчете очень гибких стержней и особенно пластин судового корпуса, сближению опорных сечений которых препятствуют соседние с ними упругие связи.

Связи, препятствующие сближению опорных сечений стержня при его изгибе, называются *распорами*. Распоры будем считать линейно деформируемыми.

Схематически стержень с распором представлен на рис. 19.7. В концевых сечениях системы стержень — распор приложена внешняя продольная сила T, а к стержню — внешняя поперечная нагрузка q. Стержень и распор считаются в дальнейшем призматическими с площадью поперечных сечений F_1 и F_2 соответственно и одинаковым модулем упругости E.

Стержень вместе с распором является статически неопределимой системой, в которой внешняя продольная сила T распределяется так, что стержнем воспринимается сила T_1, а распором сила T_2, которые связаны очевидным условием статики $T_1 + T_2 = T$.

Обозначая через σ_1 и σ_2 нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях стержня и распора под действием продольных усилий, получим $\sigma_1 = T_1/F_1$; $\sigma_2 = T_2/F_2$. Выражая усилия T_1

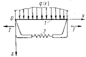


Рис. 19.7

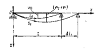


Рис. 19.8

и T_2 через σ_1 и σ_2 в написанном выше условии статики, получаем $\sigma_1 F_1 + \sigma_2 F_2 = T$. Если обозначить

$$\sigma_0 = T/(F_1 + F_2); \quad K = F_2/(F_1 + F_2), \tag{19.49}$$

то последнее уравнение нетрудно привести к виду

$$\sigma_1 (1 - K) + \sigma_2 K = \sigma_0, \tag{19.50}$$

где σ_0 — среднее нормальное напряжение в конструкции стержень — распор.

Величина K, определяемая второй формулой (19.49) и представляющая собой отношение площади F_2 поперечного сечения распора к суммарной площади конструкции стержень — распор, называется *коэффициентом распора*. Коэффициент распора K может изменяться в пределах от нуля ($F_2 = 0$) до единицы (абсолютно жесткий распор, у которого $F_2 = \infty$).

Для определения напряжений σ_1 и σ_2 в стержне и распоре дополнительно к условию статики (19.50) необходимо составить условие совместности деформаций стержня и распора в продольном направлении. Очевидно, продольное перемещение одного конца стержня при неподвижном другом конце будет равно удлинению (или сжатию) распора. Удлинение распора, находящегося в условиях растяжения-сжатия под действием напряжений σ_2, определяется выражением

$$\Delta l_2 = \sigma_2 l/E, \tag{19.51}$$

где E — модуль упругости; l — длина распора.

Определим продольное перемещение Δl_1 подвижного конца стержня (рис. 19.8). Так как при сложном изгибе длина оси стержня изменяется под действием продольного усилия, то длина оси стержня до и после деформации будет связана зависимостью

$$S_1 = S_0 + \Delta S, \tag{19.52}$$

где S_0 и S_1 — длины оси стержня до и после деформации соответственно; ΔS — удлинение (или укорочение) оси стержня под действием напряжений σ_1.

На основании известной формулы для длины дуги кривой в соответствии с рис. 19.8 имеем

$$S_0 = \int_0^l \sqrt{1 + (w_0')^2}\, dx; \quad S_1 = \int_0^{l+\Delta l_1} \sqrt{1 + (w_0' + w')^2}\, dx.$$

Учитывая малость прогибов w_0 и w, радикалы в подынтегральных выражениях можно заменить двумя первыми членами биномиальных рядов и после этого нетрудно вычислить

$$S_0 \cong \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2}(w_0')^2\right] dx = l + \frac{1}{2}\int_0^l (w_0')^2\, dx;$$

$$S_1 \cong \int_0^{l+\Delta l_1} \left[1 + \frac{1}{2}(w_0' + w')^2\right] dx \approx l + \Delta l_1 + \frac{1}{2}\int_0^l (w_0' + w')^2\, dx.$$

Удлинение ΔS оси стержня при его растяжении-сжатии определяется по закону Гука формулой $\Delta S = \sigma_1 S_0/E \approx \sigma_1 l/E$, т. е. при малых начальных прогибах стержня w_0 длину его оси допустимо заменить длиной его пролета l.

Подставив полученные выражения для S_0, S_1 и ΔS в зависимость (19.52), найдем продольное перемещение подвижного конца стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1}{E}\, l - \frac{1}{2}\int_0^l \left[(w_0' + w')^2 - (w_0')^2\right] dx.$$

Приравнивая продольное перемещение Δl_1 удлинению распора Δl_2, с учетом последнего выражения и формулы (19.51) получим

$$\sigma_1 = \sigma_2 + \frac{E}{2l}\int_0^l \left[(w')^2 + 2w_0' w'\right] dx. \tag{19.53}$$

Уравнения (19.50) и (19.53) определяют напряжения σ_1 и σ_2 в поперечных сечениях стержня и распора. При этом напряжение σ_1 в левую часть уравнения (19.53) входит явно, а в правую — неявно через упругий прогиб стержня w, зависящий от продольной силы $T_1 = \sigma_1 F_1$ и определяемый дифференциальным уравнением сложного изгиба стержня

$$EIw^{\mathrm{IV}} - T_1 w'' = q(x) + T_1 w_0''. \tag{19.54}$$

Если из уравнения (19.53) исключить σ_2 с помощью зависимости (19.50), то получим

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \frac{EK}{2l}\int_0^l \left[(w')^2 + 2w_0' w'\right] dx. \tag{19.55}$$

В этом уравнении содержится лишь одно неизвестное напряжение σ_1, входящее явно в его левую часть и неявно в правую. Уравнение (19.55) было впервые получено И. Г. Бубновым, применявшим его к исследованию сложного изгиба пластин, не участвующих в общем изгибе корпуса судна.

Практический интерес представляют следующие две постановки задачи:

1) задана продольная сила в распоре T_2; необходимо определить силу в стержне T_1;

2) задана суммарная продольная сила T, действующая на стержень и распор; необходимо найти продольные усилия в стержне и распоре.

Решение обеих задач оказывается сложным, так как уравнения (19.53) и (19.55) после исключения из них прогиба и вычисления интегралов будут трансцендентными относительно напряжений σ_1. Поэтому решать уравнения приходится численными или графическими методами, для чего необходимо задаться рядом значений σ_1, найти точное выражение для прогиба из дифференциального уравнения (19.54) при заданных граничных условиях, а затем вычислить соответствующие значения σ_2 или σ_0 по формулам (19.53) или (19.55). Располагая зависимостями σ_2 и σ_0 в функции от σ_1, нетрудно найти значения σ_1 по заданным значениям σ_2 или σ_0.

В практических расчетах для упрощения вычислений в уравнениях (19.53) и (19.55) точное выражение прогиба часто заменяют приближенным. Так, можно воспользоваться формулой для прогиба w в виде только одного члена тригонометрического ряда. Например, для свободно опертого по концам стержня, загруженного равномерной поперечной нагрузкой $q = \mathrm{const}$ и имеющего начальную синусоидальную погибь в форме (19.21), приближенное решение уравнения (19.54) можно получить в виде одного члена ряда Фурье $w \approx A \sin \pi x/l$. Неизвестную постоянную A можно определить следующим образом: подставим в уравнение (19.54) выражение w, заменим нагрузку $q = \mathrm{const}$ одним первым членом разложения ее в ряд по синусам и подставим в уравнение (19.54) выражение w_0 из (19.21). Тогда из полученного уравнения найдем постоянную A, что позволяет окончательно выписать выражение для прогиба

$$w \approx \{4ql^4/[\pi^5 EI(1+\alpha)] - [\alpha a_0/(1+\alpha)]\} \sin \pi x/l, \tag{19.56}$$

где

$$\alpha = T_1 l^2/(\pi^2 EJ) = \sigma_1 F_1 l^2/(\pi^2 EI). \tag{19.57}$$

Подставляя зависимости (19.21) и (19.56) в уравнения (19.53) и (19.55), приведем их к следующей форме:

$$\alpha(1+\alpha)^2=(m-\beta_1)(1+\alpha)^2+\beta_2; \tag{19.58}$$

$$\alpha(1+\alpha)^2=(n-K\beta_1)(1+\alpha)^2+K\beta_2. \tag{19.59}$$

Здесь

$$\left.\begin{array}{l} m=\sigma_2F_1l^2/(\pi^2EI); \quad n=\sigma_0F_1l^2/(\pi^2EI); \\ \beta_1=F_1a_0^2/(4I); \quad \beta_2=\left[F_1/(4I)\right]\left[4ql^4/(\pi^5EI)+a_0\right]^2. \end{array}\right\} \tag{19.60}$$

Если задано напряжение в распоре σ_2 (или m), то из кубического уравнения (19.58) можно найти неизвестный параметр α, а затем из формулы (19.57) и напряжения в стержне σ_1. Если заданы средние напряжения в конструкции σ_0, то для определения σ_1 используют кубическое уравнение (19.59) и зависимость (19.57). Формулы (19.53) и (19.55) могут быть использованы для вычисления напряжений σ_1 и продольных усилий T_1 в стержне и в том случае, когда опорные его сечения неподвижны (распор является абсолютно жестким, $F_2=\infty$). В этом случае в уравнении (19.53) необходимо положить $\sigma_2=0$, а в уравнении (19.55) $\sigma_0=0$ и $K=1$.

Отметим, что приближенные уравнения (19.58) и (19.59) позволяют довольно точно определять значения параметра $\alpha(\sigma_i)$ и поэтому широко используются при практических расчетах свободно опертых стержней, подвергающихся действию равномерной поперечной нагрузки. Аналогичные приближенные уравнения можно получить и для жестко заделанных стержней [37, 51].

После раскрытия статической неопределимости продольная сила T_1 станет известной. Дальнейший расчет стержня производят по полученным ранее формулам сложного изгиба.

§ 19.4 Расчет многопролетных стержней при сложном изгибе

Рассмотрим многопролетный стержень на упругих независимых опорах, загруженный поперечной нагрузкой и продольной силой (рис. 19.9, *а*). В пределах каждого пролета стержень является призматическим. Величины, относящиеся к отдельным пролетам, снабжаются нижним индексом в соответствии с номером левой опоры (например, Q_i, I_i, l_i), а коэффициенты податливости упругих опор A_i — с номером опоры.

Для раскрытия статической неопределимости рассматриваемого стержня воспользуемся методом сил, приняв за основные неизвестные опорные моменты M_i стержня. После деформации стержня упругие опоры получат просадки w_i, а его каждый пролет окажется загруженным опорными моментами и заданной внешней нагрузкой. Учитывая сказанное, вырежем из деформированного стержня два соседних пролета $(i-1, i)$ и $(i, i+1)$, показанные на рис. 19.9, *б*, и составим условие совместности угловых деформаций на i-й опоре. Углы поворота опорных сечений вызываются заданной в пролете внешней поперечной нагрузкой, опорными моментами и просадками упругих опор. При этом углы поворота от внешней поперечной нагрузки и опорных моментов должны быть определены с учетом влияния продольной силы. Таким образом, условие совместности угловых деформаций на i-й опоре двух соседних пролетов в соответствии с рис. 19.9, *б* можно записать в виде

$$\alpha_i(T, Q_{i-1})+\frac{M_{i-1}l_{i-1}}{6EI_{i-1}}\psi_2(u_{i-1})+\frac{M_il_{i-1}}{3EI_{i-1}}\psi_1(u_{i-1})+\frac{w_i-w_{i-1}}{l_{i-1}}=$$

$$=\alpha_i(T, Q_i)-\frac{M_il_i}{3EI_i}\psi_1(u_i)-\frac{M_{i+1}l_i}{6EI_i}\psi_2(u_i)+\frac{w_{i+1}-w_i}{l_i}, \tag{19.61}$$

где $\alpha_i(T, Q_{i-1})$ и $\alpha_i(T, Q_i)$ — углы поворота на i-й опоре от внешней нагрузки пролетов $(i-1, i)$ и $(i, i+1)$ с учетом влияния продольной силы в предположении свободного опирания каждого пролета на жесткие опоры;

$$u_i=(l_i/2)\sqrt{T/(EI_i)}. \tag{19.62}$$

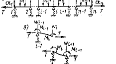


Рис. 19.9

Выражение в левой части уравнения (19.61) представляет суммарный угол поворота пролета $(i-1, i)$ на i-й опоре, а в правой — угол поворота пролета $(i, i+1)$ на той же опоре. Функции $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ учитывают влияние продольной растягивающей силы на углы поворота опорных сечений при действии опорных моментов в соответствии с формулами (19.40). Очевидно, уравнение типа (19.61) можно составить для каждой опоры, на которой не известен опорный момент, получив в результате столько уравнений, сколько неизвестных опорных моментов.

В уравнение (19.61) входят также неизвестные просадки упругих опор w_i. Однако их можно исключить из этих уравнений с помощью зависимостей между просадками упругих опор и опорными моментами. Очевидно, что $w_i=A_iR_i$, где R_i — реакция i-й опоры. Реакцию R_i можно выразить через пролетные нагрузки, опорные моменты и продольную силу следующим образом (см. рис. 19.9, *б*):

$$R_i=R_i(Q_{i-1})+\frac{M_i-M_{i-1}}{l_{i-1}}-T\frac{w_i-w_{i-1}}{l_{i-1}}+$$

$$+R_i(Q_i)+\frac{M_i-M_{i+1}}{l_i}+T\frac{w_{i+1}-w_i}{l_i},$$

где $R_i(Q_{i-1}$ и $R_i(Q_i)$ — реакции на i-й опоре от пролетных нагрузок Q_{i-1} и Q_i, вычисленные в предположении свободного опирания пролетов на опоры. Члены, содержащие M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, дают реакции от опорных моментов, а члены, содержащие продольную силу, — реакции от моментов продольной силы T, возникающих в результате различия просадок соседних опор.

Подставляя выражения для R_i в формулы для просадок w_i, получаем

$$w_i = A_i\left[R_i(Q_{i-1}) + R_i(Q_i) + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_{i-1}} + \frac{M_i - M_{i+1}}{l_i} + \right.$$
$$\left. + T\left(\frac{w_{i+1} - w_i}{l_i} - \frac{w_i - w_{i-1}}{l_{i-1}}\right)\right]. \qquad (19.63)$$

Совместное решение систем уравнений типов (19.61) и (19.63) позволяет найти неизвестные опорные моменты M_i и просадки w_i, после определения которых статическая неопределимость многопролетного стержня будет раскрыта, а его расчет сведется к расчету сложного изгиба каждого пролета в отдельности с учетом внешних поперечных нагрузок, опорных моментов и продольной силы. Отметим, что системы линейных уравнений (19.61) и (19.63) в каждом конкретном случае удобнее решать в численном виде, предварительно вычислив функции Бубнова ψ_1 и ψ_2, углы поворота сечений на опорах $\alpha_i(T, Q_i)$ и реакции $R_i(Q_i)$ от пролетной внешней нагрузки по справочным таблицам [51, т. 1, с. 159].

Если продольная сила T будет сжимающей, то схема и порядок расчета остаются прежними, но в уравнениях (19.61) и (19.63) у силы T необходимо поменять знак на обратный и заменить функции $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ на функции $\psi_1^*(u^*)$ и $\psi_2^*(u^*)$.

Отметим один частный случай, важный для дальнейшего. Пусть стержень по всей длине является призматическим ($I_i = I = \text{const}$); все его пролеты одинаковы ($l_i = a$) и коэффициенты податливости упругих опор равны ($A_i = A$). Тогда уравнения (19.61) и (19.63) с учетом выражений (19.62) после несложных преобразований можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}
&(M_{i-1} + M_{i+1})\psi_2(u) + 4M_i\psi_1(u) + \\
&+ (6EI/a^2)(2w_i - w_{i-1} - w_{i+1}) = \\
&= (6EI/a)[\alpha_i(T, Q_i) - \alpha_i(T, Q_{i-1})]; \\
&2M_i - M_{i-1} - M_{i+1} - \\
&- (4u^2EI/a^2)\{[2 + Ka^3/(4u^2EI)]w_i - w_{i-1} - w_{i+1}\} = \\
&= -a[R_i(Q_{i-1}) + R_i(Q_i)],
\end{aligned}\right\} \qquad (19.64)$$

где $u = (a/2)\sqrt{T/(EI)}$; $K = 1/A$ — коэффициент жесткости упругих опор.

В случае сжимающей продольной силы T с учетом выражений (19.41) получим

$$\left.\begin{aligned}
&(M_{i-1} + M_{i+1})(2u^* - \sin 2u^*) + 2M_i(\sin 2u^* - 2u^*\cos 2u^*) + \\
&+ (2u^*)^2\frac{EI}{a^2}(2w_i - w_{i-1} - w_{i+1})\sin 2u^* = \\
&= (2u^*)^2\frac{EI}{a}[\alpha_i(T, Q_i) - \alpha_i(T, Q_{i-1})]\sin 2u^*; \\
&2M_i - M_{i-1} - M_{i+1} + \\
&+ (2u^*)^2\frac{EI}{a^2}\left[\left(2 - \frac{Ka^3}{4u^{*2}EI}\right)w_i - w_{i-1} - w_{i+1}\right] = \\
&= -a[R_i(Q_{i-1}) + R_i(Q_i)].
\end{aligned}\right\} \qquad (19.65)$$

Здесь $u^* = (a/2)\sqrt{|T|/(EI)}$.

Система уравнений (19.65) позволяет раскрыть статическую неопределимость призматического стержня на одинаковых равноотстоящих упругих опорах в случае продольной сжимающей силы, а система (19.64) — в случае растягивающей. В более общем случае для раскрытия статической неопределимости стержня необходимо использовать полученные выше уравнения (19.61) и (19.63).

Нетрудно заметить, что уравнения (19.61) и (19.63) при $T = 0$ превращаются в уравнения теоремы пяти моментов для раскрытия статической неопределимости многопролетной балки на упругих независимых опорах при поперечном изгибе.

§ 19.5. Расчет однопролетных непризматических стержней при сложном изгибе

В общем случае непризматического стержня и переменной по длине продольной силы, когда дифференциальное уравнение сложного изгиба (19.4), как правило, нельзя точно проинтегрировать и выразить его решение через конечное число элементарных функций, приходится использовать приближенные методы, из которых наиболее распространенными являются методы Ритца, метод Бубнова — Галеркина и метод конечных элементов. Ниже кратко излагаются указанные методы применительно к задачам сложного изгиба.

Метод Ритца. Общая схема вычислений при определении элементов сложного изгиба стержней, очевидно, остается такой же, как и в § 10.6. Прогиб стержня представляется в виде ряда

$$w = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x), \qquad (19.66)$$

где n — число удерживаемых членов ряда, зависящее от требуемой точности; a_k — неизвестные коэффициента ряда (обобщенные координаты); $\varphi_k(x)$ — фундаментальные функции. Система фундаментальных функций, как известно, должна быть полной и обязательно удовлетворять кинематическим граничным условиям, а по возможности и силовым.

Неизвестные коэффициенты a_k ряда (19.66) находят из системы уравнений (10.56) $\dfrac{\partial(\Pi - U)}{\partial a_i} = 0$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$, представляющих математическое выражение принципа возможных перемещений.

Как было показано, суммарная силовая функция $(\Pi - U)$ при сложном изгибе однопролетных стержней под действием продольной силы и распределенной поперечной нагрузки выражается формулой (19.13). При этом функция $(\Pi - U)$, согласно формуле (19.66), зависит от коэффициентов a_i, которые входят туда через w. Учитывая это и дифференцируя выражение (19.13) по a_i, получаем

$$\int_0^l EIw'' \frac{\partial w''}{\partial a_i} dx + \int_0^l T(w' + w_0') \frac{\partial w'}{\partial a_i} dx - \int_0^l q \frac{\partial w}{\partial a_i} dx = 0, \quad (19.67)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Вследствие формулы (19.66) имеем

$$\frac{\partial w}{\partial a_i} = \varphi_i(x); \quad \frac{\partial w'}{\partial a_i} = \varphi_i'(x); \quad \frac{\partial w''}{\partial a_i} = \varphi_i''(x),$$

а уравнения (19.67) можно записать в виде

$$\int_0^l EI \left[\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k''(x)\right] \varphi_i''(x)\, dx + \int_0^l T\left[w_0' + \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k'(x)\right] \varphi_i'(x)\, dx -$$

$$- \int_0^l q\varphi_i(x)\, dx = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (19.68)$$

Обозначая

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^l EI(x)\varphi_k''(x)\varphi_i''(x)\,dx = A_{ki};\\ &\int_0^l T\varphi_k'(x)\varphi_i'(x)\,dx = T_{ki};\\ &\int_0^l q(x)\varphi_i(x)\,dx - \int_0^l T(x)w_0'(x)\varphi_i'(x)\,dx = B_i, \end{aligned}\right\} \quad (19.69)$$

уравнения (19.68) можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n} (A_{ki} + T_{ki})a_k = B_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (19.70)$$

Для наглядности уравнения (19.70) запишем в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned} &(A_{11} + T_{11})a_1 + (A_{21} + T_{21})a_2 + \ldots + (A_{n1} + T_{n1})a_n = B_1;\\ &(A_{12} + T_{12})a_1 + (A_{22} + T_{22})a_2 + \ldots + (A_{n2} + T_{n2})a_n = B_2;\\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ &(A_{1n} + T_{1n})a_1 + (A_{2n} + T_{2n})a_2 + \ldots + (A_{nn} + T_{nn})a_n = B_n. \end{aligned}\right\} \quad (19.71)$$

Таким образом, решение задачи сводится к выбору фундаментальных функций $\varphi_k(x)$, определению коэффициентов A_{ki}, T_{ki} и B_i

по формулам (19.69) и к решению системы алгебраических линейных уравнений (19.71) относительно a_k. Остальные элементы изгиба легко найти по общим формулам (19.2) и (19.3), подставив в них прогиб (19.66).

Важным при применении метода Ритца является удачный выбор фундаментальных функций. Чем меньшим числом таких функций можно ограничиться в ряду (19.66) для достаточно точной аппроксимации прогиба, тем меньше число определяемых коэффициентов a_k. Наиболее просто решается задача, если удается всего лишь одной функцией представить форму изгиба балки в рассматриваемом конкретном случае.

Метод Бубнова — Галеркина. Прогиб w разыскивают в форме (19.66) при обязательном удовлетворении фундаментальными функциями $\varphi_k(x)$ всех граничных условий. Коэффициенты a_k ряда (19.66) определяют из уравнений вида [см. выражение (10.82)]

$$\int_0^l [(EIw'')'' - (Tw')']\varphi_i(x)\,dx = \int_0^l [q + (Tw_0')']\varphi_i(x)\,dx, \quad (19.72)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

которые получают после умножения дифференциального уравнения сложного изгиба (19.4) на $\varphi_i(x)$ и интегрирования в пределах длины стержня. Очевидно, что таких уравнений можно выписать столько, сколько членов ряда содержится в выражении для прогиба (19.66).

Если выражение (19.66) подставить в уравнение (19.72), то после перемены порядка интегрирования и суммирования получим

$$\sum_{k=1}^{n} (\overline{A}_{ki} + \overline{T}_{ki})a_k = \overline{B}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (19.73)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\overline{A}_{ki} = \int_0^l (EI\varphi_k'')''\varphi_i(x)\,dx; \quad \overline{T}_{ki} = -\int_0^l (T\varphi_k')'\varphi_i(x)\,dx;\\ &\overline{B}_i = \int_0^l [q + (Tw_0')']\varphi_i(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (19.74)$$

Таким образом, выбрав фундаментальные функции $\varphi_k(x)$, вычислив по формулам (19.74) коэффициенты $\overline{A}_{ki}$, $\overline{T}_{ki}$ и $\overline{B}_i$ системы (19.73) и решая ее относительно a_k, найдем прогиб (19.66).

Метод Бубнова — Галеркина дает те же результаты, что и метод Ритца, если фундаментальные функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют всем граничным условиям и в обоих методах приняты одинаковыми. В этом можно убедиться, если интегрированием по частям с учетом граничных условий преобразовать формулы (19.74) к виду (19.69). Системы уравнений (19.73) и (19.70) окажутся эквивалентными.

Метод конечных элементов. При расчете МКЭ стержень разбивается на конечные элементы такой длины, чтобы в пределах каждого элемента изгибную жесткость EI и продольную силу T можно было бы считать практически постоянными. Стержень оказывается представленным в виде совокупности последовательно соединенных в узловых точках призматических элементов.

В гл. 11 изложены основные положения МКЭ применительно к расчету стержневых систем. Поставленная здесь задача отличается от рассмотренных в гл. 11 тем, что конечный элемент, находящийся под воздействием поперечной нагрузки интенсивностью $q(x)$ и продольных сил T, испытывает сложный изгиб. Это, естественно, должно сказаться на содержании его матрицы жесткости.

Рис. 19.10

Рассмотрим деформированное состояние упомянутого выше конечного элемента в **местной системе** координат xoz (рис. 19.10). В качестве обобщенных перемещений элемента q_i примем прогибы и углы поворота его узловых сечений:

$$q_1 = w(0); \quad q_2 = \frac{\partial w}{\partial x}(0); \quad q_3 = w(a); \quad q_4 = \frac{\partial w}{\partial x}(a). \qquad (19.75)$$

Положительные направления узловых перемещений (19.75) и соответствующих им обобщенных узловых усилий R_i (перерезывающих сил изгибающих моментов) приведены на рис. 19.10.

Прогиб конечного элемента аппроксимируем с помощью выражения (11.71):

$$w(x) = \sum_{k=1}^{4} q_k \text{Э}_k(x), \qquad (19.76)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\text{Э}_1(x) = 1 - 3x^2/a^2 + 2x^3/a^3; \quad \text{Э}_2(x) = x - 2x^2/a + x^3/a^2; \\ &\text{Э}_3(x) = 3x^2/a^2 - 2x^3/a^3; \quad \text{Э}_4(x) = -x^2/a + x^3/a^2 \end{aligned}\right\} \qquad (19.77)$$

— одномерные функции Эрмита (11.72).

До сих пор для каждого из рассмотренных конечных элементов мы раздельно определяли его матрицу жесткости и вектор узловых эквивалентных внешних усилий. Однако в данном случае для получения основных уравнений МКЭ целесообразно использовать несколько иной подход. Суть его состоит в следующем. Дополнительно к внешней нагрузке $q(x)$, продольным усилиям T конечный элемент загружен усилиями взаимодействия R_i со смежными конечными элементами. Полная энергия такого элемента равна

$$\text{Э} = \Pi - U - U_R, \qquad (19.78)$$

где Π — потенциальная энергия изгиба элемента; U — силовая функция работы поперечной нагрузки $q(x)$ и продольных усилий T;

$$U_R = \sum_{i=1}^{4} R_i q_i \qquad (19.79)$$

— силовая функция обобщенных узловых усилий.

Для призматического конечного элемента при $T = \text{const}$ на основании выражений (19.13) и (19.79) имеем

$$\text{Э} = \frac{EI}{2}\int_0^a (w'')^2\,dx + \frac{T}{2}\int_0^a (w')^2\,dx + \int_0^a (Tw_0'w' - qw)\,dx - \sum_{i=1}^{4} R_i q_i. \qquad (19.80)$$

Для определения неизвестных узловых перемещений q_i элемента, находящегося в положении равновесия, воспользуемся методом Ритца (см. § 10.6):

$$\frac{\partial \text{Э}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \qquad (19.81)$$

Последовательно подставляя выражение (19.76) в формулу (19.80), а (19.80) в (19.81), получаем

$$R_i = \sum_{k=1}^{4} (k_{ik} + s_{ik})\,q_k - P_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \qquad (19.82)$$

где

$$k_{ik} = EI\int_0^a \text{Э}_i''(x)\,\text{Э}_k''(x)\,dx; \qquad (19.83)$$

$$s_{ik} = T\int_0^a \text{Э}_i'(x)\,\text{Э}_k'(x)\,dx; \qquad (19.84)$$

$$P_i = \int_0^a \left[q(x)\,\text{Э}_i(x) - Tw_0'(x)\,\text{Э}_i'(x)\right]dx. \qquad (19.85)$$

Соотношения (19.82) удобно переписать в виде одного матричного уравнения

$$\{R\} = ([K] + [S])\{q\} - \{P\}, \qquad (19.86$$

где $\{R\}$ — вектор обобщенных узловых усилий с компонентами R_i (положительные направления указаны на рис. 19.10); $[K] = [K_{ik}]$ — матрица жесткости призматического элемента, работающего на изгиб [см. формулу (11.77)]; $[S] = [s_{ik}]$ — так называемая геометрическая матрица с компонентами (19.84):

$$[S] = T\begin{bmatrix} 6/5a & 1/10 & -6/5a & 1/10 \\ & 2a/15 & -1/10 & -a/30 \\ & & 6/5a & -1/10 \\ \text{Симметрично} & & & 2a/15 \end{bmatrix}; \qquad (19.87)$$

$\{q\}$ — вектор узловых перемещений; $\{P\}$ — вектор узловых усилий (19.85), эквивалентных действию на рассматриваемый элемент поперечной нагрузки интенсивностью $q(x)$ и продольных сил T.

Если величину $w_0'(x)$ в пределах конечного элемента аппроксимировать линейной функцией

$$w_0'(x) \approx \vartheta_0(1 - x/a) + \vartheta_1 x/a, \qquad (19.88)$$

где

$$\vartheta_0 = w_0'(0); \quad \vartheta_1 = w_0'(a) \qquad (19.89)$$

и интенсивность поперечной нагрузки q считать постоянной, то по формулам (19.85) с учетом выражений (19.77) можно найти

$$\{P\} = \{[qa + T(\vartheta_0 + \vartheta_1)]/2,\ a[qa - T(\vartheta_0 - \vartheta_1)]/12,$$
$$[qa - T(\vartheta_0 + \vartheta_1)]/2,\ -a[qa + T(\vartheta_1 - \vartheta_0)]/12\}. \qquad (19.90)$$

Вернемся к матричному уравнению (19.86). Оно представляет собой систему уравнений равновесия рассматриваемого конечного элемента балки, работающего в условиях сложного изгиба. Это уравнение по форме тождественно уравнению равновесия балочного элемента, работающего на простой изгиб. Разница заключается лишь в том, что матрица жесткости $[K]$ в (19.86) дополнена матрицей $[S]$. Легко понять, что схема расчета по МКЭ стержневых систем, изложенная в § 11.9, полностью применима для расчета по МКЭ сложного изгиба стержней. При этом лишь необходимо всюду матрицу жесткости $[K]$ дополнять матрицей $[S]$.

Все рассмотренные выше приближенные методы сводят задачу о сложном изгибе непризматического стержня к решению систем линейных алгебраических уравнений. В случае растягивающей продольной силы главный определитель систем (19.70), (19.73) и системы разрешающих уравнений в МКЭ не равен нулю и эти системы имеют единственное ограниченное решение. В случае сжимающей продольной силы главный определитель указанных систем при некоторых значениях этой силы может обращаться в нуль. Тогда при неравных нулю свободных членах решение систем будет неограниченным, что свидетельствует о стремлении прогиба стержня (и других параметров изгиба) к бесконечности и соответствует случаю потери стержнем устойчивости.

Контрольные вопросы

1. Что называется сложным или продольно-поперечным изгибом стержней?
2. Какими основными уравнениями описывается сложный изгиб стержней?
3. Как выписываются граничные условия при сложном изгибе стержней?
4. Каковы особенности принципа независимости действия сил при сложном изгибе стержней?
5. Изложить общую схему решения задач сложного изгиба для однопролетных призматических стержней.
6. Как влияет продольная сила на параметры изгиба стержня?
7. Каково влияние начальной погиби на параметры сложного изгиба стержня?

8. Как выполняется практический расчет стержней при сложном изгибе? Что такое функции И. Г. Бубнова?
9. Что такое распор стержня? В чем состоят особенности изгиба стержня с упругим распором?
10. Каким образом раскрывается статическая неопределимость многопролетных стержней при сложном изгибе?
11. Кратко изложить сущность приближенных методов расчета непризматических стержней при сложном изгибе: метода Ритца; Бубнова — Галеркина; МКЭ.

Глава 20. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

§ 20.1. Общие понятия об устойчивости упругих систем и методах ее исследования

Из курса теоретической механики известно, что механическая система может находиться в одном из трех положений равновесия: устойчивом, неустойчивом, безразличном.

Положение равновесия системы является *устойчивым*, если при любом возможном малом отклонении от указанного положения система, будучи предоставлена самой себе, возвращается в это положение.

Положение равновесия системы является *неустойчивым*, если хотя бы при одном возможном малом отклонении от исходного положения система, будучи представлена самой себе, не возвращается в это положение и продолжает от него отклоняться.

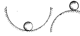


Рис. 20.1

Рис. 20.2

Положение равновесия системы является *безразличным*, если при любом возможном малом отклонении ее от исходного положения система, будучи предоставлена самой себе, остается в отклоненном положении.

Наглядным примером устойчивого, неустойчивого и безразличного положений равновесия являются положения тяжелого шара соответственно на вогнутой, выпуклой и плоской поверхностях (рис. 20.1).

Изложенная выше постановка вопроса об устойчивости или неустойчивости механических и, в частности, упругих систем имеет большой практический интерес, так как в реальных условиях всегда существуют какие-либо причины, которые по малости не учитывались при выборе расчетной модели конструкции и которые могут вызвать малые отклонения системы от исходного положения равновесия с последующим переходом системы в качественно новое состояние.

Из приведенных выше определений видно, что об устойчивости или неустойчивости положения системы судят по ее поведению после возможного малого отклонения от исходного положения. Однако для полного решения вопроса об устойчивости системы недостаточно исследовать ее поведение только при малых, а точнее говоря, при бесконечно малых отклонениях. В некоторых случаях характер поведения системы различен при бесконечно малых и при конечных отклонениях.

Для пояснения этого рассмотрим тяжелый шар, находящийся на криволинейной поверхности сложного профиля (рис. 20.2). Поведение шара при конечных отклонениях существенно зависит от значения отклонения и от характера поверхности в пределах этого отклонения. Если шар, находящийся, например, в положении *2*, которое является при малых отклонениях устойчивым, отклонить влево до положения *1*, то он уже не вернется в исходное положение и окажется в состоянии безразличного равновесия. При отклонении шара вправо за точку *3* он будет продолжать удаляться от исходного положения, пока не придет в новое положение *4*. Это новое положение при отклонениях в некоторых пределах будет устойчивым, а при превышении этих пределов (за точки *5* или *3*) снова окажется неустойчивым. Следовательно, если конечное отклонение от исходного положения не превышает определенного значения, то поведение системы в принципе остается таким же, как и при бесконечно малых отклонениях — она возвращается в исходное положение. Очевидно, значение конечных отклонений, при которых меняется характер поведения шара, зависит от размеров «лунки», в которой он находится. Поскольку размеры «лунки» можно сделать сколь угодно малыми, тем самым можно довести до сколь угодно малых значений и предельные значения конечных отклонений, при которых меняется характер равновесия системы. Указанные предельные значения конечных отклонений характеризуют степень устойчивости системы. Например, положения шара в точках *4* и *6* являются устойчивыми при малых отклонениях. Однако, если положение *4* обладает высокой степенью устойчивости, для нарушения которой требуется преодолеть значительные барьеры, то положение *6* обладает лишь минимальной степенью устойчивости и в случае незначительных отклонений в любую сторону эта устойчивость исчезает.

При некоторых видах нагрузки для упругих систем характерны такие же состояния, как и описанные выше состояния шара на криволинейной поверхности. С возрастанием нагрузки от нуля упругая система вначале может находиться в устойчивом равновесии при любых отклонениях, не выходящих за пределы упругости, — как при малых, так и при конечных. Затем, если значения

нагрузки превышают некоторый предел, наступает состояние упругой системы, все еще устойчивое при малых отклонениях, но не устойчивое при конечных отклонениях определенного значения. Если же нагрузка доведена до некоторого критического значения, упругая система переходит в безразличное или неустойчивое состояние равновесия также и по отношению к малым отклонениям.

В последнем случае при сохранении критического значения сил возможны следующие три исхода: а) система получает конечное упругое отклонение и переходит в новое, устойчивое по отношению к малым отклонениям положение; б) система переходит в новое положение устойчивого равновесия в результате значительных отклонений и появления неупругих деформаций; в) система разрушается.

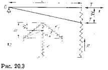


Рис. 20.3

При исследовании устойчивости упругих систем и тел по отношению к малым отклонениям можно пользоваться упрощенными геометрически линейными уравнениями. В случае же исследования устойчивости по отношению к конечным отклонениям необходимо применять уточненные нелинейные уравнения, справедливые во всем диапазоне значений исследуемых деформаций, что существенно усложняет задачу.

В качестве иллюстрации изложенных положений рассмотрим устойчивость упругой системы, состоящей из абсолютно жесткого стержня, шарнирно опертого на одну жесткую и одну упругую опоры, при действии на систему продольной сжимающей силы (рис. 20.3).

Упругая опора представляет собой три совместно работающих на растяжение и сжатие идеально упругих стержня или пружины. Коэффициенты жесткости при продольной деформации наклонных пружин есть K_1, а вертикальной — K. Зависимость между реакцией такой опоры R и ее просадкой w при конечных значениях последней будет нелинейной и ее можно получить в следующем виде:

$$R = Kw\left[1 + 2\frac{K_1}{K}\left(\frac{1}{\bar{w}} - 1\right)\frac{1 - \sqrt{1 - (2 - \bar{w})\,\bar{w}\sin^2\alpha}}{\sqrt{1 - (2 - \bar{w})\,\bar{w}\sin^2\alpha}}\right]. \qquad (20.1)$$

Здесь $\bar{w} = w/h$, а остальные обозначения показаны на рис. 20.3.

Если ограничиться рассмотрением только малых просадок $w \ll h$, $\bar{w} \ll 1$, то зависимость (20.1) можно упростить и превратить в линейную, пренебрегая в числителе дроби величинами порядка $\bar{w}^2$ по сравнению с $\bar{w}$, а в знаменателе теми же величинами по сравнению с единицей:

$$R = K_0 w, \qquad (20.2)$$

где $K_0 = K + 2K_1\sin^2\alpha$.

Составим теперь уравнения равновесия стержня в отклоненном положении (см. рис. 20.3). Для упрощения выкладок предположим, что просадки упругой опоры w во всех случаях по крайней мере на порядок меньше длины стержня L. Это дает право, составляя уравнения, не учитывать горизонтальное смещение подвижного конца стержня при повороте. Приравнивая нулю сумму моментов всех сил относительно жесткой опоры, получим

$$Tw - RL = 0, \quad \text{или} \quad w(T - RL/w) = 0. \tag{20.3}$$

Отклоненное положение равновесия при $w \neq 0$, очевидно, будет возможно только при равенстве нулю выражения в скобках в уравнении (20.3), т. е. при

$$T = RL/w. \tag{20.4}$$

Исследование устойчивости при бесконечно малых отклонениях можно производить с помощью линейной зависимости (20.2), подстановка которой в формулу (20.4) дает

$$T = T_в = K_0 L = (K + 2K_1 \sin^2 \alpha) L. \tag{20.5}$$

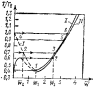


Рис. 20.4

Таким образом, при значении сжимающей силы $T = T_в$ исходное положение системы становится безразличным или неустойчивым по отношению к малым отклонениям, так как при этом возможны другие равновесные положения $w \neq 0$. Если $T < T_в$, исходное положение при малых отклонениях всегда устойчиво.

Для установления зависимости между значениями силы T и просадки w, соответствующими равновесным состояниям при конечных отклонениях, необходимо воспользоваться общей формулой (20.1) для реакции R, после подстановки которой в уравнение (20.4) получим

$$T = KL\left[1 + 2\frac{K_1}{K}\left(\frac{1}{\bar{w}} - 1\right)\frac{1 - \sqrt{1 - (2 - \bar{w})\,\bar{w}\sin^2\alpha}}{\sqrt{1 - (2 - \bar{w})\,\bar{w}\sin^2\alpha}}\right]. \tag{20.6}$$

На рис. 20.4 изображена кривая I равновесных состояний системы, представляющая зависимость (20.6) между величиной $T/T_в$ и $\bar{w}$ при частных значениях параметров $\sin\alpha = 0{,}4$ и $K_1 = 3{,}125\,K$.

Анализ полученных для рассматриваемого примера результатов показывает, что в диапазоне $0 < T < 0{,}42\,T_в$ не существует таких значений силы T, при которых возможны отклоненные формы равновесия для малых или конечных отклонений. Следовательно, в этом диапазоне единственным и притом устойчивым положением равновесия будет исходное ($\bar{w} = 0$).

В диапазоне $0{,}42\,T_в < T < T_в$ каждому значению силы T соответствует три положения равновесия, одним из которых является

исходное положение, устойчивое при малых отклонениях. Два других положения равновесия при $\bar{w} \neq 0$ находятся на пересечении линии $T = \text{const}$ с кривой равновесных состояний. Например, силе $T = 0{,}7\,T_в$ соответствуют равновесные положения при $\bar{w} = 0$, $\bar{w} = \bar{w}_2$ и $\bar{w} = \bar{w}_3$. Следовательно, отклонение системы от исходного положения равновесия ($\bar{w} = 0$) на величину $\bar{w} < \bar{w}_2$ не приведет к нарушению устойчивости и система будет возвращаться в это исходное состояние. При отклонении $\bar{w} = \bar{w}_2$ система окажется в новом равновесном состоянии, которое, однако, является неустойчивым, как и все другие состояния на нисходящей пунктирной ветви кривой I. Действительно, для сохранения равновесия необходимо, чтобы при увеличении отклонения $\bar{w} > \bar{w}_2$ сила T уменьшалась, а при уменьшении отклонения $\bar{w} < \bar{w}_2$ увеличивалась. Если сила T сохраняет свое значение, то отклонение будет непрерывно увеличиваться или уменьшаться, пока система не придет в одно из двух других устойчивых положений при $\bar{w} = 0$ или $\bar{w} = \bar{w}_3$. При $\bar{w} = \bar{w}_3$, как и во всех других точках восходящей ветви кривой равновесных состояний, для увеличения отклонения требуется увеличение силы T, а для уменьшения — уменьшение силы и, следовательно, при неизменной силе система будет находиться в устойчивом состоянии. Таким образом, при отклонении $\bar{w} > \bar{w}_2$ система совершает перескок из исходного положения с $\bar{w} = 0$ в положение с $\bar{w} = \bar{w}_3$, и наоборот, если в положении при $\bar{w} = \bar{w}_3$ отклонить систему в сторону исходного положения, так что $\bar{w} < \bar{w}_2$, то система перескоком снова возвратится в исходное положение с $\bar{w} = 0$.

Аналогичные положения занимает система при $T = 0{,}9\,T_в$: при $\bar{w} = 0$, $\bar{w} = \bar{w}_4$, $\bar{w} = \bar{w}_5$. Предельное значение конечного перемещения, вызывающего перескок системы, с увеличением силы T все время уменьшается. Таким образом, по мере приближения значения силы T к значению $T_в$ исчерпывается запас устойчивости как по отношению к малым, так и по отношению к конечным отклонениям.

Значение $T = T_4 = 0{,}42\,T_в$ является наименьшим значением, при котором возможна отклоненная форма равновесия при $\bar{w} = \bar{w}_1$. Это положение *устойчиво в малом* по отношению к отклонениям $\bar{w} < \bar{w}_1$ и неустойчиво по отношению к отклонениям $\bar{w} > \bar{w}_1$.

Наибольшая нагрузка $T_н$, ниже уровня которой система оказывается устойчивой не только при бесконечно малых, но и при конечных отклонениях, называется *нижней критической нагрузкой*. При нагрузках $T < T_н$ исходное положение является единственным устойчивым состоянием системы.

Значение $T = T_в$ соответствует неустойчивому исходному состоянию при $\bar{w} = 0$ даже по отношению к малым отклонениям. При этом значении система перескоком переходит в новое устойчивое положение при $\bar{w} = \bar{w}_6$. Наименьшая нагрузка $T_в$, выше уровня которой система оказывается неустойчивой не только при конечных, но и при бесконечно малых отклонениях, называется *верхней критической нагрузкой*.

Большое значение для устойчивости могут иметь начальные отклонения системы от правильной геометрической формы. Например, если при монтаже рассмотренной выше системы установить упругую опору так, что в недеформированном состоянии подвижный конец стержня будет отклонен от горизонтали на величину w_0, а сила T будет по-прежнему действовать горизонтально, то уравнение равновесия системы (20.3) запишется в виде

$$T(w + w_0) - RL = 0, \quad \text{или} \quad T = RL/(w + w_0). \tag{20.7}$$

Зависимость (20.7) при тех же значениях параметров, что и выше, и при $\bar{w}_0 = w_0/h = 0{,}1$ представлена кривой *II* на рис. 20.4. Как видно, дополнительное отклонение $\bar{w}$ возрастает по мере возрастания силы T от нуля. Сначала этот процесс протекает медленно, а затем при $T = 0{,}6\,T_в$ система совершает перескок, т. е. теряет устойчивость первоначального положения, и переходит в положение с $\bar{w} = \bar{w}_7$. Таким образом, ввиду наличия начального отклонения верхнее критическое значение силы снизилось в данном случае до 0,6 первоначальной величины. Нижнее критическое значение при этом уменьшилось незначительно.

Следует иметь в виду, что соотношение между верхней и нижней критическими силами, которое в приведенном примере составило $T_н/T_в = 0{,}42$, может колебаться для разных систем в очень широких пределах: от единицы до отрицательных значений. Так, если в системе, показанной на рис. 20.3, наклонные пружины в упругой опоре расположить углом вниз, то можно получить, что исходное положение с $w = 0$ будет абсолютно устойчивым до значения $T = T_в$, после чего при возрастающем значении силы $T > T_в$ возможны отклоненные состояния равновесия. При начальном отклонении кривая равновесных состояний также является все время восходящей, т. е. каждому значению силы T соответствует одно отклоненное устойчивое положение. Если наклонные пружины в упругой опоре убрать, то по отношению к достаточно малым отклонениям при $T = T_в$ система перейдет в безразличное состояние. Следовательно, в последних случаях понятие нижней критической силы теряет смысл. Именно последние случаи характерны для устойчивости стержней и стержневых систем, которые и будут рассматриваться в данной главе.

Для таких систем характеристикой устойчивости, как правило, является значение верхней критической нагрузки. Потеря устойчивости по отношению к конечным перемещениям, связанная с перескоками (хлопками) системы при нагрузках, превышающих нижнее критическое значение, характерна для оболочек и будет подробнее рассмотрена в процессе их изучения.

Еще один фактор оказывает существенное влияние на устойчивость — физическая нелинейность (отступления от закона Гука), которая неизбежно проявляется при определенном уровне напряженности элементов упругой системы. Этот вопрос будет рассмотрен в § 20.4. Сейчас же необходимо отметить, что по установившейся терминологии значения нагрузок, вызывающих потерю

устойчивости и определяемых теоретически в предположении справедливости линейного закона Гука, называются *эйлеровыми нагрузками* в честь Л. Эйлера, впервые решившего задачу об устойчивости свободно опертого сжатого стержня в 1744 г. Те же значения нагрузок, определенные экспериментально или теоретически, но с учетом отступлений от линейного закона Гука, именуются *критическими нагрузками*.

Примененный выше метод исследования устойчивости систем называется *статическим*. Сущность статического метода, заключается в следующем. Системе, находящейся в положении статического равновесия, придается малое отклонение и составляются дифференциальные или алгебраические (в зависимости от числа степеней свободы упругой системы) уравнения равновесия в отклоненном положении; силы инерции не учитывают, считая, что малое отклонение совершается весьма медленно. Если указанные дифференциальные или алгебраические уравнения равновесия системы в отклоненном положении допускают только одно решение, соответствующее исходному положению равновесия, то это положение системы является устойчивым. Если некоторым значениям нагрузки соответствует несколько решений, то наряду с исходной формой равновесия возможны отклоненные. Следовательно, исходное положение равновесия является неустойчивым и происходит потеря устойчивости системы при статическом действии такой нагрузки. Как правило, уравнения равновесия системы удобнее составлять и исследовать относительно малых отклонений от исходного положения равновесия. Тогда исходному положению равновесия будет соответствовать нулевое решение уравнений равновесия, а наличие ненулевых решений этих уравнений будет свидетельствовать о потере устойчивости системы.

В статическом методе исследования устойчивости можно определить возможные равновесные положения системы не только посредством решения соответствующих дифференциальных уравнений равновесия, но и с помощью энергетических теорем, что не приводит к принципиальным изменениям самого статического метода.

Другим методом исследования устойчивости упругих систем является *динамический метод*. Динамический метод, подобно статическому, основан на решении уравнений равновесия в отклоненном (возмущенном) положении, которые, однако, составляются с учетом сил инерции и выступают уже как уравнения движения системы. По свойствам возмущенного движения можно судить об устойчивости или неустойчивости системы. Если возмущенное движение представляет затухающие колебания или незатухающие малые колебания около исходного положения равновесия, то положение системы устойчиво. Если же возмущенное движение окажется колебательным или апериодическим с возрастающей во времени амплитудой отклонения от исходного положения, то это положение системы будет неустойчивым. Динамический метод, являясь более общим по сравнению со статическим, оказывается и более трудным в математическом отношении. Область применения динамического метода практически не ограничена и охватывает не только вопросы статической устойчивости, но и вопросы так называемой динамической устойчивости при переменных во времени нагрузках. В статических задачах устойчивости при консервативных, т. е. неизменных по значению и направлению силах, статический и динамический методы, как правило, дают одинаковые результаты. В других случаях статический метод или дает другие результаты по сравнению с динамическим (например, при неконсервативных силах), или неприменим вовсе (при быстро изменяющихся во времени динамических нагрузках). В динамическом методе также могут быть использованы энергетические теоремы.

В нашем курсе излагаются только вопросы статической устойчивости упругих систем, как наиболее характерные и практически наиболее важные для строительной механики корабля.

В составе корпуса корабля многие элементы и конструкции — балки, пластины, оболочки, перекрытия — работают в условиях осевого сжатия или плоского напряжения состояния, при которых возможна потеря устойчивости, представляющая большую опасность для целостности и прочности корпуса. Этим и предопределяется значительное развитие теории устойчивости упругих систем в рамках строительной механики корабля.

§ 20.2. Устойчивость однопролетных центрально-сжатых стержней

При общем изгибе корпуса судна продольные балки судового набора (особенно палубные и днищевые) сжимаются значительными силами, которые могут вызвать потерю устойчивости. Для оценки степени устойчивости сжатых балок необходимо определять значения эйлеровых или критических сжимающих сил.

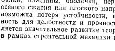


Рис. 20.5

В этом параграфе будут изложены методы определения эйлеровых сил для однопролетных центрально-сжатых стержней с учетом того, что в ряде случаев для оценки устойчивости балок судового набора достаточно рассмотреть лишь один их пролет. При решении задач устойчивости для стержней будут применяться те же гипотезы и допущения, что и при сложном изгибе (см. § 19.1).

Дифференциальное уравнение устойчивости сжатого однопролетного стержня и граничные условия. Рассмотрим прямой центрально-сжатый однопролетный стержень, загруженный в соответствии с рис. 20.5. Пользуясь статическим методом, для исследования стержня на устойчивость в плоскости zox необходимо отклонить его в этой плоскости на малую величину $w(x)$. В отклоненном положении стержень будет испытывать сложный изгиб и его

деформированное состояние может быть описано дифференциальным уравнением (19.4), в котором следует принять в соответствии с условиями задачи $q = w_0 = 0$. Поскольку в задачах устойчивости стержней сжимающую силу удобнее считать положительной в отличие от правила знаков при сложном изгибе (см. § 19.1), уравнение (19.4) применительно к данной задаче можно записать в виде

$$(EIw'')'' + (Tw')' = 0, \tag{20.8}$$

где $EI = EI(x)$ — изгибная жесткость сечения стержня в плоскости zox; $T = T_0 + \int\limits_0^x p(x)\,dx$ — сжимающая сила в сечении стержня с координатой x.

Граничные условия для дифференциального уравнения (20.8) можно получить из граничных условий для сложного изгиба (19.7) и (19.8), полагая $w_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } x = 0 \\ \quad w(0) = -A_1[(EIw'')' + Tw']_{x=0}; \quad w'(0) = \mathfrak{A}_1 EI(0)\,w''(0); \\ \text{при } x = l \\ \quad w(l) = A_2[(EIw'')' + Tw']_{x=l}; \quad w'(l) = -\mathfrak{A}_2 EI(l)\,w''(l). \end{array}\right\} \tag{20.9}$$

Как дифференциальное уравнение (20.8), так и уравнения граничных условий (20.9), являются однородными относительно прогиба w и его производных. Указанные уравнения имеют тривиальное решение $w = 0$.

Если данное решение оказывается единственно возможным при любых значениях параметра T, то прямолинейное положение стержня всегда устойчиво по отношению к любым малым отклонениям $w \neq 0$. Если при некоторых значениях силы T существует ненулевое решение $w \neq 0$ уравнений (20.8) и (20.9), то это значит, что при данном значении T стержень сможет иметь искривленные формы равновесия и его прямолинейное положение не будет устойчивым. Следовательно, задача сводится к исследованию возможных ненулевых решений уравнений (20.8) и (20.9), что сделано ниже для конкретных случаев.

Устойчивость призматического однопролетного стержня при постоянной сжимающей силе. Для указанных стержней $EI = \mathrm{const}$, $T(x) = T_0 = T = \mathrm{const}$ и дифференциальное уравнение (20.8) упрощается:

$$EIw^{\mathrm{IV}} + Tw'' = 0. \tag{20.10}$$

Общее решение этого уравнения в соответствии с формулой (19.19) можно записать так:

$$w = B_0 + B_1\beta x + B_2 \cos\beta x + B_3 \sin\beta x, \tag{20.11}$$

где

$$\beta = \sqrt{T/(EI)}. \tag{20.12}$$

Произвольные постоянные B_i должны определяться из граничных условий задачи, в результате чего и может быть решен вопрос о существовании ненулевого решения (20.11).

Устойчивость свободно опертого стержня (рис. 20.6). В этом случае $A_1 = A_2 = 0$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \infty$ и граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ в соответствии с (20.9) имеют вид $w(0) = w''(0) = w(l) = w''(l) = 0$. Подставляя выражение (20.11)

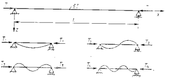


Рис. 20.6

в данные условия при $x = 0$ и сокращая на коэффициент $\beta \neq 0$, получаем $B_0 + B_2 = 0$; $B_2 = 0$, или $B_0 = B_2 = 0$. Используя полученные значения и подставляя прогиб (20.11) в граничные условия при $x = l$, находим

$$\left.\begin{aligned} B_1 \beta l + B_3 \sin \beta l = 0;\\ B_3 \beta^2 \sin \beta l = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (20.13)$$

Эта система имеет очевидное нулевое решение $B_1 = B_3 = 0$, которому вследствие выражения (20.11) соответствует неискривленная форма равновесия стержня $w = 0$.

Ненулевое решение $B_1 \neq 0$, $B_3 \neq 0$ полученная система может иметь в том случае, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \beta l & \sin \beta l \\ 0 & \beta^2 \sin \beta l \end{vmatrix} = \beta^3 l \sin \beta l = 0.$$

Так как $\beta^3 l \neq 0$, определитель будет равен нулю, если $\sin \beta l = 0$, т. е. при $\beta l = n\pi$, где n — любое целое число. В этом случае система (20.13) имеет решение $B_1 = 0$, $B_3 \neq 0$, причем величина B_3 может быть произвольной. Таким образом, при $\beta l = n\pi$ стержень может находиться в отклоненном состоянии равновесия с

$$w = B_3 \sin n\pi x / l, \qquad (20.14)$$

где B_3 имеет неопределенное значение. Условие $\beta l = n\pi$ будет выполнено, если

$$T = \beta^2 EI = n^2 \pi^2 EI / l^2. \qquad (20.15)$$

Полученные результаты можно суммировать следующим образом. Значению силы T при $n = 1$

$$T = T_1 = \pi^2 EI / l^2 \qquad (20.16)$$

соответствует вследствие неопределенности величины B_3 бесконечное множество положений равновесия изогнутого стержня по форме

$$w_1 = B_3 \sin \pi x / l. \qquad (20.17)$$

Следовательно, в этом случае стержень переходит в безразличное состояние равновесия по отношению к отклонениям от прямолинейного положения по одной полуволне синусоиды (20.17). При других значениях $n = 2, 3, \ldots$ значениям силы $T_2 = 4T_1$, $T_3 = 9T_1$ и т. д. соответствуют свои формы безразличного равновесия с $w_2 = B_3 \sin 2\pi x / l$, $w_3 = B_3 \sin 3\pi x / l$ и т. д. (см. рис. 20.6). Однако эти значения силы T не представляют интереса, так как уже при $T \geqslant T_1$ стержень переходит в неустойчивое положение равновесия по отношению к изгибу по первой форме w_1. Поэтому значение (20.16) силы T_1 является эйлеровой силой свободно опертого призматического центрально-сжатого стержня ($T_э = T_1$).

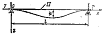


Рис. 20.7

Как было установлено выше, форма потери устойчивости определяется с точностью до постоянного множителя, который теоретически может быть сколь угодно большим. Этот результат является следствием использования приближенных линейных уравнений, которые справедливы, как известно, только при малых перемещениях. Для исследования поведения стержня при больших отклонениях после потери устойчивости ($T > T_э$) необходимо было бы применить более точные нелинейные уравнения теории упругости и пластичности. Однако расчеты и опыты показывают, что в зависимости от степени начальных несовершенств при значениях сжимающих сил, близких к эйлеровым значениям, в стержнях появляются значительные упругие и пластические деформации, которые, как правило, недопустимы для несущих элементов. Поэтому эйлерово значение сжимающей силы является одной из важнейших характеристик несущего элемента — стержня.

Устойчивость жестко заделанного стержня (рис. 20.7). По сравнению с предыдущим в данном случае изменяются только граничные условия: $A_1 = A_2 = \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = 0$, поэтому уравнения (20.9) запишутся так: $w(0) = w'(0) = w(l) = w'(l) = 0$.

Подчиняя прогиб (20.11) граничным условиям при $x = 0$, находим $B_2 = -B_0$; $B_3 = 0$, а подчиняя его граничным условиям при $x = l$, с учетом последних результатов получаем

$$\left.\begin{aligned} B_0 (1 - \cos \beta l) + B_1 (\beta l - \sin \beta l) = 0;\\ B_0 \sin \beta l + B_1 (1 - \cos \beta l) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (20.18)$$

Ненулевые решения этой системы для B_i возможны только в случае равенства ее определителя нулю. Раскрывая определитель, после простых тригонометрических преобразований получим следующее уравнение:

$$(\operatorname{tg} \beta l/2 - \beta l/2) \sin \beta l/2 = 0, \qquad (20.19)$$

которое можно записать в виде двух самостоятельных уравнений: $\sin \beta l/2 = 0$; $\operatorname{tg} \beta l/2 = \beta l/2$. Решение первого уравнения очевидно: $\beta l = 2n\pi$, где n — любое целое число. Решение второго уравнения не может быть получено точно, но нетрудно показать, что значения его корней β больше соответствующих корней первого уравнения.

Таким образом, представляющий интерес наименьший корень уравнения (20.19) будет $\beta_1 = 2\pi/l$ (при $n = 1$), что соответствует следующему значению эйлеровой силы:

$$T_э = 4\pi^2 EI/l^2. \qquad (20.20)$$

Форма потери устойчивости жестко заделанного стержня, соответствующая эйлеровой силе (20.20), будет определяться выражением

$$w_1 = B_0 (1 - \cos 2\pi x/l).$$

Такая форма получается после подстановки в выражение (20.11) значений произвольных постоянных $B_3 = 0$, $B_2 = B_0$ и $B_1 = 0$. Значение $B_1 = 0$ можно найти из второго уравнения (20.18) при $\beta l = 2n\pi$.

Таким образом, эйлерова сила для жестко заделанного стержня в четыре раза больше эйлеровой силы для свободно опертого стержня. Следовательно, увеличение жесткости заделки концов однопролетного стержня приводит к увеличению эйлеровой силы. При упругой заделке опорных сечений эйлерова сила имеет промежуточные значения $\pi^2 EI/l^2 \leqslant T_э \leqslant 4\pi^2 EI/l^2$. Это обстоятельство может быть использовано для увеличения устойчивости сжатых стержней путем увеличения жесткости заделки опорных сечений.

Общая схема расчета призматического стержня на устойчивость. Для решения задачи устойчивости однопролетного стержня при любых граничных условиях по концам необходимо:

1) на основании выражений (20.9) выписать граничные условия для рассматриваемого стержня;

2) подставить в граничные условия выражения прогиба (20.11) и получить систему однородных линейных алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных B_i;

3) приравнять нулю определитель полученной однородной системы и найти наименьший корень β_1 характеристического уравнения;

4) подставить β_1 в формулу (20.12) и найти эйлерову силу $T_э = \beta_1^2 EI$;

5) для отыскания формы потери устойчивости подставить β_1 в однородную систему, полученную в п. 2, выразить все коэффициенты B_i через один из них и результат подставить в формулу (20.11).

Математические трудности связаны в основном с выполнением п. 3, поскольку для отыскания β_1 приходится в общем случае решать сложные трансцендентные уравнения.

Общая формула для эйлеровой силы призматических однопролетных стержней может быть представлена в виде

$$T_э = \pi^2 EI/(\mu_0 l)^2, \qquad (20.21)$$

где μ_0 — коэффициент приведенной длины, зависящий от устройства опор стержня. Так, из формул (20.16) и (20.20) видно, что для свободно опертого стержня $\mu_0 = 1$, а для жестко заделанного $\mu_0 = 0{,}5$. Численные значения коэффициента μ_0 при других граничных условиях приведены в справочной литературе [51, т. 3]. Например, для консольного стержня, один конец которого жестко защемлен, а другой совершенно свободен, $\mu_0 = 2$; для стержня, один конец которого свободно оперт, а другой жестко защемлен, $\mu_0 = 0{,}7$.

Формула (20.21) показывает, что эйлерова сила прямо пропорциональна изгибной жесткости стержня EI и обратно пропорциональна квадрату его длины l. Поэтому при необходимости повысить эйлерову силу следует увеличить размеры поперечного сечения с целью увеличения EI или, если конструктивно возможно, уменьшить длину пролета стержня, например, установкой дополнительных опор.

Устойчивость непризматических однопролетных стержней при переменной по длине сжимающей силе. Общее решение уравнения (20.8) в общем случае при $I = I(x)$ и $T = T(x)$ не может быть получено в замкнутом виде и поэтому изложенная выше схема решения задачи об устойчивости призматических стержней при постоянных силах оказывается неприемлемой. Для решения поставленной задачи используют приближенные методы Ритца, Бубнова — Галеркина, МКЭ, которые применительно к задаче сложного изгиба были рассмотрены в § 19.5. Так как дифференциальное уравнение устойчивости (20.8) является частным случаем уравнения сложного изгиба, все результаты, полученные в § 19.5, можно использовать и для решения задач устойчивости. Отличие будет состоять лишь в том, что в задачах устойчивости поперечная нагрузка q и начальный прогиб w_0 равны нулю, вследствие чего разрешающие алгебраические уравнения метода Ритца (19.70), метода Бубнова — Галеркина (19.73) и МКЭ для определения обобщенных координат, характеризующих прогиб стержня в отклоненном положении, будут однородными.

Чтобы обобщенные координаты имели ненулевые значения, т. е. для существования искривленной формы равновесия стержня, определители указанных выше однородных линейных систем уравнений должны быть равны нулю, что и позволяет получить характеристические уравнения для вычисления эйлеровой силы.

Форма потери устойчивости характеризуется ненулевыми значениями обобщенных координат, определяемых из однородных систем уравнений после подстановки в них эйлерового значения силы.

Указанная общая схема иллюстрируется ниже примерами.

Определение методом Ритца эйлеровой нагрузки свободно опертого стержня. Жесткость стержня и сжимающая сила меняются по линейным законам:

$$EI(x) = EI_0(1 - 0{,}5\xi); \quad T(x) = T_0(1 - \xi), \tag{20.22}$$

где $\xi = x/l$.

Учитывая, что координатные функции — синусы кратных дуг — удовлетворяют как кинематическим, так и силовым условиям свободного опирания, примем форму потери устойчивости в виде

$$w = a_1 \sin \pi\xi + a_2 \sin 2\pi\xi. \tag{20.23}$$

Следуя приведенной выше схеме определения эйлеровой нагрузки, составим систему уравнений для определения обобщенных координат a_1 и a_2.

На основании формул (19.13) суммарная силовая функция для стержня в отклоненном положении будет равна ($q = w_0 = 0$)

$$\Pi - U = \frac{1}{2}\int_0^l \left(EIw''^2 - Tw'^2\right) dx. \tag{20.24}$$

Подставляя выражения (20.22) и (20.23) в формулу (20.24) и используя уравнения метода Ритца $\frac{\partial(\Pi - U)}{\partial a_1} = 0$; $\frac{\partial(\Pi - U)}{\partial a_2} = 0$, после преобразований найдем

$$\left.\begin{aligned} &(3 - 2\lambda)a_1 + [32/(9\pi^2)](4 - 5\lambda)a_2 = 0,\\ &[4/(9\pi^2)](4 - 5\lambda)a_1 + (6 - \lambda)a_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{20.25}$$

где $\lambda = T_0 l^2/(\pi^2 EI_0)$.

Приравнивая нулю определитель этой системы, получаем следующее квадратное уравнение $\lambda^2 - 9\lambda + 11{,}1 = 0$, корни которого равны $\lambda_1 = 1{,}48$; $\lambda_2 = 7{,}53$. Меньший корень определяет приближенное значение эйлеровой нагрузки для рассматриваемого стержня

$$T_{0э} = \lambda_1\pi^2 EI_0/l^2 = 14{,}6 EI_0/l^2. \tag{20.26}$$

Форму потери устойчивости найдем по формуле (20.23), выразив a_2 через a_1 из любого уравнения системы (20.25) при $\lambda = \lambda_1 = 1{,}48$:

$$w = a_1(\sin \pi\xi + 0{,}058 \sin 2\pi\xi).$$

Если бы в выражении (20.23) был оставлен только один первый член ($a_2 = 0$), то система (20.25) превратилась бы в одно

уравнение $(3 - 2\lambda)a_1 = 0$, корень которого $\lambda = 1{,}5$. В этом случае эйлерова сила равна

$$T_{0э} = 1{,}5\pi^2 EI_0/l^2 = 14{,}8 EI_0/l^2. \tag{20.27}$$

Значения (20.26) и (20.27) различаются всего на 1,4 %. Это показывает, что результат (20.27) является практически точным, поскольку увеличение числа членов в выражении (20.23) не приводит к существенному изменению эйлеровой силы.

Для установления погрешности метода Ритца обычно поступают, как указано выше: определяют разницу в значениях $T_э$, полученных для n и $(n + 1)$ членов ряда в выражении для формы потери устойчивости.

Существенно то, что метод Ритца дает завышенное или точное значения эйлеровых сил. Точное значение можно получить лишь в том случае, если форма потери устойчивости точно аппроксимируется принятым для нее выражением. В других случаях значения эйлеровых сил будут завышенными. Связано это с тем, что определение положения системы ограниченным числом обобщенных координат равносильно наложению на нее дополнительных связей, увеличивающих жесткость системы и ее эйлерову нагрузку.

Таким образом, метод Ритца дает ошибку в опасную сторону, преувеличивая значение $T_э$.

Определение методом Бубнова — Галеркина эйлеровой нагрузки стержня с характеристиками (20.22).

Поскольку координатные функции в выражении (20.23) удовлетворяют как кинематическим, так и силовым граничным условиям, что является обязательным требованием в методе Бубнова — Галеркина, примем форму потери устойчивости в том же виде. Составляя уравнения Бубнова — Галеркина для дифференциального уравнения устойчивости (20.8), получаем

$$\int_0^1 [(EIw'')'' + (Tw')'] \sin \pi\xi \, d\xi = 0; \quad \int_0^1 [(EIw'')'' + (Tw')'] \sin 2\pi\xi \, d\xi = 0.$$

Подставляя в эти уравнения выражения (20.22) и (20.23), после интегрирования получаем ту же, что и при расчете методом Ритца, систему (20.25) для определения a_i. Следовательно, методы Бубнова — Галеркина и Ритца дадут одинаковые результаты, если координатные функции приняты одинаковыми.

Определение методом конечных элементов эйлеровой нагрузки непризматического стержня. В этом случае стержень мысленно разбивается на конечные элементы, в пределах длины которых изгибная жесткость и сжимающая сила могут считаться практически постоянными. После отклонения его от исходного положения равновесия сжатый стержень и каждый конечный элемент будут испытывать сложный изгиб при отсутствии поперечной нагрузки и начальной погиби ($q = w_0 = 0$).

Положив в уравнении (19.86) вектор $\{P\}$ равным нулю и заменив растягивающую продольную силу на сжимающую, получим следующее уравнение равновесия конечного элемента балки:

$$\{R\} = ([K] - [S])\{q\}, \qquad (20.28)$$

которое и используется для решения задач устойчивости стержневых систем по МКЭ.

Весь последующий алгоритм получения системы разрешающих уравнений для определения неизвестных узловых перемещений аналогичен тому, который был описан в § 11.9. При этом вместо матрицы конечного элемента $[K]$ всюду следует вносить матрицу $[K]-[S]$.

Устойчивость свободно опертого призматического стержня, лежащего на упругом основании. Рассмотрим случай, когда упругое основание имеет постоянный коэффициент жесткости k, а сила постоянна по длине (рис. 20.8).

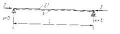


Рис. 20.8

В отклоненном положении стержень будет испытывать сложный изгиб под действием сжимающей силы T и поперечной нагрузки $q(x) = -kw(x)$, представляющей реакции упругого основания. Поэтому дифференциальное уравнение (19.15) в данном случае будет иметь вид

$$EIw^{\text{IV}} + Tw'' + Kw = 0, \qquad (20.29)$$

а граничные условия при свободном опирании концов $w(0) = w''(0) = w(l) = w''(l) = 0$.

Решение дифференциального уравнения (20.29) можно искать в следующем удовлетворяющем всем граничным условиям виде:

$$w(x) = a \sin n\pi x/l, \qquad (20.30)$$

где a — произвольная постоянная; n — любое целое число, определяющее число полуволн формы потери устойчивости.

Подставляя выражение (20.30) в уравнение (20.29), получаем

$$[EI(n\pi/l)^4 - T(n\pi/l)^2 + k]\, a \sin n\pi x/l = 0.$$

Для тождественного удовлетворения этого равенства при $a \neq 0$ необходимо приравнять нулю выражение в квадратной скобке, в результате чего можно найти значение силы T, при которой возможны отклоненные формы равновесия стержня:

$$T = \frac{\pi^2 EIn^2}{l^2} + kl^2/(\pi^2 n^2). \qquad (20.31)$$

Эйлерова сила стержня будет равна наименьшему значению силы T. Поэтому целое число n должно быть определено из условия минимума выражения (20.31), которое представим в виде

$$T = (\pi^2 EI/l^2)(n^2 + \gamma/n^2), \qquad (20.32)$$

где

$$\gamma = kl^4/(\pi^4 EI). \qquad (20.32')$$

Если упругое основание отсутствует ($k = 0$), то $\gamma = 0$ и минимум выражения (20.32) будет при $n = 1$. По мере увеличения γ минимум этого выражения оказывается при $n = 2, 3, \ldots$ и в зависимости от этого стержень будет терять устойчивость по двум, трем и большему числу полуволн. Действительное число полуволн n должно давать меньшее значение для T, чем числа $(n-1)$ и $(n+1)$, т. е. должны соблюдаться неравенства

$$\left[(n-1)^2 + \frac{\gamma}{(n-1)^2}\right] > \left(n^2 + \frac{\gamma}{n^2}\right) < \left[(n+1)^2 + \frac{\gamma}{(n+1)^2}\right].$$

Эти неравенства после простых преобразований можно записать так: $n^2(n-1)^2 < \gamma < n^2(n+1)^2$, откуда следует, что $0 \leqslant \gamma \leqslant 4$ при $n = 1$; $4 \leqslant \gamma \leqslant 36$ при $n = 2$; $36 \leqslant \gamma \leqslant 144$ при $n = 3$; $144 \leqslant \gamma \leqslant 400$ при $n = 4$ и т. д. Следовательно, при значениях γ, лежащих в указанных пределах, потеря устойчивости будет происходить по одной, двум, трем и большему числу полуволн. Если $\gamma = 4$, происходит переход от формы потери устойчивости по одной полуволне синусоиды к форме с двумя полуволнами, при $\gamma = 36$ от двух полуволн к трем и т. д. Вообще, когда $\gamma = n^2(n+1)^2$, происходит переход от n-й полуволновой формы потери устойчивости к $(n+1)$-й, т. е. при указанных значениях γ возможны обе искривленные формы равновесия для одного и того же значения сжимающей силы.

С ростом коэффициента жесткости упругого основания увеличиваются γ, число полуволн n, а следовательно, и эйлерова сила. При относительно жестком упругом основании, когда γ оказывается очень большим (10^4 и более), число полуволн n также большое (10 и более). В полученных выше неравенствах можно пренебречь единицей по сравнению с n, что приведет к приближенным зависимостям

$$n = \sqrt[4]{\gamma} = \sqrt[4]{kl^4/(\pi^4 EI)}; \quad T_э = 2\sqrt{kEI}.$$

Из этих формул следует, что в случае относительно жесткого упругого основания эйлерова сила стержня перестает зависеть от его длины.

При практическом расчете сначала определяют параметр γ по формуле (20.32'), затем целое число n, удовлетворяющее приведенным выше неравенствам, и, наконец, по формуле (20.32) эйлерову силу.

Рассмотренные в данном параграфе методы определения устойчивости однопролетных стержней при малых отклонениях от прямолинейного положения равновесия позволяют решать точно либо приближенно любые задачи в этой области. Учет деформаций сдвига в реальных случаях для однородных по материалу стержней с монолитной стенкой приводит к уменьшению эйлеровой силы всего лишь на доли процента. Поэтому методика учета указанного фактора здесь не приведена. Учет отступлений от закона Гука имеет более существенное значение. Данный вопрос будет рассмотрен в § 20.3.

§ 20.3. Влияние отступлений от закона Гука на устойчивость стержней

Полученные в § 20.2 формулы для эйлеровых сил не применимы, если потеря устойчивости сжатого стержня происходит при напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала. Чтобы установить пределы применимости формулы (20.21) для эйлеровой силы, вычислим напряжения, соответствующие этой силе, — эйлеровы напряжения $\sigma_э$. Разделив обе части формулы (20.21) на площадь поперечного сечения стержня F, получим

$$\sigma_э = T_э/F = \pi^2 EI/[(\mu_0 l)^2 F] = \pi^2 E/\lambda_0^2, \tag{20.33}$$

где $\lambda_0 = \mu_0 l/r$ — гибкость стержня ($r = \sqrt{I/F}$ — радиус инерции перечного сечения стержня).

Если в формуле (20.33) положить $\sigma_э$ равным пределу пропорциональности материала $\sigma_{пц}$, то нетрудно установить, что эта формула применима, когда $\lambda_0 \geqslant \pi\sqrt{E/\sigma_{пц}}$. Для малоуглеродистой стали при $\sigma_{пц} = 200$ МПа и $E = 2 \cdot 10^5$ МПа формула (20.33) применима при $\lambda_0 \geqslant 100$.

В большинстве случае размеры стержней в судовых конструкциях таковы, что для них $\lambda_0 < 100$, и поэтому при исследовании устойчивости необходимо учитывать отступления от закона Гука. Следовательно, задача сводится к определению критических сил и соответствующих им критических напряжений, которые, как уже указывалось, отличаются от эйлеровых сил и эйлеровых напряжений вследствие отступлений от закона Гука.

Как известно, состояние упругопластического тела зависит не только от значений действующих нагрузок, но и от порядка их приложения или изменения. Поэтому в упругопластической области, в отличие от упругой, возможны различные определения устойчивости и разные постановки задачи.

П е р в а я и з т а к и х п о с т а н о в о к применительно к сжатым стержням принадлежит Ф. С. Ясинскому (1895 г.), Ф. Энгессеру (1895 г.) и Т. Карману (1909 г.) и состоит в следующем.

Устойчивость стержня исследуется для некоторого постоянного значения сжимающей силы T при малых отклонениях от прямолинейной формы равновесия. Иначе говоря, исследуется устойчивость одного из состояний равновесия сжатого стержня во время действия силы T без учета того, каким образом это состояние стержня достигнуто.

Пусть при напряжениях $\sigma > \sigma_{пц}$ происходит потеря устойчивости сжатого стержня, материал которого имеет диаграмму сжатия $\sigma - \varepsilon$, показанную на рис. 20.9, *а*.

Когда стержень начинает изгибаться, то при неизменной сжимающей силе на вогнутой стороне стержня сжимающие напряжения увеличиваются, а на выпуклой — уменьшаются. Таким образом, на вогнутой стороне стержня происходит догрузка волокон, а на выпуклой — их разгрузка (рис. 20.9, *б*). В области поперечного сечения, где происходит догрузка, между дополнительными напряжениями σ_1 и деформацией ε_1 справедлива зависимость

$$\sigma_1 = E_к \varepsilon_1, \tag{20.34}$$

где $E_к = d\sigma/d\varepsilon$ — касательный модуль упругости материала при напряжениях σ_1, определяемый как тангенс угла α_1 наклона касательной AB к кривой механической диаграммы при $\sigma = \sigma_{кр}$ (см. рис. 20.9, *а*). В области разгрузки по прямой AC между дополнительными напряжениями σ_2 и деформацией ε_2 имеется связь

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2, \tag{20.35}$$

где E — модуль продольной упругости, определяемый как тангенс угла α и равный модулю Юнга в упругой области.

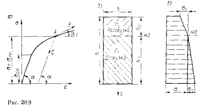


Рис. 20.9

Так как сжимающая сила при потере устойчивости предполагается неизменной, то равнодействующая дополнительных напряжений, возникающих при изгибе, равна нулю, т. е.

$$\int_{F_1} \sigma_1 \, dF + \int_{F_2} \sigma_2 \, dF = 0, \tag{20.36}$$

где интегрирование ведется по площадям F_1 и F_2 зон догрузки и разгрузки (см. рис. 20.9, *б*).

В соответствии с гипотезой плоских сечений относительная деформация произвольного волокна равна $\varepsilon = -z/\rho$, где z — расстояние произвольного волокна от нейтральной оси (НО) сечения; ρ — радиус кривизны НО стержня. Тогда зависимости (20.34) и (20.35) представим в виде

$$\sigma_1 = -E_к z/\rho; \quad \sigma_2 = -Ez/\rho \tag{20.37}$$

и подставим их в условие (20.36). После сокращений найдем условие для определения положения НО:

$$E_к S_1 + ES_2 = 0, \tag{20.38}$$

где $S_1 = \int\limits_{F_1} z\,dF$ и $S_2 = \int\limits_{F_2} z\,dF$ — статические моменты площадей F_1 и F_2 относительно НО.

Приравнивая сумму моментов внутренних сил относительно НО сечения внешнему изгибающему моменту M, получим $\int\limits_{F_1} \sigma_1 z\,dF + \int\limits_{F_2} \sigma_2 z\,dF = -M$. После подстановки выражений (20.37) в это равенство придем к соотношению

$$(E_к I_1 + E I_2)/\rho = M. \tag{20.39}$$

Здесь $I_1 = \int\limits_{F_1} z^2\,dF$ и $I_2 = \int\limits_{F_2} z^2\,dF$ — моменты инерции площадей F_1 и F_2 относительно НО.

Введем величину E_r, называемую *приведенным модулем упругости* и равную

$$E_r = (E_к I_1 + E I_2)/I, \tag{20.40}$$

где I — центральный момент инерции всего поперечного сечения стержня. Тогда зависимость (20.39) можно переписать в виде

$$E_r I/\rho = E_r I w'' = M. \tag{20.41}$$

Формула (20.41) имеет ту же структуру, что и для упругой области при замене модуля упругости E приведенным модулем упругости (20.40). Это означает, что для получения зависимостей, характеризующих изгиб стержня при потере устойчивости за пределом упругости, в аналогичные зависимости упругого изгиба необходимо вместо E подставить приведенный модуль E_r. Поэтому *критические нагрузки* и *напряжения* будут определяться формулами для эйлеровых сил и напряжений при замене в них E на E_r. Таким образом, для неупругой области вместо выражений (20.21) и (20.33) будем иметь

$$T_{кр} = \pi^2 E_r I/(\mu_0 l)^2; \quad \sigma_{кр} = \pi^2 E_r/\lambda_0^2. \tag{20.42}$$

Сопоставляя формулы (20.21), (20.33) и (20.42), получаем

$$T_{кр} = \varphi T_э; \quad \sigma_{кр} = \varphi \sigma_э, \tag{20.43}$$

где $\varphi = E_r/E$ — безразмерный коэффициент, учитывающий влияние отступления от закона Гука. Зависимости (20.43) показывают, что для определения критических нагрузок и напряжений необходимо знать величины эйлеровых нагрузок и напряжений, а также коэффициент φ, учитывающий отступления от закона Гука.

Коэффициент φ зависит от приведенного модуля E_r, который, в свою очередь, вследствие выражения (20.40) зависит от $\sigma_{кр}$, вида диаграммы сжатия и формы поперечного сечения стержня. Сопоставительные расчеты показывают, что влияние формы поперечного сечения на значения приведенного модуля E_r и коэффициента φ невелико. Поэтому обычно значения этих величин определяют для прямоугольного или двутаврового поперечного сечения.

Для прямоугольного сечения с размерами b и h (см. рис. 20.9, б) условие (20.38) нетрудно привести к виду $E_к h_1^2 - E h_2^2 = 0$, откуда, учитывая, что $h_1 + h_2 = h$, можно получить $h_1 = h\sqrt{E}/(\sqrt{E} + \sqrt{E_к})$; $h_2 = h\sqrt{E_к}/(\sqrt{E} + \sqrt{E_к})$. Используя эти значения для вычисления I_1 и I_2 и подставляя их в формулу (20.40), найдем

$$E_r = \frac{E_к b h_1^3/3 + E b h_2^3/3}{c h^3/12} = \frac{4 E E_к}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_к})^2}. \tag{20.44}$$

Согласно формулам (20.43) и (20.44)

$$\varphi = 4E_к/(\sqrt{E} + \sqrt{E_к})^2. \tag{20.45}$$

Так как касательный модуль $E_к$ зависит от значений напряжений, по формуле (20.45) и диаграмме сжатия материала стержня может быть построена зависимость коэффициента φ от напряжений $\sigma = \sigma_{кр}$ или же с помощью второго выражения (20.43) — зависимость критических напряжений $\sigma_{кр}$ от эйлеровых $\sigma_э$. Располагая одной из этих зависимостей, при известном эйлеровом напряжении $\sigma_э$ нетрудно найти коэффициент φ и критическое напряжение $\sigma_{кр}$.

Таким образом, формулы (20.43) и (20.45), в которых используется понятие приведенного модуля E_r, позволяют определить значения критических сил и напряжений за пределом упругости, когда потеря устойчивости происходит при неизменной сжимающей силе.

Вторая постановка задачи устойчивости стержней за пределом упругости была предложена Ф. Шенли (1946 г.). В этой постановке предполагается, что потеря устойчивости происходит при возрастающей сжимающей нагрузке. Поэтому зоны разгрузки могут появиться лишь по мере увеличения прогибов стержня в тех поперечных сечениях, где дополнительные изгибающие напряжения наибольшие (т. е. в районе наибольшей кривизны оси стержня). В момент потери устойчивости, когда прогибы бесконечно малы, разгрузка будет происходить лишь в бесконечно малой зоне как по длине, так и по высоте стержней. Практически можно считать, что в момент потери устойчивости при возрастающей нагрузке зоны разгрузки отсутствуют и что дополнительные изгибные напряжения во всех сечениях стержня определяются через деформации (прогибы) по касательному модулю $E_к$. Тогда формулы для критических сил и напряжений, отвечающих моменту потери устойчивости, будут следующими:

$$T'_{кр} = \pi^2 E_к I/(\mu_0 l)^2; \quad \sigma'_{кр} = \pi^2 E_к/\lambda_0^2. \tag{20.46}$$

Так как всегда $E_к < E_r$, то критическая нагрузка (20.46) меньше нагрузки (20.42), определяемой по приведенному модулю E_r. Указанное различие значений критических нагрузок, очевидно, объясняется различными постановками задачи устойчивости стержней.

Если исследуется устойчивость стержня при неизменной сжимающей нагрузке, то при значении силы $T < T_{кр}$ будет устойчивое состояние равновесия — сжатие. В случае $T = T_{кр}$ стержень переходит в безразличное состояние равновесия и его прогиб w остается неопределенным (рис. 20.10, кривая *1*).

Если исследуется устойчивость стержня в постановке Шенли, т. е. при возрастающей сжимающей нагрузке, то при значении силы $T < T'_{кр}$ будет одно состояние равновесия — сжатие. При $T > T'_{кр}$ происходит увеличение деформации сжатия и непрерывное выпучивание. Каждому значению силы $T > T'_{кр}$ соответствует вполне определенное значение прогиба (рис. 20.10, кривая *2*). При бесконечно малых приращениях сжимающей силы возможны только

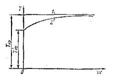


Рис. 20.10

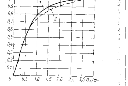


Рис. 20.11

бесконечно малые прогибы стержня с появлением бесконечно малых зон разгрузки и лишь при больших приращениях силы появляются значительные зоны разгрузки, сопротивление стержня изгибу возрастает, а сжимающая сила T стремится к $T_{кр}$.

Таким образом, касательно-модульная нагрузка $T'_{кр}$ и приведенно-модульная нагрузка $T_{кр}$ имеют вполне определенное физическое содержание: при нагрузке $T'_{кр}$ выпучивание лишь начинается, а при нагрузке $T_{кр}$ прогибы стержня становятся неограниченными.

При испытаниях стержней на устойчивость обычно реализуются условия Шенли: нагрузка, создаваемая испытательной машиной, непрерывно возрастает. Однако при $T = T'_{кр}$ прогиб прямого стержня еще равен нулю. Потеря устойчивости регистрируется в момент появления ярко выраженной формы потери устойчивости, когда прогиб стержня w достигает некоторого конечного значения. Поэтому измеренная критическая сила T будет находиться между $T'_{кр}$ и $T_{кр}$, как правило, ближе к касательно-модульной нагрузке $T'_{кр}$.

Для реальных материалов касательно-модульная и приведенно-модульная нагрузки мало отличаются одна от другой. Но в то же время расчет стержней на устойчивость по касательному модулю

дает нижнюю границу для критических напряжений $\sigma_{кр}$ и поэтому позволяет принять наиболее осторожные решения.

В практике судостроительных расчетов используют обобщенные графики, построенные по экспериментальным данным, или справочные таблицы, устанавливающие зависимость между $\sigma_{кр}$ и $\sigma_э$. На рис. 20.11 приведены указанные графики для судостроительных сталей (кривая *1*) и алюминиево-магниевых сплавов (кривая *2*) [51, т. 3]. По осям координат отложены безразмерные величины $\sigma_{кр}/\sigma_т$ и $\sigma_э/\sigma_т$, где $\sigma_т$ — предел текучести материала.

Эти графики позволяют весьма просто решать следующие две задачи устойчивости стержней за пределом текучести.

1. Заданы размеры стержня, его материал и устройство опор. Необходимо определить критические напряжения $\sigma_{кр}$.

По теоретическим формулам типа (20.33) находят эйлерово напряжение $\sigma_э$; вычисляют отношение $\sigma_э/\sigma_т$ и по графикам рис. 20.11 определяют $\sigma_{кр}/\sigma_т$, а затем и $\sigma_{кр}$.

2. Заданы устройства опор стержня, его длина, материал и критические напряжения $\sigma_{кр}$. Необходимо подобрать поперечное сечение стержня, чтобы ему была обеспечена устойчивость при данных $\sigma_{кр}$.

Для заданного $\sigma_{кр}$ определяется отношение $\sigma_{кр}/\sigma_т$, затем по графику рис. 20.11 находят $\sigma_э/\sigma_т$ и по формуле (20.43) — коэффициент

$$\varphi = \sigma_{кр}/\sigma_э. \tag{20.47}$$

Используя этот результат и выражения (20.42), можно получить следующую формулу:

$$I/F = \sigma_{кр}(\mu_0 l)^2/(\varphi\pi^2 E),$$

а затем подбором определить размеры поперечного сечения стержня.

Из зависимостей между $\sigma_{кр}$ и $\sigma_э$ следует важный вывод о том, что при достижении сжимающими напряжениями $\sigma_т$ стержень потеряет устойчивость. Поэтому $\sigma_т$ можно считать верхним пределом критических напряжений $\sigma_{кр}$, если материал имеет площадку текучести.

§ 20.4. Устойчивость многопролетного стержня на равноотстоящих упругих опорах

Расчет на устойчивость многопролетных стержней на упругих опорах имеет в строительной механике корабля самостоятельное значение и, кроме того, применяется при определении устойчивости сжатых судовых перекрытий.

Рассмотрим задачу об устойчивости сжатого двухпролетного стержня со средней упругой опорой (рис. 20.12), а затем обобщим эти результаты на случай большего числа пролетов. На крайних опорах стержень свободно оперт, имеет одинаковые пролеты a и постоянную по длине изгибную жесткость EI. Для исследования стержня на устойчивость отклоним его от положения равновесия так, что упругая опора получит просадку w и в сечении стержня на опоре возникнет изгибающий момент M. Статическая неопределимость стержня на основании общих формул (19.65) раскрывается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &(\sin 2u - 2u\cos 2u)\,M + 4u^2 \sin 2u\,\frac{EI}{a^2}\,w = 0;\\ &2M + \frac{8u^2EI}{a^2}\left(1 - \frac{Ka^3}{8a^2EI}\right)w = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (20.48)$$

где $u = (a/2)\sqrt{T/(EI)}$. При записи уравнений (20.48) как частного случая уравнений (19.65) было учтено, что на упругой опоре $M_i = M$ и $w_i = w$, на свободных опорах $M_{i-1} = M_{i+1} = w_{i-1} = w_{i+1} = 0$ и поперечная нагрузка $Q_i = 0$.

Два уравнения (20.48), представляющие условие совместности угловых деформаций на упругой опоре и зависимость между прогибом и реакцией этой опоры, определяют M и w в отклоненном

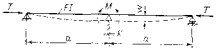


Рис. 20.12

Рис. 20.13

положении стержня. В общем случае при отклонении стержня одновременно $M \neq 0$ и $w \neq 0$. Необходимо приравнять нулю определитель системы (20.48), чтобы были возможны ненулевые решения. Приравнивая нулю определитель системы, после преобразований получим

$$\operatorname{tg} 2u = 2u\,[1 - 8u^2EI/(Ka^3)]. \qquad (20.49)$$

Уравнение (20.49) является трансцендентным и поэтому может быть решено лишь приближенно, например графическим способом. Наименьший корень уравнения u_1 на основании указанной выше зависимости между T и u определяет эйлерову силу для рассматриваемого стержня

$$T_э = (2u_1)^2\,EI/a^2. \qquad (20.50)$$

Однако формула (20.50) применима лишь до тех пор, пока удовлетворяет условию $T_э \leqslant \pi^2EI/a^2$, а следовательно, аргумент $2u_1$ — неравенству $2u_1 \leqslant \pi$. Верхний предел отвечает случаю, когда потеря устойчивости происходит с образованием на длине стержня двух полуволн и каждый его пролет ведет себя как отдельная свободно опертая балка (рис. 20.13).

Интересным является тот факт, что своего верхнего предела $T_э$ балка достигает раньше, чем жесткость опоры оказывается бесконечно большой, т. е. при конечной жесткости упругой опоры. Чтобы найти эту жесткость, подставим предельное значение аргумента $2u_1 = \pi$ в уравнение (20.49):

$$K_{кр} = 2\pi^2EI/a^3. \qquad (20.51)$$

Жесткость упругой опоры (20.51), при которой эйлерова сила $T_э$ достигает предельного значения π^2EI/a^2, такого же, как и при абсолютно жесткой опоре, называется *критической*.

Зависимость $T_э$ от жесткости K упругой опоры показана на рис. 20.14. Как видно из рисунка, нижний предел $T_э$ отвечает случаю, когда упругая опора отсутствует ($K = 0$) и эйлерова сила для стержня длиной $l = 2a$ определяется формулой (20.16). С увеличением жесткости упругой опоры эйлерова сила увеличивается и достигает своего предельного значения при $K = K_{кр}$, а при дальнейшем увеличении жесткости остается постоянной. Таким образом, повышать устойчивость стержня за счет увеличения жесткости упругой опоры можно лишь до тех пор, пока эта жесткость не превышает критического значения. Это обстоятельство следует

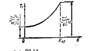


Рис. 20.14

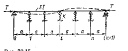


Рис. 20.15

всегда иметь в виду при проектировании упругих опор исходя из условия устойчивости многопролетного стержня.

Полученные формулы нетрудно обобщить на случай потери устойчивости стержня за пределом упругости. Для этого в соответствии с результатами § 20.3 необходимо заменить модуль E на приведенный модуль E_r. Тогда, принимая во внимание (20.43), зависимости (20.49)—(20.51) можно преобразовать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg} 2u = 2u\,[1 - 8\varphi u^2EI/(Ka^3)];\\ &T_{кр} = (2u_1)^2\varphi EI/a^2; \qquad K_{кр} = 2\pi^2\varphi EI/a^3. \end{aligned}\right\} \qquad (20.52)$$

Формулы (20.52) позволяют найти значение критической силы $T_{кр}$ с учетом отступлений от закона Гука.

Рассмотрим теперь сжатый призматический стержень, свободно опертый по концам на жесткие опоры и поддерживаемый одинаковыми равноотстоящими упругими опорами, число которых n (рис. 20.15).

Если стержень отклонить от прямолинейной формы равновесия, то упругие опоры получат просадки w_i, а в опорных сечениях стержня возникнут изгибающие моменты M_i. Следовательно, в отклоненном положении рассматриваемый стержень будет испытывать сложный изгиб.

Для раскрытия статической неопределимости стержня в отклоненном положении воспользуемся уравнениями (19.65). Так как поперечная нагрузка отсутствует (все $Q_i = 0$), то для i-й опоры уравнения (19.65) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}(2u-\sin 2u)(M_{i-1}+M_{i+1})+2(\sin 2u-2u\cos 2u)M_i+\\+(2u/a)^2EI\sin 2u\,(2w_i-w_{i-1}-w_{i+1})=0;\\2M_i-M_{i-1}-M_{i+1}+\\+(2u/a)^2EI\{2[1-Ka^3/(8u^2EI)]w_i-w_{i-1}-w_{i+1}\}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(20.53)$$

Уравнения (20.53), составленные для каждой упругой опоры, в совокупности дадут систему $2n$ уравнений, описывающую поведение стержня в отклоненном положении.

Решение системы (20.53) следующее:

$$M_i=M\sin ji\pi/(n+1);\qquad w_i=w\sin ji\pi/(n+1),\qquad(20.54)$$

где M и w — некоторые постоянные; j — целое положительное число. Искомое решение удовлетворяет условиям свободного опирания на крайние жесткие опоры с номерами $i=0$ и $i=n+1$, так как при указанных значениях i выражения (20.54) дают $M_0=w_0=0$; $M_{n+1}=w_{n+1}=0$.

Подставляя выражения (20.54) в уравнения (20.53) и учитывая формулу для суммы синусов $\sin[j(i+1)\pi/(n+1)]+\sin[j(i-1)\pi/(n+1)]=2\sin[ji\pi/(n+1)]\cos[j\pi/(n+1)]$, получаем

$$\left.\begin{aligned}\left\{\left[(2u-\sin 2u)\cos\frac{j\pi}{n+1}+\sin 2u-2u\cos 2u\right]M+\right.\\\left.+\frac{4u^2EI}{a^2}\sin 2u\left(1-\cos\frac{j\pi}{n+1}\right)w\right\}\sin\frac{ji\pi}{n+1}=0;\\\left[\left(1-\cos\frac{i\pi}{n+1}\right)M+\right.\\\left.+\frac{4u^2EI}{a^2}\left(1-\frac{Ka^3}{8u^2EI}-\cos\frac{j\pi}{n+1}\right)w\right]\sin\frac{ji\pi}{n+1}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(20.55)$$

Таким образом, если соотношения (20.55) удовлетворены, то уравнения (20.53) для каждой i-й опоры будут также удовлетворены.

Из выражений (20.54) видно, что целое число j есть количество полуволн на всей длине стержня в отклоненном положении, т. е. при потере устойчивости. Очевидно, что максимальное число полуволн при потере устойчивости может быть равно числу пролетов стержня $(n+1)$, когда в каждом пролете образуется по одной полуволне, а минимальное их число равно единице, так что $1\leqslant j\leqslant(n+1)$.

Если $j=n+1$, то $\sin ji\pi/(n+1)=0$ и уравнения (20.55), а следовательно, и (20.53) удовлетворены. При этом из выражений (20.54) следует, что на каждой упругой опоре изгибающие моменты и просадки опор $M_i=w_i=0$ и каждый пролет находится в условиях свободного опирания на жесткие опоры. Эйлерова сила для всего стержня определяется как эйлерова сила одного пролета длиной a при свободном его опирании на жесткие опоры по полученной ранее формуле (20.16):

$$T_0=\pi^2EI/a^2.\qquad(20.56)$$

Если $j\leqslant n$, то $\sin ji\pi/(n+1)\neq 0$ и уравнения (20.55) можно сократить на ненулевой множитель. Определитель системы (20.55) следует приравнять нулю, так как только в этом случае возможны ненулевые решения для M_i и w_i, т. е. потеря устойчивости исходной формы равновесия стержня.

Приравнивая нулю определитель системы (20.55) и решая полученное уравнение относительно коэффициента жесткости K упругих опор, получим следующее уравнение, устанавливающее зависимость между параметрами упругой системы и значением силы $T_э$, при котором происходит потеря устойчивости:

$$K=\pi^4EI\chi_j(\lambda)/a^3,\qquad(20.57)$$

где

$$\chi_j(\lambda)=\frac{2A(\lambda)}{\pi^4}\left(1-\cos\frac{j\pi}{n+1}\right)\frac{\cos j\pi/(n+1)-\cos\pi\sqrt{\lambda}}{\cos j\pi/(n+1)+B(\lambda)};\qquad(20.58)$$

$$\lambda=(2u/\pi)^2.\qquad(20.59)$$

Здесь

$$A(\lambda)=\frac{(\pi\sqrt{\lambda})^3}{\pi\sqrt{\lambda}-\sin\pi\sqrt{\lambda}};\qquad B(\lambda)=\frac{\sin\pi\sqrt{\lambda}-\pi\sqrt{\lambda}\cos\pi\sqrt{\lambda}}{\pi\sqrt{\lambda}-\sin\pi\sqrt{\lambda}}.$$

В уравнении (20.57) целочисленный параметр j изменяется в пределах $1\leqslant j\leqslant n$.

Параметр λ, определяемый формулой (20.59), введен для удобства вычислений. Если подставить в (20.59) выражение для u и учесть (20.56), то получим

$$\lambda=T_эa^2/(\pi^2EI)=T_э/T_0,\qquad(20.60)$$

т. е. параметр λ представляет отношение эйлеровой силы $T_э$ для всего стержня к эйлеровой силе T_0 одного пролета при свободном опирании его на жесткие опоры. Так как T_0 есть верхний предел эйлеровой нагрузки для стержня на упругих опорах, из формулы (20.60) следует, что всегда $\lambda\leqslant 1$.

Расчет устойчивости стержня на упругих опорах связан с решением уравнения устойчивости (20.57). Если параметры стержня и упругих опор заданы, то в уравнении (20.57) надо подобрать такое число полуволн j, при котором λ оказывается минимальным, после чего эйлерова сила определяется из формулы (20.60):

$$T_э=\lambda_{\min}T_0.\qquad(20.61)$$

При определении коэффициента жесткости K, обеспечивающего стержню устойчивость при заданной эйлеровой силе $T_э$, значение j должно быть подобрано так, чтобы при заданном $\lambda=T_э/T_0$ функция $\chi_j(\lambda)$ и, следовательно, K были наибольшими, поскольку при меньших значениях коэффициента жесткости упругой опоры эйлерова нагрузка окажется меньше.

Если стержень теряет устойчивость за пределами пропорциональности, то для определения критических сил $T_{кр}$ модуль E в уравнении устойчивости надо заменить на приведенный модуль

$E_r = \varphi E$. Тогда формулы (20.56), (20.57) и (20.60) запишутся так:

$$T_{кр} = \varphi T_э; \qquad \lambda = T_{кр}/(\varphi T_0) = T_{кр}a^2/(\varphi\pi^2 EI); \tag{20.62}$$

$$K = \varphi\pi^4 EI\chi_j(\lambda)/a^3. \tag{20.63}$$

Совместно с графиками, устанавливающими зависимость $\sigma_{кр}$ от $\sigma_э$ (см. рис. 20.11), формулы (20.62) и (20.63) позволяют решить задачу устойчивости рассматриваемого стержня за пределом упругости материала.

На рис. 20.16 приведены графики $\chi_j(\lambda)$, соответствующие $n = 3$. Из графиков видно, что необходимые для расчета максимальные значения $\chi_{j\,max}(\lambda)$ находятся на кривой $ABCD$, огибающей совокупность кривых $\chi_j(\lambda)$.

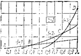


Рис. 20.16

Для удобства расчетов функции $\chi_j(\lambda)$ табулированы [51, т. 3, табл. 13.3]. Максимальные значения $\chi_{j\,max}(\lambda)$ этих функций в уравнении устойчивости (20.57) и число полуволн j, которое образуется на стержне при потере устойчивости, даны в табл. 20.1 в зависимости от количества упругих опор n и параметра λ. При $\lambda = 1$ теоретически возможны формы потери устойчивости с числом полуволн, равным n или $(n+1)$; в таблице указано только меньшее из этих чисел. При $n \geqslant 8$ значения функции (20.58), практически не зависящие от n, приведены в столбце $n = \infty$. Физически это объясняется тем, что в этом случае $n \geqslant 8$ упругие опоры можно заменить эквивалентным сплошным упругим основанием (см. § 20.2).

Число полуволн форм потери устойчивости стержня отыскивается из неравенств

$$j^2(j-1)^2 < \gamma < j^2(j+1)^2, \tag{20.64}$$

где

$$\gamma = Ka^3(n+1)^4/(\pi^4 EI) \tag{20.65}$$

для рассматриваемого случая определяется по формуле (20.32′) при значении коэффициента жесткости упругого основания $k = K/a$ и полной длине стержня $l = a(n+1)$.

В заключение остановимся на определении критической жесткости опор $K_{кр}$, т. е. той жесткости, при достижении которой упругие опоры начинают вести себя при потере устойчивости стержня как абсолютно жесткие. Было уже выяснено, что верхним пределом критической нагрузки при абсолютно жестких опорах является величина $T_{0кр}$, соответствующая эйлеровой силе (20.56); при этом вследствие (20.62) верхний предел $\lambda = 1$. Поэтому критическая жесткость упругих опор $K_{кр}$ определяется при $\lambda = 1$ из уравнения устойчивости (20.63):

$$K_{кр} = (\varphi\pi^4 EI/a^3)\,\chi_{j\,max}(1),$$

Таблица 20.1. Значения $\chi_{j\,max}$ и числа j

λ	$n=1$		$n=2$		$n=3$		$n=4$	
	$\chi_{j\,max}$	j	$\chi_{j\,max}$	j	$\chi_{j\,max}$	j	$\chi_{j\,max}$	j
0	−0,062	1	−0,012	—	−0,004	—	−0,002	—
0,1	−0,037	1	−0,001	—	0,002	1	0,002	1
0,2	−0,013	1	0,010	1	0,009	1	0,006	1
0,3	0,013	1	0,021	1	0,015	1	0,023	2
0,4	0,038	1	0,032	1	0,038	2	0,039	2
0,5	0,064	1	0,044	1	0,064	2	0,055	2
0,6	0,090	1	0,072	2	0,090	2	0,090	3
0,7	0,117	1	0,121	2	0,117	2	0,129	3
0,8	0,144	1	0,175	2	0,151	3	0,171	3
0,9	0,173	1	0,235	2	0,234	3	0,216	3
0,95	0,188	1	0,268	2	0,285	3	0,279	4
1	0,203	1	0,304	2	0,348	3	0,366	4

λ	$n=5$		$n=6$		$n=7$		$n=\infty$
	$\chi_{j\,max}$	j	$\chi_{j\,max}$	j	$\chi_{j\,max}$	j	$\chi_{j\,max}$
0	−0,001	—	−0,000	—	−0,000	—	0,000
0,1	0,002	1	0,002	1	0,002	2	0,003
0,2	0,010	2	0,010	2	0,009	2	0,011
0,3	0,021	2	0,022	3	0,023	3	0,023
0,4	0,038	3	0,040	3	0,038	4	0,041
0,5	0,064	3	0,059	3	0,064	4	0,064
0,6	0,090	3	0,092	4	0,090	4	0,092
0,7	0,121	4	0,128	4	0,128	5	0,129
0,8	0,175	4	0,166	5	0,175	5	0,174
0,9	0,235	4	0,239	5	0,234	6	0,238
0,95	0,262	5	0,281	5	0,285	6	0,285
1	0,378	5	0,385	6	0,391	7	0,405

где значение j должно быть принято таким, чтобы $\chi_j(1)$ была наибольшей. Полагая $\lambda = 1$ в формулах (20.58), находим

$$\chi_j(1) = (2/\pi^2)\,[1 - \cos j\pi/(n+1)].$$

Функция $\chi_j(1)$ достигает наибольшего значения при $j = n$. Поэтому

$$\chi_{j\,max}(1) = (2/\pi^2)\,[1 - \cos n\pi/(n+1)] = (2/\pi^2)\,[1 + \cos \pi/(n+1)].$$

Подставляя значение $\chi_{j\,max}(1)$ в выражение для $K_{кр}$, окончательно получим

$$K_{кр} = (\varphi 2\pi^2 EI/a^3)\,[1 + \cos \pi/(n+1)]. \tag{20.66}$$

Значениям жесткости K в пределах от нуля до некоторой величины K_1 соответствует потеря устойчивости по одной полуволне с отклонением всех опор в одну сторону. При изменении K в пределах $K_1 < K < K_2$, $K_2 < K < K_3$, ..., $K_n < K < K_{n+1}$ форма потери устойчивости будет соответственно иметь число полуволн, равное

2, 3, ..., $(n+1)$. В случае точного совпадения значения K с одним из значений K_1, K_2, ..., K_{n+1} возможны одновременно обе смежные формы потери устойчивости — по одной и двум полуволнам, по двум и трем полуволнам и, наконец, по n и $(n+1)$ полуволнам при одной и той же критической силе. С увеличением K от нуля до $K_{кр}$ монотонно увеличивается также критическая и эйлерова силы, а при дальнейшем увеличении $K > K_{кр}$ вплоть до $K = \infty$ эти силы сохраняют постоянные значения, соответствующие значению $K = K_{кр}$ (см. рис. 20.14).

§ 20.5. Устойчивость плоских судовых перекрытий

Задача об устойчивости сжатых плоских перекрытий, особенно палубных перекрытий, наиболее нагруженных при общем изгибе судна и имеющих относительно небольшие размеры связей, представляет большой практический интерес.

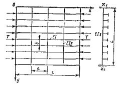


Рис. 20.17

Как и в задачах изгиба, в задачах устойчивости перекрытие рассматривается в виде плоской стержневой системы, состоящей из продольных и поперечных балок. Обшивка перекрытия включается в поперечные сечения балок полностью или частично в качестве присоединенных поясков, значения которых назначаются так же, как при изгибе перекрытий. Это объясняется тем, что при потере устойчивости плоского перекрытия возникает изгиб балок в плоскости, перпендикулярной плоскости перекрытия.

Конструкции палубных перекрытий современных судов бывают довольно сложными, а решение задачи об устойчивости перекрытий оказывается трудным в математическом отношении. Здесь будут приведены только основные случаи, представляющие наибольший практический интерес и позволяющие выяснить особенности расчета перекрытий на устойчивость.

Перекрытие, состоящее из большого числа одинаковых равноотстоящих продольных балок, сжатых одинаковыми силами T, и одинаковых равнорасставленных поперечных балок-бимсов (рис. 20.17). Упругая заделка всех бимсов вдоль каждой стороны опорного контура одинакова. Продольные балки при $x=0$ и $x=l$ свободно оперты на жесткие опоры.

Таким простейшим перекрытием может быть участок палубного перекрытия или палубное перекрытие в целом. В последнем случае опорами перекрытия при $y=0$ и $y=L$ являются борта судна, а при $x=0$ и $x=l$ — поперечные переборки.

Для параметров перекрытия приняты следующие обозначения: $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — коэффициенты податливости упругих заделок бимсов при $y=0$ и $y=L$;

$$\varkappa_i = 1/(1+2\mathfrak{A}_i EI_б/L), \qquad i=1,\ 2,$$

— коэффициенты опорных пар упругих заделок бимсов при $y=0$, $y=L$; I — момент инерции поперечного сечения продольных балок с присоединенным пояском; $I_б$ — момент инерции поперечного сечения бимсов с присоединенным пояском; E — модуль Юнга материала перекрытия в упругой области. График для определения коэффициента φ, учитывающего отступление от закона Гука, задан.

Предположим, что перекрытие потеряло устойчивость и получило некоторый малый прогиб $w(x, y)$. Прогиб перекрытия $w(x, y)$ при потере устойчивости можно представить в следующем виде:

$$w(x,\ y) = X(x)\,Y(y), \tag{20.67}$$

где $X(x)$ — функция от x, являющаяся формой изгиба продольных балок; $Y(y)$ — функция от y, характеризующая форму изгиба бимсов.

При появлении прогиба перекрытия w между продольными балками и бимсами в узлах возникнут вертикальные реакции $R(x, y)$.

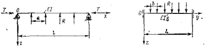


Рис. 20.18

Поэтому каждую продольную балку можно считать загруженной в узлах вертикальными реакциями и сжимающей силой T, а каждый бимс — только вертикальными реакциями обратного направления (рис. 20.18). Поскольку форма изгиба всех продольных балок одинакова, их прогибы при одинаковых силах T должны быть пропорциональны поперечной нагрузке R и, следовательно,

$$R = Kw, \tag{20.68}$$

где K — постоянный коэффициент пропорциональности между прогибом и узловыми реакциями.

Формулу (20.68) можно также получить, рассматривая соотношение между реакциями R и прогибами бимсов w, форма изгиба которых на основании (20.67) будет одинаковой.

Соотношение (20.68) показывает, что воздействие бимсов на продольные балки эквивалентно воздействию упругих опор с жесткостью K. Это позволяет свести расчет продольной балки, представленной на рис. 20.18, к расчету балки на упругих опорах с неизвестной пока жесткостью K (рис. 20.19).

Для определения K рассмотрим изгиб бимса, создающего упругие опоры для продольных балок. Сосредоточенные реакции (20.68), действующие на бимсы со стороны продольных балок, при большом числе последних можно заменить распределенной нагрузкой R/b. Тогда дифференциальное уравнение изгиба бимса запишется в виде

$$EI_6 \frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{R}{b} = \frac{K}{b} w. \qquad (20.69)$$

Если в уравнение (20.69) подставить выражение (20.67), то получим следующее уравнение для определения формы изгиба бимсов $Y(y)$:

$$Y^{IV} - (\mu/L)^4 Y = 0, \qquad (20.70)$$

где

$$(\mu/L)^4 = K/(bEI_6). \qquad (20.71)$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения (20.70) с постоянными коэффициентами можно записать в виде

$$Y = A \operatorname{ch} \mu y/L + B \operatorname{sh} \mu y/L + C \cos \mu y/L + D \sin \mu y/L, \qquad (20.72)$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий для бимсов.

Далее необходимо подчинить выражение (20.72) четырем однородным граничным условиям в опорных сечениях бимса при $y = 0$ и $y = L$ и получить систему однородных линейных алгебраических уравнений для расчета постоянных A, B, C, D. Так как при потере устойчивости все эти постоянные одновременно не могут равняться нулю (иначе $Y = w = 0$), определитель указанной однородной системы должен равняться нулю. Это условие дает характеристическое уравнение для вычисления неизвестного параметра μ, а тем самым, и K.

Рис. 20.19.

Характеристическое уравнение будет иметь бесконечное множество корней μ, и каждому значению μ будет соответствовать на основании формулы (20.71) определенное значение K. Из всех возможных значений K интерес представляет наименьшее значение, соответствующее наименьшему положительному корню μ_1, так как именно этому значению K отвечает наименьшее значение силы T, при которой возможны отклоненные формы равновесия, т. е. потеря устойчивости. Проделав указанные вычисления, можно получить значения наименьших корней μ_1 в зависимости от коэффициентов опорной пары бимсов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Результаты таких расчетов представлены в табл. 20.2, где даются значения $(\pi/\mu_1)^4$.

Подставляя в уравнение (20.63) устойчивости стержня на упругих опорах значение K, соответствующее наименьшему корню μ_1,

Таблица 20.2. Значения $(\pi/\mu_1)^4$ в зависимости от коэффициентов опорных пар бимсов

$\varkappa_1$	$\varkappa_2$				
	0	0,25	0,50	0,75	1,00
0	1,000	0,889	0,758	0,600	0,410
0,25	0,889	0,799	0,684	0,545	0,379
0,50	0,758	0,684	0,595	0,479	0,335
0,75	0,600	0,545	0,479	0,393	0,279
1,00	0,410	0,379	0,335	0,279	0,195

получаем следующее уравнение устойчивости рассматриваемого простейшего перекрытия:

$$I_6 = (\pi/\mu_1)^4 (L/a)^3 (L/b) \varphi I \chi_{j\,\max}(\lambda). \qquad (20.73)$$

Критическая сила входит в это уравнение через параметр λ, определяемый второй формулой (20.62).

Анализируя уравнение (20.73), можно установить следующее. Так как функция $\chi_{j\,\max}(\lambda)$ является возрастающей функцией аргумента λ, то и момент инерции бимсов I_6 будет возрастающей функцией λ. Это означает, что с увеличением момента инерции бимсов, т. е. с ростом их жесткости, увеличивается и критическая нагрузка для перекрытия.

Предельному значению $\lambda = 1$ соответствует так называемое критическое значение момента инерции бимсов

$$I_{6.\,\text{кр}} = (\pi/\mu_1)^4 (L/a)^3 (L/b) \varphi I \chi_{j\,\max}(1). \qquad (20.74)$$

Если, не меняя остальных размеров перекрытия, увеличивать момент инерции бимсов сверх $I_{6.\,\text{кр}}$, то критическая нагрузка перекрытия возрастать не будет. Это объясняется тем, что уже при критическом значении момента инерции бимсы создают для продольных балок перекрытия абсолютно жесткие опоры. В этом случае продольные балки теряют устойчивость в пролетах между бимсами не вызывая изгиба последних. Характер влияния величины I_6 на устойчивость перекрытия нетрудно представить, если на графике рис. 20.14 заменить K на I_6 и $K_{\text{кр}}$ на $I_{6.\,\text{кр}}$. Как видно, повысить устойчивость перекрытия за счет увеличения момента инерции бимсов можно только при $I_6 < I_{6.\,\text{кр}}$. Дальнейшее увеличение I_6 сверх критического значения не приводит к увеличению критической нагрузки.

В практических расчетах приходится решать две задачи, которые излагаются ниже.

З а д а ч а 1. Заданы размеры перекрытия l и L, число продольных балок m и число бимсов n, момент инерции I и площадь f поперечного сечения продольных балок с присоединенным пояском, коэффициенты опорных пар упругих заделок бимсов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, механические характеристики материала перекрытия E, $\sigma_т$, $\varphi(\sigma)$, критические напряжения для продольных балок перекрытия $\sigma_{кр}$. Надо определить необходимый момент инерции бимсов $I_б$, при котором обеспечивается устойчивость перекрытия при заданных напряжениях $\sigma_{кр}$.

Решение этой задачи выполняют следующим образом. Значения $(\pi/\mu_1)^4$ определяют по табл. 20.2 в зависимости от $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Для заданных $\sigma_{кр}$ и $\sigma_т$ по графику рис. 20.11 находят отношение $\sigma_э/\sigma_т$, а затем по формулам (20.47) и (20.62) вычисляют коэффициент φ, учитывающий отступление от закона Гука, и аргумент λ:

$$\varphi = \sigma_{кр}/\sigma_э; \qquad \lambda = \sigma_{кр} f a^2/(\varphi \pi^2 EI). \tag{20.75}$$

По табл. 20.1 в зависимости от найденного значения λ и заданного числа бимсов n определяют $\chi_{j\,max}(\lambda)$. Далее рассчитывают необходимый момент инерции бимса $I_б$ по уравнению устойчивости (20.73).

Следует иметь в виду, что решение рассмотренной задачи возможно только в том случае, если полученное по формуле (20.75) значение $\lambda \leqslant 1$. При $\lambda = 1$ необходимый момент инерции бимсов, очевидно, окажется равным критическому $I_{б.\,кр}$. Если $\lambda > 1$, то поставленная задача не имеет решения, так как устойчивость заданных продольных балок не может быть доведена до заданного уровня $\sigma_{кр}$ даже при установке абсолютно жестких бимсов. В этом случае для повышения устойчивости приходится увеличивать число бимсов, т. е. уменьшать пролет a или увеличивать профиль продольных балок так, чтобы оказалось $\lambda \leqslant 1$.

При проектировании перекрытий по условиям устойчивости можно варьировать количеством и жесткостью бимсов и продольных балок. Исследования показывают, что оптимальные весовые и конструктивные показатели перекрытия получаются при сочетаниях варьируемых параметров, соответсвующих значениям λ, близким к 0,8. Этот результат нетрудно объяснить: при $\lambda \geqslant 0{,}8$ функции $\chi_{j\,max}(\lambda)$ и, следовательно, необходимый момент инерции бимсов $I_б$ начинают резко возрастать, что приводит к большим размерам бимсов.

З а д а ч а 2. Заданными являются значения l, L, a, b, I, $I_б$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, E, $\sigma_т$, зависимость для коэффициента φ, а искомым — критическое напряжение $\sigma_{кр}$.

Решение выполняют с помощью уравнения устойчивости (20.73), представленного в виде

$$\varphi \chi_{j\,max}(\lambda) = (\mu_1/\pi)^4 (a/L)^3 (b/L)(I_б/I). \tag{20.76}$$

Правую часть этого уравнения легко вычисляют по исходным данным, а искомое напряжение $\sigma_{кр}$ входит неявно через коэффициенты φ и λ в левую часть уравнения. Поэтому решение уравнения (20.76) можно получить только численно, для чего необходимо задаться рядом значений λ в ожидаемом диапазоне и для каждого значения λ рассчитать $\varphi\chi_{j\,max}(\lambda)$, последовательно заполняя столбцы табл. 20.3. При этом на основании (20.75)

$$\sigma_э = \lambda \sigma_{0э}; \qquad \sigma_{0э} = \pi^2 EI/(f a^2); \qquad \varphi = (\sigma_{кр}/\sigma_т)/(\sigma_э/\sigma_т).$$

Таблица 20.3. **Форма для вычисления величины $\varphi\chi_{j\,max}(\lambda)$ по заданным значениям λ**

λ	$\sigma_э/\sigma_т$	$\sigma_{кр}/\sigma_т$	φ	$\chi_{j\,max}(\lambda)$	$\varphi\chi_{j\,max}(\lambda)$

Отношение $\sigma_{кр}/\sigma_т$ определяют по графику рис. 20.11 в зависимости от $\sigma_э/\sigma_т$, а функции $\chi_{j\,max}(\lambda)$ находят по табл. 20.1. В качестве исходных значений λ в табл. 20.3 следует принимать значения λ, приведенные в табл. 20.1. Это избавит от интерполяции при определении $\chi_{j\,max}(\lambda)$ и тем самым сократит объем вычислений.

По данным табл. 20.3 графически или интерполяцией находят значение $\sigma_{кр}$, соответствующее значению правой части формулы (20.76).

Рассмотренная задача всегда имеет решение и возникает при проверочном расчете на устойчивость перекрытия, все размеры и материал которого выбраны по другим соображениям. Особым будет только случай, когда заданное значение $I_б > I_{б.\,кр}$, т. е. когда бимсы являются жесткими опорами для продольных балок, а критические напряжения легко определяются при рассмотрении одного пролета продольной балки между бимсами как свободно опертого изолированного стержня. Для этого случая уравнение (20.76) не имеет решения. Поэтому практический расчет следует начинать с вычисления по формуле (20.74) значения $I_{б.\,кр}$ и в зависимости от того, будет ли заданное значение $I_б$ меньше или больше $I_{б.\,кр}$, применять тот или иной способ.

Реальные судовые перекрытия часто не могут быть представлены расчетной схемой простейшего перекрытия. К таким перекрытиям относятся палубные перекрытия, подкрепленные карлингсами, рамными бимсами, пиллерсами, а также перекрытия, имеющие значительные вырезы. Общий ход решения задачи об устойчивости перекрытий таких типов будет прежним: необходимо составить уравнение сложного изгиба сжатых балок и поперечного изгиба для бимсов при отклоненном положении перекрытий и дополнить их уравнениями совместности деформаций балок обоих направлений в узловых точках. Когда указанные уравнения изгиба и совместности деформаций будут выписаны, решение задачи устойчивости сводится к отысканию ненулевых решений системы данных уравнений при заданных граничных условиях по концам балок перекрытия. Несмотря на принципиальную простоту, решение этой задачи в общем случае связано с большими математическими выкладками, что не позволяет включить их в данных курс. Некоторые результаты, имеющие важное практическое значение, приводятся ниже без выводов.

Перекрытие, у которого продольные балки расположены на части его ширины симметрично относительно середины (рис. 20.20).

Все продольные балки перекрытия одинаковы; бимсы также одинаковы и одинаково заделаны по концам (коэффициент опорной пары $\varkappa$).

Уравнение устойчивости для рассматриваемого перекрытия записывается в виде (20.73) с сохранением смысла входящих в него величин и выводится так же, как и для простейшего перекрытия, исходя из выражения (20.67) для прогиба в момент потери устойчивости. Поскольку в средней части перекрытия продольные балки отсутствуют, в дифференциальном уравнении (20.69) изгиба бимсов в этом районе следует положить $R = K = 0$ и интегрировать уравнение (20.70) по участкам. Поэтому наименьший корень μ_1 зависит не только от условий заделки бимса, но и от относительной ширины среднего участка c. Значения $(\pi/\mu_i)^4$ приведены в табл. 20.4.

Рис. 20.20

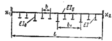


Рис. 20.21

Таблица 20.4. Значения $(\pi/\mu_1)^4$ в зависимости от c и $\varkappa$

c	$\varkappa$				
	0	0,25	0,50	0,75	1,00
0	1,000	0,799	0,595	0,393	0,195
0,3	0,443	0,348	0,253	0,159	0,066
0,4	0,307	0,237	0,170	0,100	0,040
0,5	0,189	0,145	0,105	0,070	0,020

Практический расчет устойчивости рассматриваемого перекрытия аналогичен расчету простейшего. Расчетная схема перекрытия (см. рис. 20.20) может быть использована для оценки устойчивости палубного перекрытия в районе грузовых люков.

Перекрытие, состоящее из большого числа равноотстоящих продольных балок, часть из которых усилена (рис. 20.21). Бимсы перекрытия одинаковы и расположены на равных расстояниях, а усиленные балки являются карлингсами. Во всех продольных балках и карлингсах действуют одинаковые сжимающие напряжения.

Уравнение устойчивости такого перекрытия имеет вид

$$I_б = (\pi/\mu_1)^4 (L/a)^3 (L/b) \varphi [(1 - b/b_1) I \chi_j(\lambda) + b I_0 \chi_j(\lambda_0)/b_1], \qquad (20.77)$$

где

$$\lambda_0 = \sigma_{кр} f_0 a^2/(\varphi \pi^2 E I_0) \qquad (20.78)$$

(f_0 и I_0 — площадь и момент инерции поперечного сечения карлингса с присоединенным пояском). Формула (20.77) применима, когда число карлингсов не меньше двух.

Если размеры продольных балок и карлингсов известны, то по формуле (20.77) с учетом (20.75) и (20.78) можно легко подобрать необходимый момент инерции бимсов $I_б$. Число полуволн j в формуле (20.77) необходимо выбирать так, чтобы момент инерции $I_б$ принимал наибольшее значение из возможных. Для расчета в этом случае используются полные таблицы функций $\chi_j(\lambda)$ [51, т. 3, табл. 13.3].

Если все размеры перекрытия заданы, критические напряжения $\sigma_{кр}$ можно определить аналогично решению задачи 2, задаваясь несколькими значениями λ. Число полуволн j должно подбираться так, чтобы выражение в квадратной скобке правой части уравнения (20.77) было небольшим. Приведенное решение получено А. А. Курдюмовым (1953 г.).

Решения для других типов перекрытий приведены в справочниках [50, 51].

В тех случаях, когда реальное перекрытие не может быть сведено к расчетным схемам, для которых имеются готовые решения, определять критическую нагрузку следует приближенными методами: Ритца, Бубнова — Галеркина, МКЭ.

§ 20.6. Понятие о потере устойчивости плоской формы изгиба

Изгиб тонкостенных стержней в плоскости наибольшей жесткости может сопровождаться потерей устойчивости *плоской формы изгиба*, т. е. изгибом в плоскости наименьшей жесткости и кручением стержня относительно его оси. Качественно это явление можно воспроизвести, изгибая тонкую металлическую линейку в плоскости ее наибольшей жесткости.

Для установления основных закономерностей потери устойчивости плоской формы изгиба рассмотрим простейший пример чистого изгиба прямоугольной полосы (рис. 20.22, *а*). Условия закрепления концевых сечений полосы допускают свободный поворот в плоскостях zx и yx и исключают поворот вокруг оси x.

До потери устойчивости полоса изгибается в плоскости zx, и при малых прогибах этот изгиб описывается известным уравнением

$$EI w'' = M, \qquad (20.79)$$

где EI — изгибная жесткость поперечного сечения полосы в плоскости zx.

Отклонив полосу от исходного положения равновесия, допустим, что помимо изгиба $w(x)$ в плоскости zx она получила малый прогиб $v(x)$ в плоскости xy и поворот на малый угол $\vartheta(x)$ относительно оси x, как показано для произвольного сечения x на рис. 20.22, *б*. В результате угловых перемещений поперечного сечения вектор полного момента M, который сохраняет свое направление по оси y, разлагается на составляющую M'_z — проекцию на главную ось поперечного сечения z' и составляющую M'_x — проекцию на ось деформированного стержня x' (рис. 20.22, *в*):

$$M'_z = -M\vartheta; \quad M'_x = Mv'. \tag{20.80}$$

Момент M'_z — вызывает изгиб стержня в плоскости наименьшей жесткости, а момент M'_x — кручение. Между моментами и перемещениями можно записать следующие известные соотношения: $EI_z v''(x) = M'_z$; $C\alpha = C\vartheta' = M'_x$, где I_z — момент инерции поперечного сечения относительно оси z; C — погонный коэффициент жест-

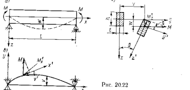


Рис. 20.22

кости полосы при чистом кручении; $\alpha = \vartheta'(x)$ — погонный угол закручивания. После подстановки в последние уравнения выражений (20.80) получим

$$EI_z v'' + M\vartheta = 0; \quad C\vartheta' - Mv' = 0. \tag{20.81}$$

Система дифференциальных однородных уравнений (20.81) представляет собой условия равновесия полосы в отклоненном положении. Если у этой системы возможны ненулевые решения для v и ϑ, то полоса потеряет устойчивость, так как наряду с плоской формой изгиба будут возможны отклоненные формы равновесия, связанные с кручением и изгибом в плоскости наименьшей жесткости. Поскольку в рассматриваемом случае граничные условия для полосы имеют вид $v = \vartheta = 0$ при $x = 0$; l, ненулевые решения системы (20.81) можно искать в форме $v = v_0 \sin n\pi x/l$; $\vartheta = \vartheta_0 \sin n\pi x/l$. Подставив данные выражения в систему (20.81), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных v_0 и ϑ_0. Приравняв нулю определитель этой системы, найдем те значения M, при которых возможны отклоненные формы равновесия полосы: $M = (n\pi/l)\sqrt{EI_z C}$.

Наименьшее эйлерово значение момента будет при $n = 1$

$$M_э = \pi\sqrt{EI_z C}/l. \tag{20.82}$$

Если учесть, что для прямоугольной полосы $I_z = ht^3/12$; $C = Gt^3h/3 = Et^3h/[6(1+\mu)]$; $t \ll h$, то

$$M_э = \pi Eht^3/[6l\sqrt{2(1+\mu)}], \tag{20.83}$$

где h и t — высота и толщина полосы.

Напряжения в крайних фибрах, соответствующие моменту (20.83), будут равны

$$\sigma = M_э h/(2I) = \pi E/\sqrt{2(1+\mu)}\,(t/h)(t/l) \approx 1{,}95Et^2/(lh).$$

Полученные формулы показывают, что наиболее склонны к потере устойчивости плоской формы изгиба тонкостенные длинные стержни. Выражение (20.82) может быть использовано не только для прямоугольной полосы, но и для других открытых профилей при изгибе их в плоскости наибольшей жесткости.

Решение более сложных задач в принципе производят так же, как и в рассмотренном примере: для отклоненного из плоскости основного изгиба положения составляют дифференциальные уравнения равновесия и разыскивают ненулевое решение. Однако в общем случае дифференциальные уравнения для w, v и ϑ оказываются связанными между собой, поэтому приходится совместно интегрировать систему трех уравнений. Указанные величины могут быть, кроме того, связаны и в граничных условиях, что еще больше осложняет решение. Рассмотрение решения таких задач выходит за рамки данного курса.

Необходимо подчеркнуть, что опасность потери устойчивости плоской формы изгиба возникает в тех случаях, когда жесткость на кручение и изгибная жесткость в плоскости наименьшей жесткости оказываются малыми по сравнению с изгибной жесткостью в основной плоскости изгиба. Одновременное действие изгибающих моментов и сжимающих сил понижает, а растягивающих сил увеличивает эйлерово значение изгибающего момента.

Расчет на устойчивость плоской формы изгиба балок судового набора имеет ряд особенностей по сравнению с рассмотренным выше примером. Один из поясков — всегда часть сплошного настила, что стесняет свободу кручения и изгиба в плоскости наименьшей жесткости. Осью кручения является в данном случае линия соединения стенки балки с настилом. Эти обстоятельства усложняют решение задачи.

Для строительной механики корабля наибольший интерес представляет исследование устойчивости плоской формы изгиба стоек водонепроницаемых переборок, поскольку такие стойки имеют обычно большие пролеты и высоту стенки и предназначены воспринимать значительную поперечную нагрузку, вызывающую их изгиб. Решение для этого случая было получено Я. И. Короткиным (1949 г.) и представлено в удобном для практического использования виде [50]

Контрольные вопросы

1. Какими основными свойствами обладает устойчивое, неустойчивое и безразличное положения равновесия системы?
2. Как опытным путем определить вид положения равновесия системы?
3. Как исследуется устойчивость упругих систем при малых и больших отклонениях от положения равновесия?
4. Чем различаются статический и динамический методы исследования устойчивости упругих систем?
5. Что такое верхняя и нижняя критические нагрузки упругой системы?
6. Как влияют начальные несовершенства упругой системы на верхнюю и нижнюю критические нагрузки?
7. Что такое критические и эйлеровы нагрузки? Чем они различаются?
8. Как записываются дифференциальное уравнение устойчивости и граничные условия для сжатых однопролетных стержней?
9. Как влияют граничные условия, длина стержня, его жесткость на эйлерову сжимающую нагрузку?
10. Какими методами решаются задачи устойчивости сжатых однопролетных непризматических стержней?
11. Как влияет на эйлеровы нагрузки сжатых стержней связанное с ними упругое основание?
12. Как влияют отступления от закона Гука на устойчивость стержней и как они учитываются в практических расчетах?
13. Как решается задача об устойчивости сжатого многопролетного стержня на упругих опорах?
14. Как влияет жесткость упругих опор на величину эйлеровых и критических нагрузок?
15. Что такое необходимая и критическая жесткости упругих опор?
16. Как ставится и решается задача об устойчивости сжатых перекрытий?
17. Как влияет жесткость бимсов и продольных балок на критические нагрузки сжатых перекрытий?
18. Что такое необходимая и критическая жесткость бимсов?
19. В чем заключается явление потери устойчивости плоской формы изгиба и как определяется эйлерова нагрузка в этом случае?

Раздел IV. ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Теория тонких пластин и оболочек является в настоящее время одним из важнейших разделов механики твердого деформируемого тела, которому уделяется значительное внимание. Объясняется это тем, что конструкции, образованные из тонких пластин и оболочек, сочетают в себе легкость с высокой прочностью. Поэтому пластины и оболочки широко применяют в судостроении, самолетостроении, ракетостроении и других областях техники. В судостроении — это корпуса судов и глубоководных аппаратов, в авиастроении — фюзеляжи и крылья самолетов, в ракетостроении — корпуса ракет.

Как правило, во всех указанных конструкциях тонкостенная часть подкреплена ребрами одного или двух направлений. Поэтому разработка методов расчета подкрепленных пластин и оболочек также представляет большой практический интерес.

Так называемая техническая теория изгиба тонких изотропных пластин, основанная на использовании гипотезы прямых нормалей, была, по существу, разработана в начале XIX в. в трудах С. Жермен, С. Пуассона, Л. Навье, Г. Кирхгофа.

Большой вклад в развитие теории и разработку эффективных методов расчета пластин внесли русские и советские ученые: И. Г. Бубнов, С. П. Тимошенко, Б. Г. Галеркин, П. Ф. Папкович, П. А. Соколов, П. М. Варвак, А. С. Вольмир, В. М. Даревский, Г. Г. Ростовцев, Б. И. Слепов и др. И. Г. Бубнову принадлежат первые исследования по нелинейной теории изгиба пластин. Им был предложен метод редукционных коэффициентов, позволяющий оценивать несущую способность тонкостенной конструкции, некоторые из элементов которой потеряли устойчивость. Эти идеи И. Г. Бубнова сегодня широко используют во всех областях техники в расчетах прочности тонкостенных инженерных сооружений.

Многочисленные решения об изгибе и устойчивости гладких и подкрепленных пластин содержатся в работе П. Ф. Папковича [37].

Теория оболочек, основанная на гипотезе Кирхгофа, была впервые разработана Г. Ароном (1874 г.), который допустил в ней ряд неточностей, замеченных и исправленных А. Лявом (1888 г.).

Различным вопросам теории оболочек и методам расчета оболочечных конструкций посвящены опубликованные в последние несколько десятилетий монографии В. З. Власова, А. Л. Гольденвейзера, А. И. Лурье, В. В. Новожилова, Х. М. Муштари и К. З. Галимова, А. С. Вольмира, П. М. Огибалова и М. А. Колтунова, К. Ф. Черных и др.

Ниже, в гл. 21, дан вывод основных зависимостей теории изгиба тонких пластин. Изложены наиболее эффективные численные методы решения задач изгиба и устойчивости гладких и подкрепленных прямоугольных пластин, которые являются наиболее распространенными элементами судового корпуса. В гл. 22 изложены общие сведения по теории круговых цилиндрических оболочек. Рассмотрены задачи изгиба и устойчивости таких оболочек, как гладких, так и подкрепленных кольцевыми шпангоутами.

Глава 21. ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

§ 21.1. Основные определения, гипотезы и зависимости

Плоскими пластинами называют упругие тела, имеющие форму прямой призмы, высота которой мала по сравнению с размерами оснований. Геометрическое место точек, равноудаленных от оснований, именуют *срединной плоскостью пластины*. Длину отрезка перпендикуляра к срединной плоскости, заключенного между основаниями, называют *толщиной пластины*.

Пластины разделяют на *толстые* (плиты) и *тонкие*. К тонким относятся пластины, у которых отношение толщины к меньшему размеру оснований в плане составляет меньше 1/5.

Пластинами судового корпуса являются листы наружной обшивки, настилов палуб, платформ, второго дна, обшивка переборок, тонкие стенки и пояски балок судового набора (вертикального киля, стрингеров, карлингсов, флоров). Все судовые пластины относятся к категории тонких. Пластины корпуса судна составляют его основную весовую часть, и поэтому вопросы проектирования и расчета пластин из условий прочности и устойчивости имеют важное практическое значение.

Обшивка и настилы представляют собой пластины, опертые на балки судового набора, которые образуют опорный контур для пластин. Жесткость балок набора при изгибе обычно намного больше изгибной жесткости пластины, и поэтому пластины, как правило, можно рассматривать как опертые на жесткий контур.

Судовые пластины могут испытывать отдельно или в совокупности нагрузки двоякого рода: 1) действующие в их плоскости и вызывающие плоское напряженное состояние; 2) нормальные к их плоскости и вызывающие изгиб пластин. Плоское напряженное

состояние пластин было изложено в гл. 6. В данной главе будут рассмотрены изгиб и устойчивость пластин.

Изгиб судовых пластин вызывается действием поперечных нагрузок, распределенных по их поверхности (давлением воды, грузов и др.). Чаще всего эти нагрузки близки к равномерно распределенным (у пластин днища и палубы) или к меняющимся по линейному закону (у пластин бортов и переборок). В отдельных случаях изгиб пластин вызывается сосредоточенными или распределенными на части поверхности поперечными нагрузками (у днищевых пластин в условиях постановки судна в док или при спуске с продольного стапеля). Плоское напряженное состояние судовых пластин вызывается общим изгибом корпуса судна, изгибом балок судового набора и изгибом самих пластин при наличии распоров.

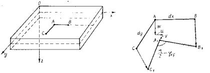


Рис. 21.1

Поскольку балки судового набора, как правило, пересекаются под прямыми углами, пластины судового корпуса имеют в большинстве случаев прямоугольный опорный контур. Именно эти пластины, которые в дальнейшем будем называть прямоугольными, будут предметом дальнейшего рассмотрения.

При исследовании напряженного состояния прямоугольных пластин воспользуемся декартовой системой координат, совмещая плоскость oxy со срединной плоскостью пластины (рис. 21.1), сохраняя для перемещений u, v, w то же правило знаков, что и в теории упругости.

Техническая теория изгиба тонких пластин основана на следующих основных гипотезах и допущениях (гипотезы Кирхгофа):

1) перемещение w (прогиб пластины) постоянно по толщине пластины и является малым;

2) перемещения u и v в направлении осей ox и oy намного меньше перемещения w;

3) применима гипотеза прямых нормалей: линейные элементы пластины, перпендикулярные к ее срединной плоскости до деформации, остаются прямыми и перпендикулярными к срединной поверхности пластины после деформации;

4) любой слой пластины, параллельный срединной плоскости, находится в плоском напряженном состоянии, а давление одних слоев на другие пренебрежимо мало;

5) материал пластины является изотропным линейно деформируемым по закону Гука.

Третье допущение есть аналог гипотезы плоских сечений в теории изгиба балок и выполняется тем точнее, чем меньше отношение толщины пластины к ее меньшему размеру в плане; четвертое допущение следует из того, что внешнее поперечное давление на поверхность пластины намного (примерно в 1000 раз) меньше изгибных напряжений, и поэтому существенного сжатия слоев пластины не вызывает; и, наконец, последнее предположение справедливо до предела пропорциональности материала пластины.

На основании указанных выше гипотез ниже будут получены основные зависимости теории изгиба изотропных пластин.

Зависимости между перемещениями и деформациями пластины. Эти зависимости могут быть получены на основе первых двух допущений теории изгиба пластин относительно перемещений u, v, w.

Рассмотрим два взаимно перпендикулярных бесконечно малых элемента $AB = dx$ и $AC = dy$, лежащих до деформации в плоскости, параллельной срединной плоскости пластины (см. рис. 21.1). В результате деформации пластины точки $A(x, y, z)$, $B(x + dx, y, z)$, $C(x, y + dy, z)$ получат перемещения в направлении осей координат и соответственно займут новое положение: $A_1(x + u, y + v, z + w)$; $B_1\left(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x}dx,\ y + v + \frac{\partial v}{\partial x}dx,\ z + w + \frac{\partial w}{\partial x}dx\right)$; $C_1\left(x + u + \frac{\partial u}{\partial y}dy,\ y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial y}dy,\ z + w + \frac{\partial w}{\partial y}dy\right)$, где u, v, w — перемещения точки $A(x, y, z)$ в направлении осей x, y, z. При определении координат точек B_1, C_1 было учтено, что точки B, C отличаются от точки A координатами x и y соответственно. Поэтому все перемещения точки B по сравнению с перемещениями точки A получают приращения по координате x, а перемещения точки C — по координате y.

Относительные линейные деформации ε_x, ε_y бесконечно малых элементов dx, dy и угол сдвига γ_{xy} как величину искажения прямого угла между этими элементами найдем из соотношений

$$\varepsilon_x = (A_1B_1 - dx)/dx; \qquad \varepsilon_y = (A_1C_1 - dy)/dy;$$

$$\sin\gamma_{xy} = \cos[(\pi/2) - \gamma_{xy}] = \frac{(\overline{A_1B_1}\cdot\overline{A_1C_1})}{A_1B_1\cdot A_1C_1},$$

где в круглых скобках числителя последней дроби стоит скалярное произведение векторов $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_1C_1}$.

Вычитая из координат точек B_1, C_1 одноименные координаты точки A_1, находим проекции на оси x, y, z векторов $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_1C_1}$, их длины A_1B_1, A_1C_1 и скалярное произведение:

$$\overline{A_1B_1} = \left\{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx,\ \frac{\partial v}{\partial x}dx,\ \frac{\partial w}{\partial x}dx\right\};$$

$$\overline{A_1C_1} = \left\{\frac{\partial u}{\partial y}dy,\ \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy,\ \frac{\partial w}{\partial y}dy\right\};$$

$$A_1B_1 = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}\,dx;$$

$$A_1C_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}\,dy;$$

$$(\overline{A_1B_1}\cdot\overline{A_1C_1}) = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]dx\,dy.$$

Так как прогиб пластины w на порядок больше перемещений u, v и все перемещения считаются малыми, в трех последних равенствах можно пренебречь нелинейными слагаемыми относительно u и v и заменить радикалы двумя членами бинома Ньютона:

$$A_1B_1 \approx \left[1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]dx; \qquad A_1C_1 \approx \left[1 + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dy;$$

$$(\overline{A_1B_1}\cdot\overline{A_1C_1}) \approx \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Подставляя данные выражения в формулы для деформаций ε_x, ε_y, γ_{xy}, получаем

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{21.1}$$

Здесь $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y)$. При записи последней формулы (21.1) вследствие малости деформаций считалось, что $\sin\gamma_{xy} \approx \gamma_{xy}$, $A_1B_1 \approx dx$, $A_1C_1 \approx dy$.

Для точек срединной плоскости пластины $z = 0$ согласно зависимостям (21.1) имеем

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{0x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \qquad \varepsilon_{0y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \\ &\gamma_{0xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{21.2}$$

где перемещения $u_0 = u(x, y, 0)$, $v_0 = v(x, y, 0)$, w и компоненты деформации ε_{0x}, ε_{0y}, γ_{0xy} срединной плоскости являются функциями x, y. Отметим, что выражения (21.1), (21.2) можно было бы также получить на основании формул (2.12), (2.13).

Для точек пластины, лежащих в слое $z = \text{const}$, зависимости между перемещениями и деформациями устанавливаются на основании гипотезы прямых нормалей. Рассмотрим с этой целью в сечении $y = \text{const}$ точку A на расстоянии z от срединной плоскости до и после деформации (рис. 21.2). Перпендикуляр AB к срединной плоскости займет после деформации положение A_1B_1 и останется прямым и перпендикулярным срединной поверхности пластины. При этом он окажется повернутым относительно первоначального положения на угол α, который по малости прогибов будем считать равным первой производной от прогиба $\frac{\partial w}{\partial x}$.

Учитывая сказанное, нетрудно установить зависимость между перемещением u произвольной точки A и перемещением u_0 точки B срединной плоскости:

$$u = u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x}; \qquad v = v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{21.3}$$

Второе соотношение (21.3) записано для сечения $x = \text{const}$ по аналогии с первым. Подставляя выражения (21.3) в зависимости (21.1) и учитывая формулы (21.2), для деформаций пластины в плоскости $z = \text{const}$ получим

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{0x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{0y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{0xy} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{21.4}$$

Деформации ε_{0x}, ε_{0y}, γ_{0xy} срединной плоскости пластины зависят лишь от x и y, и поэтому определяют в выражениях (21.4) постоянные по толщине пластины составляющие полных деформаций.

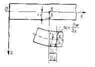


Рис. 21.2

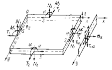


Рис. 21.3

Члены формул (21.4), содержащие z, определяют изгибные составляющие полных деформаций.

Деформации срединной плоскости связаны следующим уравнением совместности:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{0x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{0y}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{0xy}}{\partial x\,\partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{21.5}$$

справедливость которого нетрудно доказать, вычисляя соответствующие производные от ε_{0x}, ε_{0y}, γ_{0xy} по выражениям (21.2). При условиях (21.5) деформации (21.4) также окажутся совместными.

Полученные геометрические зависимости (21.1)—(21.5) будут справедливы в том случае, когда деформации малы по сравнению с единицей и когда прогибы пластины таковы, что при выводе зависимостей (21.3) можно заменить значения синусов и тангенсов значениями углов в радианах. Если допустить погрешность менее 3 %, то такая замена возможна при углах поворота нормали $\alpha \leqslant 0{,}3$ рад. Задавая прогиб в каком-либо сечении пластины в форме синусоиды и ограничивая значения производной от прогиба

в пределах (0—0,3), нетрудно показать, что прогибы не должны превышать 1/10 наименьшего в плане размера пластины.

Усилия и моменты в сечениях пластины. Уравнения равновесия бесконечно малого элемента. Рассмотрим сечения пластины, перпендикулярные осям ox и oy (рис. 21.3). Напряженное состояние пластины удобно характеризовать усилиями, приходящимися на единицу длины соответствующего сечения и являющимися равнодействующими напряжений по толщине пластины.

В сечениях $x = \text{const}$ действующие напряжения σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} в пределах единицы длины создают следующие погонные усилия и моменты:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \int_{-0,5t}^{0,5t} \sigma_x\,dz; \quad S = \int_{-0,5t}^{0,5t} \tau_{xy}\,dz; \quad N_1 = \int_{-0,5t}^{0,5t} \tau_{xz}\,dz; \\ M_1 &= \int_{-0,5t}^{0,5t} \sigma_x z\,dz; \quad H = \int_{-0,5t}^{0,5t} \tau_{xy} z\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{21.6}$$

Аналогично в сечениях $y = \text{const}$ будем иметь

$$\left.\begin{aligned} T_2 &= \int_{-0,5t}^{0,5t} \sigma_y\,dz; \quad S = \int_{-0,5t}^{0,5t} \tau_{yx}\,dz; \quad N_2 = \int_{-0,5t}^{0,5t} \tau_{yz}\,dz; \\ M_2 &= \int_{-0,5t}^{0,5t} \sigma_y z\,dz; \quad H = \int_{-0,5t}^{0,5t} \tau_{yx} z\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{21.7}$$

В формулах (21.6) и (21.7) следующие обозначения: T_1, T_2 и S — нормальные и касательные усилия, которые иногда называют цепными усилиями; N_1, N_2 — перерезывающие силы; M_1 и M_2 — изгибающие моменты, действующие в сечениях $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ соответственно; H — крутящие моменты.

Касательные усилия S и крутящие моменты H в сечениях $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ определяются одинаковыми формулами в силу закона парности касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Усилия и моменты (21.6)—(21.7), положительные направления которых показаны на рис. 21.3, характеризуют интенсивность внутренних сил упругости в сечениях пластины, зависят лишь от x и y и в каждой точке срединной плоскости подчиняются условиям равновесия бесконечно малого элемента пластины. Для вывода этих условий рассмотрим бесконечно малый элемент пластины с размерами dx и dy, вырезанный после деформации в окрестности точки $A(x, y)$ бесконечно близкими сечениями, перпендикулярными осям x' и y' (рис. 21.4). На грани этого элемента будут действовать внутренние усилия и моменты, а на поверхность — распределенная в направлении оси oz нагрузка $p(x, y)$, которую будем считать положительной.

Усилия и моменты, действующие на параллельные грани бесконечно малого элемента, отличаются на величину соответствующих частных дифференциалов и с учетом обозначений, приведенных на рис. 21.4, связаны зависимостями

$$\left.\begin{aligned} T_1^* &= T_1+\frac{\partial T_1}{\partial x}dx; \quad S_1^* = S+\frac{\partial S}{\partial x}dx; \quad N_1^* = N_1+\frac{\partial N_1}{\partial x}dx; \\ M_1^* &= M_1+\frac{\partial M_1}{\partial x}dx; \quad H_1^* = H+\frac{\partial H}{\partial x}dx; \\ T_2^* &= T_2+\frac{\partial T_2}{\partial y}dy; \quad S_2^* = S+\frac{\partial S}{\partial y}dy; \quad N_2^* = N_2+\frac{\partial N_2}{\partial y}dy; \\ M_2^* &= M_2+\frac{\partial M_2}{\partial y}dy; \quad H_2^* = H+\frac{\partial H}{\partial y}dy. \end{aligned}\right\} \quad (21.8)$$

В результате деформации грани рассматриваемого элемента окажутся наклонными по отношению к плоскости oxy. Поэтому нормальные и касательные усилия на гранях элемента в деформированном состоянии составят малые углы α_1, β_1, α_2, β_2, α_1^*, β_1^*, α_2^*, β_2^* по отношению к осям ox и oy. Эти углы можно считать равными

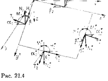


Рис. 21.4

$$\alpha_1=\beta_2=\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \alpha_2=\beta_1=\frac{\partial w}{\partial y}, \quad (21.9)$$

вычисляя указанные производные в точке $A(x, y)$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости.

Углы наклона граней с координатами $x+dx=\text{const}$ и $y+dy=\text{const}$ по сравнению с углами наклона граней с координатами $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$ получат приращения и будут равны

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^* &= \alpha_1+\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}dx; \quad \beta_1^* = \beta_1+\frac{\partial \beta_1}{\partial x}dx; \\ \alpha_2^* &= \alpha_2+\frac{\partial \alpha_2}{\partial y}dy; \quad \beta_2^* = \beta_2+\frac{\partial \beta_2}{\partial y}dy. \end{aligned}\right\} \quad (21.10)$$

Определив усилия и моменты, действующие на бесконечно малый элемент, и установив его положение по отношению к плоскости oxy после деформации, составим уравнения равновесия элемента. Приравнивая нулю суммы проекций на оси ox', oy', oz всех сил, действующих на рассматриваемый элемент, получим

$$\left.\begin{aligned} &(T_1^*-T_1)\,dy+(S_2^*-S)\,dx-N_2^*(\beta_2^*-\beta_2)\,dx- \\ &\qquad -N_1^*(\alpha_1^*-\alpha_1)\,dy=0; \\ &(T_2^*-T_2)\,dx+(S_1^*-S)\,dy-N_2^*(\alpha_2^*-\alpha_2)\,dx- \\ &\qquad -N_1^*(\beta_1^*-\beta_1)\,dy=0; \\ &(T_1^*\alpha_1^*-T_1\alpha_1)\,dy+(T_2^*\alpha_2^*-T_2\alpha_2)\,dx+ \\ &\quad +(S_1^*\beta_1^*-S_1\beta_1)\,dy+(S_2^*\beta_2^*-S_2\beta_2)\,dx+ \\ &\quad +(N_1^*-N_1)\,dy+(N_2^*-N_2)\,dx+p\,dx\,dy=0. \end{aligned}\right\} \quad (21.11)$$

При этом косинусы всех малых углов α и β считались равными единице, а синусы — значениям углов.

Приравнивая нулю суммы моментов всех сил относительно осей ox' и oy', находим

$$\left.\begin{aligned} N_1^*\,dx\,dy+(M_1-M_1^*)\,dy+(H-H_2^*)\,dx=0; \\ N_2^*\,dx\,dy+(M_2-M_2^*)\,dx+(H-H_1^*)\,dy=0. \end{aligned}\right\} \quad (21.12)$$

При составлении уравнений (21.12) были отброшены бесконечно малые третьего порядка: моменты усилий T_1^*, T_2^*, S_1^*, S_2^*, составляющих с наклонной площадкой $dxdy$ бесконечно малые углы, и момент распределенной поперечной нагрузки p.

Сумма моментов всех сил относительно оси oz с точностью до бесконечно малых тождественно равна нулю [с учетом закона парности касательных напряжений $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ в выражениях (21.6) и (21.7) для S и H].

Подставляя выражения (21.8)—(21.10) в первые два уравнения равновесия (21.11) и пренебрегая малыми проекциями перерезывающих сил N_1 и N_2 на оси ox и oy при упругом наклоне граней элемента $dxdy$, получим

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}=0; \quad \frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial y}=0. \quad (21.13)$$

С учетом (21.8) уравнения (21.12) можно записать так:

$$N_1=\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}; \quad N_2=\frac{\partial M_2}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (21.14)$$

Третье уравнение равновесия (21.11) после подстановки в него выражений (21.8)—(21.10) и сокращения на $dxdy$ с учетом (21.13) приводится к виду

$$T_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2S\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+T_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+p=0. \quad (21.15)$$

Итак, пять уравнений равновесия (21.13)—(21.15) бесконечно малого элемента пластины содержат восемь силовых факторов T_1, T_2, S, N_1, N_2, M_1, M_2, H, поэтому задача об изгибе пластины оказывается статически неопределимой.

Зависимости между напряжениями, деформациями и перемещениями. Для решения статически неопределимой задачи об изгибе пластины полученные геометрические и статические уравнения необходимо дополнить физическими уравнениями. Так как каждый слой, параллельный срединной плоскости пластин, находится в плоском напряженном состоянии, для изотропного материала уравнения закона Гука могут быть записаны в виде (6.6) или (6.7). Подставляя выражения (21.4) в уравнения (6.7), при плоском напряженном состоянии получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[(\varepsilon_{0x} + \mu\varepsilon_{0y}) - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]; \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[(\varepsilon_{0y} + \mu\varepsilon_{0x}) - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]; \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\gamma_{0xy} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (21.16)$$

Если подставить выражения (21.16) в формулы (21.6) и (21.7), то после интегрирования найдем

$$\left.\begin{aligned} T_1 = [Et/(1-\mu^2)](\varepsilon_{0x} + \mu\varepsilon_{0y}); \quad T_2 = [Et/(1-\mu^2)](\varepsilon_{0y} + \mu\varepsilon_{0x}); \\ S = Et\gamma_{0xy}/[2(1+\mu)]; \end{aligned}\right\} \qquad (21.17)$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \quad M_2 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \\ H = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \end{aligned}\right\} \qquad (21.18)$$

где

$$D = Et^3/[12(1-\mu^2)] \qquad (21.19)$$

— изгибная жесткость пластины.

Если подставить выражения (21.18) в уравнения (21.14), то перерезывающие силы можно выразить через прогиб по формулам

$$N_1 = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w; \quad N_2 = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w. \qquad (21.20)$$

Из формул (21.16) с учетом (21.17)—(21.19) нетрудно получить следующие зависимости между напряжениями и усилиями:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x = T_1/t + 12M_1 z/t^3; \quad \sigma_y = T_2/t + 12M_2 z/t^3; \\ \tau_{xy} = S/t + 12Hz/t^3. \end{aligned}\right\} \qquad (21.21)$$

Среднее значение касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} определится по формулам

$$(\tau_{xz})_{\text{ср}} = N_1/t; \quad (\tau_{yz})_{\text{ср}} = N_2/t. \qquad (21.22)$$

Нетрудно доказать, что τ_{xz} и τ_{yz} по толщине пластины меняются по закону параболы второй степени и наибольшие их значения в полтора раза больше средних.

Приведенные здесь зависимости в дополнение к геометрическим и статическим уравнениям позволяют составить разрешающие уравнения теории изгиба пластин и отыскать все элементы изгиба.

§ 21.2. Теория изгиба тонких прямоугольных пластин. Система дифференциальных уравнений и граничные условия

Наиболее удобной схемой решения задачи изгиба пластины является такая, когда за основные неизвестные принимаются прогиб пластины $w(x, y)$ и функция напряжений $F(x, y)$, связанная с усилиями зависимостями

$$T_1 = t\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad T_2 = t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad S = -t\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}. \qquad (21.23)$$

Удобство такой схемы объясняется тем, что элементы изгиба легко выражаются через прогиб w и функцию напряжений F. Кроме того, уравнения равновесия (21.13), характеризующие плоское напряженное состояние пластины, удовлетворяются автоматически. Остается удовлетворить лишь уравнение совместности деформаций (21.5) и условие равновесия (21.15).

Если деформации ε_{0x}, ε_{0y}, γ_{0xy} выразить по формулам (21.17) через усилия T_1, T_2, S и подставить их в (21.5), то после замены усилий выражениями (21.23) получится одно из разрешающих уравнений. Второе уравнение нетрудно получить из условия равновесия (21.15), для чего необходимо исключить из него усилия T_1, T_2, S и перерезывающие силы N_1, N_2 с помощью формул (21.23) и (21.20). В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\nabla^2 F &= E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]; \\ D\nabla^2\nabla^2 w &= p(x, y) + \\ &+ t\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (21.24)$$

Эта система нелинейных уравнений в частных производных представляет *основную систему разрешающих уравнений в теории изгиба изотропных пластин*. Она была получена Т. Карманом (1907 г.) и носит его имя. *Уравнения Кармана* относятся к деформированному состоянию пластины, так как уравнение равновесия (21.15) составлено для бесконечно малого элемента в отклоненном положении и после деформации. Поэтому они могут быть использованы не только для решения задач изгиба, но и для решения задачи об устойчивости пластин.

Если решение уравнений Кармана найдено при заданных граничных условиях, то элементы изгиба определяются по формулам (21.18), (21.20)—(21.22), (21.23).

Граничные условия при изгибе прямоугольных пластин. Граничные условия на контуре пластины должны быть заданы для функции напряжений $F(x, y)$ и для прогиба $w(x, y)$.

Для функции напряжений F граничные условия на сторонах пластины задаются так же, как и в плоской задаче теории упругости. Если на сторонах пластины заданы нормальные и касательные усилия, то граничные условия нетрудно составить, используя выражения (21.23) и приравнивая значения соответствующих внутренних и внешних усилий на контуре (см. § 6.1). Сложнее составить граничные условия, если на контуре заданы перемещения точек срединной плоскости u_0 и v_0, поскольку в этом случае приходится сначала отыскивать выражения для u_0 и v_0, соответствующие выбранной функции напряжений F. В принципе это всегда можно сделать с помощью формул (21.23), (21.17) и (21.1). Однако в этом случае целесообразнее принять за основные неизвестные u_0, v_0, w и вместо уравнений Кармана (21.24) пользоваться системой разрешающих уравнений в перемещениях.

Для прогиба пластины $w(x, y)$ в зависимости от условий закрепления ее опорных кромок на контуре могут быть заданы: прогиб, углы поворота, изгибающие моменты, перерезывающие силы или соотношения между этими величинами. На каждой стороне пластины должно быть задано по два независимых граничных условия для указанных элементов изгиба, что определяется порядком второго дифференциального уравнения Кармана (21.24). Составление граничных условий для прогиба рассмотрим ниже на конкретных примерах.

Кромка пластины $x = \mathrm{const}$ свободно оперта на жесткую опору. Прогиб и изгибающий момент на такой кромке равны нулю:

$$w = 0; \quad M_1 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Так как кромка $x = \mathrm{const}$, будучи опертой на жесткую опору, искривляться в плоскости yoz не может, то $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$. Поэтому записанные выше граничные условия равносильны следующим двум:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{21.25}$$

Кромка пластины $x = \mathrm{const}$ жестко заделана на жесткой опоре. В этом случае прогиб и угол поворота опорной кромки невозможны и граничные условия следующие:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \tag{21.26}$$

Кромка пластины $x = \mathrm{const}$ совершенно свободна. На такой кромке отсутствует всякая нагрузка и поэтому будут иметь место три условия:

$$M_1 = 0; \quad N_1 = 0; \quad H = 0. \tag{21.27}$$

В то же время, как было указано раньше, на каждой кромке должно быть задано не более двух граничных условий. Чтобы устранить полученное противоречие необходимо заменить три граничных условия (21.27) двумя равносильными. Покажем, как заменить условия $N_1 = 0$ и $H = 0$ одним условием. Рассмотрим кромку пластины с координатой $x = a$ (рис. 21.5, *а*) и подсчитаем работу усилий N_1 и H при изгибе кромки. Учитывая, что положительные направления крутящих моментов H и углов поворота $\frac{\partial w}{\partial y}$ противоположны, а у перерезывающей силы N_1 и прогиба w одинаковы, получим формулу для работы этих усилий на кромке $x = a$:

$$U = \int_0^b \left(N_1 w - H \frac{\partial w}{\partial y}\right) dy. \tag{21.28}$$

Интегрируя по частям второе слагаемое этого выражения, находим

$$U = H_0 w_0 + H_1 w_1 + \int_0^b r_1 w \, dy, \tag{21.29}$$

где $w_0 = w(a, 0)$, $w_1 = w(a, b)$, $H_0 = H(a, 0)$, $H_1 = H(a, b)$ — значения функции $w(x, y)$ и $H(x, y)$ в точках $(a, 0)$ и (a, b) пластины;

$$r_1 = N_1 + \frac{\partial H}{\partial y}. \tag{21.30}$$

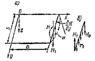


Рис. 21.5

Сравнивая выражения (21.28) и (21.29) для работы усилий на кромке $x = a$, можно сделать вывод, что действие крутящих моментов H и перерезывающих сил N_1 эквивалентно действию на эту кромку распределенных усилий r_1 и сосредоточенных усилий H_0, H_1 по углам пластины (рис. 21.5, *б*). Усилия r_1, статически эквивалентные перерезывающим силам N_1 и крутящим моментам H, называют *приведенными перерезывающими силами*.

Подставляя в формулу (21.30) выражения (21.20) и (21.18), для приведенной перерезывающей силы в сечениях $x = \mathrm{const}$ получим

$$r_1 = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \, \partial y^2}\right]. \tag{21.31}$$

Теперь условия (21.27) можно заменить двумя равносильными условиями $M_1 = r_1 = 0$, что с учетом (21.18) и (21.31) дает

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \, \partial y^2} = 0. \tag{21.32}$$

Кромка пластины $y = \mathrm{const}$ совершенно свободна. В этом случае три условия $M_2 = N_2 = H = 0$ можно заменить двумя статически эквивалентными $M_2 = r_2 = 0$, где r_2 — приведенная перерезывающая сила в сечениях $y = \mathrm{const}$, которая по аналогии с (21.31) определяется формулой

$$r_2 = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \, \partial y}\right]. \tag{21.33}$$

Поэтому граничные условия будут следующими:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \, \partial y} = 0. \tag{21.34}$$

При замене крутящих моментов H и перерезывающих сил N приведенными перерезывающими силами r_i в углах пластины должны быть приложены сосредоточенные силы $2H$, положительное направление которых показано на рис. 21.6. Происхождение этих сил объясняется действием крутящих моментов на каждой из двух пересекающихся кромок. Таким образом, на кромки пластины помимо распределенных давлений r_1 и r_2 в каждом углу действуют сосредоточенные реакции $2H$, которые препятствуют отрыву углов от опорного контура.

Кромка $x=a$ загружена заданными усилиями: распределенной поперечной нагрузкой $p(y)$ и изгибающими моментами $M_0(y)$ (рис. 21.7). При указанных

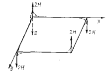


Рис. 21.6

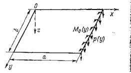


Рис. 21.7

на рис. 21.7 направлениях M_0 и p с учетом положительных направлений для M_1 и r_1 граничные условия запишутся так: $M_1(a, y) = M_0(y)$; $r_1(a, y)=p(y)$. После подстановки в них выражений (21.18) и (21.31) окончательно получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{M_0(y)}{D};\\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2} &= -\frac{p(y)}{D}.\end{aligned}\right\} \qquad (21.35)$$

Отметим, что аналогично могут быть составлены граничные условия и на других кромках пластины при загрузке их заданными поперечными нагрузками и изгибающими моментами.

Кромка $x=a$ оперта на упругое ребро, сопротивляющееся изгибу и кручению (рис. 2.1.8). Отделим упругое ребро от кромки пластины и приложим к ним усилия взаимодействия. Запишем дифференциальное уравнение изгиба ребра, учитывая, что прогибы ребра и пластины на кромке равны $EI\dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -r_1$. Подставляя в это соотношение равенство (21.31), получаем первое граничное условие

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{D}{EI}\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right], \qquad (21.36)$$

определяющее совместность работы пластины и ребра при изгибе.

Для составления условия совместности деформаций кромки пластины и ребра при кручении запишем выражения для погонного угла закручивания θ и крутящего момента $M_{кр}$: $\theta = M_{кр}/C$; $M_{кр} = \int\limits_0^y M_1(y)\,dy$, где C — жесткость ребра при чистом кручении.

При этом выражение для θ есть известное соотношение из теории чистого кручения, а выражение для $M_{кр}$ записано с учетом того, что крутящие моменты в сечениях ребра создаются распределен-

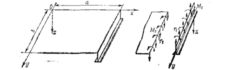


Рис. 21.8

ными по его длине моментами (см. рис. 21.8). Исключая $M_{кр}$ из двух последних формул и дифференцируя их по y, получаем

$$C\frac{\partial\theta}{\partial y} = M_1. \qquad (21.37)$$

Погонный угол закручивания ребра можно найти по полному углу поворота ребра, который как и для кромки пластины, равен $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, поэтому $\theta = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$.

Если из соотношения (21.37) исключить θ и подставить в него выражение (21.18) для M_1, то получим второе граничное условие

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2} = -\frac{D}{C}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \qquad (21.38)$$

Рассмотренные выше примеры, охватывая наиболее характерные случаи, показывают, как составлять граничные условия для прогиба пластины в зависимости от условий закрепления ее кромок: с учетом принятого правила знаков следует выразить заданные элементы изгиба через прогиб или составить условия совместности деформаций кромок пластины и ее опорной конструкции.

§ 21.3. Классификация пластин

Нелинейная система дифференциальных уравнений Кармана (21.24), описывающая изгиб пластины при заданных граничных условиях, не может быть решена в общем виде. Даже приближенные методы ее решения недостаточно разработаны. Поэтому имеющиеся частные решения полной системы уравнений (21.24) немногочисленны. Однако в ряде случаев напряженное состояние пластин таково, что в уравнениях Кармана могут быть сделаны упрощения, после чего их интегрирование существенно облегчается.

Принято различать следующие типы пластин по роду их напряженного состояния и вытекающим отсюда методам расчета.

Жесткие пластины. Прогиб этих пластин настолько мал, что влиянием цепных усилий T_1, T_2, S на прогиб можно пренебречь. Тогда второе уравнение Кармана (21.24) упрощается так:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = p(x, y), \qquad (21.39)$$

т. е. прогиб удается определить независимо от функции напряжений $F(x, y)$.

К категории жестких пластин, как правило, относятся пластины днищевой обшивки морских транспортных судов.

Очевидно, что к решению уравнения (21.39) сводится расчет пластины и при отсутствии цепных усилий в ее срединной плоскости.

Гибкие пластины (или пластины конечной жесткости) небольшого прогиба. Из-за малости прогиба таких пластин можно пренебречь нелинейными относительно w членами правой части первого уравнения (21.24). Уравнения Кармана для этих пластин принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\nabla^2 F = 0; \\ &D\nabla^2\nabla^2 w = p(x, y) + \\ &+ t\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (21.40)$$

Как видно из уравнений (21.40), функция $F(x, y)$ определяется из первого уравнения при своих граничных условиях независимо от прогиба w. После определения $F(x, y)$ можно найти w из второго уравнения (21.40), которое хотя и линейно относительно w, но имеет переменные коэффициенты. Поэтому интегрирование данного уравнения связано с определенными трудностями. Уравнения (21.40) еще мало используются для практических расчетов, и решения их, доведенные до числовых справочных данных, немногочисленны.

Уравнения (21.40) представляют особый интерес для исследования устойчивости пластин в «малом», т. е. в линейной теории устойчивости. В этих целях уравнения (21.40) будут использованы позже (см. § 21.7).

Гибкие пластины (или пластины конечной жесткости) большого прогиба. Напряженное состояние этих пластин описывается полной системой уравнений Кармана (21.24), так как взаимное влияние прогиба и цепных усилий оказывается значительным. Обычно к категории гибких пластин большого прогиба относятся судовые пластины, несущие большие поперечные нагрузки при наличии распоров.

Полная система уравнений Кармана представляет для строительной механики корабля значительный интерес при исследовании напряженного состояния сжатых пластин после потери устойчивости.

Абсолютно гибкие пластины (мембраны), у которых изгибная жесткость пренебрежимо мала и которые могут воспринимать только цепные усилия. Напряженное состояние таких мембран описывается уравнениями (21.24) при $D = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\nabla^2 F = E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]; \\ &\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{p}{t}. \end{aligned}\right\} \qquad (21.41)$$

Абсолютно гибких пластин (мембран) в судовых конструкциях не встречается. Отметим только один частный случай, когда мембрана сильно растянута усилиями $T_1 = T_2 = T$, $S = 0$ и поперечная нагрузка p вызывает малые прогибы. Тогда нелинейные члены в первом уравнении (21.41) пренебрежимо малы и оно удовлетворяется тождественно. Второе же уравнение с учетом (21.23) принимает вид $\nabla^2 w = -p/T$. Это уравнение использовалось в аналогии Прандтля при чистом кручении стержней (см. § 5.1).

Приведенная выше классификация пластин по роду напряженного состояния носит условный характер. Строго говоря, тип пластины можно установить лишь после выполнения точного расчета на основании полных уравнений Кармана (21.24). Однако в ряде практических случаев тип пластины можно определить по ее конструктивным особенностям и характеру действующей на нее нагрузки.

§ 21.4. Изгиб жестких изотропных прямоугольных пластин

Рассмотрим жесткую прямоугольную пластину, загруженную произвольным поперечным давлением $p(x, y)$ (рис. 21.9).

Прогиб жесткой пластины определяется уравнением (21.39), которое в развернутом виде имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)/D. \qquad (21.42)$$

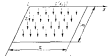


Рис. 21.9

Расчет жесткой пластины требует решения уравнения (21.42) относительно прогиба пластины $w(x, y)$ при заданных граничных условиях. Ниже рассмотрены имеющиеся решения этого уравнения для прямоугольных пластин при различных граничных условиях.

Решение Л. Навье (1820 г.) для свободно опертой на кромках пластины. На основании зависимостей (21.25) граничные условия на кромках $x=0$; a, $y=0$; b (см. рис. 21.9) при свободном опирании пластины на жесткий контур будут следующими:

$$\left.\begin{aligned} &w(0,\ y)=w(a,\ y)=0;\\ &\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,\ y)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a,\ y)=0;\\ &w(x,\ 0)=w(x,\ b)=0;\\ &\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,\ 0)=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,\ b)=0. \end{aligned}\right\} \tag{21.43}$$

Решение уравнения (21.42) с граничными условиями (21.43) может быть получено в двойных рядах Фурье по синусам:

$$w(x,\ y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\sin n\pi\xi \sin m\pi\eta, \tag{21.44}$$

где w_{mn} — неизвестные коэффициенты;

$$\xi=x/a; \quad \eta=y/b. \tag{21.45}$$

Форма решения (21.44) тождественно удовлетворяет граничным условиям (21.43), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой выражения (21.44) в соотношения (21.43).

Для удовлетворения дифференциального уравнения (21.42) необходимо подставить в него выражение для прогиба (21.44). В результате получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(m^2+n^2\gamma^2)^2 w_{mn}\sin n\pi\xi\sin m\pi\eta=p(x,\ y)\,b^4/(\pi^4 D). \tag{21.46}$$

Здесь

$$\gamma=b/a. \tag{21.46'}$$

Разлагая правую часть равенства (21.46) в двойные ряды по синусам и сравнивая коэффициенты при одинаковых членах рядов в левой и правой частях, находим

$$w_{mn}=p_{mn}b^4/[\pi^4 D(m^2+n^2\gamma^2)^2]; \tag{21.47}$$

где p_{mn} — коэффициенты Фурье функции $p(x,\ y)$, равные

$$p_{mn}=4\int_0^1\int_0^1 p(\xi,\ \eta)\,\vartheta\sin n\pi\xi\sin m\pi\eta\, d\xi\, d\eta. \tag{21.48}$$

Подставляя (21.47) в ряд (21.44), получаем

$$w(x,\ y)=\frac{b^4}{\pi^4 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{mn}\sin n\pi\xi\sin m\pi\eta}{(m^2+n^2\gamma^2)^2}. \tag{21.49}$$

Таким образом, прогиб жесткой свободно опертой на кромках прямоугольной пластины определяется выражением (21.49). Это решение будет справедливо для любого закона изменения поперечной нагрузки $p(x, y)$ по площади пластины. Вычисляя p_{mn} по

формулам (21.48), можно определить прогиб пластины (21.49), а затем внутренние силовые факторы (21.18), (21.20) и напряжения (21.21).

Рассмотрим некоторые частные нагружения пластины.

Изгиб пластины равномерным давлением. В этом случае $p(x, y)=p=\text{const}$, а коэффициенты ряда Фурье (21.48) будут равны

$$p_{mn}=4p\int_0^1\int_0^1 \sin n\pi\xi\sin m\pi\eta\, d\xi\, d\eta=4p\,[1-(-1)^m]\,[1-(-1)^n]/(\pi^2 mn).$$

Из данного выражения следует, что при нечетных m и n

$$p_{mn}=16p/(\pi^2 mn), \tag{21.50}$$

а в остальных случаях $p_{mn}=0$, что является следствием симметрии нагрузки относительно центра пластины.

Подставляя значения коэффициентов (21.50) в выражение (21.49) и используя формулы (21.18), находим

$$\left.\begin{aligned} &w=\frac{16pb^4}{\pi^6 D}\sum_{m}^{1,3\ldots}\sum_{n}^{1,3\ldots}\frac{\sin n\pi\xi\sin m\pi\eta}{mn\Delta_{mn}};\\ &M_1=\frac{16pb^2}{\pi^4}\sum_{m}^{1,3\ldots}\sum_{n}^{1,3\ldots}\frac{(n^2\gamma^2+\mu m^2)}{mn\Delta_{mn}}\sin n\pi\xi\sin m\pi\eta;\\ &M_2=\frac{16pb^2}{\pi^4}\sum_{m}^{1,3\ldots}\sum_{n}^{1,3\ldots}\frac{(m^2+\mu n^2\gamma^2)}{mn\Delta_{mn}}\sin n\pi\xi\sin m\pi\eta;\\ &H=\frac{16(1-\mu)\,p\gamma b^2}{\pi^4}\sum_{m}^{1,3\ldots}\sum_{n}^{1,3\ldots}\frac{\cos n\pi\xi\cos m\pi\eta}{\Delta_{mn}}, \end{aligned}\right\} \tag{21.51}$$

где

$$\Delta_{mn}=(m^2+n^2\gamma^2)^2. \tag{21.52}$$

Приведенные перерезывающие силы в соответствии с формулами (21.31) и (21.33) будут равны

$$\left.\begin{aligned} &r_1=\frac{16\gamma pb}{\pi^3}\sum_{m}^{1,3\ldots}\sum_{n}^{1,3\ldots}\frac{n^2\gamma^2+(2-\mu)\,m^2}{m\Delta_{mn}}\cos n\pi\xi\sin m\pi\eta;\\ &r_2=\frac{16pb}{\pi^3}\sum_{m}^{1,3\ldots}\sum_{n}^{1,3\ldots}\frac{m^2+(2-\mu)\,n^2\gamma^2}{n\Delta_{mn}}\sin n\pi\xi\cos m\pi\eta. \end{aligned}\right\} \tag{21.53}$$

Максимальный прогиб и изгибающие моменты возникают в центре пластины и согласно формулам (21.51) и (21.52) определяются выражениями

$$w_{\max}=k_1pb^4/D; \quad M_1=k_2pb^2; \quad M_2=k_3pb^2, \tag{21.54}$$

где

$$
\left.\begin{aligned}
k_1 &= \frac{16}{\pi^6} \sum_{m}^{1,3\ldots} \sum_{n}^{1,3\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n+3}{2}} (-1)^{\frac{m+3}{2}}}{mn\Delta_{mn}};\\
k_2 &= \frac{16}{\pi^4} \sum_{m}^{1,3\ldots} \sum_{n}^{1,3\ldots} \frac{(n^2\gamma^2 + \mu m^2)}{mn\Delta_{mn}} (-1)^{\frac{n+m+2}{2}};\\
k_3 &= \frac{16}{\pi^4} \sum_{m}^{1,3\ldots} \sum_{n}^{1,3\ldots} \frac{(m^2 + \mu n^2\gamma^2)}{mn\Delta_{mn}} (-1)^{\frac{m+n+2}{2}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (21.55)
$$

Из формул (21.55) видно, что значения k_i зависят от коэффициента Пуассона μ и отношения длин сторон пластины (21.46′). Для судостроительных сталей значение $\mu \approx 0{,}3$. Поэтому в таблицах справочников [50, 51] k_i приводятся в зависимости только от γ.

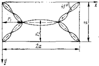


Рис. 21.10

С точки зрения воздействия пластины на опорный контур интересно проследить за изменением реакций r_1 и r_2 (21.53) вдоль опорного контура. Эпюры этих реакций приведены на рис. 21.10 при $\gamma = 0{,}5$ (сплошные линии). Пунктирными линиями изображены приближенные эпюры реакций, предложенные И. Г. Бубновым. Как видно из эпюр, основная часть равномерного давления на пластину передается на длинные кромки опорного контура пластины. Это обстоятельство было использовано при определении нагрузок на балки главного направления судовых перекрытий (см. § 17.3).

Большой интерес представляет анализ решения об изгибе рассматриваемой пластины, когда длина одной кромки намного больше другой (поперечная система набора конструкции). В этом случае $a \gg b$, $\gamma \approx 0$ и формулы (21.55) примут вид

$$k_1 = 5/384; \quad k_2 = \mu/8; \quad k_3 = 1/8. \qquad (21.56)$$

С учетом формул (21.54) и (21.56) наибольшие параметры изгиба будут равны

$$w_{\max} = 5pb^4/(384D); \quad M_1 = \mu pb^2/8; \quad M_2 = pb^2/8. \qquad (21.57)$$

Формулы (21.51) и (21.57) показывают, что в средней по длине части пластины прогибы и изгибающие моменты не зависят от x, т. е. в средней части пластина изгибается по цилиндрической поверхности $w = w(y)$ при отсутствии кривизны в плоскости zox (рис. 21.11). Это означает, что в средней части пластины любая балка-полоска, выделенная линиями, перпендикулярными длинным кромкам, находится в одинаковых условиях с соседними. Поэтому

при цилиндрическом изгибе расчет пластины можно свести к расчету балки-полоски единичной ширины. Этот интересный и очевидный факт впервые был использован И. Г. Бубновым (1912 г.) для расчета обшивки судов с поперечной системой набора.

Изгиб пластины сосредоточенной силой. Рассмотрим теперь пластину (рис. 21.12), нагруженную сосредоточенной силой P в некоторой точке с относительными координатами

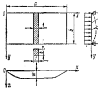


Рис. 21.11

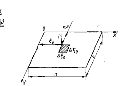


Рис. 21.12

ξ_0, η_0 [см. формулы (21.45)]. Заменим эту силу равномерно распределенной нагрузкой

$$p = P/(ab\,\Delta\xi_0\,\Delta\eta_0) \qquad (21.58)$$

в пределах малой площадки с относительными размерами $\Delta\xi_0$, $\Delta\eta_0$. Тогда поперечная нагрузка $p(x, y)$ окажется равной нулю за пределами указанной малой площадки, а в пределах площадки будет определяться формулой (21.58).

Учитывая формулу (21.48) для коэффициентов Фурье произвольной нагрузки и подставляя туда (21.58) с учетом локального действия нагрузки, получим

$$p_{mn} = \frac{4P}{ab\,\Delta\xi_0\,\Delta\eta_0} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi_0} \int_{\eta_0}^{\eta_0+\Delta\eta_0} \sin n\pi\xi \sin m\pi\eta \, d\xi \, d\eta.$$

Интегрируя и вычисляя предел p_{mn} при $\Delta\xi_0 \to 0$, $\Delta\eta_0 \to 0$, т. е. при стягивании площадки в точку, найдем

$$p_{mn} = 4P \sin n\beta\xi_0 \sin m\pi\eta_0/(ab). \qquad (21.59)$$

Подстановка (21.59) в формулу (21.49) даст выражение для прогиба при действии на пластину сосредоточенной силы

$$w = \frac{4Pb^3}{\pi^4 Da} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\xi_0 \sin m\pi\eta_0 \sin n\pi\xi \sin m\pi\eta}{\Delta_{mn}}. \qquad (21.60)$$

Полученное выражение для прогиба может быть использовано для расчета пластины при сосредоточенных нагрузках.

В приведенных решениях Навье (21.49), (21.51), (21.60) для общего и частных случаев изменения давления $p(x, y)$ приходится суммировать двойные бесконечные ряды. Поскольку они могут быть вычислены точно весьма редко, при практических расчетах в рядах для параметров изгиба удерживается конечное число членов. Сходимость рядов, а следовательно, и число удерживаемых членов при заданной точности зависит от закона изменения нагрузки $p(x, y)$ и отношения сторон γ. Для квадратной пластины ($\gamma = 1$) сходимость оказывается наилучшей во всех случаях. Чем плавнее нагрузки $p(x, y)$, тем быстрее убывают коэффициенты (21.48) и члены ряда (21.49). Кроме того, ряды для прогибов (21.49), (21.51), (21.60) сходятся быстрее, чем ряды для углов поворота, изгибающих и крутящих моментов, а также перерезывающих сил. Ряды для последних сходятся медленнее всего, так как эти силы выражаются формулами (21.20), (21.31), (21.33) через третьи производные от прогиба. А сходимость рядов Фурье, как известно, ухудшается после каждого дифференцирования. Поэтому наименьшее число членов, которое необходимо удержать при расчетах для обеспечения заданной точности, окажется при вычислении прогибов, а наибольшее — при вычислении перерезывающих сил.

Решение Мориса Леви (1899 г.). Оно относится к более широкому классу задач изгиба пластин. Предполагается свободное опирание на жесткий контур только на двух противоположных кромках. Будем для определенности считать, что кромки $x=0$; a свободно оперты (см. рис. 21.9). Тогда решение уравнения (21.42) можно искать в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin n\pi\xi, \tag{21.61}$$

где $f_n(y)$ — неизвестная пока функция.

Подставляя (21.61) в уравнение изгиба жесткой пластины (21.42), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 f_n - 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 f_n'' + f_n^{\text{IV}} \right] \sin n\pi\xi = \frac{p(x, y)}{D}.$$

Раскладывая $p(x, y)$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг вдоль координаты x и сравнивая коэффициенты этих рядов в правой и левой частях последнего равенства, найдем

$$f_n^{\text{IV}} - 2\left(\frac{\alpha_n}{b}\right)^2 f_n'' + \left(\frac{\alpha_n}{b}\right)^4 f_n = p_n(y)/D. \tag{21.62}$$

Здесь $\alpha_n = n\pi b/a = n\pi\gamma$;

$$p_n(y) = 2\int_0^1 p(x, y) \sin n\pi\xi \, d\xi. \tag{21.63}$$

Общее решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения четвертого порядка (21.62) состоит из общего интеграла

однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Это решение можно представить в виде

$$f_n(y) = (B_{1n} + B_{2n}\eta) \operatorname{sh} \alpha_n\eta + (B_{3n} + B_{4n}\eta) \operatorname{ch} \alpha_n\eta + f_{1n}(y), \tag{21.64}$$

где B_{jn}, $j = 1, 2, 3, 4$ — произвольные постоянные; $f_{1n}(y)$ — частное решение уравнения (21.62), отыскиваемое по виду правой части.

При линейном законе изменения давления $p(x, y)$ вдоль оси oy и произвольном законе изменения вдоль оси ox функция $p_n(y)$ изменяется линейно:

$$p_n(y) = p_{0n} + p_{1n}\eta. \tag{21.65}$$

Здесь p_{0n}, p_{1n} — коэффициенты, определяемые в соответствии с формулой (21.63).

Частное решение уравнения (21.62) при условии (21.65) будет следующим:

$$f_{1n}(y) = \frac{p_n(y)\, b^4}{D\alpha_n^4} = \frac{(P_{0n} + p_{1n}\eta)\, b^4}{D\alpha_n^4}. \tag{21.66}$$

На основании формул (21.61) и (21.64) выражение для прогиба пластины принимает вид

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [f_{1n}(y) + (B_{1n} + B_{2n}\eta) \operatorname{sh} \alpha_n\eta + (B_{3n} + B_{4n}\eta) \operatorname{ch} \alpha_n\eta] \sin n\pi\xi. \tag{21.67}$$

Для вычисления прогиба по выражению (21.67) необходимо найти частное решение $f_{1n}(y)$ и произвольные постоянные B_{jn}. Частное решение уравнения (21.62) с учетом формулы (21.63) отыскивают по виду правой части известными в математике способами. В случае линейного изменения давления $p(x, y)$ вдоль оси oy справедливы зависимости (21.65) и (21.66). Четыре постоянные B_{jn} определяют из четырех граничных условий на кромках $y = 0$; b. При этом указанные условия могут быть заданы произвольно. После определения прогиба по (21.67) производят дальнейший расчет по формулам (21.18), (21.20) — (21.22), что позволяет последовательно найти изгибающие и крутящие моменты, перерезывающие силы, нормальные и касательные напряжения в сечениях пластины, перпендикулярных осям Ox и Oy.

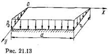


Рис. 21.13

Для иллюстрации изложенной схемы вычислений рассмотрим следующий пример.

Пример 9. Произвести расчет пластины с тремя свободно опертыми кромками и одной жестко защемленной кромкой под действием гидростатического давления (рис. 21.13). Кромки пластины $x = 0$; a, $y = 0$ свободно оперты на жесткий контур, а кромка $y = b$ жестко защемлена.

Р е ш е н и е. Граничные условия на основании формул (21.25) и (21.26) могут быть записаны в виде

$$w(x_0, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_0, y) = 0, \quad x_0 = 0;\ a; \tag{21.68}$$

$$w(x, 0) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0) = 0; \tag{21.69}$$

$$w(x, b) = \frac{\partial w}{\partial y}(x, b) = 0. \tag{21.70}$$

Для рассматриваемой пластины нагрузка равна

$$p(x, y) = p_0 \eta, \tag{21.71}$$

где p_0 — максимальное давление (см. рис. 21.13).

Используя решение М. Леви (21.67), тождественно удовлетворяющее граничным условиям (21.68), определим частное решение $f_{1n}(y)$ для давления (21.71) и произвольные постоянные из граничных условий (21.69) и (21.70).

Подставляя (21.71) в (21.63), на базе формул (21.65) и (21.66) находим

$$f_{1n}(\eta) = p_{1n} b^4/(D\alpha_n^4); \quad p_{1n} = 2[1 - (-1)^n] p_0/(n\pi). \tag{21.72}$$

Выполним теперь первое граничное условие (21.69). Полагая в выражении (21.67) $\eta = 0$, получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [f_{1n}(0) + B_{3n}] \sin n\pi\xi = 0$. Для обращения в нуль ряда Фурье, стоящего в левой части этого равенства, необходимо приравнять нулю его коэффициенты:

$$B_{3n} + f_{1n}(0) = 0. \tag{21.73}$$

Вычисляя производную $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ от прогиба (21.67) и подставляя во второе граничное условие (21.69), аналогично предыдущему получаем

$$\alpha_n B_{3n} + 2B_{2n} = 0. \tag{21.74}$$

Поскольку $f_{1n}(0) = 0$ вследствие (21.72), из уравнений (21.73) и (21.74) находим

$$B_{2n} = B_{3n} = 0. \tag{21.75}$$

Подставляя прогиб (21.67) и его производную $\frac{\partial w}{\partial y}$ в граничные условия (21.70), с учетом (21.75) получаем

$$B_{1n} \operatorname{sh} \alpha_n + B_{4n} \operatorname{ch} \alpha_n = -p_{1n} b^4/(D\alpha_n^4);$$

$$(B_{1n} + B_{4n}/\alpha_n) \operatorname{ch} \alpha_n + B_{4n} \operatorname{sh} \alpha_n = -p_{1n} b^4/(D\alpha_n^5).$$

Из этой системы найдем

$$\left.\begin{aligned} B_{1n} &= -p_{1n} b^4 \varphi(\alpha_n)/(D\alpha_n^4 \operatorname{sh} \alpha_n); \\ B_{4n} &= -p_{1n} b^4 [1 - \varphi(\alpha_n)]/(D\alpha_n^4 \operatorname{ch} \alpha_n); \\ \varphi(\alpha_n) &= \frac{2\alpha_n \operatorname{sh}^2 \alpha_n}{\operatorname{sh} 2\alpha_n - 2\alpha_n}. \end{aligned}\right\} \tag{21.76}$$

Таким образом, граничные условия (21.62) и (21.70) привели к соотношениям (21.75) и (21.76); определяющим произвольные постоянные B_{jn}.

Подстановка (21.72), (21.75), (21.76) в выражение (21.67) дает

$$w(x, y) = \frac{4p_0 b^4}{\pi D} \sum_{n}^{1,3\ldots} \frac{1}{n\alpha_n^4} \left[\eta\left(1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha_n \eta}{\operatorname{ch} \alpha_n}\right) + \right.$$

$$\left. + \varphi(\alpha_n)\left(\frac{\eta \operatorname{ch} \alpha_n \eta}{\operatorname{ch} \alpha_n} - \frac{\operatorname{sh} \alpha_n \eta}{\operatorname{sh} \alpha_n}\right)\right] \sin n\pi\xi. \tag{21.77}$$

Определив прогиб (21.77) рассматриваемой пластины, можно найти моменты (21.18) и перерезывающие силы (21.20), действующие в сечениях пластин. Принципиальных затруднений это не вызывает, однако выражения получаются довольно громоздкими и в учебнике не приводятся. В справочниках [50, 51] имеются численные результаты, необходимые для практического расчета пластин в форме (21.54).

Аналогично рассмотренному примеру на основе (21.67) получены и другие решения задач об изгибе пластин, две противоположные кромки которых свободно оперты [50, 51].

Сходимость бесконечных одинарных рядов (21.67) и (21.77) оказывается хорошей. При вычислении прогибов оказывается достаточным 3—5 членов, а изгибающих моментов — до 13 членов рядов, для обеспечения точности порядка 1 %. Объем расчетов, как правило, невелик и доступен малым ЭВМ и даже микрокалькуляторам.

Форма общего решения задачи об изгибе жестких прямоугольных пластин. Полученные выше решения (21.49), (21.67) Л. Навье и М. Леви непригодны при произвольных граничных условиях на всех четырех кромках пластины. В связи с этим представляет интерес привести общее решение дифференциального уравнения (21.42), применимое при любых граничных условиях на кромках прямоугольной пластины. Это решение может быть получено в виде

$$w(x, y) = w_0(x, y) + w_1(x, y), \tag{21.78}$$

где $w_0(x, y)$ — общее решение однородного уравнения (21.42), т. е. при $p(x, y) = 0$; $w_1(x, y)$ — какое-либо частное решение неоднородного уравнения (21.42).

В качестве частного решения всегда может быть использовано решение Л. Навье (21.49), поскольку оно применимо для любого закона изменения давления $p(x, y)$ в поле пластины. Однако в частных случаях можно выбирать частные решения в более простой форме. Например, при действии на пластину гидростатического давления, когда $p(x, y)$ изменяется по линейному закону, частые решения могут быть выбраны в виде соответствующих полиномов пятой степени. Такими формами частных решений широко пользовались И. Г. Бубнов, Б. Г. Галеркин, П. Ф. Папкович, С. П. Тимошенко при иследовании изгиба пластин с произвольными граничными условиями.

Общее решение $w_0(x, y)$ однородного уравнения (21.42) может быть записано так:

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta) \sin n\pi\xi + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(\xi) \sin m\pi\eta. \tag{21.79}$$

Здесь $f_n(\eta)$; $\varphi_m(\xi)$ — неизвестные пока функции.

Подставляя (21.79) в однородное уравнение (21.42) и приравнивая нулю функциональные коэффициенты при синусах, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &f_n^{\mathrm{IV}} - 2\alpha_n^2 f_n'' + \alpha_n^4 f_n = 0;\\ &\varphi_m^{\mathrm{IV}} - 2\beta_m^2 \varphi_m'' + \beta_m^4 \varphi_m = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (21.80)$$

где дифференцирование выполняется по переменным ξ и η;

$$\alpha_a = n\pi\gamma, \quad \beta_m = m\pi/\gamma. \qquad (21.81)$$

Общие решения однородных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (21.80) могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} f_n(\eta) &= (B_{1n} + B_{2n}\eta)\,\mathrm{sh}\,\alpha_n\eta + (B_{3n} + B_{4n}\eta)\,\mathrm{ch}\,\alpha_n\eta;\\ \varphi_m(\xi) &= (A_{1m} + A_{2m}\xi)\,\mathrm{sh}\,\beta_m\xi + (A_{3m} + A_{4m}\xi)\,\mathrm{ch}\,\beta_m\xi. \end{aligned}\right\} \qquad (21.82)$$

Здесь A_{jm}, B_{jn} — произвольные постоянные.

Первое слагаемое выражения (21.79) [с учетом (21.82) и (21.67)] является решением М. Леви при $p(x, y) = 0$ для пластины, свободно опертой на кромках $x = 0$; a. Это решение позволяет удовлетворить любые граничные условия на кромках $y = 0$; b за счет выбора произвольных постоянных B_{jn}. Аналогично второе слагаемое выражения (21.79) будет решением М. Леви при $p(x, y) = 0$ в случае свободного опирания кромок $y = 0$; b с произвольными граничными условиями на кромках $x = 0$; a, которые можно удовлетворить за счет выбора постоянных A_{jm}. Таким образом, восемь групп произвольных постоянных A_{jm}, B_{jn}, входящих в общее решение (21.79) однородного уравнения (21.42), позволяют удовлетворить восемь граничных условий на контуре пластины (по два граничных условия на каждой из четырех кромок).

Суммируя полученные результаты, на основании формул (21.78), (21.49), (21.79) общее решение уравнения (21.42) можно представить в виде

$$w(x, y) = \frac{b^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \sin n\pi\xi \sin m\pi\eta}{(m^2 + n^2\gamma^2)^2} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta) \sin n\pi\xi + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(\xi) \sin m\pi\eta + (C_0 + C_1\xi + C_2\eta + C_3\xi\eta). \qquad (21.83)$$

Последнее слагаемое в круглых скобках выражения (21.83) содержит четыре постоянных C_i и тождественно удовлетворяет однородному уравнению (21.42). Постоянными C_i характеризуются прогибы в углах пластины, так как все ряды, входящие в (21.83), равны нулю в указанных точках. При этом линейному члену $(C_0 + C_1\xi + C_2\eta)$ соответствует перемещение пластины как твердого тела, а члену $C_3\xi\eta$ — деформация пластины с постоянной кривизной кручения $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{C_3}{ab}$. Выражение (21.83) включает упомянутое слагаемое в тех случаях, когда углы пластины могут перемещаться, например при опирании пластины на деформируемый контур. Если же при изгибе пластины ее углы оказываются неподвижными, то все $C_i = 0$.

Для определения произвольных постоянных A_{jm}, B_{jn} используют заданные граничные условия на четырех кромках пластины. После подстановки (21.83) в граничные условия получают восемь групп линейных алгебраических уравнений (в общем случае бесконечных) относительно A_{jm} и B_{jn}. Отыскав эти неизвестные и подставив в формулу (21.83), найдем прогиб пластины $w(x, y)$, после чего вычисление остальных параметров изгиба принципиальных затруднений не вызывает. Разумеется, что расчет производят при конечном числе членов рядов, входящих в (21.83).

В заключение отметим, что выражения (21.82), входящие в (21.83), не вполне удобны для выполнения всех указанных вычислений. Поэтому предложены иные формы решений (21.82) с использованием специальных функций, которые являются линейными комбинациями, содержащихся в (21.82) частных решений уравнений (21.80). Одна из таких форм, эквивалентная (21.83), а также подробный алгоритм ее расчета приведены в учебнике [55].

§ 21.5. Изгиб жестких ортотропных прямоугольных пластин

Техническая теория изгиба тонких ортотропных пластин обычно базируется на тех же гипотезах, что и теория изгиба изотропных пластин. Поэтому различие в основных уравнениях изгиба изотропных и ортотропных пластин будет лишь в зависимостях закона Гука и вытекающих из него соотношений между усилиями и перемещениями.

Ниже будут рассмотрены жесткие ортотропные прямоугольные пластины с главными направлениями ортотропии материала, параллельными кромкам пластины. Поскольку на изгиб жестких пластин влияет только поперечная нагрузка, при выводе основных уравнений изгиба жестких ортотропных пластин цепные усилия можно считать равными нулю.

Уравнения закона Гука для ортотропной пластины при плоском напряженном состоянии каждого слоя, параллельного срединной плоскости, можно получить из формул (2.29) при $\sigma_z = 0$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\mu_{xy}}{E_y}\sigma_y; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\mu_{yx}}{E_x}\sigma_x; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}; \qquad (21.84)$$

$$\sigma_x = \frac{E_x(\varepsilon_x + \mu_{xy}\varepsilon_y)}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}; \quad \sigma_y = \frac{E_y(\varepsilon_y + \mu_{yx}\varepsilon_x)}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}; \quad \tau_{xy} = G_{xy}\gamma_{xy}, \qquad (21.85)$$

где E_x, E_y, μ_{xy}, μ_{yx} — модули продольной упругости и коэффициенты Пуассона для главных направлений ортотропной пластины вдоль осей x и y соответственно; G_{xy} — модуль сдвига ортотропного материала в плоскости пластины.

Между упругими постоянными ортотропной пластины имеет место соотношение [см. выражение (2.30)]

$$E_x\mu_{xy}=E_y\mu_{yx}. \qquad (21.86)$$

Полученные ранее основные зависимости (21.1)—(21.7) и (21.13)—(21.15) будут справедливы и для ортотропных пластин. Совместно с законом Гука (21.84), (21.85) эти зависимости позволяют получить разрешающие уравнения изгиба гибких ортотропных пластин типа уравнений Кармана (21.24). Для жестких ортотропных пластин в основных зависимостях (21.1)—(21.7) и (21.13)—(21.15) следует положить $T_1=T_2=S=0$. Тогда, повторяя выводы § 21.1 и 21.2, с учетом закона Гука (21.85) для жесткой ортотропной пластины получим такие основные уравнения:

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=p(x,\ y); \qquad (21.87)$$

$$\left.\begin{aligned}M_1&=-D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\\ M_2&=-D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu_{yx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);\\ H&=-2D_\text{к}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y};\end{aligned}\right\} \qquad (21.88)$$

$$\left.\begin{aligned}N_1&=-D_1\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\delta_1\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right);\\ N_2&=-D_1\left(\delta_2\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\delta_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right);\end{aligned}\right\} \qquad (21.89)$$

$$\left.\begin{aligned}r_1&=-D_1\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\delta_3\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right);\\ r_2&=-D_1\left(\delta_2\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\delta_3\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right),\end{aligned}\right\} \qquad (21.90)$$

где для параметров изгиба сохранены обозначения § 21.1 и, кроме того,

$$\left.\begin{aligned}&D_1=E_xt^3/[12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})];\quad D_2=E_yt^2/[12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})];\\ &D_\text{к}=C_{xy}t^3/12;\quad D_3=2D_\text{к}+D_1\mu_{xy}=2D_\text{к}+D_2\mu_{yx};\\ &\delta_1=D_3/D_1;\quad \delta_2=D_2/D_1;\quad \delta_3=2\delta_1-\mu_{xy}\end{aligned}\right\} \qquad (21.91)$$

[D_1, D_2 — изгибные жесткости ортотропной пластины в направления осей x и y; $D_\text{к}$ — жесткость ее на кручение].

Изгибные напряжения в жесткой ортотропной пластине определяются формулами (21.21) при $T_1=T_2=S=0$.

Расчет ортотропной пластины сводится к решению дифференциального уравнения (21.87) при заданных граничных условиях и поперечной нагрузке $p(x,y)$ и к вычислению параметров изгиба по формулам (21.88)—(21.90), (21.21), (21.22). Аналитическое решение уравнения (21.87) относительно прогиба $w(x,y)$, так же как и уравнения (21.42), может быть получено в виде двойных или одинарных бесконечных рядов.

Изгиб жесткой ортотропной прямоугольной пластины, свободно опертой на всех кромках. Как и для изотропной пластины, граничные условия при свободном опирании всех кромок ортотропной пластины можно представить соотношениями (21.43). Решение уравнения (21.87) может быть получено в виде двойного ряда (21.44), тождественно удовлетворяющего граничным условиям (21.43). Подставляя (21.44) в уравнение (21.87), раскладывая $p(x,y)$ в двойной ряд по синусам кратных дуг и почленно сравнивая коэффициенты Фурье левой и правой частей полученного равенства, находим

$$w_{mn}=p_{mn}b^4/(D_1D_{mn});\quad D_{mn}=\pi^4(n^4\gamma^4+2\delta_1m^2n^2\gamma^2+\delta_2m^4), \qquad (21.92)$$

где коэффициенты Фурье p_{mn} функции $p(x,y)$ определяются по формуле (21.48).

Выражение (21.44) для прогиба ортотропной пластины с учетом (21.92) примет вид

$$w(x,\ y)=\frac{b^4}{D_1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{mn}}{D_{mn}}\sin n\pi\xi\sin m\pi\eta. \qquad (21.93)$$

По формулам (21.88)—(21.90) нетрудно вычислить погонные моменты и перерезывающие силы в сечениях пластин, а затем и напряжения (21.21), (21.22).

Решение (21.93), как и аналогичное решение (21.49) для изотропной пластины, применимо для любого закона изменения поперечной нагрузки $p(x,y)$ по площади пластины, включая случай нагружения пластины сосредоточенными силами.

Решение в форме М. Леви для ортотропной прямоугольной пластины, свободно опертой на двух противоположных кромках $x=0$; a. В этом случае решение уравнения (21.87) можно искать в виде (21.61) при тождественном удовлетворении граничных условий свободного опирания кромок $x=0$; a.

Подставляя (21.61) в уравнение (21.87), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 f_n-2\delta_1\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\delta_2f_n^{\mathrm{IV}}\right]\sin n\pi\xi=\frac{p(x,\ y)}{D_1}.$$

Раскладывая $p(x,y)$ вдоль координаты x в ряд Фурье по синусам и сравнивая коэффициенты рядов в правой и левой частях последнего равенства, находим

$$\delta_2f_n^{\mathrm{IV}}-2\delta_1\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2f_n''+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4f_n=\frac{p_n(y)}{D_1}, \qquad (21.94)$$

где $p_n(y)$ определяется формулой (21.63).

Общее решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения (21.94) состоит из общего интеграла однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$f_n(y)=f_{0n}(y)+f_{1n}(y). \qquad (21.95)$$

При линейном изменении $p(x, y)$ вдоль оси y функция $p_n(y)$ изменяется по линейному закону (21.65). Частное решение уравнения (21.94) в этом случае будет следующим:

$$f_{1n}(y) = \frac{p_n(y)\, a^4}{\pi^4 D_1 n^4} = \frac{(p_{0n} + p_{1n}\eta)\, a^4}{\pi^4 D_1 n^4}. \qquad (21.96)$$

Общее решение $f_{0n}(y)$ однородного уравнения (21.94) находим подстановкой Л. Эйлера

$$f_n(y) = e^{kn\pi y/a}, \qquad (21.97)$$

где k — неизвестная пока постоянная величина. После подстановки (21.97) в однородное уравнение (21.94) получим характеристическое уравнение $\delta_2 k^4 - 2\delta_1 k^2 + 1 = 0$, из которого найдем четыре значения k:

$$k_{1,2,3,4} = \pm\,\delta\sqrt{1 \pm \sqrt{1-\omega^2}}, \qquad (21.98)$$

где с учетом (21.91)

$$\delta^2 = \delta_1/\delta_2 = D_3/D_2; \quad \omega^2 = \delta_2/\delta_1^2 = D_1 D_2/D_3^2. \qquad (21.99)$$

В зависимости от величины ω корни (21.98) характеристического уравнения и частные решения (21.97) однородного уравнения (21.94) будут иметь различную структуру.

1. При $\omega < 1$ четыре корня (21.98) вещественны и различны. На основании (21.97) общее решение однородного уравнения (21.94) может быть представлено в этом случае в форме

$$f_{0n}(y) = B_{1n}\,\mathrm{sh}\,\alpha_{1n}\eta + B_{2n}\,\mathrm{ch}\,\alpha_{1n}\eta + B_{3n}\,\mathrm{sh}\,\alpha_{2n}\eta + B_{4n}\,\mathrm{ch}\,\alpha_{2n}\eta, \quad (21.100)$$

где B_{in} — произвольные постоянные интегрирования;

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{1n} &= s_1 n\pi\gamma; & \alpha_{2n} &= s_2 n\pi\gamma; \\ s_1 &= \delta\sqrt{1+\sqrt{1-\omega^2}}; & s_2 &= \delta\sqrt{1-\sqrt{1-\omega^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (21.101)$$

2. При $\omega = 1$ четыре корня (21.98) вещественны и попарно одинаковы. Тогда на основании (21.98) имеем

$$f_{0n}(y) = (B_{1n} + B_{2n}\eta)\,\mathrm{sh}\,\alpha_{0n}\eta + (B_{3n} + B_{4n}\eta)\,\mathrm{ch}\,\alpha_{0n}\eta. \qquad (21.102)$$

Здесь $\alpha_{0n} = \delta n\pi\gamma$. Для изотропной пластины ($\omega = 1$, $\delta = 1$) выражение (21.102) совпадает с общим решением (21.64) однородного уравнения (21.62).

3. При $\omega > 1$ корни (21.98) оказываются попарно комплексно-сопряженными. В этом случае вследствие (21.97) получим

$$f_{0n}(y) = (B_{1n}\cos\beta_{2n}\eta + B_{2n}\sin\beta_{2n}\eta)\,\mathrm{sh}\,\beta_{1n}\eta + \\ + (B_{3n}\sin\beta_{2n}\eta + B_{4n}\cos\beta_{2n}\eta)\,\mathrm{ch}\,\beta_{1n}\eta, \qquad (21.103)$$

где $\beta_{1n} = n\pi\gamma\delta\sqrt{(1+\omega)/2}$; $\beta_{2n} = n\pi\gamma\delta\sqrt{(\omega-1)/2}$.

Представляет интерес важный случай $\omega \gg 1$, когда жесткость D_3 намного меньше изгибных жесткостей D_1, D_2 в главных направ-

лениях пластины (вдоль осей x и y). В этом случае на основании (21.91), (21.99), (21.103) имеем

$$\beta_{1n} \approx \beta_{2n} \approx \beta_n = n\pi\gamma\sqrt[4]{D_1/(4D_2)}. \qquad (21.104)$$

При условиях (21.104) общее решение (21.103) аналогично решению дифференциального уравнения изгиба балки на упругом основании и может быть записано в виде

$$f_{0n}(y) = C_{0n}V_0(\beta_n\eta) + C_{1n}V_1(\beta_n\eta) + C_{2n}V_2(\beta_n\eta) + C_{3n}V_3(\beta_n\eta), \quad (21.105)$$

где C_{in} — произвольные постоянные; $V_i(\beta_n\eta)$ — функции Пузыревского, определяемые формулами (16.21).

После отыскания решений $f_{0n}(y)$ и $f_{1n}(y)$ на основании формул (21.61) и (21.95) найдем выражение для прогиба ортотропной пластины

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [f_{0n}(y) + f_{1n}(y)] \sin n\pi\xi, \qquad (21.106)$$

где в зависимости от соотношения жесткостей ортотропной пластины $f_{0n}(y)$ определяется формулами (21.100), (21.102), (21.103), (21.105). Входящие в решение (21.106) четыре группы произвольных постоянных B_{in} (или C_{in}) получают из четырех граничных условий на кромках $y = 0$; b ортотропной пластины.

Частное решение $f_{1n}(y)$ неоднородного уравнения (21.94) в общем случае определяется по виду правой части или методом Лагранжа, а при линейном изменении вдоль y давления $p(x, y)$ по выражению (21.96).

После нахождения прогиба (21.106) погонные усилия и моменты, действующие в координатных сечениях ортотропной пластины, вычисляют по формулам (21.88)—(21.90).

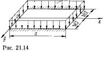


Рис. 21.14

Пример 10. Рассчитать жесткую ортотропную прямоугольную пластину (рис. 21.14), на которую действует равномерное поперечное давление $p(x, y) = p$. Предполагаем, что кромки пластины $x = 0; a$ свободно оперты, а кромки $y = \pm 0{,}5b$ жестко защемлены. Изгибные жесткости D_1, D_2 в направлении осей x, y отличны от нуля, а $D_3 \approx 0$.

Решение. Поскольку давление по площади пластины постоянно, частное решение $f_{1n}(y)$, входящее в выражение для прогиба (21.106), определяется формулами (21.96), (21.63), (21.65) и может быть быть представлено в виде

$$f_{1n}(y) = 2[1 - (-1)^n]\, pa^4/(\pi^5 D_1 n^5). \qquad (21.107)$$

Так как при $D_3 \approx 0$ значение $\omega \approx \infty$, выражение для $f_{0n}(y)$ должно быть принято в форме (21.105). Таким образом, прогиб рассматриваемой ортотропной пластины следует вычислять по формулам (21.105)—(21.107).

Граничные условия на кромках пластины будут следующими:

$$w(x_0, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_0, y) = 0, \quad x_0 = 0;\ a; \qquad (21.108)$$

$$w(x, \pm 0{,}5b) = \frac{\partial w}{\partial y}(x, \pm 0{,}5b) = 0. \qquad (21.109)$$

При этом граничные условия (21.108) удовлетворяются выражением (21.106) автоматически, а граничные условия (21.109) должны быть выполнены за счет выбора произвольных постоянных C_{in} выражения (21.105).

Учитывая симметрию прогиба данной пластины относительно центра ее срединной плоскости $x = 0{,}5a$, $y = 0$, на основании (21.105)—(21.107) можно записать

$$w(x,\ y) = \sum_{n}^{1,\,3,\,5\,\ldots} \left[C_{0n}V_0(\beta_n\eta) + C_{2n}V_2(\beta_n\eta) + \frac{4pa^4}{\pi^5 D_1 n^5}\right]\sin n\pi\xi, \qquad (21.110)$$

полагая постоянные C_{1n}, C_{3n} равными нулю при нечетных функциях Пузыревского.

Подставляя прогиб (21.110) в граничные условия (21.109), получим

$$\left.\begin{aligned} &C_{0n}V_0(u_n) + C_{2n}V_2(u_n) + 4pa^4/(\pi^5 D_1 n^5) = 0;\\ &C_{0n}V_3(u_n) - C_{2n}V_1(u_n) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (21.111)$$

Здесь

$$u_n = \beta_n/2 = (n\pi\gamma/2)\sqrt[4]{D_1/(4D_2)}. \qquad (21.112)$$

Определяя постоянные C_{0n}, C_{2n} из системы уравнений (21.111) и подставляя их значения в выражение (21.110), найдем прогиб пластины:

$$w(x,\ y) = \frac{4pa^4}{\pi^5 D_1}\sum_{n}^{1,\,3,\,5\,\ldots}\frac{w_n(\eta)}{n^5}\sin n\pi\xi,$$

где функция

$$w_n(\eta) = 1 - \frac{V_1(u_n)\,V_0(\beta_n\eta) + V_3(u_n)\,V_2(\beta_n\eta)}{V_0(u_n)\,V_1(u_n) + V_2(u_n)\,V_3(u_n)}$$

является прогибом жестко заделанной по концам призматической балки на упругом основании с аргументом (21.112) при $q/k = 1$ (см. § 16.3).

Знная прогиб $w(x,\ y)$, нетрудно найти и параметры изгиба (21.88)—(21.90).

Форма общего решения дифференциального уравнения изгиба для прямоугольной жесткой ортотропной пластины. Рассмотренные выше частные решения типа решений Навье и Леви не применимы при произвольных граничных условиях на всех кромках пластины. Общее решение для ортотропной пластины может быть получено (по аналогии с решением для изотропной пластины) в форме (21.83). При этом в (21.83) вместо записанного там двойного ряда будет входить ряд (21.93); функции $f_n(\eta)$ и $\varphi_m(\xi)$ вместо выражений (21.82) будут определяться выражениями типов (21.100), (21.102), (21.103), (21.105). В полученное таким образом общее решение для ортотропной пластины войдут восемь групп произвольных постоянных, распоряжаясь которыми можно удовлетворить два любых граничных условия на каждой из четырех кромок принципиально так же, как и для изотропной пластины (см. § 21.4). Однако расчет ортотропной пластины осложняется тем, что в зависимости от степени ортотропии материала функции $f_n(\eta)$ и $\varphi_m(\xi)$ представляются тремя различными выражениями (21.100), (21.102), (21.103), что приводит к трем вариантам вычислительного алгоритма. Поэтому более универсальной и удобной для расчетов является единая форма общего решения, не зависящая от степени ортотропии материала пластины, которая приведена в учебнике [55].

Практическое применение теории изгиба жестких ортотропных пластин. Рассмотренная теория изгиба прямоугольных жестких ортотропных пластин имеет большое практическое значение. Она применяется при расчете на изгиб обшивки судов из синтетических материалов, которые, как правило, являются ортотропными. Кроме того, по указанной теории могут быть рассчитаны на изгиб так называемые конструктивно-ортотропные пластины, являющиеся расчетной моделью реальных конструкций с различными упругими свойствами по двум взаимно перпендикулярным направлениям (гофрированные конструкции, пластины, ортогонально подкрепленные ребрами жесткости, днищевые перекрытия судов при большом числе балок обоих направлений). В последнем случае

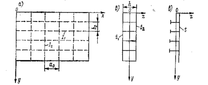


Рис. 21.15

необходимо так подбирать жесткости конструктивно-ортотропной пластины D_1, D_2, $D_к$, чтобы они были эквивалентны жесткости реальной конструкции, подверженной изгибу.

В случае перекрытия типа двойного дна (рис. 21.15, *а* и *б*) для жесткостей приведенной ортотропной пластины нетрудно получить формулы

$$D_1 = \frac{EI_1}{b_0(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}; \qquad a_2 = \frac{EI_2}{a_0(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}; \qquad D_к = \frac{Gt_1t_2}{t_1+t_2}h^2,$$

где E, G, μ — упругие постоянные изотропного материала перекрытия; I_1 и I_2 — моменты инерции продольных и поперечных связей перекрытия с присоединенными поясками; t_1, t_2 и h — толщины настилов перекрытия и его высота.

Коэффициенты Пуассона ортотропной пластины, эквивалентной перекрытию, могут быть приняты одинаковыми: $\mu_{xy} \approx \mu_{yx} \approx \mu$. При значительном различии I_1 и I_2 эти коэффициенты для повышения точности и удовлетворения условию (21.86) следует принять равными: при $a_0I_1 > I_2b_0$ $\mu_{yx} = \mu$, $\mu_{xy} = \mu I_2b_0/(I_1a_0)$; при $b_0I_2 > I_1 > \mu a_0$ $\mu_{xy} = \mu$, $\mu_{yx} = \mu I_1a_0/(I_2b_0)$.

Если перекрытие не имеет второго настила (рис. 21.15, *а* и *в*), то в записанной выше формуле для жесткости $D_к$ нужно положить

$t_1 \approx 0$, после чего D_K станет равным нулю, поскольку в этом случае сопротивление кручению настила и ребер жесткости пренебрежимо мало по сравнению с изгибными жесткостями.

После определения жесткостных характеристик перекрытия как приведенной ортотропной пластины его расчет может быть выполнен на основании уравнения (21.87), метод решения которого указан в данном параграфе.

Замена перекрытия ортотропной пластиной возможна, если число балок перекрытия в каждом направлении больше четырех.

В заключение укажем, что расчет на изгиб судовых перекрытий как ортотропной пластины был предложен акад. Ю. А. Шиманским (1934 г.) и развит в дальнейшем П. Ф. Папковичем, А. А. Курдюмовым и В. А. Постновым.

§ 21.6. Приближенные методы решения задач изгиба жестких пластин

Приведенные в § 21.4 и § 21.5 решения задач об изгибе жестких прямоугольных пластин не могут охватить всех встречающихся на практике случаев. Кроме того, использование аналитических решений при сложной форме контура пластин, при наличии отверстий и вырезов в пластинах, при переменной толщине пластины оказывается затруднительным и малоэффективным в вычислительном отношении. В указанных случаях для расчета пластин целесообразно применение приближенных методов высшего анализа: Бубнова — Галеркина, Ритца, МКЭ, коллокаций, сеток и др. Ниже будут рассмотрены методы Бубнова — Галеркина, Ритца и МКЭ. Принципиальная схема применения указанных методов и к решению задач изгиба пластин естественно остается такой же, как и в приведенных ранее задачах теории упругости и изгиба стержней.

Метод Бубнова — Галеркина. Следуя этому методу, прогиб жесткой пластины ищем в виде ряда, например,

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \varphi_n(x) \psi_m(y), \qquad (21.113)$$

где w_{mn} — неизвестные пока коэффициенты ряда; $\varphi_n(x)$, $\psi_m(y)$ — координатные функции, выбираемые так, чтобы выполнялись все граничные условия на контуре пластины.

Для жесткой изотропной пластины, прогиб которой определяется дифференциальным уравнением (21.42), уравнения Бубнова — Галеркина можно записать в виде

$$\iint_{\Omega} [D\nabla^2\nabla^2 w - p(x, y)] \varphi_i(x) \psi_j(y)\, dx\, dy = 0. \qquad (21.114)$$

Если выражение (21.113) подставить в (21.114), то после интегрирования по всей площади пластины Ω получим систему линейных алгебраических уравнений для вычисления неизвестных коэффициентов w_{mn} ряда (21.113), а тем самым и прогиба w.

Для ортотропной пластины, прогиб которой определяется дифференциальным уравнением (21.87), уравнения Бубнова — Галеркина нетрудно составить по аналогии с уравнениями (21.114).

Метод Ритца. Прогиб пластины, как и в предыдущем случае, аппроксимируется выражение (21.113). Исходными уравнениями для определения w_{mn} являются зависимости метода Ритца

$$\frac{\partial (\Pi - U)}{\partial w_{mn}} = 0, \qquad (21.115)$$

где U — силовая функция всех внешних нагрузок, а Π — потенциальная энергия изгиба пластины.

Если пластина загружена поперечной нагрузкой с интенсивностью $p(x, y)$ и выражение (21.113) удовлетворяет всем граничным условиям, то силовая функция U равна работе нагрузки $p(x, y)$:

$$U = \iint_{(\Omega)} p(x, y)\, w(x, y)\, dx\, dy. \qquad (21.116)$$

Выражение для потенциальной энергии изгиба пластины можно найти из общих формул (3.38) и (3.40), учитывая, что каждый слой пластины, параллельный срединной плоскости xoy, находится в плоском напряженном состоянии:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{(\Omega)} \int_{-0,5t}^{0,5t} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})\, dx\, dy\, dz.$$

Так как изгибные деформации и напряжения выражаются через прогиб пластины формулами (21.4) и (21.16) при $\varepsilon_{0x} = \varepsilon_{0y} = \gamma_{0xy} = 0$, после интегрирования по z получим следующее выражение для потенциальной энергии изгиба пластины:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{(\Omega)} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx\, dy. \qquad (21.117)$$

Располагая выражениями (21.116) и (21.117) при условии (21.113), можно составить уравнения (21.115) для определения w_{mn} и, следовательно, прогиба пластины.

Не останавливаясь подробно на практической расчетной схеме, отметим два существенных обстоятельства.

При выборе фундаментальных функций $\varphi_n(x)$ и $\psi_m(y)$ можно подчинять их только кинематическим граничным условиям, поскольку уравнения (21.115) являются условиями равновесия пластины на любом кинематически возможном перемещении и статические граничные условия будут удовлетворены автоматически. Однако в этом случае в выражении силовой функции (21.116) должна быть обязательно учтена работа заданных на контуре пластины внешних усилий.

Выражения (21.116) и (21.117) справедливы и для пластин переменной толщины, так как при выводе данных выражений никаких ограничений в отношении толщины пластины не делалось. Поэтому уравнения (21.115), полученные методом Ритца, с учетом выражений (21.116) и (21.117), могут быть использованы и при расчете пластин переменной толщины.

Метод конечных элементов. Общая схема расчета жестких пластин на изгиб по МКЭ остается такой же, как и при решении задач теории упругости: разбиение пластины на конечные элементы, аппроксимация прогиба в пределах конечного элемента с соответствующим числом обобщенных перемещений, вычисление зависимостей между обобщенными перемещениями и обобщенными силами в узлах конечного элемента, составление условий равновесия узлов при использовании варианта метода перемещений или условий совместности перемещений в случае применения варианта метода сил, решение уравнений равновесия относительно узловых обобщенных перемещений или уравнений совместности деформаций относительно обобщенных узловых усилий, расчет параметров напряженно-деформированного состояния пластины по найденным обобщенным перемещениям или усилиям. Наиболее употребительным является МКЭ в варианте метода перемещений, что и будет предметом дальнейшего рассмотрения. Чаще всего при решении задач изгиба жестких пластин используют конечные элементы треугольной или прямоугольной формы, в пределах которых прогиб пластины аппроксимируется полиномами целых степеней. Мы ограничимся выводом основных зависимостей для прямоугольного изотропного конечного элемента (рис. 21.16) с размерами a_0 и b_0 вдоль осей x и y соответственно.

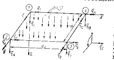


Рис. 21.16

В качестве обобщенных перемещений примем прогибы w и углы поворота нормали к срединной поверхности $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ в 1-, 2-, 3- и 4-м узлах конечного элемента. Тогда прогиб пластины будет определяться 12 обобщенными координатами и его можно аппроксимировать степенным полиномом из 12 линейно независимых членов:

$$w(x,\ y) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \\ + \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3 + \alpha_{11}\xi^3\eta + \alpha_{12}\xi\eta^3, \qquad (21.118)$$

где α_i, $i = 1, 2, \ldots, 12$ неизвестные коэффициенты; $\xi = x/a_0$; $\eta = y/b_0$. Выражение (21.118) тождественно удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению изгиба жестких изотропных пластин (21.42).

В сечениях $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ прогиб $w(x, y)$ определяется параболами третьей степени текущих координат η или ξ. Каждый такой полином на двух соседних кромках смежных элементов дает одинаковые прогибы, поскольку здесь равны узловые значения прогибов и первых производных по направлению стыкующихся кромок. Следовательно, выражение (21.118) обеспечивает непрерывность прогиба в любой точке пластины. Имеющее место нарушение непрерывности первых производных по нормали к линиям стыка смежных элементов заметно ухудшает сходимость решения к точному при уменьшении размеров конечного элемента.

Представим выражение (21.118) в зависимости от указанных ранее обобщенных перемещений:

$$q_1 = w(0,\ 0), \quad q_2 = \frac{\partial w}{\partial y}(0,\ 0), \quad q_3 = -\frac{\partial w}{\partial x}(0,\ 0),\ \ldots,$$

$$q_{10} = w(a_0,\ 0),\ q_{11} = \frac{\partial w}{\partial y}(a_0,\ 0), \quad q_{12} = -\frac{\partial w}{\partial x}(a_0,\ 0). \quad (21.119)$$

Нумерация узловых обобщенных перемещений q_i соответствует рис. 21.16. При этом перемещения q_1, q_3, q_7, q_{10} являются прогибами в углах конечного элемента, а остальные восемь величин q_i представляют собой углы поворота нормали срединной поверхности в углах элемента в соответствии с обозначениями (21.119) и изображены векторами с двойными стрелками. Также принято изображать моменты сил.

Подставляя выражение (21.118) в правые части равенств (21.119), получим 12 линейных уравнений, устанавливающих зависимость между q_i и α_i. Выражая из этой системы коэффициенты α_i через q_i и подставляя их в (21.118), представим прогиб конечного элемента в виде

$$w(x,\ y) = \sum_{i=1}^{i=n} q_i Э_i(\xi,\ \eta), \qquad (21.120)$$

где $Э_i(\xi,\ \eta)$ — полиномы Эрмита, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned}
Э_1(\xi,\ \eta) &= 1 - 3\xi^2 - \xi\eta - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 3\xi\eta^2 + \\
&\quad + 2\eta^3 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3 + 3\xi^2\eta;\\
Э_2(\xi,\ \eta) &= b_0(\eta - \xi\eta - 2\eta^2 + 2\xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3);\\
Э_3(\xi,\ \eta) &= a_0(-\xi + \xi\eta + 2\xi^2 - 2\xi^2\eta - \xi^3 + \xi^3\eta);\\
Э_4(\xi,\ \eta) &= 3\eta^2 + \xi\eta - 2\eta^3 - 3\xi\eta^2 - 3\xi^2\eta + \\
&\quad + 2\xi\eta^3 + 2\xi^3\eta;\\
Э_5(\xi,\ \eta) &= b_0(-\eta^2 + \eta^3 + \xi\eta^2 - \xi\eta^3);\\
Э_6(\xi,\ \eta) &= a_0(-\xi\eta + 2\xi^2\eta - \xi^3\eta);\\
Э_7(\xi,\ \eta) &= -\xi\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3;\\
Э_8(\xi,\ \eta) &= b_0(-\xi\eta^2 + \xi\eta^3);\\
Э_9(\xi,\ \eta) &= a_0(\xi^2\eta - \xi^3\eta);
\end{aligned}\right\} \quad (21.121)$$

$$\left.\begin{aligned} Э_{10}(\xi,\ \eta) &= 3\xi^2 + \xi\eta - 2\xi^3 - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + \\ &\quad + 2\xi\eta^3 - 3\xi^2\eta; \\ Э_{11}(\xi,\ \eta) &= b_0(\xi\eta - 2\xi\eta^2 + \xi\eta^3); \\ Э_{12}(\xi,\ \eta) &= a_0(\xi^2 - \xi^3 - \xi^2\eta + \xi^3\eta). \end{aligned}\right\}$$

Полиномы Эрмита представляют собой формы обобщенных перемещений q_i. В углах конечного элемента каждый полином с номером i дает нулевые значения перемещений, соответствующих j-й обобщенной координате при $j \neq i$, и единичные значения (± 1) для перемещений, соответствующих i-й обобщенной координате. Иначе говоря, для «чужих обобщенных координат данный полином Эрмита дает в углах элемента только нулевые значения.

Установим теперь зависимость между узловыми перемещениями q_i и соответствующими узловыми усилиями R_i. Подставляя выражение (21.120) в (2.117) и интегрируя по всей площади конечного элемента в пределах $0 \leqslant x \leqslant a_0$, $0 \leqslant y \leqslant b_0$, выразим потенциальную энергию изгиба конечного элемента $П$ через обобщенные перемещения q_i:

$$П = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{12}\sum_{j=1}^{12} k_{ij}q_iq_j \quad i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 12, \tag{21.122}$$

где

$$k_{ij} = D\int_0^{a_0}\int_0^{b_0}\left[\nabla^2 Э_i \nabla^2 Э_j + \right.$$
$$\left. + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 Э_i}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 Э_j}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 Э_i}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 Э_j}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 Э_i}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 Э_j}{\partial x^2}\right)\right]dx\,dy \tag{21.123}$$

— элементы искомой матрицы жесткости $[K]$ рассматриваемого конечного элемента, имеющего размер (12×12):

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1\,12} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & Y_{2\,12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{12\,1} & k_{12\,2} & \ldots & k_{12\,12} \end{bmatrix}. \tag{21.124}$$

Если ввести вектор узловых перемещений

$$\{q\} = \{q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{12}\} \tag{21.125}$$

и вектор узловых (обобщенных) усилий конечного элемента

$$\{R\} = \{R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_{12}\}, \tag{21.126}$$

то зависимость между этими векторами представится в виде

$$\{R\} = [K]\{q\}. \tag{21.127}$$

Отметим, что нумерация и положительные направления узловых обобщенных сил R_i совпадает с таковыми для обобщенных перемещений q_i. При этом R_1, R_4, R_7, R_{10} являются сосредоточенными силами, а остальные R_i — моментами. Компоненты матрицы жесткости (21.124) симметричны относительно главной диагонали $k_{ij} = k_{ji}$. Из зависимости (21.127) нетрудно установить их физический смысл: значение k_{ij} равно значению обобщенной узловой силы в направлении i-го узлового перемещения при узловом перемещении $q_j = 1$. Коэффициенты k_{ij} определяют по формуле (21.123) после подстановки в нее полиномов Эрмита (21.121). Например, вычисления дают

$$\left.\begin{aligned} k_{11} &= [2D/(a_0b_0)]\left[2\left(\gamma_0^2 + 1/\gamma_0^2\right) - (7-2\mu)/5\right]; \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k_{12\,12} &= [4Da_0/(3b_0)]\left[1/\gamma_0^2 + (1-\mu)/5\right], \end{aligned}\right\} \tag{21.128}$$

где $\gamma_0 = a_0/b_0$.

Выражения для других коэффициентов k_{ij} аналогичны (21.128). Из-за громоздкости полная матрица жесткости (21.124) и все выражения для k_{ij} в учебнике не приводятся. Их можно найти в работах [40, 51]. В порядке упражнения рекомендуем читателю самостоятельно вычислить некоторые из коэффициентов (21.123).

Если на конечный элемент действует поперечная нагрузка $p(x, y)$ (см. рис. 21.16), то обобщенные узловые усилия, являясь статическим эквивалентом сил, приложенным по кромкам конечного элемента, выступают как реактивные и обеспечивают условия равновесия конечного элемента на базе принципа возможных перемещений. Для выполнения этих условий внешняя нагрузка должна быть также приведена к узловому (обобщенному) виду, т. е. заменена совокупностью эквивалентных узловых сил P_i, $i = 1, 2, \ldots, 12$. Для их определения следует воспользоваться формулой (11.32), которая для рассматриваемого случая примет вид

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = \int_0^{a_0}\int_0^{b_0} p(x,\ y)\,Э_i(x,\ y)\,dx\,dy, \tag{21.129}$$

где U — силовая функция внешних сил (21.116).

Если давление по площади конечного элемента равномерно $[p(x, y) = p$, то после подстановки (21.121) в (21.129) и интегрирования получим

$$\{P\} = \{P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{12}\} = \frac{pa_0b_0}{4}\left\{1,\ \frac{b_0}{6},\ -\frac{a_0}{6},\right.$$
$$\left. 1,\ -\frac{b_0}{6},\ \frac{a_0}{6},\ 1,\ -\frac{b_0}{6},\ \frac{a_0}{6},\ 1,\ \frac{b_0}{6},\ -\frac{a_0}{6}\right\}. \tag{21.130}$$

Следовательно, равномерно распределенная по площади конечного элемента внешняя поперечная нагрузка заменяется четырьмя узловыми силами:

$$P_1 = P_4 = P_7 = P_{10} = pa_0b_0/4 \tag{21.131}$$

и восемью узловыми моментами

$$
\left.\begin{aligned}
P_2 = -P_5 = -P_8 = P_{11} = pa_0b_0^2/24; \\
-P_3 = P_6 = P_9 = -P_{12} = pa_0^2b_0/24.
\end{aligned}\right\} \qquad (21.131')
$$

Следующим этапом расчета является составление условий равновесия узлов пластины, разделенной (мысленно) на конечные элементы. Для этого необходимо приравнять нулю сумму всех внешних и внутренних обобщенных усилий, действующих на рассматриваемый узел в одном направлении:

$$
\sum_j R_{jn}^{(m)} - \sum_j P_{jn}^{(m)} = 0, \qquad (21.132)
$$

где индексам $n = 1, 2, 3$ соответствуют векторы усилий, действующих в направлении осей x, y, z соответственно, а суммирование по j производится для всех конечных элементов, сходящихся в узле m. Число уравнений (21.132) равно утроенному числу узлов.

Если узловые усилия R в (21.132) выразим через обобщенные координаты q с помощью зависимостей (21.127), то получим систему уравнений относительно неизвестных $q_{in}^{(m)}$, общее число которых равно утроенному числу узлов. Решение этой системы позволит найти все неизвестные q_i, а затем и прогибы (21.120) в пределах каждого конечного элемента. Когда известны прогибы конечных элементов, отыскание внутренних усилий и напряжений легко выполняется с помощью формул (21.18), (21.20)—(21.22). В конечном счете усилия и напряжения в пластине можно выразить через узловые перемещения q_i, для чего получены необходимые расчетные формулы [40, 51].

Уравнения равновесия (21.132) в узловых перемещениях в настоящее время составляются на ЭВМ автоматически с помощью так называемой *матрицы индексов*. На ЭВМ производится также и решение указанных уравнений, вычисление компонентов напряженно-деформированного состояния с выдачей на печать необходимых результатов. Обычно весь комплекс расчетов выполняется по специально разработанным программам.

§ 21.7. Устойчивость прямоугольных пластин

В случае действия сжимающих и сдвигающих усилий в плоскости пластин при определенном значении этих нагрузок пластины могут потерять устойчивость и частично выключиться из работы конструкции. Поэтому вопросы устойчивости прямоугольных пластин имеют для строительной механики корабля важное значение.

Для исследования устойчивости пластин необходимо иметь уравнения их равновесия в отклоненном положении. Такие уравнения были получены в § 21.3. Ограничиваясь рассмотрением устойчивости пластин при малых отклонениях, на основании урав-

нений (21.40) и (21.23) дифференциальное уравнение устойчивости можно записать в виде

$$
D\nabla^2\nabla^2 w + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \qquad (21.133)
$$

где T_1, T_2 — сжимающие усилия, S — сдвигающее усилие в плоскости пластины, которые в общем случае определяются решением плоской задачи теории упругости — интегрированием первого уравнения (21.40).

Граничные условия для прогиба выписываются так же, как и при поперечном изгибе пластин.

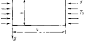


Рис. 21.17

Задача об устойчивости пластин сводится к отысканию ненулевых решений уравнения (21.133) при заданных граничных условиях и законах изменения усилий T_1, T_2, S. Методы решения задач устойчивости прямоугольных пластин рассмотрим на конкретных примерах.

Устойчивость свободно опертой пластины, сжатой нормальными равномерно распределенными усилиями T_1 (рис. 21.17). Ненулевые решения уравнения (21.133) будем искать в виде двойного ряда по синусам, который удовлетворяет граничным условиям свободного опирания (21.43):

$$
w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin n\pi\xi \sin m\pi\eta, \qquad (21.134)
$$

где m и n — целые положительные числа.

Подставляя прогиб (21.134) в дифференциальное уравнение устойчивости (21.133), при $T_2 = S = 0$ получим

$$
\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left\{ D\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]^2 - T_1\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right\} \sin n\pi\xi \sin m\pi\eta = 0.
$$

Чтобы найти ненулевые значения A_{mn}, необходимо приравнять нулю выражение в фигурной скобке, что дает

$$
T_1 = (\pi^2 D/b^2)(m^2\gamma/n + n/\gamma)^2, \quad \gamma = a/b. \qquad (21.135)
$$

Так как при условии (21.135) обращается в нуль только одна фигурная скобка при коэффициенте A_{mn}, то только этот коэффициент ряда (21.134) отличен от нуля, а форма потери устойчивости определяется выражением

$$
w = A_{mn} \sin n\pi\xi \sin m\pi\eta. \qquad (21.136)
$$

Для определения эйлеровой нагрузки $T_э$ целые числа m и n в выражении (21.135) должны быть выбраны так, чтобы T_1 было минимальным. Минимум выражения (21.135) будет всегда при

$m=1$, т. е. пластина обязательно теряет устойчивость с образованием одной полуволны синусоиды в направлении, перпендикулярном направлению сжимающих усилий

$$T_э = (\pi^2 D/b^2)(\gamma/n + n/\gamma)^2. \qquad (21.137)$$

Если минимум выражения (21.137) достигается при некотором фиксированном числе полуволн n в направлении сжимающей нагрузки, то значения усилий T_1 при $(n-1)$ и $(n+1)$ будут больше значения $T_э$ и поэтому $[\gamma/(n-1)+(n-1)/\gamma] > (\gamma/n + n/\gamma) < [\gamma/(n+1)+(n+1)/\gamma]$. Эти неравенства можно преобразовать к виду

$$\sqrt{n(n-1)} < \gamma < \sqrt{n(n+1)}. \qquad (21.138)$$

Неравенства (21.138) являются условиями минимума выражения (21.137) и позволяют найти интервалы значений γ для разных

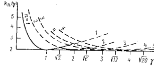


Рис. 21.18

чисел полуволн n при потере пластиной устойчивости. Если $n=1$, то $0<\gamma<\sqrt{2}$; при $n=2$ $\sqrt{2}<\gamma<\sqrt{6}$; если $n=3$, то $\sqrt{6}<\gamma<\sqrt{12}$; при $n=4$ $\sqrt{12}<\gamma<\sqrt{20}$ и т. д. Это означает, что пластины при $0<\gamma<\sqrt{2}$ теряют устойчивость с образованием одной полуволны синусоиды в направлении сжимающей нагрузки, в случае $\sqrt{2}<\gamma<\sqrt{6}$ — двух полуволн, при $\sqrt{6}<\gamma<\sqrt{12}$ — трех полуволн и т. д.

В пределах каждого интервала изменения отношения сторон $\gamma=a/b$, при котором число n одинаково, значение эйлеровой силы будет зависеть от γ. Эта зависимость иллюстрируется рис. 21.18, где по вертикальной оси отложены значения

$$k_n(\gamma) = \gamma/n + n/\gamma. \qquad (21.139)$$

Как видно из рисунка, величина $k_n(\gamma)$ весьма мало отклоняется от своего минимума $k_n(\gamma)=2$ при $\gamma \geqslant 1$. Наибольшее отклонение получается при $\gamma=\sqrt{2}$ и $n=1$, когда $k_n(\gamma)=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=2{,}13$.

Поэтому с ошибкой в безопасную сторону при $\gamma\geqslant 1$ можно считать $k_n(\gamma)\approx 2$, а на основании (21.137) и (21.139) записать

$$T_э = 4\pi^2 D/b^2; \quad \sigma_э = T_э/t = 4\pi^2 D/(b^2 t), \qquad (21.140)$$

где $\sigma_э$ — эйлеровы напряжения пластины.

Если $\gamma<1$, то $n=1$ и по формуле (21.137) получим

$$T_э = \pi^2 D(1+\gamma^2)^2/a^2; \quad \sigma_э = \pi^2 D(1+\gamma^2)^2/(a^2 t). \qquad (21.141)$$

Для пластины, у которой $b \gg a$ и $\gamma \gg 1$, согласно последним формулам

$$T_э = \pi^2 D/a^2; \quad \sigma_э = \pi^2 D/(a^2 t), \qquad (21.142)$$

т. е. эйлеровы усилия определяются как для свободно опертой балки — полоски с изгибной жесткостью D и длиной пролета a.

Таким образом, для пластин, сжатых по направлению длинных кромок ($\gamma>1$), справедливы формулы (21.140), а для пластин, сжатых по направлению коротких кромок ($\gamma<1$), — формулы (21.141). Для стальных пластин при $E=2\cdot10^5$ МПа, $\mu=0{,}3$ после подстановки выражения D в формулы (21.140) и (21.141), получим: при сжатии пластины по направлению длинных кромок

$$\sigma_э \approx 80(100t/b)^2 \text{ МПа}; \qquad (21.143)$$

при сжатии пластины по направлению коротких кромок

$$\sigma_э \approx 20(100t/a)^2(1+\gamma^2)^2 \text{ МПа}. \qquad (21.144)$$

Формулы (21.143) и (21.144) используют для расчета устойчивости пластин, в которых действуют сжимающие напряжения от общего изгиба корпуса судна. Из этих формул следует, что при продольной системе набора, когда пластины сжаты в направлении длинной стороны, эйлеровы напряжения оказываются примерно в четыре раза больше, чем при поперечной системе набора, когда пластины сжаты в направлении короткой стороны, если в обоих случаях расстояние между ребрами жесткости одинаково. Это одно из главных преимуществ продольной системы набора, при которой пластины более устойчивы.

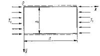


Рис. 21.19

Устойчивость пластины, свободно опертой двумя противоположными кромками (рис. 21.19). Пусть кромки $x=0$; a свободно оперты, а кромки у кромки $y=0$; b заделаны произвольным образом. При сжатии пластины в направлении оси x постоянными усилиями T_1 дифференциальное уравнение устойчивости (21.133) примет вид

$$D\nabla^2\nabla^2 w + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \qquad (21.145)$$

Решение уравнения (21.145) будем искать в виде одинарного ряда

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)\sin n\pi\xi, \qquad (21.146)$$

каждый член которого удовлетворяет условиям свободного опирания при $x = 0$; a.

Подставляя прогиб (21.146) в дифференциальное уравнение (21.145) и приравнивая нулю каждый член полученного ряда, найдем

$$f_n^{\mathrm{IV}} - 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 f_n'' + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \frac{T_1}{D}\right] f_n = 0. \qquad (21.147)$$

Если бы пластина на кромках $y = 0$; b была совершенно свободна, то эйлерово усилие, соответствующее потере устойчивости с образованием n полуволн, равнялось бы $T_э = (n\pi/a)^2 D$. При закреплении кромок $y = 0$; b эйлерово усилие всегда больше указанного выше значения. Поэтому характеристическое уравнение соответствующее линейному дифференциальному уравнению (21.147), имеет два вещественных и два мнимых корня, а общее решение уравнения (21.147) следующее:

$$f_n(y) = A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + B_n \operatorname{sh} \alpha_n y + C_n \cos \beta_n y + D_n \sin \beta_n y, \quad (21.148)$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные;

$$\alpha_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \frac{n\pi}{a}\sqrt{\frac{T_1}{D}}}; \quad \beta_n = \sqrt{\frac{n\pi}{a}\sqrt{\frac{T_1}{D}} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}. \qquad (21.149)$$

Граничные условия на кромках $y = 0$; b приводят к системе четырех однородных уравнений для вычисления произвольных постоянных A_n, B_n, C_n, D_n, ненулевые значения которых возможны лишь при обращении в нуль определителя системы. Условие равенства нулю определителя дает уравнение для расчета эйлеровой нагрузки пластины, которая войдет в это уравнение через α_n и β_n.

Пример 11. Рассчитать устойчивость пластины, у которой кромка $y = 0$ свободно оперта, а кромка $y = b$ совершенно свободна.

Решение. В этом случае граничные условия на основании формул (21.25) и (21.34) запишутся в виде

$$\text{при } y = 0 \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \qquad (21.150)$$

$$\text{при } y = b \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0. \qquad (21.151)$$

Эти граничные условия для прогиба (21.146) приводят к соотношениям

$$f_n(0) = f_n''(0) = 0; \qquad (21.152)$$

$$f_n''(b) - \mu\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 f_n(b) = 0; \quad f_n'''(b) - (2 - \mu)\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 f_n'(b) = 0. \qquad (21.153)$$

Подчиняя выражение (21.148) условиям (21.152), находим $A_n = C_n = 0$, а функцию $f_n(y)$ записываем в виде

$$f_n(y) = B_n \operatorname{sh} \alpha_n y + D_n \sin \beta_n y. \qquad (21.154)$$

Подставляя выражение (21.154) в граничные условия (21.153), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} B_n\left(\alpha_n^2 - \mu n^2\pi^2/a^2\right) \operatorname{sh} \alpha_n b - D_n\left(\beta_n^2 + \mu n^2\pi^2/a^2\right) \sin \beta_n b = 0; \\ B_n \alpha_n \left[\alpha_n^2 - (2 - \mu) n^2\pi^2/a^2\right] \operatorname{ch} \alpha_n b - D_n \beta_n \left[\beta_n^2 + (2 - \mu) n^2\pi^2/a^2\right] \cos \beta_n b = 0. \end{cases}$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, после преобразований имеем

$$\beta_n\left(\alpha_n^2 - \mu n^2\pi^2/a^2\right) \operatorname{th} \alpha_n b = \alpha_n\left(\beta_n^2 + \mu n^2\pi^2/a^2\right) \operatorname{tg} \beta_n b. \qquad (21.155)$$

Наименьшее значение корня T_1, который входит в уравнение устойчивости (21.155) через посредство α_n и β_n, определяет эйлерово значение сжимающего усилия. Исследования показывают, что наименьшее значение сжимающих напряжений получается всегда при $n = 1$ независимо от отношения a/b. Следовательно, пластина теряет устойчивость по форме $w = f_1(y) \sin \pi\xi$ с образованием одной полуволны вдоль оси x.

Наименьшее значение корня уравнения (21.155) при $n = 1$ может быть найдено графически. Результаты вычисления удобно представить формулой $\sigma_э = k\pi^2 D/(b^2 t)$, где значения коэффициента k зависят от отношения сторон a/b и приводятся в справочнике [51].

Если a/b велико, то при $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0{,}3$ из уравнения (21.155) можно получить

$$\sigma_э \approx 8{,}4\,(100t/b)^2 \text{ МПа}. \qquad (21.156)$$

Формулу (21.156) используют при расчетах на устойчивость свободных поясков стальных балок судового набора.

Отметим, что решение (21.146), (21.148) позволяет рассмотреть и другие возможные случаи закрепления кромок пластины $y = 0$; b.

Расчетные формулы для определения эйлеровых сил пластин в различных случаях опирания приводятся в справочной литературе [50, 51].

Устойчивость прямоугольной свободно опертой пластины при линейном распределении сжимающих напряжений (рис. 21.20). Пусть кромки пластины $x = 0$, a загружены напряжениями

$$\sigma_x = \sigma_0 (1 - \beta y/b), \qquad (21.157)$$

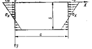


Рис. 21.20

где β — заданный параметр. При $\beta = 0$ на пластину действует равномерная нагрузка, при $\beta = 1$ — треугольная, а при $\beta = 2$ наблюдается чистый изгиб.

Полагая в уравнении (21.133) $T_1 = \sigma_x t$, $T_2 = S = 0$, получаем уравнение устойчивости

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \sigma_0 t \left(1 - \beta \frac{y}{b}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \qquad (21.158)$$

Уравнение (21.158) имеет переменные коэффициенты и не может быть решено точно. Для его приближенного решения воспользуемся методом Бубнова — Галеркина (см. § 21.6).

Выражение для прогиба отыскиваем в виде ряда (21.134), удовлетворяя условиям свободного опирания на всех кромках пластины. Подставляя выражение для прогиба (21.134) в дифференциальное уравнение (21.158), находим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[(n^2 + m^2\gamma^2)^2 - \frac{\sigma_0 t a^2}{\pi^2 D} n^2 (1 - \beta\eta)\right] \sin n\pi\xi \sin m\pi\eta = 0.$$

Умножим обе части этого уравнения на $\sin i\pi\xi \sin k\pi\eta$ и проинтегрируем результат по всей площади пластины. Учитывая соотношения

$$\int_0^1 \sin n\pi\xi \sin i\pi\xi\, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq i; \\ 1/2 & \text{при} \quad n = i; \end{cases}$$

$$\int_0^1 \eta \sin m\pi\eta \sin k\eta\, d\eta = \begin{cases} 1/4 & \text{при} \quad m = k; \\ 0 & \text{при} \quad (m \pm k) \text{ четном}; \\ -\dfrac{4mk}{\pi^2 (m^2 - k^2)^2} & \text{при} \quad (m \pm k) \text{ нечетном}, \end{cases}$$

после интегрирования получим следующую систему линейных однородных уравнений при нечетных $(m \pm k)$:

$$A_{mn}\left[(n^2 + m^2\gamma^2)^2 - \frac{\sigma_0 t a^2}{\pi^2 D}\left(1 - \frac{\beta}{2}\right) n^2\right] - \\ - \frac{8\beta\sigma_0 t a^2 n^2}{\pi^4 D} \sum_k \frac{A_{kn} mk}{(m^2 - k^2)^2} = 0, \quad m,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (21.159)$$

При конечном числе членов ряда в выражении для прогиба (21.134) система уравнений (21.159) будет содержать конечное число неизвестных A_{mn}. Приближенное значение эйлеровых напряжений может быть найдено из условия равенства нулю определителя этой системы. Система (21.159) распадается на подгруппы, в каждую из которых входят коэффициенты A_{kn} с одинаковым номером n. Это показывает, что потеря устойчивости пластины происходит с образованием n синусоидальных полуволн в направлении оси x. Для определения эйлеровой нагрузки необходимо взять подгруппу уравнений с таким номером n, чтобы σ_0 принимало наименьшее значение из всех возможных.

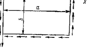


Рис. 21.21

Результаты вычислений по указанной выше схеме позволяют получить формулу для эйлеровых напряжений в следующем виде:

$$\sigma_{0э} = k_1 \pi^2 D / b^2 t.$$

Значения коэффициента k_1, зависящего от β γ, приведены в справочнике [51].

Устойчивость свободно опертой прямоугольной пластины при чистом сдвиге (рис. 21.21). Пусть пластина на кромках загружена равномерными касательными напряжениями $\tau_{xy} = -\tau$. Тогда, полагая в уравнении (21.133) $T_1 = T_2 = 0$, $S = -\tau t$, получаем уравнение устойчивости в виде

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + 2\tau t \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = 0. \qquad (21.160)$$

Решение уравнения (21.160) выполним методом Бубнова — Галеркина, отыскивая прогиб в виде ряда (21.134), который удовлетворяет условиям свободного опирания (21.43) на всех кромках пластины. Подставим ряд (21.134) в уравнение (21.160), умножим обе части уравнения на $\sin i\pi\xi \sin k\pi\eta$ и проинтегрируем по всей площади пластины. Учитывая, что

$$\int_0^1 \sin n\pi\xi \sin i\pi\xi\, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq 1; \\ \frac{1}{2} & \text{при} \quad n = i; \end{cases}$$

$$\int_0^1 \cos n\pi\xi \sin i\pi\xi\, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad (n \pm i) \text{ четном}; \\ \dfrac{2}{\pi^2 (i^2 - n^2)} & \text{при} \quad (n \pm i) \text{ нечетном}, \end{cases}$$

после интегрирования получим

$$A_{mn} (n^2 + m^2\gamma^2)^2 + \frac{32\tau t a^2 \gamma}{\pi^4 D} \sum_i \sum_k \frac{A_{ik} mnik}{(i^2 - n^2)(k^2 - m^2)} = 0, \qquad (21.161)$$

где суммирование по i и k ведется для значений, при которых $(n \pm i)$ и $(m \pm k)$ — нечетные числа.

Система уравнений (21.161) распадается на две независимые системы однородных уравнений, в одну из которых входят коэффициенты A_{mn} с четной суммой номеров $(m + n)$, а в другую — с нечетной суммой $(m + n)$. Исследовать приходится только первую из этих систем, так как из второй получаются большие значения напряжения τ.

Если, например, оставить в ряду (21.134) только два члена ряда A_{11} и A_{22} с четной суммой $(m + n)$, то в соответствии с уравнениями (21.161)

$$\begin{cases} A_{11} (1 + \gamma^2)^2 + 128\tau t a^2 \gamma A_{22} / (9\pi^4 D) = 0; \\ 128\tau t a^2 \gamma A_{11} / 9\pi^4 D + 16 (1 + \gamma^2)^2 A_{22} = 0. \end{cases}$$

Приравнивая нулю определитель этой системы и разрешая полученное уравнение относительно τ, находим следующее приближенное значение эйлеровых касательных напряжений: $\tau_э = 9(1 + \gamma^2)^2 \pi^4 D / 32 b^2 \gamma^3 t)$. Более точные значения $\tau^э$ можно получить при удержании в ряду (21.134) большего числа членов:

$$\tau_э = k_1 \pi^2 D / (b^2 t). \qquad (21.162)$$

Значения коэффициента k_1 в зависимости от γ приведены в справочнике [51].

Коэффициент k_1 изменяется в пределах 9,34—5,35 при $1 \leqslant \gamma \leqslant \infty$. Таким образом, для очень вытянутых пластин $\tau_э$ примерно вдвое меньше, чем для квадратных.

Формулу (21.162) используют для расчета на устойчивость стенок балок, находящихся под действием касательных напряжений, а также для расчета обшивки переборок при действии касательных усилий в их плоскости.

Рассмотренные в данном параграфе основные решения задач устойчивости изотропных прямоугольных пластин не охватывают всех встречающихся на практике случаев. В настоящее время получено большое число решений при различных граничных условиях на контуре и законах изменения нагрузки. Наиболее полно эти решения представлены в справочнике [51], который и рекомендуется для практических расчетов. Для приближенного решения задач устойчивости пластин в более сложных случаях, которые не вошли в справочную литературу, можно использовать методы Бубнова — Галеркина, Ритца и др. (см. § 21.6).

Влияние отступлений от закона Гука на устойчивость пластин. Полученные выше формулы для расчета пластин на устойчивость справедливы только в пределах применимости закона Гука. Например, при сжатии стальной пластины в направлении длинных кромок формула (21.143) применима, если $\sigma_э \leqslant \sigma_{пц}$, где $\sigma_{пц}$ — предел пропорциональности материала пластины. Из этого следует, что отношение ширины пластины к ее толщине должно удовлетворять условию

$$b/t \geqslant 100\sqrt{80/\sigma_{пц}}. \qquad (21.163)$$

При сжатии пластин вдоль коротких кромок ($b \gg a$), как это следует из формулы (21.144), должно выполняться условие

$$a/t \geqslant 100\sqrt{20b/\sigma_{пц}}. \qquad (21.164)$$

Для мягкой судостроительной стали при $\sigma_{пц} = 200$ МПа из последних формул получим, что $b/t \geqslant 63$ и $a/t \geqslant 31{,}5$. Первое условие относится к продольной, а второе — к поперечной системе набора.

При поперечной системе набора условие (21.164), как правило, выполняется. В случае продольной системы набора условие (21.163) не всегда выполняется, а учет отступлений от закона Гука может дать некоторую поправку к величине эйлеровых напряжений.

Наметим путь решения задачи об устойчивости пластин за пределами применимости закона Гука.

В § 20.3 было показано, как усложняется решение задачи об устойчивости стержней в упругопластической области. Исследование устойчивости пластин за пределом пропорциональности оказывается более трудным, поскольку в отличие от стержней в каждом слое пластины, параллельном ее срединной плоскости, образуется плоское напряженное состояние.

Строгое исследование устойчивости пластин в упругопластической области может быть выполнено методами теории пластичности с привлечением основных физических уравнений, записанных для плоского напряженного состояния (см. § 4.5, 4.6). Эти уравнения, введенные в теорию изгиба пластин вместо уравнений закона Гука, дадут возможность получить уравнение устойчивости пластин за пределом пропорциональности материала и затем определить значения критических напряжений [51, т. 2]. Отметим, что при таком подходе исследование устойчивости изотропных пластин в упругопластической области сводится к задаче об устойчивости в упругой области ортотропной пластины с различными жесткостями на изгиб в двух направлениях и на кручение. Соотношение между жесткостями ортотропной пластины зависит от того, в какой мере напряжения, вызывающие потерю устойчивости, превзошли предел пропорциональности.

В ряде случаев отношение между жесткостями можно установить приближенно. Если допустить, что влияние отступлений от закона Гука по всем направлениям одинаково, то в дифференциальное уравнение устойчивости пластины вместо D надо ввести значение жесткости, равное φD, где φ — коэффициент, учитывающий отступления от закона Гука и определяемый так же, как и при одноосном напряженном состоянии (см. § 20.3). Тогда, очевидно, между критическими и эйлеровыми напряжениями будет справедлива зависимость (20.43), в чем нетрудно убедиться, меняя в формулах (21.140) и (21.141) изгибную жесткость D на φD. Указанное допущение приводит к занижению критических напряжений.

Для пластин, сжатых в одном направлении, можно сделать другое крайнее допущение и считать, что пластина в направлении сжатия находится в пластической стадии как совокупность балок-полосок с изгибной жесткостью $D_1 = \varphi D$, а в перпендикулярном направлении представляет совокупность балок-полосок, находящихся в упругой стадии и имеющих изгибную жесткость $D_2 = D$. Тогда вместо дифференциального уравнения устойчивости (21.133) при сжатии пластины вдоль оси x усилиями T_1 (см. рис. 21.17) можно получить

$$\varphi D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + D\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + T_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

где D_3 — приведенная жесткость ортотропной пластины (см. § 21.5). По принятому допущению значение D_3 лежит в пределах $\varphi D < D_3 < D$. Приближенно часто принимают $D_3 = \sqrt{\varphi}\,D$.

Для свободно опертой пластины из последнего дифференциального уравнения при указанном значении D_3, приняв выражение для прогиба в виде ряда (21.134), вместо формул (21.140) и (21.141) соответственно получим

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\varphi}\;4\pi^2 D/(b^2 t); \quad \sigma_{кр} = \pi^2 D\left(\sqrt{\varphi} + \gamma^2\right)^2/(a^2 t).$$

Сравнивая эти формулы с формулами (21.140) и (21.141), найдем для критических напряжений следующие формулы для продольной и поперечной систем набора соответственно:

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\varphi}\,\sigma_э; \quad \sigma_{кр} = \left[(\sqrt{\varphi} + \gamma^2)/(1+\gamma^2)\right]^2\sigma_э.$$

Сравнение последних формул для пластин с аналогичной формулой (20.43) для стержней показывает, что влияние отступлений от закона Гука для пластин оказывается меньшим.

Так как при расчете прочности связей корпуса, как правило, не допускается переход напряжений за предел текучести материала, а до предела текучести коэффициент φ мало отличается от единицы, при напряжениях, меньших предела текучести, отступления от закона Гука в практике расчетов устойчивости пластин не учитываются.

§ 21.8. Устойчивость сжатых пластин, подкрепленных ребрами жесткости

Задача об устойчивости сжатых пластин, подкрепленных ребрами жесткости, представляет для строительной механики корабля значительный практический интерес, поэтому при расчетах судовых конструкций необходимо, во-первых, установить расстояние между ребрами жесткости судовых перекрытий, во-вторых, определять ту необходимую изгибную жесткость, которую должны иметь ребра, чтобы служить для пластин жесткими опорами, и, в-третьих, выяснить, как влияет жесткость кручения ребер на устойчивость пластин.

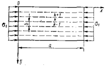


Рис. 21.22

Устойчивость пластин, подкрепленных продольными ребрами жесткости (рис. 21.22). Пусть прямоугольная свободно опертая на контуре пластина подкреплена продольными ребрами жесткости и загружена сжимающими равномерно распределенными напряжениями σ_1. В таких условиях обычно находится участок сжатого

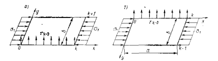


Рис. 21.23

при общем изгибе палубного перекрытия между бимсами при продольной системе набора.

Рассмотрим одно поле пластины шириной b, заключенное между k-м и $(k+1)$-м ребрами жесткости. Направим ось x вдоль k-го ребра, а ось y — как показано на рис. 21.23, *а*. Дифференциальное уравнение устойчивости рассматриваемого поля следующее:

$$D\nabla^2\nabla^2 w + \sigma_1 t\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \qquad (21.165)$$

Ненулевые решения уравнения (21.165) разыскиваем в виде

$$w_k = f_n^{(k)}(y)\sin n\pi x/a, \qquad (21.166)$$

удовлетворив при этом условия свободного опирания на сторонах $x=0$; a. Подставляя выражение (21.166) в уравнение (21.165) так же, как и в § 21.7, найдем функцию $f_n^{(k)}(y)$:

$$f_n^{(k)}(y) = A_n^{(k)}\operatorname{ch}\alpha_n y + B_n^{(k)}\operatorname{sh}\alpha_n y + C_n^{(k)}\cos\beta_n y + D_n^{(k)}\sin\beta_n y, \qquad (21.167)$$

где

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}\sqrt{1+\frac{a}{n\pi}\sqrt{\frac{\sigma_1 t}{D}}}; \quad \beta_n = \frac{n\pi}{a}\sqrt{\frac{a}{n\pi}\sqrt{\frac{\sigma_1 t}{D}}-1}. \qquad (21.168)$$

Произвольные постоянные в выражении (21.167) должны быть определены из условий совместности деформаций рассматриваемого поля пластины с соседними полями и подкрепляющими ребрами жесткости. Для удобства дальнейших вычислений выразим произвольные постоянные $A_n^{(k)}$, $B_n^{(k)}$, $C_n^{(k)}$ $D_n^{(k)}$ через значения функции $f_n^{(k)}(y)$ и ее вторых производных на линиях расположения ребер, обозначив эти значения через f_k и M_k соответственно на k-м ребре жесткости. Тогда выражение (21.167) для участка пластины между k-м и $(k+1)$-м ребрами жесткости нетрудно привести к виду

$$f_n^{(k)}(y) = f_k\theta_n(b-y) + M_k\psi_n(b-y) + f_{k+1}\theta_n(y) + M_{k+1}\psi_n(y), \qquad (21.169)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \theta_n(y) &= \frac{1}{\alpha_n^2+\beta_n^2}\left(\beta_n^2\frac{\operatorname{sh}\alpha_n y}{\operatorname{sh}\alpha_n b} + \alpha_n^2\frac{\sin\beta_n y}{\sin\beta_n b}\right); \\ \psi_n(y) &= \frac{1}{\alpha_n^2+\beta_n^2}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha_n y}{\operatorname{sh}\alpha_n b} - \frac{\sin\beta_n y}{\sin\beta_n b}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (21.170)$$

Для участка пластины между k-м и $(k-1)$-м ребрами жесткости (рис. 21.23, *б*) аналогично (21.166) и (21.169) можно получить

$$\left.\begin{aligned} w_{k-1} &= f_n^{(k-1)}(y)\sin n\pi x/a; \\ f_n^{(k-1)}(y) &= f_k\theta_n(b-y) + M_k\psi_n(b-y) + \\ &+ f_{k-1}\theta_n(y) + M_{k-1}\psi_n(y). \end{aligned}\right\} \qquad (21.171)$$

Составим условие сопряжения соседних участков пластины на k-м ребре и дифференциальное уравнение сложного изгиба k-го ребра жесткости (при $y=0$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w_k}{\partial y}(0) &= -\frac{\partial w_{k-1}}{\partial y}(0); \\ EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(0) + \sigma_1 F\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0) &= r_{k-0} + r_{k+0}, \end{aligned}\right\} \qquad (21.172)$$

где EI — изгибная жесткость поперечного сечения ребра жесткости (с присоединенным пояском); F — площадь поперечного сечения ребра жесткости; r_{k-0}, r_{k+0} — давление на k-е ребро жесткости со стороны участков пластины, расположенных соответственно между k-м и $(k-1)$-м и между k-м и $(k+1)$-м ребрами жесткости.

Подставляя в условия (21.172) выражения (21.166), (21.169), (21.171) и используя формулу (21.33) для определения давлений r_{k-0} и r_{k+0} на ребро жесткости, получаем

$$\left.\begin{aligned} &2f_k\theta_n'(b) + 2M_k\psi_n'(b) - (f_{k+1}+f_{k-1})\theta_n'(0) - \\ &\quad - (M_{k+1}+M_{k-1})\psi_n'(0) = 0; \\ &\left[\frac{n^2\pi^2}{Da^2}(n^2\pi^2EI/a^2 - \sigma_1F) - 2\theta_n'''(b)\right]f_k - \\ &\quad - 2M_k\psi_n'''(b) + (f_{k+1}+f_{k-1})\theta_n'''(0) + \\ &\quad + (M_{k+1}+M_{k-1})\psi_n'''(0) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (21.173)$$

Условия (21.173) можно составить для каждого ребра жесткости и получить систему однородных уравнений с неизвестными значениями f_k и M_k. Эта система уравнений аналогична системе (20.53) и может быть решена в конечных разностях. Ненулевые решения системы уравнений (21.173) будем искать в виде

$$f_k = f\sin kj\pi/(g+1); \quad M_k = M\sin kj\pi/(g+1), \qquad (21.174)$$

где f и M — некоторые постоянные; g — число ребер жесткости; j — целое число, лежащее в пределах $1 \leqslant j \leqslant g$. Искомое решение удовлетворяет условиям свободного опирания пластины на жесткие опоры при $k=0$ и $k=g+1$, т. е. $f_0 = M_0 = f_{g+1} = M_{g+1} = 0$.

Подставляя (21.174) в систему (21.173) и учитывая, что

$$\sin\frac{(k+1)j\pi}{g+1} + \sin\frac{(k-1)j\pi}{g+1} = 2\sin\frac{kj\pi}{g+1}\cos\frac{j\pi}{g+1},$$

получаем

$$\left[\cos\frac{j\pi}{g+1}\theta_n'(0) - \theta_n'(b)\right]f + \left[\cos\frac{j\pi}{g+1}\psi_n'(0) - \psi_n'(b)\right]M = 0;$$

$$\left[\cos\frac{j\pi}{g+1}\theta_n'''(0) - \theta_n'''(b) + \frac{n^2\pi^2}{2Da^2}\left(EI\frac{n^2\pi^2}{a^2} - \sigma_1F\right)\right]f +$$
$$+ \left[\cos\frac{j\pi}{g+1}\psi_n'''(0) - \psi_n'''(b)\right]M = 0.$$

Приравнивая нулю определитель этой системы уравнений и учитывая выражения (21.170), можно найти уравнение устойчивости в таком виде:

$$EI = (\sigma_1a^2/\pi^2)(F/n^2 + bt\Psi_g), \qquad (21.175)$$

где

$$\Psi_g = \frac{2\pi^2D}{\sigma_1a^2t}\left(\frac{\gamma}{n\pi}\right)^4\frac{u_nv_n(u_n^2+v_n^2)\chi_{jn}\Phi_{jn}}{\chi_{jn}u_n\sin v_n - \Phi_{jn}v_n\operatorname{sh}u_n}. \qquad (21.176)$$

Здесь

$$\gamma = a/b; \quad u_n = \alpha_nb; \quad v_n = \beta_nb;$$
$$\chi_{jn} = \cos j\pi/(g+1) - \operatorname{ch}u_n; \quad \Phi_{jn} = \cos j\pi/(g+1) - \cos v_n.$$

По формуле (21.175) при заданном значении сжимающего напряжения σ_1 можно определить необходимый момент инерции подкрепляющих ребер жесткости. Значения чисел n и j надо выбирать так, чтобы момент инерции I был наибольшим. Обычно наибольшее значение I получается при $j = n = 1$.

Существует критическое значение момента инерции поперечного сечения ребер жесткости, при котором ребра являются жесткими опорами для пластин. Увеличение момента инерции сверх критического значения не приводит к повышению устойчивости пластин. Для определения критического значения момента инерции в формулах (21.175) и (21.176) необходимо принять напряжения σ_1 равными эйлеровым напряжениям для пластины размерами a и b, свободно опертой на жесткий контур, т. е. считать ребра абсолютно жесткими.

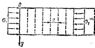


Рис. 21.24

Условие устойчивости отдельного ребра можно записать в виде (21.175), положив $\Psi_g = 1$ и $n = 1$. При достаточно большом числе ребер, характерном для судовых пластин, функция Ψ_g близка к единице. Поэтому условие устойчивости (21.175) приближенно можно записать в виде

$$EI = (\sigma_1a^2/\pi^2)(F + bt).$$

Последнее условие при заданном значении сжимающих напряжений позволяет вычислить необходимую жесткость продольных подкрепляющих ребер.

Расстояние между ребрами определяют из условия устойчивости пластины между ребрами жесткости по формулам (21.140) или (21.143).

Устойчивость сжатых пластин, подкрепленных поперечными ребрами жесткости (рис. 21.24). Решение задачи об устойчивости сжатой свободно опертой пластины, подкрепленной поперечным набором, можно получить аналогично предыдущему. Дифференциальное уравнение устойчивости одного участка пластины запишется в виде (21.165). Разыскивая ненулевые решения этого уравнения в пределах каждого участка в форме $w = f_m(x)\sin\pi y/b$ и составляя условия сопряжения двух соседних участков и условия совместной работы ребер и пластины, можно получить точное уравнение устойчивости пластины, подкрепленной поперечными ребрами жесткости.

На практике расстояние между ребрами a намного меньше ширины пластины b. В этом случае легко свести задачу к задаче об устойчивости перекрытия и получить ее приближенное решение в виде (20.73). Пластину можно рассматривать как совокупность продольных балок-полосок единичной ширины с изгибной жесткостью D, опертых на поперечные ребра с изгибной жесткостью EI. Если в уравнении устойчивости перекрытия (20.73) положить $EI = D$, $b = 1$, $I_б = I$ и заменить ширину перекрытия L на ширину пластины b, то получим уравнение устойчивости пластины в виде

$$EI = Db\,(b/a)^3\,\chi_j(\lambda), \tag{21.177}$$

где $\chi_j(\lambda)$ — функция, определяемая формулой (20.58); λ — параметр, равный для балки-полоски [см. формулу (20.60)]

$$\lambda = \sigma_1 a^2 t/(\pi^2 D). \tag{21.178}$$

Так как поперечные ребра жесткости предполагаются свободно опертыми по концам и не учитываются отступления от закона Гука для пластины, в уравнении (20.73) при выводе (21.177) было принято $\mu_1 = \pi$, $\varphi = 1$.

Уравнение устойчивости пластины (21.177) определяет необходимый момент инерции поперечных ребер жесткости. Используют его так же, как и уравнение устойчивости перекрытия (20.73).

Существует критическое значение момента инерции подкрепляющих ребер жесткости, при котором они, подобно абсолютно жестким, не изгибаются и эйлеровы напряжения пластины достигают максимального значения. Чтобы определить критический момент инерции, в формуле (21.177) необходимо положить $\lambda = 1$.

Расстояние между ребрами жесткости a может быть вычислено с помощью формулы (21.142) при заданных эйлеровых напряжениях $\sigma_э = \sigma_1$.

Таким образом, рассмотренные выше решения позволяют определить необходимую жесткость ребер и расстояние между ними при продольной и поперечной системах набора.

Влияние жесткости кручения ребер на устойчивость пластин. В решениях (21.175) и (21.177) об устойчивости пластин, подкрепленных ребрами жесткости, предполагалось, что ребра жесткости не препятствуют повороту опорных кромок пластин и не создают заделки на контуре. В действительности при потере пластиной устойчивости ребра жесткости, испытывая деформацию стесненного кручения, будут поворачиваться на те же углы, что опорные кромки пластин, и создавать пластине заделку. Это повышает устойчивость пластины. Решения задач об устойчивости пластин с учетом жесткости кручения ребер было получено А. И. Масловым (1947 г.), А. А. Курдюмовым (1947 г.), В. А. Постновым (1953 г.).

Полученные решения показывают, что жесткость кручения ребер в судовых конструкциях может увеличивать эйлеровы напряжения до 30 %.

При практических расчетах, делая ошибку в безопасную сторону, обычно не учитывают влияние жесткости кручения подкрепляющих ребер, считая их свободно опертыми по контуру. Этим компенсируется уменьшение эйлеровых напряжений, которое может происходить за счет отступлений от закона Гука.

§ 21.9. Приближенные методы решения задач устойчивости пластин

При сложной геометрии пластины, произвольных граничных условиях и действии в срединной плоскости совокупности усилий T_1, T_2, S, изменяющихся в поле пластины, аналитическое решение дифференциального уравнения устойчивости (21.133) затруднительно. В этих случаях решение задач устойчивости пластин получают приближенными численными методами Бубнова — Галеркина, Ритца, МКЭ, методом сеток и др. Ниже применительно к указанным задачам будут изложены метод Ритца, МКЭ и метод сеток.

Будем предполагать, что сжимающие и сдвигающие усилия T_1, T_2, S, действующие в срединной плоскости пластины, изменяются в поле пластины пропорционально одному параметру:

$$T_1 = T_0 f_1(x,\ y);\quad T_2 = T_0 f_2(x,\ y);\quad S = T_0 f_3(x,\ y). \tag{21.179}$$

Здесь T_0 — параметр, имеющий размерность погонных усилий; $f_i(x,\ y)$ — законы изменения цепных усилий в поле пластины, которые считаются далее заданными.

Вообще говоря, законы $f_i(x,\ y)$ в выражениях (21.179) находятся в каждом конкретном случае решением плоской задачи теории упругости при соответствующих граничных условиях [см. гл. 6, а также первое уравнение (21.40) и соотношения (21.23) для плоского напряженного состояния пластины].

Метод Ритца. Следуя этому методу, необходимо задать форму потери устойчивости пластины (ее прогиб в отклоненном от исходного положения равновесия) и воспользоваться затем уравнениями метода Ритца в виде (21.115) и выражением (21.113) для формы потери устойчивости. В зависимостях (21.115) $П$ представляет собой потенциальную энергию изгиба пластины (2.117) в отклоненном положении равновесия, а U является силовой функцией усилий T_1, T_2, S, вычисляемой как работа указанных усилий на дополнительных перемещениях, которые вызываются деформацией изгиба пластины.

Если вырезать из пластины бесконечно малый элемент с размерами в плане dx и dy, то работа погонных усилий T_1, T_2, S, приложенных к граням рассматриваемого элемента, будет равна

$$\delta U = (T_1 \varepsilon_{0x} + T_2 \varepsilon_{0y} + S\gamma_{0xy})\,dx\,dy,$$

где ε_{0x}, ε_{0y}, γ_{0xy} — деформации срединной плоскости пластины, вызванные изгибом пластины, которые определяются формулами (21.2) при $u_0 = v_0 = 0$. Поэтому последнее выражение можно записать так:

$$\delta U = \frac{1}{2}\left[T_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2S\,\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y} + T_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Интегрируя это равенство по всей площади Ω срединной плоскости пластины, получаем

$$U=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}\left[T_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2S\,\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}+T_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy. \qquad (21.180)$$

Здесь сжимающие усилия T_1, T_2 считаются положительными, как это принято в задачах устойчивости.

Подставляя теперь форму потери устойчивости (21.113) в выражения (21.117) и (21.180), на основании соотношений (21.115) с учетом (21.179) находим

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(k_{ijmn}-s_{ijmn})\,w_{ij}=0, \qquad (21.181)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &m=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty;\quad n=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty;\\ &s_{ijmn}=T_0\iint\limits_{\Omega}\left[f_1\varphi_i'\psi_j\varphi_n'\psi_m+f_2\varphi_i\psi_j'\varphi_n\psi_m'+\right.\\ &\qquad\left.+f_3\left(\varphi_i'\psi_j\varphi_n\psi_m'+\varphi_i\psi_j'\varphi_n'\psi_m\right)\right]dx\,dy;\\ &k_{ijmn}=D\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\varphi_i''\psi_j+\varphi_i\psi_j''\right)\left(\varphi_n''\psi_m+\varphi_n\psi_m''\right)+\right.\\ &\qquad\left.+2(1-\mu)\left(\varphi_i'\psi_j'\varphi_n'\psi_m'-\varphi_i''\psi_j\varphi_n\psi_m''-\varphi_i\psi_j''\varphi_n''\psi_m\right)\right]dx\,dy. \end{aligned}\right\} \qquad (21.182)$$

В формулах (21.182) для простоты записи не указана зависимость функций $\varphi_n(x)$, $\psi_m(y)$, $f_i(x, y)$ от аргументов x и y.

Если пластина теряет устойчивость, то однородная система уравнений (21.181) должна иметь ненулевые решения $w_{ij}\neq 0$, а определитель этой системы должен обращаться в нуль:

$$\det\|(k_{ijmn}-s_{ijmn})\|=0 \qquad (21.183)$$

Наименьшее значение $T_0=T_{\min}$ как корня уравнения (21.183) определяет величину эйлеровых нагрузок (21.179). Форму потери устойчивости вычисляют по выражению (21.113) после подстановки туда ненулевых значений коэффициентов w_{mn}, найденных из системы (21.181) при $T_0=T_{\min}$.

При практических расчетах в выражении (21.113) удерживают конечное число членов N_0. Тогда условие (21.183) дает для T_0 алгебраическое уравнение степени N_0, а система (21.181) превращается в систему (N_0-1) линейных неоднородных уравнений при фиксации численного значения одного из коэффициентов w_{ij} (чаще всего принимают $w_{11}=1$). При конечном числе членов получается, как правило, приближенное решение, точность которого увеличивается с ростом числа членов ряда (21.113).

Как и в задачах устойчивости стержневых систем, метод Ритца дает завышенное значение эйлеровой нагрузки. Это объясняется тем, что, задавая форму потери устойчивости конечным числом членов ряда (21.113), мы сужаем для нее класс допустимых функций. Тем самым на пластину накладываются дополнительные связи, которые увеличивают ее жесткость и, как следствие, эйлерову нагрузку. Точное решение по методу Ритца можно получить только в том случае, если конечное число членов ряда (21.113) точно описывает форму потери устойчивости пластины.

Метод конечных элементов. Как и в задачах поперечного изгиба, представим пластину в виде совокупности конечных элементов, взаимодействующих между собой соответствующим образом. При потере устойчивости пластина приобретает некоторый изгиб $w(x, y)$ и каждый конечный элемент будет также изгибаться.

Полная энергия деформирования конечного элемента определяется выражением

$$Э=П-U, \qquad (21.184)$$

где справедливы соотношения (21.117), (21.180), если Ω — область, занятая срединной плоскостью конечного элемента.

Далее будем рассматривать прямоугольный конечный элемент (см. рис. 21.16), аппроксимируя его прогиб выражениями (21.120) и (21.121) в зависимости от узловых перемещений q_i. Обобщенные узловые силы R_i, соответствующие обобщенным узловым перемещениям q_i, с учетом (21.184) найдем

$$R_i=\frac{\partial Э}{\partial q_i}=\frac{\partial(П-U)}{\partial q_i}. \qquad (21.185)$$

Последовательно подставляя выражения (21.117), (21.180), (21.179), (21.120) в соотношения (21.185), получаем зависимость

$$R_i=\sum_{j=1}^{12}(k_{ij}-s_{ij})\,q_j,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ 12, \qquad (21.186)$$

где k_{ij} определяются формулами (21.123) и образуют матрицу жесткости (21.124) конечного элемента;

$$s_{ij}=T_0\int\limits_0^{a_0}\int\limits_0^{b_0}\left[f_1\frac{\partial Э_i}{\partial x}\frac{\partial Э_j}{\partial x}+f_2\frac{\partial Э_i}{\partial y}\frac{\partial Э_j}{\partial y}+f_3\left(\frac{\partial Э_i}{\partial x}\frac{\partial Э_j}{\partial y}+\frac{\partial Э_j}{\partial x}\frac{\partial Э_i}{\partial y}\right)\right]dx\,dy. \qquad (21.187)$$

Коэффициенты s_{ij} образуют так называемую матрицу $[S]$ геометрических жесткостей, поскольку она учитывает влияние изменения геометрии пластины на ее напряженное состояние в отклоненном положении. Указанная матрица имеет вид

$$[S]=\begin{bmatrix} s_{1\,1} & s_{1\,2} & \ldots & s_{1\,12}\\ s_{2\,1} & s_{2\,2} & \ldots & s_{2\,12}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ s_{12\,1} & s_{12\,2} & \ldots & s_{12\,12} \end{bmatrix}. \qquad (21.188)$$

Компоненты матрицы геометрических жесткостей (21.188) вычисляют по формулам (21.187) с учетом выражений (21.121) и заданных законов изменения $f_i=f_i(x, y)$ усилий (21.179). В связи с большим разнообразием последних вычислить интегралы

(21.187) в общем виде невозможно, поэтому коэффициенты (21.187) определяют, аппроксимируя функции f_i в пределах конечного элемента. В справочнике (51, т. 2] приведены формулы для s_{ij}, полученные для линейного изменения функций f_1, f_2 вдоль одной из осей и постоянного значения f_3. Эти формулы довольно громоздки и в настоящем учебнике не приводятся.

Если воспользоваться обозначениями (21.124), (21.125), (21.127), (21.188), то зависимости (21.186) можно получить в компактной матричной форме:

$$\{R\} = ([K] - [S])\{q\}. \qquad (21.189)$$

Условия равновесия узлов пластины в отклоненном положении запишутся в виде уравнений (21.132) при $P_{in}^{(m)} = 0$, поскольку поперечная нагрузка в задачах устойчивости пластин отсутствует. Подставляя в (21.132) выражение (21.186) или (21.189), получаем $3N_0$ однородных уравнений относительно неизвестных обобщенных перемещений $\bar{q}_{in}^{(m)}$ с общим числом $3N_0$, где N_0 — число узлов пластины. Приравнивая нулю определитель полученной системы, составляем уравнение для отыскания T_0, меньший корень которого будет давать значения эйлеровых нагрузок (21.179). Форма потери устойчивости характеризуется значениями прогибов пластины в узлах конечных элементов. Эти значения находятся из указанной выше системы $3N_0$ уравнений с точностью до постоянного множителя, определяемого обычно так, чтобы наибольшая ордината формы потери устойчивости равнялась единице.

Как и метод Ритца, МКЭ дает завышенное значение эйлеровых нагрузок.

Отметим, что алгебраические уравнения для отыскания T_0 в МКЭ имеют весьма большие степени и для их решения используются специальные приемы [40]. Расчет в целом из-за большого объема вычислений, как правило, выполняется на ЭВМ по специально разработанным программам.

Метод сеток. При решении задач устойчивости пластин методом сеток срединная плоскость пластины покрывается сеткой. За основные неизвестные принимают прогибы пластины в узлах сетки, а дифференциальное уравнение устойчивости (21.133) и заданные граничные условия заменяют конечно-разностными аналогами. Как было показано в § 9.3 [см. формулу (9.57)], для прямоугольной сетки с размерами h_1 и h_2 в направлении осей x и y соответственно производные функции $w(x, y)$, входящие в уравнение (21.133) в узле сетки с номером ki, будут равны

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{ki} = \frac{\Gamma_{20}(w_{ki})}{h_1^2}; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{ki} = \frac{\Gamma_{02}(w_{ki})}{h_2^2};\\
&\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{ki} = \frac{\Gamma_{11}(w_{ki})}{4h_1h_2}; \quad \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_{ki} = \frac{\Gamma_{40}(w_{ki})}{h_1^4};\\
&\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_{ki} = \frac{\Gamma_{04}(w_{ki})}{h_2^4}; \quad \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{ki} = \frac{\Gamma_{22}(w_{ki})}{h_1^2h_2^2},
\end{aligned}\right\} \qquad (21.190)$$

где $\Gamma_{nj}(w_{ki})$ — конечно-разностные операторы в узле ki сетки с координатами $x = x_k$, $y = y_i$, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma_{20}(w_{ki}) = w_{k+1,i} - 2w_{ki} + w_{k-1,i};\\
&\Gamma_{11}(w_{ki}) = w_{k+1,i+1} - w_{k+1,i-1} - w_{k-1,i+1} + w_{k+1,i-1};\\
&\Gamma_{02}(w_{ki}) = w_{k,i+1} - 2w_{ki} + w_{k,i-1};\\
&\Gamma_{40}(w_{ki}) = w_{k+2,i} - 4w_{k+1,i} + 6w_{ki} - 4w_{k-1,i} + w_{k-2,i};\\
&\Gamma_{22}(w_{ki}) = w_{k+1,i+1} + w_{k+1,i-1} + w_{k-1,i+1} + w_{k-1,i-1} +\\
&\qquad + 4w_{ki} - 2(w_{k+1,i} + w_{k-1,i} + w_{k,i+1} + w_{k,i-1});\\
&\Gamma_{04}(w_{ki}) = w_{k,i+2} - 4w_{k,i+1} + 6w_{ki} - 4_{k,i-1} + w_{k,i+2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (21.191)$$

Относительная погрешность вычисления простых и смешанных производных по x, y составляет

$$\Delta_x = O(h_1/c_1)^2; \quad \Delta_y = O(h^2/c_2); \quad \Delta_{xy} = O(h_1h_2/c_1c_2). \qquad (21.192)$$

Здесь c_1, c_2 — характерные размеры пластины вдоль осей x, y соответственно.

Заменяя производные в дифференциальном уравнении устойчивости пластины (21.133) их конечно-разностными зависимостями (21.190) в ki-м узле сетки, с учетом (21.179) получаем

$$\gamma^2\Gamma_{40}(w_{ki}) + 2\Gamma_{22}(w_{ki}) + \frac{1}{\gamma^2}\Gamma_{04}(w_{ki}) +$$
$$+ \lambda\left[2\gamma f_{1ki}\Gamma_{20}(w_{ki}) - f_{3ki}\Gamma_{11}(w_{ki}) + \frac{2}{\gamma} f_{2ki}\Gamma_{02}(w_{ki})\right] = 0, \qquad (21.193)$$

где

$$\gamma = h_2/h_1; \quad \lambda = T_0h_1h_2/(2D); \quad f_{jki} = f_j(x_k, y_i). \qquad (21.194)$$

В общем случае уравнения (21.193) с учетом (21.191) и (21.194) составляют для всех узлов сетки, включая и сточный контур. Помимо неизвестных w_{ki} во внутренних и граничных точках области в систему уравнений (21.193) войдут также значения w_{ki} в двух внешних слоях законтурных точек. Для определения этих законтурных значений используют граничные условия (по два в каждой точке сеточного контура), записанные в конечно-разностной форме. Таким образом, значения прогибов пластины в узлах сетки w_{ki} определяются совместной системой однородных уравнений (21.193) и конечно-разностных уравнений, вытекающих из граничных условий. Для того чтобы такая однородная система имела ненулевые решения $w_{ki} \neq 0$, необходимо приравнять нулю ее определитель. В результате получится алгебраическое степенное уравнение относительно параметра λ; меньший корень этого уравнения λ_{min} с учетом второй формулы (21.194) и выражений (21.179) позволит найти эйлерову нагрузку пластины. Форма потери устойчивости определяется значениями прогибов w_{ki} в узлах сетки, которые находятся из совместной системы (21.193) и конечно-разностных граничных уравнений при $\lambda = \lambda_{min}$.

Оценки погрешности (21.192) показывают, что для обеспечения точности порядка 5 % необходимо разбить пластину в каждом направлении на пять участков ($h_1/c_1 = h_2/c_2 = 1/5$). Даже при такой разбивке количество неизвестных w_{ki} оказывается более 20. Поэтому расчет пластин на устойчивость методом сеток приходится выполнять с применением ЭВМ.

Методом сеток целесообразно пользоваться при сложной конфигурации пластины и при задании усилий (21.179) *таблично*, графически или сложными аналитическими выражениями, когда вычисление матрицы геометрических жесткостей (21.187), (21.188) при МКЭ требует значительного объема вычислений.

§ 21.10. Изгиб пластин большого прогиба. Участие пластин, теряющих устойчивость, в восприятии сжимающей нагрузки

Напряженно-деформированное состояние пластин большого прогиба описывается полной системой уравнений Кармана (21.24). Аналитическое решение этой нелинейной системы затруднительно, в связи с чем на практике эта система может быть решена только приближенными методами: малого параметра, Ритца, Бубнова — Галеркина, сеток, МКЭ, Канторовича — Власова и др. [51, т. 2].

Первые решения нелинейных задач изгиба пластин по цилиндрической поверхности получены И. Г. Бубновым (1902 г.), которые применяют и сейчас для расчета прочности обшивки переборок.

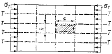


Рис. 21.25

К настоящему времени имеется довольно много частных решений уравнений Кармана для прямоугольных и круглых пластин. Значительное число конкретных результатов, доведенных до справочных таблиц, получено методом сеток М. С. Корнишиным. Как правило, пластины наружной обшивки корпуса судна, в частности наиболее нагруженные пластины днища, относятся к категории жестких, для расчета прочности которых используются зависимости § 21.4—21.6 и готовые справочные таблицы [51, т. 2]. Поэтому примеры решения уравнений Кармана (21.24) для гибких пластин при действии поперечной нагрузки здесь не приводятся.

Ниже мы рассмотрим очень важный случай нелинейного деформирования пластин, потерявших устойчивость, в составе сжатого судового перекрытия (как правило, палубного) с позиций теории Кармана. При этом наибольший интерес представляет определение нагрузок, которые воспринимают потерявшие устойчивость пластины в составе сжатого перекрытия. Этот вопрос возникает при расчете напряжений в связях корпуса при его общем изгибе.

Пусть пластины обшивки сжатого перекрытия (рис. 21.25) теряют устойчивость. При этом средние напряжения в обшивке равны σ_1, а напряжения в продольных ребрах жесткости (жестких

связях) $\sigma_{ж.\,с} = T/F$ [T — сила, действующая на продольное ребро; F — площадь поперечного сечения ребра жесткости (без присоединенного пояска)]. Сжимающая сила, приходящаяся на одну шпацию продольного набора, будет равна

$$T_0 = T + \sigma_1 bt = \sigma_{ж.\,с}F + \sigma_1 bt, \tag{21.195}$$

где t — толщина обшивки.

Если пластины устойчивы, то $\sigma_1 = \sigma_{ж.\,с}$ и напряжения в связях перекрытия распределены равномерно. При потере пластинами устойчивости напряжения в обшивке и ребрах жесткости различны: $\sigma_1 < \sigma_{ж.\,с}$. Это противоречит гипотезе плоских сечений, принятой при определении нормальных напряжений в перекрытии от общего изгиба корпуса, согласно которой эти напряжения в связях, равноудаленных от нейтральной оси поперечного сечения, одинаковы по значению. Для устранения этого противоречия пластины обшивки надо засчитывать в эквивалентный брус с меньшей площадью $b_{пр}t$, где $b_{пр}$ — некоторая *приведенная ширина пластины* в пределах шпации продольного набора. Тогда продольная сила может быть определена по формуле

$$T_0 = \sigma_{ж.\,с}(F + b_{пр}t) \tag{21.196}$$

в предположении, что нормальные напряжения в обшивке и продольных ребрах жесткости перекрытия одинаковы.

Сравнивая правые части равенств (21.195) и (21.196), получаем

$$b_{пр} = \varphi b; \quad \varphi = \sigma_1/\sigma_{ж.\,с}, \tag{21.197}$$

где φ является так называемым *редукционным коэффициентом*, для определения которого необходимо знать напряжения σ_1 в потерявших устойчивость пластинах.

Для вычисления напряжений σ_1 в потерявших устойчивость пластинах необходимо исследовать совместную работу настила перекрытия и подкрепляющего его набора, учитывая, что после потери устойчивости у пластин появляются изгибные деформации. С этой целью рассмотрим одну пластину, заключенную между балками набора сжатого палубного перекрытия (см. рис. 21.25). До потери пластиной устойчивости в продольных ребрах и пластине как в связях, практически одинаково расположенных от нейтральной оси поперечного сечения судна, будут действовать одинаковые сжимающие напряжения. После потери устойчивости пластина будет испытывать изгиб дополнительно к указанному равномерному напряженному состоянию. Если бы пластина была изолированной, то при потере устойчивости ее противоположные кромки стремились бы сблизиться и оказались бы искривленными, как показано на рис. 21.25. В действительности благодаря взаимодействию с соседними полями настила кромки рассматриваемой пластины искривляться не могут. Поэтому пластина после потери устойчивости будет изгибаться при сохранении прямолинейности кромок, что приведет к появлению дополнительных напряжений по ее кромкам.

Таким образом, потерявшая устойчивость пластина в составе сжатого перекрытия будет испытывать плоское напряженное состояние и изгиб. Поэтому для исследования ее напряженного состояния в общем случае необходимо использовать уравнения Кармана (21.24) при отсутствии поперечной нагрузки $[p(x, y) = 0]$. Граничными условиями для функции напряжений будут условия неискривляемости кромок и совместности их деформаций с продольными ребрами. Если пренебречь жесткостью ребер на кручение, то с ошибкой в безопасную сторону пластину в пределах одного поля можно считать на ребрах свободно опертой, что и определяет граничные условия для прогиба.

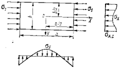


Рис. 21.26

Относя пластину к осям координат в соответствии с рис. 21.26 и обозначая средние сжимающие напряжения в пластине через σ_1, будем искать решение уравнений Кармана (21.24) в таком виде:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos(2m-1)\pi\xi \cos(2n-1)\pi\eta; \tag{21.198}$$

$$F = -\frac{\sigma_1 y^2}{2} + \frac{Eb^4 t}{16\pi^4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{mn} \cos 2m\pi\xi \cos 2n\pi\eta}{(n^2 + m^2\gamma^2)^2}, \tag{21.199}$$

где a_{mn} и b_{mn} — неизвестные коэффициенты рядов для прогиба и функции напряжений.

Принятое выражение для прогиба (21.198) удовлетворяет условиям свободного опирания кромок пластины. Функция напряжений должна отвечать следующим граничным условиям равновесия на кромках и условиям неискривляемости кромок $x = \pm 0{,}5a$, $y = \pm 0{,}5b$:

$$\int_{-0,5a}^{0,5a} \sigma_y\,dx = \int_{-0,5a}^{0,5a} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,dx = 0, \quad \int_{-0,5b}^{0,5b} \sigma_x\,dy = \int_{-0,5b}^{0,5b} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,dy = -\sigma_1 b; \tag{21.200}$$

$$u_0^* = \int_0^{0,5a} \frac{\partial u_0}{\partial x}\,dx = \mathrm{const}; \quad v_0^* = \int_0^{0,5b} \frac{\partial v_0}{\partial y}\,dy = \mathrm{const}. \tag{21.201}$$

Выполнение условий (21.200) при задании функции напряжений $F(x, y)$ в виде (21.199) легко проверяется непосредственной подстановкой.

Рассмотрим теперь условия (21.201) неискривляемости кромок. На основании зависимостей (21.2), (21.23) и закона Гука (21.17) имеем соотношения

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{0x} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right); \\ \varepsilon_{0y} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{21.202}$$

Если выразить $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ и $\frac{\partial v_0}{\partial y}$ из (21.202) и подставить эти производные в условия (21.201), то после интегрирования получим

$$u_0^* = -\frac{\sigma_1 a}{2E} - \frac{\pi^2}{16a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 (2m-1)^2; \tag{21.203}$$

$$v_0^* = \frac{\mu\sigma_1 b}{2E} - \frac{\pi^2}{16b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 (2n-1)^2; \tag{21.204}$$

Поскольку выражения (21.203) и (21.204) не зависят от координат x и y, условия (21.201) прямолинейности кромок выполняются.

Зависимость (21.203) определяет величину сближения сечений пластины $x = 0$ и $x = 0{,}5a$, равную сжатию подкрепляющих пластину ребер:

$$u_0^* = -\sigma_{ж.с}\, a/(2E). \tag{21.205}$$

Подставляя выражение (21.205) в формулу (21.203), получаем

$$\sigma_{ж.с} = \sigma_1 + \frac{E\pi^2}{8a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 (2m-1)^2. \tag{21.206}$$

Формула (21.206) устанавливает зависимость между средними напряжениями в пластине σ_1 и напряжениями в жестких связях $\sigma_{ж.с}$ через коэффициенты a_{mn}, характеризующие прогиб потерявшей устойчивость пластины.

Для определения a_{mn} необходимо сначала выразить b_{mn} через a_{mn} с помощью первого уравнения (21.24) и выражений (21.198), (21.199), а затем проинтегрировать второе уравнение (21.24) методом Бубнова — Галеркина при $p(x, y) = 0$. При этом будут получены нелинейные уравнения относительно a_{mn}.

Так, задавая прогиб w двумя членами ряда

$$w = (a_{11}\cos\pi\xi + a_{21}\cos 3\pi\xi)\cos\pi\eta, \tag{21.207}$$

из первого уравнения (21.24) получим для коэффициентов b_{mn} ряда (21.199) следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} &b_{00} = b_{31} = 0;\ b_{10} = \frac{1}{2}(a_{11} - 2a_{21})a_{11};\ b_{20} = -b_{11} = 4a_{11}a_{21}; \\ &b_{30} = 9a_{21}^2/2;\ b_{01} = -(a_{11}^2 + 9a_{21}^2)/2;\ b_{22} = a_{11}a_{21}. \end{aligned}\right\} \tag{21.208}$$

Если подставить функцию напряжений (21.199) с учетом (21.208) во второе уравнение Кармана (21.24), то при задании прогиба в виде (21.207) методом Бубнова — Галеркина можно получить систему двух кубических уравнений для определения a_{11} и a_{21}. После вычисления этих коэффициентов из уравнения (21.206) найдем средние напряжения σ_1 в пластине при известных напряжениях $\sigma_{ж.с}$.

Степень участия пластин в восприятии сжимающей нагрузки после потери устойчивости принято характеризовать редукционным коэффициентом $\varphi = \sigma_1/\sigma_{ж.с}$. Разделив соотношение (21.206) на $\sigma_{ж.с}$, получим

$$\varphi = 1 - \frac{\pi^2 E}{8a^2\sigma_{ж.с}} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(2m-1)^2. \qquad (21.209)$$

На рис. 21.27 представлена зависимость коэффициента φ от параметра $n = \sigma_{ж.с}/\sigma_э$, построенная на основании вычислений П. А. Соколова (1932 г.) по формуле (21.209) при сохранении

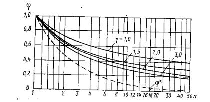


Рис. 21.27

в выражении для прогиба (21.198) трех членов ряда. Пунктирной линией обозначены значения редукционного коэффициента $\varphi^* = \sigma_э/\sigma_{ж.с} = 1/n$, предложенного И. Г. Бубновым для оценки степени участия пластин в восприятии сжимающей нагрузки после потери устойчивости. Из рисунка видно, что редукционный коэффициент φ стремится к редукционномукоэффициенту φ^* при возрастании отношения $\gamma = b/a$, т. е. редукционный коэффициент φ^* дает правильные результаты лишь для очень широких судовых пластин при поперечной системе набора.

С помощью графиков рис. 21.27 и первой формулы (21.197) можно определить приведенную ширину пластины $b_{пр}$, которая напряжена так же, как и жесткая связь, и воспринимает ту же суммарную нагрузку, что и потерявшая устойчивость пластина. Это позволяет вместо реальной пластины шириной b вводить в расчет некоторую эквивалентную ей пластину шириной $b_{пр}$. На основе формулы (21.209) и графиков рис. 21.27 разработаны практические рекомендации для вычисления φ и $b_{пр}$. На части

ширины пластины, непосредственно примыкающей к жестким связям, напряжения можно считать равными $\sigma_{ж.с}$, а в средней части — равными эйлеровым напряжениям $\sigma_э$ (см. рис. 21.26).

Для пластины, сжатой вдоль длинной стороны ($b < a$), к жестким связям могут быть отнесены части пластины шириной $0{,}22b$, примыкающие к продольным кромкам (рис. 21.28, *а*), а для пластины, сжатой вдоль короткой стороны ($b > a$), жесткими связями можно считать полоски шириной $0{,}22a$, примыкающие к продольным кромкам (рис. 21.28, *б*).

Указанный выше результат был получен П. Ф. Папковичем в результате обработки числовых данных П. А. Соколова методом

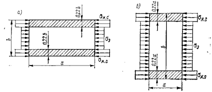


Рис. 21.28

наименьших квадратов. На основании рекомендаций П. Ф. Папковича о распределении сжимающих напряжений по ширине пластины из условий статической эквивалентности усилий, воспринимаемых пластиной, можно записать: при сжатии по направлению длинных сторон $\sigma_1 b = 0{,}44b\sigma_{ж.с} + 0{,}56b\sigma_э$, при сжатии по направлению коротких сторон $\sigma_1 b = 0{,}44a\sigma_{ж.с} + (b - 0{,}44a)\sigma_э$. Разделив обе части этих равенств на $b\sigma_{ж.с}$ и учитывая формулу (21.197), для случаев сжатия пластины по направлению длинных и коротких сторон соответственно получим

$$\varphi = 0{,}44 + 0{,}56\varphi^*; \qquad (21.210)$$

$$\varphi = \frac{0{,}44}{\gamma} + \left(1 - \frac{0{,}44}{\gamma}\right)\varphi^*. \qquad (21.211)$$

При практических расчетах вместо формул (21.210), (21.211) часто используют соответственно формулы

$$\varphi = 0{,}5\,(1 + \varphi^*); \qquad (21.212)$$

$$\varphi = 0{,}5\,(1 - \varphi^*)/\gamma + \varphi^*, \qquad (21.213)$$

которые перднолагают размеры участков пластины, относимых к жестким связям, равными 0,25 размера короткой стороны (вместо 0,22, рекомендованных П. Ф. Папковичем).

С погрешностью в безопасную сторону можно определять значения φ по приближенной формуле

$$\varphi = 1/\sqrt{n} = \sqrt{\sigma_э/\sigma_{ж.\,с.}} \qquad (21.214)$$

Приведенные выше формулы для редукционных коэффициентов дают близкие результаты и могут быть использованы при практических расчетах.

Таким образом, расчет сжатого судового перекрытия с пластинами, потерявшими устойчивость, сводится к определению редукционных коэффициентов φ, приведенной ширины пластины по формуле (21.197) и введению в рабочую площадь сжатого перекрытия пластин приведенной ширины $b_{пр}$ вместо реальной. Естественно, что до потери устойчивости пластинами их площадь должна засчитываться полностью ($\varphi = 1$).

На редукционные коэффициенты пластин оказывают влияние и начальные прогибы, на чем мы остановимся в следующем параграфе.

§ 21.11. Сложный изгиб пластин по цилиндрической поверхности, Определение цепных напряжений и редукционных коэффициентов

Многие судовые прямоугольные пластины, например пластины наружной обшивки днища и палубы при поперечной системе набора, листы обшивки переборок, имеют большое отношение сторон, одинаковые граничные условия вдоль длинных кромок и оказываются под действием нагрузки, которая в направлении длинных сторон не изменяется. В указанных условиях пластины с отношением сторон 2,5 и более на среднем по длине участке изгибаются по цилиндрической поверхности, что уже было обнаружено ранее для свободно опертой пластины (см. § 21.4).

Рис. 21.29

Рассмотрим пластину с отношением сторон $\gamma > 2{,}5$, на которую действуют поперечная нагрузка $p(x, y) = p(x)$ и нормальные усилия T_1, равномерно распределенные по длинной кромке (рис. 21.29). Если условия закрепления вдоль длинной кромки не меняются, то в средней части прогиб пластины $w(x, y)$ будет зависеть только от координаты x. Полагая во втором уравнении Кармана (21.24) $w = w(x)$ и учитывая, что производные от прогиба по y равны нулю, а также исключая функцию напряжений с помощью выражений (21.23), получаем

$$Dw^{IV} - T_1 w'' = p(x), \qquad (21.215)$$

где верхние индексы у прогиба w означают дифференцирование по x.

Основные зависимости (21.17), (21.18) и (21.20) при $T_2 = S = 0$, $w = w(x)$ принимают вид

$$T_1 = Et\varepsilon_{0x};\;\; M_1 = -Dw'';\;\; M_2 = \mu M_1;\;\; N_1 = -Dw''';\;\; N_2 = 0, \qquad (21.216)$$

а формулы (21.21) для неравных нулю напряжений — вид

$$\sigma_x = \sigma_{пл} + \frac{12M_1 z}{t^3};\quad \sigma_y = \frac{12\mu M_1 z}{t^3};\quad \sigma_{пл} = \frac{T_1}{t}, \qquad (21.217)$$

где $\sigma_{пл}$ — так называемые цепные напряжения в сечениях пластин $x = \mathrm{const}$.

Дифференциальное уравнение (21.215), определяющее прогиб пластины w, является уравнением сложного изгиба балки-полоски единичной ширины с изгибной жесткостью D под действием поперечной нагрузки $p(x)$ и растягивающих усилий T_1. Поэтому расчет пластин при цилиндрическом изгибе сводится к расчету балки-полоски, что позволяет использовать полученные в гл. 19 результаты для сложного изгиба балок. При отсутствии растягивающей или сжимающей нагрузки ($T_1 = 0$) расчет пластин сводится к расчету балок при поперечном изгибе.

Ниже будут рассмотрены некоторые задачи изгиба пластин по цилиндрической поверхности, представляющие практический интерес.

Оценка влияния цепных напряжений на суммарные напряжения в сечениях пластины. Рассмотрим балку-полоску свободно опертой на длинных кромках пластины, загруженной равномерным давлением p (см. рис. 21.29). Для определения суммарных напряжений σ_x воспользуемся формулой (21.217). Поскольку напряжения от изгиба имеют в крайних волокнах $z = \pm 0{,}5t$ разные знаки, то в одном из крайних волокон всегда будет происходить арифметическое суммирование цепных напряжений $\sigma_{пл}$ и изгибных. Полагая $z = -0{,}5t$ в формуле (21.217) для σ_x и используя выражение (19.27) для наибольшего изгибающего момента свободно опертого стержня, в случае растягивающей силы T_1 для максимальных суммарных напряжений получаем

$$\sigma_{max} = \sigma_{пл} + 3p\,(a/t)^2\,\varphi_0(u)/4, \qquad (21.218)$$

где для балки-полоски

$$u = (a/2)\sqrt{T_1/D} = (a/t)\sqrt{3(1-\mu^2)\sigma_{пл}/E};\quad \varphi_0(u) = 2(\mathrm{ch}\,u - 1)/(u^2\,\mathrm{ch}\,u.) \qquad (21.219)$$

Выражая $\sigma_{пл}$ из формулы (21.219) через аргумент u, зависимость (21.218) представим в виде

$$\sigma_{max} = 3p\,(a/t)^2\,\Phi(u^2,\ A)/4. \qquad (21.220)$$

Здесь

$$\Phi(u^2,\ A) = \varphi_0(u) + Au^2;\quad A = \{4E/[9(1-\mu^2)\,p]\}\,(t/a)^4. \qquad (21.221)$$

Множитель перед функцией $\Phi(u^2, A)$ в формуле (21.220) определяет напряжения от поперечного изгиба балки-полоски, а сама функция учитывает влияние цепных напряжений $\sigma_{пл}$ на значения суммарных напряжений.

На рис. 21.30 построен график функции $\Phi(u^2, A)$, где ее ординаты заключены между кривой $\varphi_0(u)$ и прямой Au^2. Из графика видно, что суммарные напряжения сначала падают в результате уменьшения изгибной составляющей, а затем растут за счет увеличения цепных напряжений.

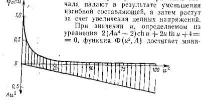


Рис. 21.30

При значении u, определяемом из уравнения $2(Au^4 - 2)\operatorname{ch} u + 2u \operatorname{th} u + 4 = 0$, функция $\Phi(u^2, A)$ достигает минимума. В этом случае влияние цепных растягивающих напряжений $\sigma_{пл}$ наиболее благоприятно.

Пример 12. Оценить влияние растягивающих цепных напряжений на суммарные напряжения в сечениях пластины.

Исходные данные: $a/t = 100$, поперечное давление $p = 0{,}1$ МПа, цепные напряжения $\sigma_{пл} = 100$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0{,}3$.

Решение. По формулам (21.219)—(21.221) для рассматриваемой стальной пластины найдем

$$u = 3{,}7; \quad \varphi_0(u) = 0{,}14; \quad A = 0{,}0105; \quad \Phi(u^2, A) = 0{,}284; \quad \sigma_{max} = 212{,}5 \text{ МПа}.$$

Без учета растягивающих цепных напряжений $[\sigma_{пл} = 0,\ \Phi(u^2, A) = 1]$ формула (21.220) давала бы $\sigma_{max} = 750$ МПа. Таким образом, в рассмотренном примере суммарные напряжения с учетом и без учета цепных напряжений различаются более чем в три раза.

В случае жестко защемленной балки-полоски суммарные напряжения в опорном сечении аналогично выражению (21.220) можно представить в виде

$$\sigma_{max} = (p/2)(a/t)^2 [3Au^2/2 + \chi(u)], \tag{21.222}$$

где функция $\chi(u)$ определяется формулой (19.36).

Вычисления по формулам (21.220) и (21.222) применительно к судовым стальным пластинам с распорами показывают, что суммарные напряжения при $u \leqslant 1$ в случае свободного опирания и при $u \leqslant 2$ в случае жесткого защемления отличаются менее чем на 10—15 % от изгибных напряжений, вычисленных без учета влияния цепных напряжений. Поэтому при характерных значениях $\sigma_{пл} = 50 \div 100$ МПа из формулы (21.219) для u следует, что свободно опертые пластины при $a/t < 30$ и жестко защемленные пластины при $a/t < 60$ можно отнести к категории жестких и пренебречь влиянием распора на наибольшие напряжения.

Изгиб пластин конечной жесткости, не участвующих в общем изгибе корпуса. Особенностью расчета судовых пластин, не участвующих в общем изгибе корпуса судна, является статическая неопределимость цепных усилий, возникающих в опорных сечениях пластин ввиду наличия распоров. После раскрытия статической неопределимости расчет балки-полоски может быть выполнен по справочным таблицам сложного изгиба балок.

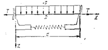


Рис. 21.31

Общую схему вычислений проиллюстрируем на примере расчета обшивки переборок, подкрепленных стойками, на гидростатическое давление. При большом числе стоек расчет обшивки из-за симметрии нагрузки и конструкции сводится к расчету на сложный изгиб жестко защемленной на стойках балки-полоски с распором (рис. 21.31). Для раскрытия статической неопределимости воспользуемся уравнением (19.55). Полагая, что начальная погибь пластины отсутствует $w_0 = 0$ и что для рассматриваемой балки-полоски $l = a$, $\sigma_1 = \sigma_{пл}$, а средние напряжения в конструкции $\sigma_0 = 0$, уравнение (19.55) приведем к виду

$$\sigma_{пл} = \frac{EK}{2a} \int_0^a (w')^2 \, dx, \tag{21.223}$$

где K — коэффициент распора, а прогиб w определяется дифференциальным уравнением (21.215), которое при $T_1 = \sigma_{пл} t$ и $p = \text{const}$ запишется так:

$$D w^{IV} - \sigma_{пл} t w'' = p. \tag{21.224}$$

Решение этого уравнения для жестко заделанной балки-полоски может быть получено из выражения (19.33) при замене EI на D, T на $\sigma_{пл} t$ и переносе начала координат. В преобразованное таким образом выражение для прогиба балки-полоски войдет неизвестное усилие $\sigma_{пл} t$. Однако если подставить это выражение для w в уравнение (21.223), то получится весьма сложное уравнение для определения $\sigma_{пл}$.

Чтобы упростить решение уравнения (21.223), проинтегрируем уравнение (21.224) приближенно по методу Бубнова — Галеркина, задав прогиб балки-полоски в виде

$$w = A(1 - \cos 2\pi x/a), \tag{21.225}$$

и тем самым удовлетворив граничные условия жесткого защемления $w = w' = 0$ при $x = 0$; a.

Подставляя значение прогиба (21.225) в уравнение (21.224) и умножая его на фундаментальную функцию $(1 - \cos 2\pi x/a)$, после интегрирования обеих частей уравнения по всей длине балки-полоски находим

$$A = pa^4/[2\pi^4 D(4+\alpha)]; \quad \alpha = \sigma_{пл} ta^2/(\pi^2 D). \tag{21.226}$$

Подставляя теперь выражения (21.225) и (21.226) в уравнение (21.223), нетрудно получить

$$\alpha(1+\alpha/4)^2 = 3(1-\mu^2)K(w_1/t)^2, \tag{21.227}$$

где $w_1 = pa^4/(4\pi^4 D)$ является значением прогиба (21.225) при $x = 0{,}5a$ и $\alpha = 0$, т. е. от поперечной равномерной нагрузки p.

Решив кубическое уравнение (21.227), из второй формулы (21.226) находят $\sigma_{пл}$, после чего элементы изгиба балки-полоски вычисляют по формулам (19.35). Аргумент u определяют по формуле (21.219), которая с учетом выражения (21.226) дает $u = 0{,}5\pi\sqrt{\alpha}$.

Наибольшие суммарные напряжения будут в опорных сечениях балки-полоски, т. е. на линиях стоек. На основании формул (19.35) и (21.217) найдем

$$\sigma_{max} = \sigma_{пл} + 6M_1/t^2 = \sigma_{пл} + (p/2)(a/t)^2\chi(u). \tag{21.228}$$

Если балку-полоску считать свободно опертой на стойках переборки, то для определения α можно использовать уравнение (19.59), положив в нем $\sigma_0 = n = 0$, $a_0 = \beta_1 = 0$, $EI = D$, $F_1 = t$ и преобразовав его к виду

$$\alpha(1+\alpha)^2 = 3(1-\mu^2)K(w_2/t)^2, \tag{21.229}$$

где $w_2 = 4pa^4/(\pi^5 D)$ является наибольшим прогибом балки-полоски от поперечной нагрузки.

После определения α из уравнения (21.229) и $\sigma_{пл}$ из формулы (21.226) наибольшие суммарные напряжения посередине пролета свободно опертой балки-полоски вычисляют по формуле (21.218).

Исследования показывают, что влияние коэффициента распора K на суммарные напряжения (21.228) и (21.218) относительно мало: значения $u = 0{,}5\pi\sqrt{\alpha}$ оказываются приближенно пропорциональными $\sqrt[4]{K}$, следовательно, аргумент u меняется в узких пределах при реальных значениях K. С ростом коэффициента распора K цепные напряжения $\sigma_{пл}$ возрастают, а изгибные напряжения убывают, так что суммарные напряжения (21.218) и (21.228) изменяются незначительно. Поскольку на практике истинное значение K обычно установить затруднительно, учитывая малое влияние этого коэффициента на суммарные напряжения, при расчетах обшивки переборок приближенно считают $K = 0{,}5$.

И. Г. Бубновым и Ю. А. Шиманским составлены справочные таблицы [50, 51] для определения цепных и суммарных напряжений в случае свободного опирания и жесткого защемления обшивки на стойках переборки при значениях $K = 0{,}5 \div 1$ и $\mu = 0{,}3$.

Необходимость расчета обшивки при свободном опирании на стойки возникает тогда, когда в опорных сечениях балок-полосок

появляются значительные пластические деформации, что обычно наблюдается у относительно тонких пластин (при больших отношениях a/t). Поэтому, если суммарные напряжения (21.228) в опорных сечениях превышают предел текучести материала обшивки, то суммарные напряжения в середине пролета вычисляют по предложению Ю. А. Шиманского (1916 г.) как среднюю величину для случаев жесткого защемления и свободного опирания балки-полоски. Допустимость такого расчета объясняется тем, что для пластин конечной жесткости суммарные напряжения в пролете при прочих равных условиях мало зависят от условий закрепления балки-полоски (в случае жесткого защемления балки-полоски цепные напряжения меньше, а изгибные напряжения больше, чем соответствующие напряжения при свободном опирании).

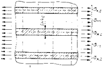


Рис. 21.32

Участие пластин, несущих поперечную нагрузку и имеющих начальную погибь, в общем изгибе корпуса судна. Способность пластин воспринимать сжимающие или растягивающие усилия в основном зависит от начальной погиби и поперечной нагрузки, действующей на пластины. Это объясняется тем, что начальная погибь и поперечная нагрузка вызывают сложный изгиб пластин, происходящий при наличии распора. Вследствие этого изменяется значение цепных усилий или, что равносильно, значение воспринимаемых пластинами напряжений в случае общего изгиба корпуса. Учет этого изменения особенно важен для судов с тонкой обшивкой при поперечной системе набора, когда обшивка является основным несущим элементом судового корпуса.

Рассмотрим участок обшивки, подкрепленной ребрами жесткости при поперечной системе набора со шпацией a, на который действуют растягивающие усилия (рис. 21.32).

В случае действия поперечной нагрузки пластины с начальной погибью будут испытывать сложный изгиб. Так как их кромки не могут искривляться, средняя часть пластин и их участки в районе продольных ребер по-разному воспримут растягивающие усилия. Как было показано в § 21.10, участки пластин, примыкающие к продольным ребрам, шириной 0,22 размера короткой стороны будут работать так же, как и продольные ребра жесткости. Поэтому участки пластин шириной $0{,}44a$ и продольные ребра как жесткие связи воспримут напряжения $\sigma_{ж.с}$, а средние участки пластин — напряжения $\sigma_{пл}$. Строго говоря, если у пластин имеется начальная погибь, то относить участки шириной $0{,}44a$ к жестким связям можно лишь условно, учитывая малость этих участков при поперечной системе набора.

Поскольку жесткие связи являются для пластин распорами, возникающие в распорах и пластинах напряжения $\sigma_{ж.с}$ и $\sigma_{пл}$ оказываются взаимно зависящими. Найдем эту зависимость.

Ввиду того что при поперечной системе набора пластины, несущие поперечные нагрузки и имеющие начальную погибь, будут изгибаться по цилиндрической поверхности, зависимость между $\sigma_{пл}$ и $\sigma_{ж.с}$ пластин, так же как и стержней, будет выражаться формулой (19.53). Полагая в ней $\sigma_1 = \sigma_{пл}$, $\sigma_2 = \sigma_{ж.с}$, $l = a$, получаем

$$\sigma_{пл} = \sigma_{ж.с} + \frac{E}{2a} \int_0^a \left[(w_0' + w')^2 - (w_0')^2 \right] dx, \qquad (21.230)$$

где w_0 — начальная погибь, а w — упругий прогиб балки-полоски.

В рассматриваемом случае на основании (19.4) при $EI = D$, $T = \sigma_{пл} t$, $q = p$, прогиб балки-полоски w определяется уравнением

$$Dw^{IV} - \sigma_{пл} t w'' = p + \sigma_{пл} t w_0''. \qquad (21.231)$$

Если начальная погибь $w_0(x)$ и интенсивность поперечной нагрузки p заданы, то после решения дифференциального уравнения (21.231) при данных граничных условиях и подстановки w в формулу (21.230) получим зависимость между $\sigma_{пл}$ и $\sigma_{ж.с}$. Из этой зависимости при заданных напряжениях $\sigma_{ж.с}$ можно найти напряжения $\sigma_{пл}$.

В случае свободного опирания пластин на поперечные ребра при наличии синусоидальной погиби и равномерной поперечной нагрузки зависимость (21.230) после исключения из нее прогиба w приводит к ранее полученному уравнению (19.58). Положив в этом уравнении $\sigma_1 = \sigma_{пл}$, $\sigma_2 = \sigma_{ж.с}$, $F_1 = t$, $EI = D$, $q = p$, $l = a$, применительно к рассматриваемому случаю получим

$$\alpha (1 + \alpha)^2 = (m - \beta_1)(1 + \alpha)^2 + \beta_2, \qquad (21.232)$$

где

$$\alpha = \sigma_{пл}/\sigma_э; \quad m = \sigma_{ж.с}/\sigma_э; \quad \sigma_э = \pi^2 D/(a^2 t); \quad \beta_1 = Eta_0^2/4D;$$
$$\beta_2 = [Et/(4D)]\,[a_0 + 4pa^4/(\pi^5 D)]^2 \qquad (21.233)$$

(a_0 — наибольшая стрелка синусоидальной погиби).

Уравнение (21.232) через безразмерные параметры α и m устанавливает зависимость между напряжениями $\sigma_{пл}$ и $\sigma_{ж.с}$. В общем случае $\sigma_{пл} \neq \sigma_{ж.с}$ и, следовательно, пластины и жесткие связи по-разному участвуют в общем изгибе корпуса.

Степень участия пластин в общем изгибе характеризуется редукционным коэффициентом φ, представляющим собой отношение

$$\varphi = \sigma_{пл}/\sigma_{ж.с} = \alpha/m. \qquad (21.234)$$

Редукционный коэффициент позволяет найти *приведенную площадь пластины* $F_{пр}$, выбираемую так, чтобы действующие в ней напряжения были равны напряжениям в жестких связях, а воспри-

нимаемое ею суммарное усилие равнялось суммарному усилию пластины. По определению и с учетом формулы (21.234) имеем

$$F_{пр}\sigma_{ж.с} = F_{пл}\sigma_{пл}; \quad F_{пр} = \varphi F_{пл}, \qquad (21.235)$$

где $F_{пл}$ — площадь пластины, воспринимающая напряжения $\sigma_{пл}$.

Последняя формула удобна тем, что позволяет перевести пластину в категорию жестких связей и рассматривать реальную «неоднородную» конструкцию как однородную, состоящую только из жестких связей. Однако при практических расчетах дело осложняется тем, что напряжения $\sigma_{ж.с}$ и $\sigma_{пл}$ нельзя определить независимо одно от другого, и расчет приходится выполнять методом последовательных приближений.

Обычно схема вычислений следующая.

1. Считают, что в первом приближении все пластины полностью участвуют в общем изгибе, и вычисляют напряжения $\sigma_{ж.с}^{(1)}$ первого приближения.

2. Определяют значение эйлеровых напряжений $\sigma_э$ и параметр $m^{(1)}$ по формулам (21.233), а затем из уравнения (21.232) находят $\alpha^{(1)}$.

3. По формулам (21.234) и (21.235) вычисляют $\varphi^{(1)}$ и $F_{пр}^{(1)}$ в первом приближении.

4. Вместо реальных площадей пластин вводят в расчет приведенные площади $F_{пр}^{(1)}$, затем уточняют значения момента инерции, положение нейтральной оси поперечного сечения корпуса судна и по этим данным определяют напряжения $\sigma_{ж.с}^{(2)}$ во втором приближении.

Указанный процесс последовательных приближений заканчивают при практическом совпадении результатов двух соседних приближений.

Для упрощения вычислений по уравнению (21.232) удобно построить график зависимости $m = m(\alpha)$, используя который в каждом приближении по заданному значению m легко найти соответствующее значение α.

Оценим теперь влияние начальной погиби пластины на значение коэффициента φ, определяющего степень участия пластины в общем изгибе корпуса. Для этого предположим, что поперечная нагрузка отсутствует ($p = 0$). Тогда с учетом (21.233) уравнение (21.232), разрешая его относительно m, можно записать так:

$$m = \alpha + 3(1 - \mu^2)(a_0/t)^2 [1 - 1/(1 + \alpha)^2]. \qquad (21.236)$$

Из формулы (21.236) следует, что при $\alpha > 0$ параметр $m > \alpha$. Если $\alpha < 0$, то $m < 0$ и $|m| > |\alpha|$. Поэтому всегда $\varphi < 1$. Так как положительным значениям m и α соответствуют растягивающие напряжения $\sigma_{ж.с}$ и $\sigma_{пл}$, а отрицательным m и α — сжимающие, начальная погибь снижает степень участия пластин в общем изгибе и всегда является отрицательным фактором.

Необходимо отметить, что пластина не может воспринять сжимающих нормальных напряжений $\sigma_{пл}$, больших чем эйлеровы $\sigma_э$. Поэтому $\alpha \geqslant -1$, так как уже при $\sigma_{пл} = -\sigma_э$, $\alpha = -1$ пластина теряет устойчивость. В этом случае редукционный коэффициент будет равен $\varphi = \sigma_э/\sigma_{ж.\,с} = 1/m$. Он убывает с ростом напряжений в жестких связях и не зависит от начальной погиби.

Имеющиеся теоретические решения и опыт эксплуатации судов показывают, что сделанные выше выводы о вредном влиянии начальных погибей синусоидальной формы качественно остаются справедливыми для погибей любой формы. Поэтому необходимо нормировать допустимые стрелки начальных погибей пластин и добиваться их уменьшения.

Влияние поперечной нагрузки p на редукционные коэффициенты пластины можно оценить по формуле (21.232) при отсутствии начальной погиби, положив $a_0 = 0$. Тогда

$$m = \alpha - [3(1-\mu^2)/(1+\alpha)^2](w_2/t)^2; \quad w_2 = 4pa^4/(\pi^5 D). \quad (21.237)$$

Как видно из формул (21.237) и (21.234), влияние поперечной нагрузки на редукционный коэффициент может быть различным. Например, при растягивающих напряжениях в жестких связях ($m > 0$) оказывается $\alpha > m$ и $\varphi > 1$. Это означает, что $\sigma_{пл} > \sigma_{ж.\,с}$ и что пластина помимо напряжений от общего изгиба воспринимает дополнительные цепные растягивающие усилия при распоре ее жесткими связями. Если же в жестких связях и пластинах напряжения оказываются сжимающими ($m < 0$, $\alpha < 0$), то $|m| > |\alpha|$ и $\varphi < 1$.

Так как при наличии начальных погибей всегда $\varphi < 1$, а при действии поперечной нагрузки $\varphi > 1$ или $\varphi < 1$ в зависимости от знака напряжений в жестких связях, поперечная нагрузка увеличивает редукционные коэффициенты пластин с начальной погибью при растягивающих напряжениях в жестких связях и уменьшает их в случае сжимающих напряжений.

Для пластин днища морских транспортных судов отношение w_2/t в формуле (21.237) мало́, и поэтому влиянием поперечной нагрузки на редукционные коэффициенты обычно пренебрегают. Однако этого нельзя делать применительно к речным и озерным судам с тонкой обшивкой, у которых указанное отношение w_2/t оказывается значительным.

Влияние поперечной нагрузки на редукционные коэффициенты обшивки морских транспортных судов мало́, поэтому влияние начальной погиби на редукционные коэффициенты пластин можно учитывать по формулам (21.234) и (21.236). Указанные зависимости останутся справедливыми и для неразрезной пластины с регулярной синусоидальной начальной погибью в пределах каждой шпации. Расчет такой неразрезной пластины при отсутствии поперечной нагрузки сводится к расчету одного пролета балки-полоски.

§ 21.12. Общая схема расчета судовых тонкостенных конструкций

Корпус судна представляет собой сложную пространственную тонкостенную конструкцию. Наружная обшивка, создающая водонепроницаемый объем судна, является тонкой оболочкой, имеющей значительные по размерам плоские палубные, бортовые и днищевые участки. Поскольку такая оболочка плохо сопротивляется нормальным к ее поверхности нагрузкам, во избежание чрезмерного увеличения толщины и веса внутри этой оболочки, устанавливают переборки и подкрепляющий набор, стенки которого являются пластинами, перпендикулярными к наружной обшивке. К таким пластинам относятся стенки шпангоутов, стрингеров, вертикального киля, флоров, карлингсов, бимсов, ребер жесткости. Для увеличения жесткости и прочности набора при его минимальной высоте по свободной кромке стенок устанавливают пояски. Аналогичным образом подкрепляют набором полотнища переборок (см. рис. 13.1, 13.2).

При указанной конструкции корпуса всю обшивку и пластины набора разбивают на прямоугольные или близкие к ним по форме практически плоские поля (пластины). Каждое такое поле опирается по кромкам на перпендикулярные ему пластины, которые создают весьма жесткий контур, поддерживающий это поле при действии на него поперечной нагрузки. Например, для пластин днища жесткий контур создают флоры, стрингеры, вертикальный киль, ребра жесткости, а для пластин палубы — бимсы, карлингсы и ребра жесткости.

Таким образом, можно считать, что корпус судна — совокупность взаимосвязанных прямоугольных пластин, подкрепленных ребрами жесткости, которые, как правило, создают для пластин жесткий опорный контур.

Каждая пластина может испытывать два вида деформаций — плоское напряженное состояние и поперечный изгиб. Например, стенка стрингера, являющаяся стенкой цистерны, при изгибе днища испытывает плоское напряженное состояние, а при действии давления жидкости в цистерне — поперечный изгиб. Днищевая обшивка испытывает поперечный изгиб вследствие давления воды и плоское напряженное состояние вследствие растяжения-сжатия днища при общем изгибе корпуса судна.

Точное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии пластин можно получить на основании дифференциальных уравнений технической теории изгиба тонких пластин. При этом придется составлять граничные условия для каждого поля с учетом взаимодействия со смежными полями и подкрепляющими пластинами. Следовательно, точный расчет корпуса при действии любой нагрузки может быть сведен к расчету системы из множества связанных пластин, испытывающих плоское напряженное состояние и изгиб. Нетрудно представить себе всю сложность такого подхода к решению задачи о напряженном состоянии корпуса. Даже если применяются современные математические методы и вычислительные средства, он практически трудно осуществим, тем более, что расчет приходится производить для множества вариантов нагрузки. Поэтому возникает необходимость в упрощении расчетов при сохранении практически необходимой точности. Возможности упрощения расчета вытекают из следующих соображений.

1. Как правило, многие пластины относятся к категории жестких, у которых нет взаимного влияния плоского напряженного состояния и изгиба, и, следовательно, их расчет может выполняться при независимом действии нагрузок, вызывающих один и другой вид деформации. Это позволяет применять метод наложения, т. е. рассчитывать пластины или составленные из них конструкции на ряд нагрузок, а результаты затем суммировать.

2. При определенных видах деформации можно совокупность некоторых пластин рассматривать как балки и применять для их расчета техническую теорию изгиба балок, не прибегая к более сложным решениям плоской задачи теории упругости. Например, стенку днищевого стрингера совместно с примыкающими к ней участками днищевой обшивки и второго дна представляют как балку, напряженно-деформированное состояние которой при ее изгибе определяют на основании гипотезы плоских сечений. Если же пояски указанной балки слишком широкие, то необходимо ввести в расчет присоединенные пояски в соответствии с полученными ранее результатами. Аналогично к расчету балок можно свести расчет флоров, карлингсов, ребер жесткости, шпангоутов и т. п.

3. Анализ условий работы конструкций корпуса при действии нагрузок определенного вида позволяет зачастую установить без расчета характер силового взаимодействия между элементами (балками и пластинами) и составить для них независимые граничные условия. Это дает возможность производить расчет систем элементов или даже отдельных элементов вне связи с другими. При установлении граничных условий используют полную или приблизительную симметрию нагрузки и конструкции, учитывают соотношения жесткостей разных элементов, затухание влияния деформации данного элемента на расположенные вдали от него элементы, принцип Сен-Венана и другие особенности.

Основанный на указанных соображениях подход к расчетам прочности позволяет с допустимой для практики точностью сводить строгий расчет корпуса судна как системы, состоящей из взаимосвязанных элементов и имеющей большую степень статической неопределимости, к расчету пластин, балок и типичных стержневых конструкций. После того как будут выполнены расчеты по упрощенным схемам всех элементов и на все виды одновременно действующих нагрузок, окончательно определяют напряженное состояние суммированием результатов.

В свете изложенного рассмотрим общую схему расчета корпуса судна при плавании на тихой воде, когда на него действуют две системы сил: статическое давление воды на наружную обшивку и силы тяжести.

Давление воды вызывает изгиб каждой прямоугольной пластины наружной обшивки, опирающейся на стенки набора. Стенки набора воспринимают нагрузку со стороны пластин и соответствующие силы тяжести, в результате чего возникает изгиб ребер жесткости и перекрытий. Набор днищевых перекрытий передает всю приходящуюся на перекрытия нагрузку в виде реакций на продольные и поперечные переборки и борта, на которых и уравновешиваются силы тяжести и силы поддержания воды. Это приводит к общему изгибу корпуса судна.

При расчете общего изгиба часто корпус судна можно считать балкой, стенками которой являются борта и продольные переборки, а поясками — продольные связи днища, палуб и платформ. Расчет подобной балки по технической теории не представляет затруднений. При общем изгибе обшивки днища, бортов, настил палуб, полотнища продольных переборок будут испытывать плоское напряженное состояние, а такие связи, как ребра жесткости, — простое растяжение-сжатие.

В качестве примера расчета изгиба перекрытий рассмотрим днищевые перекрытия, имея в виду, что для палубных и бортовых перекрытий излагаемый ниже подход также справедлив.

При расчете изгиба днищевых перекрытий их опорный контур, создаваемый бортами, продольными и поперечными переборками, можно считать несмещаемым в силу большой жесткости указанных конструкций в своей плоскости. Некоторым искривлением кромок борта и продольных переборок за счет общего изгиба корпуса допустимо пренебречь вследствие малости этого искривления между поперечными переборками по сравнению с собственными прогибами перекрытия. Можно установить и условия заделок основных балок днищевого набора на опорном контуре. Например, флоры во многих случаях допустимо считать свободно опертыми на борта ввиду относительной малости изгибной жесткости шпангоутов, а стрингеры и киль — жестко заделанными на поперечных переборках вследствие приблизительной симметрии конструкции и нагрузок. Это позволяет выполнить расчет днищевого перекрытия, не рассматривая совместную систему днищевых, бортовых и палубных перекрытий и не связывая этот расчет с общим изгибом корпуса. После расчета перекрытий на изгиб будут определены напряжения и деформации балок перекрытий (в этом случае во всех пластинах — стенках и поясках балок — возникает плоское напряженное состояние).

При расчете изгиба ребер жесткости с соответствующими присоединенными поясками их можно рассматривать как многопролетные балки, опорами для которых являются флоры и поперечные переборки. Флоры в результате изгиба перекрытия смещаются, но для ребер жесткости их можно считать жесткими опорами, так как указанные смещения из-за относительной малости вызывают пренебрежимо малый дополнительный изгиб ребер. В большинстве случаев принимают жесткую заделку пролетов в опорных сечениях в силу точной или приблизительной симметрии пролетов и нагрузки относительно любой опоры. Это позволяет рассчитывать каждый пролет ребра жесткости как отдельную балку.

Наконец, при расчете пластин на изгиб можно считать, что каждое поле опирается на жесткий контур и жестко заделано по кромкам. Первое допущение вытекает из того, что прогибы покрепляющего набора по своей относительной малости могут вызывать лишь незначительные дополнительные напряжения в пластинах, а второе является следствием точной или приближенной симметрии полей и нагрузок относительно любой кромки (это наблюдается в среднем районе перекрытия при большом числе полей).

Таким образом, в рассматриваемом случае, по существу, единая задача о напряженном состоянии днищевого перекрытия сведена к ряду более простых независимых задач — расчету пластины на изгиб, расчету ребер жесткости, расчету изгиба перекрытия как стержневой системы основных балок — флоров, стрингеров и киля, расчету напряжений от общего изгиба корпуса судна. Для определения суммарного напряженного состояния в отдельных точках или элементах перекрытия необходимо алгебраически сложить соответствующие компоненты напряжений. Например, определяя суммарное напряженное состояние пластины днищевой обшивки, следует учитывать, что такая пластина входит в состав пояска корпуса судна при его общем изгибе, в состав поясков стрингеров и флоров как основных балок днищевых перекрытий, является пояском ребра жесткости и, кроме того, работает на изгиб под действием собственной поперечной нагрузки. При расчете ребра жесткости нужно иметь в виду, что оно работает в составе поясков корпуса и стрингеров, а также испытывает собственный изгиб между флорами.

В результате сложения напряженных состояний всех одновременно возникающих видов деформации выявляются характерные опасные точки, по которым и проверяют условия прочности. Как правило, эти точки располагаются в опорных сечениях и на середине пролетов элементов.

Расчетные схемы судовых конструкций существенно усложняются, когда два основных вида деформаций пластин — плоское напряженное состояние и изгиб — оказывают существенное взаимное влияние или когда происходит потеря устойчивости отдельных связей. В этом случае задача нелинейна, а принцип наложения не применим, т. е. полное напряженное состояние нельзя найти алгебраическим сложением простых независимых напряженных состояний. Расчетная схема строится на основе метода последовательных приближений. В первом приближении все связи считают жесткими и определяют цепные напряжения (при общем изгибе корпуса, при изгибе перекрытий и ребер жесткости). Затем находят элементы изгиба пластин с учетом влияния плоского напряженного состояния и вычисляют редукционные коэффициенты. Во втором приближении сначала вычисляют цепные напряжения с учетом уточненного в первом приближении участия пластин в работе конструкции, затем снова определяют элементы изгиба пластин и т. д. Примером такого расчета служит схема определения напряжений при общем изгибе корпуса, когда сжатые пластины теряют устойчивость или имеют начальную погибь.

Описанная выше упрощенная схема поэтапного расчета корпуса судна, восходящая еще к И. Г. Бубнову (1912 г.), является типичной для судов традиционных типов. Поэтому методы расчета изгиба и устойчивости балок, рам, перекрытий и пластин, изложенные ранее, представляют большой практический интерес.

Особенно эффективно применение схемы поэтапного расчета в задачах проектирования корпуса судна, когда по заданным внешним нагрузкам и нормам прочности необходимо определить размеры связей. Это позволяет при заданной топологии конструкции корпуса относительно просто определить толщину обшивки, расстояние между балками судового набора, размеры их поперечных сечений. Полученный вариант конструкции можно принять в качестве базового, что в последующем с учетом конструктивных и технологических требований, с использованием более строгих расчетных схем (моделей) существенно облегчает отыскание наиболее приемлемого (оптимального) варианта конструкции в рамках системного подхода. При этом для судов традиционных типов базовый и оптимальный варианты оказываются довольно близкими. Если учесть, что задача оптимизации корпуса судна по экономическому критерию или критерию металлоемкости является, вообще говоря, многофакторной, то наличие базового варианта, близкого к оптимальному, существенно упрощает отыскание оптимума при решении этой сложной задачи.

Контрольные вопросы

1. Какое упругое тело называется пластиной?
2. На каких гипотезах основана техническая теория изгиба пластин?
3. Какими основными уравнениями описывается напряженное состояние пластин при изгибе?
4. Объяснить физический смысл уравнений Кармана.
5. Какие граничные условия должны быть заданы на контуре пластины?
6. Как записать граничные условия для прогиба: на свободной кромке пластины; на кромке пластины, опертой на упругое ребро?
7. Как классифицируются пластины по роду напряженного состояния?
8. Описать схему решения конкретных задач для прямоугольных пластин.
9. Как производится практический расчет на изгиб жестких прямоугольных пластин?
10. Каковы особенности решения задачи об изгибе ортотропной жесткой прямоугольной пластины?
11. Какой практический интерес для строительной механики корабля представляет теория изгиба жестких ортотропных пластин?
12. Кратко изложить сущность приближенных методов решения задач изгиба жестких пластин: метода Бубнова — Галеркина; метода Ритца; МКЭ.
13. Какое значение имеет задача об устойчивости пластин для строительной механики корабля?
14. Как влияет жесткость подкрепляющих ребер на устойчивость пластин?
15. Какое влияние оказывает кручение ребер на устойчивость пластин?
16. Как влияют отступления от закона Гука на устойчивость пластин?
17. Кратко изложить сущность приближенных методов решения задач устойчивости пластин: метода Ритца; метода сеток; МКЭ.

18. В какую сторону получается ошибка при определении эйлеровой нагрузки пластин методом Ритца и МКЭ и почему?

19. Как участвуют в общем изгибе потерявшие устойчивость пластины и чем оценивается степень их участия?

20. Как практически вычисляют редукционные коэффициенты пластин, теряющих устойчивость?

21. Какое влияние оказывают начальные погиби на степень участия пластин в общем изгибе и на редукционные коэффициенты?

22. Как влияет поперечная нагрузка на степень участия пластин в общем изгибе для обшивки морских транспортных судов?

23. При каких условиях в средней части пластин происходит изгиб по цилиндрической поверхности?

24. Каково влияние цепных напряжений и жесткости распора на суммарные напряжения пластин при цилиндрическом изгибе?

25. Как практически определяют напряжения в обшивке поперечных переборок при гидростатическом давлении воды?

Глава 22. ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

§ 22.1. Основные понятия и допущения

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими размерами тела. Поверхность, расположенная на равном расстоянии от этих двух наружных криволинейных поверхностей, именуется *срединной поверхностью* оболочки (поверхность $ABCД$ на рис. 22.1, *а*). По форме срединной

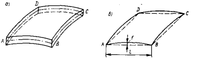


Рис. 22.1

поверхности различают сферические, цилиндрические, конические, торообразные и другие оболочки.

Если оболочка не имеет иных границ, кроме двух вышеупомянутых, ее называют *замкнутой*. Оболочки дирижаблей, наружная обшивка прочного корпуса подводных аппаратов являются примером замкнутых оболочек. Если же оболочка имеет еще и граничный контур, то оказывается *незамкнутой* (см. рис. 22.1, *а*). Примерами незамкнутых оболочек могут служить изогнутые крыши различных павильонов и зданий, криволинейные участки наружной обшивки корпуса судна и т. д.

Толщина оболочки в данной точке срединной поверхности — расстояние между внешними поверхностями, измеренное по нормали к срединной поверхности. Толщина оболочки может быть постоянной или переменной. Различают *толстые* и *тонкие* оболочки.

Оболочка называется тонкой, если отношением ее толщины к минимальному радиусу кривизны срединной поверхности t/R можно пренебречь по сравнению с единицей. В технических расчетах, как правило, допускается погрешность порядка 5 %. Отсюда получаем допустимое отношение t/R, характерное для тонких оболочек:

$$\max(t/R) \leqslant 0{,}05. \tag{22.1}$$

Заметим, что условие (22.1) весьма грубо определяет границу между тонкими и толстыми оболочками. В действительности она зависит еще и от других геометрических параметров оболочки, от характера ее граничных условий, от гладкости изменения внешней нагрузки по поверхности оболочки. Разделение оболочек на тонкие и толстые — условное и связано с возможностью упрощения основных уравнений теории тонких оболочек благодаря применимости к таким оболочкам некоторых дополнительных гипотез.

Незамкнутые оболочки могут быть *пологими* и *непологими*. Пологими называют оболочки, у которых площадь срединной поверхности близка к площади ее проекции на плоскость основания оболочки (рис. 22.1, *б*). К пологим относятся оболочки с плавной срединной поверхностью, если при этом

$$f/l \leqslant 0{,}2, \text{ или } l/R_{ср} \leqslant 1{,}2,$$

где f — максимальная стрелка дуги в характерном сечении оболочки; l — длина хорды этой дуги; $R_{ср}$ — средний радиус кривизны дуги в характерном сечении.

К замкнутым оболочкам в целом понятие пологости не применимо. Однако отдельные участки замкнутой оболочки в ряде случаев могут рассматриваться как пологие незамкнутые оболочки. Признаком пологости такого участка служит отношение наибольшего размера участка к среднему радиусу его кривизны.

Тонкие оболочки как элемент отдельных инженерных сооружений широко используют в самых различных областях техники (судостроении, самолетостроении, ракетостроении, машиностроении и т. д.) в связи с тем, что оболочки обладают большой прочностью при сравнительно малой массе.

Теория расчета тонких оболочек развита хорошо. Получены общие дифференциальные уравнения, характеризующие напряженное состояние тонких оболочек с произвольной формой срединной поверхности, а также разработаны общие схемы и методы их решения. Для большинства практически важных случаев оболочек простейших геометрических форм найдено решение указанных уравнений в виде, удобном для практического использования.

Большой вклад в теорию тонких оболочек внесли советские ученые В. З. Власов, А. Л. Гольденвейзер, В. В. Новожилов, Х. М. Муштари, А. И. Лурье, А. С. Вольмир и многие др.

Ниже будут рассмотрены лишь тонкие круговые цилиндрические оболочки постоянной толщины, применяющиеся в корпусах подводных аппаратов и судов. При исследовании таких оболочек удобно пользоваться цилиндрической системой координат (рис. 22.2). Ось x совместим с образующей срединной поверхности оболочки в ее недеформированном состоянии, ось z направим по радиусу кривизны оболочки к центру, а ось y — по окружности поперечного сечения срединной поверхности. До деформации оболочки положение произвольной точки срединной поверхности определяется координатой x вдоль образующей и окружной координатой y, отсчитываемой по дуге окружности срединной поверхности. Положение других точек определяется, кроме того, координатой z, отсчитываемой от срединной поверхности по нормали к ней. Положительные направления координат x, y, z показаны на рис. 22.2.

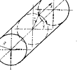


Рис. 22.2

Для точек срединной поверхности $z = 0$, а для точек наружной и внутренней поверхностей $z = \mp 0{,}5t$. Радиус кривизны срединной поверхности оболочки в недеформированном ее состоянии обозначим через R, а проекции полного перемещения точек оболочки на выбранные оси координат x, y, z — через u, v, w соответственно. Радиальное перемещение w принято называть *прогибом оболочки.*

Теория изгиба и устойчивости тонких оболочек, как и теория тонких пластин, основывается на следующих гипотезах и допущениях:

а) прогиб оболочки w является постоянным по ее толщине (не зависит от координаты z) и считается в общем случае величиной одного порядка с толщиной оболочки малого прогиба;

б) перемещения u и v на порядок меньше перемещения w;

в) применима гипотеза прямых нормалей, согласно которой предполагается, что прямолинейные элементы оболочки, перпендикулярные к ее срединной поверхности до деформации, остаются прямолинейными и перпендикулярными к изогнутой срединной поверхности и после деформации;

г) нормальные напряжения в площадках, параллельных срединной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с остальными напряжениями и могут приниматься равными нулю ($\sigma_z \cong 0$);

д) материал оболочки считается упругим и линейно-деформируемым по закону Гука.

Аналогичные гипотезы уже использовались при построении теории изгиба тонких пластин. Этим и объясняется значительное

сходство математических зависимостей теории пластин и теории оболочек.

Задача о напряженном состоянии оболочек является статически неопределимой и для ее решения приходится прибегать к совместному рассмотрению уравнений равновесия, совместности деформаций и физических уравнений.

§ 22.2. Компоненты деформации круговой цилиндрической оболочки

Общие зависимости между деформациями и перемещениями, полученные в § 2.2 и справедливые для любого сплошного геометрически нелинейного тела, применительно к круговой цилиндрической оболочке могут быть значительно упрощены, если использовать первые три из указанных в § 22.1 допущения теории тонких оболочек.

Обозначим перемещения точек срединной поверхности по направлению осей x, y и z соответственно через u_0, v_0, и $w_0 = w$. Эти перемещения являются функциями координат x и y, которыми определяется положение рассматриваемой точки срединной поверхности оболочки. Учитывая, что согласно второму допущению $u_9 \cong v_0 \ll w$, из формул (2.12) могут быть получены следующие зависимости между деформациями и перемещениями точек срединной поверхности круговой цилиндрической оболочки:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{w}{R}; \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \qquad (22.2)$$

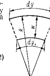


Рис. 22.3

где ε_x^0, ε_y^0, γ_{xy}^0 — компоненты деформации срединной поверхности.

Во второй формуле (22.2) добавлен член $-w/R$. Он учитывает деформацию, связанную с изменением радиуса кривизны элемента dy вследствие перемещения w. Действительно, рассмотрим элемент дуги срединной поверхности оболочки dy, радиус кривизны которого равен R (рис. 22.3). Если все точки этого элемента получат перемещение w, то длина элемента уменьшится на величину $(R - w)d\theta - Rd\theta = -wd\theta$ и, следовательно, рассматриваемый элемент получит в направлении координаты y дополнительную деформацию $d\varepsilon_y = -wd\theta/(Rd\theta) = -w/R$.

Между компонентами деформации ε_x^0, ε_y^0 и γ_{xy}^0 можно установить определенную связь, если исключить перемещения u_0 и v_0 из выражений (22.2). Для этого продифференцируем ε_x^0 два раза по

y, ε_y два раза по x и вычтем из их суммы смешанную производную γ_{xy}^0 по x и y. Получим

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x^0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y^0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}^0}{\partial x\,\partial y}=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (22.3)$$

Выполнение уравнения (22.3) обеспечивает отсутствие разрывов срединной поверхности в деформированном состоянии оболочки. Отсюда и название этого уравнения — *уравнение неразрывности деформаций срединной поверхности*.

Выражения (22.2) определяют деформацию срединной поверхности. Переходим теперь к выводу выражений для деформаций в любой поверхности оболочки, находящейся на расстоянии z от срединной поверхности. Вначале определим перемещения u и v в произвольной точке оболочки, находящейся на расстоянии z по нормали от срединной поверхности. Для этого рассмотрим в сечении оболочки плоскостью, перпендикулярной оси оболочки, две точки O и O_1, лежащие на одном перпендикуляре к срединной поверхности (рис. 22.4). Пусть точка O лежит на срединной поверхности, а точка O_1 — на расстоянии z от нее.

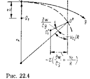


Рис. 22.4

После деформации оболочки точка O получит перемещение v_0 и перейдет в положение O', точка O_1 получит перемещение v и займет положение O_1'. Перемещение точки O по круговой координате y на величину v_0 вызывает поворот нормали к срединной поверхности на угол v_0/R. Прогиб срединной поверхности вызывает дополнительный поворот нормали на угол $\frac{\partial w}{\partial y}$. Полный угол, на который повернется нормаль к срединной поверхности, будет равен $\frac{v_0}{R}+\frac{\partial w}{\partial y}$.

На основании гипотезы прямых нормалей точки O' и O_1' должны располагаться на одном перпендикуляре к срединной поверхности деформированной оболочки. Это позволяет выписать следующее выражение для определения перемещения точки O_1, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии z, по направлению y:

$$v=v_0-z\left(\frac{v_0}{R}+\frac{\partial w}{\partial y}\right). \quad (22.4)$$

Пренебрегая, как и при выводе основных уравнений теории оболочек, членами порядка v_0/R по сравнению с единицей, выражение (22.4) можно упростить и переписать в таком виде:

$$v=v_0-z\,\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (22.4')$$

По аналогии с формулой для v может быть получено выражение для перемещения произвольной точки оболочки в направлении координаты x. В результате получаем

$$u=u_0-z\,\frac{\partial w}{\partial x};\quad v=v_0-z\,\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (22.5)$$

Для определения деформаций в произвольной точке оболочки можно воспользоваться формулами (22.2), куда вместо u_0, v_0 и R следует подставить те же величины, но относящиеся к поверхности, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии z, т. е. u, v и $R-z$:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2;\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2-\frac{w}{R-z};\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \quad (22.6)$$

Подставляя сюда выражения (22.5) и принимая во внимание (22.2), получаем

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\varepsilon_x^0-z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\\ \varepsilon_y&=\varepsilon_y^0-z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{w}{R^2}\right);\\ \gamma_{xy}&=\gamma_{xy}^0-2z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}.\end{aligned}\right\} \quad (22.7)$$

Члены, стоящие множителями при z, в первых двух формулах (22.7) определяют изменение кривизны оболочки в направлении осей x и y соответственно, а в третьей формуле — кривизну кручения срединной поверхности оболочки.

Формулы (22.7) для оболочки отличаются от соответствующих формул (21.1) для пластин наличием лишь члена w/R^2. Естественно, что при $R=\infty$ указанные формулы совпадают.

§ 22.3. Погонные усилия и моменты. Уравнения равновесия элемента оболочки

Напряжения. В § 22.2 были установлены геометрические соотношения *для оболочек, т. е. найдена связь между компонентами* деформаций и компонентами перемещений. Переходим к рассмотрению возникающих в оболочке напряжений. Будем полагать, что оболочка выполнена из ортотропного упругого материала, главные направления которого совпадают с направлениями осей x и y. Каждый слой оболочки, параллельный срединной поверхности, находится в плоском напряженном состоянии. Следовательно, для определения компонентов напряжения по заданным компонентам деформации можно воспользоваться формулами (21.85):

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}(\varepsilon_x + \mu_{xy}\varepsilon_y);$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}(\varepsilon_y + \mu_{yx}\varepsilon_x); \quad \tau_{xy} = G_{xy}\gamma_{xy}. \tag{22.8}$$

Внося вместо компонентов деформации их выражения (22.7), можно получить следующие окончательные формулы для опреде-

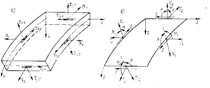


Рис. 22.5

ления компонентов напряжений в произвольной точке оболочки по известным перемещениям срединной поверхности u_0, v_0, w:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_x^0 - \frac{E_x z}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{xy}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2}\right)\right];\\
\sigma_y &= \sigma_y^0 - \frac{E_y z}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2}\right) + \mu_{yx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right];\\
\tau_{xy} &= \tau_{xy}^0 - 2G_{xy} z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y},
\end{aligned}\right\} \tag{22.9}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x^0 &= \frac{E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}(\varepsilon_x^0 + \mu_{xy}\varepsilon_y^0);\\
\sigma_y^0 &= \frac{E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}(\varepsilon_y^0 + \mu_{yx}\varepsilon_x^0);\\
\tau_{xy}^0 &= G_{xy}\gamma_{xy}^0
\end{aligned}\right\} \tag{22.10}$$

— компоненты напряжения точек срединной поверхности.

Положительные направления напряжений приняты такими же, как и в теории упругости (рис. 22.5, *а*).

Усилия и моменты в сечениях оболочки. Поскольку компоненты напряжения изменяются по толщине оболочки по линейному закону, представляется целесообразным, как и в теории изгиба

пластин, вместо напряжений ввести статически им эквивалентные погонные усилия и моменты (рис. 22.5, *б*):

$$\left.\begin{aligned}
&T_1 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_x\,dz; \quad T_2 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_y\,dz; \quad S = \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{xy}\,dz;\\
&M_1 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_x z\,dz; \quad M_2 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_y z\,dz; \quad H = \int_{-0,5h}^{+0,5h} \tau_{xy} z\,dz;\\
&N_1 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{xz}\,dz; \quad N_2 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{yz}\,dz,
\end{aligned}\right\} \tag{22.11}$$

где T_1, T_2, S — растягивающие (сжимающие) по направлениям x, y и сдвигающие усилия в срединной поверхности; M_1, M_2 и H — изгибающие и крутящие моменты; N_1, N_2 — перерезывающие силы. Положительные направления этих усилий и моментов показаны на рис. 22.5, *б*. В силу закона парности $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ и поэтому сдвигающие усилия S и крутящие моменты H одинаковы на площадках, перпендикулярных осям x и y.

Уравнения равновесия бесконечно малого элемента оболочки. Замена напряжений статически эквивалентными усилиями и моментами позволяет при составлении уравнений равновесия вместо пространственного элемента, вырезанного из оболочки, рассматривать соответствующий ему элемент срединной поверхности, по сторонам которого приложены эти усилия и моменты. Такая замена напряжений усилиями и моментами окончательно переводит задачу о деформированном состоянии оболочки из класса объемных в класс двумерных задач.

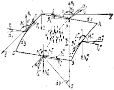


Рис. 22.6

Итак, рассмотрим бесконечно малый элемент размерами dx и dy, вырезанный из срединной поверхности оболочки после ее деформации сечениями, перпендикулярными осям x и y (рис. 22.6). По сторонам элемента действуют усилия и моменты (ими характеризуется действие отброшенной части срединной поверхности на рассматриваемый ее элемент), а по площадке $dxdy$ в радиальном направлении — внешняя распределенная нагрузка интенсивностью $p(x, y)$.

Усилия и моменты являются функциями переменных x и y и на сторонах элемента $x + dx$ и $y + dy$ получают приращения по соответствующим координатам:

$$\left.\begin{aligned} &T_1^*=T_1+\frac{\partial T_1}{\partial x}dx;\quad S_1^*=S+\frac{\partial S}{\partial x}dx;\quad N_1^*=N_1+\frac{\partial N_1}{\partial x}dx;\\ &M_1^*=M_1+\frac{\partial M_1}{\partial x}dx;\quad H_1^*=H+\frac{\partial H}{\partial x}dx;\quad T_2^*=T_2+\frac{\partial T_2}{\partial y}dy;\\ &S_2^*=S+\frac{\partial S}{\partial y}dy;\quad N_2^*=N_2+\frac{\partial N_2}{\partial y}dy;\quad M_2^*=M_2+\frac{\partial M_2}{\partial y}dy;\\ &H_2^*=H+\frac{\partial H}{\partial y}dy.\end{aligned}\right\}\qquad(22.12)$$

Стороны рассматриваемого элемента в его деформированном состоянии будут иметь определенные углы наклона по отношению к плоскости $o\bar{x}\bar{y}$, касательной в точке o к срединной поверхности элемента до его деформации. Деформация элемента вызовет изменения в направлениях усилий, приложенных по сторонам элемента.

Направления усилий для деформированного элемента по отношению к осям $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ можно определить с помощью углов α_1, β_1, α_2, β_2, α_1^*, β_1^*, α_2^*, β_2^*, показанных на рис. 22.6. С точностью до бесконечно малых первого порядка можно считать, что для усилий приложенных к сторонам OA и OC,

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1=\sphericalangle(T_1,\bar{x})=\frac{\partial w}{\partial x};\quad \alpha_2=\sphericalangle(T_2,\bar{y})=\frac{\partial w}{\partial y};\\ &\beta_1=\sphericalangle(S_1,\bar{y})=\frac{d\theta}{2}+\frac{\partial w}{\partial y};\quad \beta_2=\sphericalangle(S_2,\bar{x})=\frac{\partial w}{\partial x}.\end{aligned}\right\}\qquad(22.13)$$

Для усилий, приложенных к сторонам AB и BC, эти углы получат приращения:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1^*=\sphericalangle(T^*,\bar{x})=\alpha_1+\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}\partial x\\ &\alpha_2^*=\sphericalangle(T_2^*,\bar{y})=\alpha_2+\frac{\partial\alpha_2}{\partial y}dy+d\theta;\\ &\beta_1^*=\sphericalangle(S_1^*,\bar{y})=\beta_1+\frac{\partial\beta_1}{\partial x}\partial x\\ &\beta_2=\sphericalangle(S_2^*,x)=\beta_2+\frac{\partial\beta_2}{\partial y}dy.\end{aligned}\right\}\qquad(22.14)$$

В выражения для некоторых углов поворота вошел угол $d\theta$. Он учитывает наклон сечения $dy=\text{const}$ относительно сечения $y=0$ вследствие кривизны элемента dy:

$$d\theta=\frac{dy}{R-w}=\frac{dy}{R\left(1-\frac{w}{R}\right)}\cong\frac{dy}{R}\left(1+\frac{w}{R}\right)=\left(\frac{1}{R}+\frac{w}{R^2}\right)dy.\qquad(22.15)$$

При составлении уравнений равновесия рассматриваемого элемента срединной поверхности считаем углы (22.13) и (22.14) малыми настолько, что их косинусы можно принять равными единице, а синусы равными самим углам.

Приравнивая нулю суммы проекций на направления $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ всех сил, действующих на рассматриваемый элемент, получаем

$$\left.\begin{aligned} &(T_1^*-T_1)\,dy+(S_2^*-S)\,dx-(N_2^*\beta_2^*-N_2\beta_2)\,dx-\\ &\qquad-(N_1^*\alpha_1^*-N_1\alpha_1)\,dy=0;\\ &(T_2^*-T_2)\,dx+(S_1^*-S)\,dy-(N_2^*\alpha_2^*-N_2\alpha_2)\,dx-\\ &\qquad-(N_1^*\beta_1^*-N_1\beta_1)\,dy=0;\\ &(T_1^*\alpha_1^*-T_1\alpha_1)\,dy+(T_2^*\alpha_2^*-T_2\alpha_2)\,dx+\\ &+(S_1^*\beta_1^*-S_1\beta_1)\,dy+(S_2^*\beta_2^*-S_2\beta_2)\,dx+\\ &+(N_1^*-N_1)\,dy+(N_2^*-N_2)\,dx+p(x,y)\,dx\,dy=0.\end{aligned}\right\}\qquad(22.16)$$

Приравнивая нулю суммы моментов всех сил относительно осей $\bar{y}$ и $\bar{x}$, находим еще два уравнения равновесия для элемента срединной поверхности оболочки

$$\left.\begin{aligned} &N_1^*\,dx\,dy+(M_1-M_1^*)\,dy+(H-H_2^*)\,dx=0;\\ &N_2^*\,dx\,dy+(M_2-M_2^*)\,dx+(H-H_1^*)\,dy=0.\end{aligned}\right\}\qquad(22.17)$$

При составлении уравнений (22.17) были отброшены члены третьего порядка малости: моменты от действия растягивающих и сдвигающих усилий и моменты от распределенной поперечной нагрузки $p(x, y)$. Последнее уравнение равновесия, которым выражается равенство нулю суммы моментов всех сил относительно оси $o\bar{z}$, тождественно выполняется с точностью до малых членов.

Подставляя в первые два уравнения (22.16) выражения для усилий (22.12) и углов поворота (22.13), (22.14), после несложных преобразований и отбрасывания членов третьего порядка малости получаем

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial y}-\frac{N_2}{R}=0.\qquad(22.18)$$

Третье уравнение (22.16) после некоторых очевидных преобразований и отбрасывания малых членов принимает вид

$$\left(\alpha_1\frac{\partial T_1}{\partial x}+\beta_2\frac{\partial S}{\partial y}\right)+\left(\beta_1\frac{\partial S}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial T_2}{\partial y}\right)+T_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}+$$

$$+S\left(\frac{\partial\beta_1}{\partial x}+\frac{\partial\beta_2}{\partial y}\right)+T_2\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial y}+\frac{1}{R}+\frac{w}{R^2}\right)+\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+p(x,y)=0.$$

Подставляя далее в него значения углов α_i и β_i согласно (22.13) и учитывая соотношения (22.18), находим

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{N_2}{R}\frac{\partial w}{\partial y}+T_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2S\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+$$

$$+T_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{R}+\frac{w}{R^2}\right)+p=0.\qquad(22.19)$$

Уравнения (22.17), если учесть выражения (22.12), приводятся к виду

$$N_1=\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y};\quad N_2=\frac{\partial M_2}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial x}.\qquad(22.20)$$

Таким образом, условия равновесия бесконечно малого элемента оболочки дают нам пять уравнений (22.18)—(22.20), в которые входят восемь неизвестных усилий: T_1, T_2, S, M_1, M_2, H, N_1, N_2, т. е. задача теории оболочек «внутренне» статически неопределима (при рассмотрении бесконечно малого элемента оболочки). Ее решение не может быть получено до тех пор, пока силы и моменты не будут связаны посредством определенного закона с деформациями оболочки.

§ 22.4. Зависимости между напряжениями, усилиями и перемещениями

Подставляя выражения для напряжений (22.9) в зависимости (22.11) и производя интегрирование по z, получаем

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{E_x h}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}\left(\varepsilon_x^0+\mu_{xy}\varepsilon_y^0\right);\\ T_2 &= \frac{E_y h}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}\left(\varepsilon_y^0+\mu_{yx}\varepsilon_x^0\right); \quad S=G_{xy}h\gamma_{xy}^0; \end{aligned}\right\} \qquad (22.21)$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -D_1\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_{xy}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{w}{R^2}\right)\right];\\ M_2 &= -D_2\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{w}{R^2}\right)+\mu_{yx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]; \quad H=-2D_\text{к}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \end{aligned}\right\} \qquad (22.22)$$

где

$$D_1=\frac{E_x t^3}{12\left(1-\mu_{xy}\mu_{yx}\right)}; \quad D_2=\frac{E_y t^3}{12\left(1-\mu_{xy}\mu_{yx}\right)}; \quad D_\text{к}=\frac{G_{xy}t^3}{12}. \qquad (22.23)$$

Величины D_1 и D_2 определяют изгибные жесткости оболочки вдоль образующей и в окружном направлении, а величина $D_\text{к}$ — жесткость оболочки на кручение.

Перерезывающие силы N_1 и N_2 можно выразить через прогиб $w(x, y)$, подставив выражения для моментов из (22.22) в уравнения равновесия (22.20):

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= -\left(D_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+D_3\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}+D_1\mu_{xy}\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial x}\right);\\ N_2 &= -\left(D_2\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+D_3\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}+D_2\mu_{yx}\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (22.24)$$

где величина

$$D_3=D_1\mu_{xy}+2D_\text{к} \qquad (22.25)$$

называется *приведенной жесткостью оболочки*.

Важно заметить, что введенные выше усилия T_1, T_2, S, N_1, N_2 и моменты M_1, M_2, H полностью характеризуют напряженное состояние оболочки, так как их знание позволяет определить компоненты напряжения в любой точке оболочки:

$$\sigma_x=\frac{T_1}{t}+\frac{12M_1 z}{t^3}; \quad \sigma_y=\frac{T_2}{t}+\frac{12M_2 z}{t^3}; \quad \tau_{xy}=\frac{S}{t}+\frac{12Hz}{t^3}. \qquad (22.26)$$

В справедливости зависимостей (22.26) можно убедиться путем непосредственной их подстановки в правые части приведенных выше выражений для T_1, T_2, S, N_1, N_2, M_1, M_2, H.

Определение касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} по значениям N_1 и N_2 не является столь определенным и точным. Здесь, как и в теории изгиба балок, исходят обычно из предположения о параболическом законе распределения поперечных касательных напряжений:

$$\tau_{xz}=\frac{6}{5}\frac{N_1}{t}\left[1-\left(\frac{2z}{t}\right)^2\right]; \quad \tau_{yz}=\frac{6}{5}\frac{N_2}{t}\left[1-\left(\frac{2z}{t}\right)^2\right]. \qquad (22.27)$$

§ 22.5. Дифференциальные уравнения теории тонких круговых цилиндрических оболочек

Полученные выше геометрические уравнения (22.2), (22.7), уравнения равновесия (22.18)—(22.20) и физические уравнения (22.21), (22.24) позволяют решить задачу о напряженно-деформированном состоянии оболочки, принимая за основные неизвестные перемещения или усилия. Однако для рассматриваемого класса оболочек более удобной и менее трудоемкой в вычислительном отношении оказывается смешанная схема решения, когда за основные неизвестные принимают прогиб оболочки $w(x, y)$ и функцию напряжений $F(x, y)$, связанную с усилиями T_1, T_2 и S зависимостями

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \sigma_x^0 t = t\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad S=t\tau_{xy}^0=-t\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y};\\ T_2 &= t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{1}{R}\left[D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{w}{R^2}\right)+D_3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (22.28)$$

Подставив выражения (22.28) и (22.24) в уравнения равновесия (22.18), можно убедиться в том, что они тождественно удовлетворяются.

Уравнение равновесия (22.19) после подстановки в него выражений для усилий (22.28) и (22.24) принимает вид

$$\begin{aligned} &D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+D_2\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu_{yx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\\ &+\frac{1}{R}\left[\left(D_2\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+D_3\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}+D_2\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial y}+\left(D_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\right.\right.\\ &\left.\left.+D_3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_2\frac{w}{R^2}\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{w}{R^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]=p(x, y)+\\ &+t\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}+\frac{w}{R^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]. \end{aligned} \qquad (22.28')$$

Еще одно уравнение для определения функций $w(x, y)$ и $F(x, y)$ можно получить из уравнения неразрывности деформаций (22.3). Разрешая зависимости (22.21) относительно деформаций срединной поверхности, находим

$$\varepsilon_x^0=\frac{1}{E_x t}\left(T_1-\mu_{yx}T_2\right); \quad \varepsilon_y^0=\frac{1}{E_y t}\left(T_2-\mu_{xy}T_1\right); \quad \gamma_{xy}^0=\frac{1}{G_{xy}t}S. \qquad (22.29)$$

Подставляя в уравнение неразрывности (22.3) выражения (22.29) и учитывая зависимости (22.28), получаем второе уравнение [в дополнение к уравнению равновесия (22.28′)] искомой системы

$$\frac{1}{E_y}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+\left(\frac{1}{G_{xy}}-2\mu_{yx}\frac{1}{E_x}\right)\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{1}{E_x}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+$$
$$+D_2\frac{1}{E_yRt}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\mu_{xy}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{w}{R^2}\right)+$$
$$+D_3\frac{1}{E_yRt}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\mu_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{22.30}$$

Использование системы нелинейных дифференциальных уравнений (22.28′) и (22.30) позволяет решить ряд важных задач строительной механики.

Функция напряжений $F(x,y)$ и прогиб оболочки $w(x,y)$, входящие в эти уравнения, должны удовлетворять определенным граничным условиям. Поскольку каждое из этих уравнений имеет четвертый порядок, на каждой кромке оболочки необходимо выписать по два граничных условия для функций $F(x,y)$ и $w(x,y)$ соответственно. Силовые граничные условия для прогиба оболочки $w(x,y)$ могут быть выписаны с учетом выражений (22.22) и (22.24) для усилий и моментов, а кинематические граничные условия — так же, как и в теории изгиба пластин. Граничные условия для функции напряжений $F(x,y)$ характеризуют характер закрепления и нагружения кромок срединной поверхности в отношении перемещений u_0, v_0 и усилий T_1, T_2, S. Эти граничные условия получают так же, как в плоской задаче теории упругости. Ограничившись этими замечаниями в отношении граничных условий, мы не будем приводить здесь общих формул, выписывая их в дальнейшем в каждом конкретном случае.

Решение дифференциальных уравнений (22.28′) и (22.30) при заданных граничных условиях позволяет найти прогиб оболочки $w(x,y)$ и функцию напряжений $F(x,y)$. Далее по формулам (22.28), (22.22), (22.24) можно вычислить усилия и моменты, а компоненты напряженного состояния — по формулам (22.26), (22.27).

Полагая $E_x=E_y=E$, $\mu_{xy}=\mu_{yx}=\mu$, $G_{xy}=E/[2(1+\mu)]$, из уравнений (22.28′) и (22.30) получаем соответствующие уравнения для изотропных оболочек

$$D\nabla^2\nabla^2 w+D\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+D\frac{1}{R}\left[\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2 w+\frac{w}{R^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{R}+\frac{w}{R^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\left(\nabla^2 w+\frac{w}{R^2}\right)\right]=p+t\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}+\frac{w}{R^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]; \tag{22.31}$$

$$\nabla^2\nabla^2 F=E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]+$$
$$+D\frac{1}{Rt}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\nabla^2 w+\frac{w}{R^2}\right). \tag{22.32}$$

где $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — гармонический оператор Лапласа: $D=\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ — изгибная жесткость изотропной оболочки. При $R=\infty$ уравнения (22.31) и (22.32) переходят в уравнения Кармана (21.24) для изотропных пластин.

В ряде случаев уравнения (22.28′) и (22.30) можно упростить. Так, при достаточно плавном изменении по поверхности оболочки нагрузки $p(x,y)$ влияние перерезывающей силы N_2 на напряженное состояние в срединной поверхности оказывается пренебрежимо малым. Это позволяет в левой части второго уравнения равновесия (22.18) отбросить последний член N_2/R и как следствие третий член в левой части уравнения (22.19). Тогда первые два уравнения равновесия (22.18), которые для рассматриваемого случая перепишутся в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial y}=0, \tag{22.33}$$

можно удовлетворить путем введения в рассмотрение функции напряжений $F(x,y)$, связанной с усилиями T_1, T_2, S уже обычными зависимостями плоской задачи теории упругости:

$$T_1=h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad T_2=h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad S=-h\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}. \tag{22.34}$$

Все вышеизложенное приводит к значительным упрощениям дифференциальных уравнений (22.28′) и (22.30):

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=p+h\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{w}{R^2}+\frac{1}{R}\right)\right]; \tag{22.35}$$

$$\frac{1}{E_y}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+\left(\frac{1}{G_{xy}}-2\mu_{yx}\frac{1}{E_x}\right)\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{1}{E_x}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{R}\right). \tag{22.36}$$

Для изотропной оболочки эти уравнения перепишутся в таком виде:

$$D\nabla^2\nabla^2 w=p+h\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{w}{R^2}+\frac{1}{R}\right)\right]; \tag{22.37}$$

$$\nabla^2\nabla^2 F=E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]. \tag{22.38}$$

Приведенные выше уравнения будут в дальнейшем использованы для решения задач изгиба и устойчивости тонкой круговой цилиндрической оболочки при действии на нее равномерного гидростатического давления. Решение этих задач имеет важное практическое значение.

§ 22.6. Типы напряженных состояний оболочек. Безмоментное напряженное состояние

Изложенная выше теория предполагала, что напряжения изгиба в оболочках [вторые слагаемые в формулах (22.26)] являются величинами одного порядка с цепными напряжениями (первые слагаемые в тех же формулах). Если же одни из этих напряжений пренебрежимо малы по сравнению с другими, то оказывается возможным внесение значительных упрощений в полученную выше систему дифференциальных уравнений.

Различают три типа напряженного состояния оболочек:

1. *Безмоментное состояние*, когда напряжения изгиба малы по сравнению с цепными напряжениями.

2. *Чисто изгибное состояние*, когда цепные напряжения пренебрежимо малы по сравнению с напряжениями изгиба.

3. *Смешанное напряженное состояние*, когда изгибные и цепные напряжения имеют один и тот же порядок.

Заметим, что термины «безмоментное» и «чисто изгибное» напряженные состояния не вполне точны, поскольку в безмоментном напряженном состоянии все же допускается существование малых изгибных напряжений, а в чисто изгибном — малых цепных напряжений.

Остановимся более подробно на безмоментном напряженном состоянии. Уравнения, описывающие такое состояние могут быть получены непосредственно из уравнений общей теории. С этой целью достаточно предположить, что влиянием изгибающих и крутящего мементов на напряженно-деформированное состояние оболочки можно пренебречь.

Безмоментная теория оболочек значительно проще общей теории. Кроме того, во многих важных для практики случаях эта теория дает вполне корректное представление о характере поведения оболочечной конструкции. Наконец, безмоментное состояние наиболее благоприятно для работы оболочечной конструкции, поэтому при проектировании оболочечных конструкций всегда стараются так выбрать форму оболочки и характер ее закрепления на контуре, чтобы действующая внешняя нагрузка создавала в оболочечной конструкции напряженное состояние, близкое к безмоментному. Именно этим можно объяснить то большое внимание, которое уделяется исследованиям работы безмоментных оболочек.

Как уже отмечалось, уравнения безмоментной теории могут быть получены непосредственно из уравнений общей теории, изложенной в § 22.5, если в них пренебречь моментами, т. е. положить

$$M_1 = M_2 = H = 0. \tag{22.39}$$

Тогда из уравнений (22.2) получим

$$N_1 = N_2 = 0, \tag{22.40}$$

а из формул (22.22)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2} = 0. \tag{22.41}$$

Таким образом, пренебрежение моментами приводит к необходимости выполнения дополнительных условий (22.40) и (22.41).

Вводя результат (22.39)—(22.41) в уравнения (22.18) и (22.19), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0; \quad T_2 = -pR, \tag{22.42}$$

которые выражают условия равновесия элемента оболочки, находящейся в безмоментном напряженном состоянии.

В системе (22.42) число неизвестных (T_1, T_2, S) равно числу уравнений, так что задача безмоментной теории оболочек «внутренне» статически определима (в отношении равновесия бесконечно малого элемента оболочки, в отношении же равновесия оболочки в целом не всегда).

Если усилия найдены, то для определения перемещений точек срединной поверхности могут быть использованы зависимости (22.2) и (22.29):

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{1}{E_x h}(T_1 - \mu_{yx} T_2); \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{w}{R} = \frac{1}{E_y h}(T_2 - \mu_{xy} T_1);$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = \frac{1}{G_{xy} h} S, \tag{22.43}$$

в которых правые части можно считать известными функциями x, y.

В безмоментной теории N_1, N_2, M_1, M_2 и H равны нулю во всех точках срединной поверхности, а следовательно, и на границах оболочки. Таким образом, кромки оболочки в безмоментном напряженном состоянии должны быть свободны от нормальных к срединной поверхности усилий, от изгибающих и крутящих моментов.

При формировании граничных условий в усилиях на контуре оболочки $x = \mathrm{const}$ могут быть заданы лишь усилия T_1 и S. После чего непосредственно из уравнений (22.42) можно найти значения внутренних усилий (T_1, T_2, S) по всей срединной поверхности оболочки.

Если граничные условия формируются в перемещениях, то в безмоментной теории можно задавать на контуре лишь компоненты перемещения, касательные к срединной поверхности, т. е. u_0 и v_0. В безмоментной теории распоряжаться свободно нормальным перемещением w и углом поворота ϑ на краю оболочки нельзя, так как их задание может привести к появлению на кромке соответствующих им перерезывающей силы и изгибающего момента.

Заметим далее, что дифференциальные уравнения безмоментной теории в усилиях и перемещениях имеют разный порядок: соответственно второй и четвертый. Поэтому краевые условия в безмоментной теории не могут быть даны полностью в усилиях: хотя бы одно из двух граничных условий должно быть выражено в компонентах перемещения. С физической точки зрения это объясняется тем, что оболочка, не обладающая изгибной жесткостью, является по существу механизмом, свободно допускающим перемещения от чистого изгиба, которые могут быть устранены путем введения на контуре оболочки определенных ограничений на тангенциальные перемещения.

§ 22.7. Изгиб изотропной замкнутой круговой цилиндрической оболочки, нагруженной равномерным гидростатическим давлением

Рассмотрим важный для судостроения случай, когда круговая цилиндрическая оболочка, опертая торцами на жесткие в своей плоскости диафрагмы (переборки), нагружена всесторонним внешним равномерным давлением p (рис. 22.7).

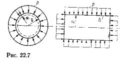


Рис. 22.7

Ввиду осевой симметрии нагрузки и оболочки напряженное состояние также будет осесимметричным, т. е. перемещения, деформации, усилия и напряжения не будут зависеть от окружной координаты y. В силу сказанного разрешающие уравнения (22.38) примут вид

$$\left.\begin{aligned} Dw^{\mathrm{IV}}(x) &= p + t\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right); \\ \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} &= -\frac{E}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (22.44)$$

Усилия и моменты определяются формулами, которые можно получить из более общих выражений (22.34), (22.22) и (22.24):

$$T_1 = t\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad T_2 = t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad S = -t\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y}; \qquad (22.45)$$

$$M_1 = -Dw''; \quad M_2 = -\mu Dw''; \quad N_1 = -Dw'''; \quad N_2 = H = 0. \qquad (22.46)$$

Рассматриваемую задачу удобно решать в перемещениях, для чего, используя выражения (22.45), исключим функцию напряжений из первого уравнения (22.44):

$$Dw^{\mathrm{IV}}(x) = p + T_1 w''(x) + T_2/R. \qquad (22.47)$$

Усилие T_1 действует в любом поперечном сечении оболочки равномерно по ее периметру и создается силой $p\pi R^2$, действующей на торцевые поперечные переборки, поэтому

$$T_1 \cong -p\pi R^2/(2\pi R) = -pR/2. \qquad (22.48)$$

Изменением радиуса оболочки, вследствие ее обжатия, здесь пренебрегалось.

Для определения усилия T_2 воспользуемся вторыми из зависимостей (22.29) и (22.2), которые применительно к нашему случаю перепишутся в таком виде:

$$\varepsilon_y^0 = (T_2 - \mu T_1)/Et; \quad \varepsilon_y^0 = -w/R, \qquad (22.49)$$

откуда, если учесть (22.48), можно получить

$$T_2 = -(Etw/R + \mu pR/2). \qquad (22.50)$$

Исключив из уравнения (22.47) с помощью формул (22.48) и (22.50) усилия T_1 и T_2, получим

$$Dw^{\mathrm{IV}}(x) + pRw''(x)/2 + Etw(x)/R^2 = (1 - \mu/2)\,p. \qquad (22.51)$$

Этим дифференциальным уравнением в совокупности с граничными условиями по торцам оболочки описывается ее прогиб.

Как видно из уравнения (22.51), задача свелась к определению прогиба балки-полоски единичной ширины с изгибной жесткостью D, вырезанной из оболочки вдоль образующей. Балка-полоска лежит на упругом основании постоянной жесткости интенсивностью

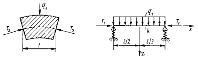


Рис. 22.8

$k = Et/R^2$ и находится в условиях сложного изгиба под действием равномерной нагрузки $q_1 = (1 - 0{,}5\mu)\,p$ и сжимающих сил $T_1 = 0{,}5pR$ (рис. 22.8).

Общее решение дифференциального уравнения (22.51) нетрудно получить, пользуясь известными методами построения общего решения обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Корни характеристического уравнения, а следовательно, и решение в общем случае будут зависеть от соотношения коэффициентов D, $pR/2$ и Et/R^2. При характерных для судовых конструкций соотношениях между указанными коэффициентами общее решение уравнения (22.51) имеет вид

$$w(x) = [pR^2/(Et)](1 - \mu/2) + C_1 \operatorname{ch}\delta x \cos\gamma x + C_2 \operatorname{sh}\delta x \sin\gamma x + C_3 \operatorname{ch}\delta x \sin\gamma x + C_4 \operatorname{sh}\delta x \cos\gamma x. \qquad (22.52)$$

Здесь C_i — произвольные постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий;

$$\delta = \alpha\sqrt{1-\beta}; \quad \gamma = \alpha\sqrt{1+\beta}, \tag{22.53}$$

где

$$\alpha = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)/(R^2t^2)}; \quad \beta = (R/t)^2 p\sqrt{3(1-\mu^2)}/(2E).$$

Решение (22.52) применимо при $\gamma < 1$. Замкнутая цилиндрическая круговая оболочка, ограниченная по концам поперечными переборками, не может воспринимать больших внешних давлений, если расстояние между переборками относительно велико. Такая оболочка может потерять устойчивость даже при весьма незначительной величине наружного давления. Наиболее эффективным средством повышения устойчивости цилиндрических оболочек является

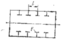


Рис. 22.9

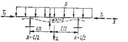


Рис. 22.10

подкрепление оболочек кольцевыми замкнутыми ребрами жесткости (шпангоутами). Последние, как правило, ставятся на равных расстояниях друг от друга.

В этой связи интересно рассмотреть работу на изгиб замкнутой цилиндрической круговой оболочки, подкрепленной между поперечными переборками равноотстоящими одинаковыми кольцевыми ребрами (шпангоутами) с площадью поперечного сечения F (рис. 22.9).

Пренебрегая влиянием жесткости поперечных переборок на работу оболочки в ее средней части, можно считать, что радиальные обжатия оболочки на некотором удалении от поперечных переборок будут симметричны относительно плоскости подкрепляющих ее шпангоутов. В силу этого мы можем ограничиться рассмотрением изгиба оболочки лишь в пределах одного пролета.

Если поместить начало координат посередине между шпангоутами (рис. 22.10), то в связи с симметрией изгиба оболочки относительно выбранного начала координат в выражении (22.52) следует сохранить лишь четные члены, т. е. положить $C_3 = C_4 = 0$. Выражение (22.52) при этом примет вид

$$w(x) = [pR^2/(Et)](1-\mu/2) + C_1 \operatorname{ch}\delta x\cos\gamma x + C_2\operatorname{sh}\delta x\sin\gamma x. \tag{22.54}$$

Ввиду симметрии упругой поверхности оболочки относительно плоскости каждого из подкрепляющих ее шпангоутов углы поворота оболочки на шпангоутах будут равны нулю:

$$\text{при} \quad x = \pm\frac{l}{2} \quad \frac{dw}{dx} = 0. \tag{22.55}$$

Второе граничное условие получим, если рассмотрим взаимодействие оболочки и подкрепляющего ее шпангоута. При действии на оболочку давления p шпангоут подвергается со стороны оболочки воздействию некоторой равномерно распределенной нагрузки интенсивностью p_1. Погонная нагрузка p_1 уравновешивается перерезывающими силами, действующими слева и справа от опорного сечения:

$$p_1 = Dw'''\Big|_{x=-l/2}^{x=l/2} = 2Dw'''\big|_{x=l/2}. \tag{22.56}$$

Интенсивность p_1 выразим через прогиб оболочки. Напряжение $\sigma_{шп}$, действующее в поперечном сечении шпангоута, может быть определено, с одной стороны, из очевидного равенства

$$\sigma_{шп} = -p_1R/F, \tag{22.57}$$

а с другой стороны, по формуле

$$\sigma_{шп} = E\varepsilon_y^0 = -Ew(x = l/2)/R. \tag{22.58}$$

Приравнивая правые части выражений (22.57) и (22.58), разрешая полученное при этом уравнение относительно p_1, находим

$$p_1 = w(x = l/2)EF/R^2. \tag{22.59}$$

Исключая p_1 с помощью (22.59) из (22.56), получаем второе недостающее граничное условие

$$\text{при} \quad x = l/2 \quad w = 2DR^2w'''/(EF). \tag{22.60}$$

Подставляя выражение для $w(x)$ из выражения (22.54) в граничные условия (22.55) и (22.60), находим два уравнения, совместное решение которых позволяет определить неизвестные C_1 и C_2:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\frac{2pR^2}{Et}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\frac{u_1\operatorname{ch}u_1\sin u_2 + u_2\operatorname{sh}u_1\cos u_2}{u_2\operatorname{sh}2u_1 + u_1\sin 2u_2}\varepsilon_1;\\ C_2 &= -\frac{2pR^2}{Et}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\frac{u_2\operatorname{ch}u_1\sin u_2 - u_1\operatorname{sh}u_1\cos u_2}{u_2\operatorname{sh}2u_1 + u_1\sin 2u_2}\varepsilon_1. \end{aligned}\right\} \tag{22.61}$$

Здесь

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1 + ltF_1(u_1, u_2)/F}; \quad u_1 = \frac{\delta l}{2} = u\sqrt{1+\beta}; \quad u_2 = \frac{\gamma l}{2} = u\sqrt{1-\beta} \tag{22.62}$$

где

$$F_1(u_1, u_2) = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{\operatorname{ch}2u_1 - \cos 2u_2}{u_2\operatorname{sh}2u_1 + u_1\sin 2u_2}; \quad u = 0{,}6425\frac{l}{\sqrt{Rt}}.$$

Располагая окончательным выражением для $w(x)$, можно определить все интересующие нас элементы изгиба оболочки.

Изложенное выше решение, полученное П. Ф. Папковичем [36], табулировано и снабжено расчетными графиками, поэтому практическое применение этого решения оказывается весьма простым.

Полученное решение учитывает влияние продольных усилий на изгиб оболочки [второй член в левой части дифференциального уравнения (22.51)]. Однако, как показывают числовые расчеты, этим влиянием в большинстве случаев можно пренебречь. Тогда вместо (22.51) следовало бы рассмотреть уравнение

$$Dw^{IV}(x) + kw(x) = p(1-\mu/2). \qquad (22.63)$$

Дифференциальное уравнение (22.63) и граничные условия (22.55), (22.60) описывают изгиб однопролетной балки, лежащей на упругом основании, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой и жестко заделанной по концам на упругих опорах с коэффициентом податливости A, равным

$$A = 2R^2/(EF). \qquad (22.64)$$

Используя решение подобной задачи, приведенное в гл. 16, нетрудно получить окончательные формулы для определения наиболее характерных элементов изгиба рассматриваемой оболочки: прогиба оболочки в сечении посередине между шпангоутами

$$w(0) = [pR^2/(Et)](1-\mu/2)[1-\varphi_1(u)/(1+B_1)]; \qquad (22.65)$$

изгибающего момента в поперечном сечении посередине пролета

$$M(0) = -(pl/24)(1-\mu/2)\varkappa_1(u)/(1+B_1); \qquad (22.66)$$

изгибающего момента в опорных сечениях

$$M_1(\pm l/2) = (pl^2/12)(1-\mu/2)\chi_2(u)/(1+B_1); \qquad (22.67)$$

прогиба оболочки в опорном сечении

$$w(l/2) = [pR^2/(Et)](1-\mu/2)B_1/(1+B_1). \qquad (22.68)$$

Здесь $B_1 = lt\mu_1(u)/E$, а $\varphi_1(u)$, $\chi_1(u)$, $\chi_2(u)$ и $\mu_1(u)$ — табулированные функции, значения которых в функции от аргумента $u = 0{,}6425l/\sqrt{Rt}$ приведены в табл. 16.1.

Располагая значениями момента $M_1(x)$ посередине пролета и в опорном сечении, можно определить в тех же сечениях наибольшие нормальные напряжения на наружной и внутренней поверхностях оболочки:

$$\sigma_1 = T_1/t \mp 6M_1/t^2 = -pR/(2t) \mp 6M_1/t^2. \qquad (22.69)$$

Верхний знак перед вторым членом правой части формулы (22.69) соответствует наружной поверхности оболочки, а нижний — внутренней.

Для определения нормальных напряжений σ_2 в меридиональных сечениях оболочки воспользуемся законом Гука для плоского напряженного состояния:

$$\varepsilon_2 = (\sigma_2 - \mu\sigma_1)/E. \qquad (22.70)$$

Так как деформация оболочки симметрична относительно оси x и толщина оболочки мала по сравнению с радиусом, деформацию ε_2 можно принять постоянной по толщине:

$$\varepsilon_2 \cong \varepsilon_2^0 = -w/R. \qquad (22.71)$$

Из совместного рассмотрения равенств (22.70) и (22.71) найдем

$$\sigma_2 = -wE/R + \mu\sigma_1. \qquad (22.72)$$

Как видно, для определения σ_2 необходимо предварительно определить напряжения σ_1 и прогиб w.

Нормальные напряжения в поперечном сечении ребер жесткости, подкрепляющих оболочку, на основании выражений (22.57) и (22.59) будут равны

$$\sigma_{шп} = -Ew(x = l/2)/R. \qquad (22.73)$$

§ 22.8. Устойчивость изотропной круговой цилиндрической оболочки, нагруженной равномерным давлением

Круговые цилиндрические оболочки, толщина которых выбирается из условий прочности, часто оказываются весьма тонкими. В связи с этим важное значение приобретают вопросы устойчивости таких оболочек.

Дифференциальные уравнения устойчивости. Исследование устойчивости оболочек производят общими для всех упругих систем методами (см. гл. 20). Ограничиваясь рассмотрением устойчивости оболочки при малых отклонениях от положения равновесия (устойчивость «в малом»), воспользуемся для наших целей упрощенными линейными дифференциальными уравнениями (22.37) и (22.38).

Пусть к упругой оболочке прикладываются внешние силы, статически возрастающие от нуля; непрерывно растущей внешней нагрузке соответствует нарастание перемещений точек оболочки. Каждому значению нагрузки отвечает вполне определенное (единственное) положение равновесия оболочки, если она устойчива.

При достижении нагрузкой некоторого значения в бесконечно малой окрестности основного, т. е. исследуемого положения равновесия оболочки, непрерывно развивающегося из ее естественного состояния, оболочка окажется в другом положении равновесия. Следовательно, при данной нагрузке основное положение равновесия оболочки перестало быть устойчивым и стало нейтральным. При дальнейшем росте нагрузки основное положение равновесия становится неустойчивым. Нагрузка, соответствующая нейтральному положению равновесия оболочки, называется эйлеровой.

Метод нейтрального равновесия исследования устойчивости (см. гл. 20) и состоит в отыскании такой нагрузки, при которой в бесконечно малой окрестности основного положения равновесия оболочки становится возможным еще хотя бы одно положение равновесия.

Пусть $w_1(x, y)$ и $F_1(x, y)$ — прогиб и функция напряжений в основном положении равновесия оболочки, а $w_2(x, y)$ и $F_2(x, y)$ — то же в бесконечно близком к нему отклоненном положении. Если отклоненное положение равновесное, то оно удовлетворяет, как и основное, системе уравнений (22.37) и (22.38). Обозначим

$$\tilde{w}(x,\ y)=w_2(x,\ y)-w_1(x,\ y);\quad \tilde{F}(x,\ y)=F_2(x,\ y)-F_1(x,\ y). \tag{22.74}$$

Очевидно, $\tilde{w}$ и $\tilde{F}$ — бесконечно малые вариации основного положения равновесия.

Запишем уравнения (22.37) и (22.38) для обоих положений оболочки, а затем вычтем почленно из уравнений второго положения соответствующие уравнения первого. Сохранив только линейные относительно $\tilde{w}$ и $\tilde{F}$ члены, получим дифференциальные уравнения устойчивости рассматриваемой оболочки

$$D\nabla^2\nabla^2\tilde{w}=t\Big[\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}-2\Big(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\,\partial y}\Big)+\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}\Big(\frac{\tilde{w}}{R^2}+\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial y^2}\Big)+\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial x^2}\Big(\frac{1}{R}+\frac{w_1}{R^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\Big)\Big]; \tag{22.75}$$

$$\nabla^2\nabla^2\tilde{F}=E\Big(2\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}\frac{\partial w_1}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}\Big). \tag{22.76}$$

Уравнения (22.75) и (22.76) однородны относительно $\tilde{w}$ и $\tilde{F}$. Граничные условия для вариаций $\tilde{w}$ и $\tilde{F}$ выводятся аналогично; они также однородны.

Система линейных уравнений (22.75) и (22.76) при линейных однородных граничных условиях всегда имеет нулевое решение: $\tilde{w}=0$, $\tilde{F}=0$. Если другого решения нет, то $w_2=w_1$, $F_2=F_1$ и $w_1(x,\ y)$ будет устойчивым и единственным положением равновесия. Если же при некотором значении внешней нагрузки, которая неявно входит в уравнения (22.75) и (22.76) через функции w_1 и F_1, имеется ненулевое решение: $\tilde{w}\neq 0$, $\tilde{F}\neq 0$, то w_1 будет характеризовать нейтральное положение равновесия, а соответствующая ему нагрузка p является эйлеровой.

Строгое решение задачи устойчивости оболочки выполняется в следующем порядке: сначала интегрируют уравнения (22.37) и (22.38) при заданных граничных условиях и определяют w_1 и F_1 как некоторые функции внешней нагрузки p. Найденные функции $w_1(x,\ p)$ и $F_1(x,\ p)$ подставляют в систему уравнений устойчивости (22.75) и (22.76), а затем отыскивают ненулевые решения этой системы при соответствующих однородных граничных условиях. Значения нагрузки, соответствующие указанным ненулевым решениям, являются искомыми эйлеровыми нагрузками.

Уравнения (22.75) и (22.76) могут быть использованы для исследований устойчивости круговых цилиндрических оболочек при любых нагрузках и произвольных условиях опирания по торцам оболочки.

Устойчивость свободно опертой оболочки. Рассмотрим простейший случай опирания торцевых кромок оболочки на круглые диафрагмы, абсолютно жесткие в своей плоскости и абсолютно гибкие из нее.

Основное напряженное состояние оболочки отличается от безмоментного, однако для упрощения решения обычно его все же считают безмоментным. Тогда, согласно выражениям (22.48) и (22.42), докритические усилия равны

$$(T_1)_1=-pR/2;\quad (T_2)_1=-pR;\quad (S)_1=0, \tag{22.77}$$

а прогиб $w_1(x)=\mathrm{const}$. Такое безмоментное состояние точно соответствует оболочке, не имеющей опор в торцевых сечениях до момента потери устойчивости. Выходит что упомянутые выше торцевые диафрагмы устанавливаются как бы в момент потери устойчивости.

На основании формул (22.34) и (22.77) можно записать

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}=-\frac{pR}{2t};\quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}=-\frac{pR}{t};\quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y}=0. \tag{22.78}$$

При докритических усилиях (22.78) и докритическом прогибе $w_1(x)=\mathrm{const}$ уравнения устойчивости круговой цилиндрической изотропной оболочки (22.75) и (22.76) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2\tilde{w}&=-\frac{pR}{2}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}-pR\Big(\frac{\tilde{w}}{R^2}+\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial y^2}\Big)+\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial x^2}\Big(\frac{t}{R}+\frac{tw_1}{R^2}\Big);\\ \nabla^2\nabla^2\tilde{F}&=-\frac{E}{R}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}.\end{aligned}\right\} \tag{22.79}$$

Применяя к первому из этих уравнений операцию $\nabla^2\nabla^2(\ )$, а ко второму $-\dfrac{\partial^2(\ )}{\partial x^2}$, получаем два уравнения, из совместного рассмотрения которых, исключая функцию $\tilde{F}(x,\ y)$, находим

$$\nabla^2\nabla^2\Big[D\nabla^2\nabla^2\tilde{w}+\frac{pR}{2}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}+pR\Big(\frac{\tilde{w}}{R^2}+\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial y^2}\Big)\Big]+\frac{tE}{R^2}\frac{\partial^4\tilde{w}}{\partial x^4}=0. \tag{22.80}$$

При любых целых числах m и n функция

$$\tilde{\omega}(x,\ y)=a_{mn}\sin m\pi x/l\,\sin n\pi y/R \tag{22.81}$$

удовлетворяет условиям свободного опирания $\Big(\tilde{w}=\dfrac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}=0\Big)$ на торцевых кромках $x=0;\ l$. Подставляя (22.81) в уравнение (22.80) и сокращая на неравные нулю общие множители, получаем

$$(m^2\pi^2/l^2+n^2/R^2)^2\{D(m^2\pi^2/l^2+n^2/R^2)^2-pR[m^2\pi^2/(2l^2)+n^2/R^2-1/R^2]\}+Etm^4\pi^4/(R^2l^4)=0. \tag{22.82}$$

Из уравнения (22.82) найдем формулу для эйлеровой нагрузки

$$p_э=(p_{mn})_{\min}=\min\Big\{\frac{Et}{R}\frac{1}{m^2\pi^2R^2/(2l^2)+n^2-1}\times\Big[\frac{m^4\pi^4R^4/l^4}{(m^2\pi^2R^2/l^2+n^2)^2}+\frac{D}{EtR^2}(m^2\pi^2R^2/l^2+n^2)^2\Big]\Big\}. \tag{22.83}$$

У каждой оболочки наименьшему $(p_{mn})_{\min}$ соответствует определенное сочетание чисел m и n, определяющих соответственно число полуволн, образующихся при потере устойчивости оболочки по ее длине, и число волн по ее окружности.

Для не очень длинных оболочек наименьшему значению p_{mn} отвечает $m=1$ и формула (22.83) принимает вид

$$p_{\text{э}}=\min p_{1n}=\min\left\{\frac{Et}{R}\,\frac{1}{0{,}5\alpha^2+n^2-1}\left[\frac{\alpha^4}{(\alpha^2+n^2)^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{t^2}{12(1-\mu^2)R^2}(\alpha^2+n^2)\right]\right\}. \qquad (22.84)$$

Формула (22.84) была получена в 1929 г. Р. Мизесом. Ее принято называть *второй формулой Мизеса* (первая его формула соответствует только нагружению давлением p боковой поверхности, т. е. при $T_1=0$).

В формуле (22.84) n должно быть выбрано так, чтобы значение p_{1n} было минимальным. Для коротких оболочек ($l<R$) число n получается сравнительно большим и при разыскании минимума p_{1n} это число можно считать непрерывным аргументом. Кроме того, в формуле (22.84) можно положить

$$0{,}5\alpha^2+n^2-1\approx 0{,}5\alpha^2+n^2. \qquad (22.85)$$

Считая n^2 непрерывно изменяющейся переменной, П. Ф. Папкович нашел аналитический минимум p_{1n} (при $E=2\cdot 10^5$ МПа, $\mu=0{,}3$):

$$p_{\text{э}}=1{,}91\,(100t/R)^2\,(100tR/l^2)^{0{,}58}\ \text{МПа}. \qquad (22.86)$$

В. Винденбург и Р. Триллинг, сотрудники Американского опытового бассейна, минимизируя p_{1n} по n, получили из (22.84) с учетом допущения (22.85) следующее выражение:

$$p_{\text{э}}=\frac{1{,}83\,(100t/R)^{3/2}\,100t/l}{1-0{,}62\sqrt{Rt}/l}\ \text{МПа}. \qquad (22.87)$$

Формулу (22.86) принято называть *второй формулой Мизеса в обработке П. Ф. Папковича*, а формулу (22.87) — *формулой Американского опытового бассейна.*

Приведенные выше формулы для определения $p_{\text{э}}$ свободно опертых круговых цилиндрических оболочек были получены исходя из упрощенных уравнений (22.75) и (22.76), в которых пренебрегалось членами N_2/R, учитывающими влияние перерезывающей силы на равновесие элемента срединной поверхности оболочки. В связи с этим полученными формулами (22.84), (22.86), (22.87) рекомендуется пользоваться лишь для коротких оболочек.

Если при выводе уравнений устойчивости исходить из более точных уравнений (22.35) и (22.36), то задав форму потери устойчивости в виде (22.81), при $m=1$ можно получить следующую более точную формулу:

$$p_{\text{э}}=\min\left[\frac{Et}{R}\,\frac{1}{0{,}5\alpha^2+n^2-1}\left\{\frac{t^2}{12(1-\mu^2)R^2}\left[(\alpha^2+n^2-1)^2+(1-\mu)\alpha^2\right]+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+n^2}\right)^2\left[\alpha^2+\frac{t^2}{12(1-\mu^2)R^2}(\alpha^2-\mu n^2)(\alpha^2+n^2-1)\right]\right\}\right]. \qquad (22.88)$$

Для длинных оболочек, у которых $\alpha=\pi R/l$ оказывается малой величиной, формула (22.84) по сравнению с (22.88) становится весьма неточной. Так, в случае бесконечно длинной оболочки $\alpha=0$, и по формуле (22.88) получаем

$$p_{\text{э}}=\min\left[D(n^2-1]/R^3\right]=3D/R^3, \qquad (22.89)$$

что соответствует эйлеровой нагрузке кольца единичной ширины с изгибной жесткостью D. Согласно же формуле (22.84) при $\alpha=0$ и $n=2$ значение $p_{\text{э}}$ получается в 1,33 раза больше. В случае коротких оболочек, когда число волн потери устойчивости n оказывается порядка 10 и более, формулы (22.84) и (22.88) дают практически одинаковые результаты.

В заключение рассмотрим задачу об устойчивости оболочки, предполагая, что материал ее является ортотропным с направлением главных осей упругости вдоль образующей и в окружном направлении [34, 55]. Применяя для вывода дифференциальных уравнений устойчивости ортотропной оболочки способ, изложенный выше, используя при этом уравнения (22.28′), (22.30) и принимая форму потери устойчивости оболочки в виде $\tilde{w}=a_{1n}\sin\pi x/L\,\sin n_y/R$, получаем

$$p_{\text{э}}=\min\{[D_n/R^3+t\beta_n\alpha^2/(Rt_n)]/\gamma_n\}. \qquad (22.90)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned}&D_n=D_1\alpha^4+2D_3\alpha^2(n^2-1)+D_2(n^2-1)^2+(D_3-\mu_{yx}D_2)\alpha^2;\\&\beta_n=\alpha^2+(\alpha^2-\mu_{xy}n^2)\left[D_3\alpha^2+D^2(n^2-1)\right]/(E_yR^2t);\ \alpha=\pi R/L;\\&t_n=\alpha^4\delta_2+2\delta_3\alpha^2n^2+\delta_1n^4;\ \gamma_n=0{,}5\alpha^2+n^2-1,\end{aligned}\right\} \qquad (22.91)$$

где $\delta_1=1/E_x$; $\delta_2=1/E_y$; $\delta_3=1/(2G_{xy})-\mu_{yx}/E_x$. В формуле (22.90) число n выбирается так, чтобы величина $p_{\text{э}}$ была минимальной.

Выражение (22.90) используется для расчета на устойчивость оболочек из ортотропного материала, например из стеклопластика.

§ 22.9. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми и продольными ребрами и нагруженной всесторонним давлением

Для гладких оболочек (без ребер) часто толщина оболочки, выбранная из условия обеспечения устойчивости, оказывается гораздо больше толщины, требуемой для обеспечения условий прочности. Весьма эффективным средством повышения устойчивости оболочки является подкрепление ее ребрами жесткости. В частности, с целью повышения устойчивости стальные оболочки подкрепляют одинаковыми равноотстоящими стрингерами (продольными ребрами) и шпангоутами (кольцевыми ребрами). Если число стрингеров и шпангоутов в отдельности достаточно велико, то для оценки устойчивости подкрепленной оболочки можно использовать приближенное решение, которое основано на том, что площади и моменты инерции подкрепляющих оболочку ребер жесткости мысленно «размазываются» по срединной поверхности оболочки. В результате реальная оболочка с ребрами заменяется условной гладкой оболочкой, но уже ортотропной (конструктивно).

Пусть круговая цилиндрическая изотропная оболочка толщиной t подкреплена шпангоутами с одинаковой шпацией l и стрингерами, отстоящими один от другого по дуге окружности на одинаковом расстоянии b (рис. 22.11). Площади поперечных сечений стрингеров и шпангоутов без присоединенных поясков соответственно равны f_1 и f_2, а моменты инерции с присоединенными поясками соответственно I_1 и I_2. Материал оболочки, стрингеров и шпангоутов одинаков, модуль продольной упругости E, коэффициент Пуассона μ.

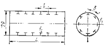


Рис. 22.11

Условия равенства погонных жесткостей ортотропной и подкрепленной оболочки следующие:

$$E_x t = E(t + f_1/b);\quad D_1 = EI_1/b + D;\quad E_y t = E(t + f_2/l);\quad D_2 = EI_2/l + D. \tag{22.92}$$

В левых частях равенств (22.92) стоят величины погонных жесткостей гладкой ортотропной оболочки, а в правых — подкрепленной. Решая равенства (22.92) относительно упругих постоянных приведенной ортотропной оболочки, получаем

$$E_x = E[1 + f_1/(bt)];\quad E_y = E[1 + f_2/(lt)];\quad D_1 = D + EI_1/b;$$
$$D_2 = D + EI_2/l. \tag{22.93}$$

Если учесть, что стрингеры и шпангоуты не влияют на жесткость оболочки при сдвиге, и пренебречь малой жесткостью ребер на кручение, то модуль сдвига и жесткость на кручение приведенной ортотропной оболочки должны быть приняты такими же, как и для неподкрепленной изотропной оболочки:

$$G = E/[(2(1+\mu)];\quad D_к = Gt^3/12 = (1-\mu)D/2. \tag{22.94}$$

Коэффициенты Пуассона μ_{xy} и μ_{yx} приведенной ортотропной оболочки определяются по формулам

$$\mu_{xy} = \mu E/E_x,\quad \mu_{yx} = \mu E/E_y. \tag{22.95}$$

Подстановка выражений (22.93)—(22.95) в формулы (22.90) и (22.91) позволит определить верхнее критическое давление для оболочки, подкрепленной стрингерами и шпангоутами.

Если оболочка подкреплена только равноотстоящими шпангоутами, то на основании формул (22.93) и (22.95) получим

$$E_x = E;\quad E_y = E[1 + f_2/(lt)];\quad D_1 = D;\quad D_2 = EI_2/l + D;$$
$$\mu_{xy} = \mu;\quad \mu_{yx} = \mu E/E_y;\quad D_3 = 2D_к + \mu_{xy}D_1 = D;$$
$$\delta_1 = 1/E_x;\quad \delta_2 = 1/E_y;\quad \delta_3 = (1 + \mu - \mu E/E_y)/E.$$

Подстановка этих значений в выражения (22.90) и (22.91) приводит к формуле

$$p_э = \min \frac{1}{0{,}5\alpha^2 + n^2 - 1}\left\{\frac{EI_2}{R^3 l}\left[(n^2-1)^2 + \frac{\alpha^2}{\Delta_n}(n^2-1)(\alpha^2 - \mu n^2)\right] + \right.$$
$$+ \frac{Et}{R}\frac{(1+k)\alpha^4}{\Delta_n} + \frac{D}{R^3}\left[\frac{\alpha^2}{\Delta_n}(\alpha^2 - \mu n^2)(\alpha^2 + n^2 - 1) + \right.$$
$$\left.\left. + (1-\mu)\alpha^2 + (\alpha^2 + n^2 - 1)^2\right]\right\}, \tag{22.96}$$

где $k = f_2/(lt)$; $\Delta_n = (\alpha^2 + n^2)^2 + kn^2[2(1+\mu)\alpha^2 + n^2]$. Для судовых оболочек значение k намного меньше единицы, а изгибная жесткость шпангоутов EI_2 намного больше жесткости оболочки в пределах шпации Dl. Поэтому с небольшой погрешностью в безопасную сторону в формуле (22.96) можно положить $k = 0$, $D = 0$. Если к тому же отбросить малые члены в первой квадратной скобке формулы (22.96), то окончательно получим

$$p_э = \min\left\{\frac{E}{0{,}5\alpha^2 + n^2 - 1}\left[\frac{I_2}{R^3 l}(n^2-1)^2 + \frac{t}{R}\frac{\alpha^4}{(\alpha^2 + n^2)^2}\right]\right\}. \tag{22.97}$$

Эта формула и является расчетной для оболочки, подкрепленной шпангоутами и свободно опертой на жесткие переборки в торцевых сечениях. Минимум $p_э$ получается, как правило, если $n = 2$; 3.

Если положить в формуле (22.97) $\alpha = 0$, т. е. рассматривать бесконечно длинную оболочку, то при $n = 2$ получим формулу для эйлеровой нагрузки замкнутого кругового кольца, нагруженного равномерным нормальным давлением ($q = pl$),

$$q_э = 3EI_2/(R^3). \tag{22.98}$$

§ 22.10. Практический расчет оболочек на устойчивость

Изложенные выше результаты исследования устойчивости оболочек при малых отклонениях от положения равновесия и формулы для верхней критической нагрузки были получены в предположении, что форма оболочки идеальная и материал ее подчиняется закону Гука. Реальные оболочки всегда имеют отклонения от правильной геометрической формы (начальные погиби), а также определенный разброс механических характеристик материала и отступления по толщине. Кроме того, при высоких критических напряжениях уже требуется учет влияния на устойчивость отступления от закона Гука. Все указанные факторы могут существенно снизить значение критического давления, что подтверждается экспериментальными данными.

В практике судостроительных расчетов действительные значения критических нагрузок принято вычислять по полуэмпирической формуле

$$p_{кр} = \eta_1\eta_2 p_э, \tag{22.99}$$

где $p_э$ — эйлерово давление оболочки, вычисленное по теоретическим формулам устойчивости (22.86) или (22.87) для идеальной круговой оболочки без учета начальных погибей и отступлений от закона Гука; η_1 — поправочный коэффициент, определяемый на основании опытных данных и учитывающий отступления от идеальной круговой формы цилиндрической оболочки; η_2 — поправочный коэффициент, учитывающий отступления от закона Гука.

Коэффициент η_1 определяется на основании обработки результатов испытаний опытных оболочек на устойчивость. Он изменяется в пределах $0{,}6 < \eta_1 < 0{,}8$. Коэффициент $\eta_2 = \sigma_{кр}/\sigma_э$ может быть определен по графикам рис. 20.11 в зависимости от отношения $\sigma_э/\sigma_т$, где $\sigma_э$ представляет эйлерово напряжение, соответствующее верхнему критическому давлению $p_э$, и определяется формулой

$$\sigma_э = 0{,}95\eta_1 p_э R/t. \tag{22.100}$$

Здесь множитель 0,95 учитывает отступления в толщине оболочки.

Конечно, такой способ учета физической нелинейности материала весьма условен. В действительности коэффициент η_2 переменен, поскольку напряжения неравномерно распределены по длине шпации. Кроме того, при расчете общей устойчивости подкрепленных оболочек не учитывается разная степень напряженности обшивки и шпангоутов. Все отмеченные выше условности учитываются в неявной форме среди ряда других факторов поправочным коэффициентом η_1, вводимым в формулы устойчивости оболочек (22.99) на основании опытных данных.

Формулу (22.29) можно применять не только для стальных оболочек, но и для оболочек из других материалов, подставляя в нее значения η_1, η_2 и $p_э$, соответствующие исходным данным рассматриваемой оболочки и ее материалу.

Для оболочек, подкрепленных шпангоутами, необходимо рассчитывать местную и общую устойчивость. Расчет местной устойчивости оболочки между шпангоутами производят по формулам (22.84) и (22.99), а общей устойчивости между поперечными переборками — по формулам (22.97) и (22.99).

В заключение отметим, что, несмотря на большое число решений линейных задач изгиба и устойчивости оболочек, линейная теория еще не завершена. Предстоит разработать эффективные методы решения задач изгиба и устойчивости оболочек произвольной геометрической формы и переменной толщины, подкрепленных ребрами жесткости и ослабленных вырезами и т. п. Важным является уточнение пределов применимости приближенных уравнений различного типа и приближенных решений, удобных для практических расчетов. Представляют интерес решения линейных задач для внешних нагрузок и граничных условий более широкого класса. Весьма важно располагать оценкой влияния на устойчивость оболочек начальных погибей, моментности докритического напряженного состояния. В связи с современной тенденцией повышения напряженности конструкций наблюдается стремление к

уменьшению толщины оболочек, что делает их менее жесткими. Это, а также внедрение в строительную практику пластмасс, обладающих, как правило, небольшой жесткостью, обусловливает постановку и решение как геометрически, так и физически нелинейных задач теории изгиба и устойчивости оболочек.

Контрольные вопросы

1. Какое упругое тело называется оболочкой?
2. Какие допущения принимаются в теории тонких оболочек?
3. Как классифицируются оболочки?
4. Какие усилия действуют в нормальных к срединной поверхности сечениях оболочки?
5. Какие основные уравнения характеризуют напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки и каков их физический смысл?
6. Какие упрощения можно сделать в основных уравнениях для пологих оболочек и на каком основании?
7. Чем характерно безмоментное напряженное состояние и при каких условиях оно возникает?
8. Описать расчетную схему круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной одинаковыми равноотстоящими шпангоутами при действии на оболочку всестороннего равномерного давления.
9. Как получить уравнения устойчивости оболочек «в малом»?
10. Чему равно эйлерово давление для свободно опертой изотропной оболочки? Каковы формы потери устойчивости?
11. Как определяется эйлерово давление для ортотропной оболочки и как оно применяется для оболочек, подкрепленных ребрами жесткости?
12. В каких случаях и почему нижняя и верхняя критические нагрузки оболочки существенно различаются?
13. Как производится практический расчет оболочек на устойчивость и какие факторы он учитывает?

Раздел V. ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАСЧЕТА СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Для современных судовых конструкций остро стоит проблема уменьшения их массы. И одним из путей ее решения является повышение удельных нагрузок при допущении в конструкциях упругопластических деформаций. Но не только поэтому требуется расчет конструкций в упругопластической области. Даже при упругой работе материала наличие упругопластического расчета необходимо для правильного суждения о действительных запасах прочности в исследуемой конструкции.

Можно выделить три типа задач изгиба балок и балочных систем в пластической стадии, наиболее интересных для расчета судовых конструкций:

1) упругопластические задачи в геометрически линейной постановке (изменения геометрии деформированной конструкции малы);
2) жесткопластические задачи в геометрически нелинейной постановке (изменения геометрии конструкции существенны);
3) жесткопластические задачи в геометрически линейной постановке — задачи теории предельных нагрузок.

Когда пластические деформации, развивающиеся в конструкции, имеют тот же порядок, что и порядок упругих деформаций, задача должна решаться в упругопластической постановке. Если же пластические деформации оказываются настолько больше упругих, что последними можно пренебречь, становится возможной жесткопластическая постановка задачи.

В ряде работ П. Ф. Папковича, опубликованных в конце 1930-х гг., были рассмотрены методы расчета предельных состояний однопролетных и многопролетных балок, судовых рам и перекрытий. Убедительно показана простота метода предельных нагрузок по сравнению с расчетами в области упругих и упругопластических деформаций. Этот метод позволяет спроектировать «рациональную» конструкцию, все элементы которой равнопрочны. Круг задач, в которых применительно к кораблю может быть использован метод предельных нагрузок, расширяется с каждым годом. Большой вклад в развитие теории и разработку методов определения предельных нагрузок судового корпуса и его отдельных элементов внесли Л. М. Беленький, Н. Ф. Ершов, В. В. Козляков, И. Л. Дикович.

Ниже, в гл. 23, приведено решение одной простейшей задачи теории пластичности, изложена теория изгиба балок в упругопластической области. В гл. 24 даны методы определения предельных нагрузок однопролетных и многопролетных балок, судовых рам и перекрытий.

Глава 23. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

§ 23.1. Простейшие задачи деформационной теории пластичности

В тех случаях, когда деформации линейно зависят от координат точек тела или большинство компонент тензора напряжений и деформаций равны нулю, задачи деформационной теории пластичности решаются сравнительно просто. Один пример решения таких задач приведен ниже.

Призматический брус прямоугольного сечения нагружен на торцах моментами M, вызывающими изгиб бруса в плоскости xoz

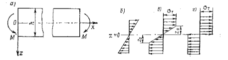


Рис. 23.1

(рис. 23.1, *а*). Материал бруса изотропный, однородный и идеально пластический. Как и при изгибе бруса в упругой стадии, применяя гипотезу плоских сечений, выпишем для компонентов деформаций выражения

$$e_x = -z/\rho; \quad e_y = e_z = -\mu_1 e_x; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz}, \tag{23.1}$$

где ρ — радиус кривизны бруса. Компоненты напряжений можно найти, если воспользуемся зависимостями деформационной теории пластичности (4.24) и (4.25):

$$\sigma_x = E_1 e_x; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \tag{23.2}$$

Здесь E_1 — модуль продольной упругости, равный

$$E_1(e_i) = E_c(e_i)/[1 + E_c(e_i)/(3E_0)], \tag{23.3}$$

где $E_0 = E/(1-2\mu)$.

Напряжения (23.2) удовлетворяют уравнениям равновесия элементарного параллелепипеда, а уравнения совместности деформаций (2.16) будут проверены позже, после определения величины $\mu_1(\varepsilon_i)$ — коэффициента Пуассона при упругопластических деформациях материала.

Граничные условия (2.1) на боковых гранях бруса $y = \pm b/2$ и $z = \pm h/2$ выполняются тождественно.

Изгибающий момент в каждом сечении по длине бруса равен

$$M = -\int_{-0,5h}^{+0,5h} \sigma_x z b\, dz = \frac{2b}{\rho} \int_0^{0,5h} E_1 z^2\, dz. \qquad (23.4)$$

Так как $E_1 = \sigma_x/\varepsilon_x$, причем в упругой области $E_1 = E$, а в пластической $-\sigma_x = \sigma_т$, можно записать

$$E_1 = \begin{cases} E & \text{при} \quad |z| < z_0; \\ \sigma_т/|\varepsilon_x| = \sigma_т\rho/|z| & \text{при} \quad |z| > z_0. \end{cases} \qquad (23.5)$$

Граница раздела упругой и пластической зон проходит по линии, определяемой значением $|z| = z_0$, при котором E_1 в формуле (23.5) становится равной E:

$$z_0 = \sigma_т\rho/E, \text{ или } \rho = E z_0/\sigma_т. \qquad (23.6)$$

Разбив интервал интегрирования в (23.4) на два (упругую зону $0 < |z| < z_0$ и пластическую область $z_0 < |z| < 0,5h$), в соответствии с выражением (23.5) получим

$$\sigma_т(h^2/4 - z_0^2/3) = M/b. \qquad (23.7)$$

Подставляя в уравнение (23.7) выражение (23.6) для z_0 разрешая его относительно ρ, находим

$$1/\rho = [2\sigma_т/(Eh)]\sqrt{1/[3(1 - M/M_{пр})]}, \qquad (23.8)$$

где

$$M_{пр} = \sigma_т b h^2/4. \qquad (23.9)$$

Напряжения σ_x по высоте бруса изменяются так:

$$\sigma_x = \begin{cases} Ez/\rho & \text{при} \quad 0 \leqslant |z| \leqslant z_0; \\ \pm\sigma_т & \text{при} \quad z_0 < |z| \leqslant 0,5h. \end{cases} \qquad (23.10)$$

Значение момента $M = M_т$, вызывающего напряжения текучести $\sigma_т$ только в крайних волокнах $z = \pm 0,5h$, определяется формулой (23.7) при $z_0 = 0,5h$:

$$M_т = \sigma_т b h^2/6. \qquad (23.11)$$

Значение момента $M = M_{пр}$, вызывающего текучесть по всему сечению балки, определяется формулой (23.9), которая получается из формулы (23.7) при $z_0 = 0$.

Эпюры напряжений по высоте сечения бруса для разных значений изгибающего момента показаны на рис. 23.1, *б*, *в*, *г*. Если

$M < M_т$ (см. рис. 23.1, *б*), то сечение будет испытывать только упругие деформации, если $M_т < M < M_{пр}$ (см. рис. 23.1, *в*), то упругие деформации возникают при $|z| < z_0$, а пластические — при $z_0 \leqslant z \leqslant 0,5h$; если $M = M_{пр}$ (см. рис. 23, *г*), то весь материал сечения будет находиться в пластическом состоянии.

Из формул (23.1) и (23.2) следует, что для стального бруса при $\sigma_т = 400$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и линейных фибровых деформациях $|\varepsilon_x| = 0{,}01$ значение момента $M \neq 0{,}935 M_{пр}$. Таким образом, уже при сравнительно малых пластических деформациях практически достигается значение предельного момента $M_{пр}$.

В заключение вернемся к вопросу о том, удовлетворяют ли выражения для компонентов деформаций (23.1) уравнениям совместности деформаций.

Если значения напряжений (23.2) и деформаций (23.1) внести в (4.24) и разрешить полученное при этом уравнение относительно μ_1, получим $\mu_1 = 1/2 - E_1/2E$, или, если учесть зависимости (23.5) и (23.6),

$$\mu_1 = \begin{cases} \mu & \text{при} \quad |z| < z_0; \\ \frac{1}{2}\left[1 - \frac{z_0}{|z|}(1 - 2\mu)\right]. \end{cases} \qquad (23.12)$$

Теперь прямой подстановкой легко убедиться, что компоненты деформаций (23.1) удовлетворяют всем уравнениям совместности деформаций.

§ 23.2. Упругопластический изгиб балок

Расчет балок в упругопластической области достаточно прост. В качестве примера рассмотрим изгиб в упругопластической области призматической балки (рис. 23.2). Условия закрепления торцевых сечений — произвольны. Балка нагружена поперечной нагрузкой интенсивностью $q(x)$ и осевой растягивающей силой T, действующей вдоль линии ЦТ поперечных сечений. Требуется определить прогиб балки $w(x)$.

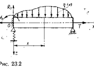


Рис. 23.2

Предполагаем, что внешняя нагрузка вызывает в материале балки упругопластические деформации и что справедлива гипотеза плоских сечений. Связь между напряжениями σ_x и деформацией ε_x представим зависимостью (4.4):

$$\sigma_x = E\varepsilon_x[1 - \omega(\varepsilon_x)]. \qquad (23.13)$$

Начало координат совместим с геометрическим ЦТ левого конца балки. Ось ox направим вдоль линии, проходящей через геометрические ЦТ поперечных сечений, а ось oz — вниз (см. рис. 23.2).

На основании гипотезы плоских сечений

$$u(x, z) = u_0(x) - z\frac{dw(x)}{dx}, \tag{23.14}$$

где $u(x, z)$ — перемещение точки балки с координатами x, z в направлении оси ox; $u_0(x)$ и $w(x)$ — перемещения точек оси балки в направлении осей ox и oz соответственно. Воспользовавшись выражением (23.14), получим

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} = \frac{du_0(x)}{dx} - z\frac{d^2 w}{dx^2}. \tag{23.15}$$

В каждом из сечений по длине балки должны быть выполнены два следующих очевидных уравнения равновесия:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_F \sigma_x\, dF = T; \\ &-\int\limits_F \sigma_x z\, dF = M_0 - R_0 x + \int\limits_0^x \int\limits_0^x q(x)\, dx^2 + Tw(x). \end{aligned}\right\} \tag{23.16}$$

Если далее воспользоваться зависимостями (23.15) и (23.13), то после несложных выкладок система уравнений равновесия (23.16) может быть преобразована к виду

$$E(F - F^*)\, u_0'(x) + ES^* w''(x) = T; \tag{23.17}$$

$$ES^* u_0'(x) + E(I - I^*)\, w''(x) = M_0 - R_0 x + Tw''(x) + \int\limits_0^x \int\limits_0^x q(x)\, dy^2. \tag{23.18}$$

Здесь F — площадь поперечного сечения балки; I — момент инерции площади поперечного сечения;

$$F^* = \int\limits_F \omega(\varepsilon_x)\, dF; \quad S^* = \int\limits_F z\omega(\varepsilon_x)\, dF; \quad I^* = \int\limits_F z^2\omega(\varepsilon_x)\, dF. \tag{23.19}$$

Заметим, что если материал работает упруго, то $\omega(\varepsilon_x) = 0$ и, следовательно, величины F^*, S^*, I^* будут равны нулю.

Разрешив уравнение (23.17) относительно $u_0'(x)$, получим

$$u_0'(x) = T/[E(F - F^*)] - w''(x)\, S^*/(F - F^*). \tag{23.20}$$

Воспользовавшись этой зависимостью, исключим $u_0'(x)$ из уравнения (23.18):

$$E\left(I - I^* - \frac{S^{*2}}{F - F^*}\right) w''(x) = M_0 - R_0 x - \frac{TS^*}{F - F^*} + \int\limits_0^x \int\limits_0^x q(x)\, dx^2 + Tw(x). \tag{23.21}$$

Совместное решение уравнений (23.20) и (23.21) позволяет определить перемещения оси балки $u_0(x)$ и $w(x)$.

Интегрирование дифференциальных уравнений (23.20) и (23.21), дополненных граничными условиями для функций $u_0(x)$ и $w(x)$, возможно лишь численно с использованием процедуры последовательного уточнения значений переменных коэффициентов, входящих в эти уравнения. Весьма схематично алгоритм такого решения можно представить в следующей форме.

Первое приближение. Материал балки предполагается упругим и, следовательно, $\omega(\varepsilon_x) = 0$; $F^* = S^* = I^* = 0$. Тогда уравнения (23.20) и (23.21) преобразуются к виду

$$u_0'(x) = T/(EF); \tag{23.22}$$

$$EIw^{\mathrm{IV}}(x) = q(x) + Tw''(x). \tag{23.23}$$

Каждое из полученных уравнений, дополненное соответствующими граничными условиями, позволяет определить в первом приближении значения $u_0(x)$ и $w(x)$. Затем с помощью зависимости (23.15) можно найти в первом приближении деформацию $\varepsilon_x(x, z)$.

Второе приближение. Найденное в первом приближении значение деформации ε_x используют для определения функции $\omega(x)$. Затем по формулам (23.19) с помощью методов численного интегрирования вычисляют значения $F^*(x)$, $S^*(x)$ и $I^*(x)$, которые вносят в систему уравнений (23.20) и (23.21). Интегрируя полученные при этом дифференциальные уравнения с переменными (но уже известными) коэффициентами, находят уточненные значения перемещений $u_0(x)$ и $w(x)$. При необходимости рассчитанные значения перемещений $u_0(x)$ и $w(x)$ можно уточнить, если повторить еще раз процедуру второго приближения.

По окончательным значениям перемещений $u_0(x)$ и $w(x)$ с помощью соотношений (23.15) и (23.13) определяют напряжение σ_x.

Аналогично можно произвести расчет в упругопластической области более сложных стержневых систем: неразрезных балок, простых и сложных рам, стержневых перекрытий.

Контрольные вопросы

1. Почему для многих судовых конструкций мы интересуемся их поведением в упругопластической области?
2. Изложите решение простейших задач деформационной теории пластичности — чистого изгиба призматического стержня прямоугольного сечения и упругопластического изгиба балки.
3. Какие трудности возникают при расчете балки в упругопластической области?

§ 24.1. Предельные нагрузки однопролетных балок

В целях упрощения расчетов балок, работающих в упругопластической области, как правило, вместо реальной диаграммы используют условную диаграмму идеального жесткопластического материала (см. рис. 4.7, *б*). *Принимая такую зависимость между напряжениями и деформациями, пренебрегают наличием упругих деформаций в реальном материале конструкции при ее работе в упругопластической области. Если пренебрежение упрочнением материала приводит к некоторой недооценке действительной прочности конструкции, то неучет упругих деформаций, наоборот, может несколько ее завысить.*

Понятие предельной нагрузки в теории предельного равновесия. *Теория предельного равновесия* — это раздел теории пластичности, объединяющий методы определения *предельных нагрузок.*

Предполагается, что внешняя нагрузка изменяется пропорционально некоторому параметру. Тогда *предельной* будем называть нагрузку, характеризующуюся наименьшим значением этого параметра, при котором вследствие развивающихся пластических деформаций появляющиеся перемещения становятся неограниченными. Предполагается, что явления потери устойчивости и хрупкого разрушения отсутствуют. Изменения геометрии конструкции вплоть до предельного состояния считаются пренебрежимо малыми. Напряженно-деформированное состояние, соответствующее предельной нагрузке, будем называть *предельным состоянием системы.*

В ряде случаев рост внешней нагрузки сопровождается усиленным ростом деформаций конструкции, которые в силу каких-либо особенностей в эксплуатации рассматриваемой конструкции не могут превышать некоторого значения. При этом может оказаться, что несущая способность конструкции определяется нагрузкой, меньшей ее предельного значения, а именно тем ее значением, которое вызывает в конструкции максимально допустимые деформации. Однако отметим, что в большинстве случаев нас интересует значение предельной нагрузки как основной критерий статической прочности рассматриваемой конструкции.

Естественно, что описанная картина деформирования является достаточно приближенной. Она справедлива лишь для балок, изготовленных из материала с достаточным запасом пластических свойств. При отсутствии такого запаса разрушение может произойти хрупко, без образования развитых пластических деформаций. Должна быть исключена также потеря устойчивости отдельных элементов балки. При выполнении перечисленных условий указанная физическая модель дает довольно правильное представление о работе судовых балок при развитых пластических деформациях.

Пластический шарнир и предельный изгибающий момент. На рис. 23.1 приведены эпюры, характеризующие изменение нормальных напряжений по высоте сечения балки, изготовленной из идеального упругопластического материала, для трех различных значений *изгибающего момента* M *в рассматриваемом сечении.* Последней эпюрой, имеющей вид двух прямоугольников (см. рис. 23.1, *г*), определяется предельное состояние сечения, называемое *шарниром текучести* или *пластическим шарниром.* При этом *изгибающий момент сечения достигает* своего предельного значения $M_{пр}$, которое для балки прямоугольного сечения, согласно формуле (23.8), равно

$$M_{пр} = bh^2\sigma_т/4. \tag{24.1}$$

По аналогии с работой сечения в упругой области величину $bh^2/4$ часто называют *пластическим моментом сопротивления* и обозначают через $W_т$. Тогда для определения предельного изгибающего момента сечения получим формулу

$$M_{пр} = \sigma_т W_т. \tag{24.2}$$

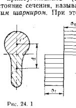


Рис. 24. 1

Если далее заметить, что момент, вызывающий появление текучести в крайних волокнах прямоугольного сечения (см. рис. 23.1, *б*), равен

$$M_т = \sigma_т W \tag{24.3}$$

($W = bh^2/6$), то из сопоставления (24.2) и (24.3) найдем, что для прямоугольного профиля $M_{пр}/M_т = W_т/W = 1{,}5$.

В дальнейшем нам потребуется знать, а следовательно, и уметь определять $W_т$ для сечения произвольной формы (рис. 24.1).

В предельном состоянии, когда текучесть распространяется на все сечение, из условия равенства нулю осевой силы $T = \int\limits_F \sigma_x\, dF = \sigma_т F^+ - \sigma_т F^- = 0$ площадь растянутой зоны F^+ должна равняться площади сжатой зоны F^-: $F^+ = F^- = F/2$ (F — площадь рассматриваемого поперечного сечения).

Равнодействующие растягивающих и сжимающих усилий располагаются соответственно в ЦТ растянутой и сжатой зон. Поэтому можем записать

$$M_{пр} = \sigma_т F d/2, \tag{24.4}$$

где d — расстояние между ЦТ растянутой и сжатой зон.

Так как ЦТ всего сечения находится на середине отрезка, соединяющего ЦТ обеих половин сечения, $d/2$ есть расстояние от ЦТ любой из зон (растянутой или сжатой) до ЦТ всего сечения, и, следовательно

$$W_т = 2S, \tag{24.5}$$

где S — статический момент сжатой или растянутой половины сечения относительно оси, проходящей через ЦТ всего сечения.

При образовании пластического шарнира балка теряет одну степень статической неопределимости, или, другими словами, приобретает одну степень свободы. Пластический шарнир существенно отличен от обыкновенного шарнира. Момент в нем не равен нулю, а равен $M_{пр}$. И, наконец, он является *односторонним шарниром*, поскольку исчезает при перемене знака деформации. Последнее объясняется тем, что при разгрузке упругопластический материал снова начинает работать как упругий.

Для жесткопластического материала зависимость между изгибающим моментом M и кривизной балки в данном сечении имеет вид, изображенный на рис. 24.2. При $M < M_{пр}$ кривизна в сечении

Рис. 24.2

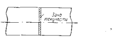


Рис. 24.3

равна нулю. Как только момент достигает своего предельного значения $M_{пр}$, зона текучести распространяется на все сечение (рис. 24.3). В сечении образуется пластический шарнир, после чего дальнейший рост кривизны (деформаций) в этом сечении происходит без увеличения изгибающего момента.

Статический метод определения предельной нагрузки. Этот метод основан на рассмотрении эпюры изгибающих моментов балки $M(x)$ в предельном состоянии. При этом обязательно выполнение в каждом из сечений балки условия

$$|M| \leqslant M_{пр}. \tag{24.5}$$

Проиллюстрируем использование статического метода на ряде частных случаев.

Определение предельной нагрузки свободно опертой призматической балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q. Для рассматриваемой балки максимальный изгибающий момент равен $M_{max} = ql^2/8$ (l — длина пролета балки). С ростом нагрузки q он возрастает и при $q = q_{пр}$ достигает предельного момента $M_{max} = M_{пр} = \sigma_т W_т$. Отсюда

$$q_{пр} = 8\sigma_т W_т/l^2. \tag{24.6}$$

Определение предельной нагрузки двухпролетной балки постоянного сечения, загруженной в одном из пролетов силой P (рис. 24.4, *а*). Для этой балки эпюра изгибающих моментов при ее упругой работе имеет вид, изображенный на рис. 24.4, *б*.

Максимальный момент в пролете будет равен

$$M_{max} = Pl_1/4 - M_1/2. \tag{24.7}$$

В предельном состоянии балка превращается в кинематический механизм. Это происходит при достижении моментами M_{max} и M_1 их предельных значений

$$M_{max} = M_1 = M_{пр} = \sigma_т W_т. \tag{24.8}$$

Внося результат (24.8) в (24.7) и решая полученное при этом уравнение относительно P, получаем предельное значение этой величины

$$P_{пр} = 6\sigma_т W_т/l_1. \tag{24.9}$$

Обратим внимание на два следующих факта:

а) при определении предельных нагрузок статическим методом перемещения (прогибы) балки не рассматриваются и отпадает необходимость в раскрытии ее статической неопределимости;

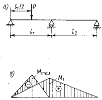


Рис. 24.4

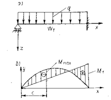


Рис. 24.5

б) величина $P_{пр}$ не зависит от длины второго пролета балки, т. е. от жесткости упругой заделки; здесь уже играет роль не жесткость, а прочность конструкции, которая осуществляет упругое защемление.

Определение предельной нагрузки призматической балки, один конец которой свободно оперт, а другой — жестко заделан. Балка загружена равномерно распределенной нагрузкой (рис. 24.5, *а*).

Эпюра изгибающих моментов по длине балки будет иметь вид, изображенный на рис. 24.5, *б*. Если обозначить опорный момент в заделке через M_1, то для текущего момента в пролете можно написать следующее выражение:

$$M(x) = [ql^2x/(2l)](1 - x/l) - M_1 x/l. \tag{24.10}$$

Предельное состояние для рассматриваемой балки наступит при образовании пластических шарниров в заделке и в сечении, где действует максимальный пролетный момент M_{max}.

Значение x, при котором пролетный момент достигает максимума, найдем из условия $\frac{dM(x)}{dx}=0$, откуда, если учесть выражение для M (24.10), получим $x=l/2-M_1/(ql)$. Подставляя это значение x в (24.10), имеем

$$M_{\max}=(ql^2/2)\,[{}^1/_2-M_1/(ql^2)]^2. \qquad (24.11)$$

Но в предельном состоянии, когда балка благодаря образованию двух пластических шарниров превращается в кинематический механизм,

$$M_{\max}=M_1=\sigma_т W_т. \qquad (24.12)$$

Внося значения (24.12) в (24.11) и решая полученное при этом уравнение относительно q, находим значение предельной нагрузки для рассматриваемой балки

$$q_{пр}=11{,}65\sigma_т W_т/l. \qquad (24.13)$$

Статическая экстремальная теорема. Статическая экстремальная теорема предельного равновесия гласит: *предельная нагрузка $P_{пр}^{*}$, отвечающая любому статически допустимому полю напряжений, всегда меньше действительной предельной нагрузки $P_{пр}$ или равна ей:*

$$P_{пр}^{*}\leqslant P_{пр}. \qquad (24.14)$$

Статически допустимым считается такое поле напряжений, которое удовлетворяет уравнениям равновесия, граничным условиям и при котором ни в одной точке напряжения не превосходят значений, определяемых условиями пластичности.

Применительно к изгибу балок поле изгибающих моментов (обобщенное внутреннее усилие) будет всегда статически допустимым при удовлетворении условия (24.5). Если возможно построение нескольких вариантов эпюр изгибающих моментов $M(x)$, удовлетворяющих (24.5), соответственно получается столько же значений предельной нагрузки. Согласно приведенной теореме, действительной предельной нагрузкой будет наибольшая из них.

Кинематический метод определения предельной нагрузки. Переход сечения в предельное состояние, когда оно полностью охвачено пластическими деформациями, сопряжен с возможностью неограниченного роста кривизны в этом сечении (см. рис. 24.2), что влечет за собой образование здесь слома оси балки. Смежные сечения балки, где $M<M_{пр}$, остаются жесткими. Благодаря появляющимся пластическим шарнирам балка в предельном состоянии превращается в кинематически изменяемый пластический механизм.

Кинематический метод определения предельной нагрузки состоит в исследовании равновесия этого пластического механизма. Для этой цели используют принцип возможных перемещений, согласно которому сумма работ всех сил, действующих на механизм, на возможном перемещении равна нулю. Из полученного при этом

уравнения и определяют предельную нагрузку рассматриваемой конструкции.

Проиллюстрируем содержание кинематического метода на ряде частных случаев.

Определение предельной нагрузки, изображенной на рис. 24.5, *а*. Заметим, что ранее уже была определена $q_{пр}$ для рассматриваемой балки, но с помощью статического метода.

Предельное состояние балки наступает при образовании двух пластических шарниров: одного в заделке, другого в пролете. Место расположения пролетного шарнира $x=c$ неизвестно.

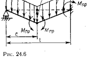


Рис. 24.6

После введения в систему двух пластических шарниров получаем кинематически изменяемый пластический механизм (рис. 24.6). Дадим сечению $x=c$ возможное перемещение δf. Изогнутая ось балки приобретает форму ломаной линии, состоящей из двух прямых отрезков. В пластических шарнирах возникают внутренние силы (моменты) $M_{пр}$. Тогда сумма работ всех внешних (q) и внутренних ($M_{пр}$) сил на возможном перемещении балки будет равна

$$\delta Э=qc\delta f/2+q(l-c)\,\delta f/2-M_{пр}\delta f/c-2M_{пр}\delta f/(l-c). \qquad (24.15)$$

Согласно принципу возможных перемещений $\delta Э=0$, откуда

$$q=2M_{пр}\,[1/c+2/(l-c)]. \qquad (24.16)$$

Значение c найдем из условия минимума нагрузки q:

$$\frac{\partial q}{\partial c}=0;\quad \frac{1}{c^2}-\frac{2}{(l-c)^2}=0;\quad c=0{,}41l. \qquad (24.17)$$

Подставив найденное значение c в выражение для q, окончательно найдем значение предельной нагрузки

$$q_{пр}=11{,}65M_{пр}/l=11{,}65\sigma_т W_{пр}/l. \qquad (24.18)$$

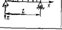
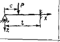
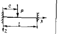
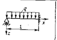
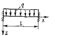
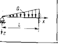
Полученное значение $q_{пр}$ точно совпадает с таковым, полученным ранее с помощью статического метода [см. формулу (24.13)].

Определение предельной нагрузки балки, изображенной на рис. 24.7, *а*. В данном случае возможны три вида кинематических пластических механизмов (рис. 24.7, *б*, *в*, *г*).

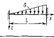
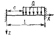
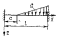
Используя кинематический метод, определим $P_{пр}$ для каждого вида пластического механизма: $P_{пр}^{(б)}=5M_{пр}/l$, $P_{пр}^{(в)}=4M_{пр}/l$, $P_{пр}^{(г)}=9M_{пр}/l$. Наименьшая величина из этих трех значений силы P и есть искомая предельная нагрузка рассматриваемой балки:

$$P_{пр}=4M_{пр}/l=4\sigma_т W_т/l. \qquad (24.19)$$

Таблица 24.1. **Предельные нагрузки однопролетных балок**

№ п/п	Схема балки	Координата пластического шарнира в пролете	Предельная нагрузка
1		$x = c$	$P_{\text{пр}} = \dfrac{l}{c\,(l-c)}\,\sigma_{\text{т}}W_{\text{т}}$
2		$x = 0{,}5l$	$q_{\text{пр}} = \dfrac{8\sigma_{\text{т}}W_{\text{т}}}{l^2}$
3		$x = c$	$P_{\text{пр}} = \dfrac{2l-c}{c\,(l-c)}\,\sigma_{\text{т}}W_{\text{т}}$
4		$x = c$	$P_{\text{пр}} = \dfrac{2l}{c\,(l-c)}\,\sigma_{\text{т}}W_{\text{т}}$
5		$x = 0{,}416l$	$q_{\text{пр}} = 11{,}66\,\dfrac{\sigma_{\text{т}}W_{\text{т}}}{l^2}$
6		$x = 0{,}5l$	$q_{\text{пр}} = 16\,\dfrac{\sigma_{\text{т}}W_{\text{т}}}{l^2}$
7		$x = 0{,}5l$	$Q_{\text{пр}} = 10{,}8\,\dfrac{\sigma_{\text{т}}W_{\text{т}}}{l}$

Продолжение

№ п/п	Схема балки	Координата пластического шарнира в пролете	Предельная нагрузка
8		$x = 0{,}577l$	$Q_{\text{пр}} = 15{,}57\,\dfrac{\sigma_{\text{т}}W_{\text{т}}}{l}$
9		$x = \dfrac{l}{2}\left(1 + \dfrac{c^2}{l^2}\right)$	$Q_{\text{пр}} = \dfrac{16\,(l-c)}{l^2\left(1 + \dfrac{c^2}{l^2}\right)}\,\sigma_{\text{т}}W_{\text{т}}$
10		$x = c + (l-c)\sqrt{\dfrac{l-c}{3l}}$	$Q_{\text{пр}} = \dfrac{6\sigma_{\text{т}}W_{\text{т}}}{(l-c)\left[\dfrac{c}{l} + 2\left(\dfrac{l-c}{3l}\right)^{3/2}\right]}$

В табл. 24.1 приведены значения предельных нагрузок однопролетных призматических жесткопластических балок для наиболее часто встречающихся в судостроении условий закрепления их торцов и закона изменения внешней нагрузки. Здесь же указана

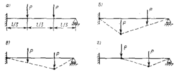


Рис. 24.7

координата, характеризующая положение пластического шарнира в пролете балки.

Кинематическая экстремальная теорема. Кинематическая экстремальная теорема теории предельного равновесия гласит: *предельная нагрузка, отвечающая любому кинематически возможному полю перемещений (приращений перемещений) $P^{**}_{\text{пр}}$, всегда больше или равна действительной предельной нагрузке $P_{\text{пр}}$:*

$$P^{**}_{\text{пр}} \geqslant P_{\text{пр}}. \tag{24.20}$$

Кинематически возможным называется поле перемещений пластического механизма, удовлетворяющее кинематическим граничным условиям.

Для балки, жестко заделанной одним концом и загруженной равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. 24.5, *а*), при определении предельной нагрузки кинематическим методом положение пролетного пластического шарнира ($x=c$) было неизвестным. Задавая ряд положений этого шарнира, получаем ряд кинематических возможных полей перемещений (пластических механизмов). Действительный пластический механизм, согласно рассматриваемой теореме, должен давать наименьшую предельную нагрузку. Поэтому значение c можно определить из условия минимума P (24.17).

Из формул (24.14) и (24.20) следует

$$P^{*}_{\text{пр}} \leqslant P_{\text{пр}} \leqslant P^{**}_{\text{пр}}. \qquad (24.21)$$

Это означает, что приближенное решение задачи статическим методом дает нижнюю оценку предельной нагрузки, а решение кинематическим методом — верхнюю. Степень близости $P^{*}_{\text{пр}}$ и $P^{**}_{\text{пр}}$ характеризует точность приближенных решений. Совпадение $P^{*}_{\text{пр}}$ и $P^{**}_{\text{пр}}$ означает, что полученные решения являются точными.

§ 24.2. Предельные нагрузки многопролетных балок и рам

В рамках допущений теории предельного равновесия податливость опор и заделок на предельную нагрузку не влияет. Поэтому любые упругие опоры и заделки должны вводиться в

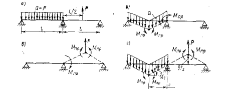


Рис. 24.8

расчет как жесткие либо, если они очень податливы и их реакции существенно меньше внешних нагрузок, их наличие вообще не должно учитываться.

Порядок расчета предельной нагрузки неразрезной многопролетной балки проиллюстрируем на следующем частном случае.

Для двухпролетной балки постоянного сечения, устроенной и загруженной в соответствии с рис. 24.8, *а*, требуется определить значение предельной нагрузки.

Возможные виды кинематических пластических механизмов, которые может иметь балка в предельном состоянии, показаны на рис. 24.8, *б*, *в*, *г*. Заметим, что первые два пластических механизма (см. рис. 24.8(*б* и *в*), по существу, определяют предельные состояния каждого из пролетов неразрезной балки при дополнительном введении жесткой заделки на промежуточной опоре (рис. 24.9).

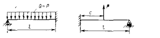


Рис. 24.9

Предельные нагрузки каждой из этих балок, т. е. левого и правого пролетов неразрезной балки, найдем, если воспользуемся данными табл. 13.1. Они будут соответственно равны:

$$P^{(б)}_{\text{пр}} = 11{,}65\sigma_{\text{т}}W_{\text{т}}/l; \quad P^{(в)}_{\text{пр}} = 6\sigma_{\text{т}}W_{\text{т}}/l. \qquad (24.22)$$

Для определения предельной нагрузки $P^{(б)}_{\text{пр}}$, которая соответствует пластическому механизму неразрезной балки, изображенному на рис. 24.8, *г*, воспользуемся кинематическим методом.

Непосредственно из рассмотрения рис. 24.8, *г* устанавливаем связь между перемещениями первого и второго пролетных шарниров:

$$\delta f_1 = 2c\delta f_2/l, \qquad (24.23)$$

где c — координата, определяющая местоположение первого пролетного шарнира. Приравнивая нулю сумму работ всех внешних и внутренних сил на возможном перемещении пластического механизма получаем

$$\delta Э = Q\frac{\delta f_1}{2} + P\delta f_2 - M_{\text{пр}}\frac{\delta f_1}{l-c} - M_{\text{пр}}\frac{\delta f_1}{c} - 2M_{\text{пр}}\frac{\delta f_2}{l/2} = 0,$$

или, если учесть зависимость (24.23) и то, что по условию $Q=P$, $P(1+c/l) - M_{\text{пр}}[2/(l-c)+4/l] = 0$. Отсюда

$$P = 2M_{\text{пр}}(3l-2c)/(l^2-c^2). \qquad (24.24)$$

Из условия $\frac{\partial P}{\partial c} = 0$ находим $c = 0{,}385l$. Подставив это значение c в (24.24), определим окончательное значение предельной нагрузки для третьего вида пластического механизма:

$$P^{(г)}_{\text{пр}} = 5{,}24\sigma_{\text{т}}W_{\text{т}}/l. \qquad (24.25)$$

Из трех полученных значений $P_{\text{пр}}$ (24.22), (24.25) предельной нагрузкой данной балки будет наименьшая, т. е. $P_{\text{пр}} = 5{,}24\sigma_{\text{т}}W_{\text{т}}/l$.

Предельная нагрузка неразрезной балки ступенчато-переменного сечения. Если в пределах пролета сечение не меняется ($W_т$ = conts), но в разных пролетах различно, то при расчете предельной нагрузки в качестве предельного момента в пластическом шарнире на промежуточных опорах из двух предельных моментов смежных пролетов нужно брать меньший.

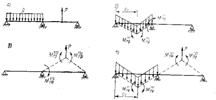


Рис. 24.10

Пусть, например, двухпролетная балка, изображенная на рис. 24.10, *а*, имеет различные площади сечений пролетов. Предельный момент в первом пролете равен $M_{пр}^{(1)}$, а во втором $M_{пр}^{(2)}$, причем $M_{пр}^{(1)} < M_{пр}^{(2)}$. Здесь вновь возможны те же три разных вида пластических механизмов (рис. 24.10, *б*, *в*, *г*). Для каждого возможного вида пластического механизма с помощью кинематического

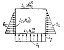


Рис. 24.11

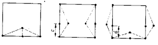


Рис. 24.12

метода определяют соответствующую предельную нагрузку. Из полученных трех значений предельной нагрузки для рассматриваемой балки будет наименьшая.

Предельная нагрузка простой рамы. Имеем простую судовую раму, загруженную согласно рис. 24.11. Заданы нагрузка, длина, предельные моменты для каждого стержня рамы. Требуется определить значение предельной нагрузки.

Для рассматриваемой рамы, как это нетрудно видеть, возможны три вида пластических механизмов в предельном состоянии рамы, приведенные на рис. 24.12.

Для определения предельной интенсивности рамы $q_{пр}$ необходимо предварительно определить предельные интенсивности для каждого вида шарнирных механизмов. Наименьшая из этих величин и будет предельной нагрузкой рассматриваемой рамы.

Постоянные *c* и *d*, характеризующие расположение пластических шарниров в пролете бортовых ветвей рамы определяют из условия минимума предельной нагрузки.

Наконец, напомним еще одно важное положение, которое следует строго соблюдать при определении предельных нагрузок стержневых систем и, в частности, рам: если в одном узле сходятся два стержня, то предельный момент, который может быть передан через этот узел, определяется прочностью более слабого стержня.

Предельная нагрузка сложной рамы. При определении предельной нагрузки сложной рамы, так же как и в случае простых рам, устанавливают все возможные виды пластических механизмов, которые могут возникнуть в предельном состоянии рассматриваемой рамы. Далее для каждого пластического механизма с помощью кинематического метода находят предельную нагрузку. Наименьшая из полученных значений предельных нагрузок для разных видов пластического механизма и будет искомой предельной нагрузкой для рассматриваемой сложной рамы.

Как видим, с принципиальной стороны расчетная схема определения предельной нагрузки сложных рам аналогична таковой для простых рам. Увеличивается лишь объем расчетов ввиду увеличения числа возможных видов пластических шарнирных механизмов.

§ 24.3. Предельные нагрузки перекрытий

Перекрытие рассматривается как плоская система, состоящая из балок двух направлений, перпендикулярных друг к другу и опертых на жесткий контур. Внешняя нагрузка действует перпендикулярно к плоскости перекрытия. Предполагается справедливой система допущений, используемая для расчета перекрытия в упругой области (см. гл. 17): балки работают на поперечный изгиб, в узлах пересечения стержней возникают только реакции, перпендикулярные к плоскости перекрытия.

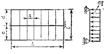


Рис. 24.13

Для определения предельной нагрузки перекрытия могут быть применены статический или кинематический метод теории предельного равновесия.

Пусть требуется найти предельную нагрузку для перекрытия с большим числом балок главного направления и одной перекрестной связью. Перекрытие загружено равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью *q* (рис. 24.13). Перекрестная связь жестко заделана на контуре, балки же главного направления — свободно оперты.

Приступая к решению поставленной задачи, мы не знаем, где раньше возникнет предельное состояние: в балках главного направления или в перекрестной связи. Необходимо, как и раньше, рассмотреть все возможные варианты пластических механизмов.

Предположим, что предельное состояние раньше наступило в балках главного направления. Величина предельной нагрузки определяется расчетом большего пролета балки главного направления. Если для определенности положить, что $d > c$, то тогда, как это следует из табл. 13.1, предельная нагрузка балки главного направления будет равна

$$q_{\text{пр}}^{(1)} = 11{,}66 M_{\text{пр}}^{(1)}/(ad^2), \tag{24.26}$$

где $M_{\text{пр}}^{(1)}$ — предельный изгибающий момент сечений балок главного направления.

Определим реакции, действующие на перекрестную связь со стороны балок главного направления. В предельном состоянии

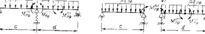


Рис. 24.14

балку главного направления (рис. 24.14, *а*) можно разбить на две статически определимые балки (24.14, *б*), заменяя действие одного пролета на другой внешним изгибающим моментом $M_{\text{пр}}^{(1)}$.

Искомую реакцию со стороны балок главного направления на перекрестную связь найдем как сумму реакций левой балки на правой опоре и правой балки на левой опоре:

$$R_1 = q_{\text{пр}} a \frac{c}{2} + \frac{M_{\text{пр}}^{(1)}}{c} + q_{\text{пр}} a \frac{d}{2} + \frac{M_{\text{пр}}^{(1)}}{d} = q_{\text{пр}} a \frac{l}{2} + \frac{M_{\text{пр}}^{(1)}}{c} + \frac{M_{\text{пр}}^{(1)}}{d},$$

или, если учесть (24.26),

$$R_1 = (M_{\text{пр}}^{(1)}/l)\,(0{,}5 l^2/d^2 + l/c + l/d). \tag{24.27}$$

Определим теперь предельную нагрузку перекрестной связи как призматической балки, жестко заделанной по концам и загруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью p (см. табл. 13.1):

$$p_{\text{пр}} = 16 M_{\text{пр}}^{(2)}/L^2, \tag{24.28}$$

где $M_{\text{пр}}^{(2)}$ — предельный момент поперечного сечения перекрестной связи.

Заменим нагрузку $p_{\text{пр}}$ рядом равных сосредоточенных сил R_2, находящихся на расстоянии a друг от друга:

$$R_2 = a p_{\text{пр}} = 16 M_{\text{пр}}^{(2)} a/L^2. \tag{24.29}$$

Теперь легко записать условие, при соблюдении которого предельная нагрузка на перекрытие будет определяться формулой (24.26),

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{16 M_{\text{пр}}^{(2)}}{M_{\text{пр}}^{(1)}} \frac{la}{L^2} \frac{1}{0{,}5\frac{l^2}{d^2} + \frac{l}{c} + \frac{l}{d}} > 1. \tag{24.30}$$

Если $R_2/R_1 = 1$, то предельное состояние наступает одновременно как в балках главного направления, так и в перекрестной связи.

Если $R_2/R_1 < 1$, то предельное состояние наступает раньше в перекрестной связи. Однако в этом случае наступление предельного состояния перекрестной связи не означает исчерпания несущей способности перекрытия: до момента возникновения предельного состояния в балках главного направления перекрытие способно воспринимать дополнительную нагрузку. Для определения предельной нагрузки перекрытия при $R_2/R_1 < 1$ необходимо найти предельную нагрузку балки главного направления, загруженной равномерной нагрузкой aq и известной силой — реакцией R_2 со стороны перекрестной связи (рис. 24.15).

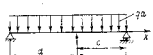


Рис. 24.15

Так же как выше было принято, что $d > c$, максимальный пролетный момент возникнет в первом пролете балки. Запишем выражение для текущего момента балки, изображенной на рис. 24.15, в интервале $0 \leqslant x \leqslant d$:

$$M(x) = \frac{qal^2}{2}\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] - R_2 \frac{c}{l} x. \tag{24.31}$$

Значение x, при котором пролетный момент достигает максимума, найдем из условия

$$\frac{dM(x)}{dx} = -R_2 \frac{c}{l} + \frac{qal}{2}\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) = 0.$$

Отсюда

$$x/l = [1 - 2R_2 c_2/(qal^2)]/2.$$

Подставляя это значение x/l в выражение (24.31) и приравнивая максимальный пролетный момент предельному моменту $M_{\text{пр}}^{(1)}$, получаем следующее равенство:

$$M_{\text{пр}}^{(1)} = (qal^2/2 - R_2 c)\,[1 - 2R_2 c/(qal^2)]/2 - (qal^2/8)\,[1 - 2R_2 c/(qal^2)]^2,$$

откуда после несложных преобразований находим значение предельной нагрузки перекрытия при $R_2 < R_1$:

$$q_{\text{пр}}^{(2)} = [2/(l^2 a)]\left[R_2 c + 2M_{\text{пр}}^{(1)}\left(1 + \sqrt{1 + R_2 c/M_{\text{пр}}^{(1)}}\right)\right]. \tag{24.32}$$

Наименьшее из значений (24.26) и (24.32) является окончательным значением предельной нагрузки $q_{пр}$ для рассматриваемого перекрытия.

Часто перед расчетчиком ставится задача, обратная той, которая рассматривалась выше, а именно: требуется определить прочность связей перекрытия, способного воспринять заданную предельную нагрузку.

Можно полагать, что перекрытие будет спроектировано наиболее рационально с точки зрения обеспечения максимальной предельной прочности, если предельное состояние во всех его балках наступает одновременно. Для рассмотренного нами выше перекрытия условие одновременного наступления предельного состояния как в балках главного направления, так и в перекрестной связи, запишется, очевидно, в виде $R_1 = R_2$, откуда

$$\frac{M_{пр}^{(2)}}{M_{пр}^{(1)}} = \frac{L^2}{16la}\left(0,5\frac{l^2}{d^2} + \frac{l}{c} + \frac{l}{d}\right). \tag{24.33}$$

Предельный момент балки главного направления определим, воспользовавшись выражением (24.26) при $q_{пр}^{(1)} = q_{пр}$:

$$M_{пр}^{(1)} = q_{пр}ad^2/11,66. \tag{24.34}$$

После чего с помощью зависимости (24.33) найдем значение предельного момента сечения перекрестной связи $M_{пр}^{(2)}$.

В заключение заметим, что так же просто, как и для перекрытия с одной перекрестной связью, решается вопрос проектирования перекрытия с несколькими перекрестными связями, которое способно воспринять заданную предельную нагрузку $q_{пр}$. Из рассмотрения работы балки главного направления такого перекрытия следует подобрать расстояния между перекрестными связями так, чтобы предельная погонная нагрузка каждого из этих пролетов была бы равна $q'_{пр} = q_{пр}a$.

Дальнейшая процедура определения предельных моментов сечений балок главного направления $M_{пр}$ и перекрестных связей $M_{пр}^{(i)}$ аналогична изложенной выше для перекрытия с одной перекрестной связью.

§ 24.4. Влияние перерезывающих сил на предельные нагрузки балок

До сих пор при рассмотрении изгиба балок принималось, что предельное состояние в их поперечных сечениях вызывается действующими в них нормальными напряжениями σ_x. Такое напряженное состояние возможно лишь в условиях чистого изгиба. Если же в сечении балки кроме изгибающего момента действует еще и перерезывающая сила $N(x)$, то значение предельного момента для этого сечения должно уменьшиться.

Условие наступления предельного состояния при совместном действии в сечении изгибающего момента и перерезывающей силы. Строгое решение задачи влияния перерезывающей силы на значение предельной нагрузки на основе теории малых упругопластических деформаций приводит к большим громоздким выкладкам. Поэтому большинство исследований по данному вопросу носит приближенный характер.

При изгибе балки в плоскости xoz отличными от нуля будут компоненты напряжений σ_x и τ_{xz}. Они связаны между собой уравнением равновесия плоской задачи теории упругости

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0. \tag{24.35}$$

Интегрируя это уравнение по z, получаем

$$\tau = \tau_{xz} = -\int\limits_{-h/2}^{z}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\,dz. \tag{24.36}$$

Для балки, изготовленной из идеального упругопластического материала, распределение нормальных напряжений по высоте сечения показано на рис. 24.16, *а*.

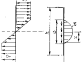


Рис. 24.16

В пределах зоны текучести приращение напряжений $d\sigma_x$ равно нулю и, следовательно, в этой зоне сечения касательные напряжения, как это следует из формулы (24.36), будут отсутствовать. Таким образом, касательные напряжения действуют лишь в пределах упругого ядра сечения. Окончательная формула для определения касательных напряжений в сечении балки из идеального упругопластического материала будет иметь вид

$$\tau = NS^y/I^y b, \tag{24.37}$$

где S^y — статический момент площади упругой зоны сечения, лежащей выше рассматриваемого волокна, взятый относительно нейтральной оси; I^y — момент инерции площади упругой зоны сечения относительно ее нейтральной оси; b — ширина сечения в месте расположения рассматриваемого волокна. Из выражения (24.37) видно, что распределение касательных напряжений по высоте упругой зоны полностью соответствует закону распределения их в идеально упругой балке. Для прямоугольного сечения распределение касательных напряжений по высоте будет параболическим (рис. 24.16, *б*). При этом перерезывающая сила в сечении равна

$$N = \int\limits_F \tau\,dF = 2ba\tau_{max}/3, \tag{24.38}$$

где τ_{max} — максимальное значение касательного напряжения, действующего на уровне нейтральной оси сечения.

Условие текучести Мизеса в произвольной точке сечения балки, испытывающей плоский изгиб, запишется в виде

$$\sigma_x^2 + 3\tau_{xz}^2 = \sigma_т^2. \tag{24.39}$$

Из выражения (24.39) видно, что текучесть материала на нейтральной оси, где $\sigma_x = 0$, наступает при достижении касательным напряжением значения

$$\tau_{max} = \tau_{xz} = \sigma_т/\sqrt{3}. \tag{24.40}$$

Подставляя (24.40) в формулу (24.38), получаем значение перерезывающей силы, действие которой в сечении вызывает текучесть материала на уровне нейтральной оси:

$$N = 2ba\sigma_т/(3\sqrt{3}). \tag{24.41}$$

Максимальное же значение перерезывающей силы сечение воспринимает, находясь в условиях чистого сдвига, в момент наступления в нем текучести материала. Это значение равно

$$N_{пр} = bh\sigma_т/\sqrt{3}. \tag{24.42}$$

Для сечения, в котором изгибающий момент равен нулю, выражением (24.42) определяется предельное значение перерезывающей силы, превышение которого приводит к появлению недопустимо больших деформаций сдвига. Если теоретически сосредоточить их в одном сечении, то произойдет смещение друг относительно друга частей балки, примыкающих к сечению, — образуется так называемый *пластический шарнир сдвига*. Пластический шарнир сдвига имеет много общего с введенным ранее пластическим шарниром вращения: он также является односторонним шарниром и при его появлении система приобретает одну дополнительную степень кинематической изменяемости.

Если принять во внимание характер изменения напряжений σ_x по высоте (см. рис. 24.16, *а*), момент внутренних сил для прямоугольного сечения при размере упругой области *а* будет равен

$$M = \sigma_т W_т - a^2 b\sigma_т/12. \tag{24.43}$$

Исключив из полученного выражения с помощью формулы (24.41) величину *а*, получим следующую зависимость:

$$|M/M_{пр}| + 3N^2/4N_{пр}^2 = 1. \tag{24.44}$$

Уравнением (24.44) определяется совокупность значений M и N, совместное действие которых вызывает в прямоугольном сечении балки из идеального упругопластического материала наступление предельного состояния. Графическое представление уравнения (24.44) приведено на рис. 24.17 (кривая *1*). График на рис. 24.17 построен с учетом того обстоятельства, что если $M \leqslant bh^2\sigma_т/6 = M_т$, то предельное значение перерезывающей силы будет постоянным и равным

$$N_т = 2bh\sigma_т/(3\sqrt{3}). \tag{24.45}$$

Приведенное выше так называемое решение Н. Д. Жудина (24.44) не дает, по существу, предельных значений величин M и N, поскольку условие текучести (24.44) выполняется лишь для зон, занятых продольными напряжениями, равными $\sigma_т$, и на нейтральной оси, где $\tau = \sigma_т/\sqrt{3}$. Можно показать, что решение Н. Д. Жудина приводит к недооценке несущей способности сечения балки.

Заслуживает внимания решение, разработанное в ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова. В нем также сохраняется предположение, что касательные напряжения возникают лишь в районе упругого ядра сечения балки. Для того чтобы условия текучести (24.39) при выбранном законе распределения σ_x по высоте сечения соблюдалось во всех точках, касательные напряжения должны быть равны $\tau_{xz} = \sigma_т\sqrt{1 - \sigma_x^2/\sigma_т^2}/\sqrt{3}$. Отсюда получаем значение перерезывающей силы, которая совместно с действующим в сечении изгибающим моментом M вызывает в нем возникновение предельного состояния:

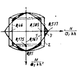


Рис. 24.17

$$N = \frac{\sigma_т}{\sqrt{3}} \int_{F_y} \sqrt{1 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_т^2}}\, dF_y, \tag{24.46}$$

где F_y — площадь упругого ядра сечения. Если далее исходить из линейного закона распределения нормальных напряжений по высоте упругого ядра (см. рис. 24.16, *а*), то зависимость между изгибающим моментом и перерезывающей силой в предельном состоянии сечения балки будет иметь следующий вид:

$$|M/M_{пр}| + 16N^2/(3\pi^2 N_{пр}^2) = 1. \tag{24.47}$$

Приведем еще одно представляющее интерес решение, полученное С. А. Пальченским, который делит сечение балки на две зоны: первая зона, содержащая нейтральную ось, воспринимает лишь перерезывающую силу; оставшаяся же часть сечения образует вторую зону, воспринимающую изгибающий момент с помощью напряжений (рис. 24.18). Исходя из рис. 24.18 можем выписать следующие выражения для определения изгибающего момента и перерезывающей силы сечения:

$$M = \sigma_т b(h^2/4 - a^2/4) = M_{пр} - ba^2\sigma_т/4; \quad N = ab\sigma_т/\sqrt{3}.$$

Исключив из первой зависимости с помощью второй величину *а*, после несложных преобразований получим

$$|M/M_{пр}| + N^2/N_{пр}^2 = 1. \tag{24.48}$$

Итак, выше приведены три разных условия наступления предельного состояния сечения, полученные соответственно Н. Д. Жудным (24.44), ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова (24.47) и С. А. Пальчевским (24.48). Для сравнения эти три зависимости изображены на рис. 24.17 (кривая 1 — решение Н. Д. Жудина, 2 — ЦНИИ им. А. Н. Крылова, 3 — С. А. Пальчевского). Как видно, все три решения достаточно хорошо согласуются друг с другом.

Особенности предельного состояния сечения широкополых судовых балок. У таких балок пояски воспринимают изгибающий момент, а стенка — перерезывающую силу, т. е. в сечении образуются две зоны, одна из которых (пояски) нагружена нормальными, а другая зона (стенка) — касательными напряжениями. Для

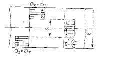


Рис. 24.18

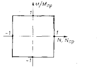


Рис. 24.19

таких балок наступление фибровой текучести при изгибе практически означает достижение изгибающим моментом его предельного значения: $M_T \approx M_{пр}$, а появление текучести в районе нейтральной оси соответствует переходу в предельное состояние всей площади стенки, т. е. $N_T \approx N_{пр} = 0{,}57\sigma_T\omega$, где ω — площадь сечения стенки.

В связи с вышеизложенным график значений M и N для предельного состояния сечения широкополой балки (с двумя осями симметрии) будет иметь вид, приведенный на рис. 24.19.

Таким образом, одновременный учет изгибающего момента M и перерезывающей силы N приводит к тому, что предельное состояние сечения может наступить при одном из следующих условий:

а) $M = M_{пр}$, $N < N_{пр}$ — в сечении образуется пластический шарнир вращения;

б) $N = N_{пр}$, $M < M_{пр}$ — в сечении возникает пластический шарнир сдвига;

в) $M = M_{пр}$, $N = N_{пр}$ — в сечении одновременно образуются пластические шарниры вращения и сдвига.

Предельная нагрузка балки. Предельное состояние балки определяется моментом ее превращения в пластический механизм благодаря образованию в отдельных сечениях пластических шарниров вращения или сдвига.

При расчете предельной нагрузки статическим методом процедура вычислений, изложенная в § 24.1 и не учитывающая влияния перерезывающих сил, принципиально не меняется. Здесь лишь

наряду с ограничением (24.5) должно удовлетворяться также условие

$$|N| \leqslant N_{пр}. \tag{24.54}$$

При использовании кинематического метода перемещения пластического механизма следует допускать возможность сдвиговых

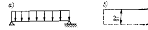


Рис. 24.20

смещений в каждом пластическом шарнире сдвига. На рис. 24.20, б показан пластический механизм свободно опертой балки, изображенной на рис. 24.20, а, который получился из-за образования на

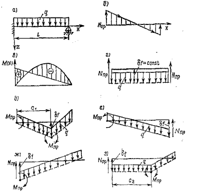


Рис. 24.21

ее опорах двух шарниров сдвига. В каждом из этих шарниров перерезывающая сила $N_{пр}$ совершает работу на соответствующем смещении данного шарнира сдвига.

Найдем предельную нагрузку $q_{пр}$ балки, жестко заделанной одним концом и шарнирно опертой другим (рис. 24.21, *а*), загруженной равномерно распределенной нагрузкой с учетом влияния перерезывающих сил.

Выражения для перерезывающей силы и изгибающего момента следующие:

$$N(x) = N(0) + qx; \quad M(x) = M(0) + N(0)x + qx^2/2. \tag{24.55}$$

В сечениях, где $N(x)$ и $M(x)$ имеют экстремумы (рис. 24.21, *б* и *в*), могут образоваться соответственно шарниры вращения и сдвига. Нетрудно получить полный набор кинематически возможных пластических механизмов (рис. 24.21, *г*–*з*).

Определим значение предельной нагрузки для каждого из упомянутых выше пластических механизмов.

Сдвиговый пластический механизм (рис. 24.21, *г*). Приравнивая сумму работ всех сил, действующих на балку в предельном состоянии, на соответствующих им перемещениях пластического механизма, получаем $ql\delta f - 2N_{пр}\delta f = 0$, откуда

$$q_{пр}^{(г)} = 2N_{пр}/l.$$

Изгибный пластический механизм (рис. 24.21, *д*). Значение предельной нагрузки для данного вида пластического механизма, указанное в табл. 13.1, следующее:

$$q_{пр}^{(д)} = 11{,}66 M_{пр}/l^2.$$

Комбинированный пластический механизм 1 (рис. 24.21, *е*). На основании принципа возможных перемещений $ql\delta f/2 - N_{пр}\delta f - M_{пр}\delta f/l = 0$. Тогда

$$q_{пр}^{(е)} = 2M_{пр}/l^2 + 2N_{пр}/l.$$

Комбинированный пластический механизм 2 (рис. 24.21, *ж*). Согласно принципу возможных перемещений $ql\delta f/2 - N_{пр}\delta f - M_{пр}\delta f/l = 0$, откуда

$$q_{пр}^{(ж)} = 2M_{пр}/l^2 + 2N_{пр}/l.$$

Полученное значение равно $q_{пр}^{(е)}$.

Комбинированный пластический механизм 3 (рис. 23.23, *з*). На основании принципа возможных перемещений $qc_2\delta f + q(l - c_2)\delta f/2 - N_{пр}\delta f - M_{пр}\delta f/(l - c_2) = 0$, откуда

$$q^{(з)} = 2N_{пр}/(l + c_2) + 2M_{пр}/(l^2 - c_2^2). \tag{24.60}$$

Значение c_2 определяется из условия $\frac{\partial q}{\partial c_2} = 0$. В результате получим

$$c_2/l = 1 + t + \sqrt{1 + 2t}, \tag{24.61}$$

где

$$t = N_{пр}l/M_{пр}. \tag{24.62}$$

Внося найденное из (24.61) значение t в выражение (24.60), после несложных выкладок получаем следующее значение предельной нагрузки для рассматриваемого вида пластического механизма:

$$q_{пр}^{(з)} = (1 + t + \sqrt{1 + 2t})\, M_{пр}/l^2. \tag{24.63}$$

Следуя кинематической экстремальной теореме (24.20), из найденных значений $q_{пр}$ нужно выбрать наименьшее. Так как $q_{пр}^{(е)} = q_{пр}^{(ж)} > q_{пр}^{(г)}$, комбинированные механизмы 1 и 2 реализоваться не могут. Для остальных механизмов условие минимума приводит к следующим результатам:

$$q_{пр} = \begin{cases} 2N_{пр}/l & \text{при} \quad t \leqslant 4; \\ (1 + t + \sqrt{1 + 2t})\, M_{пр} & \text{при} \quad 4 \leqslant t \leqslant 6{,}82; \\ 11{,}66 M_{пр}/l^2 & \text{при} \quad t \geqslant 6{,}82. \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Что такое предельная нагрузка?
2. Поясните понятия «пластический шарнир» и «предельный изгибающий момент»?
3. Как определяется пластический момент сопротивления для произвольного сечения?
4. В чем отличие пластического шарнира от обыкновенного?
5. Изложите содержание статического метода на примере определения предельной нагрузки свободно опертой призматической балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой.
6. В чем особенности применения статического метода при определении предельной нагрузки неразрезной балки?
7. В чем заключается статическая экстремальная теорема?
8. Поясните сущность кинематического метода определения предельной нагрузки.
9. Какое практическое значение имеют экстремальные теоремы при определении предельных нагрузок?
10. Изложите последовательность расчета предельной нагрузки для простой судовой рамы.
11. Имеются ли принципиальные отличия в методах определения предельных нагрузок простой и сложной рам?
12. Изложите схему определения предельной нагрузки простейшего судового перекрытия (большое число одинаковых балок главного направления и одна перекрестная связь).
13. Сформулируйте условия наступления предельного состояния при совместном действии в сечении изгибающего момента и перерезывающей силы.
14. В чем состоит особенность определения предельного состояния сечения широкополых судовых балок?
15. Приведите общую схему определения предельной нагрузки однопролетной призматической балки при учете влияния перерезывающих сил.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. В., Лащенков Б. Я., Шапошников Н. Н.* Строительная механика: Тонкостенные пространственные системы. М.: Стройиздат, 1983. 488 с.
2. *Алфутов Н. А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 309 с.
3. *Балабух Л. И., Алфутов Н. А., Усюкин В. И.* Строительная механика ракет. М.: Высшая школа, 1984. 391 с.
4. *Барабанов Н. В.* Конструкция корпуса морских судов. Л.: Судостроение, 1981. 552 с.
5. *Беленький Л. М.* Большие деформации судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1973. 204 с.
6. *Белкин В. П.* Конструкция корпуса надводных кораблей. Л.: Изд-во ВМИОЛУ им. Ф. Э. Дзержинского, 1970. 274 с.
7. *Бидерман В. Л.* Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
8. *Бойцов Г. В., Палий О. М.* Прочность и конструкция корпуса судов новых типов. Л.: Судостроение. 360 с.
9. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
10. *Бубнов И. Г.* Избранные труды. Л.: Судпромгиз, 1956. 440 с.
11. *Бубнов И. Г.* Строительная механика: В 2. ч. Спб., 1912. Ч. I.
12. *Бубнов И. Г.* То же, 1914. Ч. II.
13. *Власов В. З.* Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
14. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
15. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: ГИТТЛ, 1953. 544 с.
16. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.
17. *Гузь А. Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 512 с.
18. *Дикович И. Л.* Статика упругопластических балок судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1967. 264 с.
19. *Ершов Н. Ф., Свечников О. И.* Предельное состояние и надежность конструкций речных судов. Л.: Судостроение, 1970. 152 с.
20. *Задачник* по строительной механике корабля/Ш. З. Локшин, В. А. Постнов, Н. Л. Сиверс, В. М. Купаев. Л.: Судостроение, 1972. 224 с.
21. *Зенкевич О. С.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.
22. *Калинин В. С., Постнов В. А.* Основы теории оболочек. Л.: ЛКИ, 1974. 200 с.
23. *Климанов В. И.* Расчет стержневых систем методами перемещений и распределения моментов. Свердловск: Изд-во Урал. политехн. ин-та, 1977. 80 с.
24. *Клюшников В. Д.* Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
25. *Короткин Я. И., Постнов В. А., Сиверс Н. Л.* Строительная механика корабля и теория упругости: В 2-х т. Л.: Судостроение, 1968. Т. 1. 422 с.

26. *Короткин Я. И., Ростовцев Д. М., Сиверс Н. Л.* Прочность корабля. Л.: Судостроение, 1974. 432 с.
27. *Курдюмов А. А.* Прочность корабля. Л.: Судпромгиз, 1956. 384 с.
28. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 398 с.
29. *Масленников А. М.* Расчет статически неопределимых систем в матричной форме. Л.: Стройиздат, 126 с.
30. *Метод* конечных элементов/П. М. Варвак, И. М. Бузун, А. С. Городецкий и др.; Под ред. П. М. Варвака. Киев: Вища школа, 1981. 176 с.
31. *Методы* расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ: В 2 ч./А. В. Александров, Н. Н. Шапошников, В. А. Смирнов. М.: Стройиздат, 1976. Ч. 1—2.
32. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 344 с.
33. *Огибалов П. М., Колтунов М. А.* Оболочки и пластины. М.: МГУ, 1969. 696 с.
34. *Палий О. М., Спиро В. Е.* Анизотропные оболочки в судостроении. Л.: Судостроение, 1977. 392 с.
35. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. 2-е изд. М.: Наука, 1967. 420 с.
36. *Папкович П. Ф.* Строительная механика корабля: В 2 ч. М.: Морской транспорт, 1945—1957. Ч. I. В 2 т. Т. 1—2.
37. *Папкович П. Ф.* Строительная механика корабля: В 2 ч. Л.: Судпромгиз, 1941. Ч. II.
38. *Папкович П. Ф.* Труды по прочности корабля. Л.: Судпромгиз, 1956. 680 с.
39. *Папкович П. Ф.* Теория упругости. М.: Оборонгиз, 1939, 640 с.
40. *Постнов В. А.* Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977. 280 с.
41. *Постнов В. А., Хархурим И. Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 342 с.
42. *Постнов В. А., Калинин В. С., Ростовцев Д. М.* Вибрация корабля. Л.: Судпромгиз, 1983. 248 с.
43. *Прочность.* Устойчивость. Колебания: Справочник: В 3 т./Под ред. А. И. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1—3.
44. *Ржаницын А. Р.* Теория составных стержней строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1948. 280 с.
45. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1955. 476 с.
46. *Розин Л. А.* Стержневые системы как системы конечных элементов. Л.: ЛГУ, 1976. 232 с.
47. *Ростовцев Д. М.* Расчет сложных рам с помощью метода перемещений в матричной форме. Л.: ЛКИ, 1976. 30 с.
48. *Сиверс Н. Л.* Расчет и конструирование судовых надстроек. Л.: Судостроение, 1966.
49. *Соломенко Н. С., Абрамян К. Г., Сорокин В. В.* Прочность и устойчивость пластин и оболочек судового корпуса. Л.: Судостроение, 1967. 488 с.
50. *Справочник* по строительной механике корабля: В 3 т./Под ред. акад. Ю. А. Шиманского. Л.: Судпромгиз, 1958. Т. 1—3.
51. *Справочник* по строительной механике корабля: В 3 т./Под ред. проф. О. М. Палия. Л.: Судостроение, 1982. Т. 1—3.
52. *Стригунов В. М.* Расчет самолета на прочность. М.: Машиностроение, 1984. 376 с.
53. *Строительная* механика: Стержневые системы/А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, В. Я. Лащенков, Н. Н. Шапошников. Под ред. А. Ф. Смирнова. М.: Стройиздат, 1981. 512 с.
54. *Строительная* механика корабля и теория упругости: В 2 т./А. А. Курдюмов, А. З. Локшин, Р. А. Иосифов и др. Л.: Судостроение; 1968. Т. 2. 420 с.
55. *Суслов В. П., Кочанов Ю. П.; Спихтаренко В. Н.* Строительная механика корабля и основы теории упругости. Л.: Судостроение, 1972. 720 с.
56. *Тимошенко С. П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. 808 с.

57. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955.
58. *Уманский А. А.* Строительная механика самолета. М.: Оборонгиз, 1961. 529 с.
59. *Учебный* справочник по прочности судов внутреннего плавания/В. В. Давыдов, Н. В. Маттес, И. Н. Сиверцев и др. М.: Транспорт, 1978. 520 с.
60. *Филин А. П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела: В 3 т. М.: Наука, 1975. Т. 1—3.
61. *Филин А. П., Соколова А. С.* Строительная механика корабля. Л.: Речной трансп., 1957. 444 с.
62. *Чувиковский В. С.* Вопросы устойчивости в строительной механике корабля. Л.: Судостроение, 1971. 216 с.
63. *Чувиковский В. С.* Численные методы в строительной механике корабля. Л.: Судостроение, 1976. 374 с.
64. *Чувиковский В. С., Палий О. М., Спиро В. Е.* Оболочки судовых конструкций. Л.: Судостроение. 1966. 280 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАЗДЕЛ IV | **ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК**

РАЗДЕЛ V | **ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАСЧЕТА СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ**

Валерий Александрович Постнов,
Дмитрий Михайлович Ростовцев,
Виталий Павлович Суслов,
Юрий Петрович Кочанов

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА КОРАБЛЯ И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В 2 томах

Том 2

ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ, СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ, ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Зав. редакцией Д. В. Павлов
Редактор Н. И. Долинина
Художественный редактор О. П. Андреев
Технический редактор Р. К. Чистякова
Корректоры Т. С. Александрова, Л. В. Горбунова, С. Н. Маковская
Художник Б. Н. Осенчаков
ИБ № 1290

Сдано в набор 12.05.87. Подписано в печать 09.10.87. М-32285. Формат 60 × 90/16. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 26,0. Усл. кр.-отт. 26,0. Уч.-изд. л. 28,0. Изд. № 4152-86. Зак. № 545. Тираж 6000 экз. Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Судостроение», 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8.

Набрано в Ленинградской типографии № 2 головного предприятия ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Измайловский проспект, 29.
Отпечатано в Ленинградской типографии № 8 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 190000, Ленинград, Прачечный переулок, 6. Зак. 545.

ВАСИЛЬЕВ А. В. **Управляемость судов:** Учебник. — 20 л.: ил. — 1 р.

В соответствии с программой изложены основы теории управляемости судов и пути ее практического приложения, в основном для судов речного флота.

Для студентов кораблестроительных вузов, инженерно-технических работников конструкторских, производственных и эксплуатирующих организаций водного транспорта.