

В. В. БОЛОТИН

ДИНАМИЧЕСКАЯ
УСТОЙЧИВОСТЬ
УПРУГИХ СИСТЕМ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1956

Болотин Владимир Васильевич. Динамическая устойчивость упругих систем.

Редактор *И. К. Снитко.*

Техн. редактор *С. С. Гверилов.*

Корректор *А. С. Кагил.*

Сдано в набор 1/III 1956 г. Подписано к печати 27/VI 1956 г. Бумага 84×108¹/₂,
Физ. печ. л. 18,75. Условн. печ. л. 33,75. Уч.-изд. л. 28,95. Тираж 5900 экз. Т-04432.
Цена книги 16 р. 50 к. Заказ № 1035.

Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва В-71, Б. Калужская, 15

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической
промышленности. 4-я тип. им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Введение	11

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Глава первая. Определение областей динамической неустойчивости	19
§ 1. Дифференциальное уравнение задачи	19
§ 2. Некоторые свойства уравнения Матье-Хилла	24
§ 3. Построение областей динамической неустойчивости для частного случая	29
§ 4. Вывод уравнения критических частот	32
§ 5. Определение областей динамической неустойчивости	38
§ 6. Некоторые экспериментальные результаты	48
Глава вторая. Влияние затухания на области динамической неустойчивости	53
§ 7. Исследование дифференциальных уравнений	53
§ 8. Вывод уравнения критических частот с учетом затухания	56
§ 9. Определение критических значений коэффициента возбуждения	59
§ 10. Общий случай	64
Глава третья. Определение нелинейных факторов	68
§ 11. Предварительные замечания	68
§ 12. Продольный изгиб в послекритической стадии	69
§ 13. Нелинейная упругость	73
§ 14. Нелинейная инерционность	80
§ 15. Нелинейное затухание	86
Глава четвертая. Собственные и вынужденные колебания нелинейной системы	94
§ 16. Метод медленно изменяющихся амплитуд	94
§ 17. Собственные колебания нелинейной системы	100
§ 18. Вынужденные колебания нелинейной системы	106

Глава пятая. Амплитуды колебаний при главном параметрическом резонансе	111
§ 19. Основные уравнения	111
§ 20. Определение установившихся амплитуд	115
§ 21. Исследование формулы для установившихся амплитуд	120
§ 22. Опытная проверка теории	126
Глава шестая. Неустановившиеся колебания	132
§ 23. Вывод уравнений установления. Устойчивость колебаний	132
§ 24. Процесс установления колебаний	139
§ 25. Режим биений	142
Глава седьмая. Побочные резонансы	147
§ 26. Параметрически возбуждаемые колебания при втором резонансе	147
§ 27. Влияние начальной кривизны и эксцентриситета. Вынужденные колебания	151
§ 28. Третий и последующий резонансы.	159
Глава восьмая. О взаимодействии вынужденных и параметрически возбуждаемых колебаний	161
§ 29. Предварительные замечания	161
§ 30. Влияние продольных колебаний на области динамической неустойчивости	163
§ 31. Определение установившихся амплитуд с учетом продольных колебаний	169
Глава девятая. Расширение границ применимости теории	177
§ 32. Распространение результатов на другие задачи динамической устойчивости	177
§ 33. Колебания систем с периодически меняющейся жесткостью. Валы, сечения которых имеют неодинаковые главные моменты инерции	183
§ 34. Пространственные колебания вала	188
§ 35. Другие примеры систем с периодически меняющейся жесткостью	195
§ 36. Колебания систем с периодически меняющейся массой	198

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

Глава десятая. Элементы теории матриц	205
§ 37. Матрицы и действия над ними	205
§ 38. Приведение матриц к диагональному виду. Характеристическое уравнение	210

§ 39.	Собственные колебания упругих систем с конечным числом степеней свободы	220
§ 40.	Вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы	226
Глава	одиннадцатая. Элементы теории линейных интегральных уравнений	229
§ 41.	Основные определения	229
§ 42.	Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма	233
§ 43.	Симметричные интегральные уравнения. Разложение по фундаментальным функциям	235
§ 44.	Собственные и вынужденные колебания систем с бесконечным числом степеней свободы	241
§ 45.	Интегральные уравнения статической устойчивости	247
Глава	двенадцатая. Дифференциальные уравнения динамической устойчивости стержней	251
§ 46.	Вывод дифференциальных уравнений динамической устойчивости	251
§ 47.	Другая форма дифференциальных уравнений динамической устойчивости	257
§ 48.	Применение вариационных методов	263
§ 49.	Особый случай и признаки его существования	269
Глава	тринадцатая. Дифференциальные уравнения динамической устойчивости упругих систем	273
§ 50.	Предварительные замечания	273
§ 51.	Сведения из теории конечных деформаций	277
§ 52.	Постановка задачи о динамической устойчивости сплошного упругого тела	279
§ 53.	Тензор Грина для сплошного упругого тела. Интегральные уравнения колебаний и устойчивости	283
§ 54.	Приведение к системам обыкновенных дифференциальных уравнений	290
Глава	четырнадцатая. Построение областей динамической неустойчивости	294
§ 55.	Сведения из теории дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами	294
§ 56.	Уравнение для определения характеристических показателей	300
§ 57.	Вывод уравнения критических частот	302
§ 58.	Пример определения границ областей динамической неустойчивости	311
§ 59.	Приближенный метод расчета областей неустойчивости	317
§ 60.	Случай кратных корней, отличных от ± 1 . Комбинаторный резонанс	321

Глава пятнадцатая. Динамическая устойчивость с учетом затухания	323
§ 61. Предварительные замечания	323
§ 62. Определение областей динамической неустойчивости	331
§ 63. Уравнение критических частот	336
§ 64. Пример	340
§ 65. Приближенный способ учета затухания	345
Глава шестнадцатая. Основы нелинейной теории динамической устойчивости	348
§ 66. Методы составления уравнений нелинейной задачи	348
§ 67. Соотношение между линейной и нелинейной теориями	358
§ 68. О периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами	364
§ 69. Пример. Случай системы второго порядка	374
§ 70. Метод формальных разложений в тригонометрические ряды	381
§ 71. Вывод уравнений неустановившихся колебаний	387

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

Глава семнадцатая. Динамическая устойчивость прямолинейных стержней	390
§ 72. Различные случаи опорного закрепления. Влияние поведения нагрузки	390
§ 73. Уравнения динамической устойчивости тонкостенных стержней	404
§ 74. Частные задачи динамической устойчивости тонкостенных стержней	409
§ 75. Задача динамической устойчивости тонкостенных стержней в нелинейной постановке	415
Глава восемнадцатая. Динамическая устойчивость криволинейных стержней	425
§ 76. Элементарные задачи	425
§ 77. Функции влияния прогибов для арок	430
§ 78. Интегральные уравнения колебаний, устойчивости и динамической устойчивости арок	434
§ 79. Динамическая устойчивость сжато-изогнутых арок. Постановка задачи	441
§ 80. Круговая двухшарнирная арка	443
§ 81. Нелинейная задача динамической устойчивости арок	451
§ 82. Экспериментальные результаты	458
Глава девятнадцатая. Динамическая устойчивость плоской формы изгиба	464
§ 83. Постановка задачи. Чистый изгиб узкой прямоугольной полосы	464

§ 84.	Обобщение результатов. Случай произвольной вертикальной нагрузки	470
§ 85.	Пример	474
§ 86.	Влияние поведения нагрузки	480
§ 87.	Учет нелинейных факторов	485
§ 88.	Взаимодействие вынужденных и параметрически возбуждаемых колебаний	491
Глава	двадцатая. Динамическая устойчивость статически неопределимых рам	498
§ 89.	Постановка задачи. «Точный» метод расчета	493
§ 90.	Приближенный метод расчета рам на колебания	502
§ 91.	Расчет рам на статическую устойчивость	513
§ 92.	Расчет рам на динамическую устойчивость	519
§ 93.	Определение амплитуд в резонансном случае	523
Глава	двадцать первая. Динамическая устойчивость пластинок	5 28
§ 94.	Уравнения собственных колебаний и статической устойчивости пластинок	528
§ 95.	Вывод дифференциальных уравнений динамической устойчивости пластинок	533
§ 96.	Простейшие случаи интегрирования	535
§ 97.	Некоторые частные задачи	540
§ 98.	Применение вариационных методов	546
§ 99.	Постановка нелинейной задачи. Основные уравнения	54 9
§ 100.	Две нелинейные задачи	55 5
§ 101.	Учет продольных сил инерции	55 2
Глава	двадцать вторая. Динамическая устойчивость оболочек	573
§ 102.	Постановка задачи	573
§ 103.	Случай весьма пологой оболочки	577
§ 104.	Динамическая устойчивость круговой цилиндрической оболочки	580
§ 105.	Динамическая устойчивость сферической оболочки	585
	Именной указатель	594
	Предметный указатель	595

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга является попыткой систематического изложения общей теории динамической устойчивости упругих систем с ее многочисленными приложениями. В основу книги положены исследования автора, из которых часть была опубликована ранее в виде отдельных статей. Там, где затронуты вопросы, общие с разобранными у других авторов, сохранен, естественно, способ изложения, принятый для всей книги.

Книга посвящена решению технических проблем. Как и во всяком другом инженерном (или физическом) исследовании, на первом плане здесь стоит выбор достаточно простой исходной схемы, «модели», а также выбор приближенных математических методов, быстро приводящих к обозримым результатам. Это обстоятельство, а также стремление сделать книгу доступной возможно более широкому кругу читателей отразилось и на форме изложения и на самой структуре книги.

Книга состоит из трех частей. Первая часть, представляющая собой как бы низший концентр, посвящена простейшим задачам динамической устойчивости, которые не требуют для своего разрешения сложных математических методов. На примере этих задач автор хотел ввести читателя в круг изучаемых вопросов. Вместе с тем, здесь выясняются некоторые особенности явлений неустойчивости, о которых в дальнейшем упоминается лишь вскользь, и намечаются методы решения общей задачи.

Две другие части образуют второй концентр книги. Вторая часть начинается с двух глав, содержащих минимально необходимые сведения математического характера; квалифицированный читатель может эти главы пропустить. Далее рассматриваются свойства общих уравнений динамической устойчивости, излагаются методы определения границ областей

неустойчивости и амплитуд параметрически возбуждаемых колебаний в общем случае.

Третья часть посвящена приложениям. Здесь рассмотрены различные задачи динамической устойчивости прямолинейных стержней, арок, балок, статически неопределимых стержневых систем, пластинок и оболочек. Выбор примеров продиктован как стремлением дать иллюстрацию общих методов, так и желанием привести решение конкретных практических задач. Последнее оказалось возможным лишь в той мере, насколько позволил установленный объем книги.

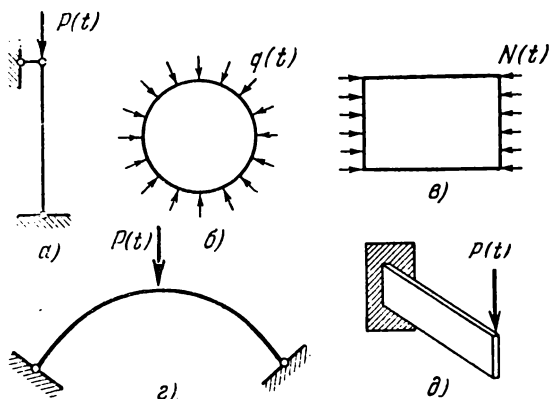
Пользуясь случаем, выражаю глубокую признательность А. С. Вольмиру, прочитавшему рукопись и давшему ценные советы.

Автор

Январь 1956 г.,
г. Москва.

ВВЕДЕНИЕ

1. В последние годы обозначились границы нового раздела прикладной теории упругости — *теории динамической устойчивости упругих систем*. В этом разделе рассматриваются вопросы, смежные с вопросами теории колебаний и устойчивости упругих систем; как и многие другие отрасли знания, лежащие на линии соприкосновения двух областей,



Фиг. 1.

теория динамической устойчивости испытывает сейчас период интенсивного развития.

Предмет теории динамической устойчивости удобно разъяснить на примерах.

Если на прямолинейный стержень действует периодическая продольная нагрузка (фиг. 1, а) и если амплитуда ее меньше критического статического значения, то стержень, вообще говоря, испытывает только продольные колебания.

Однако оказывается, что при определенных соотношениях между возмущающей частотой θ и частотой собственных поперечных колебаний ω прямолинейная форма стержня становится динамически неустойчивой: возникают поперечные колебания, амплитуда которых быстро возрастает до больших значений. Соотношение частот, при котором наступает этот резонанс (так называемый *параметрический резонанс*), отличается от соотношения частот при обычном резонансе вынужденных колебаний; для достаточно малых значений амплитуды продольной силы это соотношение имеет вид $\theta = 2\omega$ ¹⁾. Круговое кольцо, сжатое равномерно распределенной радиальной нагрузкой (фиг. 1, б), испытывает, вообще говоря, только осевое сжатие. Однако при определенных соотношениях между частотой нагрузки и частотой собственных изгибных колебаний кольца начальная форма кольца становится динамически неустойчивой и возникают интенсивные изгибные колебания. Периодические силы, действующие в срединной плоскости пластинки (фиг. 1, в), при определенных условиях могут вызвать интенсивные поперечные колебания. Периодическая нагрузка, приложенная симметрично относительно арки (фиг. 1, з) и вызывающая, вообще говоря, только симметричные колебания, при определенных условиях может вызвать кососимметричные колебания весьма большой амплитуды. Периодические силы, действующие на балку узкого поперечного сечения и приложенные в плоскости ее наибольшей жесткости (фиг. 1, д), при определенных условиях могут вызвать изгибно-крутильные колебания из этой плоскости.

Число примеров можно было бы умножить. Каждый раз, когда под действием статической нагрузки определенного вида возможна потеря статической устойчивости (первого рода), под действием вибрационной нагрузки того же вида возможна потеря динамической устойчивости.

Подобная нагрузка характеризуется тем, что она входит как параметр в левые части уравнений возмущенного равновесия

¹⁾ Явление параметрического резонанса натянутой струны, один из концов которой прикреплен к колеблющемуся камертону, было обнаружено Мельде (1859 г.). Первое теоретическое объяснение этого явления принадлежит Рэлею (1883—1887 гг.). См., например, его «Теорию звука», т. I, Гостехиздат, 1955. Обзор ранних работ по параметрическому резонансу можно найти в Журн. техн. физ. 4, вып. 1 (1934).

(движения). Будем называть такую нагрузку *параметрической*; этот термин тем более удобен, что указывает на связь с явлением параметрического резонанса ¹⁾.

Введя понятие о параметрической нагрузке, можно так определить предмет *теории динамической устойчивости упругих систем*: она изучает колебания, возникающие под действием вибрационной параметрической нагрузки ²⁾.

Правильнее было бы говорить не о параметрической нагрузке вообще, а о нагрузке, *параметрической по отношению к некоторому виду деформаций*. Так, продольная сила, сжимающая первоначально прямолинейный стержень, представляет собой параметрическую нагрузку по отношению к поперечным прогибам, но не является таковой по отношению к продольным деформациям.

2. Подробный разбор литературы по теории динамической устойчивости, доведенный до 1951 г., можно найти в статье Е. А. Бейлина и Г. Ю. Джanelидзе ³⁾. Остановимся на некоторых основных этапах развития теории.

Первой работой по этому вопросу следует считать статью Н. М. Беляева ⁴⁾, появившуюся в 1924 г. В работе рассматривается задача о динамической устойчивости прямолинейного стержня, шарнирно опертого по обоим концам, и определяются границы главной области неустойчивости. В 1935 г. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов ⁵⁾ вновь возвращаются к этой задаче, рассмотрев общий случай опорных закреплений. Применяя вариационный метод Галеркина, авторы сводят общую задачу к уравнению, которое уже

¹⁾ В последнее время этот термин становится все более употребительным (Ржаницын А. Р., Устойчивость равновесия упругих систем, Гостехиздат, 1955).

²⁾ Иногда предмет теории динамической устойчивости толкуют более широко, включая сюда также задачи о колебаниях упругих систем под действием ударной параметрической нагрузки; эта трактовка, повидимому, не удержалась.

³⁾ Бейлин Е. А. и Джanelидзе Г. Ю., Прикл. матем. и мех. 16, вып. 5 (1952).

⁴⁾ Беляев Н. М., Сборн. «Инженерные сооружения и строительная механика», изд-во «Путь», 1924. См. также в книге: Стретт М. Д., Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, ДНТВУ, 1935.

⁵⁾ Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н., Сборн. «Исследование колебаний конструкций», ДНТВУ, 1935.

рассматривалось Н. М. Беляевым, с той разницей, что коэффициентами уравнения являются приближенные параметры (в смысле метода Галеркина). Годом раньше Н. Е. Кочин¹⁾ рассмотрел родственную в математическом отношении задачу о колебаниях коленчатых валов; другая родственная задача исследовалась в связи с колебаниями ведущей системы электровоза²⁾.

Отметим, что первые зарубежные работы по динамической устойчивости стержней относятся к концу тридцатых и началу сороковых годов³⁾.

Динамическая устойчивость пластинок, сжатых периодическими продольными силами, рассматривалась В. А. Боднером⁴⁾, З. И. Халиловым⁵⁾ и Р. Эйнауди⁶⁾. Задача о динамической устойчивости кругового кольца под действием радиальной вибрационной нагрузки решена Г. Ю. Джанелидзе и М. А. Радцигом⁷⁾. Ряд частных задач рассмотрен в брошюре В. Н. Челомея⁸⁾. Задача о динамической устойчивости симметричной формы сжато-изогнутой арки исследовалась автором⁹⁾. Н. Г. Бондарь¹⁰⁾ пытался рассмотреть аналогичную задачу, однако его решение ошибочно¹¹⁾. А. Н. Марковым¹²⁾ и

1) Кочин Н. Е., Прикл. матем. и мех. 2, вып. 1 (1934).

2) Литературу см. Тимошенко С. П., Теория колебаний в инженерном деле. ОНТИ, 1934; Бондаренко Г. В., Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний. Изд. АН СССР, 1936.

3) Mettler E., Mitt. Forsch. Anst. GH-Konzern 8, (1940); Utida I. and Sezawa K., Report of the Aeronaut. Res. Inst. Tokyo 15 (1940); Lubkin S. and Stoker J., Quart. of Appl. Math. 1943.

4) Боднер В. А., Прикл. матем. и мех. 2 (нов. серия), вып. 1 (1938).

5) Халилов З. И., Труды Азерб. гос. ун-та, сер. матем., 1, вып. 1 (1942).

6) Einaudi R., Atti della Acc. Gioenia 1 (1936) (1937).

7) Джанелидзе Г. Ю. и Радциг М. А., Прикл. матем. и мех. 4 (нов. серия), вып. 5—6 (1940).

8) Челомей В. Н., Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций. Изд. Аэрофлот, 1939.

9) Болотин В. В., Доклады АН СССР 83, № 4 (1952); Инженерн. сборн. 15 (1953).

10) Бондарь Н. Г., Инженерн. сборн. 13 (1952).

11) Болотин В. В., Инженерн. сборн. 18 (1954).

12) Марков А. Н., Прикл. матем. и мех. 13, вып. 2 (1949).

О. Д. Ониашвили¹⁾ рассмотрены некоторые частные задачи динамической устойчивости оболочек.

Вопрос о влиянии затухания на границы областей неустойчивости обсуждался Э. Меттлером²⁾ и К. А. Наумовым³⁾. Заметим, что соответствующая задача в более общей формулировке была решена еще в 1927 г. А. А. Андроновым и М. А. Леонтовичем⁴⁾. Случай изменения нагрузки по кусочно-постоянному закону рассматривался И. С. Аржанных⁵⁾, А. Ф. Смирновым⁶⁾ и В. М. Макушиным⁷⁾.

Упомянутые выше работы характерны тем, что задача динамической устойчивости сводится в них (точно или приближенно) к одному дифференциальному уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами (уравнению Матье-Хилла). Между тем, уже В. Н. Челомей показал⁸⁾, что задача динамической устойчивости в общем случае приводит к системам дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Б. З. Брачковский⁹⁾ (на основе вариационного метода Галеркина) и автор¹⁰⁾ (на основе интегральных уравнений) установили класс задач, которые могут быть точно сведены к одному уравнению второго порядка. Обобщение этих результатов на случай диссипативных систем дано Г. Ю. Джанелидзе¹¹⁾. И хотя свойства уравнений, которые получаются по методу Галеркина, хорошо изучены, количество публикаций, основанных на

¹⁾ Ониашвили О. Д., Сообщ. АН Груз. ССР 11, вып. 3 (1950).

²⁾ Mettler E., Forschungshefte aus Geb. des Stahlbaues 4 (1941).

³⁾ Наумов К. А., Труды МИИТ, вып. 69 (1946).

⁴⁾ Андронов А. А. и Леонтович М. А., Журнал РФХО, ч. физ., 59 (1927).

⁵⁾ Аржанных И. С., Изв. Узб. фил. АН СССР, вып. 8, (1940).

⁶⁾ Смирнов А. Ф., Статическая и динамическая устойчивость сооружений, Трансжелдориздат, 1947.

⁷⁾ Макушин В. М., Труды МВТУ им. Баумана, кафедра сопротивления материалов, разд. III, 1947.

⁸⁾ Цит. на стр. 14.

⁹⁾ Брачковский Б. З., Прикл. матем. и мех. 6, вып. 1 (1942).

¹⁰⁾ Болотин В. В., Сборн. «Поперечные колебания и критические скорости», вып. 2. Изд. АН СССР, 1953.

¹¹⁾ Джанелидзе Г. Ю., Труды Ленингр. ин-та инженеров водного транспорта, вып. 20, 1953.

этом приближении, продолжает расти¹⁾. Упомянем здесь также, что статья Клоттера²⁾, в которой утверждается возможность разделения неизвестных для общего случая закрепления концов стержня, содержит ошибки.

В некоторых работах³⁾ задача устойчивости плоской формы изгиба, требующие по существу своему рассмотрения систем дифференциальных уравнений, сведены к одному уравнению Матье-Хилла.

И. И. Гольденблат⁴⁾ рассмотрел задачу о динамической устойчивости сжатого тонкостенного стержня, которая в случае сечения с одной осью симметрии приводит к системе двух дифференциальных уравнений. Используя результаты Н. А. Артемьева⁵⁾, И. И. Гольденблат указал способ построения областей неустойчивости путем разложения по степеням малого параметра. Сходный прием, лишенный, однако, строгого обоснования, применил Меттлер⁶⁾ к задаче о динамической устойчивости плоской формы изгиба балки. Вейденхаммер⁷⁾ тем же методом рассмотрел задачу об устойчивости стержня, защемленного на концах. Вариант метода излагается Кухарским⁸⁾ в применении к частной задаче динамической устойчивости пластинок и Реклингом⁹⁾ — в применении к частной задаче динамической устойчивости плоской формы изгиба.

Другой метод, свободный от предположения о малости параметра, предложен в статье автора¹⁰⁾. Там же исследуется структура общих уравнений динамической устойчивости. Автором рассмотрена как общая задача динамической устойчивости плоской формы изгиба¹¹⁾, так и задача динамической устойчивости пластинок¹²⁾. В настоящей книге этот

1) Малкина Р. Л., Инж. сборн. 14 (1953).

2) Klotter K., Ing. Arch. 18, № 6 (1950).

3) Салион В. Ю., Докл. АН УССР, 1950, вып. 5 (укр.); его же, Докл. АН СССР, т. 78, № 5, 1951.

4) Гольденблат И. И., Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений. Стройиздат, 1947.

5) Артемьев Н. А., Изв. АН СССР, сер. мат., 1944.

6) Mettler E., Ing. Arch. 16 (1947).

7) Weidenhammer F., Ing. Arch. 19 (1951).

8) Kucharski W., Ing. Arch. 18 (1950).

9) Reckling K. A., Ing. Arch. 20, № 3 (1952).

10) Цит. на стр. 15.

11) Болотин В. В., Инж. сборн. 14 (1953).

12) Болотин В. В., Труды МЭИ, вып. 17 (1955).

метод распространяется на диссипативные системы и применяется последовательно к задачам устойчивости стержней, арок, балок, рам, пластинок и оболочек.

В перечисленных выше работах задача динамической устойчивости рассматривалась в смысле нахождения областей, в пределах которых заданная форма движения становится динамически неустойчивой. Мысль о недостаточности линейной трактовки для определения амплитуд в резонансных областях была впервые четко сформулирована И. И. Гольденблатом¹⁾, который указал на связь этой задачи с задачей о параметрическом возбуждении электрических колебаний²⁾. Изложение нелинейной теории в применении к задаче о динамической устойчивости сжатого стержня дано автором³⁾. Аналогичная задача почти одновременно рассматривалась Вейденхаммером⁴⁾, который пытался учесть один из нелинейных факторов; однако эта работа содержит ошибки. В работе автора⁵⁾ нелинейная теория распространяется на случаи побочных областей неустойчивости, а также на случай стержня, имеющего начальную кривизну. Решение родственной задачи о колебаниях вращающегося вала, имеющего неодинаковые главные изгибные жесткости, дано в другой статье⁶⁾. Некоторые нелинейные задачи динамической устойчивости пластинок рассмотрены автором⁷⁾ с учетом растяжения срединной поверхности. В настоящей книге дается решение ряда новых нелинейных задач и, в частности, для арок, балок и статически неопределимых стержневых систем.

До сих пор имеется еще очень мало экспериментальных данных, хотя они представляли бы несомненный интерес. Опыты по параметрическому возбуждению поперечных

1) Гольденблат И. И., Динамическая устойчивость сооружений. Стройиздат, 1948.

2) Мандельштам Л. И. и Папалекси Н. Д., ЖТФ 4, вып. 1 (1934).

3) Болотин В. В., Сборн. «Поперечные колебания и критические скорости», вып. 1. Изд. АН СССР, 1951.

4) Weidenhammer F., Ing. Arch. 20, № 5 (1952). См. также Болотин В. В., Известия АН СССР (ОТН), 1955, № 11.

5) Болотин В. В., Сборн. «Поперечные колебания и критические скорости», вып. 2. Изд. АН СССР, 1953.

6) Болотин В. В., Инж. сборн. 19 (1954).

7) Болотин В. В., Изв. АН СССР (ОТН), 1954, № 10.

колебаний сжатых стержней описаны автором¹⁾. Определялись амплитуды установившихся колебаний, исследовались затухание, режим биений и процесс установления. Здесь же дано сопоставление теории с опытом. Параметрически возбуждаемые колебания сжато-изогнутых арок описаны в статьях автора²⁾. Опыты по динамической устойчивости плоской формы изгиба балок производились И. А. Бурнашевым³⁾ и В. А. Соболевым⁴⁾.

3. Теория динамической устойчивости еще пробивает дорогу для непосредственных инженерных приложений. Параметрически возбуждаемые колебания, являющиеся спутником вынужденных колебаний, сходны с ними по внешним проявлениям и могут поэтому квалифицироваться инженерами-практиками как обычные резонансные колебания. Между тем, в ряде случаев общепринятые методы демпфирования и виброизоляции могут оказаться бессильными перед параметрическими колебаниями или даже привести к противоположным результатам. Даже там, где вибрации непосредственно не угрожают целостности конструкции или ее нормальной эксплуатации, при длительном воздействии они могут привести к усталостному разрушению. Поэтому изучение условий возникновения параметрических колебаний и методов борьбы с ними является необходимым для инженеров-исследователей в различных областях машиностроения, транспорта и промышленного строительства.

Теория динамической устойчивости является одним из самых молодых разделов механики деформируемых тел. И хотя за последние десять лет многое было уже сделано, хотя приподнята завеса над многими вопросами, которые еще недавно были совершенно неясными, остается еще обширное и благодарное поле для исследователей.

1) См. сноску 3 на стр. 17.

2) См. сноску 9 на стр. 14.

3) Бурнашев И. А., Докл. АН Узб. ССР, 1954, № 3.

4) Соболев В. А., Инж. сборник 19 (1954).

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

§ 1. Дифференциальное уравнение задачи

1. Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях прямолинейного стержня, нагруженного периодической продольной силой (фиг. 2). Стержень предполагаем шарнирно опертым, а его сечение — постоянным по длине. Будем считать, что справедливы закон Гука и закон плоских сечений, т. е. ограничимся обычной трактовкой сопротивления материалов. Случай нелинейной упругости будет рассмотрен в главе III и далее.

Эта задача относится к числу простейших задач динамической устойчивости. Именно в такой форме она была поставлена впервые Н. М. Беляевым¹⁾.

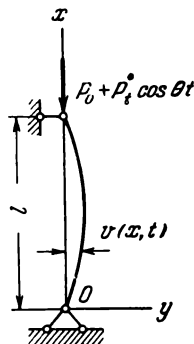
Будем исходить из известного уравнения статического продольного изгиба

$$EJ \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = 0,$$

где $v(x)$ — прогиб стержня, EJ — его жесткость при изгибе, P — продольная сила. После двукратного дифференцирования это уравнение принимает вид

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = 0; \quad (1.1)$$

¹⁾ Беляев Н. М., Собрн. «Инженерные сооружения и строительная механика», 1924.



Фиг. 2.

оно выражает теперь условие равенства нулю суммы проекций на ось Ou всех сил, действующих на единицу длины стержня.

Чтобы перейти к уравнению поперечных колебаний стержня под действием периодической продольной силы

$$P(t) = P_0 + P_t \cos \theta t,$$

достаточно ввести в уравнение (1.1) дополнительные слабые, учитывающие силы инерции.

Как это делается обычно в прикладной теории колебаний, здесь не учитываются силы инерции, связанные с вращением поперечных сечений стержня относительно своих главных осей. Влияние инерции вращения становится ощутимым только для стержней, поперечные размеры которых соизмеримы с их длиной, например для стержней типа оболочек.

Учет влияния продольных сил инерции отложим до следующих глав. Пока заметим, что продольные силы инерции могут существенно повлиять на динамическую устойчивость стержня только в том случае, если частота внешней силы близка к частоте собственных продольных колебаний стержня, т. е. когда продольные колебания носят резонансный характер. Будем считать в дальнейшем, что система находится вне резонанса продольных колебаний.

При сделанных оговорках силы инерции, действующие на стержень, сводятся к распределенной нагрузке, интенсивность которой составляет

$$-m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

где m — масса стержня, отнесенная к единице его длины.

Итак, приходим к следующему уравнению

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + (P_0 + P_t \cos \theta t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (1.2)$$

позволяющему определить динамический прогиб стержня $v(x, t)$ в любой момент времени.

2. Будем искать решение уравнения (1.2) в форме

$$v(x, t) = f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.3)$$

где $f_k(t)$ — неизвестные пока функции времени, l — длина стержня. Легко видеть, что выражение (1.3) удовлетворяет

граничным условиям задачи, требующим в данном случае, чтобы на концах стержня прогиб вместе со второй производной обращался в нуль. Напомним, что «фундаментальные функции»

$$\varphi_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$$

являются формами собственных колебаний и формами потери статической устойчивости для шарнирно опертого стержня.

Подстановка (1.3) в уравнение (1.2) дает:

$$\left[m \frac{d^2 f_k}{dt^2} + EJ \frac{k^4 \pi^4 f_k}{l^4} - (P_0 + P_t \cos \theta t) \frac{k^2 \pi^2 f_k}{l^2} \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = 0.$$

Для того чтобы выражение (1.3) действительно удовлетворяло уравнению (1.2), необходимо и достаточно, чтобы при любом t обращалась в нуль квадратная скобка. Иначе говоря, функция $f_k(t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \omega_k^2 \left(1 - \frac{P_0 + P_t \cos \theta t}{P_{*k}} \right) f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.4)$$

В уравнении (1.4) введены обозначения для k -й частоты собственных колебаний незагруженного стержня

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (1.5)$$

и для k -й критической силы (звездочка, поставленная внизу, обозначает в дальнейшем критическое значение данной величины)

$$P_{*k} = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{l^2}. \quad (1.6)$$

Представляется удобным придать уравнению (1.4) вид

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \Omega_k^2 (1 - 2\mu_k \cos \theta t) f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.7)$$

где Ω_k — частота собственных колебаний стержня, нагруженного постоянной составляющей продольной силы

$$\Omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_{*k}}}, \quad (1.8)$$

а μ_k — величина, которую мы будем называть *коэффициентом возбуждения*

$$\mu_k = \frac{P_t}{2(P_{*k} - P_0)}. \quad (1.9)$$

Поскольку уравнение (1.7) идентично для всех форм колебаний, т. е. для всех k , мы будем в дальнейшем опускать индексы при Ω_k и μ_k , записывая это уравнение в виде

$$f'' + \Omega^2(1 - 2\mu \cos \theta t) f = 0. \quad (1.10)$$

Штрихами обозначается дифференцирование по времени.

3. Уравнение (1.10) представляет собой известное *уравнение Матье*. В более общем случае, когда продольная сила изменяется по закону

$$P(t) = P_0 + P_t \Phi(t),$$

где $\Phi(t)$ — периодическая функция с периодом T

$$\Phi(t + T) = \Phi(t),$$

придем к уравнению

$$f'' + \Omega^2[1 - 2\mu\Phi(t)] f = 0.$$

Такое уравнение, более общее, чем уравнение Матье, называется обычно *уравнением Хилла*.

Уравнения Матье-Хилла встречаются в различных областях физики и техники. Так, к подобным уравнениям приводят некоторые задачи теоретической физики, в частности задача о распространении электромагнитных волн в средах с периодической структурой. В квантовой теории металлов к уравнению Матье-Хилла приводит задача о движении электрона в кристаллической решетке. Уравнение Матье-Хилла встречается при исследовании устойчивости колебательных процессов в нелинейных системах, в теории параметрического возбуждения электрических колебаний и других разделах теории колебаний. К уравнению Хилла приводят также некоторые задачи небесной механики и космогонии, в частности теория движения Луны.

Исследованию уравнения Матье-Хилла посвящена обширная литература¹⁾. Одно из наиболее интересных свойств

¹⁾ См., например, Стретт М. Д., *Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике*. ДНТУ, 1935; Мак-Лаклан Н. В., *Теория и приложения функций Матье*. ИЛ, 1953.

этого уравнения заключается в том, что при некоторых соотношениях между его коэффициентами оно имеет неограниченно возрастающие решения. Эти решения заполняют сплошь целые области на плоскости параметров, — области, которым в рассматриваемой физической задаче соответствуют области динамической неустойчивости.

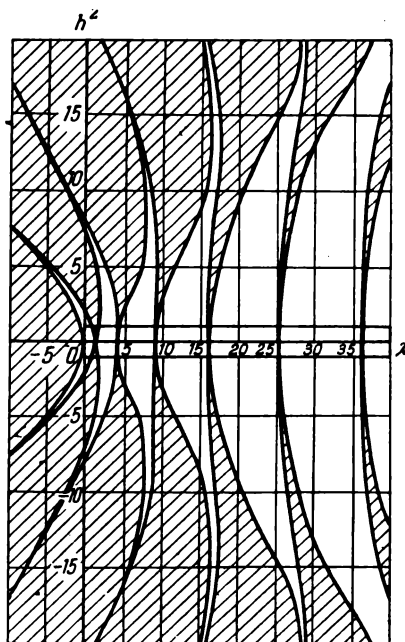
На фиг. 3, например, представлено распределение областей неустойчивости для уравнения Матье

$$\frac{d^2f}{dx^2} + (\lambda - h^2 \cos 2x) f = 0.$$

В такой записи коэффициенты уравнения зависят от двух параметров, которые и отложены вдоль осей координат. Области, в которых уравнение имеет неограниченно возрастающие решения, заштрихованы. Как видно из чертежа, области неустойчивости занимают значительную часть плоскости параметров.

Итак, для решения вопроса о динамической устойчивости стержня нужно найти на плоскости (λ, h^2) точку, соответствующую данному соотношению параметров. Если точка попадет в незаштрихованную область, значит, начальная прямолинейная форма стержня динамически устойчива. Если же точка окажется в заштрихованной области, любое начальное отклонение, данное стержню, будет неограниченно возрастать со временем, т. е. прямолинейная форма стержня будет динамически неустойчива.

Определение областей динамической неустойчивости составляет одну из центральных задач теории,



Фиг. 3.

§ 2. Некоторые свойства уравнения Матье-Хилла

1. Рассмотрим уравнение

$$f'' + \Omega^2 [1 - 2\mu\Phi(t)]f = 0, \quad (1.11)$$

в котором $\Phi(t)$ есть некоторая периодическая функция с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\theta}. \quad (1.12)$$

Относительно этой функции будем предполагать, что она может быть представлена в виде сходящегося ряда Фурье

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k \cos k\theta t + \nu_k \sin k\theta t). \quad (1.13)$$

Обратим прежде всего внимание на то, что уравнение (1.11) не изменяет своего вида при добавлении к t периода. Это следует из того, что

$$\Phi(t + T) = \Phi(t).$$

Поэтому если $f(t)$ — какое-либо частное решение уравнения (1.11), то $f(t + T)$ также является его решением.

Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — два каких-либо линейно независимых решения уравнения (1.11). Тогда на основании предыдущего $f_1(t + T)$ и $f_2(t + T)$ также являются его решениями и, следовательно, могут быть представлены в виде линейной комбинации первоначальных функций

$$\left. \begin{aligned} f_1(t + T) &= a_{11}f_1(t) + a_{12}f_2(t), \\ f_2(t + T) &= a_{21}f_1(t) + a_{22}f_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Здесь a_{ik} — некоторые постоянные.

Итак, добавление к t периода сводится к линейному преобразованию исходной системы решений. Если вместо первоначально выбранных решений $f_{1,2}(t)$ взять какие-либо другие линейно независимые решения, то коэффициенты преобразования (1.14), вообще говоря, изменятся. В частности, можно попробовать выбрать такие решения $f_{1,2}^*(t)$, что в преобразовании (1.14) обратятся в нуль побочные коэффициенты

$$a_{12} = a_{21} = 0.$$

Преобразование примет в этом случае простейший вид: оно сведется к простому умножению функций на некоторые постоянные

$$\left. \begin{aligned} f_1^*(t+T) &= \rho_1 f_1^*(t), \\ f_2^*(t+T) &= \rho_2 f_2^*(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

В отличие от (1.14) мы ввели здесь новые обозначения

$$a_{11} = \rho_1,$$

$$a_{22} = \rho_2.$$

Из теории линейных преобразований известно (см., например, десятую главу настоящей книги), что любое преобразование типа (1.14) может быть приведено к простейшему или, как говорят, диагональному виду, причем числа $\rho_{1,2}$ определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0, \quad (1.16)$$

называемого *характеристическим*¹⁾.

2. Характеристическое уравнение играет важную роль в теории уравнения Матье-Хилла, поскольку, как мы увидим ниже, во многом определяет характер его решений. Покажем, как составляется это уравнение.

Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — два линейно независимых решения уравнения (1.11), удовлетворяющие начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} f_1(0) &= 1, & f_1'(0) &= 0. \\ f_2(0) &= 0, & f_2'(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Тогда, полагая в (1.14) $t = 0$, получим:

$$a_{11} = f_1(T),$$

$$a_{21} = f_2(T).$$

¹⁾ Простоты ради мы опустили здесь одну тонкость, которая будет разъяснена позднее, а именно оставлен без рассмотрения случай, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни при нелинейных элементарных делителях.

Дифференцируя выражения (1.14) почленно и снова полагая $t = 0$, найдем:

$$a_{12} = f_1'(T),$$

$$a_{22} = f_2'(T).$$

Итак, характеристическое уравнение принимает вид

$$\begin{vmatrix} f_1(T) - \rho & f_1'(T) \\ f_2(T) & f_2'(T) - \rho \end{vmatrix} = 0$$

или, если развернуть определитель,

$$\rho^2 - 2A\rho + B = 0. \quad (1.18)$$

В уравнении (1.18) приняты обозначения

$$A = \frac{1}{2} [f_1(T) + f_2'(T)],$$

$$B = f_1(T)f_2'(T) - f_2(T)f_1'(T).$$

По самому своему смыслу корни характеристического уравнения, а следовательно, и его коэффициенты не должны зависеть от первоначального выбора решений $f_{1,2}(t)$. Так, можно показать, что свободный член характеристического уравнения всегда равен единице.

Поскольку функции $f_{1,2}(t)$ являются решениями уравнения (1.11), то

$$f_1'' + \Omega^2 [1 - 2\mu\Phi(t)] f_1 = 0,$$

$$f_2'' + \Omega^2 [1 - 2\mu\Phi(t)] f_2 = 0.$$

Умножая первое из этих тождеств на $f_2(t)$, второе — на $f_1(t)$ и вычитая одно из другого, получим:

$$f_1(t)f_2''(t) - f_2(t)f_1''(t) = 0,$$

откуда после интегрирования

$$f_1(t)f_2'(t) - f_2(t)f_1'(t) = \text{const.}$$

Величина, стоящая в левой части, при $t = T$ совпадает со свободным членом уравнения (1.18). Для определения

постоянной, стоящей в правой части, положим $t = 0$. Тогда, используя начальные условия (1.17), найдем:

$$f_1(T)f_2'(T) - f_2(T)f_1'(T) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Итак, характеристическое уравнение принимает вид

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0; \quad (1.19)$$

его корни, очевидно, связаны между собой зависимостью

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = 1. \quad (1.20)$$

3. В п. 1 было показано, что среди частных решений уравнения (1.11) имеются два линейно независимых решения $f_{1,2}^*(t)$, удовлетворяющие условию (1.15)

$$f_k^*(t+T) = \rho_k f_k^*(t) \quad (k = 1, 2).$$

Эти решения, приобретающие постоянный множитель при добавлении к t периода, могут быть представлены в виде

$$f_k^*(t) = \gamma_k(t) e^{\frac{t}{T} \ln \rho_k} \quad (k = 1, 2), \quad (1.21)$$

где $\gamma_{1,2}(t)$ — некоторые периодические функции периода T . Действительно,

$$f_k^*(t+T) = \gamma_k(t) e^{\left(\frac{t}{T} + 1\right) \ln \rho_k} = \rho_k f_k^*(t).$$

Как следует из формулы (1.21), поведение решений при $t \rightarrow \infty$ зависит от величины характеристических корней, точнее от величины их модулей. В самом деле, учитывая, что

$$\ln \rho = \ln |\rho| + i \arg \rho,$$

перепишем выражение (1.21) следующим образом:

$$f_k^*(t) = \varphi_k(t) e^{\frac{t}{T} \ln |\rho_k|} \quad (k = 1, 2), \quad (1.22)$$

где $\varphi_k(t)$ — ограниченная (почти периодическая) функция

$$\varphi_k(t) = \gamma_k(t) e^{\frac{it}{T} \arg \rho}.$$

Если характеристическое число ρ_k по модулю больше единицы, то соответствующее решение (1.22) будет иметь

неограниченно возрастающий экспоненциальный множитель. Если же характеристическое число по модулю меньше единицы, то соответствующее решение с увеличением t затухает. Наконец, если характеристическое число равно по модулю единице, то решение носит периодический (или почти периодический) характер, т. е. будет ограничено во времени.

Пусть

$$|A| = \frac{1}{2} |f_1(T) + f_2'(T)| > 1.$$

Тогда, как видно из (1.19), характеристические корни будут вещественными, причем один из них по модулю будет больше единицы. В этом случае общий интеграл уравнения (1.11) будет неограниченно возрастать со временем

$$f(t) = C_1 \chi_1(t) e^{\frac{t}{T} \ln \rho_1} + C_2 \chi_2(t) e^{\frac{t}{T} \ln \rho_2}.$$

Если же

$$\frac{1}{2} |f_1(T) + f_2'(T)| < 1,$$

то характеристическое уравнение имеет комплексные сопряженные корни, и, поскольку их произведение должно быть равно единице, по модулю они также будут равны единице. Случай комплексных характеристических корней соответствует, таким образом, области ограниченных решений.

На границах, отделяющих области ограниченных решений от областей, где общий интеграл неограниченно возрастает со временем, должно выполняться условие

$$|f_1(T) + f_2'(T)| = 2. \quad (1.23)$$

Полученным уравнением можно воспользоваться для определения границ областей динамической неустойчивости. Однако для его составления нужно знать частные решения задачи по крайней мере на протяжении первого периода колебаний, что связано с серьезными вычислительными трудностями. Лишь в некоторых частных случаях дифференциальное уравнение типа (1.11) может быть проинтегрировано в элементарных функциях. Один из таких случаев будет рассмотрен в следующем параграфе.

§ 3. Построение областей динамической неустойчивости для частного случая

Пусть продольная сила изменяется по кусочно-постоянному закону, т. е. в течение первого периода

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0 + P_t, & \text{если } 0 < t \leq t_0, \\ P(t) &= P_0 - P_t, & \text{если } t_0 < t \leq T. \end{aligned}$$

Такой закон изменения нагрузки редко встречается в практических приложениях. Однако в случае, когда $t_0 = \frac{T}{2}$, мы имеем периодический режим, который при малых P_t можно рассматривать как первое, грубое приближение по отношению к гармоническому режиму

$$P(t) = P_0 + P_t \sin \theta t.$$

Именно этим случаем мы и ограничимся в дальнейшем.

Уравнение колебаний может быть записано в виде

$$f'' + \Omega^2 [1 - 2\mu \Phi(t)] f = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= 1, & \text{если } 0 < t \leq \frac{T}{2}, \\ \Phi(t) &= -1, & \text{если } \frac{T}{2} < t \leq T, \end{aligned}$$

а коэффициент возбуждения попережнему равен

$$\mu = \frac{P_t}{2(P_* - P_0)}.$$

В течение первой половины периода колебания подчиняются дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$f'' + \Omega^2(1 - 2\mu)f = 0.$$

Его общее решение, как известно, будет:

$$f(t) = C_1 \sin p_1 t + D_1 \cos p_1 t,$$

где для сокращения обозначено $p_1 = \Omega \sqrt{1 - 2\mu}$.

Одно из частных решений должно удовлетворять начальным условиям $f_1(0) = 1$, $f_1'(0) = 0$. Это решение имеет вид

$$f_1(t) = \cos p_1 t.$$

Второе решение, удовлетворяющее начальным условиям $f_2(0) = 0$, $f_2'(0) = 1$, будет, очевидно:

$$f_2(t) = \frac{1}{p_1} \sin p_1 t.$$

Эти два решения мы должны продолжить на второй интервал времени $\frac{T}{2} < t \leq T$, в течение которого колебания описываются уравнением

$$f'' + \Omega^2(1 + 2\mu)f = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет:

$$f(t) = C_2 \sin p_2 t + D_2 \cos p_2 t,$$

где аналогично предыдущему $p_2 = \Omega \sqrt{1 + 2\mu}$. Постоянные C_2 и D_2 должны быть найдены из условия, что на границе двух полупериодов, т. е. при $t = \frac{T}{2}$, функции $f_{1,2}(t)$ были непрерывны вместе со своими первыми производными

$$\begin{aligned} f_{1,2}\left(\frac{T}{2} - \varepsilon\right) &= f_{1,2}\left(\frac{T}{2} + \varepsilon\right), \\ f'_{1,2}\left(\frac{T}{2} - \varepsilon\right) &= f'_{1,2}\left(\frac{T}{2} + \varepsilon\right) \end{aligned} \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Подстановка дает:

$$\begin{aligned} \cos \frac{p_1 T}{2} &= C_2 \sin \frac{p_2 T}{2} + D_2 \cos \frac{p_2 T}{2}, \\ -p_1 \sin \frac{p_1 T}{2} &= p_2 C_2 \cos \frac{p_2 T}{2} - p_2 D_2 \sin \frac{p_2 T}{2}. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно постоянных C_2 и D_2 и заменяя $T = \frac{2\pi}{\theta}$, находим:

$$\begin{aligned} C_2 &= \cos \frac{\pi p_1}{\theta} \sin \frac{\pi p_2}{\theta} - \frac{p_1}{p_2} \sin \frac{\pi p_1}{\theta} \cos \frac{\pi p_2}{\theta}, \\ D_2 &= \cos \frac{\pi p_1}{\theta} \cos \frac{\pi p_2}{\theta} + \frac{p_1}{p_2} \sin \frac{\pi p_1}{\theta} \sin \frac{\pi p_2}{\theta}. \end{aligned}$$

Аналогично для функции $f_2(t)$

$$C_2 = \frac{1}{p_1} \sin \frac{\pi p_1}{\theta} \sin \frac{\pi p_2}{\theta} + \frac{1}{p_2} \cos \frac{\pi p_1}{\theta} \cos \frac{\pi p_2}{\theta},$$

$$D_2 = \frac{1}{p_1} \sin \frac{\pi p_1}{\theta} \cos \frac{\pi p_2}{\theta} - \frac{1}{p_2} \cos \frac{\pi p_1}{\theta} \sin \frac{\pi p_2}{\theta}.$$

Подставив найденные значения коэффициентов C_2 и D_2 в выражения для $f_2(t)$, вычислим

$$A = \frac{1}{2} [f_1(T) + f_2'(T)].$$

После довольно громоздких преобразований получим:

$$A = \cos \frac{\pi p_1}{\theta} \cos \frac{\pi p_2}{\theta} - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1 p_2} \sin \frac{\pi p_1}{\theta} \sin \frac{\pi p_2}{\theta}. \quad (1.24)$$

В соответствии с результатами предыдущего параграфа заключаем, что при

$$\left| \cos \frac{\pi p_1}{\theta} \cos \frac{\pi p_2}{\theta} - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1 p_2} \sin \frac{\pi p_1}{\theta} \sin \frac{\pi p_2}{\theta} \right| < 1$$

уравнение рассматриваемой задачи не имеет неограниченно возрастающих решений: начальная прямолинейная форма стержня динамически устойчива. В случае, когда

$$\left| \cos \frac{\pi p_1}{\theta} \cos \frac{\pi p_2}{\theta} - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1 p_2} \sin \frac{\pi p_1}{\theta} \sin \frac{\pi p_2}{\theta} \right| > 1,$$

амплитуды поперечных колебаний будут неограниченно возрастать со временем. Уравнение

$$\left| \cos \frac{\pi p_1}{\theta} \cos \frac{\pi p_2}{\theta} - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1 p_2} \sin \frac{\pi p_1}{\theta} \sin \frac{\pi p_2}{\theta} \right| = 1 \quad (1.25)$$

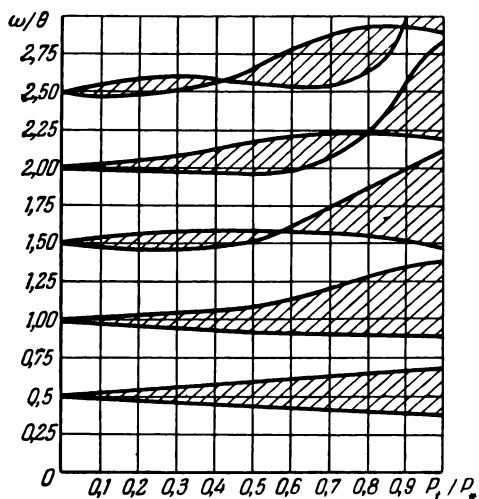
позволяет определить границы областей динамической неустойчивости. Это уравнение можно найти во многих работах ¹⁾.

Подробные расчеты произведены в работе В. М. Макушина ²⁾. Один из графиков приводится на фиг. 4. Области неустойчивости заштрихованы.

¹⁾ См., например, книгу: Ден-Гартог, Теория колебаний. Гостехиздат, 1942.

²⁾ Цит. на стр. 15.

Напрашивается обобщение уравнения (1.25) на случай, когда продольная сила изменяется по произвольному кусочно-



Фиг. 4.

постоянному закону. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\left| \left(2 \cos p_1 t_0 \sin p_2 t_0 - \frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1 p_2} \sin p_1 t_0 \cos p_2 t_0 \right) \sin p_2 T + \right. \\ \left. + \left(2 \cos p_1 t_0 \cos p_2 t_0 + \frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1 p_2} \sin p_1 t_0 \sin p_2 t_0 \right) \cos p_2 T \right| = 1.$$

Обсуждение результатов отложим до ближайших параграфов.

§ 4. Вывод уравнения критических частот

1. Ниже излагается способ определения границ областей неустойчивости для случая произвольной периодической функции, заданной в виде ряда (1.13).

В § 2 было показано, что область вещественных характеристических чисел совпадает с областью неограниченно возрастающих решений уравнения (1.11). С другой стороны,

область комплексных характеристических корней соответствует ограниченному (почти периодическим) решениям.

Границам, разделяющим области вещественных и комплексных корней, соответствуют кратные корни, причем, как это следует из (1.20), такими корнями могут быть или $\rho_1 = \rho_2 = 1$, или $\rho_1 = \rho_2 = -1$.

В первом случае, как видно из (1.15), решение дифференциального уравнения будет периодическим с периодом $T = \frac{2\pi}{\theta}$, во втором случае будем иметь период $2T^1$).

Итак, области неограниченно возрастающих решений отделяются от областей устойчивости периодическими решениями с периодом T и $2T$. Точнее, два решения одинакового периода ограничивают область неустойчивости, два решения разных периодов — область устойчивости.

Последнее свойство проще всего обнаруживается из следующих соображений. Предположим, что в интервале между $\rho = 1$ и $\rho = -1$ лежит область вещественных корней (область неустойчивости). Тогда вследствие непрерывной зависимости характеристических корней от коэффициентов дифференциального уравнения среди них должен быть корень $\rho = 0$, а следовательно, и $\rho = \infty$, что невозможно. Таким образом, корни $\rho = 1$ и $\rho = -1$ ограничивают область комплексных корней, т. е. область устойчивости²⁾.

2. Как следует из предыдущего, определение границ областей неустойчивости сводится к отысканию условий, при которых заданное дифференциальное уравнение имеет периодические решения с периодами T и $2T$. С точки зрения рассматриваемой механической задачи такой результат кажется вполне естественным. В самом деле, именно периодическое движение по существу является граничным случаем по отношению к колебаниям с неограниченно возрастающими амплитудами.

¹⁾ Более подробный анализ показывает, что периодическим будет только одно из частных решений. Второе решение будет иметь вид

$$f(t) = \chi_1(t) + t\chi_2(t),$$

где $\chi_1(t)$ и $\chi_2(t)$ — периодические функции времени.

²⁾ Строгое доказательство этой теоремы можно найти в книге М. Д. Стретта, цит. на стр. 22.

Для отыскания условий существования периодических решений поступают часто следующим образом¹⁾. Введя некоторый «малый параметр» μ (за такой параметр может быть принят, например, коэффициент возбуждения), ищут решение уравнения

$$f'' + \Omega^2 [1 - 2\mu\Phi(t)]f = 0$$

в виде ряда по степеням μ :

$$f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots$$

Здесь f_k — неизвестные пока функции времени. Подставляя это выражение в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых μ^k , получают систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая может быть разрешена методом последовательных приближений. На найденные таким путем решения накладываются ограничения в виде требования отсутствия «вековых» членов, т. е. требования периодичности решений.

Условия существования периодических решений могут быть, однако, получены иначе — без применения заимствованного из нелинейной механики «метода малого параметра». Факт существования периодических решений и возможность их разложения в ряды Фурье являются заранее известными. Это позволяет искать периодические решения уравнения (1.11) непосредственно в виде тригонометрических рядов. Покажем применение этого метода на примере уравнения Матье

$$f'' + \Omega^2(1 - 2\mu \cos \theta t)f = 0. \quad (1.26)$$

Ищем периодическое решение с периодом $2T$ в виде

$$f(t) = \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right). \quad (1.27)$$

Подстановка ряда (1.27) в уравнение (1.26) приводит после приравнивания коэффициентов при одинаковых $\sin \frac{k\theta t}{2}$ и

¹⁾ См., например, Тимошенко С. П., Теория колебаний в инженерном деле. ОНТИ, 1934.

$\cos \frac{k\theta t}{2}$ к следующей системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно a_k и b_k :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2}\right) a_1 - \mu a_3 = 0, \\ & \left(1 - \frac{k^2\theta^2}{4\Omega^2}\right) a_k - \mu (a_{k-2} + a_{k+2}) = 0 \quad (k = 3, 5, 7, \dots), \\ & \left(1 - \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2}\right) b_1 - \mu b_3 = 0, \\ & \left(1 - \frac{k^2\theta^2}{4\Omega^2}\right) b_k - \mu (b_{k-2} + b_{k+2}) = 0 \quad (k = 3, 5, 7, \dots). \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что первая система содержит только коэффициенты a_k , вторая — только b_k .

3. Как известно, система линейных однородных уравнений имеет отличные от нуля решения только в том случае, если равен нулю определитель, составленный из коэффициентов этой системы. Это положение сохраняет свою силу и в том случае, когда система содержит бесконечное число неизвестных. Итак, условием существования периодических решений уравнения (1.26) является равенство нулю определителей полученных однородных систем. Объединяя оба условия под знаком \pm , получим следующее уравнение.

$$\begin{vmatrix} 1 \pm \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & 0 & \dots \\ -\mu & 1 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{25\theta^2}{4\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (1.28)$$

Это уравнение, связывающее частоты внешней нагрузки с собственной частотой стержня и величиной продольной силы, будем называть *уравнением критических частот*, понимая под *критическими* частотами частоты внешней нагрузки θ_* , соответствующие границам областей неустойчивости. Уравнение (1.28) позволяет найти те области неустойчивости, которые ограничены периодическими решениями с периодом $2T$.

Чтобы определить области неустойчивости, ограниченные периодическими решениями с периодом T , поступим

36 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ [гл. 1
аналогичным образом. Подставив в уравнение (1.26) ряд

$$f(t) = b_0 + \sum_{k=2, 4, 6}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right),$$

получаем следующие системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2}\right) a_2 - \mu a_4 &= 0, \\ \left(1 - \frac{k^2 \theta^2}{4\Omega^2}\right) a_k - \mu (a_{k-2} + a_{k+2}) &= 0, \quad (k = 4, 6, \dots), \\ b_0 - \mu b_2 &= 0, \\ \left(1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2}\right) b_2 - \mu (2b_0 + b_4) &= 0, \\ \left(1 - \frac{k^2 \theta^2}{4\Omega^2}\right) b_k - \mu (b_{k-2} + b_{k+2}) &= 0 \quad (k = 4, 6, \dots). \end{aligned}$$

Приравнявая нулю определители полученных однородных систем, приходим к следующим уравнениям критических частот:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & 0 & \dots \\ -\mu & 1 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{16\theta^2}{\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (1.29)$$

и соответственно:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu & 0 & 0 & \dots \\ -2\mu & 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & 0 & \dots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & 0 & -\mu & 1 - \frac{16\theta^2}{\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (1.30)$$

4. Полученные определители являются бесконечными, поэтому должен быть рассмотрен вопрос об их сходимости ¹⁾,

Можно показать, что эти определители относятся к известному классу сходящихся определителей — к нормальным определителям. Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots \\ c_{21} & 1 + c_{22} & c_{23} & \dots \\ c_{31} & c_{32} & 1 + c_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (1.31)$$

называется нормальным, если сходится абсолютно двойной ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}.$$

Рассмотрим, например, определитель (1.28). Деля каждую его строку на $-\frac{k^2\theta}{4\Omega^2}$, приведем его к виду (1.31), где

$$c_{kk} = \begin{cases} -\frac{4\Omega^2}{\theta^2} (1 \pm \mu) & (k = 1), \\ -\frac{4\Omega^2}{(2k-1)^2 \theta^2} & (k \neq 1); \end{cases}$$

$$c_{ik} = \begin{cases} -\frac{4\Omega^2}{(2k-1)^2 \theta^2} \mu & (l = k \pm 1), \\ 0 & (l \neq k \pm 1). \end{cases}$$

Составив двойной ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik},$$

убедимся, что он сходится абсолютно. В самом деле, имеет

¹⁾ Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа. ОНТИ, 1933. Бесконечные определители впервые исследовались именно в связи с интегрированием уравнения Хилла (теория Луны, 1877 г.).

место неравенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |c_{ik}| < \frac{4\Omega^2}{\theta^2} (1 + 2\mu) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2},$$

причем ряд, стоящий в правой части, — сходящийся.

Аналогично доказывается сходимость остальных определителей.

§ 5. Определение областей динамической неустойчивости

1. Для выяснения общего характера расположения областей неустойчивости рассмотрим сначала случай, когда периодическая составляющая продольной силы весьма мала. Полагая в уравнениях (1.28), (1.29) и (1.30) $\mu \rightarrow 0$, найдем, что при весьма малых значениях μ решения с периодом $2T$ лежат попарно вблизи частот

$$\theta_* = \frac{2\Omega}{k} \quad (k = 1, 3, 5, \dots),$$

а решения с периодом T — вблизи частот

$$\theta_* = \frac{2\Omega}{k} \quad (k = 2, 4, 6, \dots).$$

Оба случая могут быть объединены в формуле

$$\theta_* = \frac{2\Omega}{k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.32)$$

Формула (1.32) дает те соотношения между частотой внешней силы и частотой собственных колебаний стержня, вблизи которых возможно возникновение неограниченно возрастающих колебаний; именно около этих соотношений располагаются области динамической неустойчивости стержня.

В соответствии с числом k , входящим в формулу (1.32), будем различать первую, вторую, третью и т. д. области динамической неустойчивости. Область неустойчивости, лежащая вблизи $\theta_* = 2\Omega$, является, как будет показано в дальнейшем, наиболее опасной и имеет поэтому наибольшее практическое значение. Эту область мы будем называть также *главной областью динамической неустойчивости*.

Происхождение резонанса при $\theta = 2\Omega$ легко вытекает из следующих рассуждений. Представим себе, что стержень (фиг. 2) совершает поперечные колебания с собственной частотой Ω . Продольное перемещение подвижного конца при этом также будет периодической функцией времени, однако с частотой 2Ω . Действительно, на каждый период поперечных колебаний приходятся два периода колебаний подвижной опоры. Для поддержания резонансных колебаний необходимо, чтобы внешняя сила, приложенная к подвижному концу, имела частоту 2Ω , тогда $\theta = 2\Omega$.

Прежде чем перейти к дальнейшим вычислениям, обратим внимание на особенности этого своеобразного *параметрического резонанса*. Если обычный резонанс вынужденных колебаний имеет место при совпадении собственной и возбуждающей частот, то параметрический резонанс наступает при совпадении возбуждающей частоты с удвоенной частотой собственных колебаний. Другое существенное отличие параметрического резонанса состоит в возможности возбуждения колебаний при частотах, меньших, чем частота главного резонанса. Наконец, качественно новое в параметрическом резонансе — это наличие сплошных областей возбуждения (областей динамической неустойчивости), к расчету которых мы переходим.

2. Поскольку мы имеем здесь дело с бесконечными определителями, вычисления целесообразно производить, последовательно рассматривая определители первого, второго, третьего и т. д. порядков. При этом разница между двумя последовательными приближениями может служить практической оценкой точности вычислений.

Для числовых подсчетов возможно представление бесконечных определителей типа (1.28) в виде цепных дробей. Покажем это на примере определителя

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & a_2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & a_3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

(к такому виду может быть приведен любой из наших определителей).

Будем последовательно раскрывать определители первого, второго и т. д. порядков. Уравнение первого приближения, очевидно, будет $a_1 = 0$. Во втором приближении получаем:

$$a_1 - \frac{1}{a_2} = 0.$$

Уравнение третьего приближения

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 1 & a_2 & 1 \\ 0 & 1 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

может быть представлено в виде

$$a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3}} = 0$$

и вообще

$$a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \frac{1}{a_4 - \dots}}} = 0, \quad (1.33)$$

Рассмотрим определитель (1.28). Для него

$$a_1 = -\frac{1}{\mu} \left(1 \pm \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} \right),$$

$$a_k = -\frac{1}{\mu} \left[1 - \frac{(2k-1)^2 \theta^2}{4\Omega^2} \right] \quad (k \geq 2),$$

и уравнение (1.33) принимает вид

$$1 \pm \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} - \frac{\mu^2}{1 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} - \frac{\mu^2}{1 - \frac{25\theta^2}{4\Omega^2} - \dots}} = 0,$$

или

$$\frac{\theta^2}{4\Omega^2} = 1 \pm \mu - \frac{\mu^2}{1 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} - \frac{\mu^2}{1 - \frac{25\theta^2}{4\Omega^2} - \dots}}.$$

Полученная формула особенно удобна для применения метода последовательных приближений. Подставляя в правую ее часть приближенное значение критической частоты, мы

каждый раз будем получать все более точное значение ¹⁾).

3. Преимущество описанного выше метода состоит в том, что он позволяет рассчитать границы областей неустойчивости со сколь угодно большой точностью. Мы не будем, однако, проводить здесь числовых подсчетов, поставив несколько иную задачу — вывести приближенные формулы для границ областей неустойчивости.

Для определения границ главной области неустойчивости следует рассмотреть уравнение (1.28). Удерживая в нем верхний диагональный элемент — «определитель первого порядка» и приравнивая его нулю

$$1 \pm \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} = 0,$$

получаем следующую приближенную формулу для границ главной области:

$$\theta_* = 2\Omega \sqrt{1 \pm \mu}. \quad (1.34)$$

Как известно, Н. М. Беляеву принадлежит формула

$$\theta_* = 2\omega \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_*}} \left[1 \pm \frac{P_t}{4(P_* - P_0)} \right],$$

которая в наших обозначениях принимает вид

$$\theta_* = 2\Omega \left(1 \pm \frac{\mu}{2} \right).$$

Эта формула получена путем интерполирования по результатам отдельных числовых подсчетов определителя Хилла и может считаться достаточно точной. Нетрудно видеть, что вплоть до значения $\mu = 0,5$ ²⁾ обе формулы дают практически одни и те же результаты.

¹⁾ Таким путем Н. М. Беляев в статье, цитированной на стр. 19, вычислил границы главной области неустойчивости.

²⁾ Это значение, как следует из формулы (1.9), соответствует случаю, который едва ли достигается в практических задачах:

$$P_0 + P_t = P_*$$

Для того чтобы уточнить формулу (1.34), рассмотрим второе приближение

$$\begin{vmatrix} 1 \pm \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu \\ -\mu & 1 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.35)$$

Подставив приближенное значение критической частоты (1.34) в нижний диагональный элемент определителя (1.35), мало влияющий на окончательные результаты, и разрешив уравнение относительно θ , получим формулу

$$\theta_* = 2\Omega \sqrt{1 \pm \mu + \frac{\mu^2}{8 \pm 9\mu}},$$

где последний член под радикалом учитывает поправку второго приближения. Эта поправка возрастает по мере увеличения μ , но даже при $\mu = 0,3$ не превышает одного процента. Таким образом, точность весьма простой формулы (1.34) оказывается достаточной для практических целей.

Полученный результат станет понятным, если вспомнить, что «определитель первого порядка» в уравнении (1.28) соответствует учету первых членов ряда (1.27), т. е.

$$f(t) = a \sin \frac{\theta t}{2} + b \cos \frac{\theta t}{2}.$$

Хорошие результаты, которые дает первое приближение, означают, что периодические решения на границах главной области неустойчивости по своему характеру близки к гармоническим колебаниям. К этому выводу мы еще вернемся в дальнейшем.

Остановимся на одном истолковании, которое можно дать формуле (1.34). Переписав эту формулу в виде

$$\theta_* = 2\omega \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_*} \pm \frac{P_t}{2P_*}},$$

сопоставим ее с формулой (1.8) для определения собственной частоты стержня, нагруженного постоянной продольной силой

$$\Omega = \omega \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_*}}.$$

Сравнивая формулы, приходим к заключению, что частоты, соответствующие границам главной области динамической неустойчивости, в первом приближении могут быть определены как удвоенные частоты собственных колебаний стержня, нагруженного постоянной продольной силой $P_0 + \frac{1}{2} P_t$ и $P_0 - \frac{1}{2} P_t$ соответственно.

Для отыскания границ второй области неустойчивости следует обратиться к уравнениям (1.29) и (1.30). Ограничившись определителями второго порядка

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & -\mu \\ -\mu & 1 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu \\ -2\mu & 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} \end{vmatrix} = 0,$$

получим следующие приближенные формулы для критических частот:

$$\left. \begin{aligned} \theta_* &= \Omega \sqrt{1 + \frac{1}{3} \mu^2}, \\ \theta_* &= \Omega \sqrt{1 - 2\mu^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Эти формулы можно уточнить, если рассмотреть определители более высокого порядка ¹⁾.

Для расчета третьей области неустойчивости нужно возвратиться к уравнению (1.28). Так, если исходить из определителя второго порядка (1.35), получим:

$$\theta_* = \frac{2}{3} \Omega \sqrt{1 - \frac{9\mu^2}{8 \pm 9\mu}}. \quad (1.37)$$

Сопоставляя формулы (1.34), (1.36), (1.37), видим, что ширина областей динамической неустойчивости быстро

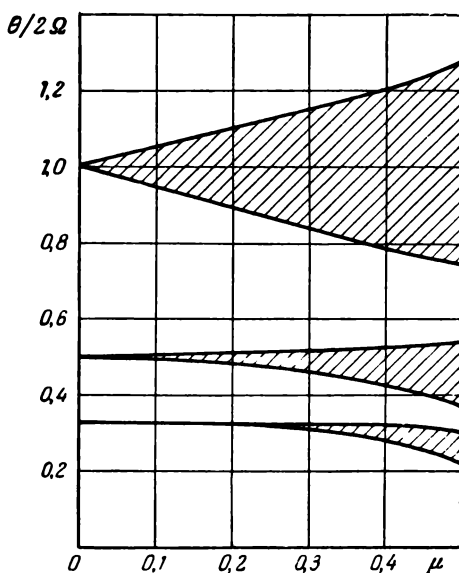
¹⁾ В литературе (см., например, Челомей В. Н., цит. на стр. 14) можно встретить утверждения, что вторая и вообще четные области неустойчивости вырождаются в кривые. Это утверждение неверно; источник ошибки следует искать в неудачном выборе нулевого приближения в «методе малого параметра».

убывает с увеличением номера области:

$$\frac{\Delta\theta}{\Omega} \sim \mu, \mu^2, \mu^3, \dots \quad (1.38)$$

Наибольшую ширину имеет главная область неустойчивости.

Распределение первых трех областей неустойчивости на плоскости $(\mu, \theta/2\Omega)$ показано на фиг. 5 (области неустой-



Фиг. 5.

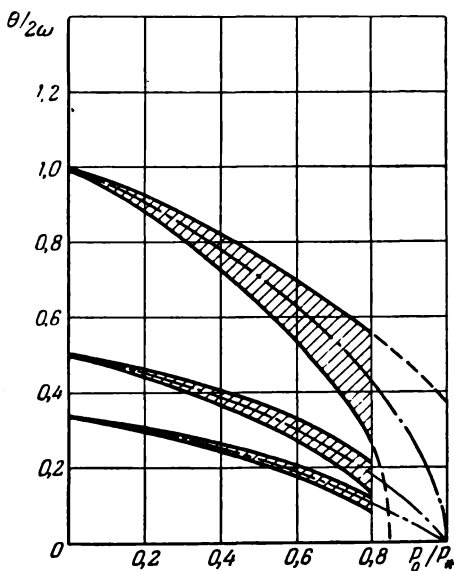
чивости заштрихованы). В отличие от фиг. 3 здесь по вертикали отложены значения $\lambda^{-1/2}$, а по горизонтали — значения $h^2/2$. Кроме того, на фиг. 5 взята лишь та часть плоскости изменения параметров, которая соответствует их реальным значениям. Эта часть плоскости обведена на фиг. 3 в рамку.

На фиг. 6 изображены области неустойчивости на плоскости $(P_0/P_*, \theta/2\omega)$. Отношение P_i/P_0 принято постоянным

и равным 0,3. При $P_t \rightarrow 0$ области неустойчивости вырождаются в «скелетные линии»

$$\frac{\theta}{2\omega} = \frac{1}{k} \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_*}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Границы областей при больших P_0/P_* не могут быть получены из формул (1.34), (1.36) и др. Здесь нужно пользо-



Фиг. 6.

ваться диаграммой Матье (фиг. 3) или таблицами собственных значений уравнения Матье ¹⁾.

4. Остановимся кратко на применении изложенного выше метода к более общему случаю уравнения Хилла. Пусть

¹⁾ См. руководства, цит. на стр. 22. Построение областей неустойчивости для случая больших коэффициентов возбуждения было выполнено Любкиным и Стокером (Quart. of Appl. Math., 1943).

46 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ [гл. 1
 продольная сила изменяется по закону

$$P(t) = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_{tk} \cos k\theta t.$$

Соответствующее уравнение будет:

$$f'' + \Omega^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2\mu_k \cos k\theta t\right) f = 0, \quad (1.39)$$

где

$$\mu_k = \frac{P_{tk}}{2(P_* - P_0)}.$$

Попробуем ищем периодическое решение в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right),$$

подстановка которого в уравнение (1.39) приводит к следующему уравнению критических частот:

$$\begin{vmatrix} 1 \pm \mu_1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -(\mu_1 \pm \mu_2) & -(\mu_2 \pm \mu_3) \dots \\ -(\mu_1 \pm \mu_2) & 1 \pm \mu_3 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} & -(\mu_3 \pm \mu_4) \dots \\ -(\mu_2 \pm \mu_3) & -(\mu_3 \pm \mu_4) & 1 \pm \mu_5 - \frac{25\theta^2}{4\Omega^2} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (1.40)$$

Аналогичный вид имеют и остальные уравнения. Удерживая в них диагональные элементы, т. е. пренебрегая в конечном счете влиянием гармоник, получаем:

$$\theta_* \approx \frac{2\Omega}{k} \sqrt{1 \pm \mu_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.41)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (1.34), которая соответствует случаю гармонического изменения продольной силы, видим, что в первом приближении каждая область неустойчивости зависит только от соответствующей гармоники в разложении продольной силы. Это обстоятельство было

подмечено еще Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым¹⁾. Влияние i -й гармоники на ширину k -й области неустойчивости составляет, как это видно из уравнения критических частот, величину порядка $(\mu_k \pm \mu_i)^2$.

Применим полученные результаты к случаю, когда продольная сила изменяется по кусочно-постоянному закону (§ 3). Сместив начальный момент времени на $T/4$, представим выражение для продольной силы в виде тригонометрического ряда

$$P(t) = P_0 + \frac{4P_t}{\pi} \sum_{k=1, 3}^{\infty} \frac{1}{k} \cos k\theta t,$$

который сходится равномерно повсюду, за исключением точек изменения величины продольной силы. Легко получим:

$$\mu_k = \frac{4}{\pi k} \mu,$$

где

$$\mu = \frac{P_t}{2(P_* - P_0)}.$$

Формула (1.41) для этого случая дает:

$$\theta_* = \frac{2\Omega}{k} \sqrt{1 \pm \frac{4}{\pi k} \mu} \quad (k = 1, 3, 5, \dots). \quad (1.42)$$

Сравнивая полученную формулу при $k=1$ с формулой (1.34), приходим к заключению, что в случае «прямоугольного» закона изменения продольной силы главная область неустойчивости оказывается примерно в $4/\pi$ раза шире, чем в случае, который описывается уравнением Матье.

Гармоническую продольную силу иногда заменяют силой, меняющейся по кусочно-постоянному закону, определяя ее амплитуду из тех или иных априорных соображений. Подобная замена может быть оправдана, пока речь идет о главной области неустойчивости. Что касается побочных областей, то здесь переход к кусочно-постоянному закону изменения продольной силы может привести

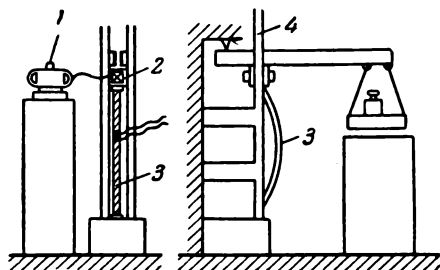
¹⁾ Сб. «Исследование колебаний конструкций». ДНТВУ, 1935.

к качественно неверным результатам. Так, третья, пятая и вообще нечетные области неустойчивости в случае гармонической продольной силы имеют ширину порядка $\Delta\theta/\Omega \sim \mu^k$, а в случае кусочно-постоянной — порядка $\Delta\theta/\Omega \sim \mu/k$.

§ 6. Некоторые экспериментальные результаты

Опытная проверка изложенных выше теоретических результатов легко может быть осуществлена в лабораторных условиях ¹⁾. Одна из возможных схем экспериментальной установки изображена на фиг. 7.

Установка монтируется на базе вертикального ударного копра. Образец из полосовой стали 3 устанавливается между



Фиг. 7.

направляющими копра 4, причем неподвижная опора образца закрепляется на нижней плите, а подвижная опора скользит в направляющих. Такое устройство обеспечивает свободное вертикальное перемещение подвижного конца стержня; свободный поворот опорных сечений обеспечивается постановкой шариковых подшипников. Все это приближает условия испытаний к теоретической схеме.

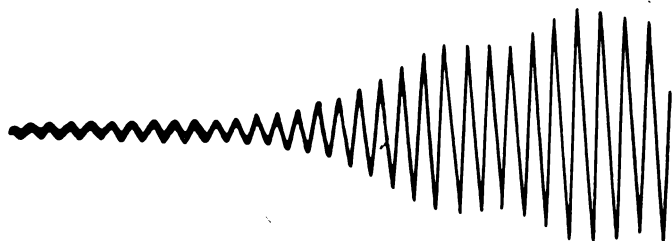
В опытах автора колебания регистрировались проволочными датчиками с записью на шлейфовом осциллографе. Для того чтобы исключить влияние деформаций осевого сжатия, применялись два датчика, один из которых наклеивался со стороны растянутого, другой — со стороны сжатого волокна. Датчики включались в схему измерительного моста

¹⁾ Болотин В. В. Сб. «Поперечные колебания и критические скорости», вып. 1. Изд. АН СССР, 1951.

параллельно, т. е. в два соседних плеча с тем, чтобы влияние деформаций противоположного знака удваивалось, а влияние деформаций сжатия исключалось.

Датчики (константановые) имели чувствительность $s = 2,1$ и сопротивление 200 ом . Применялся усилитель переменного тока, несущая частота 8000 гц . Шлейфовые вибраторы типа В-4. Характеристики вибраторов: чувствительность 1 мм на миллиампер, собственная частота шлейфа в воздухе 3500 гц , сопротивление 1 ом , максимальный ток 100 ма .

Периодическая составляющая продольной силы создавалась при помощи вибратора 2 с эксцентриками. Для определения



Фиг. 8.

частоты нагрузки на валу вибратора устанавливался скользящий контакт, периодически замыкающий цепь со включенным в нее шлейфом. Это несложное устройство позволяло определить также и фазу внешней силы по отношению к возбуждаемым колебаниям.

Эксперименты подтверждают теоретический вывод о наличии сплошных областей динамической неустойчивости. При любой частоте периодическая продольная сила вызывает, вообще говоря, поперечные колебания. Амплитуда этих колебаний ничтожна, и происходят они с частотой внешней силы. Эти колебания обусловлены, очевидно, влиянием начальной кривизны и эксцентриситета продольной силы. Однако в определенном диапазоне частот, лежащем вблизи $\theta = 2\Omega$, возникают интенсивные поперечные колебания, амплитуда которых быстро возрастает до больших значений.

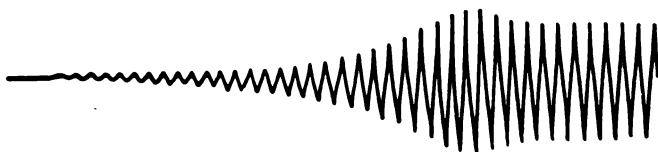
Характерно, что это нарастание, по крайней мере в начальный период, следует экспоненциальному закону (фиг. 8). Это находится в полном соответствии с теоретическими

результатами, согласно которым решения уравнения Матье в пределах областей неустойчивости имеют вид

$$f(t) = \chi(t) e^{\frac{t}{T} \ln \rho},$$

где $\ln \rho$ — вещественная величина.

Нельзя не упомянуть здесь об экспериментах по параметрическому возбуждению электрических колебаний, проводившихся под руководством Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси. На фиг. 9 приведена осциллограмма на-



Фиг. 9.

растания тока в колебательном контуре, индуктивность которого периодически меняется во времени при помощи внешней механической силы ¹⁾. По своему характеру эта осциллограмма совершенно аналогична нашим осциллограммам. В частности, в обоих случаях нарастание амплитуд следует экспоненциальному закону. В дальнейшем рост амплитуд замедляется и даже совсем прекращается, что в обоих случаях обусловлено влиянием нелинейных факторов. Подробно этот вопрос будет рассмотрен несколько позже.

Опыт подтверждает не только количественные, но и качественные результаты, в частности формулу (1.34). При пользовании этой формулой следует учитывать, однако, что сила, которую развивает вибрационная машина, растет пропорционально квадрату частоты. Можно записать, что

$$P_t = \frac{\theta^2}{4\Omega^2} \bar{P}_t,$$

где \bar{P}_t — амплитуда продольной силы, которую развивает вибратор при частоте 2Ω . С учетом этого соотношения

¹⁾ Лазарев В. А. Журн. техн. физ. 4, вып. 1 (1934).

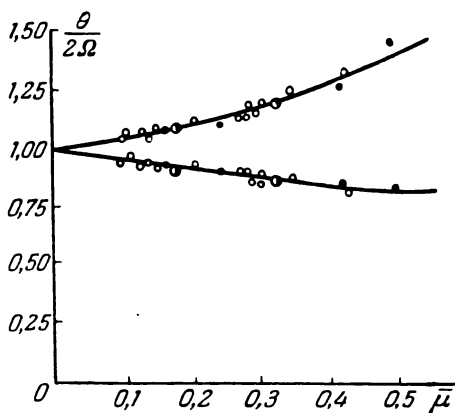
формула (1.34) дает:

$$\theta_* = \frac{2\Omega}{\sqrt{1 \pm \frac{\bar{P}_t}{2(P_* - P_0)}}},$$

или, короче,

$$\theta_* = \frac{2\Omega}{\sqrt{1 \pm \mu}}. \quad (1.43)$$

Главная область неустойчивости, границы которой определены по формуле (1.43), изображена на фиг. 10. На том



Фиг. 10.

же графике нанесены и экспериментальные результаты, которые, как мы видим, хорошо согласуются с теорией.

Границы главной области неустойчивости обнаруживаются весьма четко по появлению колебаний, происходящих с частотой, вдвое меньшей, чем частота внешней силы, и поэтому могут быть установлены с большой точностью. Вне области неустойчивости, как уже упоминалось, установившиеся колебания происходят с частотой внешней нагрузки (фиг. 11, а и б).

Сказанное выше относилось к главной области неустойчивости. Что касается второй, третьей и т. д. областей, то экспериментально обнаружить их не удастся, по крайней мере, при не слишком больших амплитудах продольной силы.

Правда, по мере приближения к синхронизму $\theta = \Omega$ интенсивность колебаний, происходящих с частотой внешней силы, несколько повышается. Однако увеличение амплитуд не ограничено каким-либо узким диапазоном частот, а «расплывается» далеко за пределы границ, предсказываемых теорией.



Фиг. 11.

Это дает основание предположить, что подобные колебания вызваны влиянием дополнительных факторов (эксцентриситета, начальной кривизны и т. п.).

Итак, в той части, которая касается побочных областей неустойчивости, соответствие между теорией и опытом отсутствует. Как мы убедимся в дальнейшем, это несоответствие может быть устранено, если рассмотреть задачу с учетом затухания.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ВЛИЯНИЕ ЗАТУХАНИЯ НА ОБЛАСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

§ 7. Исследование дифференциальных уравнений

1. По причинам, которые станут понятны читателю в дальнейшем (§ 11), мы ограничимся здесь учетом линейного затухания. Точнее, будем учитывать силы сопротивления, вводя в дифференциальное уравнение дополнительный член с первой производной от перемещения по времени

$$f'' + 2\epsilon f' + \Omega^2(1 - 2\mu \cos \theta t)f = 0; \quad (2.1)$$

имеется в виду, что коэффициент затухания ϵ каждый раз будет определяться из опыта.

Ищем решение дифференциального уравнения (2.1) в виде

$$f(t) = u(t) \cdot v(t),$$

где $u(t)$ и $v(t)$ — неизвестные пока функции времени. Подстановка в уравнение (2.1) дает:

$$u''v + 2u'(v' + \epsilon v) + \Omega^2(1 - 2\mu \cos \theta t)uv + uv'' + 2\epsilon uv' = 0$$

Потребуем, чтобы в полученном выражении коэффициент при u' обратился в нуль. Мы приходим, таким образом, к следующим двум дифференциальным уравнениям:

$$u''v + \Omega^2(1 - 2\mu \cos \theta t)uv + uv'' + 2\epsilon uv' = 0,$$

$$v' + \epsilon v = 0.$$

Второе уравнение дает $v = Ce^{-\epsilon t}$, откуда после подстановки в первое и сокращения на $Ce^{-\epsilon t}$ получаем:

$$u'' + \Omega^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Omega^2} - 2\mu \cos \theta t \right) u = 0. \quad (2.2)$$

Мы получили уравнение Матье — Хилла, которое отличается от уравнения консервативной задачи (1.11) наличием дополнительного члена порядка «поправки к частоте на затухание»

$$\Omega_* = \Omega \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\Omega^2}}. \quad (2.3)$$

Как уже показывалось (1.21), два линейно независимых решения уравнения Матье — Хилла имеют вид

$$u_1(t) = \chi_1(t) e^{\frac{t}{T} \ln \rho_1},$$

$$u_2(t) = \chi_2(t) e^{\frac{t}{T} \ln \rho_2},$$

где $\chi_{1,2}(t)$ — периодические функции периода T ; $\rho_{1,2}$ — корни характеристического уравнения. Эти корни связаны между собой соотношением (1.20)

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = 1.$$

Возвращаясь к уравнению (2.1), представим его решения в виде

$$f_1(t) = \chi_1(t) \exp\left(\frac{t}{T} \ln \rho_1 - \epsilon t\right),$$

$$f_2(t) = \chi_2(t) \exp\left(\frac{t}{T} \ln \rho_2 - \epsilon t\right),$$

или, отделяя вещественную часть $\ln \rho$,

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= \varphi_1(t) \exp\left(\frac{t}{T} \ln |\rho_1| - \epsilon t\right), \\ f_2(t) &= \varphi_2(t) \exp\left(\frac{t}{T} \ln |\rho_2| - \epsilon t\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Здесь $\varphi_{1,2}(t)$ — попрежнему ограниченные (почти периодические) функции

$$\varphi_1(t) = \chi_1(t) e^{\frac{it}{T} \arg \rho_1},$$

$$\varphi_2(t) = \chi_2(t) e^{\frac{it}{T} \arg \rho_2}.$$

2. Легко видеть, что поведение решений уравнения (2.1) зависит от соотношения между коэффициентом затухания ϵ и вещественной частью $\ln \rho$. А именно решения будут неогра-

ниченно возрастет при

$$\varepsilon < \frac{\ln |\rho|}{T}$$

и затухать при

$$\varepsilon > \frac{\ln |\rho|}{T}.$$

Рассмотрим этот вопрос детальнее. Пусть характеристические числа $\rho_{1,2}$ — комплексно сопряженные, тогда

$$\ln |\rho| = 0,$$

и оба решения затухают со скоростью затухания свободных колебаний

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \varphi_1(t) e^{-\varepsilon t}, \\ f_2(t) &= \varphi_2(t) e^{-\varepsilon t}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай вещественных корней, причем для определенности положим:

$$|\rho_1| < 1, \quad |\rho_2| > 1.$$

В этом случае первое решение также будет затухать со временем; что же касается второго решения

$$f_2(t) = \varphi_2(t) \exp\left(\frac{t}{T} \ln \rho_2 - \varepsilon t\right),$$

то здесь могут представиться два случая. Если

$$\varepsilon > \frac{\ln |\rho_2|}{T},$$

то второе решение будет ограниченным, если же

$$\varepsilon < \frac{\ln |\rho_2|}{T},$$

то второе решение, а следовательно, и общий интеграл будут неограниченно возрастать со временем.

Рассмотрим граничный случай

$$\varepsilon = \frac{\ln |\rho_2|}{T}.$$

Для нас особенно важно, что второе решение будет в этом случае периодическим: а именно при $\rho > 0$ будет иметь место период T , а при $\rho < 0$ — период $2T$.

Итак, отыскание областей неустойчивости для уравнения (2.1) сводится к определению условий, при которых

оно имеет периодические решения с периодами T и $2T$, причем и здесь два решения одинакового периода ограничивают область возрастающих решений, два решения разных периодов — область затухающих решений.

Заметим, что области неустойчивости для уравнения (2.1) лежат внутри областей неустойчивости для уравнения (2.2). Последнее описывает, кстати, колебания консервативной системы с частотой собственных колебаний, вычисленной с поправкой на затухание.

§ 8. Вывод уравнения критических частот с учетом затухания

Дальнейшие вычисления не трудны. Так, для определения условий, при которых уравнение (2.1) имеет периодические решения с периодом $2T$, подставим в него ряд¹⁾

$$f(t) = \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right)$$

и, выполнив тригонометрические преобразования, приравняем коэффициенты при одинаковых $\sin k\theta t/2$ и $\cos k\theta t/2$. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} \right) a_1 - \mu a_3 - \frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{2\Omega} b_1 &= 0, \\ \left(1 - \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} \right) b_1 - \mu b_3 + \frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{2\Omega} a_1 &= 0, \\ \left(1 - \frac{k^2\theta^2}{4\Omega^2} \right) a_k - \mu (a_{k-2} + a_{k+2}) - \frac{\Delta}{\pi} \frac{k\theta}{2\Omega} b_k &= 0, \\ \left(1 - \frac{k^2\theta^2}{4\Omega^2} \right) b_k - \mu (b_{k-2} + b_{k+2}) + \frac{\Delta}{\pi} \frac{k\theta}{2\Omega} a_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$(k = 3, 5, \dots),$

где через Δ обозначен декремент затухания собственных колебаний стержня, нагруженного постоянной составляющей

¹⁾ Этот прием был применен Рэлеем (Теория звука, т. 1, п. 686, Гостехиздат, 1955), искавшим условия, необходимые для «поддержания движения». См. также Андронов А. А. и Леонтович М. А. цит. на стр. 15.

продольной силы

$$\Delta = \frac{2\pi\epsilon}{\omega \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_*}}} \quad (2.6)$$

Приравнявая нулю определитель однородной системы (2.5), получим уравнение критических частот

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & 0 & -\frac{\Delta}{\pi} \frac{3\theta}{2\Omega} & \dots \\ -\mu & \boxed{1 + \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2}} & -\frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{2\Omega} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{2\Omega} & \boxed{1 - \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2}} & -\mu & \dots \\ \frac{\Delta}{\pi} \frac{3\theta}{2\Omega} & 0 & -\mu & 1 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

Это уравнение позволяет рассчитать границы областей неустойчивости, лежащие вблизи частот

$$\theta_* = \frac{2\Omega}{k} \quad (k = 1, 3, 5, \dots).$$

Второе уравнение получим, взяв решение в виде ряда

$$f(t) = b_0 + \sum_{k=2, 4, 6}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right).$$

Подстановка этого ряда приводит к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_0 - \mu b_2 &= 0, \\ \left(1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} \right) a_2 - \mu a_4 - \frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{\Omega} b_2 &= 0, \\ \left(1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} \right) b_2 - \mu (2b_0 + b_4) + \frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{\Omega} a_2 &= 0, \\ \left(1 - \frac{k^2\theta^2}{4\Omega^2} \right) a_k - \mu (a_{k-2} + a_{k+2}) - \frac{\Delta}{\pi} \frac{k\theta}{2\Omega} b_k &= 0, \\ \left(1 - \frac{k^2\theta^2}{4\Omega^2} \right) b_k - \mu (b_{k-2} + b_{k+2}) + \frac{\Delta}{\pi} \frac{k\theta}{2\Omega} a_k &= 0 \\ & (k = 4, 6, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Уравнение критических частот

$$\begin{vmatrix}
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & 0 & 0 & -\frac{\Delta}{\pi} \frac{2\theta}{\Omega} & & \\
 -\mu & \boxed{1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2}} & 0 & -\frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{\Omega} & 0 & & \\
 0 & 0 & 1 & -\mu & 0 & & \\
 0 & \frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{\Omega} & -2\mu & \boxed{1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2}} & -\mu & & \\
 \frac{\Delta}{\pi} \frac{2\theta}{\Omega} & 0 & 0 & -\mu & 1 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.9)$$

позволяет найти области неустойчивости, лежащие вблизи

$$\theta_* = \frac{2\Omega}{k} \quad (k = 2, 4, 6, \dots).$$

Легко видеть, что при $\Delta = 0$ полученные уравнения совпадают с уравнениями консервативной задачи (1.28), (1.29), (1.30).

Рассмотрим, далее, случай, когда $\mu \rightarrow 0$, что соответствует бесконечно малой амплитуде продольной силы. Определитель (2.7) для этого случая принимает вид

$$\Delta(\theta) = \Delta_1(\theta) \cdot \Delta_3(\theta) \dots \Delta_k(\theta) \dots, \quad (2.10)$$

где

$$\Delta_k(\theta) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{k^2\theta^2}{4\Omega^2} & -\frac{\Delta}{\pi} \frac{k\theta}{2\Omega} \\ \frac{\Delta}{\pi} \frac{k\theta}{2\Omega} & 1 - \frac{k^2\theta^2}{4\Omega^2} \end{vmatrix}.$$

В аналогичной форме может быть записан определитель (2.9)

$$\Delta(\theta) = \Delta_2(\theta) \cdot \Delta_4(\theta) \dots \Delta_k(\theta) \dots, \quad (2.11)$$

где для $\Delta_k(\theta)$ оставлено прежнее обозначение.

Поскольку все $\Delta_k(\theta) > 0$, определители (2.10) и (2.11) не могут принимать нулевых значений. Естественно предположить, что это будет иметь место не только при $\mu = 0$, но и при других, достаточно малых значениях коэффициента

возбуждения. Иными словами, при наличии затухания потеря динамической устойчивости прямолинейной формы стержня может наступить только при значениях амплитуды продольной силы, больших некоторого минимального значения.

Определение этих значений (будем их называть в дальнейшем *критическими*) представляет большой практический интерес.

§ 9. Определение критических значений коэффициента возбуждения

1. Начнем с главной области неустойчивости, для чего удержим в определителе (2.7) центральные элементы

$$\begin{vmatrix} 1 + \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -\frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{2\Omega} \\ \frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{2\Omega} & 1 - \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.12)$$

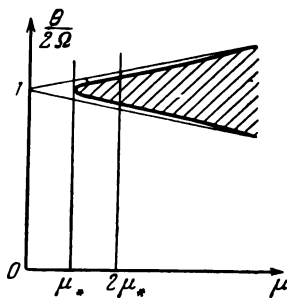
Решая уравнение (2.12) относительно возбуждающей частоты, получим:

$$\theta_* = 2\Omega \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2 \pm \sqrt{\mu^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^4}}.$$

Поскольку декремент затухания Δ обычно весьма мал по сравнению с единицей ($\Delta = 0,01 - 0,05$), мы можем упростить полученную формулу, отбросив члены, содержащие высшие степени $\frac{\Delta}{\pi}$:

$$\theta_* = 2\Omega \sqrt{1 \pm \sqrt{\mu^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}}. \quad (2.13)$$

Исследуем формулу (2.13). Пока выражение под внутренним радикалом положительно, эта формула дает для критической частоты два вещественных значения, соответствующих двум границам главной области неустойчивости. Предельный случай (фиг. 12)



Фиг. 12.

$$\mu^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2 = 0$$

определяет минимальное значение коэффициента возбуждения, при котором еще возможно возникновение незатухающих колебаний.

Итак, критическое значение коэффициента возбуждения составляет:

$$\mu_{*1} = \frac{\Delta}{\pi}. \quad (2.14)$$

Формула (2.14) показывает, что чем больше затухание, тем бóльшая амплитуда продольной силы требуется, чтобы вызвать динамическую неустойчивость стержня.

Заметим, что влияние затухания сказывается в заметной степени лишь при малых коэффициентах возбуждения. Так, границы областей неустойчивости, определенные по формулам (1.34) и (2.13), при $\mu > 2\mu_*$ практически совпадают.

2. Переходим к определению границ второй области неустойчивости. Приравняем нулю определитель, составленный из центральных элементов определителя (2.9):

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & 0 & -\frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{\Omega} \\ 0 & 1 & -\mu \\ \frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{\Omega} & -2\mu & 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Решение этого уравнения дает:

$$\theta_* = \Omega \sqrt{1 - \mu^2 \pm \sqrt{\mu^4 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2 (1 - \mu^2)}}. \quad (2.15)$$

Минимальное значение μ , при котором формула (2.15) дает для частоты два вещественных значения, найдем из условия

$$\mu^4 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2 (1 - \mu^2) = 0.$$

Решая это уравнение, находим приближенно:

$$\mu_{*2} = \sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}. \quad (2.16)$$

Для определения границ третьей области неустойчивости следует вернуться к уравнению (2.7), удерживая в нем все выписанные элементы. Точное решение такого уравнения затруднительно, поэтому поступим следующим образом. Под-

ставим приближенное значение критической частоты $\theta_* = \frac{2\Omega}{3}$ во все элементы, мало влияющие на окончательный результат (т. е. во все, кроме верхнего и нижнего диагональных элементов). Уравнение (2.7) можно переписать тогда в виде

$$\begin{vmatrix} \xi & -\mu & 0 & -\frac{\Delta}{\pi} \\ 0 & \frac{8}{9} + \mu & -\frac{\Delta}{3\pi} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta}{3\pi} & \frac{8}{9} - \mu & -\mu \\ \frac{\Delta}{\pi} & 0 & -\mu & \xi \end{vmatrix} = 0,$$

где для сокращения обозначено:

$$\xi = 1 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2}.$$

Раскрывая определитель и отбрасывая при этом величины порядка $(\frac{\Delta}{\pi})^4$, $(\frac{\Delta}{\pi})^6$ и т. д., получим:

$$\xi = \frac{\frac{8}{9}\mu^2 \pm \sqrt{\mu^6 - (\frac{\Delta}{\pi})^2 (\frac{64}{81} - \frac{2}{3}\mu^2)}}{\frac{64}{81} - \mu^2}. \quad (2.17)$$

Критические частоты вычисляются по формуле

$$\theta_* = \frac{2\Omega}{3} \sqrt{1 - \xi}, \quad (2.18)$$

где ξ берется согласно (2.17). Из формул (2.17) и (2.18) видно, что возникновение третьего резонанса возможно только при условии, что

$$\frac{\Delta}{\pi} < \frac{\mu^3}{\frac{64}{81} - \frac{2}{3}\mu^2},$$

откуда приближенно

$$\mu_{*3} = \sqrt[3]{\frac{\Delta}{\pi}}. \quad (2.19)$$

Объединяя формулы (2.14), (2.16) и (2.19), приходим к выводу, что для возбуждения колебаний при критической частоте k -го порядка

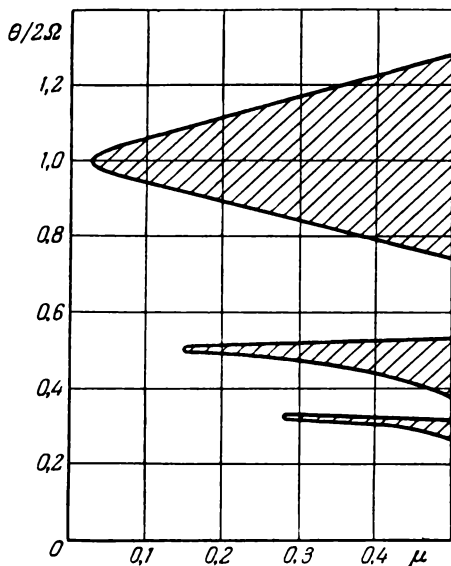
$$\theta_* = \frac{2\Omega}{k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

необходимо, чтобы коэффициент возбуждения превышал критическое значение

$$\mu_{*k} = \sqrt{\frac{k}{\pi} \Delta} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.20)$$

3. Теперь можно ответить, наконец, на вопрос, почему первая (главная) область неустойчивости является вместе с тем наиболее опасной.

График распределения областей неустойчивости с учетом затухания представлен на фиг. 13. Этот график во многом



Фиг. 13.

отличается от соответствующего графика консервативной задачи (фиг. 7). Наличие затухания как бы «отсекает» те части областей неустойчивости, которые примыкают к оси

ординат, и делает невозможным наступление резонанса при достаточно малых коэффициентах возбуждения. Замечательно, что влияние затухания, не существенное для главной области неустойчивости, становится особенно заметным по отношению к побочным областям. Это видно не только из фиг. 13, но и из фиг. 14, где представлена зависимость критического коэффициента возбуждения от затухания стержня.

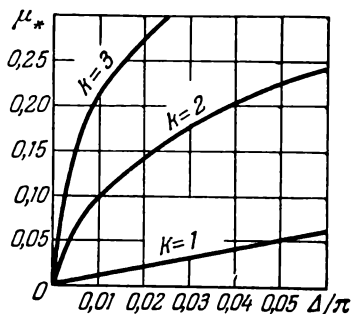
Например, при декременте затухания $\Delta = 0,01$ наименьшая величина коэффициента возбуждения, при которой еще возможно наступление главного резонанса, составляет $\mu_{*1} = 0,0032$. Другими словами, главный резонанс может быть реализован при амплитуде P_t периодической силы, составляющей менее одного процента от эйлерова значения.

Для второго резонанса получаем $\mu_{*2} = 0,057$, т. е. величину в семнадцать раз больше. Такие значения коэффициента возбуждения редко встречаются в инженерной практике. Так, в случае, когда на стержень действует продольная сила

$$P(t) = P_t \cos \theta t,$$

вычисленному коэффициенту возбуждения соответствует амплитуда P_t , составляющая около 12% от эйлерова значения. Еще бóльшая продольная сила требуется для того, чтобы вызвать третий, четвертый и т. д. резонансы.

Приведенные выше соображения показывают, какую важную роль играет затухание в вопросах динамической устойчивости упругих систем. К сожалению, систематические данные о затухании в инженерных конструкциях отсутствуют. Наиболее изучена та часть затухания, которая связана с рассеянием энергии в материале колеблющейся конструкции. Но даже в элементах машин, где по характеру работы стремятся свести внешние потери энергии до минимума, внутреннее рассеяние энергии составляет лишь меньшую часть общих потерь.



Фиг. 14.

Для строительных конструкций роль внешних потерь (потери в опорах и соединениях, а также потери в окружающей среде) несравненно более велика. Поэтому можно лишь приближенно указать пределы, в которых изменяются декременты затухания: для стальных конструкций $\Delta = 0,005 \div 0,05$.

Во всяком случае, приведенный выше анализ показывает, что наиболее опасной является главная область неустойчивости; вторая, а тем более третья области неустойчивости могут быть реализованы только при достаточно больших амплитудах продольной силы. Это обстоятельство, известное и ранее, продолжает часто упускаться из виду. Так, Ден-Гартог в своей книге ¹⁾ пишет в связи с задачей о колебаниях ведущей системы электровоза:

«В процессе увеличения скорости движения от нуля до конечной величины приходится переходить через бесчисленное множество критических скоростей (имеются в виду области динамической неустойчивости системы)... Избежать таких неустойчивых состояний на малых скоростях путем изменения конструкции невозможно».

§ 10. Общий случай

Выше был подробно рассмотрен случай, когда продольная сила изменяется по гармоническому закону. Относительно более общего случая периодической нагрузки мы ограничимся краткими замечаниями.

Очевидно, что все рассуждения, приведенные в § 7, сохраняют силу и для случая, когда нагрузка задана в виде ряда

$$P(t) = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_{tk} \cos k\theta t.$$

Дифференциальное уравнение задачи будет:

$$f'' + 2\epsilon f' + \Omega^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2\mu_k \cos k\theta t\right) f = 0, \quad (2.21)$$

¹⁾ Ден-Гартог, Теория колебаний. Гостехиздат, 1942.

где

$$\nu_k = \frac{P_{tk}}{2(P_* - P_0)}.$$

Границам областей динамической неустойчивости по-прежнему соответствуют периодические решения уравнения (2.21). Полагая

$$f(t) = \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right),$$

придем к уравнению критических частот

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 + \nu_3 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} & -(\nu_1 + \nu_2) & 0 & 0 & -\frac{\Delta}{\pi} \frac{3\theta}{2\Omega} \\ -(\nu_1 + \nu_2) & 1 + \nu_1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -\frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{2\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{2\Omega} & 1 - \nu_1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -(\nu_1 - \nu_2) & 0 \\ \frac{\Delta}{\pi} \frac{3\theta}{2\Omega} & 0 & -(\nu_1 - \nu_2) & 1 - \nu_3 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (2.22)$$

Это уравнение позволяет вычислить границы всех нечетных областей неустойчивости. Для четных областей неустойчивости соответственно получаем:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 + \nu_4 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} & -(\nu_1 + \nu_3) & 0 & 0 & -\frac{\Delta}{\pi} \frac{2\theta}{\Omega} \\ -(\nu_1 + \nu_3) & \boxed{1 + \nu_2 - \frac{\theta^2}{\Omega^2}} & 0 & -\frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta}{\pi} \frac{\theta}{\Omega} & -2\nu_1 & 1 - \nu_2 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & -(\nu_1 - \nu_3) \\ \frac{\Delta}{\pi} \frac{2\theta}{\Omega} & 0 & 0 & -(\nu_1 - \nu_3) & 1 - \nu_4 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (2.23)$$

В первом приближении попробуем пренебречь взаимным влиянием отдельных гармоник в разложении продольной силы. Определители (2.22) и (2.23) распадаются на отдельные уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 + \mu_k - \frac{k^2 \theta^2}{4\Omega^2} & -\frac{\Delta}{\pi} \frac{k\theta}{\Omega} \\ \frac{\Delta}{\pi} \frac{k\theta}{\Omega} & 1 - \mu_k - \frac{k^2 \theta^2}{4\Omega^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.24)$$

Из уравнений (2.24) можно найти то соотношение параметров, которое необходимо для возбуждения первого, второго и т. д. резонансов:

$$\mu_k > \frac{\Delta}{\pi} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.25)$$

Согласно этой формуле возникновение k -го резонанса зависит исключительно от k -й гармоники продольной силы. Чтобы учесть влияние остальных гармоник, нужно удержать в определителях (2.22) и (2.23) дополнительные элементы.

В качестве примера рассмотрим случай кусочно-постоянного закона изменения продольной силы (§ 5, п. 4). В этом случае

$$\mu_k = \frac{4\mu}{\pi k} \quad (k = 1, 3, 5, \dots),$$

и формула (2.25) дает:

$$\mu > \frac{k\Delta}{4} \quad (k = 1, 3, 5, \dots).$$

Легко видеть, что в случае кусочно-постоянной продольной силы опасность возникновения побочных резонансов несколько повышается. Так, при декременте затухания $\Delta = 0,01$ третий резонанс может возникнуть при коэффициенте возбуждения

$$\mu = \frac{3 \cdot 0,01}{4} = 0,0075$$

(вместо $\mu = 0,253$ в случае гармонической продольной силы).

В рассмотренном примере границы областей неустойчивости могут быть определены также точно — путем применения критериев, приведенных в § 7, п. 2. Действи-

тельно, характеристические корни в этом случае находятся непосредственно из уравнения (1.19), где A определяется согласно (1.24). Уравнение для вычисления границ областей неустойчивости имеет вид

$$eT = \ln |A \pm \sqrt{A^2 - 1}|,$$

где

$$A = \left| \cos \frac{\pi p_1}{\theta} \cos \frac{\pi p_2}{\theta} - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1 p_2} \sin \frac{\pi p_1}{\theta} \sin \frac{\pi p_2}{\theta} \right|.$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ФАКТОРОВ

§ 11. Предварительные замечания

Согласно линейной теории нужно ожидать, что амплитуды колебаний в пределах областей динамической неустойчивости должны неограниченно возрастать со временем, причем весьма быстро — по экспоненциальному закону. Этот вывод находится, тем не менее, в противоречии с опытными данными, которые указывают на существование в пределах областей неустойчивости колебаний с установившейся амплитудой. Рассматривая опытные осциллограммы (фиг. 8), можно видеть, что на первом участке амплитуда колебаний возрастает по закону, близкому к экспоненциальному. По мере увеличения амплитуд меняется и характер колебаний: скорость нарастания постепенно уменьшается, пока, наконец, не устанавливаются колебания постоянной (или почти постоянной) амплитуды.

Только в области достаточно малых прогибов действующие на стержень силы можно считать линейными функциями перемещений, скоростей и ускорений. С ростом амплитуд все в большей степени начинает проявляться влияние нелинейных факторов. Именно эти факторы ограничивают беспредельное возрастание амплитуд, предсказываемое линейной теорией. Поэтому линейная теория не может дать ответ ни на вопрос об установлении колебаний, ни на вопрос о величине установившихся амплитуд — правильная трактовка всех этих вопросов возможна только на основе *нелинейных дифференциальных уравнений*.

Возникает вопрос, не внесет ли наличие нелинейных факторов каких-либо изменений в распределение областей неустойчивости, которое дается линейной теорией? На этот вопрос следует ответить отрицательно. Исчерпывающее

решение задачи о границах областей динамической неустойчивости может быть дано на основе линейных дифференциальных уравнений.

Отложив строгое рассмотрение этого вопроса до шестнадцатой главы, сошлемся пока на аналогию с задачами статической устойчивости, например с задачей о продольном изгибе прямолинейного стержня под действием статической продольной силы. Решение этой задачи в линейной постановке дает здесь, как известно, верный ответ о величине критической силы, оставляя открытым вопрос о прогибах стержня в критической и послекритической стадии. Для решения последнего вопроса приходится привлекать точное (нелинейное) выражение кривизны.

Мысль о том, что линейное приближение является достаточным, чтобы судить о динамической устойчивости стержня, была впервые четко сформулирована И. И. Гольденблатом¹⁾. Утверждения противоположного характера можно встретить довольно часто. Так, еще Н. М. Беляев²⁾ полагал, что учет нелинейной кривизны должен каким-то образом отразиться на областях динамической неустойчивости.

Для уточнения границ областей неустойчивости при больших P_f Н. М. Беляев предлагал пользоваться «дифференциальным уравнением, годным и для сильно искривленного стержня». Аналогичные предположения высказывались вплоть до последнего времени.

Вопрос о соотношении между линейной и нелинейной теорией имеет принципиальное значение для рассматриваемых задач. Мы вернемся к этому вопросу во второй части книги, где свяжем его с результатами теории устойчивости движения по Ляпунову.

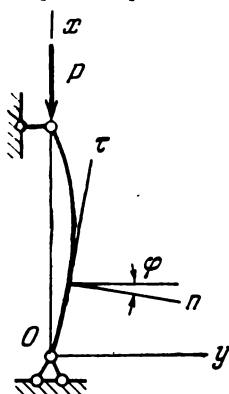
§ 12. Продольный изгиб в послекритической стадии

В настоящей главе мы займемся анализом нелинейных факторов, от которых зависят амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний. Мы начнем с простейшей задачи

¹⁾ Гольденблат И. И., Динамическая устойчивость сооружений. Стройиздат, 1948.

²⁾ Беляев Н. М., Сборн. «Инженерные сооружения и строительная механика», 1924,

сопротивления материалов, в которой необходимо учитывать влияние нелинейности, — с задачи об изгибе прямолинейного стержня продольной силой, превышающей критическое значение (фиг. 15).



Фиг. 15.

Уравнение продольного изгиба имеет вид

$$\frac{1}{\rho} + \frac{Pv}{EJ} = 0, \quad (3.1)$$

где вместо $1/\rho$ следует подставлять точное выражение кривизны. В качестве независимой переменной примем расстояние, измеряемое по дуге деформированного стержня. Если пренебречь осевой деформацией, то это расстояние численно совпадает с координатой x для недеформированного стержня.

Обозначим дугу через s , а угол, который касательная к дуге составляет с осью Ox , — через φ (фиг. 15). Учитывая,

что $\sin \varphi = \frac{dv}{ds}$, и дифференцируя это выражение по дуге s , получим:

$$\frac{d^2v}{ds^2} = \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{ds},$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d^2v}{ds^2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Учитывая далее, что

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{dv}{ds}\right)^2},$$

получим следующее выражение для кривизны:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dv}{ds}\right)^2}}.$$

Уравнение продольного изгиба (3.1) принимает вид

$$\frac{\frac{d^2v}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dv}{ds}\right)^2}} + \frac{Pv}{EJ} = 0. \quad (3.2)$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение можно привести к виду, более удобному для решения. А именно, разложив радикал в бином Ньютона

$$\left[1 - \left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{dv}{ds}\right)^4 + \dots, \quad (3.3)$$

перепишем уравнение (3.2) следующим образом:

$$\frac{d^2v}{ds^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{dv}{ds}\right)^4 + \dots\right] + \frac{Pv}{EJ} = 0. \quad (3.4)$$

Учет в разложении (3.3) первого члена соответствует обычному линейному приближению сопротивления материалов. Первое нелинейное приближение получим, удерживая в (3.3) два члена; такое приближение будет пригодно при не слишком больших прогибах.

Если продольная сила не намного превышает критическое значение, упругая кривая по своему характеру мало отличается от «формы потери статической устойчивости»

$$v(s) = f \sin \frac{\pi s}{l}. \quad (3.5)$$

Для нахождения неизвестной стрелы прогиба f воспользуемся вариационным методом Галеркина. Вариационные методы в последнее время находят все более широкое и эффективное применение в различных разделах прикладной теории упругости и строительной механики; мы предполагаем, что читатель знаком с этими методами¹⁾.

Следуя методу Галеркина, подставим выражение (3.5) в дифференциальное уравнение (3.4) и потребуем ортогональности

¹⁾ Для первого чтения рекомендуем книгу Я. А. Пратусевича, Вариационные методы в строительной механике. Гостехиздат, 1948.

результата подстановки выбранной нами «фундаментальной функции»

$$\int_0^l \left\{ \frac{d^2v}{ds^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{dv}{ds} \right)^4 + \dots \right] + \frac{Pv}{EJ} \right\} \sin \frac{\pi s}{l} ds = 0.$$

После интегрирования

$$\int_0^l \sin \frac{\pi s}{l} ds = \frac{l}{2}, \quad \int_0^l \cos^2 \frac{\pi s}{l} \sin^2 \frac{\pi s}{l} ds = \frac{l}{8},$$

$$\int_0^l \cos^4 \frac{\pi s}{l} \sin^2 \frac{\pi s}{l} ds = \frac{l}{16}$$

получим следующее уравнение для определения прогиба:

$$\left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{8l^2} + \frac{3}{32} \frac{\pi^4 f^4}{l^4} + \dots \right) f - \frac{P}{P_*} f = 0. \quad (3.6)$$

Здесь попрежнему

$$P_* = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Одно из возможных решений уравнения (3.6) будет $f = 0$; это решение соответствует, очевидно, начальной (неискривленной) форме стержня. Ненулевое решение может быть найдено из условия

$$1 + \frac{\pi^2 f^2}{8l^2} + \frac{3}{32} \frac{\pi^4 f^4}{l^4} + \dots - \frac{P}{P_*} = 0. \quad (3.7)$$

Так, оставляя в уравнении (3.7) член с f^2 , получим известную приближенную формулу ¹⁾

$$f = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} l \sqrt{\frac{P}{P_*} - 1}. \quad (3.8)$$

Сравнение с точным решением той же задачи в эллиптических интегралах показывает, что формула (3.8) дает хорошие результаты, пока, по крайней мере, $f < 0,2l$, т. е. $P < 0,045 P_*$. Чтобы получить второе приближение, надо удержать члены с f^4 и т. д.

¹⁾ См., например, Бицено К. Б. и Граммель Р., Техническая динамика, т. I. Гостехиздат, 1950.

Заметим, что как эта формула, так и формулы дальнейших приближений могут быть получены как частный случай из результатов Л. Эйлера, приведенных в его знаменитой работе «О кривых, обладающих свойствами максимума — минимума». В некоторых позднейших работах поправка второго приближения была вычислена неверно, на что указывал в свое время Е. Л. Николаи¹⁾.

§ 13. Нелинейная упругость

1. Вернемся к задаче о динамической устойчивости прямолинейного шарнирно опертого стержня, сжатого периодической продольной силой. Будем исходить из уравнения

$$f'' + 2zf' + \Omega^2(1 - 2\mu \cos \theta t)f + \psi(f, f', f'') = 0, \quad (3.9)$$

отличающегося от (2.1) наличием некоторой нелинейной функции перемещений, скоростей и ускорений $\psi(f, f', f'')$. Определение вида этой функции составит нашу ближайшую задачу.

Среди членов, входящих в нелинейную функцию $\psi(f, f', f'')$, всегда можно выделить члены, которые не содержат производных от перемещений по времени. Формально эти нелинейные члены характеризуют нелинейную упругость системы. Учитывая это, мы будем объединять все статические нелинейные факторы, будь они геометрического или физического происхождения, под общим названием *нелинейной упругости*.

Нелинейная упругость является единственным нелинейным фактором в задаче о продольном изгибе стержня силой, превышающей критическое значение. Соответствующее уравнение может быть получено из (3.9), если положить в нем $f = \text{const}$ и отбросить члены, явно зависящие от времени. В результате получим:

$$\Omega^2 f + \psi(f) = 0$$

или

$$\left(1 - \frac{P}{P_*}\right)f + \frac{1}{\omega^2} \psi(f) = 0. \quad (3.10)$$

¹⁾ Ученые записки ЛГУ, серия матем. наук, вып. 8, 1939.

Сравнивая уравнение (3.10) с уравнением (3.6), приходим к выводу, что нелинейная функция, соответствующая полному выражению для кривизны, имеет вид

$$\psi(f) = \omega^2 f \left(\frac{\pi^2 f^2}{8l^2} + \frac{3}{32} \frac{\pi^4 f^4}{l^4} + \dots \right).$$

Это значит, что функция $\psi(f)$, учитывающая влияние нелинейной кривизны, может быть представлена в виде ряда, содержащего нечетные степени прогиба

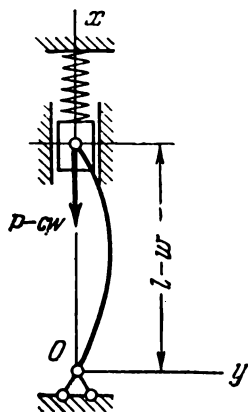
$$\psi(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f^{2k+1}, \quad (3.11)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\pi^2 \omega^2}{8l^2},$$

$$\gamma_2 = \frac{3}{32} \frac{\pi^4 \omega^4}{l^4}$$

и т. д.



Фиг. 16.

Можно показать, что к нелинейной функции типа (3.11) приводит также учет некоторых других нелинейных факторов. Рассмотрим, например, стержень с продольной упругой связью (фиг. 16). При колебаниях в стержне возникает дополнительная продольная сила от реакции связи

$$\Delta P = -c\omega. \quad (3.12)$$

Через ω обозначено продольное перемещение подвижного конца стержня, через c — жесткость связи; осевая деформация стержня не учитывается.

Весьма существенно, что продольное перемещение ω связано с поперечным прогибом стержня нелинейно. Продольное перемещение подвижного конца может быть найдено как разность между первоначальной длиной l и проекцией его искривленной оси:

$$\omega = l - \int_0^l \cos \varphi ds = l - \int_0^l \sqrt{1 - \left(\frac{dv}{ds}\right)^2} ds.$$

Разлагая радикал в ряд

$$\sqrt{1 - \left(\frac{dv}{ds}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{dv}{ds}\right)^4 + \dots$$

и почленно интегрируя, получим:

$$\omega = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 ds + \frac{1}{8} \int_0^l \left(\frac{dv}{ds}\right)^4 ds + \dots \quad (3.13)$$

Первый член этого ряда — часто встречающееся в расчетах на продольный изгиб выражение для «просадки» подвижного конца стержня.

Положим в формуле (3.13)

$$v(s, t) = f(t) \sin \frac{\pi s}{l}.$$

Произведя интегрирование

$$\int_0^l \cos^2 \frac{\pi s}{l} ds = \frac{l}{2},$$

$$\int_0^l \cos^4 \frac{\pi s}{l} ds = \frac{3}{8} l$$

и т. д., найдем:

$$\omega = \frac{\pi^2 f^2}{4l} + \frac{3}{64} \frac{\pi^4 f^4}{l^3} + \dots \quad (3.14)$$

С учетом дополнительной продольной силы (3.12) уравнение колебаний стержня (2.1) принимает вид

$$f'' + 2\alpha f' + \omega^2 \left(1 - \frac{P_0 + P_t \cos \theta t + \Delta P}{P_*}\right) f = 0$$

[ср. с уравнением (1.4)]. После подстановки (3.14) получим:

$$f'' + 2\alpha f' + \omega^2 \left(1 - \frac{P_0 + P_t \cos \theta t}{P_*}\right) f + \psi(f) = 0,$$

где

$$\psi(f) = \frac{\pi^2 \omega^2 c}{4l P_*} f^3 + \frac{3}{64} \frac{\pi^4 \omega^2 c}{l^3 P_*} f^5 + \dots$$

Таким образом, учет продольной упругой связи также приводит к нелинейной функции типа (3.11). В дальнейшем

мы будем ограничиваться нелинейными членами не выше третьего порядка, записывая нелинейную функцию в виде

$$\psi(f) = \gamma f^3. \quad (3.15)$$

Коэффициент нелинейной упругости составляет:

$$\gamma = \frac{\pi^2 \omega^2}{8l^2} \left(\frac{2cl}{P_*} + 1 \right), \quad (3.16)$$

где второе слагаемое учитывает влияние нелинейной кривизны. Из этой формулы видно, что с точностью до величин третьего порядка влияние нелинейной кривизны эквивалентно влиянию продольной связи с коэффициентом упругости

$$c = \frac{\pi^2 EJ}{2l^3}.$$

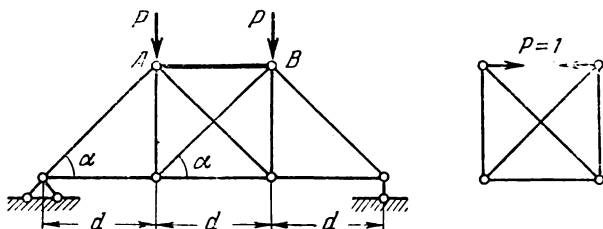
2. Нелинейность отмеченного типа часто встречается в приложениях. Этой нелинейностью обладают, например, стержни статически неопределимых систем, при выходе которых из работы система остается геометрически неизменяемой (так называемые условно необходимые стержни).

Действительно, при изгибе таких стержней их концы сближаются, в результате чего со стороны остальной части системы возникают дополнительные упругие силы, стремящиеся воспрепятствовать сближению концов. Поскольку сближение концов (3.14) связано с прогибами стержня нелинейно, упругие силы также носят нелинейный характер.

Нелинейные упругие силы могут возникнуть также в системах, которые обычно трактуются как статически определимые. Таковы, например, клепаные или сварные плоские фермы, статически определимые с точки зрения шарнирной схемы, но статически неопределимые, если учитывать жесткость узловых соединений. Еще более сложная картина наблюдается в пространственных конструкциях, например в пролетных строениях металлических мостов. При определении нелинейных характеристик какого-либо стержня, входящего в состав главных ферм, приходится учитывать как влияние проезжей части, так и пространственную работу конструкции в целом.

Наличие нелинейной упругости отражается на предельной грузоподъемности сжатых стержней, теряющих устойчивость в упругой стадии. Как известно, для одиночных

стержней, нелинейная упругость которых обусловлена нелинейной кривизной, уже ничтожное превышение критической силы приводит к опасным деформациям. Поэтому критическая нагрузка для таких стержней практически является предельной ¹⁾. Если же стержень входит в состав статически неопределимой системы, его прогибы в послекритической стадии могут оказаться значительно меньше. Для иллюстрации этой мысли рассмотрим простейший пример (фиг. 17).



Фиг. 17.

Пусть под действием внешней нагрузки теряет устойчивость элемент верхнего пояса AB . Для определения коэффициента отпора со стороны оставшейся части вычислим сближение узлов A и B под действием приложенных к нему единичных сил (фиг. 17). Согласно известной формуле строительной механики

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_1^2 s}{EF}.$$

Площади всех стержней для простоты будем считать одинаковыми. Вычисления дают:

$$\delta_{11} = \frac{d}{EF} \left(1 + 2 \operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{2}{\cos^3 \alpha} \right),$$

откуда коэффициент отпора

$$c = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{EF}{d \left(1 + 2 \operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{2}{\cos^3 \alpha} \right)}.$$

¹⁾ Случай весьма гибких стержней, допускающих большие прогибы без наступления текучести материала, из нашего рассмотрения исключается.

Коэффициент нелинейной упругости согласно (3.16)

$$c = \frac{\pi^2 \omega^2}{8d^2} \left(\frac{2cd}{P_*} + 1 \right).$$

Выражение, стоящее в скобках, может быть представлено в виде

$$\frac{2cd}{P_*} + 1 = \frac{2\lambda^2}{\pi^2 \left(1 + 2 \operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{2}{\cos^3 \alpha} \right)} + 1,$$

где λ — гибкость стержня. Как следует из (3.10) и (3.15), прогиб середины стержня определяется по формуле

$$f = \frac{\omega}{V \sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{N}{N_*} - 1},$$

или

$$f = \frac{2d \sqrt{2}}{\pi k(\alpha, \lambda)} \sqrt{\frac{N}{N_*} - 1},$$

где N — критическая сила в стержне, N_* — ее критическое значение, k — безразмерный коэффициент

$$k(\alpha, \lambda) = \sqrt{\frac{2\lambda^2}{\pi^2 \left(1 + 2 \operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{2}{\cos^3 \alpha} \right)} + 1}.$$

Так как $k(\alpha, \lambda)$ имеет порядок гибкости λ (при $\alpha = 45^\circ$ имеем $k \approx 0,15\lambda$), то прогиб стержня AB может быть в десятки раз меньше, чем прогиб такого же одиночного стержня.

Дальнейшее рассмотрение вопросов, связанных с работой стержневых конструкций в послекритической стадии, выходит за рамки настоящей книги.

3. До сих пор мы ограничивались случаем линейно упругого материала. Нелинейно упругие свойства материала также могут быть учтены при помощи функции (3.11). Отметим только, что, поскольку для большинства известных материалов $\frac{d^2\sigma}{d\epsilon^2} \leq 0$ (фиг. 18), нелинейность такого рода будет «мягкой» в отличие от «жесткой» нелинейности рассмотренных ранее случаев¹⁾.

1) «Мягкой» называют нелинейность, при которой квазиупругий коэффициент уменьшается с перемещением, и наоборот, «жесткой» — если квазиупругий коэффициент возрастает.

Пусть, например, свойства материала описываются зависимостью

$$\sigma = E(e - \beta e^3),$$

где β — константа. Полагая согласно закону плоских сечений

$$e = y \frac{d^2v}{dx^2},$$

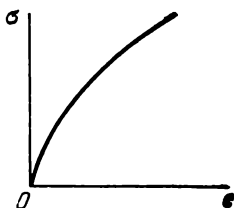
находим, что изгибающий момент в сечениях бруса

$$M = \int_F \sigma y dF = EJ \frac{d^2v}{dx^2} - B \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^3,$$

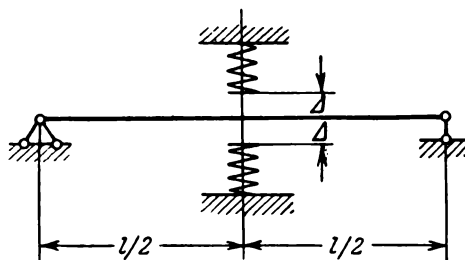
где B — новая константа. Последнее слагаемое после перехода к обыкновенному дифференциальному уравнению дает нелинейную функцию (3.15) при $\gamma < 0$.

Возникает вопрос, может ли нелинейная функция (3.11) охватить все возможные случаи нелинейной упругости. На этот вопрос следует ответить отрицательно. В самом деле, уже в случае зависимости величины упругих сил от знака прогибов мы обязаны ввести в функцию (3.11) члены, содержащие четные степени прогиба (несимметричная силовая характеристика).

Далее, существуют нелинейные упругие силы, зависимость которых от прогиба не может быть представлена в виде схо-



Фиг. 18.



Фиг. 19.

дящихся степенных рядов. Простейший пример такого рода — это стержень с упругими ограничителями прогиба (фиг. 19);

Допустим, что жесткость ограничителей достаточно мала, чтобы можно было пренебречь влиянием дополнительной опоры на форму упругой кривой (только в этом случае нелинейность можно считать малой). Тогда нелинейная функция принимает вид

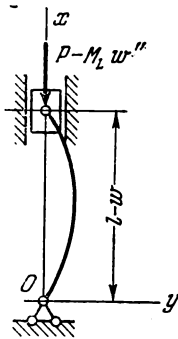
$$\psi(f) = \begin{cases} 0 & (|f| \leq \Delta), \\ \frac{cl}{2m} f & (|f| > \Delta), \end{cases}$$

где c — коэффициент отпора ограничителей. Подобное выражение не может, разумеется, быть представлено в виде степенного ряда.

Однако задачи такого типа встречаются сравнительно редко, в то время как функция (3.11) охватывает весьма широкий круг задач. В дальнейшем изложении мы будем ориентироваться именно на функцию (3.11).

§ 14. Нелинейная инерционность

1. До сих пор мы занимались нелинейными факторами статического происхождения. В динамических задачах приходится считаться также с нелинейностью сил инерции и нелинейностью затухания.



Для того чтобы прийти к понятию о *нелинейной инерционности*, рассмотрим сначала следующую простейшую задачу. Предположим, что на подвижном конце стержня имеется сосредоточенная масса M_L (фиг. 20). В этом случае при колебаниях стержня возникает дополнительная продольная сила

$$\Delta P = -M_L \omega''.$$

Через $\omega(t)$ попрежнему обозначено продольное перемещение подвижного конца

Фиг. 20.

$$\omega = \frac{\pi^2}{4l} f^2 + \frac{3}{64} \frac{\pi^4}{l^3} f^4 + \dots$$

С учетом этой продольной силы дифференциальное уравнение поперечных колебаний принимает вид

$$f'' + 2\epsilon f' + \omega^2 \left(1 - \frac{P_0 + P_t \cos \theta t - M_L \omega''}{P_*} \right) f = 0.$$

Но

$$\omega'' = \frac{\pi^2}{2l} [ff'' + (f')^2] + \frac{3}{16} \frac{\pi^4}{l^3} f^3 [ff'' + 3(f')^2] + \dots,$$

откуда, переходя к частоте собственных колебаний нагруженного стержня Ω и коэффициенту возбуждения μ , получим:

$$f'' + 2\varepsilon f' + \Omega^2(1 - 2\mu \cos \Omega t) f + 2\alpha f [ff'' + (f')^2] = 0.$$

Члены выше третьего порядка малости не выписаны. Функция

$$\psi(f, f', f'') = 2\alpha f [ff'' + (f')^2] \quad (3.17)$$

учитывает влияние нелинейных сил инерции; коэффициент

$$\alpha = \frac{\pi^4 M_L}{4ml^3} \quad (3.18)$$

будем называть *коэффициентом нелинейной инерционности*.

2. Нелинейность типа (3.17) встречается впервые в работе Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова¹⁾ в связи с исследованием собственных колебаний стоек; на необходимость учета этой нелинейности при параметрическом резонансе было указано в работе И. И. Гольденבלата²⁾.

Нелинейные силы инерции возникают не только при наличии на подвижном конце сосредоточенной массы. При поперечных колебаниях каждое сечение стержня получает некоторое продольное перемещение. Это перемещение составляет величину второго порядка малости по сравнению с поперечным прогибом

$$\omega(x) \approx \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 d\xi.$$

На стержень будет действовать распределенная нагрузка от сил инерции $n(x, t) = -m \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$. Полагая, что эта продольная нагрузка мало влияет на форму колебаний, и принимая, как и раньше,

$$v(x, t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (3.19)$$

1) Собрн. «Исследование колебаний конструкций», ДНТВУ, 1935.

2) Динамическая устойчивость сооружений. Стройиздат, 1948.

находим после подстановки и интегрирования

$$n(x, t) = -\frac{\pi^2 m}{2l^2} \left(x + \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{l} \right) [ff'' + (f')^2].$$

Дополнительная продольная сила в каждом сечении, очевидно, будет:

$$\Delta N(x, t) = \int_l^{l-x} n(\xi, t) d\xi,$$

или, интегрируя,

$$\Delta N(x, t) = -\frac{\pi^2 m}{4} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi x}{l} \right) [ff'' + (f')^2].$$

Составим теперь дифференциальное уравнение колебаний стержня. В отличие, скажем, от уравнения (1.2) оно должно содержать дополнительное слагаемое, учитывающее влияние переменной по длине продольной силы $\Delta N(x, t)$. Без учета затухания уравнение будет иметь вид

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + (P_0 + P_t \cos \theta t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta N \frac{\partial v}{\partial x} \right) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

С помощью вариационного метода Галеркина оно может быть приведено к обыкновенному дифференциальному уравнению. Действительно, после подстановки выражения (3.19), умножения на $\sin \frac{\pi x}{l}$ и интегрирования получаем:

$$f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{P_0 + P_t \cos \theta t}{P_*} \right) f + 2\chi f [ff'' + (f')^2] = 0,$$

где

$$\chi = -\frac{\pi^3}{4l^2} \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi x}{l} \right) \cos \frac{\pi x}{l} \right] dx.$$

Вычисление квадратуры дает:

$$\chi = \frac{\pi^4}{4l^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right). \quad (3.20)$$

Коэффициент χ , определяемый по формуле (3.20), учитывает влияние сил инерции самого стержня. Сопоставляя формулы

(3.18) и (3.20), видим, что влияние сил инерции стержня можно заменить, введя эквивалентную массу

$$M^L = \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right) ml,$$

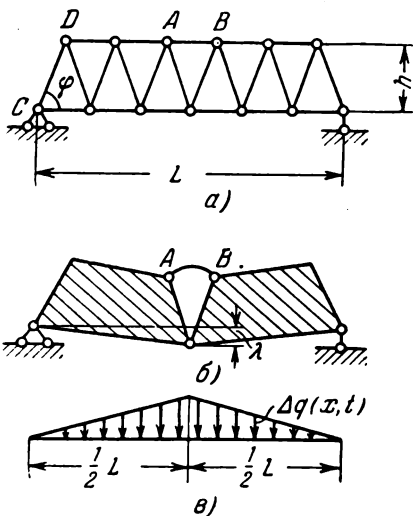
сосредоточенную на подвижном конце.

3. Покажем, как оценить величину коэффициента нелинейной инерционности для элементов сложных стержневых систем. Рассмотрим, например, элемент AB верхнего пояса многопанельной фермы (фиг. 21). Под действием внешней нагрузки

$$q = q_0 + q_t \cos \theta t$$

в стержнях фермы возникают периодические усилия, величина которых может быть рассчитана обычными методами динамики сооружений. Таким образом, ферма совершает обычные вынужденные колебания, на которые в случае, если один из стержней теряет динамическую устойчивость, накладываются дополнительные колебания с амплитудой второго порядка малости.

Если стержень AB потерял динамическую устойчивость, то его колебания благодаря сближению концов ω будут сопровождаться колебаниями всей фермы. Считая, что ферма статически определима (идеальные шарниры), приходим к форме колебаний, изображенной на фиг. 21, б. Амплитуды колебаний являются, очевидно, величинами второго порядка малости по сравнению с прогибом стержня AB . Особенно важно подчеркнуть, что речь идет о *дополнительной* деформации фермы, возникающей исключительно от сближения концов элемента AB .



Фиг. 21.

Переходим к вычислениям. Прогиб середины пролета может быть найден из простых геометрических соображений и составляет

$$\lambda = \frac{wL}{4h},$$

где L — пролет фермы, h — ее высота. Дополнительная инерционная нагрузка на ферму, как видно из чертежа (фиг. 21, в),

$$\Delta q(x, t) = \begin{cases} -\frac{m_q x}{2h} \frac{d^2 w}{dt^2} & \left(x \leq \frac{L}{2}\right), \\ -\frac{m_q (L-x)}{2h} \frac{d^2 w}{dt^2} & \left(x > \frac{L}{2}\right), \end{cases}$$

где через m_q обозначена масса фермы и заданной нагрузки, отнесенная к единице длины. Отсюда легко найдем дополнительное усилие в стержне AB ¹⁾

$$\Delta N = -\frac{m_q L^3}{48h^2} \frac{d^2 w}{dt^2}. \quad (3.21)$$

Как видно из формулы (3.21), влияние сил инерции пролетного строения на величину продольной силы в стержне эквивалентно влиянию сосредоточенной массы

$$M_L = \frac{m_q L^3}{48h^2},$$

расположенной на подвижном конце стержня. Коэффициент нелинейной инерционности стержня AB составляет:

$$\kappa \approx \frac{m_q n^3}{2mh^2}, \quad (3.22)$$

где m — погонная масса стержня, n — число панелей нижнего пояса.

Аналогично определяется коэффициент нелинейной инерционности и для других стержней. Так, для опорного рас-

1) Наш подсчет носит приближенный характер: мы фактически отнесли всю массу фермы и нагрузки к нижнему поясу. Подобным образом часто поступают и в «линейной» динамике сооружений. Там показывается, что этот приближенный прием дает достаточную для практических целей точность (Бернштейн С. А., Основы динамики сооружений. Стройиздат, 1947).

коса CD (фиг. 21) получаем:

$$\alpha = \frac{\pi^4 (n-1)^2}{6ns^2 \cos \varphi} \cdot \frac{m_q}{m}, \quad (3.23)$$

где s — длина раскоса, φ — угол, который он составляет с горизонталью. И вообще, если учитывать только вертикальные силы инерции, коэффициент α для элементов балочных (как статически определимых, так и статически неопределимых) ферм может быть вычислен по приближенной формуле

$$\alpha = \frac{\pi^4}{4ml^3} \int_L m_q(s) \psi^2(s) ds. \quad (3.24)$$

В формуле (3.24) $\psi(s)$ — ординаты линии влияния усилия в соответствующем элементе от единичной вертикальной силы. Для вывода этой формулы следует предположить, что вся масса стержневой системы может быть отнесена к определенной линии, например к линии проезда. Тогда дополнительные силы инерции определяются по формуле

$$\Delta q(s, t) = -m_q(s) \psi(s) \frac{d^2 w}{dt^2},$$

откуда после «загружения» линии влияния находим усилие в стержне

$$\Delta N(t) = -\frac{d^2 w}{dt^2} \cdot \int_0^L m_q(s) \psi^2(s) ds.$$

Приведенная масса, очевидно, составляет:

$$M_L = \int_0^L m_q(s) \psi^2(s) ds,$$

откуда следует формула (3.24). Формулы (3.22) и (3.23) — ее частные случаи.

Формулу (3.24) легко распространить также и на произвольные стержневые системы; для этого понятие «линии влияния» нужно толковать в более широком смысле.

В дальнейшем нам встретятся и другие примеры определения коэффициента нелинейной инерционности.

§ 15. Нелинейное затухание

1. Вопрос об учете затухания при свободных и вынужденных колебаниях до сих пор не получил исчерпывающего разрешения. Сложность и многообразие процессов, сопровождающих рассеяние энергии при колебаниях, а также влияние большого числа факторов, которые трудно учесть теоретическим путем, — все это приводит к тому, что учет затухания до сих пор сводится к добавлению в уравнения консервативной задачи некоторых «подходящих» членов. Эти последние выбираются таким образом, чтобы результаты теоретических подсчетов давали удовлетворительное совпадение с опытными данными. Большое количество всякого рода «гипотез» затухания, разноречивость опытных данных весьма характерны для современного состояния вопроса о затухании¹⁾.

Рассмотрим уравнение собственных затухающих колебаний

$$f'' + \omega^2 f = R(f, f'), \quad (3.25)$$

где $R(f, f')$ — дополнительный член, учитывающий силы сопротивления.

Наиболее простой и распространенный способ учета затухания

$$R(f') = -2\epsilon f', \quad (3.26)$$

где ϵ — константа, приводит к результатам, которые вкратце сводятся к следующему.

Амплитуды собственных колебаний убывают в геометрической прогрессии, так что логарифмический декремент затухания

$$\ln \frac{f(t)}{f(t+T)} = \epsilon T = \delta \quad (3.27)$$

есть величина, от амплитуды не зависящая. Через T обозначен период собственных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \epsilon^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega}.$$

¹⁾ Давиденков Н. Н., Журн. техн. физ. 8, вып. 6 (1938); Пановко Я. Г., Журн. техн. физ. 23, вып. 3 (1953).

Рассеяние энергии за один период

$$\Delta W = - \int_T R(f') df \quad (3.28)$$

пропорционально квадрату амплитуды, а относительное рассеяние

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} \quad (3.29)$$

от амплитуды не зависит ¹⁾.

Многочисленные опыты показывают, однако, что потеря энергии при колебаниях мало зависит от скорости (например, площадь петли упругого гистерезиса практически не зависит от продолжительности цикла, т. е. от скорости деформирования). Между тем, формула (3.26) ставит, казалось бы, силы сопротивления в зависимость от скорости. В последнее время «гипотеза вязкого сопротивления» все чаще критикуется именно с этой точки зрения²⁾. Взамен предлагают считать силы сопротивления пропорциональными амплитуде и направленными в сторону, противоположную скорости

$$R(f, f') = -\psi |f| \operatorname{sign} f', \quad (3.30)$$

где

$$\operatorname{sign} f' = 1 \quad (f' > 0),$$

$$\operatorname{sign} f' = -1 \quad (f' < 0),$$

либо пользоваться заимствованным из акустики и электротехники «комплексным модулем» и т. д.

Но формула (3.26) и не ставит цели ответить на вопрос, от чего именно зависят силы сопротивления. Это — просто косвенный способ учета затухания. Далее, нет никаких оснований приписывать коэффициенту затухания значение константы материала. Напротив, более логично (и это подтверждается опытными данными) считать константой материала относительное рассеяние энергии или, что почти то же самое, логарифмический декремент затухания. В этом случае как

¹⁾ Вычисления дают $\psi = 2\delta$.

²⁾ Обзор литературы см. в цитированной выше статье Я. Г. Пановко.

«гипотеза вязкого сопротивления», так и те способы, которые предлагаются взамен, дают аналогичные, а при надлежащем выборе констант и совпадающие результаты.

Будем называть затухание *линейным*, если относительное рассеяние энергии ψ не зависит от амплитуды. Легко видеть, что это определение несколько шире общепринятого. Например, оно включает также и затухание, описываемое формулой (3.30), которое, строго говоря, является нелинейным. Но нас интересует в конечном счете не столько характер изменения затухания в течение периода, сколько его суммарный эффект за период. Его мерой и является относительное рассеяние энергии. С этой точки зрения выражения для сил сопротивления, которые даются формулами (3.26) и (3.30), эквивалентны.

Вопрос о нелинейном затухании подробнее всего разработан в той части, которая относится к учету внутреннего трения в материале. Как известно, потери на внутреннее трение являются наиболее стабильной частью общего рассеяния энергии. Вместе с тем эта часть в наибольшей степени поддается теоретическому учету¹⁾.

Среди способов учета сил внутреннего трения укажем на обобщение «классического» трения (3.26)

$$R(f') = -h |f'|^k \text{sign } f'.$$

Для определения констант h и k были проведены многочисленные опыты по изгибным и крутильным колебаниям. Так, по данным Е. Б. Лунца²⁾ для стали $k = 2,17$, по другим данным показатель k принимает значения от двух до трех.

Н. Н. Давиденков³⁾ связал величину внутреннего трения с явлением упругого гистерезиса. Для описания прямого и обратного хода диаграммы $\sigma = \sigma(e)$ им предложено выражение

$$\sigma = E \left\{ e \mp \frac{\eta}{n} [(e_0 \pm e)^n - 2^{n-1} e_0^n] \right\}. \quad (3.31)$$

¹⁾ Физический аспект проблемы внутреннего трения обсуждается, например, в книге: Кольский Г., Волны напряжения в твердых телах, ИЛ, 1955.

²⁾ Лунц Е. Б., Прикл. матем. и мех. 1 (новая серия), вып. 3 (1938).

³⁾ См. сноску на стр. 86.

Здесь η и n — константы материала, e_0 — амплитудное значение деформации (фиг. 22). На основании зависимости (3.31) ряд частных задач был рассмотрен Г. С. Писаренко¹⁾.

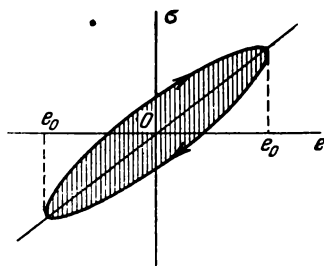
2. Как видно из предыдущего, обычные способы учета затухания едва ли могут быть использованы для решения поставленной задачи. Так, изложенные выше нелинейные «гипотезы» отпадают по двум соображениям. Во-первых, если даже предположить их безупречность, они учитывают лишь сравнительно небольшую часть общего рассеяния энергии. Мы уже имели случай упомянуть об этом раньше (§ 9). Во-вторых, применение этих «гипотез» встречает серьезные математические трудности, которые еще не вполне преодолены даже в простейших задачах собственных и вынужденных колебаний. Все это побуждает к поискам новых, более удобных и гибких способов учета затухания.

Было бы логичным в формуле (3.26) считать коэффициент затухания не постоянной величиной, а функцией прогиба. Учитывая, что эта функция должна быть четной, и аппроксимируя ее при помощи степенного ряда, приходим к следующему выражению:

$$R(f, f') = -2(\varepsilon + \varepsilon_1 f^2 + \varepsilon_2 f^4 + \dots) f'; \quad (3.32)$$

(здесь ε , ε_1 , ε_2 , ... — константы, определяемые из опыта).

Выражение типа (3.32) встречается в радиотехнике в теории ламповых генераторов. А именно случай, когда ряд в этом выражении содержит два первых члена, соответствует так называемому «мягкому» режиму генератора, случай трех членов — «жесткому» режиму²⁾. Известно, что задачи с нелинейностью типа (3.32) легко поддаются математической



Фиг. 22.

¹⁾ Писаренко Г. С., Инж. сборн. 5, 1948. См. также Сборн. трудов Ин-та строит. механ. АН УССР, вып. 10—13, 15.

²⁾ Теодорчик К. Ф., Автоколебательные системы. Гостехиздат, 1948.

обработке. Рассмотрение свободных колебаний приводит в конечном счете к декременту, зависящему от амплитуды.

В связи с этим следует упомянуть о недавнем предложении Я. Г. Пановко¹⁾. Отвлекаясь от рассуждений, положенных в его основу (эллиптическая форма петли гистерезиса и независимость ее площади от частоты), заметим, что оно равносильно закону для силы сопротивления

$$R(f, f') = -bA^n \sqrt{1 - \frac{f^2}{A^2}} \operatorname{sign} f'.$$

(A — амплитуда колебаний, b и n — константы). Положим теперь

$$f = A \cos(\omega t + \lambda),$$

где A — постоянная в задаче о вынужденных колебаниях и «медленно меняющаяся» функция времени в задаче о свободных колебаниях с малым затуханием. Тогда

$$R(f, f') = -bA^n \sin(\omega t + \lambda),$$

или

$$R(f, f') = -\frac{b}{\omega} A^{n-1} f'. \quad (3.33)$$

Последнее равенство в случае затухающих колебаний является приближенным.

Выражения (3.32) и (3.33) в известном смысле эквивалентны. Если в (3.32) коэффициент затухания является функцией мгновенного значения прогиба, то здесь он зависит от амплитуды. Выражение (3.33) проще, но оно является слишком «квазилинейным». Так, оно становится непригодным, например, при колебательном движении с двумя различными частотами. Независимо от этого к выражению типа (3.32) нас склоняют следующие механические соображения.

Возвратимся к нашей модели (фиг. 16). Наряду с обычным сопротивлением будем учитывать также силу трения, возникающую в направляющих подвижной опоры. Будем считать ее пропорциональной скорости перемещения опоры

$$\Delta P = -k_L \dot{w}'.$$

¹⁾ См. сноску на стр. 86.

Уравнение собственных затухающих колебаний принимает вид (ср. §§ 13—14)

$$f'' + 2\varepsilon f' + \omega^2 \left(1 + \frac{k_L w'}{P} \right) f = 0. \quad (3.34)$$

Дифференцируя формулу (3.14), находим:

$$w' = \frac{\pi^2}{2l} f f' + \frac{3}{16} \frac{\pi^4}{l^3} f^3 f' + \dots$$

Подстановка в уравнение (3.34) дает:

$$f'' + 2\varepsilon f' + \omega^2 f + \frac{\pi^2 k_L \omega^2}{2l P_*} f^2 f' + \frac{3}{16} \frac{\pi^4 k_L \omega^2}{l^3 P_*} f^4 f' + \dots = 0,$$

т. е. приводит в конечном счете к нелинейной функции типа (3.32).

Если прогибы не очень велики, то можно ограничиться членами не выше третьего порядка малости. Нелинейная функция принимает вид

$$\psi(f, f') = 2\varepsilon_L f^2 f', \quad (3.35)$$

где ε_L — коэффициент нелинейного затухания, т. е.

$$\varepsilon_L = \frac{\pi^4 k_L}{4m l^3}. \quad (3.36)$$

Если стержень входит в состав стержневой системы, то, как мы покажем, нелинейность затухания может быть объяснена рассеянием энергии в остальной части системы. К этому выводу приводят соображения, аналогичные высказанным в § 14.

Пока амплитуды колебаний стержня достаточно малы, энергия его колебаний практически рассеивается только в самом стержне. В случае больших амплитуд благодаря сближению концов стержня возникают дополнительные перемещения всей фермы, нелинейно связанные с перемещениями стержня. Потеря энергии на этих перемещениях и создает нелинейность затухания. Если ввести некоторые дополнительные предположения, то коэффициент нелинейного затухания для этого случая может быть определен аналитическим путем.

Рассмотрим ферму, изображенную на фиг. 21. Как это часто делается, представим силы сопротивления движению

в виде распределенной нагрузки, которая пропорциональна скорости движения каждой точки. Учитывая, что

$$\lambda = \frac{\omega L}{4h},$$

получим:

$$\Delta q(x, t) = \begin{cases} -\frac{k_q x}{2h} \omega' & (x \leq \frac{L}{2}), \\ -\frac{k_q (L-x)}{2h} \omega' & (x > \frac{L}{2}), \end{cases}$$

где k_q — коэффициент сопротивления для фермы. В элементе AB возникает дополнительная продольная сила

$$\Delta P = -\frac{k_q L^3}{48h^3} \omega'.$$

Таким образом, затухание в ферме эквивалентно затуханию, вызванному трением в подвижной опоре с коэффициентом

$$k_L = \frac{k_q L^3}{48h^3}.$$

Коэффициент нелинейного затухания будет:

$$\varepsilon_L = \frac{\pi^4 k_q L^3}{192m h^3 \omega^3},$$

или примерно

$$\varepsilon_L = \frac{k_q n^3}{2m h^3}, \quad (3.37)$$

где n — число панелей нижнего пояса. Из формулы (3.37) видно, что нелинейность затухания быстро растет по мере увеличения числа панелей фермы.

3. Описанные до сих пор нелинейные сопротивления характеризуются тем, что их работа в течение периода растет в зависимости от амплитуды быстрее, чем работа сухого трения. Несколько в стороне стоит так называемое «сухое» трение, которое обычно считают постоянным по величине и направленным в сторону, противоположную скорости

$$R(f') = -k_0 \operatorname{sign} f'.$$

Легко видеть, что работа сухого трения за период

$$\Delta W = \int_T k_0 (\operatorname{sign} f') df$$

изменяется пропорционально первой степени амплитуды, т. е. растет медленнее, чем работа линейного вязкого трения. Именно поэтому сухое трение, взятое в отдельности, не может объяснить наличия установившихся колебаний при параметрическом резонансе.

Сухое трение может встретиться в опорных креплениях, где оно действует наряду с вязким сопротивлением (комбинированное трение). Любопытно, что наличие в подвижной опоре сухого трения вызывает затухание *поперечных* колебаний стержня по закону, характерному для линейного сопротивления. Другими словами, сухое трение в подвижной опоре и вязкое сопротивление поперечным колебаниям в известном смысле эквивалентны. Действительно, сила трения в подвижной опоре будет:

$$\Delta P = -k_0 \operatorname{sign} \omega',$$

или ¹⁾

$$\Delta P = -k_0 \operatorname{sign}(ff').$$

Подстановка в уравнение собственных колебаний дает:

$$f'' + \omega^2 \left[1 + \frac{k_0 \operatorname{sign}(ff')}{P_*} \right] f = 0.$$

Но так как

$$f \operatorname{sign}(ff') = |f| \operatorname{sign} f',$$

это уравнение принимает вид

$$f'' + \omega^2 f + \frac{k_0 \omega^2}{P_*} |f| \operatorname{sign} f' = 0.$$

Таким образом, наличие в подвижной опоре сухого трения учитывается в уравнении поперечных колебаний слагаемым типа (3.30), т. е. сопротивлением, эквивалентным в конечном счете вязкому сопротивлению.

¹⁾ Члены высшего порядка на знак ω' , очевидно, не влияют.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ
СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ
НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

§ 16. Метод медленно изменяющихся амплитуд

1. Современные методы исследования нелинейных колебаний берут начало в знаменитых трудах А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре¹⁾.

Хотя строгое исследование нелинейных дифференциальных уравнений в общем случае и составляет серьезные математические трудности, существует широкий класс уравнений, для решения которых предложены приближенные, но достаточно эффективные методы. Таковы, в частности, уравнения, описывающие колебания *систем с малой нелинейностью*.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$f'' + 2\varepsilon f' + \omega^2 f + \psi(f, f', f'') = 0. \quad (4.1)$$

Введя безразмерное время и безразмерное перемещение, представим это уравнение в виде

$$\eta'' + \frac{2\varepsilon}{\omega} \eta' + \eta + \psi(\eta, \eta', \eta'') = 0.$$

Штрихами обозначено дифференцирование по безразмерному времени.

Будем называть нелинейность малой, если соблюдается условие

$$\left| \frac{\psi(\eta, \eta', \eta'')}{\eta} \right| \ll 1. \quad (4.2)$$

¹⁾ Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1951; Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1892. См. также Малкин И. Г., Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1949.

Кроме того, будем предполагать относительную малость затухания

$$\frac{2\epsilon}{\omega} = \frac{\delta}{\pi} \ll 1. \quad (4.3)$$

Как мы убедимся в дальнейшем, рассматриваемая нами задача этим требованиям удовлетворяет.

2. Один из наиболее простых методов решения уравнений с малой нелинейностью — *метод медленно изменяющихся амплитуд* (метод Ван-дер-Поля). Не будучи достаточно строгим, он обладает в то же время исключительной физической прозрачностью. Этот метод широко применяется в радиотехнике, где с его помощью получен целый ряд важных результатов ¹⁾.

Идея метода медленно изменяющихся амплитуд состоит в следующем. Если нелинейность и затухание системы достаточно малы, то решение нелинейного уравнения (4.1), по крайней мере на протяжении каждого периода, мало отличается от решения линейного уравнения

$$f'' + \omega^2 f = 0,$$

иначе от гармонического колебания

$$f(t) = a \sin \omega t.$$

Говорят в таком случае, что решение уравнения (4.1) носит почти периодический характер. В соответствии с этим будем искать приближенное решение уравнения (4.1) в виде

$$f(t) = a(t) \sin \bar{\omega} t, \quad (4.4)$$

где $\bar{\omega}$ — частота, отличающаяся, вообще говоря, от «линейной частоты» ω , $a(t)$ — «медленно изменяющаяся амплитуда». Последний термин следует понимать в том смысле, что приращение амплитуды за период достаточно мало по сравнению с ее средним значением, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{a'}{a} \right| \frac{2\pi}{\omega} &\ll 1, \\ \left| \frac{a''}{a'} \right| \frac{2\pi}{\omega} &\ll 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

¹⁾ Теодорчик К. Ф., Автоколебательные системы. Гостехиздат, 1948.

Вследствие произвольного выбора начального момента времени начальную фазу считаем равной нулю.

Подставим (4.4) в выражение для нелинейной функции $\psi(f, f', f'')$ и разложим результат подстановки в ряд Фурье

$$\psi(f, f', f'') = \Phi(a, \bar{\omega}) \sin \bar{\omega} t + \Psi(a, \bar{\omega}) \cos \bar{\omega} t + \dots \quad (4.6)$$

Члены, содержащие гармоники, не выписаны. При определении коэффициентов

$$\Phi(a, \bar{\omega}) = \frac{\bar{\omega}}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\bar{\omega}}} \psi(f, f', f'') \sin \bar{\omega} t \, dt,$$

$$\Psi(a, \bar{\omega}) = \frac{\bar{\omega}}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\bar{\omega}}} \psi(f, f', f'') \cos \bar{\omega} t \, dt$$

мы используем неравенства (4.5), приближенно полагая

$$\left. \begin{aligned} f' &= a\bar{\omega} \cos \bar{\omega} t + a' \sin \bar{\omega} t \approx a\bar{\omega} \cos \bar{\omega} t, \\ f'' &= -a\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t + 2a'\bar{\omega} \cos \bar{\omega} t + a'' \sin \bar{\omega} t \approx -a\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Подстановка выражений (4.4) и (4.6) в уравнение (4.1) дает

$$\begin{aligned} & -a\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t + 2a'\bar{\omega} \cos \bar{\omega} t + a'' \sin \bar{\omega} t + 2\varepsilon a' \sin \bar{\omega} t + \\ & + 2\varepsilon a\bar{\omega} \cos \bar{\omega} t + \omega^2 a \sin \bar{\omega} t + \Phi(a, \bar{\omega}) \sin \bar{\omega} t + \\ & + \psi(a, \bar{\omega}) \cos \bar{\omega} t + \dots = 0. \end{aligned}$$

На основании (4.3) и (4.5) подчеркнутыми членами можно пренебречь. Приравнявая нулю коэффициенты при $\sin \bar{\omega} t$ и $\cos \bar{\omega} t$, получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 - \bar{\omega}^2) a + \Phi(a, \bar{\omega}) &= 0, \\ \frac{da}{dt} &= -\varepsilon a - \frac{1}{2\omega} \Psi(a, \bar{\omega}). \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Первое из уравнений позволяет установить зависимость частоты от амплитуды колебаний, второе уравнение выра-

жает закон изменения амплитуды во времени. Для линейной диссипативной системы, в частности, получаем ¹⁾:

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \omega = \text{const}, \\ a &= a_0 e^{-\varepsilon t}.\end{aligned}$$

3. Приведем другое обоснование метода, принадлежащее К. Ф. Теодорчику ²⁾. Запишем уравнение (4.1) в виде

$$f'' + \bar{\omega}^2 f = (\bar{\omega}^2 - \omega^2) f - 2\varepsilon f' - \psi(f, f', f''). \quad (4.9)$$

Будем рассматривать колебания заданной нелинейной системы как вынужденные колебания линейной консервативной системы с частотой $\bar{\omega}$, находящейся под действием внешней силы

$$\sum F = (\bar{\omega}^2 - \omega^2) f - 2\varepsilon f' - \psi(f, f', f'').$$

Разложение правой части в ряд Фурье с использованием (4.7) дает:

$$\sum F = F(a, \bar{\omega}) \sin \bar{\omega} t + G(a, \bar{\omega}) \cos \bar{\omega} t,$$

где

$$\begin{aligned}F(a, \bar{\omega}) &= (\bar{\omega}^2 - \omega^2) a - \Phi(a, \bar{\omega}), \\ G(a, \bar{\omega}) &= -2\varepsilon \bar{\omega} a - \psi(a, \bar{\omega}).\end{aligned}$$

Но с самого начала мы предположили, что решение не содержит косинусоидальной части, поэтому

$$F(a, \bar{\omega}) = 0.$$

Полученное уравнение совпадает, очевидно, с первым из уравнений (4.8). Далее, рассмотрим уравнение

$$f'' + \bar{\omega}^2 f = G(a, \bar{\omega}) \cos \bar{\omega} t. \quad (4.10)$$

Если $G(a, \bar{\omega})$ — медленно изменяющаяся функция, то приближенное (асимптотическое) решение уравнения (4.10) будет:

$$f(t) = a(t) \sin \bar{\omega} t,$$

где

$$a(t) = \frac{1}{2\bar{\omega}} \int_0^t G(\tau) d\tau.$$

¹⁾ Это решение отличается от точного только отсутствием поправки к частоте на затухание (2.3).

²⁾ См. сноску на стр. 95.

Дифференцирование приводит ко второму из уравнений (4.8):

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\omega} G(a, \bar{\omega}).$$

Оба приведенных выше обоснования при всей физической прозрачности не являются, конечно, математически строгими. Строгое обоснование метода медленно изменяющихся амплитуд было дано Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси¹⁾. Применяя метод малого параметра, они показали, что первые приближения в обоих методах совпадают. К аналогичным результатам приводит также первое приближение по методу Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова²⁾. Еще один способ обоснования можно найти в книге А. А. Андропова и С. Э. Хайкина³⁾.

Было бы неверным думать, что точность, которую дает метод медленно изменяющихся амплитуд, принципиально ограничена. Вводя в рассмотрение гармоники

$$f(t) = a_1(t) \sin \bar{\omega}t + a_2(t) \sin 2\bar{\omega}t + a_3(t) \sin 3\bar{\omega}t + \dots,$$

мы можем увеличить точность результатов. Чем меньше нелинейность, тем большую точность дает первое, гармоническое приближение.

4. Метод может быть распространен также и на задачу о вынужденных колебаниях. Рассмотрим, например, уравнение

$$f'' + 2\varepsilon f' + \omega^2 f + \psi(f, f', f'') = S \sin \theta t. \quad (4.11)$$

Его решение будем искать в форме

$$f(t) = a(t) \sin \theta t - b(t) \cos \theta t, \quad (4.12)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — медленно изменяющиеся амплитуды. Перепишем уравнение (4.11) следующим образом:

$$f'' + \theta^2 f = S \sin \theta t + (\theta^2 - \omega^2) f - 2\varepsilon f' - \psi(f, f', f''). \quad (4.13)$$

Подставив в правую часть выражение (4.12), разложим ее в ряд

$$\sum F = F(a, b) \sin \theta t + G(a, b) \cos \theta t + \dots \quad (4.14)$$

¹⁾ Журн. техн. физ. 4, вып. 1 (1934).

²⁾ Новые методы нелинейной механики. ДНТВУ, 1934. См. также Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1955.

³⁾ Теория колебаний. ОНТИ, 1937.

Вычисления дают:

$$F(a, b) = S + (\theta^2 - \omega^2)a - 2\varepsilon\theta b - \Phi(a, b),$$

$$G(a, b) = -(\theta^2 - \omega^2)b - 2\varepsilon\theta a - \Psi(a, b),$$

где

$$\Phi(a, b) = \frac{\theta}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} \psi(f, f', f'') \sin \theta t \, dt,$$

$$\Psi(a, b) = \frac{\theta}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} \psi(f, f', f'') \cos \theta t \, dt.$$

Приближенное решение уравнения (4.13) с правой частью (4.14) будет:

$$a(t) = \frac{1}{2\theta} \int_0^t G(\tau) \, d\tau,$$

$$b(t) = \frac{1}{2\theta} \int_0^t F(\tau) \, d\tau.$$

После дифференцирования получаем уравнения Ван-дер-Поля

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\theta} G(a, b),$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{2\theta} F(a, b),$$

или в более развернутой форме

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\theta} [-(\theta^2 - \omega^2)b - 2\varepsilon\theta a - \Psi(a, b)],$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{2\theta} [S + (\theta^2 - \omega^2)a - 2\varepsilon\theta b - \Phi(a, b)].$$

Таким образом, вместо дифференциального уравнения второго порядка (4.11) мы получили более простую систему двух уравнений первого порядка, которые не содержат явно времени. В случае стационарного режима колебаний

$$\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0,$$

и для определения установившихся амплитуд мы получаем систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -(\theta^2 - \omega^2)b - 2\varepsilon' a - \Psi(a, b) &= 0, \\ S + (\theta^2 - \omega^2)a - 2\varepsilon\theta b - \Phi(a, b) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Систему (4.15) можно также получить и другим путем. Можно, например, сразу подставить выражение (4.12) в уравнение (4.11) и потребовать для результата подстановки (в соответствии с вариационным методом Галеркина) ортогональности «фундаментальным функциям» $\sin \theta t$ и $\cos \theta t$:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} L(f, f', f'') \sin \theta t \, dt = 0,$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} L(f, f', f'') \cos \theta t \, dt = 0.$$

Такой путь приводит к окончательному результату гораздо проще.

§ 17. Собственные колебания нелинейной системы

1. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях стержня с учетом введенных в предыдущей главе нелинейных факторов. Уравнение этой задачи будет:

$$f'' + 2\varepsilon f' + \omega^2 f + \psi(f, f', f'') = 0, \quad (4.16)$$

где $\psi(f, f', f'')$ — нелинейная функция прогибов, скоростей и ускорений. Ограничившись величинами не выше третьего порядка малости, представим нелинейную функцию в виде

$$\psi(f, f', f'') = \gamma f^3 + 2\varepsilon_L f^2 f' + 2\kappa f [f f'' + (f')^2]. \quad (4.17)$$

Первое слагаемое учитывает влияние нелинейных факторов статического происхождения, второе слагаемое — нелинейный характер затухания, наконец, третье слагаемое учитывает влияние сил инерции, возникающих на продольных перемещениях. В дальнейшем будем говорить о нелинейной упругости, нелинейном затухании и нелинейной инерционности соответственно.

Легко убедиться, что дифференциальное уравнение задачи действительно относится к классу уравнений с малой нелинейностью. Это вытекает прежде всего из самой сущности задачи. Как известно, линейная трактовка задачи о собственных колебаниях стержней дает результаты, которые хорошо согласуются с опытными данными. Дополнительные нелинейные члены в уравнении (4.16) играют роль поправки, назначение которой — уточнить в общем удовлетворительное линейное приближение.

Чтобы получить количественную оценку, нужно преобразовать уравнение (4.16) к безразмерному виду и применить критерий (4.2). Необходимые выкладки может проделать читатель. Ограничимся замечанием, что при прочих равных условиях влияние нелинейных факторов зависит также и от амплитуды колебаний (оно растет пропорционально квадрату амплитуды). Это значит, что амплитуды колебаний должны быть достаточно малыми. Во всех практических задачах это условие следует считать выполненным.

2. Переходим к вычислениям. Полагая $f = a \sin \bar{\omega}t$, подставим это выражение в формулу (4.17). После преобразований

$$\begin{aligned} \sin^3 \bar{\omega}t &= \frac{1}{4} (3 \sin \bar{\omega}t - \sin 3\bar{\omega}t), \\ \sin \bar{\omega}t \cos^3 \bar{\omega}t &= \frac{1}{4} (\sin \bar{\omega}t + \sin 3\bar{\omega}t), \\ \sin^2 \bar{\omega}t \cos \bar{\omega}t &= \frac{1}{4} (\cos \bar{\omega}t - \cos 3\bar{\omega}t) \end{aligned}$$

получим:

$$\psi(f, f', f'') = \left(\frac{3}{4} \gamma - \kappa \bar{\omega}^2\right) a^3 \sin \bar{\omega}t + \frac{\epsilon L \bar{\omega}}{4} a^3 \cos \bar{\omega}t + \dots \quad (4.18)$$

В соответствии с методом медленно изменяющихся амплитуд производные a' и a'' , а также члены, содержащие гармоники, отброшены. Итак,

$$\begin{aligned} \Phi(a, \bar{\omega}) &= \left(\frac{3}{4} \gamma - \kappa \bar{\omega}^2\right) a^3, \\ \Psi(a, \bar{\omega}) &= \frac{\epsilon L \bar{\omega}}{4} a^3, \end{aligned}$$

так что уравнения (4.8) для нашего случая принимают вид

$$\omega^3 - \bar{\omega}^3 + \left(\frac{3}{4}\gamma - \kappa\bar{\omega}^2\right)a^2 = 0 \quad (4.19)$$

и

$$\frac{da}{dt} = -\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon L}{4}a^2\right)a. \quad (4.20)$$

Уравнение (4.19) позволяет определить частоту собственных колебаний нелинейной системы

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{4}\frac{\gamma}{\omega^2}a^2}{1 + \kappa a^2}}. \quad (4.21)$$

Как видно из этой формулы, собственная частота нелинейной системы зависит от амплитуды колебаний. А именно наличие нелинейной упругости приводит к росту частоты с амплитудой; нелинейная инерционность, наоборот, вызывает уменьшение собственной частоты. Учитывая относительную малость нелинейных поправок, представим формулу (4.21) в виде

$$\bar{\omega} \approx \omega \left[1 + \frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{4} \frac{\gamma}{\omega^2} - \kappa \right) \right]. \quad (4.22)$$

Таким образом, пока $\kappa < \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\omega^2}$, частота собственных колебаний с ростом амплитуды будет возрастать, в противном случае частота с увеличением амплитуды будет уменьшаться. В случае, когда

$$\kappa = \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\omega^2}, \quad (4.23)$$

нелинейная упругость и нелинейная инерционность как бы компенсируют друг друга: собственные колебания остаются изохронными. В этом смысле нелинейная инерционность с коэффициентом κ эквивалентна нелинейной упругости с коэффициентом

$$\gamma = -\frac{4}{3}\kappa\omega^2.$$

Напомним, что и для линейной системы имеет место аналогичное соотношение: влияние поперечных сил инерции экви-

валентно влиянию сплошного упругого основания с коэффициентом отпора

$$k = -m\omega^2.$$

Множитель $4/3$ в нашем случае объясняется нелинейным характером системы.

Рассмотрим случай, когда продольная упругая связь отсутствует. В этом случае, как мы сейчас покажем, член, учитывающий нелинейную инерционность, всегда оказывается доминирующим. Коэффициент нелинейной упругости согласно (3.16) будет:

$$\gamma = \frac{\pi^2 \omega^2}{8l^2}. \quad (4.24)$$

Поскольку несовершенная упругость материала обычно дает «мягкую» нелинейность, на выражение (4.24) следует смотреть как на максимальное значение коэффициента нелинейной упругости при отсутствии продольных связей. С другой стороны, минимальное значение коэффициента x составляет (3.20)

$$x = \frac{\pi^4}{4l^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right).$$

Учитывая, что в этом случае

$$\frac{4}{3} \frac{x\omega^2}{\gamma} = \frac{8\pi^2}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right) \approx 7,$$

приходим к выводу, важному для всего дальнейшего изложения:

При отсутствии продольных связей преобладающим нелинейным фактором является нелинейная инерционность. Этот вывод распространяется на все стержни, входящие в состав статически определимых систем, а также на те стержни статически неопределимых систем, для которых $x > \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\omega^2}$.

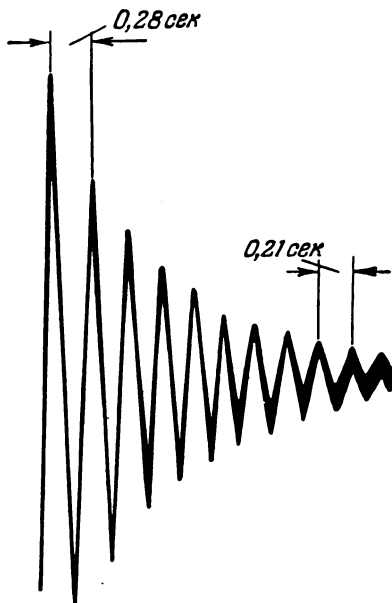
Оценим порядок нелинейной поправки к частоте. Подставив в формулу (4.22) значения коэффициентов γ и x , представим ее в виде

$$\bar{\omega} = \omega \left(1 - k \frac{a^2}{l^2} \right).$$

где

$$k \approx 2,8 + 12 \frac{M_L}{ml}.$$

Через M_L обозначена «продольная» масса, приведенная к подвижному концу стержня. При ее вычислении масса самого стержня не учитывается (она учтена в коэффициенте 2,8).



Фиг. 23.

Пусть $M_L = 0$. В этом случае даже при такой большой амплитуде, как $a/l = 0,1$, изменение собственной частоты не превышает 3%. Если стержень входит в состав стержневой системы, то влияние нелинейных факторов может возрасти в десятки и сотни раз. Читатель может в этом убедиться на примере, рассмотренном в § 14.

На фиг. 23 представлена опытная осциллограмма колебаний стержня с большой инерционной нелинейностью. Изменение периода собственных колебаний здесь хорошо заметно на глаз.

3. Для выяснения закона затухания следует обратиться к уравнению (4.20). Представив его в виде

$$\varepsilon dt = - \frac{da}{a + \frac{\varepsilon_L}{4\varepsilon} a^3},$$

проинтегрируем почленно

$$-\varepsilon t = \ln a - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4\varepsilon}{\varepsilon_L} + a^3 \right) + \ln C,$$

или

$$\frac{Ca}{\sqrt{\frac{4\varepsilon}{\varepsilon_L} + a^2}} = e^{-st}.$$

Постоянная интегрирования будет:

$$C = \frac{\sqrt{\frac{4\varepsilon}{\varepsilon_L} + a_0^2}}{a_0},$$

где a_0 — начальная амплитуда. Итак,

$$\frac{a}{a_0} \sqrt{\frac{\frac{4\varepsilon}{\varepsilon_L} + a_0^2}{\frac{4\varepsilon}{\varepsilon_L} + a^2}} = e^{-st}.$$

Решая это уравнение относительно амплитуды a , получим окончательно:

$$a = \frac{a_0 e^{-st}}{\sqrt{1 + (1 - e^{-2st}) \frac{\varepsilon_L}{4\varepsilon} a_0^2}}. \quad (4.25)$$

Для линейного затухания имели бы:

$$a = a_0 e^{-st}. \quad (4.26)$$

Как и следовало ожидать, нелинейное затухание дает более быстрое падение амплитуд.

Для практических целей может оказаться полезной следующая трактовка уравнения (4.20). Разбив весь период затухания на достаточно малые интервалы времени, можно осреднить нелинейную часть затухания, приняв ее постоянной в течение каждого интервала:

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{\varepsilon_L}{4} \bar{a}^2. \quad (4.27)$$

Здесь \bar{a} — некоторое среднее значение амплитуды в заданном интервале времени. Уравнение (4.20) для каждого интервала принимает вид

$$\frac{da}{dt} = -\bar{\varepsilon} a,$$

откуда

$$a = a_0 e^{-\bar{\varepsilon} t}.$$

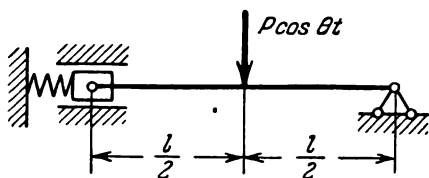
Итак, уравнение (4.20) описывает затухающие колебания, происходящие с переменным коэффициентом затухания. Такая «квазилинейная» трактовка тем более удобна, что она по существу лежит в основе общепринятого способа обработки опытных диаграмм затухающих колебаний. Как известно, опытный коэффициент затухания определяют из условия

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{a(t)}{a(t + \Delta t)} \quad (4.28)$$

независимо от того, оказывается ли он постоянным в течение всего процесса затухания или меняется с амплитудой. В последнем случае затухание носит нелинейный характер и, строго говоря, не следует экспоненциальному закону (4.26). Применение формулы (4.28) означает, что затухание «линеаризируется» в пределах каждого интервала Δt .

§ 18. Вынужденные колебания нелинейной системы

1. Остановимся кратко на задаче о вынужденных колебаниях нелинейной системы. Установившиеся амплитуды этих колебаний могут быть определены из уравнений (4.15).



Фиг. 24.

Под S следует понимать амплитуду «обобщенной силы», которая, например, в случае стержня, нагруженного посередине (фиг. 24), будет:

$$S = \frac{2P}{ml}.$$

Подставляя в выражение для нелинейной функции (4.17) приближенное решение

$$f(t) = a \sin \theta t - b \cos \theta t$$

и производя выкладки, аналогичные выкладкам предыдущего параграфа, получим:

$$\Phi(a, b) = A^3 \left[\left(\frac{3}{4} \gamma - \chi \theta^3 \right) a + \frac{\varepsilon L}{4} \theta b \right],$$

$$\Psi(a, b) = A^3 \left[- \left(\frac{3}{4} \gamma - \chi \theta^3 \right) b + \frac{\varepsilon L}{4} \theta a \right].$$

Здесь A — амплитуда колебаний, т. е. $A^2 = a^2 + b^2$. Уравнения (4.15) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} -(\theta^2 - \omega^2)b - 2\varepsilon\theta a - A^3 \left[-\left(\frac{3}{4}\gamma - \kappa\theta^2\right)b + \frac{\varepsilon L}{4}\theta a \right] &= 0, \\ S + (\theta^2 - \omega^2)a - 2\varepsilon\theta b - A^3 \left[\left(\frac{3}{4}\gamma - \kappa\theta^2\right)a + \frac{\varepsilon L}{4}\theta b \right] &= 0. \end{aligned} \right\} (4.29)$$

Система шестого порядка (4.29) не разрешима в общем виде, поэтому ограничимся случаем, когда затуханием — линейным и нелинейным — можно пренебречь. Система (4.29) в этом случае упрощается:

$$\begin{aligned} -(\theta^2 - \omega^2)b + A^2b \left(\frac{3}{4}\gamma - \kappa\theta^2\right) &= 0, \\ S + (\theta^2 - \omega^2)a - A^2a \left(\frac{3}{4}\gamma - \kappa\theta^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

и может быть удовлетворена, очевидно, при $b = 0$, $A = a$. Для определения амплитуды установившихся колебаний получаем кубическое уравнение

$$S + (\theta^2 - \omega^2)A - A^3 \left(\frac{3}{4}\gamma - \kappa\theta^2\right) = 0. \quad (4.30)$$

2. Корни уравнения (4.30) могут быть определены графически как координаты точек пересечения прямой

$$y = \frac{S + (\theta^2 - \omega^2)A}{\frac{3}{4}\gamma - \kappa\theta^2} \quad (4.31)$$

с кубической параболой $y = A^3$. Фиг. 25 соответствует случаю, когда нелинейная упругость преобладает, т. е.

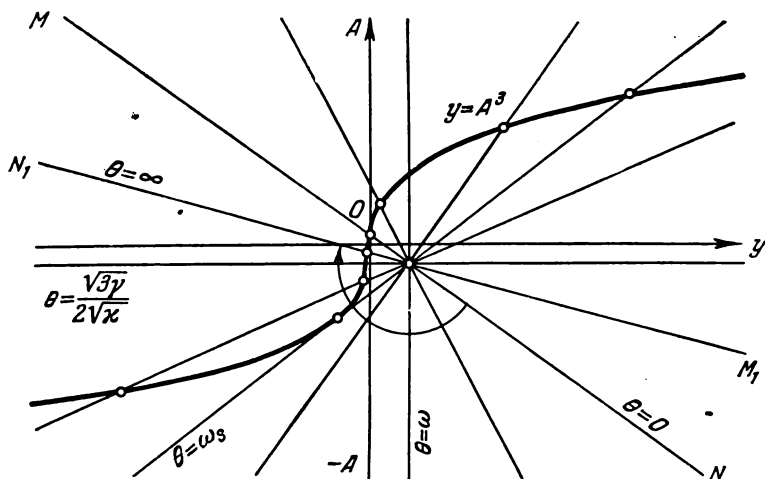
$$\frac{3}{4}\gamma - \kappa\omega^2 > 0.$$

При изменении возбуждающей частоты от нуля до бесконечности прямая (4.31) поворачивается по часовой стрелке от начального положения MN до конечного M_1N_1 . Пока частота достаточно мала (во всяком случае при $\theta < \omega$), прямая пересекает кубическую параболу один раз, т. е. уравнение (4.30) имеет один вещественный корень. При дальнейшем увеличении частоты вещественных корней, а следовательно,

и возможных значений амплитуды будет три. При

$$\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \quad (4.32)$$

прямая принимает горизонтальное положение, так что урав-



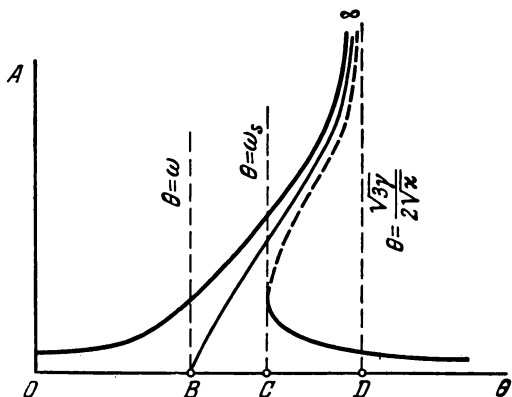
Фиг. 25.

нение (4.30), помимо одного конечного корня, имеет также корни $A = \pm \infty$.

Резонансная кривая изображена на фиг. 26. По своему характеру она отличается не только от резонансной кривой линейной задачи, но и от резонансной кривой для случая, когда присутствует только нелинейная упругость¹⁾. Как и в хорошо изученном случае нелинейной упругости, из трех решений, справедливых на участке CD , устойчивы будут только два. Неустойчивое, т. е. физически неосуществимое, решение обозначено пунктиром.

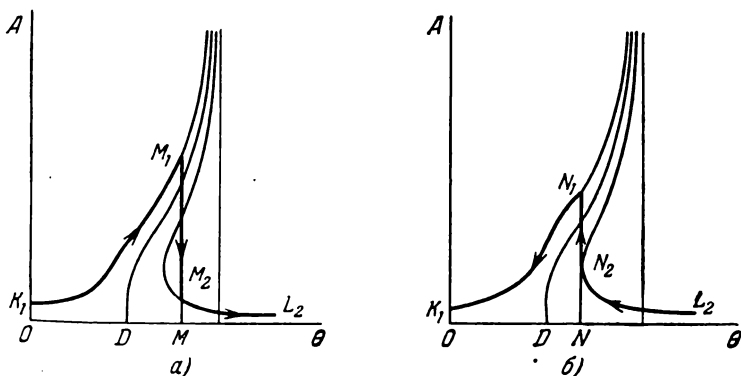
¹⁾ Этот последний случай, разобранный во многих учебниках по теории колебаний (напр., Стокер Дж., *Нелинейные колебания*, ИЛ, 1953) может быть получен из наших уравнений, если положить в них $\alpha = 0$. Вершина резонансной кривой уйдет при этом в область бесконечно больших частот.

Наличие двух устойчивых решений приводит к явлению, известному под названием «затягивания». Постепенно увеличивая возбуждающую частоту, мы можем завести систему



Фиг. 26.

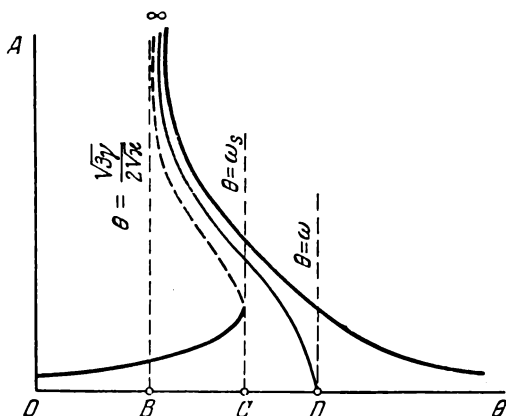
в область, где справедливы два устойчивых решения (фиг. 27, а). Нарастание амплитуд будет происходить сначала по кривой K_1M_1 , пока в некоторой точке M_1 не



Фиг. 27.

произойдет «срыв» колебаний. Амплитуда (не считая времени установления) упадет скачком до величины MM_2 , после чего будет убывать по кривой M_2L_2 . При обратном

уменьшении частоты амплитуда колебаний будет сначала плавно возрастать по кривой $L_2 N_2$. Скачок произойдет теперь в точке N_2 , после чего изменение амплитуд следует кривой $N_1 K_1$ (фиг. 27, б). Оказывается, таким образом, что амплитуда вынужденных колебаний зависит не только от возбуждающей частоты в рассматриваемый момент времени, но и от «истории» нелинейной системы.



Фиг. 28.

К вопросу о «затягивании» мы вернемся еще в связи с параметрически возбуждаемыми колебаниями (§ 23).

Выше был рассмотрен случай преобладающей нелинейной упругости. В случае, когда преобладает нелинейная инерционность, резонансная кривая будет наклонена своей вершиной в сторону меньших частот; в эту же сторону будет происходить и «затягивание» колебаний (фиг. 28).

ГЛАВА ПЯТАЯ .
АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ГЛАВНОМ
ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ

§ 19. Основные уравнения

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f'' + 2\varepsilon f' + \Omega^2(1 - 2\mu \cos \theta t)f + \psi(f, f', f'') = 0, \quad (5.1)$$

которое описывает параметрически возбуждаемые колебания с учетом нелинейных факторов. Поставим задачу отыскания тех решений этого уравнения, которые соответствуют установившимся колебаниям.

Выше было установлено (§ 7), что на границах первой, третьей и вообще нечетных областей неустойчивости решения линейной задачи имеют вид

$$f(t) = \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right), \quad (5.2)$$

где a_k и b_k — некоторые постоянные коэффициенты. Было бы естественно именно в таком виде искать решения нелинейной задачи, справедливые в пределах нечетных областей неустойчивости. К этому приводят нас также следующие соображения.

Ряд (5.2) при определенном выборе его коэффициентов может удовлетворить уравнению (5.1). Действительно, результат подстановки ряда в уравнение не будет содержать никаких других периодических членов, кроме $\sin \frac{k\theta t}{2}$ и $\cos \frac{k\theta t}{2}$ при нечетном k . Это будет выполнено, впрочем, только в том случае, если нелинейная функция $\psi(f, f', f'')$ не

содержит членов четной степени. Функция

$$\psi(f, f', f'') = \gamma f^3 + 2z_L f^3 f' + 2\alpha f [ff'' + (f')^2] \quad (5.3)$$

этому требованию удовлетворяет.

Наконец, третье и решающее соображение в пользу ряда (5.2)—это опыт, который указывает, что установившиеся колебания в пределах нечетных областей неустойчивости имеют именно такой вид. Обсуждение опытных данных отложим до § 22.

2. Ищем решение уравнения (5.1) в виде ряда (5.2). Подстановка дает:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \left(\Omega^2 - \frac{k^2 \theta^2}{4} \right) \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right) + \\ + \varepsilon f \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} k \left(a_k \cos \frac{k\theta t}{2} - b_k \sin \frac{k\theta t}{2} \right) - \\ - \Omega^2 \mu \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} a_k \left[\sin(k+2) \frac{\theta t}{2} + \sin(k-2) \frac{\theta t}{2} \right] - \\ - \Omega^2 \mu \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} b_k \left[\cos(k+2) \frac{\theta t}{2} + \cos(k-2) \frac{\theta t}{2} \right] + \\ + \psi^*(f, f', f'') = 0. \quad (5.4) \end{aligned}$$

Разложим нелинейную функцию в выражении (5.4) в ряд Фурье

$$\psi^*(f, f', f'') = \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \left(\Phi_k \sin \frac{k\theta t}{2} + \Psi_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right). \quad (5.5)$$

Коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k(a_1, a_3 \dots b_1, b_3) &= \frac{\theta}{2\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\theta}} \psi^*(f, f', f'') \sin \frac{k\theta t}{2} dt, \\ \Psi_k(a_1, a_3 \dots b_1, b_3) &= \frac{\theta}{2\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\theta}} \psi^*(f, f', f'') \cos \frac{k\theta t}{2} dt \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

будут, очевидно, некоторыми нелинейными, а в случае (5.3) однородными третьей степени функциями от коэффициентов ряда (5.2). Подставляя (5.5) в (5.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых $\sin \frac{k\theta t}{2}$ и $\cos \frac{k\theta t}{2}$, получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left[\Omega^2 (1 + \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right] a_1 - \varepsilon' b_1 - \Omega^2 \mu a_3 + \Phi_1(a_i, b_i) &= 0, \\ \left[\Omega^2 (1 - \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right] b_1 + \varepsilon' a_1 - \Omega^2 \mu b_3 + \Psi_1(a_i, b_i) &= 0, \\ \left(\Omega^2 - \frac{k^2 \theta^2}{4} \right) a_k - k \varepsilon' b_k - \Omega^2 \mu (a_{k-2} + a_{k+2}) + \Phi_k(a_i, b_i) &= 0, \\ \left(\Omega^2 - \frac{k^2 \theta^2}{4} \right) b_k + k \varepsilon' a_k - \Omega^2 \mu (b_{k-2} + b_{k+2}) + \Psi_k(a_i, b_i) &= 0 \end{aligned} \right\} (5.7)$$

($k = 3, 5, \dots$).

Для сокращения обозначено:

$$\Phi_k(a_1, a_3 \dots b_1, b_3) = \Phi_k(a_i, b_i),$$

$$\Psi_k(a_1, a_3 \dots b_1, b_3) = \Psi_k(a_i, b_i).$$

3. Для того чтобы определить амплитуды установившихся колебаний в пределах четных областей возбуждения будем искать решения в виде

$$f(t) = b_0 + \sum_{k=2, 4, 6}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right). \quad (5.8)$$

К этому приводят соображения, аналогичные высказанным в п. 1.

Подставляя (5.8) в (5.1) и, разлагая нелинейную функцию в ряд

$$\psi^*(f, f', f'') = \Psi_0 + \sum_{k=2, 4, 6}^{\infty} \left(\Phi_k \sin \frac{k\theta t}{2} + \Psi_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right),$$

получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Omega^2(b_0 - \nu b_2) + \psi_0(a_i, b_i) &= 0, \\ (\Omega^2 - \theta^2)a_2 - \mu\Omega^2 a_4 - 2\varepsilon\theta b_2 + \Phi_2(a_i, b_i) &= 0, \\ (\Omega^2 - \theta^2)b_2 - \mu\Omega^2(2b_0 + b_4) + 2\varepsilon\theta a_2 + \Psi_2(a_i, b_i) &= 0, \\ \left(\Omega^2 - \frac{k^2\theta^2}{4}\right)a_k - \mu\Omega^2(a_{k-2} + a_{k+2}) - \\ &\quad - k\varepsilon\theta b_k + \Phi_k(a_i, b_i) = 0, \\ \left(\Omega^2 - \frac{k^2\theta^2}{4}\right)b_k - \mu\Omega^2(b_{k-2} + b_{k+2}) + \\ &\quad + k\varepsilon\theta a_k + \Psi_k(a_i, b_i) = 0 \\ &\quad (k = 4, 6, \dots). \end{aligned} \right\} (5.9)$$

Коэффициенты Φ_k и Ψ_k при $k \geq 2$ вычисляются по формулам (5.6), коэффициент Ψ_0 — по формуле

$$\Psi_0(a_2, a_4 \dots b_0, b_2, b_4) = \frac{\theta}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\theta}} \psi^*(f, f', f'') dt.$$

Заметим в заключение, что уравнения (5.7) и (5.9) могли быть получены иначе — при помощи вариационного метода Галеркина. Подставив, например, ряд (5.2) в уравнение (5.1), можно было потребовать, чтобы результат подстановки $L(f, f', f'')$ был ортогонален каждой из фундаментальных функций $\sin \frac{k\theta t}{2}$ и $\cos \frac{k\theta t}{2}$:

$$\int_0^{\frac{4\pi}{\theta}} L(f, f', f'') \sin \frac{k\theta t}{2} dt = 0,$$

$$\int_0^{\frac{4\pi}{\theta}} L(f, f', f'') \cos \frac{k\theta t}{2} dt = 0 \quad (k = 1, 3, 5, \dots).$$

Дальнейшие вычисления приведут к уравнениям (5.7).

§ 20. Определение установившихся амплитуд ¹⁾

1. В том случае, когда нас интересуют колебания, происходящие при главном резонансе $\theta \approx 2\Omega$, мы можем пренебречь в разложении (5.2) влиянием гармоник, положив приближенно ²⁾:

$$f(t) = a \sin \frac{\theta t}{2} + b \cos \frac{\theta t}{2}. \quad (5.10)$$

Уравнения (5.7) существенно упрощаются, остается система двух уравнений, содержащая коэффициенты a и b :

$$\left. \begin{aligned} \left[\Omega^2 (1 + \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right] a - \varepsilon_L b + \Phi(a, b) &= 0, \\ \left[\Omega^2 (1 - \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right] b + \varepsilon_L a + \Psi(a, b) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Определим величины $\Phi(a, b)$ и $\Psi(a, b)$. Для этого подставим выражение (5.10) в (5.3). Вычисления дают:

$$\begin{aligned} \psi^*(f, f', f'') &= \frac{A^2}{4} (3\gamma a - \varepsilon_L \theta b - \kappa \theta^2 a) \sin \frac{\theta t}{2} + \\ &+ \frac{A^2}{4} (3\gamma b + \varepsilon_L \theta a - \kappa \theta^2 b) \cos \frac{\theta t}{2} + \dots \end{aligned}$$

Члены, содержащие гармоники, не выписаны, через A обозначена амплитуда установившихся колебаний

$$A^2 = a^2 + b^2.$$

Итак, коэффициенты разложения функции $\psi^*(f, f', f'')$ в ряд Фурье будут:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(a, b) &= \frac{A^2}{4} (3\gamma a - \varepsilon_L \theta b - \kappa \theta^2 a), \\ \Psi(a, b) &= \frac{A^2}{4} (3\gamma b + \varepsilon_L \theta a - \kappa \theta^2 b). \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

¹⁾ Болотин В. В., Сборн. «Поперечные колебания и критические скорости», вып. 1, Изд. АН СССР, 1951.

²⁾ Таково приближение метода медленно изменяющихся амплитуд (см. предыдущую главу).

2. Для дальнейшего исследования запишем систему уравнений (5.11) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu - n^2)a - \frac{n\Delta}{\pi}b + A^2\left(\frac{3\gamma}{4\Omega^2}a - \frac{n\Delta_L}{\pi}b - \chi n^2a\right) &= 0, \\ (1 - \mu - n^2)b + \frac{n\Delta}{\pi}a + A^2\left(\frac{3\gamma}{4\Omega^2}b + \frac{n\Delta_L}{\pi}a - \chi n^2b\right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

где обозначено:

$$n = \frac{\theta}{2\Omega}, \quad \Delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\Omega}, \quad \Delta_L = \frac{\pi\varepsilon_L}{2\Omega}. \quad (5.14)$$

Очевидно, что уравнения (5.13) будут удовлетворены, если положить $a = b = A = 0$. Это решение соответствует случаю, когда поперечные колебания стержня отсутствуют.

Для отыскания ненулевых решений поступим следующим образом. Будем рассматривать уравнения (5.13) как систему однородных линейных уравнений относительно a и b . Эта система имеет отличные от нуля решения только в том случае, если равен нулю определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\left| \begin{array}{cc} 1 + \mu - n^2 - A^2\left(\chi n^2 - \frac{3\gamma}{4\Omega^2}\right) & -\frac{n}{\pi}(\Delta + \Delta_L A^2) \\ \frac{n}{\pi}(\Delta + \Delta_L A^2) & 1 - \mu - n^2 - A^2\left(\chi n^2 - \frac{3\gamma}{4\Omega^2}\right) \end{array} \right| = 0. \quad (5.15)$$

Раскрывая определитель и решая полученное уравнение относительно амплитуды установившихся колебаний A , находим:

$$A = \sqrt{\frac{p(1-n^2) - \frac{n^2}{\pi^2}\Delta\Delta_L \pm \sqrt{\mu^2\left(p^2 + \frac{n^2}{\pi^2}\Delta_L^2\right) - \frac{n^2}{\pi^2}[p\Delta + \Delta_L(1-n^2)]^2}}{p^2 + \frac{n^2}{\pi^2}\Delta_L^2}}, \quad (5.16)$$

где для сокращения обозначено:

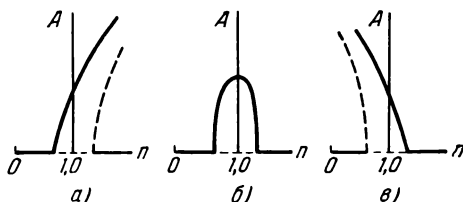
$$p = \chi n^2 - \frac{3\gamma}{4\Omega^2}. \quad (5.17)$$

3. Формула (5.16) слишком громоздка для исследования. Поэтому выясним сначала, как изменяется характер резонансных кривых в зависимости от вида нелинейной функции.

В случае, когда $\psi(f) = \gamma f^3$ (случай нелинейной упругости), формула (5.16) дает:

$$A = \frac{2\Omega}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{n^2 - 1 \pm \sqrt{\mu^2 - \frac{n^2\Delta^2}{\pi^2}}}. \quad (5.18)$$

График зависимости амплитуды от частоты представлен на фиг. 29, а, где нанесены два решения, соответствующие двум знакам в формуле (5.18). Одно из этих решений (изображенное пунктиром), очевидно, неустойчиво. Для случая



Фиг. 29.

нелинейной упругости характерным является наклон резонансных кривых в сторону больших возбуждающих частот. С аналогичным свойством мы встречались уже при исследовании вынужденных колебаний (§ 18).

Рассмотрим случай нелинейного затухания

$$\psi(f, f') = 2\varepsilon_L f^2 f'.$$

Формула (5.16) принимает вид

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n\Delta_L}} \sqrt{\sqrt{\mu^2 - (1 - n^2)^2} - \frac{n\Delta}{\pi}}.$$

Соответствующая резонансная кривая изображена на фиг. 29, б. Как видно из чертежа, резонансная кривая в этом случае примерно симметрична относительно максимума.

Наконец, для случая нелинейной инерционности

$$\psi(f, f', f'') = 2\alpha f [ff'' + (f')^2]$$

получаем формулу

$$A = \frac{1}{n\sqrt{\alpha}} \sqrt{1 - n^2 \pm \sqrt{\mu^2 - \frac{n^2\Delta^2}{\pi^2}}}. \quad (5.19)$$

Здесь мы также имеем два решения, одно из которых неустойчиво (фиг. 29, в). В отличие от случая нелинейной

упругости резонансные кривые имеют наклон в сторону меньших возбуждающих частот.

Заметим, что основание резонансных кривых во всех трех случаях (как и в общем случае) не зависит от величины и характера нелинейности и совпадает с интервалом неустойчивости, определенным методами линейной теории. Действительно, положив в уравнении (5.15) $A = 0$, получим уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 + \mu - n^2 & -\frac{n\Delta}{\pi} \\ \frac{n\Delta}{\pi} & 1 - \mu - n^2 \end{vmatrix} = 0,$$

совпадающее с уравнением критических частот (2.12).

Очевидно, что в случае нелинейной упругости и нелинейной инерционности возможно «затягивание» колебаний за пределы области возбуждения (ср. § 18). В первом случае затягивание будет происходить в сторону больших частот, во втором случае — в сторону меньших частот. Подробно вопрос о затягивании будет рассмотрен в § 23.

4. Вид резонансных кривых для каждого из трех основных случаев настолько типичен, что по характеру кривой можно судить о том, какой из нелинейных факторов преобладает в каждом конкретном случае.

Из формулы (5.16) видно, что наклон резонансной кривой зависит от знака величины

$$p = \kappa n^2 - \frac{3\gamma}{4\Omega^2}.$$

А именно, если

$$\frac{4}{3} \frac{\kappa\Omega^2}{\gamma} > 1 \quad (n \approx 1),$$

резонансные кривые будут наклонены в сторону меньших частот, т. е. амплитуды будут возрастать с уменьшением возбуждающей частоты. Если же

$$\frac{4}{3} \frac{\kappa\Omega^2}{\gamma} < 1 \quad (n \approx 1),$$

то резонансные кривые будут наклонены в сторону больших частот.

Как и в случае собственных колебаний (§ 17), можно показать, что при отсутствии у стержня продольных упру-

гих связей решающим нелинейным фактором является нелинейная инерционность. Действительно, из выведенного в § 17 соотношения

$$\frac{4}{3} \frac{\chi \omega^2}{\gamma} \geq \frac{8\pi^2}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right)$$

следует, что

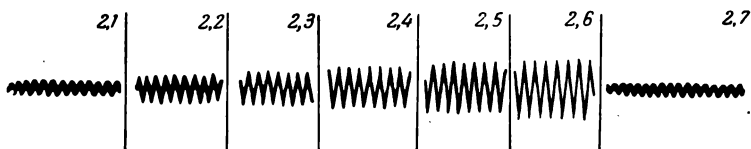
$$\frac{4}{3} \frac{\chi \mu^2 \Omega^2}{\gamma} \geq \frac{8\pi^2}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right) \frac{\theta^2}{4\omega^2}.$$

Но для главной области неустойчивости

$$\frac{8\pi^2}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right) \frac{\theta^2}{4\omega^2} > 1,$$

если только продольная сила не слишком близка к эйлерову значению.

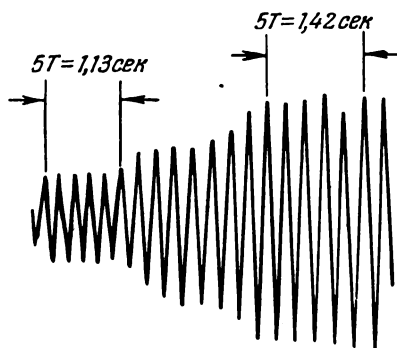
Вывод о преобладании нелинейной инерционности подтверждается опытными данными. Так, на фиг. 30 приведены



Фиг. 30.

осциллограммы параметрически возбуждаемых колебаний, снятых вблизи главного резонанса $\theta = 2\Omega$. Запись производилась ступенями при постепенном *уменьшении* возбуждающей частоты. Первый кадр соответствует верхней границе области параметрического возбуждения ($\theta = 42,0$ 1/сек). В увеличенном масштабе этот кадр дан на фиг. 11, а. Наряду с параметрически возбуждаемыми колебаниями заметны также и вынужденные колебания, происходящие с удвоенной частотой (т. е. с частотой внешней силы). Дальнейшие кадры сняты при последовательном уменьшении возбуждающей частоты. Характерно, что амплитуда колебаний при этом увеличивается. Предпоследний кадр соответствует затянутым колебаниям ($\theta = 36,5$ 1/сек), после чего наступает «срыв» амплитуд. Остаются только вынужденные колебания, имеющие частоту внешней силы.

Характер зависимости амплитуды от частоты можно видеть также и на фиг. 31. В противоположность осциллограмме, приведенной на фиг. 30, эта осциллограмма снята при непрерывной записи. Снижение возбуждающей частоты на 20%



Фиг. 31.

с выводом системы за пределы области возбуждения дает увеличение амплитуд более чем в три раза.

§ 21. Исследование формулы для установившихся амплитуд

1. Выясним сначала, как влияет на величину установившихся амплитуд линейное затухание. Для этого, отбросив в формуле (5.16) члены, учитывающие нелинейность затухания, представим ее в следующем виде:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sqrt{1 - n^2 \pm \sqrt{\mu^2 - \frac{n^2 \Delta^2}{\pi^2}}}, \quad (5.20)$$

где попрежнему

$$\rho = \kappa n^2 - \frac{3\gamma}{4\Omega^2}.$$

Формула (5.20) дает для амплитуды вещественные значения, пока $\frac{n\Delta}{\pi} < \mu$ или, учитывая, что $n \approx 1$, пока $\frac{\Delta}{\pi} < \mu$. Если же $\frac{\Delta}{\pi} > \mu$, то установившиеся колебания не возникают вовсе;

этот результат находится в полном соответствии с результатами линейной теории.

С другой стороны, при достаточно малом затухании его влияние на величину амплитуд будет практически неощутимо. Например, при $n = 1$ формула (5.20) принимает вид

$$A = \sqrt{\frac{\mu}{|p|}} \cdot \sqrt[4]{1 - \left(\frac{\mu_*}{\mu}\right)^2},$$

где μ_* — критический коэффициент возбуждения (§ 9). Уже при $\mu_* = 1/3\mu$ влияние затухания составляет величину порядка 6%. С дальнейшим уменьшением затухания амплитуды все больше приближаются к значениям, вычисленным для консервативного случая. Это видно, например, из фиг. 32, где представлена зависимость безразмерной амплитуды от отношения коэффициентов возбуждения. И вообще при

$$\mu > 3\mu_* \quad (5.21)$$

простая формула консервативной задачи

$$A = \sqrt{\frac{1 - n^2 \pm \mu}{p}} \quad (5.22)$$

дает достаточную для практических целей точность.

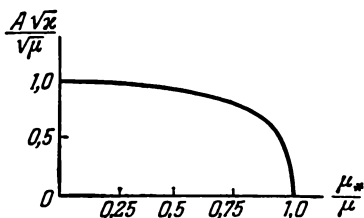
В частности, наибольшие амплитуды в пределах области возбуждения (т. е. без учета затягивания) могут быть определены по формуле

$$A = \sqrt{\frac{2\mu}{|p|}}. \quad (5.23)$$

В случае преобладающей нелинейной инерционности ($p > 0$) наибольшие амплитуды достигаются на нижней границе резонансной области; в случае преобладающей нелинейной упругости ($p < 0$) — на ее верхней границе. Заметим, что формула (5.22) может быть представлена также в следующем виде:

$$A^2 = \frac{1}{p} \left(\frac{\theta^2}{\theta_*^2} - 1 \right). \quad (5.24)$$

Здесь вместо θ_* берется верхняя или нижняя критическая



Фиг. 32.

частота в зависимости от знака p . Для доказательства рассмотрим уравнение (5.15) при $\Delta = \Delta_L = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 + \mu - n^2 - A^2 p & 0 \\ 0 & 1 - \mu - n^2 - A^2 p \end{vmatrix} = 0.$$

Сравнивая его с уравнением критических частот (2.12), видим, что оно удовлетворяется при $n^2 + A^2 p = n_*^2$. Следовательно,

$$A^2 = \frac{1}{p} (n_*^2 - n^2) \quad \left(n_* = \frac{\theta_*}{2\Omega} \right),$$

откуда вытекает формула (5.24).

В дальнейшем, если не оговорено противоположное, будем считать, что условие (5.21) выполняется, и будем пользоваться простыми формулами (5.22), (5.23) и (5.24).

2. Переходим к вопросу о том, как влияет на установившиеся амплитуды величина внешней нагрузки.

Как видно из формулы (5.23), амплитуда колебаний растет пропорционально квадратному корню из коэффициента возбуждения

$$A = \sqrt{\frac{2\mu}{|p|}}, \quad (5.25)$$

т. е. пропорционально корню квадратному из амплитуды периодической силы. Нелинейная зависимость между нагрузкой и амплитудой колебаний вообще характерна для задач, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Впрочем, пропорционально коэффициенту возбуждения растет амплитуда продольных перемещений точки приложения силы.

Постоянная составляющая продольной силы P_0 должна, на первый взгляд, увеличивать амплитуды колебаний. Действительно, с ростом силы P_0 растет коэффициент возбуждения

$$\mu = \frac{P_t}{2(P_* - P_0)}.$$

Зависимость оказывается, однако, сложнее. Сила P_0 бывает обычно гравитационного происхождения, т. е. так или иначе связана с силами веса, и поэтому ее увеличение вызывает, как правило, возрастание нелинейной инерционности системы.

В конечном счете это может привести к уменьшению амплитуд. Поясним это на простейшем примере (фиг. 20).

Пусть шарнирно опертый стержень загружен силой $P_0 + P_t \cos \theta t$, причем сила P_0 сопряжена с массой P_0/g . Пренебрегая влиянием нелинейной упругости и затухания (линейного и нелинейного), получим:

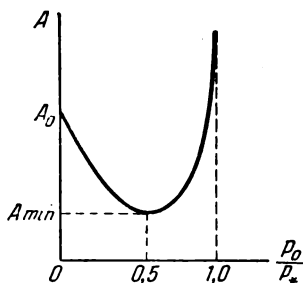
$$x = \frac{\pi^4 (P_0 + kG)}{4Gt^2},$$

где $G = mgl$ — собственный вес стержня, k — коэффициент приведения (3.20). Формула (5.22) при $\theta = 2\Omega$ дает $A^2 = \nu/x$, т. е.

$$A^2 = \frac{2t^2}{\pi^4} \frac{P_t G}{(P_0 + kG)(P_* - P_0)}. \quad (5.26)$$

Зависимость амплитуды от постоянной составляющей P_0 изображена на фиг. 33. При $P_0 = 0$ амплитуды колебаний весьма велики:

$$A_0^2 = \frac{2t^2 P_t}{\pi^4 k P_*}.$$



Фиг. 33.

С увеличением силы P_0 амплитуды убывают, достигая минимума при $P_0 = 1/2(P + kG) \approx 1/2 P_*$. В дальнейшем амплитуды вновь возрастают.

3. При наличии двух факторов — нелинейной упругости и нелинейной инерционности — резонансные кривые принимают вид, изображенный на фиг. 34. Левый график соответствует, очевидно, случаю $p > 0$ (преобладающая нелинейная инерционность).

Как видно из графиков, затягивание в этом случае ограничено частотой θ_∞ . Эту частоту определим, приравняв выражение для p нулю:

$$x n^2 - \frac{3\gamma}{4\Omega^2} = 0.$$

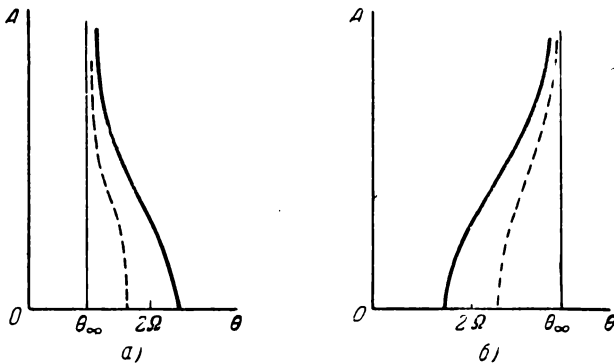
Отсюда

$$\theta_\infty = 2n_\infty \Omega = \sqrt{\frac{3\gamma}{x}}. \quad (5.27)$$

Величина $\omega_L = \sqrt{\gamma/x}$ представляет собой не что иное, как линеаризованную частоту «продольной системы» (нелинейная

упругость + нелинейная инерционность). Так, в случае сосредоточенной на конце массы M_L и связи жесткостью c имеем $\alpha = \frac{\pi^4 M_L}{4m l^3}$, $\gamma = \frac{\pi^4 c}{4m l^3}$, следовательно, $\omega_L^2 = c/M_L$. Формулу (5.27) можно истолковать как условие возникновения резонанса в «продольной» системе, хотя оно и отличается от условия синхронизма множителем $\sqrt{3}$ перед собственной частотой.

Если нелинейная упругость и нелинейная инерционность компенсируют друг друга, то частота θ_∞ попадает в



Фиг. 34.

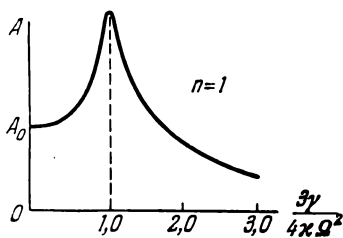
область динамической неустойчивости. Этот случай является наиболее неблагоприятным с точки зрения амплитуд колебаний: параметрический резонанс и резонанс в «продольной» системе накладываются друг на друга (фиг. 35). Конечность амплитуд сохраняется здесь лишь за счет нелинейного затухания (и, разумеется, неучтенных членов высших порядков в выражении для нелинейной функции).

Множитель $\sqrt{3}$ в условии резонанса появляется из-за существенной нелинейности «продольной» системы. Действительно, квазиупругий коэффициент этой системы весьма велик при малых перемещениях (бесконечно велик при перемещении, стремящемся к нулю, если стержень считать несжимаемым) и приближается к постоянному значению c , когда прогибы увеличиваются. Это показано на фиг. 36, где по

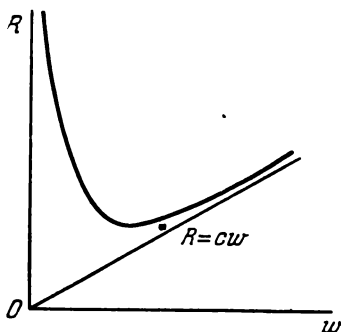
вертикали отложена реакция системы на продольное перемещение.

4. Кратко остановимся на рекомендациях по мерам борьбы с параметрически возбуждаемыми колебаниями. Помимо очевидных мер — уменьшения или полного устранения возбуждающих сил, а также «увода» конструкции из опасной области путем изменения ее параметров, могут быть рекомендованы следующие приемы:

1) Линейное демпфирование. Эта мера эффективна лишь в том случае, если затухание доводится до такой величины, что $\mu_* \approx \mu$. При $\mu_* > \mu$ параметрическое возбуждение во-



Фиг. 35.



Фиг. 36.

обще становится невозможным. Для подбора характеристик демпферов нужно пользоваться формулами § 9.

2) Нелинейное демпфирование. Введение «продольного» демпфера уменьшает амплитуды параметрических колебаний примерно обратно пропорционально $\sqrt{\Delta_L}$. Эта мера может рассматриваться только как вспомогательная.

3) Введение упругих и инерционных нелинейностей. Если особенности конструкции позволяют, то такой прием может оказаться полезным. Нужно помнить, однако, что влияние указанных нелинейностей противоположно и что существуют их сочетания, особенно неблагоприятные с точки зрения колебаний. Следовательно, увеличение нелинейной упругости системы далеко не всегда снижает амплитуды. То же относится к нелинейной инерционности. Полностью ликвидировать вибрации этот прием не позволяет.

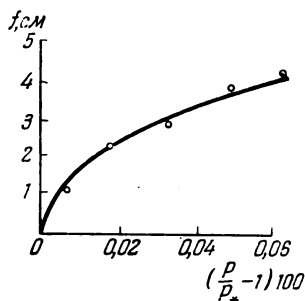
§ 22. Опытная проверка теории

1. На экспериментальной установке, описанной в § 6, производилось испытание образцов с определением амплитуды установившихся колебаний. Данные опыта сравнивались с теоретическими результатами. Ниже приводятся некоторые из этих данных, попутно излагаются методы определения нелинейных характеристик.

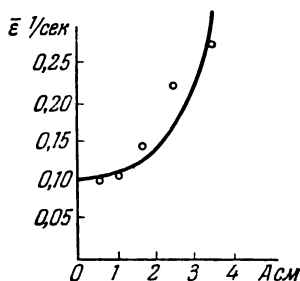
Коэффициент нелинейной упругости γ определялся из опыта на загрузку стержня продольной силой, превышающей критическое значение. В § 13 была установлена формула

$$f = \frac{\omega}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{P}{P_*} - 1}. \quad (5.28)$$

Опыты показали, что формула (5.28) вполне удовлетворительно описывает зависимость прогибов от продольной силы,



Фиг. 37.



Фиг. 38.

если последняя незначительно превышает критическое значение (фиг. 37). Формула (5.28) дает:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{f^2} \left(\frac{P}{P_*} - 1 \right).$$

Загружая стержень продольной силой в пределах $P_* \leq P \leq 1,00065P_*$ и измеряя прогибы посредине пролета, мы получили для одного из образцов $\gamma/\omega^2 = 0,42 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-2}$.

Коэффициент нелинейного затухания ϵ_L определялся путем обработки осциллограмм свободных затухающих коле-

баний. Оказалось, что декремент затухания, вычисленный по обычной формуле

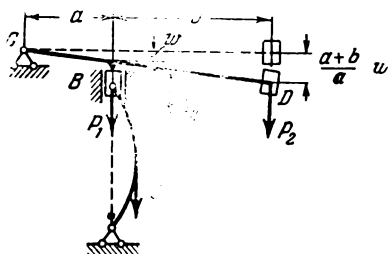
$$\Delta = \frac{1}{T} \ln \frac{A(t)}{A(t+T)},$$

увеличивается с амплитудой. Опытные точки для образца нанесены на графике (фиг. 38). Характер нарастания декремента удовлетворительно передает кривая $\bar{z} = 0,10 + 0,02A^3$, откуда $\varepsilon_L = 0,08 \text{ см}^{-2} \text{сек}^{-1}$.

Коэффициент нелинейной инерционности вычислялся по формуле

$$\kappa = \frac{\pi^4 M_L}{4m l^3},$$

где приведенная масса M_L найдена из элементарного подсчета (фиг. 39).



Фиг. 39.

Введем обозначения: G_1 — вес образца, G_2 — вес нагруженного рычага CD , служащего для создания постоянной составляющей продольной силы, P_1 — вес подвижной опоры, вибратора и др., P_2 — вес дополнительного груза на конце рычага. Если w — вертикальное перемещение точки B , то перемещение конца рычага будет $w(a+b)/a$. Тогда продольная инерционная сила в стержне

$$\Delta N = \left[P_1 + kG_1 + \frac{(a+b)^2}{a^2} \left(P_2 + \frac{1}{3} G_2 \right) \right] \frac{w''}{g},$$

откуда

$$M_L = \frac{1}{g} \left[P_1 + kG_1 + \frac{(a+b)^2}{a^2} \left(P_2 + \frac{1}{3} G_2 \right) \right].$$

В случае данных: $G_1 = 6,0 \text{ кг}$, $G_2 = 31,0 \text{ кг}$, $P_1 = 30,0 \text{ кг}$, $P_2 = 12,0 \text{ кг}$, $a = 40 \text{ см}$, $b = 130 \text{ см}$, $l = 170 \text{ см}$, получаем $M_L g = 429,0 \text{ кг}$. Следовательно,

$$\kappa = \frac{3,14^4 \cdot 429}{4 \cdot 6,0 \cdot 170^3} = 0,061 \text{ см}^{-2}.$$

Коэффициент нелинейной инерционности, точнее характеристика

$$p = \kappa n^2 - \frac{3\gamma}{4\Omega^2},$$

может быть определен также из опыта на затухающие свободные колебания. Согласно приближенной формуле (4.22) частота нелинейной системы

$$\bar{\Omega} = \Omega \left[1 + \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{3\gamma}{4\Omega^2} - \kappa \right) \right].$$

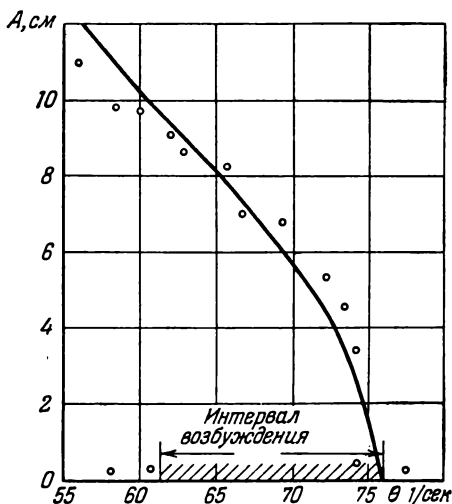
Вблизи главного резонанса $n \approx 1$, и следовательно, формула принимает вид

$$\bar{\Omega} = \Omega \left(1 - \frac{1}{2} a^2 p \right).$$

Отсюда, определяя собственные частоты при различных амплитудах, будем находить коэффициент

$$p = \frac{2}{a^2} \left(\frac{\Omega}{\bar{\Omega}} - 1 \right).$$

Способ этот, однако, ненадежен; он может быть рекомендован только для систем с ярко выраженной нелинейностью.



Фиг. 40.

2. Снятие резонансных кривых производилось так, чтобы в пределах главной области возбуждения было не менее пяти-шести опытных точек. Запись велась ступенями при

прямом и обратном ходе; это позволило выделить «затянутые» колебания.

Резонансная кривая для одного из образцов приведена на фиг. 40. Применяя теоретические формулы, следует учитывать, что амплитуда периодической силы, создаваемая вибратором, растет пропорционально квадрату возбуждающей частоты. Значение коэффициента при $n = 1$ обозначим через $\bar{\mu}$. Тогда

$$\mu = \bar{\mu} n^2. \quad (5.29)$$

Это выражение для μ следует подставить во все предыдущие теоретические формулы.

Произведем теперь подсчеты для случая, которому соответствует фиг. 40.

Частота собственных колебаний . . .	$\Omega = 33,8 \text{ сек}^{-1}$
Критическая сила	$P_* = 183 \text{ кг}$
Постоянная составляющая продольной силы	$P_0 = 55 \text{ кг}$
Амплитуда переменной составляющей (при $n = 1$)	$\bar{P}_t = 54,2 \text{ кг}$
Коэффициент возбуждения	

$$\bar{\mu} = \frac{\bar{P}_t}{2(P_* - P_0)} = \frac{54,2}{2(183 - 55)} = 0,212$$

Приведенная продольная масса . . .	$M_L g = 316 \text{ кг}$
Коэффициент нелинейной инерционности	

$$z = \frac{3,14^4 \cdot 316}{4 \cdot 6,0 \cdot 170^2} = 0,044 \text{ см}^{-2}.$$

Нелинейная упругость, а также затухание (линейное и нелинейное) настолько малы, что при вычислении амплитуд ими можно пренебречь. Так, коэффициент линейного затухания, найденный из опыта, $\varepsilon = 0,08 \text{ сек}^{-1}$, следовательно, критический коэффициент возбуждения

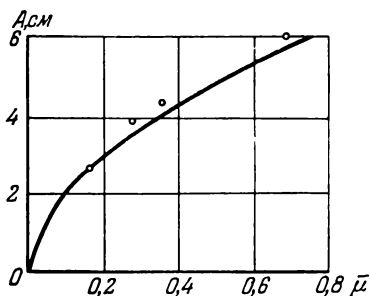
$$\mu_* = \frac{\Delta}{\pi} = \frac{2\varepsilon}{\Omega} = 0,0047 \ll \bar{\mu}.$$

Коэффициент нелинейной упругости $\gamma \ll x\Omega^2$, и влиянием нелинейной упругости также можно пренебречь.

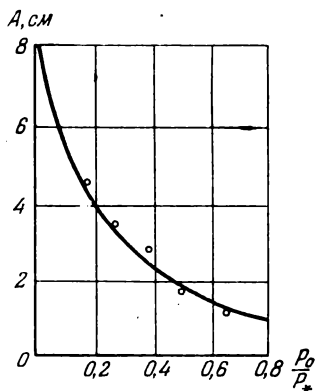
Границы главной области возбуждения определим по формуле (1.43):

$$\theta_* = \frac{2\Omega}{\sqrt{1 \pm \mu}}.$$

Подстановка дает $61,3 \text{ сек}^{-1}$ и $75,9 \text{ сек}^{-1}$ для нижней и верхней границы соответственно. Из опыта получены значения $60,8 \text{ сек}^{-1}$ и $74,2 \text{ сек}^{-1}$ (фиг. 40). Расхождение не



Фиг. 41.



Фиг. 42.

выходит, таким образом, за пределы точности обработки осциллограмм.

Амплитуды колебаний определим по формуле (5.22) с учетом (5.29):

$$A^2 = \frac{1 - n^2(1 - \bar{\mu})}{\chi n^2}.$$

На нижней границе области возбуждения $n_*^2 = \frac{1}{1 + \mu}$, отсюда $A^2 = \frac{2\bar{\mu}}{\chi}$. Вычисления дают:

$$A = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,212}{0,044}} = 9,84 \text{ см.}$$

Теоретические результаты нанесены на фиг. 40 сплошной линией. Некоторое превышение экспериментальных амплитуд вблизи верхней границы области возбуждения объясняется тем, что колебания всегда сопровождаются более

или менее интенсивными биениями, однако на фигуре даны максимальные амплитуды без какой-либо поправки на биения.

Аналогичные опыты были проделаны с рядом других образцов, причем для каждого из них варьировались постоянная и периодическая составляющие продольной силы. Во всех опытах получено удовлетворительное согласие с теорией. Опытные зависимости представлены на фиг. 41—42. График, приведенный на фиг. 42, показывает изменение амплитуды колебаний при $\theta = 2\Omega$ в зависимости от составляющей P_0 . С ростом P_0 собственная частота Ω уменьшается, соответственно падает переменная нагрузка P_t .

ГЛАВА ШЕСТАЯ
НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ

§ 23. Вывод уравнений установления.
Устойчивость колебаний

1. Составим уравнения установления колебаний, происходящих вблизи главного резонанса. Для этого мы можем воспользоваться выражением (5.10), считая в нем a и b не постоянными величинами, а медленно изменяющимися функциями времени:

$$f(t) = a(t) \sin \frac{\theta t}{2} + b(t) \cos \frac{\theta t}{2}. \quad (6.1)$$

Напомним, что термин «медленно изменяющиеся функции» мы условились понимать в том смысле, что приращение этих функций за период мало по сравнению с их средним значением в течение периода или иначе, что имеют место неравенства

$$\left. \begin{array}{l} \left| \frac{a'}{a} \right| \frac{4\pi}{\theta} \ll 1, \quad \left| \frac{b'}{b} \right| \frac{4\pi}{\theta} \ll 1, \\ \left| \frac{a''}{a'} \right| \frac{4\pi}{\theta} \ll 1, \quad \left| \frac{b''}{b'} \right| \frac{4\pi}{\theta} \ll 1. \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

Подставим (6.1) в дифференциальное уравнение

$$f'' + 2\varepsilon f' + \Omega^2(1 - 2\mu \cos \theta t) f + \psi(f, f', f'') = 0,$$

разложив предварительно нелинейную функцию в ряд Фурье

$$\psi^*(f, f', f'') = \Phi(a, b) \sin \frac{\theta t}{2} + \Psi(a, b) \cos \frac{\theta t}{2} + \dots$$

Члены, содержащие гармоники, отброшены. При вычислении коэффициентов использованы неравенства (6.2).

Приравнивая нулю коэффициенты при $\sin \frac{\theta t}{2}$ и $\cos \frac{\theta t}{2}$, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \underline{a'' + 2\varepsilon a'} - \theta b' + \left[\Omega^2(1 + \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right] a - \varepsilon \theta b + \Phi(a, b) &= 0, \\ \underline{b'' + 2\varepsilon b'} + \theta a' + \left[\Omega^2(1 - \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right] b + \varepsilon \theta a + \Psi(a, b) &= 0. \end{aligned}$$

Эту систему можно упростить, если учесть неравенства (6.2) и относительную малость затухания $\frac{2\varepsilon}{\Omega} \ll 1$. В результате получим следующие уравнения установления:

$$\left. \begin{aligned} \theta \frac{db}{dt} &= \left[\Omega^2(1 + \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right] a - \varepsilon \theta b + \Phi(a, b), \\ \theta \frac{da}{dt} &= - \left[\Omega^2(1 - \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right] b - \varepsilon \theta a - \Psi(a, b). \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Таким образом, мы пришли к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка, коэффициенты которых уже не содержат времени явно. Исследование этих уравнений представляет гораздо менее сложную задачу, чем исследование исходного уравнения (5.1).

2. Уравнения для установившихся амплитуд могут быть получены из (6.3), если положить:

$$\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0.$$

Эти уравнения совпадают, очевидно, с (5.11).

Пусть

$$a = a_0, \quad b = b_0$$

— одно из стационарных решений, удовлетворяющих уравнениям (5.11). Исследуем его устойчивость, для чего рассмотрим поведение системы при слегка возмущенных значениях амплитуд:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \xi, \\ b &= b_0 + \eta. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Подставив (6.4) в (6.3), получим уравнения возмущенного движения

$$\left. \begin{aligned} \theta \frac{d\eta}{dt} &= \left[\Omega^2 (1 + \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right] (a_0 + \xi) - \varepsilon \theta (b_0 + \eta) + \\ &\quad + \Phi(a_0 + \xi, b_0 + \eta), \\ \theta \frac{d\xi}{dt} &= - \left[\Omega^2 (1 - \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right] (b_0 + \eta) - \varepsilon \theta (a_0 + \xi) + \\ &\quad + \Psi(a_0 + \xi, b_0 + \eta). \end{aligned} \right\} (6.5)$$

Разложим возмущенные функции $\Phi(a, b)$ и $\Psi(a, b)$ в ряды по степеням возмущений

$$\begin{aligned} \Phi(a, b) &= \Phi(a_0, b_0) + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a} \right]_0 \xi + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial b} \right]_0 \eta + \dots, \\ \Psi(a, b) &= \Psi(a_0, b_0) + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial a} \right]_0 \xi + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial b} \right]_0 \eta + \dots \end{aligned}$$

Для сокращения обозначено:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a} \right]_0 &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a} \right]_{\substack{a=a_0 \\ b=b_0}}, \\ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial b} \right]_0 &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial b} \right]_{\substack{a=a_0 \\ b=b_0}}, \end{aligned}$$

и т. д.

Подстановка в (6.5) дает:

$$\begin{aligned} \theta \frac{d\eta}{dt} &= \left[\Omega^2 (1 + \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right] \xi - \varepsilon \theta \eta + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a} \right]_0 \xi + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial b} \right]_0 \eta + \dots, \\ \theta \frac{d\xi}{dt} &= - \left[\Omega^2 (1 - \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right] \eta - \varepsilon \theta \xi - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial a} \right]_0 \xi - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial b} \right]_0 \eta + \dots \end{aligned}$$

При достаточно малых возмущениях поведение системы определяется линейным приближением. Соответствующие уравнения носят название *уравнений в вариациях*:

$$\left. \begin{aligned} \theta \frac{d\xi}{dt} &= a_{11}\xi + a_{12}\eta, \\ \theta \frac{d\eta}{dt} &= a_{21}\xi + a_{22}\eta, \end{aligned} \right\} (6.6)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial a} \right]_0 - \varepsilon \theta, \\ a_{12} &= - \left[\Omega^2 (1 - \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right] - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial b} \right]_0, \\ a_{22} &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial b} \right]_0 - \varepsilon \theta, \\ a_{21} &= \left[\Omega^2 (1 + \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right] + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a} \right]_0. \end{aligned}$$

Уравнения в вариациях будут удовлетворены, если положить:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 e^{\frac{\lambda}{\theta} t}, \\ \eta &= \eta_0 e^{\frac{\lambda}{\theta} t}. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (6.7)$$

Для того чтобы возмущения ξ и η с течением времени затухали, необходимо, чтобы оба корня λ имели отрицательную вещественную часть. Это будет выполнено при условии, что

$$a_{11} + a_{22} < 0, \quad (6.8)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0. \quad (6.9)$$

3. Рассмотрим прежде всего вопрос об устойчивости начальной формы равновесия

$$a_0 = b_0 = 0.$$

Поскольку функции $\Phi(a, b)$ и $\Psi(a, b)$ представляют собой однородные полиномы третьей степени, то, очевидно,

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial a} \right]_0 = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial b} \right]_0 = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial a} \right]_0 = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial b} \right]_0 = 0.$$

Условие (6.8) для этого случая дает $\varepsilon > 0$, т. е. сводится к требованию, чтобы затухание было сколько-нибудь отличным от нуля. Это условие выполняется во всех реальных

задачах. Условие же (6.9) после перестановки строк и столбцов принимает вид

$$\begin{vmatrix} \Omega^2(1+\mu) - \frac{\theta^2}{4} & -\epsilon\theta \\ \epsilon\theta & \Omega^2(1-\mu) - \frac{\theta^2}{4} \end{vmatrix} > 0.$$

Взятое со знаком равенства, оно совпадает с уравнением критических частот (2.12), выведенным в гармоническом приближении. Второе условие выполняется всюду, за исключением главной резонансной области.

Переходим к исследованию устойчивости ненулевых решений. Ограничимся случаем, когда имеется только нелинейная инерционность:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial a} &= -\frac{\kappa\theta^2}{4}(3a^2 + b^2), \\ \frac{\partial\Phi}{\partial b} &= \frac{\partial\Psi}{\partial a} = -\frac{\kappa\theta^2}{2}ab, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial b} &= -\frac{\kappa\theta^2}{4}(a^2 + 3b^2). \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Применение критерия (6.8), как и прежде, дает $\epsilon > 0$, т. е. затухание должно быть отличным от нуля. Во избежание громоздких выкладок положим в дальнейшем, что затухание настолько мало, чтобы им можно было пренебречь.

Первое решение консервативной задачи, как видно из (5.13), будет:

$$a_0 = \frac{1}{n\sqrt{\kappa}} \sqrt{1 - n^2 + \mu}, \quad b_0 = 0.$$

Подстановка в формулы (6.10) дает:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial a} \right]_0 &= -3\Omega^2(1+\mu) + \frac{3\theta^2}{4}, \\ \left[\frac{\partial\Phi}{\partial b} \right]_0 &= \left[\frac{\partial\Psi}{\partial a} \right]_0 = 0, \\ \left[\frac{\partial\Psi}{\partial b} \right]_0 &= -\Omega^2(1+\mu) + \frac{\theta^2}{4}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = 0, \\ a_{12} &= 2\mu\Omega^2, \\ a_{21} &= -2 \left[\Omega^2(1 + \mu) - \frac{\theta^2}{4} \right]. \end{aligned}$$

Легко видеть, что при

$$\theta < 2\Omega\sqrt{1 + \mu},$$

т. е. во всей области существования первого решения (фиг. 29, в), будет соблюдаться неравенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

при этом, однако, $a_{11} + a_{22} \equiv 0$. Это значит, что в консервативном случае оба характеристических числа будут чисто мнимыми, т. е. возмущения, хотя и остаются ограниченными во времени, но не затухают асимптотически. Этот случай относится, по Ляпунову, к числу сомнительных, когда первое приближение оказывается недостаточным для того, чтобы судить об устойчивости (неустойчивости) решений. Этот результат является, однако, результатом переупрощения задачи. Достаточно предположить наличие сколь угодно малого затухания, чтобы получить $a_{11} + a_{22} < 0$, что обеспечивает так называемую «асимптотическую» устойчивость решения.

Поступая аналогичным образом, можно показать, что второе решение

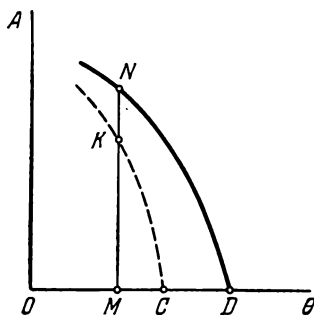
$$a_0 = 0, \quad b_0 = \frac{1}{n\sqrt{x}} \sqrt{1 - n^2 - \mu}$$

является неустойчивым. Соответствующие выкладки легко сделает сам читатель.

4. Выше имелась в виду устойчивость по отношению к малым возмущениям, или, короче, «устойчивость в малом». Для практических приложений важное значение имеет также устойчивость по отношению к возмущениям конечной величины, или «устойчивость в большом». Поясним это на примере (фиг. 43).

Допустим, что система находится вне резонансной области, причем возбуждающая частота меньше, чем низшая критическая частота ($OM < OC$). В этом случае нулевое

решение устойчиво, и поперечных колебаний не будет. Однако при той же частоте возможно и другое устойчивое решение MN , соответствующее установившимся поперечным колебаниям. Колебания эти можно реализовать, введя систему в резонансную область CD и «затянув» затем колебания путем постепенного уменьшения возбуждающей частоты. Но те же колебания можно вызвать и иначе: для этого нужно



Фиг. 43.

дать системе достаточно сильное возмущение, чтобы «забросить» ее на устойчивую ветвь ND . Таким возмущением может быть, например, поперечный импульс или просто отклонение стержня от начального прямолинейного положения. В дальнейшем мы будем иметь в виду именно последнее — «амплитудное» возмущение.

Возможность возникновения установившихся колебаний зависит от величины возмущения,

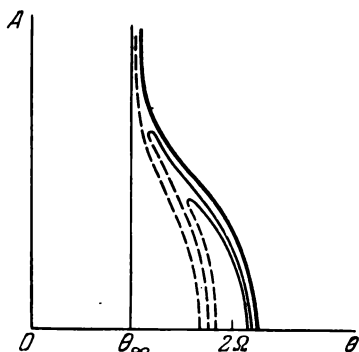
причем существенную роль здесь играет неустойчивая ветвь KC . А именно эта ветвь выполняет роль «водораздела», отделяющего область «притяжения» нулевого решения от области «притяжения» решения ND . Пока возмущение будет меньше чем KM , система будет возвращаться к первоначальному положению равновесия. Лишь в том случае, когда возмущение превышает величину KM , возникнут установившиеся колебания с амплитудой MN .

Предельная глубина затягивания также решается «устойчивостью в большом». Если исходить из теории малых возмущений, установившееся решение ND будет устойчивым во всей области его существования. Опыт показывает, однако, что «срыв» колебаний наступает довольно скоро после выхода за пределы резонансной области CD . На глубину затягивания влияют те возмущения, которые неизбежны в любой реальной системе: установившиеся колебания устойчивы до тех пор, пока система не будет переброшена через неустойчивую ветвь KC .

Наибольшая величина возмущения, при которой еще сохраняется режим установившихся колебаний, как видно, на-

пример, из фиг. 43, убывает по мере удаления от резонансной области. Поэтому чем меньше возмущения, тем дальше удастся увести систему от области параметрического возбуждения. В лабораторных условиях удавалось получить «затянутые» колебания, амплитуда которых более чем втрое превышает амплитуду колебаний на нижней границе области возбуждения. Одна из осциллограмм такого рода была уже приведена на фиг. 31.

Впрочем, предельная глубина затягивания принципиально ограничена. Так, в консервативном случае затягивание может происходить только до частоты $\theta_{\infty} = \sqrt{\frac{3\gamma}{\alpha}}$. Это видно из фиг. 34. На предельную глубину затягивания влияет также затухание — линейное и нелинейное (фиг. 44).



Фиг. 44.

В заключение следует заметить, что приведенные выше качественные соображения имели в виду лишь один из возможных классов возмущений — по амплитуде. В реальных задачах роль возмущений могут играть также флуктуации возбуждающей частоты, амплитуды нагрузки и т. п. Дальнейшее исследование может быть проведено методами качественной теории дифференциальных уравнений.

§ 24. Процесс установления колебаний

1. Для расчета неустановившихся колебаний вблизи главного резонанса была получена система уравнений (6.3). Введя обозначения (5.14), запишем ее в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{4n^2}{\theta} \frac{db}{dt} &= (1 + \mu - n^2) a - \frac{n\Delta}{\pi} b + \Phi(a, b), \\ \frac{4n^2}{\theta} \frac{da}{dt} &= -(1 - \mu - n^2) b - \frac{n\Delta}{\pi} a - \Psi(a, b). \end{aligned} \right\} (6.11)$$

Замкнутое решение системы (6.11) можно получить лишь для немногих частных случаев. Так, в случае достаточно

малых амплитуд, когда можно пренебречь нелинейными членами, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{4n^2 db}{\theta dt} &= (1 + \mu - n^2) a - \frac{n\Delta}{\pi} b, \\ \frac{4n^2 da}{\theta dt} &= -(1 - \mu - n^2) b - \frac{n\Delta}{\pi} a.\end{aligned}$$

Подстановка

$$\begin{aligned}a &= a_0 e^{ht}, \\ b &= b_0 e^{ht}\end{aligned}$$

приводит к характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} 1 + \mu - n^2 & -\frac{n\Delta}{\pi} - \frac{4n^2 h}{\theta} \\ -\frac{n\Delta}{\pi} - \frac{4n^2 h}{\theta} & -(1 - \mu - n^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Решение этого уравнения дает:

$$h = \pm \frac{\Omega}{2n} \sqrt{\mu^2 - (1 - n^2)^2} - \varepsilon. \quad (6.12)$$

Максимального значения характеристический показатель достигает вблизи $\theta = 2\Omega$, где он равен

$$h_{\max} \approx \frac{\mu\Omega}{2} - \varepsilon.$$

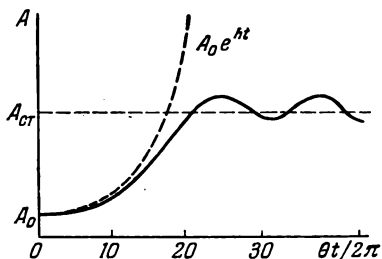
В общем случае приходится прибегать к численному интегрированию, которое, впрочем, выполняется довольно просто. Взяв в качестве интервала времени половину периода возбуждающей нагрузки $\Delta t = \frac{\pi}{\theta}$, получаем по «методу касательных»:

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= a_k + \Delta a_k, \\ b_{k+1} &= b_k + \Delta b_k,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta a_k &= \frac{\pi}{4n^2} \left[-(1 - \mu - n^2) b_k - \frac{n\Delta}{\pi} a_k - \Psi(a_k, b_k) \right], \\ \Delta b_k &= \frac{\pi}{4n^2} \left[(1 + \mu - n^2) a_k - \frac{n\Delta}{\pi} b_k + \Phi(a_k, b_k) \right].\end{aligned}$$

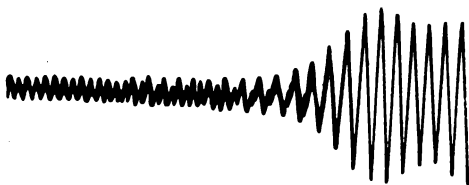
Результаты численного интегрирования для одного из примеров приведены на фиг. 45. Здесь же нанесена кривая, соответствующая нарастанию амплитуд по экспоненциальному закону с показателем (6.12), а также горизонтальная прямая, соответствующая установившимся амплитудам. Из графика видно, что пока амплитуды не слишком велики, рост амплитуд с большой точностью описывается экспоненциальным законом. Результаты интегрирования показывают, что наряду со стационарными решениями система (6.11) имеет решения типа биений.



Фиг. 45.

2. Переходим к описанию экспериментальных результатов.

Все осциллограммы установления имеют начальный участок возрастания по экспоненциальному закону (фиг. 8). При этом характеристический показатель, получаемый путем



Фиг. 46.

обработки осциллограмм, оказывается довольно близким к теоретическому значению (6.12).

Осциллограмме, приведенной на фиг. 8, соответствуют данные:

$$\Omega = 40,5 \text{ } ^1/\text{сек}, \quad n = 0,97, \quad \mu = 0,123, \quad \varepsilon = 0,12 \text{ } ^1/\text{сек}.$$

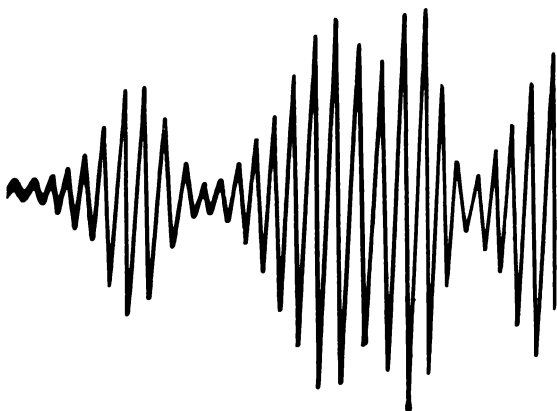
Подстановка этих значений в формулу (6.12) дает $h = 2,24 \text{ } ^1/\text{сек}$, между тем как опытное значение,

определяемое по формуле

$$h = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{A_{k+1}}{A_k},$$

изменяется в пределах $h = 2,15 - 2,07$ 1/сек.

Характерные диаграммы установления колебаний приведены на фиг. 46—47. Так, из фиг. 46 видно, как вынужденные колебания, происходящие с частотой продольной



Фиг. 47.

силы, постепенно вытесняются параметрически возбуждаемыми колебаниями, происходящими с половинной частотой. Осциллограмма, приведенная на фиг. 47, соответствует значительному коэффициенту возбуждения ($\mu = 0,27$). Нарастание амплитуд носит ярко выраженный нелинейный характер и сопровождается биениями.

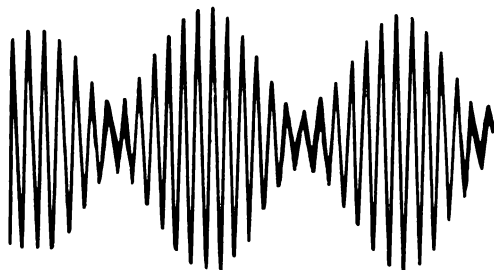
§ 25. Режим биений

1. Опыт показывает, что наряду с установившимися колебаниями постоянной амплитуды может иметь место также режим биений.

Некоторые осциллограммы биений приводятся на фиг. 48—52.

В первом случае огибающая биений довольно хорошо описывается гармоническим законом, во втором случае она

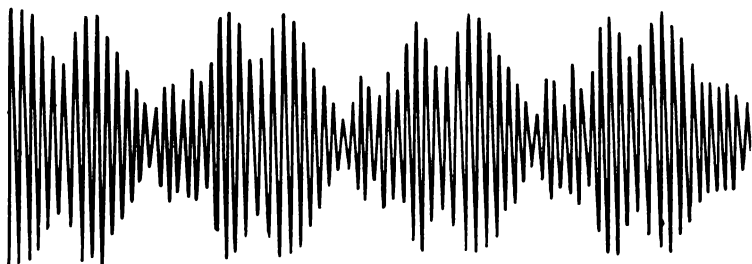
содержит большое количество гармоник. Вообще замечено, что интенсивность биений заметно уменьшается по мере приближения к нижней границе области возбуждения (в слу-



Фиг. 48.

чае, когда нелинейная инерционность преобладает). Это видно из осциллограмм на фиг. 48—50, которые получены при трех последовательно уменьшаемых значениях возбуждающей частоты.

При малых коэффициентах возбуждения биения не возникают вовсе: колебания носят вполне установившийся харак-



Фиг. 49.

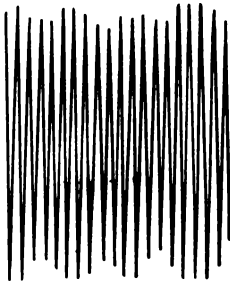
тер (фиг. 51). Напротив, при очень больших коэффициентах возбуждения колебания принимают существенно нелинейный характер: нарастание амплитуд чередуется со срывами колебаний (фиг. 52).

2. Аналитическое исследование режима биений составляет большие трудности. Однако порядок амплитуд можно оценить на основании следующих соображений.

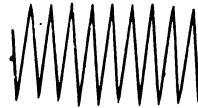
Попробуем удовлетворить уравнениям (6.11) с помощью выражений

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 \cos \alpha t, \\ b &= b_0 \sin \alpha t, \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

где a_0 и b_0 — некоторые постоянные коэффициенты; частота биений α предполагается достаточно малой по сравнению с возбуждающей частотой θ (фиг. 53). Только при этом условии выражения (6.13) можно считать медленно изменяющимися функциями времени.



Фиг. 50.



Фиг. 51.

Амплитуда колебаний составляет

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

или

$$A = \sqrt{\frac{a_0^2 + b_0^2}{2} + \frac{a_0^2 - b_0^2}{2} \cos 2\alpha t.}$$

Пусть $|a_0| > |b_0|$. В этом случае, очевидно,

$$A_{\max} = |a_0|,$$

$$A_{\min} = |b_0|.$$

Ограничившись случаем нелинейной инерционности, найдем:

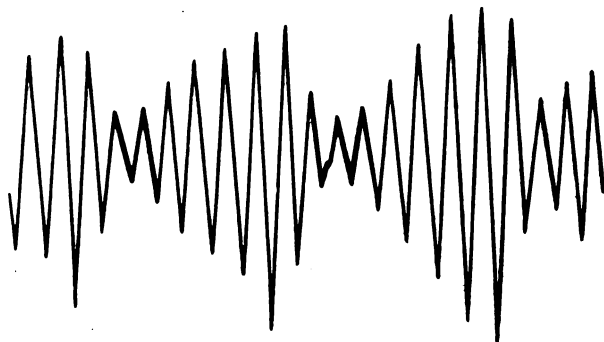
$$\Phi(a, b) = -\chi n^2 a A^2 = -\frac{\chi n^2 a_0}{4} (3a_0^2 + b_0^2) \cos \alpha t + \dots,$$

$$\Psi(a, b) = -\chi n^2 b A^2 = -\frac{\chi n^2 b_0}{4} (a_0^2 + 3b_0^2) \sin \alpha t + \dots$$

Подставим найденные значения, а также выражения (6.13) в уравнения (6.11). Если не учитывать затухания, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2n\alpha}{\Omega} b_0 &= (1 + \mu - n^2) a_0 - \frac{\chi n^2 a_0}{4} (3a_0^2 + b_0^2), \\ \frac{2n\alpha}{\Omega} a_0 &= (1 - \mu - n^2) b_0 - \frac{\chi n^2 b_0}{4} (a_0^2 + 3b_0^2). \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Уравнения (6.14) содержат три неизвестных — амплитуды биений a_0 и b_0 и частоту биений α . Таким образом, решая



Фиг. 52.

уравнения (6.14), мы сможем лишь выразить два неизвестных через третье, которое так и останется неопределенным. Для решения задачи необходимо будет привлечь некоторые дополнительные физические соображения.

Исключив из уравнений (6.14) частоту биений α , получим:

$$(1 + \mu - n^2) a_0^2 - \frac{3\chi n^2}{4} (a_0^4 - b_0^4) - (1 - \mu - n^2) b_0^2 = 0.$$

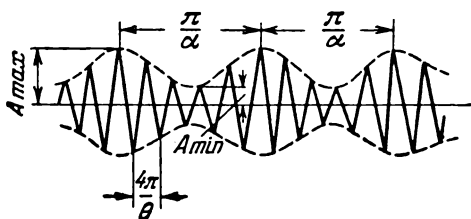
Но

$$\frac{1 + \mu - n^2}{\chi n^2} = A_0^2,$$

где A_0 — амплитуда установившихся колебаний. Полученное уравнение принимает вид

$$\frac{3}{4} a_0^4 - A_0^2 a_0^2 + \frac{1 - \mu - n^2}{1 + \mu - n^2} A_0^2 b_0^2 - \frac{3}{4} b_0^4 = 0. \quad (6.15)$$

Уравнение (6.15), помимо основного неизвестного a_0 , содержит также минимальную амплитуду биений b_0 . Опыт показывает, однако, что $\frac{b_0^2}{a_0^2} \ll 1$. Это видно, например, из



Фиг. 53.

фиг. 48. Отбрасывая на этом основании в уравнении (6.15) малые члены, получим:

$$A_{\max} \approx \frac{2}{\sqrt{3}} A_0. \quad (6.16)$$

Таким образом, максимальная амплитуда при биениях примерно на 15% превышает стационарную амплитуду.

Более строгое исследование должно учитывать также и начальные условия, так как они во многом определяют характер колебаний.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ
ПОБОЧНЫЕ РЕЗОНАНСЫ

**§ 26. Параметрически возбуждаемые колебания
при втором резонансе ¹⁾**

1. Для определения амплитуд установившихся колебаний, происходящих вблизи второго резонанса, будем исходить из уравнений (5.9).

Ограничившись гармоническим приближением

$$f(t) = b_0 + a_2 \sin \theta t + b_2 \cos \theta t, \quad (7.1)$$

получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Omega^3 (b_0 - \mu b_2) + \Psi_0(a_2, b_0, b_2) &= 0, \\ (\Omega^2 - \theta^2) a_2 - 2\varepsilon \theta b_2 + \Phi_2(a_2, b_0, b_2) &= 0, \\ (\Omega^2 - \theta^2) b_2 - 2\mu \Omega^2 b_0 + 2\varepsilon \theta a_2 + \Psi_2(a_2, b_0, b_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Рассмотрим случай нелинейной инерционности

$$\psi(f, f', f'') = 2\kappa f [ff'' + (f')^2].$$

Учитывая (7.1), после преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \psi^*(f, f', f'') = \\ = -\kappa \theta^2 b_0 (a_2^2 + b_2^2) - \kappa \theta^2 [a_2 (a_2^2 + b_2^2) + 2b_0^2 a_2] \sin \theta t - \\ - \kappa \theta^2 [b_2 (a_2^2 + b_2^2) + 2b_0^2 b_2] \cos \theta t, \end{aligned}$$

где отброшены члены, содержащие гармоники. Итак,

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= -\kappa \theta^2 b_0 A^2, \\ \Phi_2 &= -\kappa \theta^2 a_2 (A^2 + 2b_0^2), \\ \Psi_2 &= -\kappa \theta^2 b_2 (A^2 + 2b_0^2), \end{aligned}$$

¹⁾ Болотин В. В., Сборн. «Поперечные колебания и критические скорости», вып. 2, Изд. АН СССР, 1953.

где

$$A^2 = a_2^2 + b_2^2.$$

Подстановка в уравнения (7.2) дает:

$$\left. \begin{aligned} b_0 - \mu b_2 - \chi n^2 b_0 A^2 &= 0, \\ (1 - n^2) a_2 - \frac{n\Delta}{\pi} b_2 - \chi n^2 a_2 (A^2 + 2b_0^2) &= 0, \\ (1 - n^2) b_2 - 2\mu b_0 + \frac{n\Delta}{\pi} a_2 - \chi n^2 b_2 (A^2 + 2b_0^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

В отличие от обозначений предыдущих глав здесь через n обозначено отношение $n = \theta/\Omega$.

Решив систему нелинейных уравнений (7.3), найдем амплитуду установившихся колебаний A и постоянную составляющую динамического прогиба b_0 .

2. Рассмотрим сначала консервативную задачу ($\Delta = 0$). В этом случае уравнениям (7.3) можно удовлетворить, положив

$$b_0 = b_2 = 0, \quad a_2 = A \quad (\text{первое решение}),$$

$$a_2 = 0, \quad b_0 \neq 0, \quad b_2 = A \quad (\text{второе решение}).$$

Для определения первого решения имеем уравнение

$$(1 - n^2) A - \chi n^2 A^3 = 0,$$

откуда

$$A = \frac{\sqrt{1 - n^2}}{n\sqrt{\chi}}. \quad (7.4)$$

Второму решению соответствует система уравнений

$$b_0 - \mu A - \chi n^2 b_0 A^2 = 0,$$

$$(1 - n^2) A - 2\mu b_0 - \chi n^2 A (A^2 + 2b_0^2) = 0.$$

Из первого уравнения находим:

$$b_0 = \frac{\mu A}{1 - \chi n^2 A^2} \approx \mu A.$$

Подстановка во второе уравнение дает:

$$(1 - n^2 - 2\mu^2) A - \chi n^2 A^3 (1 + 2\mu^2) = 0,$$

откуда

$$A = \frac{1}{n\sqrt{\chi}} \sqrt{\frac{1 - n^2 - 2\mu^2}{1 + 2\mu^2}}. \quad (7.5)$$

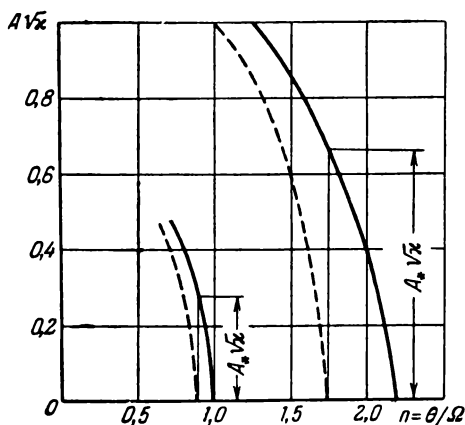
Дополнительное исследование, которое мы здесь не приводим, показывает, что из двух полученных решений устойчивым является только одно — первое; впрочем, это можно заключить из самого вида решений (фиг. 54).

Нулевое решение неустойчиво в интервале, ограниченном нулями решений (7.4) и (7.5), т. е. при

$$1 - 2\mu^2 \leq n^2 \leq 1,$$

что находится в соответствии с результатами линейной теории ¹⁾.

Резонансные кривые для второй области динамической неустойчивости по своему виду весьма напоминают кривые,



Фиг. 54.

полученные для главного резонанса. В частности, как и в случае главного резонанса, здесь возможно «затягивание» в сторону меньших частот (фиг. 54). Что касается величины установившихся амплитуд, то они оказываются значительно меньше, чем в случае главного резонанса. Так, для нижней границы области неустойчивости формула (7.4) дает:

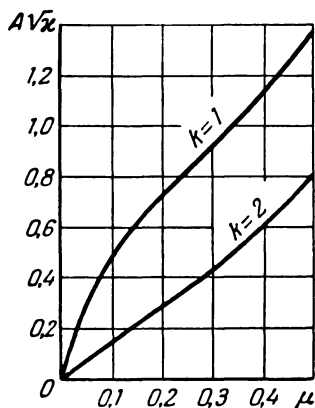
$$A_* = \mu \sqrt{\frac{2}{x(1-2\mu^2)}},$$

¹⁾ Первая из формул (1.36) получена с учетом большего числа членов ряда, чем сохранено в (7.1).

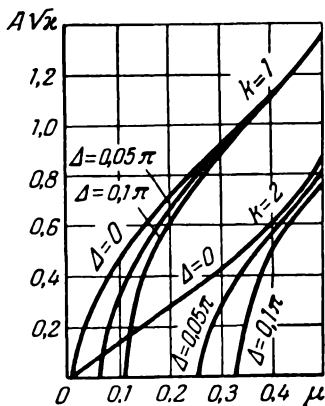
в то время как для главного резонанса мы получили соответственно:

$$A_* = \sqrt{\frac{2\mu}{\pi(1-\mu)}}.$$

Зависимость амплитуды колебаний от коэффициента возбуждения представлена на фиг. 55. Как видно из графика,



Фиг. 55.



Фиг. 56.

разница в амплитудах особенно велика при малых значениях μ .

3. Если учесть затухание, то разница в амплитудах окажется еще больше. Уравнение для определения установившихся амплитуд получим, если приравняем нулю определитель, составленный из коэффициентов уравнений (7.3):

$$\begin{vmatrix} 1-n^2-\chi n^2(A^2+2b_0^2) & 0 & -\frac{n\Delta}{\pi} \\ 0 & 1-\chi n^2 A^2 & -\mu \\ \frac{n\Delta}{\pi} & -2\mu & 1-n^2-\chi n^2(A^2+2b_0^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение содержит, кроме амплитуды A , еще и постоянную составляющую динамического прогиба b_0 . Как и в консервативном случае, $b^2/A^2 \ll 1$. Пренебрегая малыми

величинами, получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - n^2 - \chi n^2 A^2 & 0 & -\frac{\Delta}{\pi} \\ 0 & 1 & -\mu \\ \frac{\Delta}{\pi} & -2\mu & 1 - n^2 - \chi n^2 A^2 \end{vmatrix} = 0,$$

решение которого дает:

$$A = \frac{1}{n\sqrt{\chi}} \sqrt{1 - n^2 - \mu^2 \pm \sqrt{\mu^4 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}}. \quad (7.6)$$

Пока выражение под внутренним радикалом больше нуля, формула (7.6) дает для амплитуды вещественные значения. Предельное (критическое) значение коэффициента μ , при котором еще возможно возбуждение второго резонанса

$$\mu_* = \sqrt{\frac{\Delta}{\pi}},$$

совпадает со значением, полученным на основе линейной теории (§ 9).

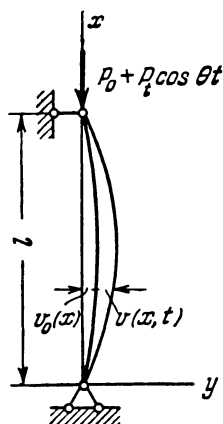
График зависимости амплитуд от коэффициента возбуждения и декремента затухания приведен на фиг. 56.

§ 27. Влияние начальной кривизны и эксцентриситета. Вынужденные колебания

1. До сих пор рассматривались однородные уравнения, составленные в предположении, что начальная кривизна стержня, эксцентриситет продольной силы и тому подобные факторы отсутствуют. Точнее, эти факторы считались достаточно малыми и играли роль «малых возмущений» в начальных условиях задачи. Ниже будет рассмотрен вопрос о влиянии этих факторов на величину установившихся амплитуд.

Задача о колебаниях слегка изогнутого стержня под действием периодической продольной силы уже затрагивалась в литературе. Однако полученные решения носят сугубо ориентировочный характер и пригодны лишь для частот, далеких от резонанса. Эти решения не учитывают самых специфических черт рассматриваемой задачи: переменного

характера собственных частот и нелинейности системы. Анализ, основанный на линейных дифференциальных уравнениях ¹⁾, тоже имеет ограниченную сферу применения: он годится только при малых коэффициентах возбуждения ($\mu < \mu_*$) и теряет какой-либо смысл с приближением ко второй области динамической неустойчивости.



Фиг. 57.

Рассмотрим задачу о колебаниях стержня, имеющего начальное искривление $v_0(x)$ (фиг. 57). Дифференциальное уравнение линейной задачи имеет вид

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + (P_0 + P_t \cos \theta t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - (P_0 + P_t \cos \theta t) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}$$

(динамический прогиб отсчитывается от искривленной оси стержня). Полагая

$$v(x, t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$v_0(x) = f_0 \sin \frac{\pi x}{l},$$

после подстановки и небольших преобразований приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$f'' + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) f = \frac{\omega^2 f_0}{P_*} (P_0 + P_t \cos \theta t).$$

Если добавить в это уравнение члены, учитывающие затухание и нелинейность системы, получим:

$$\begin{aligned} f'' + 2\epsilon f' + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) f + \psi(f, f', f'') = \\ = \frac{\omega^2 f_0}{P_*} (P_0 + P_t \cos \theta t). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Так учитывается влияние начальной кривизны. Чтобы учесть эксцентриситет, поступим следующим образом. Раз-

¹⁾ Mettler E., Forschungshefte aus Gebiet des Stahlbaues, N. 4 (1941).

ложим выражение для дополнительного изгибающего момента, возникающего из-за эксцентриситета

$$M = Pe,$$

в ряд:

$$M = \frac{4Pe}{\pi} \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Принимая во внимание, что при малых эксцентриситетах можно ограничиться первым членом этого ряда, найдем следующее выражение для «эквивалентной кривизны»:

$$f_0 = \frac{4e}{\pi}.$$

2. Возвратимся к уравнению (7.7). Задавшись целью исследовать колебания системы вблизи $\theta = \Omega$, попрежнему ищем решения в виде выражения (7.1). Подставив это выражение в уравнение (7.7), приходим к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов b_0 , a_2 и b_2 :

$$\left. \begin{aligned} b_0 - \mu b_2 - \chi n^2 b_0 A^2 &= \frac{f_0 P_0}{P_* - P_0}, \\ (1 - n^2) a_2 - \frac{n\Delta}{\pi} b_2 - \chi n^2 a_2 (A^2 + 2b_0^2) &= 2f_0 \mu, \\ (1 - n^2) b_2 - 2\mu b_0 + \frac{n\Delta}{\pi} a_2 - \chi n^2 b_2 (A^2 + 2b_0^2) &= 0. \end{aligned} \right\} (7.8)$$

Полученная система уравнений отличается от однородной системы (7.3) наличием свободных членов в правой части.

Будем различать в дальнейшем следующие три случая:

а) Система находится вне второй области динамической неустойчивости. В этом случае определитель системы уравнений, получаемой из (7.8) в результате отбрасывания нелинейных членов, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 - n^2 & 0 & -\frac{n\Delta}{\pi} \\ 0 & 1 & -\mu \\ \frac{n\Delta}{\pi} & -2\mu & 1 - n^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если к тому же нелинейность системы не очень велика, уравнения линейной задачи

$$\left. \begin{aligned} b_0 - \mu b_2 &= \frac{f_0 P_0}{P_* - P_0}, \\ (1 - n^2) a_2 - \frac{n\Delta}{\pi} b_2 &= 2f_0 \mu, \\ (1 - n^2) b_2 - 2\mu b_0 + \frac{n\Delta}{\pi} a_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

дают удовлетворительное решение задачи.

б) Система находится в пределах второй области динамической неустойчивости, причем $\mu > 2\mu_*$. Влияние линейного затухания в этом случае достаточно мало, так что величины установившихся амплитуд определяются в основном нелинейными членами. Приближенное решение можно получить, рассматривая уравнения

$$\left. \begin{aligned} (1 - n^2) a_2 - \chi n^2 a_2 (A^2 + 2b_0^2) &= 2f_0 \mu, \\ b_0 - \mu b_2 - \chi n^2 b_0 A^2 &= \frac{f_0 P_0}{P_* - P_0}, \\ (1 - n^2) b_2 - 2\mu b_0 - \chi n^2 b_2 (A^2 + 2b_0^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

в) Промежуточный случай требует одновременного учета затухания и нелинейных факторов.

3. Остановимся коротко на первом случае, когда вопрос об установившихся амплитудах может быть решен в линейном приближении. Решая совместно уравнения (7.9), получаем следующие формулы для определения коэффициентов выражения (7.1):

$$b_0 = \frac{f_0 P_0}{P_* - P_0} + \frac{1 - n^2}{(1 - n^2)(1 - n^2 - 2\mu^2) + \left(\frac{n\Delta}{\pi}\right)^2} \frac{2\mu^2 f_0}{1 - \frac{P_0}{P_*}},$$

$$b_2 = \frac{1 - n^2}{(1 - n^2)(1 - n^2 - 2\mu^2) + \left(\frac{n\Delta}{\pi}\right)^2} \frac{2\mu f_0}{1 - \frac{P_0}{P_*}},$$

$$a_2 = \frac{\frac{n\Delta}{\pi}}{(1 - n^2)(1 - n^2 - 2\mu^2) + \left(\frac{n\Delta}{\pi}\right)^2} \frac{2\mu f_0}{1 - \frac{P_0}{P_*}}.$$

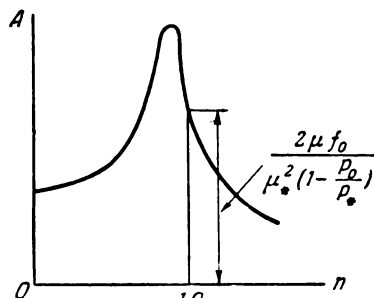
В некоторых случаях удобнее отсчитывать постоянную составляющую прогиба от начального прямолинейного положения $B_0 = f_0 + b_0$. Подстановка дает:

$$B_0 = \frac{f_0}{1 - \frac{P_0}{P_*}} \left[1 + \frac{2\mu^2(1-n^2)}{(1-n^2)(1-n^2-2\mu^2) + \left(\frac{n\Delta}{\pi}\right)^2} \right]. \quad (7.11)$$

Амплитуда колебаний, происходящих около нового нулевого положения, определяется по формуле

$$A = \frac{\sqrt{(1-n^2)^2 + \left(\frac{n\Delta}{\pi}\right)^2}}{(1-n^2)(1-n^2-2\mu^2) + \left(\frac{n\Delta}{\pi}\right)^2} \frac{2\mu f_0}{1 - \frac{P_0}{P_*}}. \quad (7.12)$$

График, характеризующий зависимость амплитуд от соотношения частот, дан на фиг. 58. Как следует из графика резонансные кривые по внешнему виду очень напоминают обычные резонансные кривые вынужденных колебаний. Это не означает, однако, что амплитуды колебаний можно определять из уравнения



Фиг. 58.

$$f'' + \Omega^2 f =$$

$$= \frac{\omega^2 f_0}{P_*} (P_0 + P_t \cos \theta t),$$

игнорируя периодические члены в левой части. Такой грубый прием всегда дает преуменьшенные значения амплитуд, причем ошибка быстро возрастает по мере приближения коэффициента возбуждения к его критическому значению. Подробнее этот вопрос рассмотрен в работе автора ¹⁾.

4. Рассмотрим теперь случай, требующий учета нелинейных факторов. Системе уравнений (7.10) можно удовлетворить, положив

$$b_0 = 0, \quad b_2 = 0, \quad a_2 = A \quad (\text{первое решение}),$$

$$a_2 = 0, \quad b_0 \neq 0, \quad b_2 = B \quad (\text{второе решение}).$$

¹⁾ См. сноску на стр. 147.

Первое решение соответствует параметрически возбуждаемым колебаниям и было получено нами выше (7.4). Для определения второго решения имеем систему уравнений:

$$b_0 - \mu B - \chi n^2 b_0 B^2 = \frac{f_0 P_0}{P_* - P_0},$$

$$(1 - n^2) B - 2\mu b_0 - \chi n^2 B (B^2 + 2b_0^2) = 2f_0 \mu.$$

Из первого уравнения получаем:

$$b_0 = \frac{f_0 P_0}{P_* - P_0} + \frac{\mu B}{1 - \chi n^2 B^2} \approx \frac{f_0 P_0}{P_* - P_0} + \mu B.$$

Подстановка во второе уравнение дает:

$$\left[1 - n^2 - 2\mu^2 - 2\chi n^2 \left(\frac{f_0 P_0}{P_* - P} \right)^2 \right] B - 4\chi n^2 \frac{f_0 \mu P_0}{P_* - P_0} B^2 -$$

$$- \chi n^2 (1 + 2\mu^2) B^3 = \frac{2f_0 \mu P_0}{P_* - P_0}.$$

Введя новое неизвестное

$$x = B + \frac{f_0 \mu P_0}{P_* - P_0} \frac{1}{1 + 2\mu^2},$$

преобразуем полученное уравнение к виду

$$x^3 + 3px + 2q = 0. \quad (7.13)$$

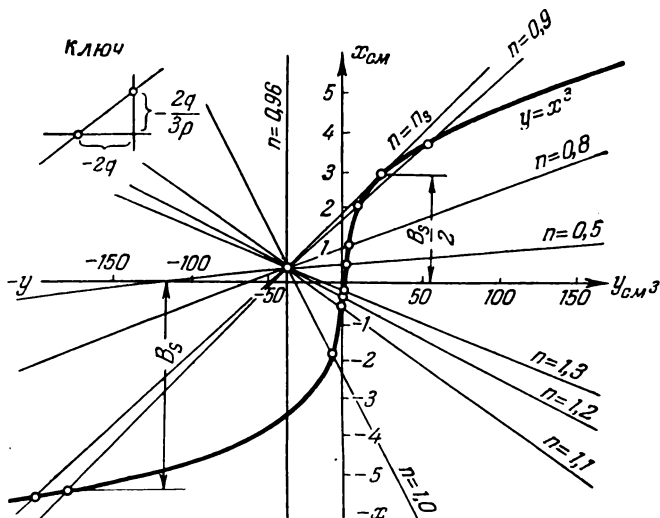
Коэффициенты уравнения (7.13) определяются по формулам, которые для случая, когда на стержень действует чисто периодическая нагрузка $P(t) = P_t \cos \theta t$, принимают особенно простой вид

$$3p = - \frac{1 - n^2 - 2\mu^2}{\chi n^2 (1 + 2\mu^2)},$$

$$2q = \frac{2f_0 \mu}{\chi n^2 (1 + 2\mu^2)}.$$

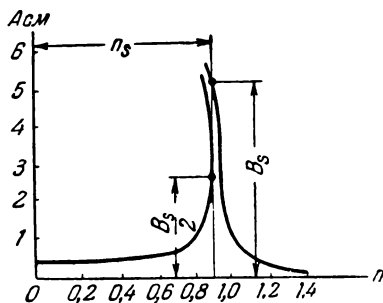
Для определения вещественных корней уравнения (7.13) воспользуемся графическим методом, описанным в § 18. Соответствующее построение приведено на фиг. 59. Пока возбуждающая частота меньше некоторого предельного значения, уравнение (7.13) имеет три вещественных корня, два из которых соответствуют устойчивому колебательному режиму (фиг. 60). Далее уравнение (7.13) имеет только один вещественный корень.

Резонансная кривая наклонена своей вершиной в сторону меньших частот. При постепенном увеличении частоты θ амплитуда вынужденных колебаний возрастает сначала по



Фиг. 59.

кривой MN (фиг. 61, а), пока в точке N не произойдет увеличение амплитуды на величину NN_1 . Фаза при этом меняется, очевидно, на противоположную. В дальнейшем амплитуда колебаний плавно уменьшается по кривой N_1Q . При обратном уменьшении частоты (фиг. 61, б) возможно затягивание установившихся амплитуд до некоторой точки R_1 , в которой происходит срыв колебаний на величину RR_1 .



Фиг. 60.

Амплитуду вынужденных колебаний, соответствующую точке N_1 , легко определить аналитически, воспользовавшись тем обстоятельством, что дискриминант

уравнения (7.13) для этого случая обращается в нуль

$$q^2 + p^3 = 0, \quad (7.14)$$

а корни его будут:

$$x_1 = -2\sqrt[3]{q}, \quad x_2 = x_3 = \sqrt[3]{q} = -\frac{x_1}{2}.$$

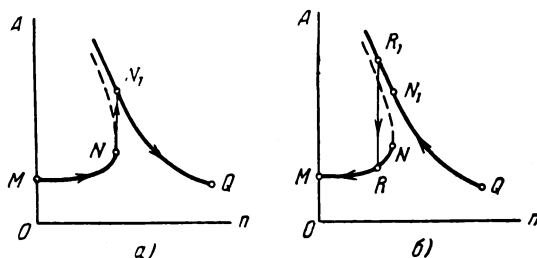
Для определения амплитуд в точке N_1 получаем формулу

$$B_s = 2\sqrt[3]{\frac{\mu f_0}{\kappa n_s^2 (1 + 2\mu^2)}}. \quad (7.15)$$

Если не принимать во внимание затягивание, эта формула дает максимальные значения для установившихся амплитуд. Частоту найдем из условия (7.14):

$$n_s = \sqrt{\frac{1 - 2\mu^2}{1 - \frac{3}{4}\kappa(1 + 2\mu^2)B_s^2}}.$$

Таким образом, частота, при которой происходит перескок амплитуд, всегда лежит несколько ниже границы параметри-



Фиг. 61.

ческого возбуждения. Формулу (7.15) можно упростить, положив в ней $n_s \approx 1$:

$$B_s \approx 2\sqrt[3]{\frac{\mu f_0}{\kappa(1 + 2\mu^2)}}.$$

За дальнейшими подробностями отсылаем читателя к работе автора ¹⁾.

¹⁾ Болотин В. В., Сборн. «Поперечные колебания и критические скорости», вып. 2, Изд. АН СССР, 1953.

§ 28. Третий и последующий резонансы

Мы не будем проводить здесь подробных вычислений, относящихся к побочным резонансам, и ограничимся лишь консервативным случаем.

Амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний при k -м резонансе приближенно определим из уравнений

$$\left(\omega^2 - \frac{1}{4} k^2 \theta^2\right) a_k + \Phi_k(a_k) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (7.16)$$

Эти уравнения получаются из уравнений (5.7) и (5.9), если отбросить в них члены, учитывающие затухание и взаимное влияние гармоник.

Рассмотрим случай нелинейной инерционности

$$\psi(f, f', f'') = 2xf[(f')^2 + ff''].$$

Подставляя приближенное решение для k -го резонанса

$$f(t) = a_k \sin \frac{k\theta t}{2}$$

в выражение для нелинейной функции, находим:

$$\psi(f, f', f'') = -\frac{k^2 \theta^2}{4} \chi a_k^3 \sin \frac{k\theta t}{2} + \dots,$$

т. е.

$$\Phi_k(a_k) = -\frac{1}{4} k^2 \theta^2 \chi a_k^3.$$

Уравнения (7.16) принимают вид

$$\left(1 - \frac{k^2 \theta^2}{4\omega^2}\right) a_k - \frac{k^2 \theta^2}{4\omega^2} \chi a_k^3 = 0,$$

откуда

$$a_k = \frac{2\omega}{k\theta \sqrt{\chi}} \sqrt{\frac{k^2 \theta^2}{4\omega^2} - 1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (7.17)$$

Эта формула носит, конечно, сугубо приближенный характер. Так, вместо двух решений, которые дает более подробный анализ, по этой формуле получается только одно решение. Тем не менее, формула (7.17) позволяет сделать некоторые общие выводы насчет сравнительной величины амплитуд при резонансах различной кратности.

Будем сравнивать прежде всего максимальные амплитуды, которые могут быть достигнуты в пределах соответствующих областей возбуждения. На основании оценок (1.38) ширины областей неустойчивости получаем:

$$\theta_* = \frac{2\omega}{k} + 0(u^k) \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

откуда

$$q_k \sim \frac{\mu^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{x}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (7.18)$$

Выведенные ранее формулы для первых двух областей неустойчивости (см., например, § 26) укладываются, очевидно, в эту зависимость.

Таким образом, наибольшие амплитуды быстро убывают с номером резонансной области. Например, даже при таком сравнительно большом коэффициенте возбуждения, как $\mu = 0,05$, амплитуды, достигаемые в пределах первой, второй, третьей и т. д. областей, примерно относятся, как $1 : 0,22 : 0,05 : 0,01$ и т. д. При наличии затухания эта разница станет еще более существенной.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВЫНУЖДЕННЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ КОЛЕБАНИЙ

§ 29. Предварительные замечания

1. Изложенная выше теория как в части определения областей динамической неустойчивости, так и в части определения амплитуд предполагает, что деформации носят упругий характер. В задачах статической устойчивости подобное допущение ограничивает область применения результатов случаям достаточно гибких стержней. Область применения теории динамической устойчивости значительно шире. Так, результаты линейной теории, которая рассматривает лишь весьма малые отклонения от начального движения, справедливы при условии, что начальное движение лежит в области упругих деформаций. Более того, благодаря «наклепу» материала формулами нелинейной теории можно пользоваться для определения установившихся амплитуд и в неупругой области (вопрос о новом положении равновесия остается открытым).

Это не означает, однако, что теория применима для стержней сколь угодно малой гибкости. С уменьшением гибкости все в большей мере проявляется влияние продольных колебаний. Между тем, принимая, как это делается во всех работах по динамической устойчивости, что продольная сила по длине стержня одинакова и равна приложенной на конце внешней силе, мы тем самым пренебрегаем продольными колебаниями. Пока возбуждающая частота мала по сравнению с частотой собственных продольных колебаний ω_L , такое допущение в известной степени оправдано. Для стержней малой гибкости частота, при которой наступает параметрический резонанс поперечных колебаний, может оказаться одного порядка с частотой собственных продольных

колебаний. Это особенно относится к случаю резонанса относительно высших собственных частот.

2. Составим дифференциальные уравнения, учитывающие взаимное влияние продольных и поперечных колебаний.

Пусть $u(x, t)$ — продольное перемещение сечений стержня вследствие деформаций сжатия (фиг. 2). Полное продольное перемещение с точностью до величин второго порядка

$$w = u + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 d\xi. \quad (8.1)$$

Продольная сила в любом сечении

$$N = P_0 + P_t \cos \theta t - \int_x^l m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\xi. \quad (8.2)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{N}{EF}, \quad (8.3)$$

получаем после использования (8.1) и (8.2) и почленного дифференцирования:

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m \int_0^x \left[\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial t^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial t} \right)^2 \right] d\xi. \quad (8.4)$$

Второе уравнение, связывающее $u(x, t)$ и $v(x, t)$, составим, рассматривая деформацию изгиба

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial v}{\partial x} \right) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Используя (8.3), получим:

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + EF \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (8.5)$$

Краевые условия для $u(x, t)$, очевидно, будут:

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ EF \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} &= P_0 + P_t \cos \theta t. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Краевые условия для $v(x, t)$ остаются прежними.

Решение системы уравнений (8.4) и (8.5) представляет серьезные трудности. Однако, если нас интересуют условия возникновения незатухающих поперечных колебаний, мы можем пренебречь нелинейными членами в правой части уравнения (8.4), которые по своему смыслу учитывают влияние «нелинейной инерционности». Тогда это уравнение будет содержать только $u(x, t)$ и может быть разрешено независимо от уравнения (8.5).

§ 30. Влияние продольных колебаний на области динамической неустойчивости

1. Уравнение

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (8.7)$$

при граничных условиях (8.6) решается особенно просто. Установившемся режиму соответствует решение

$$u(x, t) = \frac{P_0 x}{EF} + u_0(x) \cos \theta t.$$

Подставляя в (8.7), находим, что функция $u_0(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$EF \frac{d^2 u_0}{dx^2} + m \theta^2 u_0 = 0,$$

или

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} + \nu^2 u_0 = 0,$$

где

$$\nu = \theta \sqrt{\frac{m}{EF}}. \quad (8.8)$$

Интегрируя уравнение и подчиняя граничным условиям

$$u_0(0) = 0; \quad EF \frac{du_0(l)}{dx} = P_t,$$

получаем:

$$u_0(x) = \frac{P_t \sin \nu x}{\nu EF \cos \nu l}.$$

Итак,

$$u(x, t) = \frac{P_0 x}{EF} + \frac{P_t \cos \theta t \sin \nu x}{\nu EF \cos \nu l}. \quad (8.9)$$

При $\cos \nu l = 0$ второе слагаемое в формуле (8.9) обращается в бесконечность. Это соответствует резонансу продольных колебаний. Учитывая (8.8), находим, что резонанс возникает при

$$\theta = \frac{k\pi}{2l} \sqrt{\frac{EF}{m}} \quad (k = 1, 3, \dots).$$

В дальнейшем нас будет интересовать резонанс относительно низшей собственной частоты

$$\omega_L = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{EF}{m}}. \quad (8.10)$$

Найденное выражение для $u(x, t)$ подставим в (8.5). Полученное уравнение не интегрируется в конечном виде; полагая, как и ранее,

$$v(x, t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{l},$$

будем искать решение с помощью вариационного метода Галеркина. В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_*} - \psi \frac{P_t}{P_*} \cos \theta t \right) f = 0,$$

или

$$f'' + \Omega^2 (1 - 2\mu\psi \cos \theta t) f = 0. \quad (8.11)$$

В дополнение к принятым для всей книги обозначениям здесь

$$\psi = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\cos \nu x}{\cos \nu l} \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx.$$

Вычисление квадратуры дает:

$$\psi = \frac{\operatorname{tg} \nu l}{\nu l} \frac{1 - \frac{\nu^2 l^2}{2\pi^2}}{1 - \frac{\nu^2 l^2}{4\pi^2}}.$$

Кстати,

$$\nu l = \theta l \sqrt{\frac{m}{EF}} = \frac{\theta}{\omega_L} \cdot \frac{\pi}{2},$$

так что коэффициент ψ зависит только от соотношения между возбуждающей частотой и собственной частотой продольных колебаний.

2. Для определения границ областей неустойчивости могут быть использованы уравнения первых двух глав с заменой P_t на ψP_t и μ — на $\psi\mu$. Вычисления усложняются из-за того, что возбуждающая частота входит довольно сложным образом в выражение для ψ . Можно, впрочем, задаваться значениями частоты, решая уравнение относительно P_t .

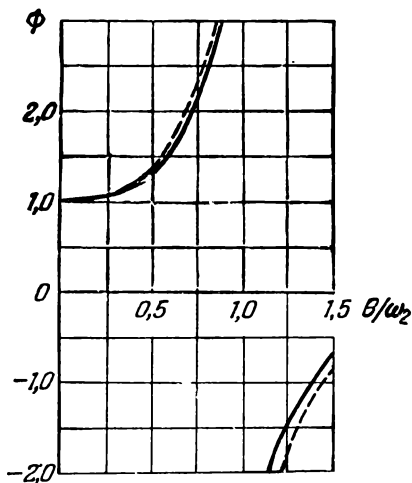
Результатам можно придать более обозримый вид, если воспользоваться следующим обстоятельством. На фиг. 62 изображен график зависимости коэффициента ψ от соотношения частот θ/ω_L .

Как видно из графика, эта зависимость может быть с достаточной точностью аппроксимирована более простым выражением (на фиг. 62 показано пунктиром)

$$\psi = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_L^2}}. \quad (8.12)$$

Это значит, что учет продольных колебаний приводит к следующей «эффективной» продольной силе:

$$N(t) = P_0 + \frac{P_t \cos \theta t}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_L^2}}.$$



Фиг. 62.

Границы главной области неустойчивости в первом приближении определим из условия

$$1 \pm \frac{\mu}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_L^2}} - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} = 0.$$

Введем обозначения

$$\frac{\theta}{2\Omega} = n; \quad \frac{4\Omega^2}{\omega_L^2} = \beta.$$

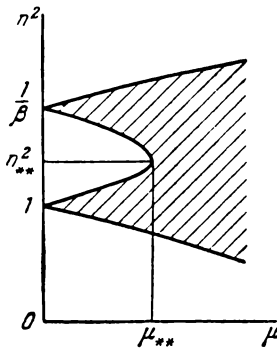
Тогда

$$1 \pm \frac{\mu}{1 - \beta n^2} - n^2 = 0.$$

Решая относительно n^2 , получаем формулу

$$n^2 = \frac{1 + \beta \pm \sqrt{(1 - \beta)^2 \mp 4\mu\beta}}{2\beta}. \quad (8.13)$$

Формула (8.13) дает, вообще говоря, две области неустойчивости. Одна из них, как и прежде, лежит вблизи $n^2 = 1$, т. е. $\theta = 2\Omega$, вторая — вблизи $n^2 = \frac{1}{\beta}$, т. е. $\theta = \omega_L$



Фиг. 63.

(фиг. 63). Возможность возбуждения поперечных колебаний вблизи $\theta = \omega_L$ — замечательный факт, который не мог быть обнаружен в рамках обычной теории.

При достаточно больших коэффициентах возбуждения области неустойчивости сливаются в одну. Это будет, очевидно, при

$$(1 - \beta^2)^2 - 4\beta\mu = 0.$$

Отсюда найдем μ_{**} и n_{**}^2 :

$$\mu_{**} = \frac{(1 - \beta)^2}{4\beta}, \quad n_{**}^2 = \frac{1 + \beta}{2\beta}. \quad (8.14)$$

Учитывая, что

$$\Omega^2 = \frac{\pi^4}{l^4} \frac{EJ}{m} \left(1 - \frac{P_0}{P_*}\right), \quad \omega_L^2 = \frac{\pi^2}{4l^2} \frac{EF}{m},$$

получим

$$\beta = \frac{4\Omega^2}{\omega_L^2} = \frac{16\pi^2}{\lambda^2} \left(1 - \frac{P_0}{P_*}\right),$$

где $\lambda = l/i$ — гибкость стержня ($i^2 = J/F$). График зависимости $\beta(\lambda)$ при $P_0 = 0$ представлен на фиг. 64. Даже при гибкости $\lambda = 40$ $\beta = 0,10$ и $\mu_{**} = 2,0$. Таким образом, слияние областей неустойчивости — явление исключительное даже для стержней малой гибкости. Поправка же к критической частоте может быть довольно велика. Раскладывая радикал в формуле (8.13) в бином, получим приближенную формулу для области, лежащей вблизи $n = 1$:

$$n_*^2 = 1 \pm \frac{\mu}{1 - \frac{1}{2}\beta}.$$

При гибкости $\lambda = 40$ и $\mu = 0,1$ ширина области с учетом продольных колебаний будет примерно на 3% больше, чем по обычным формулам; при $\lambda = 100$ влияние продольных колебаний не превышает 1%.

3. До сих пор затухание не учитывалось. Между тем, его учет необходим для объяснения того очевидного факта, что неустойчивость прямолинейной формы наступает лишь при достаточно больших коэффициентах μ . Мы покажем сейчас, что затухание оказывает особенно большое влияние на поведение системы вблизи $\theta = \omega_L$.

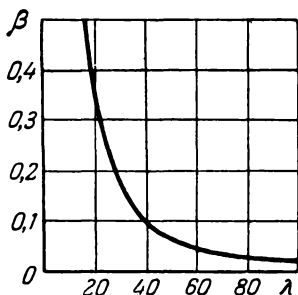
Прежде всего введем в уравнение (8.11) дополнительное слагаемое, учитывающее «поперечное» затухание:

$$f'' + 2\epsilon f' + \Omega^2 (1 - 2\psi_L \cos \theta t) f = 0.$$

Далее, изменим способ вычисления коэффициента ψ . При наличии «продольного» затухания формула (8.12) неприменима, поскольку она соответствует безграничному возрастанию $u_0(x, t)$ при $\theta \rightarrow \omega_L$. По аналогии с (8.12) запишем:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta n^2)^2 + \beta n^2 \left(\frac{\delta_L}{\pi}\right)^2}},$$

где δ_L — декремент затухания продольных колебаний. Эта величина представляет собой динамический коэффициент, вычисленный в отличие от (8.12) с учетом затухания.



Фиг. 64.

Для определения границ главных областей неустойчивости имеем приближенное уравнение (2.12)

$$\begin{vmatrix} 1 - n^2 + \psi\mu & -\frac{n\Delta}{\pi} \\ \frac{n\Delta}{\pi} & 1 - n^2 - \psi\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь Δ — декремент затухания поперечных колебаний, вычисленный с учетом силы P_0 :

$$\Delta = \frac{2\pi\epsilon}{\Omega}.$$

Воспользуемся этим уравнением для того, чтобы оценить наименьшее значение $\mu = \mu_*$, при котором уже возможна потеря динамической устойчивости. Легко находим:

$$\mu^2 = \left[(1 - n^2)^2 + \left(\frac{n\Delta}{\pi} \right)^2 \right] \left[(1 - \beta n^2)^2 + \beta n^2 \left(\frac{\delta_L}{\pi} \right)^2 \right].$$

Пусть $\beta \ll 1$, $\Delta \ll 1$, $\delta_L \ll 1$. Тогда при $n^2 = 1$, как и в обычной теории,

$$\mu_* \approx \frac{\Delta}{\pi}.$$

Для другого резонанса ($n^2 = 1/3$) имеем:

$$\mu_{*L} \approx \frac{\delta_L}{\pi\beta}.$$

Рассмотрим пример. Пусть $\lambda = 40$, т. е. $\beta \approx 0,10$; $\delta_L = \Delta = 0,03$. Для возникновения поперечных колебаний вблизи $\theta = 2\Omega$ необходимо, чтобы $\mu \geq 0,01$; чтобы колебания возникли в окрестности $\theta = \omega_L$, требуется, по крайней мере, $\mu \approx 0,10$. Последнее значение соответствует весьма большим амплитудам продольной силы (при $P_0 = 0$ должно быть $P_t \approx 0,2P_*$). Отсюда видно, что неустойчивость прямолинейной формы вблизи резонанса продольных колебаний может быть обнаружена лишь при достаточно больших амплитудах нагрузки. Этим и объясняется кажущаяся парадоксальность результатов предыдущего пункта.

§ 31. Определение установившихся амплитуд с учетом продольных колебаний

1. Поскольку дальнейшие выкладки будут иметь лишь оценочный характер, упростим несколько расчетную схему. Рассмотрим случай, когда масса, сосредоточенная на конце, достаточно велика по сравнению с массой стержня, чтобы последней можно было пренебречь при составлении уравнений продольных колебаний.

Перемещение подвижного конца по формуле (8.1) будет:

$$w = u + \frac{\pi^2 f^2}{4l}. \quad (8.15)$$

Уравнения продольных и поперечных колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} M_L w'' &= P_0 + P_t \cos \theta t - N, \\ f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{N}{P_*}\right) f &= 0, \end{aligned}$$

где $N = \frac{EF}{l} u$ — продольная сила, возникающая в стержне.

С учетом (8.15) получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u'' + \omega_L^2 u + \frac{\pi^2}{2l} [(f')^2 + ff''] &= \frac{1}{M_L} (P_0 + P_t \cos \theta t), \\ f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_L^2 M_L}{P_*} u\right) f &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Здесь ω_L — собственная частота продольных колебаний

$$\omega_L = \sqrt{\frac{EF}{lM_L}}.$$

Приближенное решение системы (8.16) будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= U_0 + U_t \cos \theta t, \\ f(t) &= a \sin \frac{\theta t}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

где U_0 , U_t и a — постоянные, подлежащие определению. Подставляя (8.17) в уравнения (8.16) и приравнявая

постоянные слагаемые и коэффициенты при $\cos \theta t$, получим:

$$\omega_L^2 U_0 = \frac{P_0}{M_L},$$

$$(\omega_L^2 - \theta^2) U_t + \frac{\pi^2 \theta^2}{8l} a^2 = \frac{P_t}{M_L}.$$

Третье уравнение, связывающее U_0 , U_t и a , получим, подставив (8.17) во второе уравнение (8.16) и приравняв коэффициенты при $\sin \frac{\theta t}{2}$:

$$\left(\omega^2 - \frac{\theta^2}{4}\right)a - \frac{\omega^2 \omega_L^2 M_L}{P_*} U_0 a + \frac{\omega^2 \omega_L^2 M_L}{2P_*} U_t a = 0$$

(члены, содержащие гармоники, отброшены). Исключая U_0 и U_t , приходим к уравнению

$$\omega^2 - \frac{\theta^2}{4} - \frac{\omega^2 P_0}{P_*} + \frac{\omega^2 P_t}{2P_* \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_L^2}\right)} - \frac{\pi^2 \theta^2 \omega^2 M_L a^2}{16P_* l \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_L^2}\right)} = 0,$$

или в обозначениях предыдущего параграфа

$$1 - n^2 + \frac{\mu}{1 - \beta n^2} - \frac{\chi n^2 a^2}{1 - \beta n^2} = 0.$$

Кроме того, здесь обозначено:

$$\chi = \frac{\pi^4 M_L}{4ml^3}.$$

Отсюда находим амплитуду установившихся колебаний:

$$a^2 = \frac{(1 - \beta n^2)(1 - n^2) + \mu}{\chi n^2}. \quad (8.18)$$

Другое приближенное решение системы (8.16) получим, положив

$$u(t) = U_0 + U_t \cos \theta t,$$

$$f(t) = a \cos \frac{\theta t}{2}.$$

Повторив предыдущие выкладки, найдем:

$$a^2 = \frac{(1 - \beta n^2)(1 - n^2) - \mu}{\chi n^2}.$$

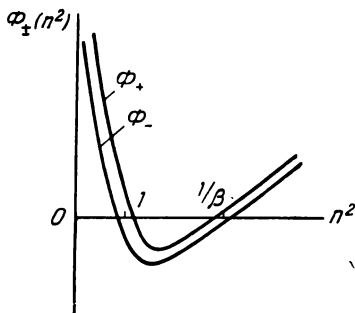
2. Обе формулы могут быть объединены:

$$a = \sqrt{\frac{\Phi_{\pm}(n^2, \mu)}{x}}$$

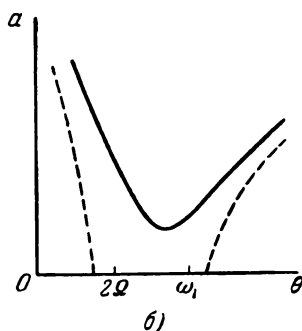
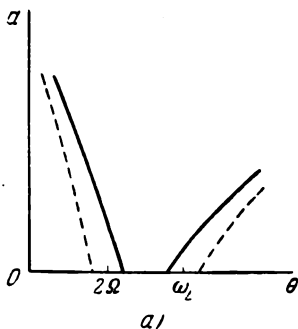
где

$$\Phi_{\pm}(n^2, \mu) = \frac{(1 - \beta n^2)(1 - n^2) \pm \mu}{n^2}$$

График этих функций представлен на фиг. 65, а на фиг. 66 изображен общий вид резонансных кривых. Неустойчивые ветви показаны пунктиром. Левый резонанс — это обычные параметрически возбуждаемые колебания ($\theta = 2\Omega$). Правая кривая соответствует резонансу $\theta = \omega_L$; здесь «затягивание» колебаний происходит в сторону больших частот. Если $\mu \geq \mu_{**}$ (см. предыдущий параграф), то оба резонанса сливаются, и график принимает вид, показанный на фиг. 66, б. «Затягивание» из резонансной области может происходить здесь в обе стороны.



Фиг. 65.



Фиг. 66.

Дадим теперь количественную оценку для поправки, которую дает учет продольных колебаний. Рассмотрим формулу (8.18). Полагая в ней $\beta = 0$, получим известную ранее

формулу

$$a^2 = \frac{1 - n^2 + \mu}{n^2}.$$

Вблизи $n = 1$ (главный параметрический резонанс) будем иметь следующие соотношения. Если $n > 1$, то продольные колебания увеличивают амплитуду колебаний; если $n < 1$, то с учетом продольных колебаний амплитуда, напротив, уменьшается. На нижней границе области неустойчивости амплитуда

$$a^2 = \frac{2\mu}{\alpha(1-\mu)} - \frac{\mu\beta}{\alpha}.$$

Например, при $\beta = 0,10$ ($\lambda = 40$) и $\mu = 0,10$ влияние продольных колебаний составляет около $3^0/0$.

3. Рассмотрим более сложный случай, когда имеется дополнительная упругая связь с коэффициентом c (фиг. 16).

Уравнениями этой задачи будут:

$$M_L \omega'' = P_0 + P_t \cos \theta t - N - c\omega,$$

$$f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{EF}{lP_*} u \right) f = 0.$$

Преобразуя с учетом (8.15), получаем из первого уравнения:

$$\begin{aligned} u'' + \omega_L^2 u + \frac{\pi^2}{2l} [(f')^2 + ff''] + \frac{\pi^2 c f^2}{4lM_L} = \\ = \frac{1}{M_L} (P_0 + P_t \cos \theta t), \end{aligned} \quad (8.19)$$

где

$$\omega_L^2 = \frac{\frac{EF}{l} + c}{M_L}. \quad (8.20)$$

Из формулы (8.20) следует:

$$\frac{EF}{l} = \frac{\omega_L^2 M_L}{1 + \xi} \quad \left(\xi = \frac{cl}{EF} \right).$$

С другой стороны, $P_*(1 + \xi) = P_{**}$ (P_{**} — критическая сила, вычисленная с учетом продольной связи). Второе уравнение

принимает вид

$$f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_L^2 M_L}{P_{**}} u \right) f = 0. \quad (8.21)$$

Решение для случая установившихся колебаний попрежнему ищем в форме (8.17). Подстановка в (8.19) дает:

$$\begin{aligned} \omega_L^2 U_0 + \frac{\pi^2 c a^2}{8l M_L} &= \frac{P_0}{M_L}, \\ (\omega_L^2 - \theta^2) U_t + \frac{\pi^2 \theta^2}{8l} a^2 - \frac{\pi^2 c a^2}{8l M_L} &= \frac{P_t}{M_L}. \end{aligned}$$

Из уравнения (8.21) получаем:

$$\left(\omega^2 - \frac{\theta^2}{4} \right) a - \frac{\omega^2 \omega_L^2 M_L}{P_{**}} U_0 a + \frac{\omega^2 \omega_L^2 M_L}{2P_{**}} U_t a = 0.$$

Исключая из этих уравнений U_0 и U_t , находим:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\theta^2}{4\omega^2} - \frac{P_0}{P_{**}} + \frac{P_t}{2P_{**} \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_L^2} \right)} + \\ + \frac{\pi^2 c a^2}{8P_{**} l} \left[1 + \frac{1}{2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_L^2} \right)} \right] - \frac{\pi^2 \theta^2 M_L a^2}{16P_{**} l \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_L^2} \right)} = 0. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 \omega^2 c}{4P_{**} l} &= \frac{\pi^4 c}{4ml^3 (1 + \xi)} = \gamma, \\ \frac{\pi^2 \omega^2 M_L}{4P_{**} l} &= \frac{\pi^4 M_L}{4ml^3 (1 + \xi)} = \kappa, \\ \omega^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_{**}} \right) &= \Omega^2, \quad \frac{P_t}{2(P_{**} - P_0)} = \mu. \end{aligned}$$

Уравнение (8.22) запишется в виде

$$1 - n^2 + \frac{\mu}{1 - \beta n^2} + \frac{\gamma a^2}{4\Omega^2} \frac{3 - 2\beta n^2}{1 - \beta n^2} - \frac{\kappa n^2 a^2}{1 - \beta n^2} = 0.$$

Отсюда

$$a^2 = \frac{(1 - \beta n^2)(1 - n^2) + \mu}{\kappa n^2 - \frac{\gamma}{4\Omega^2} (3 - 2\beta n^2)}. \quad (8.23)$$

Решение для случая $f = a \cos \theta t/2$ отличается от (8.23) только знаком перед μ .

Как и ранее, введем две функции:

$$\Phi_{\pm}(n^2, \mu) = \frac{(1 - \beta n^2)(1 - n^2) \pm \mu}{n^2 - \frac{\gamma}{4\kappa\Omega^2}(3 - 2\beta n^2)}. \quad (8.24)$$

Нули этих функций совпадают, очевидно, с границами областей динамической неустойчивости (8.13). В порядке возрастания обозначим их через n_1^2 , n_2^2 , n_3^2 , n_4^2 . Полюс — корень уравнения

$$n^2 - \frac{\gamma}{4\kappa\Omega^2}(3 - 2\beta n^2) = 0$$

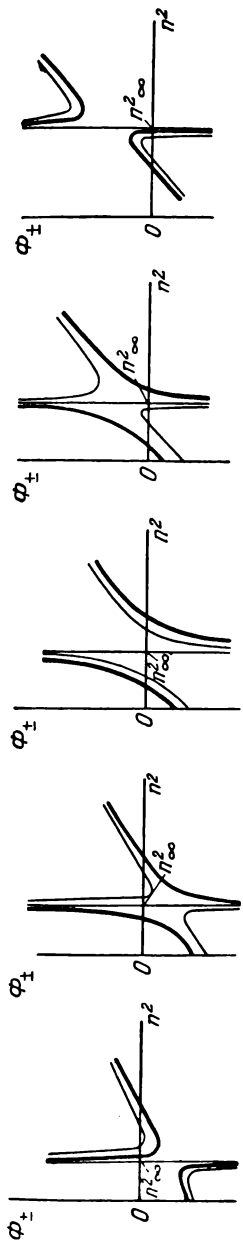
будет

$$n_{\infty}^2 = \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\kappa\Omega^2} \frac{1}{1 + \frac{\gamma\beta}{2\kappa\Omega^2}},$$

или при $\beta \rightarrow 0$ $n_{\infty}^2 = 3\gamma/4\kappa\Omega^2$. Как и ранее (§ 21), это соответствует дополнительному «резонансу» при частоте

$$\theta_{\infty} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{c}{M_L}}.$$

В зависимости от расположения полюса n_{∞}^2 относительно нулей функции (8.24), другими словами, в зависимости от расположения дополнительного резонанса относительно областей неустойчивости, будем различать пять случаев. Эти случаи изображены на фиг. 67, где функция Φ_+ показана жирной линией, функция Φ_- — тонкой. Примерный вид резонансных кривых для тех же пяти случаев представлен на фиг. 68. Вследствие нелинейности затухания амплитуды при n_{∞} будут ограничены. Неустойчивые ветви показаны пунктиром. Рассмотрим структуру левого резонанса ($\theta \approx 2\Omega$). Первый случай ($n_{\infty} < n_1$) соответствует тому, что ранее называлось случаем преобладающей нелинейной инерционности. Во втором случае ($n_1 < n_{\infty} < n_2$) нелинейная упругость и инерционность как бы компенсируют друг друга: резонансная кривая имеет характер, типичный для нелинейного затухания. В остальных случаях ($n_{\infty} > n_2$) доминирует нелинейная упругость. Впрочем, два последних случая мало реальны, так как соотношение $n_{\infty} > n_3$ может



1) $\pi_{\infty} < \pi_1$

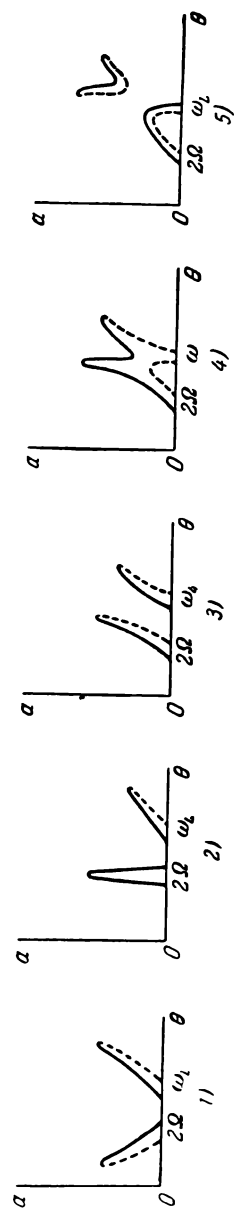
2) $\pi_1 < \pi_{\infty} < \pi_2$

3) $\pi_2 < \pi_{\infty} < \pi_3$

4) $\pi_3 < \pi_{\infty} < \pi_4$

5) $\pi_{\infty} > \pi_4$

Фиг. 67.



1)

2)

3)

4)

5)

Фиг. 68.

быть получено только при весьма жесткой продольной связи. Кроме того, следует иметь в виду, что на фиг. 67—68 масштаб по горизонтальной оси искажен: в действительности обычно $\omega_L \gg 2\Omega$.

4. Подведем итоги. Влияние продольных колебаний на главный параметрический резонанс ($\theta \approx 2\Omega$) ничтожно мало для стержней средней и большой гибкости. Влияние это становится ощутимым лишь для стержней малой гибкости, причем при $\lambda = 40$ и $\mu = 0,1$ ошибка в критических частотах и амплитудах не превышает 3%. На побочные резонансы, еще более удаленные от резонанса продольных колебаний, влияние последних будет совсем ничтожно.

Не во всех задачах, однако, соотношение между частотами ω_L и 2Ω имеет такой же порядок, как в задаче о параметрическом резонансе сжатого стержня. Даже в рассмотренной задаче, если исследовать параметрический резонанс относительно *высших* форм поперечных колебаний, частоты ω_L и 2Ω сближаются. Пример задачи, где взаимодействие параметрических и вынужденных колебаний весьма существенно, будет приведен в §§ 80—81.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

РАСШИРЕНИЕ ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ

§ 32. Распространение результатов на другие задачи динамической устойчивости

1. Первая часть настоящей книги была посвящена задаче о параметрических колебаниях сжатого стержня, шарнирно опертого по концам. Этот случай был подробно изучен как в линейной, так и нелинейной постановке.

Другие задачи, требующие привлечения более сложного математического аппарата, будут рассмотрены в последующих частях книги. Но имеются задачи, к которым изложенная выше теория применима без каких-либо существенных изменений; остановимся вкратце на этих задачах, ограничившись для простоты линейной трактовкой.

Допустим, что призматический стержень, шарнирно опертый по обоим концам, лежит на сплошном упругом



Фиг. 69.

основании, реакция которого в каждой точке пропорциональна прогибу (основание Винклера). Уравнение поперечных колебаний такого стержня под действием периодической продольной силы (фиг. 69) получается из (1.2) добавлением в правую часть реакции основания — βw (β — коэффициент

отпора). Следовательно, уравнение будет¹⁾

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + (P_0 + P_t \cos \theta t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (9.1)$$

Легко заметить, что выражение (1.3)

$$v(x, t) = f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где $f_k(t)$ — искомые функции времени, этому уравнению удовлетворяет. Подстановка приводит к уравнениям типа (1.4)

$$f_k'' + \omega_k^2 \left(1 - \frac{P_0 + P_t \cos \theta t}{P_k} \right) f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (9.2)$$

с тем лишь отличием, что

$$\omega_k^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{k^4 \pi^4 EJ}{l^4} + \beta \right),$$

$$P_k = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{l^2} + \frac{\beta l^2}{k^2 \pi^2}.$$

Аналогичные уравнения получим, рассматривая случай бесконечно длинной балки. В этом случае уравнение (9.1) будет удовлетворено, если положить:

$$v(x, t) = f(t, \lambda) \sin \frac{\pi x}{\lambda},$$

где длина полуволны λ может принимать любые значения от нуля до бесконечности. Подставляя, вновь приходим к уравнениям (9.2), в которых роль значка k выполняет уже величина λ ; от нее коэффициенты уравнений зависят, как от параметра:

$$\omega^3(\lambda) = \frac{1}{m} \left(\frac{\pi^4 EJ}{\lambda^4} + \beta \right),$$

$$P_*(\lambda) = \frac{\pi^2 EJ}{\lambda^2} + \frac{\beta \lambda^2}{\pi^2}.$$

¹⁾ Такой подход к колебаниям балок на упругом основании является распространенным. Отметим, однако, что учитывать упругий отпор основания, пренебрегая его инерционным воздействием, довольно нелогично. Вводя более совершенную модель (упругое и материальное полупространство или слой конечной глубины), найдем, что «приведенная масса» основания является существенной функцией формы колебаний.

Как и следовало ожидать для такой задачи, собственные частоты и критические силы составляют сплошной спектр, изменяясь от минимальных значений

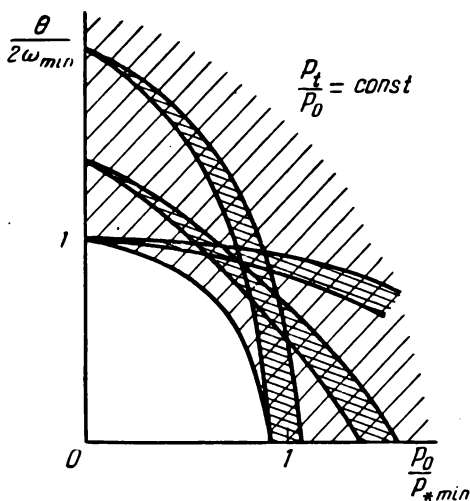
$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{\beta}{m}}, \quad P_{* \min} = 2 \sqrt{EJ\beta} \quad (9.3)$$

до бесконечности.

При заданной длине полуволны границы главных областей динамической неустойчивости могут быть определены по формулам первой главы. Так, согласно формуле (1.34) при гармонической нагрузке

$$\theta_*^2(\lambda) = \frac{4}{m} \left[\frac{\pi^4 EJ}{\lambda^4} + \beta - \frac{\pi^2 \left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t \right)}{\lambda^2} \right].$$

Очевидно, что области неустойчивости, соответствующие различным значениям λ , заполняют сплошь часть плоскости



Фиг. 70.

изменения параметров (фиг. 70). Уравнение огибающей будет

$$\theta_*^2 = \frac{4}{m} \left[\beta - \frac{\left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t \right)^2}{4EJ} \right];$$

или с учетом (9.3):

$$\theta_* = 2\omega_{\min} \sqrt{1 - \frac{\left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t\right)^2}{\rho_{*\min}^2}}$$

2. Укажем на некоторые другие задачи, которые также приводят к уравнениям типа (9.2). Такова задача о динамической устойчивости кругового кольца, сжатого равномерно распределенной радиальной нагрузкой (фиг. 1, б), задача об устойчивости прямоугольной пластинки, опертой по всему контуру и нагруженной периодическими силами, равномерно распределенными вдоль каждой из сторон (фиг. 1, в), и некоторые другие¹⁾. Например, в первом случае получаем уравнение

$$f_k'' + \omega_k^2 \left(1 - \frac{q_0 + q_t \cos \theta t}{q_k}\right) f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3 \dots),$$

где ω_k — частоты собственных изгибных колебаний кольца, q_k — критические значения для соответствующей статической задачи.

Было бы, однако, ошибочным думать, что любая задача динамической устойчивости непременно приводит к уравнению Матье-Хилла. Скорее рассмотренные выше случаи являются исключениями (так называемый *особый случай*). Достаточно взять какой-либо другой тип опирания стержня, или стержень переменного сечения, или, наконец, случай переменной по длине продольной силы, чтобы сведение задачи к уравнению типа (9.2) стало невозможным²⁾. В общем случае задачи динамической устойчивости требуют рассмотрения систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Нетрудно подметить то общее, что объединяет указанные выше простейшие задачи. Во всех перечисленных случаях формы собственных колебаний системы и соответствующие формы потери статической устойчивости совпадают. Благодаря этому в уравнениях с частными производными

¹⁾ Подробный разбор этих случаев будет дан в третьей части (§§ 76, 96 и др.).

²⁾ Примером ошибочного подхода к этому вопросу может служить статья Klotter K., Ing. Arch. 18, № 6 (1950).

удается добиться полного разделения переменных x и t при помощи подстановки типа

$$v(x, t) = f(t)\varphi(x), \quad (9.4)$$

где $f(t)$ — функция только t , $\varphi(x)$ — функция только x . В общем же случае такое разделение невозможно¹⁾.

3. Если формы собственных колебаний системы и формы потери статической устойчивости достаточно близки друг к другу, что естественно ожидать во многих задачах, особенно для первых (основных) форм, то можно попробовать искать приближенное решение в виде (9.4). Для этой цели больше всего подходит вариационный метод Галеркина.

Рассмотрим, например, стержень переменного сечения, сжатый переменной по длине продольной силой $N(x, t)$. Уравнение этой задачи имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (9.5)$$

Пусть, далее, $N(x, t) = \bar{N}(x)(P_0 + P_t \cos \theta t)$, где P_0 и P_t — параметры, с точностью до которых задана внешняя нагрузка (другими словами, предполагается, что постоянная и периодическая составляющие меняются пропорционально этим двум параметрам). Подставляя (9.4) в (9.5) и применяя метод Галеркина, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \int_0^l m \varphi^3 dx + f(t) \int_0^l \varphi \frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) dx + \\ + f(t) (P_0 + P_t \cos \theta t) \int_0^l \varphi \frac{d}{dx} \left[\bar{N}(x) \frac{d\varphi}{dx} \right] dx = 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Это было отмечено впервые Б. З. Брачковским, Прикл. матем. и мех. 6, вып. 1 (1942). См. также статью автора в сборн. «Поперечные колебания и критические скорости», вып. 2, Изд. АН СССР, 1953 и статью Г. Ю. Джанелидзе в Трудах Ленингр. ин-та инженеров водного транспорта, вып. 20, 1953. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в двенадцатой главе книги.

Введем обозначения

$$\frac{\int_0^l \varphi \frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) dx}{\int_0^l m \varphi^2 dx} = \tilde{\omega}^2,$$

$$\frac{\int_0^l \varphi \frac{d^3}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) dx}{\int_0^l \varphi \frac{d}{dx} \left[\bar{N}(x) \frac{d\varphi}{dx} \right] dx} = \tilde{P}_*.$$

Тогда уравнение записывается в виде

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \tilde{\omega}^2 \left(1 - \frac{P_0 + P_t \cos \theta t}{\tilde{P}_*} \right) f = 0. \quad (9.6)$$

Легко видеть, что уравнение (9.6) практически совпадает с (9.2). В отличие от последнего здесь $\tilde{\omega}$ и \tilde{P}_* — приближенные (в смысле метода Галеркина) значения собственной частоты и критической силы. Если, однако, в качестве функции $\varphi(x)$ в выражении (9.4) взять форму собственных колебаний, то $\tilde{\omega}$ совпадет с точным значением; если же за $\varphi(x)$ принять форму потери устойчивости, то \tilde{P}_* будет в точности равно критическому значению P_*^1). Если обе формы совпадают, то приближенное уравнение (9.6) становится точным, что соответствует *особому случаю*.

Для задачи о динамической устойчивости сжатого стержня приближенное уравнение (9.6) было получено впервые Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым²⁾. Приближенное решение большого числа частных задач было дано

¹⁾ При решении конкретных задач следует иметь в виду, что результаты, получаемые по методу Галеркина, могут быть весьма чувствительны по отношению к выбору аппроксимирующей функции и, в частности, к тому, удовлетворяет ли она всем (в том числе и динамическим) граничным условиям. В противном случае в метод должны быть внесены соответствующие коррективы (ср. § 48).

²⁾ Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н., сборн. «Исследование колебаний конструкций», ДНТВУ, 1935.

В. А. Боднером¹⁾, В. Н. Челомеем²⁾ и др. Недавно Г. Ю. Джанелидзе³⁾ вновь вернулся к этому вопросу, рассмотрев его в более общей постановке.

§ 33. Колебания систем с периодически меняющейся жесткостью. Валы, сечения которых имеют неодинаковые главные моменты инерции

1. Теория динамической устойчивости может быть расширена еще в одном направлении. Существуют упругие системы, исследование колебаний которых также приводит к дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами. Это всякого рода системы с периодически меняющейся жесткостью или периодически меняющейся массой.

Собственно, и прямолинейный стержень, нагруженный периодической продольной силой — простейший объект теории динамической устойчивости, — представляет собой систему такого рода. Квадрат «мгновенного» значения собственной частоты нагруженного стержня

$$\Omega^2(t) = \omega^2 \left[1 - \frac{P(t)}{P_*} \right] \quad (9.7)$$

может быть истолкован как некоторый квазиупругий коэффициент, периодически меняющийся во времени, деленный на постоянную массу m . Тогда линеаризованное уравнение динамической устойчивости принимает вид

$$f'' + \frac{c(t)}{m} f = 0, \quad (9.8)$$

т. е. мы приходим к уравнению колебаний системы с переменной жесткостью.

Такое истолкование тем более естественно, что формула (9.7) по существу отражает снижение жесткости стержня при изгибе под влиянием сжимающей силы. Ниже мы оста-

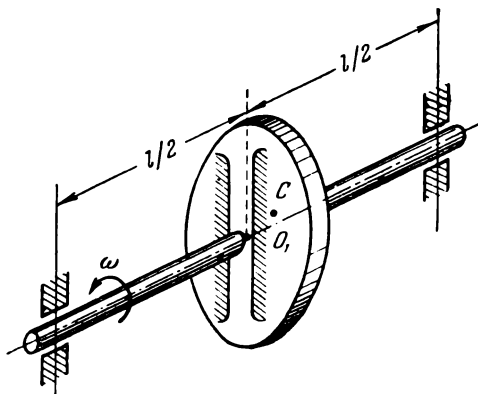
¹⁾ Боднер В. А., Прикл. матем. и мех. 2 (нов. серия), вып. 1 (1938).

²⁾ Челомей В. Н., Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций. Изд. Аэрофлот, 1939. Следует иметь в виду, что вопросы о влиянии затухания и о четных областях неустойчивости в этой работе трактуются ошибочно (ср. § 5 и § 7 настоящей книги).

³⁾ Цит. на стр. 181.

новимся на некоторых других системах, жесткость которых периодически меняется. В отличие от задач, которым посвящена в основном эта книга (упругие системы, нагруженные периодической параметрической нагрузкой), переменная жесткость в ближайших примерах обусловлена конструктивными особенностями систем и главным образом наличием вращающихся частей.

2. Простейшим примером системы с периодически меняющейся жесткостью является прямолинейный вращающийся



Фиг. 71.

вал, сечение которого имеет неодинаковые главные моменты инерции. Известно, что в определенном интервале угловых скоростей такие валы бывают подвержены сильным колебаниям¹⁾. Рассмотрим эту задачу в предположении, что на вал насажен один диск массой M (распределенной массой вала пренебрегаем) и что опорные устройства таковы, что диск может совершать колебания лишь в одной (например, вертикальной) плоскости.

Схема вала изображена на фиг. 71, где O_1 — след оси вала на плоскости диска, C — центр тяжести диска, e_1 и e_2 — его координаты в направлении главных осей. Пусть f — вертикальное перемещение точки O_1 , M — масса диска,

¹⁾ См., например, Тимошенко С. П., Теория колебаний в инженерном деле. ГТТИ, 1934.

c — коэффициент жесткости вала, ω — угловая скорость вращения. Пренебрегая деформацией кручения, запишем уравнение движения диска:

$$Mf'' = -cf + M\omega^2(e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) - Mg. \quad (9.9)$$

Вычислим жесткость вала c . Если J_1 и J_2 — главные моменты инерции сечения ($J_1 > J_2$), то момент инерции относительно горизонтальной оси

$$J_x = \frac{1}{2}(J_1 + J_2) + \frac{1}{2}(J_1 - J_2) \cos 2\omega t.$$

Отсюда

$$c = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2} \cos 2\omega t, \quad (9.10)$$

где c_1 и c_2 — жесткости вала при изгибе в направлении осей 1 и 2 соответственно ($c_1 < c_2$). Например, для шарнирно опертого вала с диском посредине

$$c_1 = \frac{48EJ_2}{l^3}, \quad c_2 = \frac{48EJ_1}{l^3}.$$

Подставляя (9.10) в (9.9), получаем:

$$f'' + \omega_0^2(1 + 2\mu \cos 2\omega t)f = \omega^2(e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) - g, \quad (9.11)$$

где обозначено:

$$\omega_0^2 = \frac{c_1 + c_2}{2M},$$

$$\mu = \frac{c_2 - c_1}{2(c_1 + c_2)} = \frac{J_1 - J_2}{2(J_1 + J_2)}.$$

Однородное уравнение, соответствующее (9.11), с учетом затухания принимает вид

$$f'' + 2\zeta f' + \omega_0^2(1 + 2\mu \cos 2\omega t)f = 0.$$

Это уравнение отличается от (2.1) лишь некоторыми обозначениями и смещением начала отсчета времени на $\frac{\pi}{2\omega_0}$.

Отсюда вытекают результаты: наличие сплошных областей неустойчивости, которые располагаются вблизи угловых скоростей

$$\omega = \frac{\omega_0}{k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

невозможность возбуждения колебаний при значениях коэффициента ν , меньших, чем

$$\nu_* = \sqrt[k]{\frac{\delta}{\pi}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

и др. ¹⁾.

3. Составим уравнение нелинейной задачи, для чего учтем, во-первых, точное выражение кривизны и, во-вторых, дополнительную продольную силу, возникающую при отклонении оси вала от прямой. При этом вал приходится рассматривать как континуальную систему, т. е. исходить из уравнения

$$\frac{\partial^3}{\partial s^3} \left(\frac{EJ_x}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(N \frac{\partial v}{\partial s} \right) + m(s) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (9.12)$$

Здесь $v(s, t)$ — прогиб вала в каждой точке, s — дуга, отсчитываемая вдоль оси вала, $1/\rho$ — кривизна оси, т. е.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2}},$$

$m(s)$ — масса, отнесенная к единице длины. В случае одного сосредоточенного диска массой M

$$m(s) = 0, \quad \text{если} \quad 0 \leq s \leq \frac{l}{2} - \eta;$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\frac{l}{2} - \eta}^{\frac{l}{2} + \eta} m(s) ds = M,$$

$$m(s) = 0, \quad \text{если} \quad \frac{l}{2} + \eta \leq s \leq l.$$

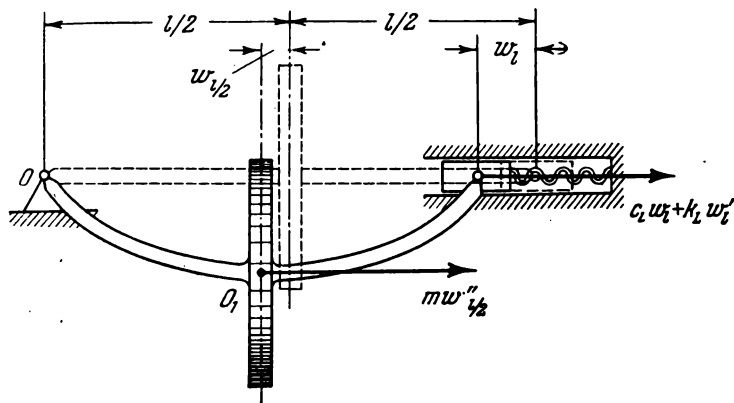
Продольную силу $N(s, t)$ вычислим с учетом того, что на подвижном конце имеются продольная связь с коэффициентом жесткости c_L и продольный демпфер с коэффициентом сопротивления k_L . Обозначив через w_l продольное

¹⁾ Подробности см. в статье автора (Инж. сборн. 19, 1954), где также рассмотрено влияние неуравновешенности и собственного веса,

перемещение подвижного конца, через $w_{l/2}$ — перемещение середины пролета, для случая, изображенного на фиг. 72, получим:

$$N(s, t) = \begin{cases} -(c_L w_t + k_L w'_t + m w''_{l/2}), & \text{если } 0 \leq s \leq \frac{l}{2} - \eta, \\ -(c_L w_t + k_L w'_t), & \text{если } \frac{l}{2} + \eta \leq s \leq l. \end{cases} \quad (9.13)$$

Аппроксимируя форму изгиба вала при помощи некоторой



Фиг. 72.

подходящей кривой и применяя метод Галеркина, приходим к уравнению

$$f'' + 2\epsilon f + \omega_0^2(1 + 2\gamma \cos 2\omega t) + \psi(f, f', f'') = 0,$$

в котором

$$\psi(f, f', f'') = \gamma_0(1 + 2\gamma \cos 2\omega t) f^3 + \gamma f^3 + \epsilon_L (f^2)' + \kappa (f^2)''. \quad (9.14)$$

Выражение для нелинейной функции (9.14) отличается от обычного (5.3) наличием первого слагаемого, которое

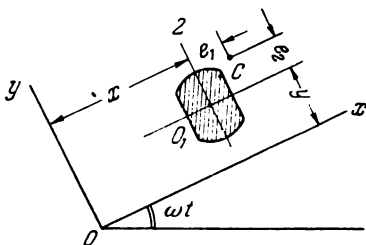
учитывает нелинейность кривизны. В случае шарнирно опертого вала

$$\gamma_0 = \frac{\pi^2 \omega_0^2}{8l^2}, \quad \gamma = \frac{\pi^4 c_L}{8ml^2}, \quad \varepsilon_L = \frac{\pi^4 k_L}{8ml^2}, \quad \alpha = \frac{\pi^4}{32l^2}.$$

Заметим, что если $\gamma_0 \ll \gamma$, т. е. если $\omega_0^2 \ll \frac{c_L}{m}$ (относительно большая жесткость продольной связи), то первым слагаемым можно пренебречь. Тогда формулы (9.14) и (5.3) совпадают, и все результаты, полученные для задачи о параметрическом резонансе сжатого стержня, целиком применимы к настоящей задаче. Решение для случая, когда этим слагаемым пренебрегать нельзя, дано в работе автора, где можно найти дальнейшие подробности¹⁾.

§ 34. Пространственные колебания вала

1. До сих пор рассматривались плоские колебания вала. В случае пространственных колебаний линейная задача описывается системой двух уравнений с периодическими коэффициентами довольно сложного вида²⁾.



Фиг. 73.

Переходя к системе координат, вращающейся вместе с валом (фиг. 73), мы получаем, однако, уравнения с постоянными коэффициентами. Особенности, присущие системам с периодически меняющимися параметрами, при этом сохраняются.

Уравнения пространственных колебаний имеют вид³⁾

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2\omega y' + (\omega_1^2 - \omega^2)x &= e_1 \omega^2 - g \cos \omega t, \\ y'' + 2\omega x' + (\omega_2^2 - \omega^2)y &= e_2 \omega^2 - g \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

¹⁾ Цит. на стр. 186.

²⁾ Диментберг Ф. М., сборн. «Поперечные колебания и критические скорости», вып. 2. Изд. АН СССР, 1953.

³⁾ Вывод см. там же.

где x и y — смещения точки O_1 , измеряемые вдоль подвижных осей координат. Остальные обозначения остаются прежними.

Исследуем устойчивость нулевого решения ($x = y = 0$) однородной системы, которая соответствует случаю вертикального и полностью уравновешенного вала. Подстановка

$$x = \xi e^{ht},$$

$$y = \eta e^{ht}$$

приводит к характеристическому уравнению

$$h^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega^2) h^2 + (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) = 0.$$

Нулевое решение устойчиво, пока это уравнение не имеет корней с положительной вещественной частью. Устойчивость будет, очевидно, нарушена в интервале угловых скоростей $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

Рассмотрим теперь влияние затухания, ограничившись случаем «внешнего» трения. С его учетом однородная система примет вид

$$x'' + 2\varepsilon x' - 2\omega y' - (\omega_1^2 - \omega^2)x - 2\varepsilon\omega y = 0,$$

$$y'' + 2\varepsilon y' + 2\omega x' + (\omega_2^2 - \omega^2)y + 2\varepsilon\omega x = 0.$$

Составляя характеристическое уравнение для этой системы, приходим к условию устойчивости

$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) + 4\varepsilon^2\omega^2 > 0. \quad (9.16)$$

Легко видеть, что затухание сужает область неустойчивости. При достаточно большом затухании, как и в задаче о динамической устойчивости сжатого стержня, потеря устойчивости прямолинейной формы вообще невозможна (фиг. 74). Здесь уместно ввести понятие о *критическом коэффициенте затухания*, для которого нетрудно получить формулу

$$\varepsilon_* = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}.$$

Если парциальные частоты достаточно близки, т. е. $\omega_1 \approx \omega_2$, то для соответствующего декремента имеем приближенную формулу

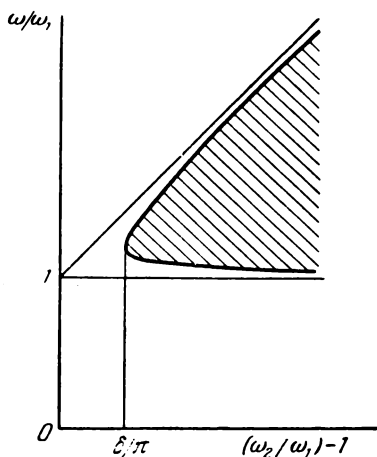
$$\delta_* \approx \frac{2\pi\epsilon_2}{\omega_1} = \pi \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right). \quad (9.17)$$

Пусть, например, декремент затухания собственных колебаний $\delta = 0,01$. Тогда, как показывает формула (9.17), неустойчивость будет обнаружена уже при парциальных частотах, отличающихся на $0,32\%$. Интересно, что в случае плоских колебаний (см. § 33) аналогичные выкладки для главной области дают:

$$\delta_* = \pi \epsilon_2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right).$$

Заметим, что в отличие от задач, которые рассматривались ранее, здесь имеется лишь одна область неустойчивости (для системы с одной степенью свободы), а не бесконечная последовательность.

2. Кратко остановимся на нелинейной задаче. Как и в плоском случае, для составления нелинейных урав-



Фиг. 74.

нений вал необходимо рассматривать как систему с бесконечным числом степеней свободы, учитывая точное выражение для кривизны и продольную силу, возникающую на продольных перемещениях. В случае вертикального и уравновешенного вала при отсутствии гироскопического эффекта имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{EJ_2}{\rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(N \frac{\partial u}{\partial s} \right) + m(s) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial v}{\partial t} - \omega^2 u \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{EJ_1}{\rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(N \frac{\partial v}{\partial s} \right) + m(s) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial u}{\partial t} - \omega^2 v \right) &= 0. \end{aligned} \right\} (9.18)$$

Здесь s — дуга, отсчитываемая вдоль деформированной оси

вала в направлении вращающихся координатных осей (фиг. 75), $1/\rho_1$ и $1/\rho_2$ — главные кривизны оси вала (кручением пренебрегаем):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} &= \frac{\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2}} \approx \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 \right], \\ \frac{1}{\rho_2} &= \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2}} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

Продольная сила определяется согласно (9.13), но способ вычисления $w(s, t)$ изменяется. Легко видеть (фиг. 75), что

$$w(s, t) = \int_0^s (ds - dz).$$

Но

$$dz = ds \sqrt{1 - \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2},$$

откуда с точностью до величин второго порядка

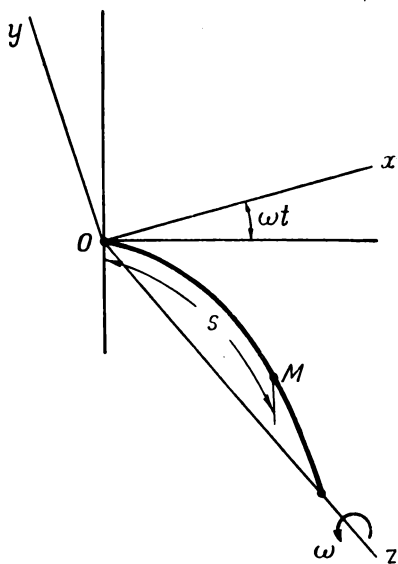
$$\begin{aligned} w(s, t) &\approx \\ &\approx \frac{1}{2} \int_0^s \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Аппроксимируем формы изгиба вала при помощи некоторых подходящих функций:

$$\left. \begin{aligned} u(s, t) &= x(t) \varphi(s), \\ v(s, t) &= y(t) \varphi(s), \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

где попережнему x и y — перемещения точки O_1 в направлении вращающихся осей (фиг. 73). Тогда

$$w(s, t) \approx \beta(s)(x^2 + y^2), \quad (9.21)$$



Фиг. 75.

где $\beta(s)$ — некоторая функция. Подставляя (9.13), (9.19), (9.20) и (9.21) в уравнения (9.18) и применяя метод Галеркина, приходим к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x'' + 2\varepsilon x' - 2\omega y' + (\omega_1^2 - \omega^2)x - 2\varepsilon\omega y + \psi_1(x, y) &= 0, \\ y'' + 2\varepsilon y' + 2\omega x' + (\omega_2^2 - \omega^2)y + 2\varepsilon\omega x + \psi_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} (9.22)$$

Здесь учтено затухание; $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$ — нелинейные функции

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= \gamma_1 x^3 + \gamma x(x^2 + y^2) + \varepsilon_L x(x^2 + y^2)' + \\ &\quad + xx(x^2 + y^2)'', \\ \psi_2(x, y) &= \gamma_2 y^3 + \gamma y(x^2 + y^2) + \varepsilon_L y(x^2 + y^2)' + \\ &\quad + xy(x^2 + y^2)''. \end{aligned}$$

Первые члены в правых частях учитывают точное выражение кривизны, причем для шарнирно опертого вала согласно (3.16)

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\pi^2 \omega_1^2}{8l^2}, \\ \gamma_2 &= \frac{\pi^2 \omega_2^2}{8l^2}. \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты сохраняют прежние значения.

3. Ограничимся частным решением, представляющим, тем не менее, наибольший практический интерес. Допустим, что вал совершает установившееся прецессионное движение со скоростью вращения. В подвижной системе координат Oxy (фиг. 73) такое движение представляется в виде

$$\begin{aligned} x &= \text{const}, \\ y &= \text{const}, \end{aligned}$$

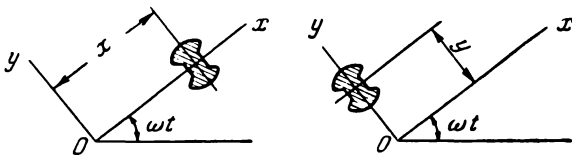
и, следовательно, может быть найдено из системы алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\omega_1^2 - \omega^2)x - 2\varepsilon\omega y + \gamma_1 x^3 + \gamma x(x^2 + y^2) &= 0, \\ (\omega_2^2 - \omega^2)y + 2\varepsilon\omega x + \gamma_2 y^3 + \gamma y(x^2 + y^2) &= 0. \end{aligned} \right\} (9.23)$$

Рассмотрим сначала консервативный случай ($\varepsilon = 0$). Помимо нулевого решения, получаем решения двух типов:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} \quad x^2 = \frac{\omega_1^2}{\gamma_1 + \gamma} \left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1 \right), \quad y = 0, \\ \text{II} \quad x = 0, \quad y^2 = \frac{\omega_2^2}{\gamma_1 + \gamma} \left(\frac{\omega^2}{\omega_2^2} - 1 \right). \end{array} \right\} \quad (9.24)$$

Первое решение соответствует изгибу относительно оси наименьшей жесткости, второе — относительно оси наибольшей жесткости (фиг. 76). Дополнительное исследование



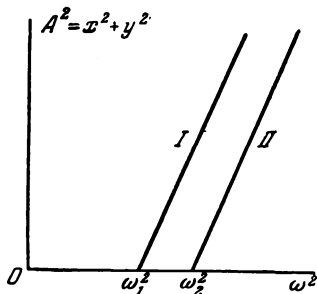
Фиг. 76.

показывает, что устойчивым будет только первое решение, что, впрочем, можно заключить из самого вида решений (фиг. 77).

Затягивание происходит в сторону больших угловых скоростей, причем даже при близких парциальных частотах деформации вала могут оказаться весьма велики. Допустим, что подшипники не оказывают никакого препятствия сближению концов вала. Тогда $\gamma = 0$, и формула для прогиба вала принимает вид

$$x = \frac{2\sqrt{2}l}{\pi} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1},$$

кстати, весьма сходный с известной формулой Мизеса (3.8). При $\omega_2 = 1,05 \omega_1$ прогиб на верхней границе области неустойчивости, т. е. без учета затягивания, достигает $0,28l$ (при таких больших прогибах, строго говоря, необходимо удержание членов более высокого порядка, чем это сделано в основных уравнениях).



Фиг. 77.

Другой крайний случай — это опоры, не допускающие *никаких* продольных смещений. Продольная сила, возникающая вследствие этого, очевидно, будет:

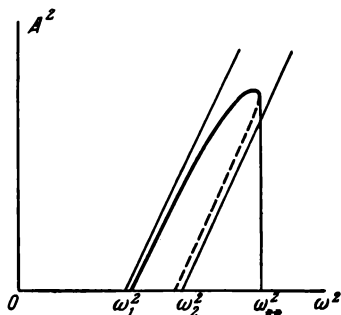
$$N = \frac{EF}{l} w_1,$$

где EF — жесткость вала при растяжении. Следовательно, коэффициент нелинейной упругости

$$\gamma = \frac{\pi^4 c}{24l^2} \approx \frac{\omega_1^2}{r_2^2} = \frac{\omega_2^2}{r_1^2}$$

(r_1 и r_2 — главные радиусы инерции сечения). Формула для прогибов вала принимает вид ($\gamma \gg \gamma_1$)

$$x = r_2 \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_2^2} - 1}$$



Фиг. 78.

и для случая $\omega_2 = 1,05\omega_1$ дает $0,32r_2$. Практически прогиб вала может меняться в этих весьма широких пределах.

Переходя к учету затухания, ограничимся случаем $\gamma \gg \gamma_1$. Рассматривая уравнения (9.23) как однородную алгебраическую систему относительно x и y и приравнявая ее определитель нулю, получим уравнение

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 + \gamma a^2 & -2\varepsilon\omega \\ 2\varepsilon\omega & \omega_2^2 - \omega^2 + \gamma a^2 \end{vmatrix} = 0,$$

где $a^2 = x^2 + y^2$. Отсюда

$$a^2 = \frac{1}{2\gamma} [2\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 - 16\varepsilon^2\omega^2}]. \quad (9.25)$$

Резонансная кривая показана на фиг. 78. Ее основание совпадает с интервалом неустойчивости, найденным из (9.16). Затухание снижает прогибы вала, причем нейтральная линия уже не совпадает с осью наименьшей жесткости. Весьма существенно, что затягивание принципиально ограничено;

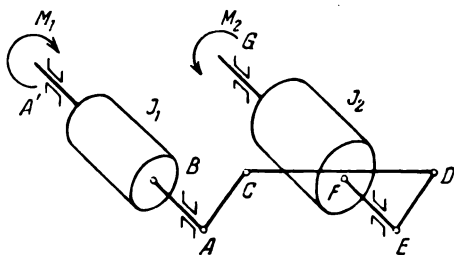
предельную угловую скорость найдем, приравнявая нулю подрадикальное выражение в (9.25):

$$\omega_{**}^2 = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{4\varepsilon} \approx \frac{\delta}{\delta^*} \omega_1^2.$$

На других вопросах, связанных с учетом неуравновешенности, собственного веса диска и т. п., мы здесь не останавливаемся.

§ 35. Другие примеры систем с периодически меняющейся жесткостью

1. Классическим примером системы с периодически меняющейся жесткостью является ведущая система электровоза с передачей усилий при помощи спарников¹⁾. Простейшая схема такой системы изображена на фиг. 79.



Фиг. 79.

Допустим, что с оси ротора двигателя AA' на ведущую ось EG момент передается одним спарником CD (обычно устраивают два спарника, сдвинутых по фазе на $\pi/2$, но это лишь немного усложнит рассмотрение). Пусть, далее, J_1 и J_2 — моменты инерции масс, приведенных к первой и второй осям соответственно, φ_1 и φ_2 — углы поворота масс, M_1 и M_2 — внешние моменты, к ним приложенные, c — коэффициент жесткости связи между обеими осями. Уравнение движения ротора имеет вид

$$J_1 \varphi_1'' + c(\varphi_1 - \varphi_2) = M_1,$$

¹⁾ См. книгу С. П. Тимошенко, цит. на стр. 184. Там же указана литература.

а уравнение движения массы, приведенной к ведущей оси, —

$$J_2 \varphi_2'' + c(\varphi_2 - \varphi_1) = -M_2.$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим:

$$(\varphi_1 - \varphi_2)'' + c \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2}. \quad (9.26)$$

Взаимный угол поворота масс обозначим через φ , т. е. $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ (при этом $\varphi \ll \varphi_1$). Пусть, далее,

$$c \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} = K, \quad \frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2} = Q(t).$$

Тогда уравнение (9.26) принимает вид

$$\varphi'' + K\varphi = Q(t). \quad (9.27)$$

Жесткость системы c , а отсюда и коэффициент K в уравнении (9.27) зависят от взаимного расположения ее частей в данный момент времени, а при установившемся вращении ведущей оси являются периодическими функциями времени. В самом деле, вблизи $\varphi_1 = 0$ или $\varphi_1 = \pi$ усилие в спарнике и, следовательно, его осевая деформация достигают экстремальных значений; напротив, вблизи $\varphi_1 = \pi/2$ или $\varphi_1 = 3\pi/2$ его деформация равна нулю.

2. Вычислим жесткость системы (фиг. 79). Угол φ взаимного поворота масс складывается из углов закручивания $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ валов AB и EF и дополнительного угла $\Delta\varphi_3$, появляющегося за счет осевой деформации спарника:

$$\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3. \quad (9.28)$$

Пусть M — момент, передаваемый с одного вала на другой, c_1 и c_2 — жесткости участков AB и EF . Тогда

$$\Delta\varphi_1 = \frac{M}{c_1}, \quad \Delta\varphi_2 = \frac{M}{c_2}. \quad (9.29)$$

Вычислим укорочение спарника с жесткостью EF_0 (фиг. 80):

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF_0} \approx \frac{M}{r \cos \varphi_1} \cdot \frac{l}{EF_0}.$$

Из геометрических соображений

$$\Delta\varphi_3 \approx \frac{\Delta l}{r \cos \varphi_1} \approx \frac{Ml}{r^2 EF_0 \cos^2 \varphi_1}. \quad (9.30)$$

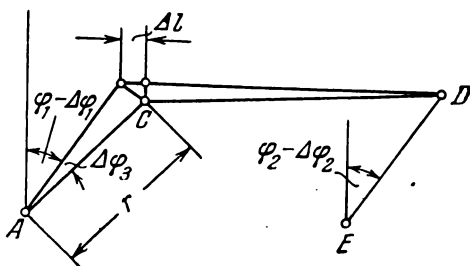
Объединяя (9.28), (9.29) и (9.30), получим:

$$\varphi = M \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{l}{r^2 E F_0 \cos^2 \varphi} \right) = \frac{M}{c},$$

где

$$c(\varphi_1) = \frac{c_0(1 + \cos 2\varphi_1)}{1 + \frac{c_0}{c_3}(1 + \cos 2\varphi_1)}, \quad c_0 = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}, \quad c_3 = \frac{r^2 E F_0}{2l}.$$

При равномерном вращении ведущей оси с угловой скоростью $\dot{\vartheta}$ имеем $\varphi_1 \approx \dot{\vartheta}t$, и жесткость системы становится довольно сложной периодической функцией времени, а уравнение (9.27) — уравнением Хилла с правой частью. Области



Фиг. 80.

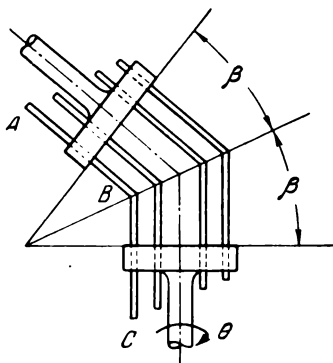
неустойчивости для однородного уравнения могут быть построены известными методами (§ 5). Если задан закон изменения внешних моментов, действующих на ротор и ведущую ось, то может быть найдено и решение неоднородного уравнения.

В технических задачах необходимо учитывать наличие двух сдвинутых по фазе спарников, зазоров между спарником и цапфой кривошипа и т. д. Как поступать в этих случаях, указано в цитированной выше книге С. П. Тимошенко.

Заметим в заключение, что колебания, вызванные периодически меняющейся жесткостью, были, повидимому, причиной многих поломок электровозов, особенно в ранний период электровозостроения.

3. Остановимся кратко на примере еще одной системы, жесткость которой периодически меняется. Для передачи движения и мощности между пересекающимися валами

с передаточным числом, равным единице, была предложена передача гнутыми спицами¹⁾. Два вала, пересекающихся под углом 2β , заканчиваются жесткими дисками с равномерно размещенными по периферии отверстиями (фиг. 81).



Фиг. 81.

В отверстия вставлены гнутые спицы (например, спица *ABC* на фиг. 81), каждая из которых обладает как поступательной, так и вращательной степенью свободы.

Уравнение движения такой системы совпадает с (9.26) с той лишь разницей, что коэффициент c в этом уравнении является весьма сложной функцией времени с основным периодом $\frac{2\pi}{n\theta}$ (θ — угловая скорость, n — число спиц).

Вычисление этой функции было проведено в цитированной выше статье Д. М. Комарова.

§ 36. Колебания систем с периодически меняющейся массой

1. Если масса системы (фактическая или приведенная) периодически меняется во времени, то задача о колебаниях такой системы принципиально не отличается от задач, рассмотренных выше. Действительно, если масса $m(t) > 0$, а $c = \text{const}$, то уравнение (9.8) практически не изменяет вида (некоторые отличия появляются лишь при учете затухания и нелинейных факторов).

Наиболее важная техническая задача, относящаяся к этому классу — это задача о колебаниях коленчатых валов. Известно²⁾, что расчет колебаний таких валов сводят обычно к расчету прямолинейного вала с некоторой приведенной жесткостью и рядом сосредоточенных дисков (по числу

¹⁾ Комаров Д. М., сборн. «Вопросы расчета и конструирования деталей машин». Изд. АН СССР, 1942.

²⁾ Бицено К. Б. и Граммель Р., Техническая динамика, т. II. Гостехиздат, 1952.

цилиндров и маховиков). Момент инерции массы каждого диска выбирается таким образом, чтобы его кинетическая энергия была равна кинетической энергии вращающихся частей, шатуна и поршня, которые этот диск заменяет. Так, если длина шатуна l велика по сравнению с длиной кривошипа r (фиг. 82), то общая кинетическая энергия

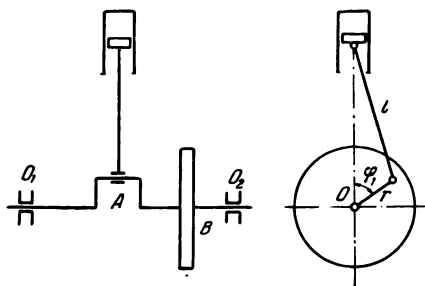
$$T \approx \frac{1}{2} J_0 (\varphi')^2 + \frac{1}{2} m (r\varphi' \sin \varphi)^2,$$

где φ — угол поворота кривошипа, J_0 — момент инерции вращающихся частей, m — масса шатуна и поршня. Отсюда приведенный момент инерции

$$J(\varphi) = J_0 + mr^2 \sin^2 \varphi, \quad (9.31)$$

и, следовательно, при установившемся вращении ($\varphi = \omega t$) инерционный коэффициент будет периодической функцией времени.

Переходя к составлению уравнений, ограничимся изображенным на фиг. 82 случаем одноцилиндрового двигателя



Фиг. 82.

с маховиком. Пусть φ_1 — угол поворота кривошипа, $J_1(\varphi_1)$ — момент инерции, вычисляемый по формуле (9.31), φ_2 — угол поворота маховика, $J_2 = \text{const}$ — его момент инерции. Кинетическая энергия системы, очевидно, будет:

$$T = \frac{1}{2} J_1(\varphi_1) \cdot (\varphi_1')^2 + \frac{1}{2} J_2 \cdot (\varphi_2')^2,$$

а потенциальная энергия деформации —

$$U = \frac{1}{2} c (\varphi_1 - \varphi_2)^2.$$

(Здесь c — приведенная жесткость вала на участке AB . Составляя уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi_k} (T - U) = Q_k \quad (k = 1, 2),$$

получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} J_1(\varphi_1) \varphi_1'' + \frac{1}{2} \frac{dJ_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} (\varphi_1')^2 + c(\varphi_1 - \varphi_2) &= M_1(\varphi_1), \\ J_2 \varphi_2'' + c(\varphi_2 - \varphi_1) &= -M_2(\varphi_2), \end{aligned}$$

где $M_1(\varphi_1)$ и $M_2(\varphi_2)$ — внешние моменты, действующие на кривошип и маховик соответственно. В случае двухтактного двигателя момент $M_1(\varphi_1)$ имеет период $\frac{2\pi}{\theta}$, в случае четырехтактного — $\frac{4\pi}{\theta}$. Вводя, как и при составлении уравнения (9.27), относительный угол закручивания $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} J_1(\varphi_1) \varphi'' + c \frac{J_1(\varphi_1) + J_2}{J_2} \varphi + \frac{1}{2} \frac{dJ_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} (\varphi_1')^2 &= \\ &= M_1(\varphi_1) + \frac{J_1(\varphi_1)}{J_2} M_2(\varphi_2). \end{aligned} \quad (9.32)$$

Займемся упрощениями. Допустим, что момент инерции маховика достаточно велик, чтобы положить $J_1(\varphi_1) \ll J_2$ и считать его вращение равномерным: $\varphi_2 = \omega t$. Далее, ввиду малости угла закручивания ($\varphi \ll \omega t$) можно произвести замену ¹⁾

$$\frac{dJ_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} \approx \frac{dJ_1(\omega t)}{d(\omega t)}, \quad J_1(\varphi_1) \approx J_1(\omega t), \quad M_1(\varphi_1) \approx M_1(\omega t)$$

¹⁾ Это равносильно отбрасыванию наряду с нелинейными также и некоторых линейных по отношению к φ членов, которые, строго говоря, должны быть сохранены в «уравнениях в вариациях». Уточнение, впрочем, может быть легко получено.

и положить $(\varphi_1')^2 \approx \omega^2$. Уравнение (9.32) принимает вид

$$J_1(\omega t)\varphi'' + c\varphi = M_1(\omega t) - \frac{\omega^2 dJ_1(\omega t)}{2 d(\omega t)}. \quad (9.33)$$

С учетом (9.31) соответствующее однородное уравнение записывается в виде

$$\varphi'' + \frac{\omega^2}{1 - 2\mu \cos 2\theta t} \varphi = 0,$$

где

$$\omega^2 = \frac{c}{J_0 + \frac{1}{2} mr^2}, \quad \mu = \frac{mr^2}{2(2J_0 + mr^2)}.$$

Задача приведена, таким образом, к уравнению Хилла ($\mu < 1/2$).

Выше был рассмотрен случай одноцилиндровой машины. При наличии нескольких цилиндров задача приводит к *системам* дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Обозначим через φ_k угол поворота k -го эквивалентного диска, $J_k(\varphi_k)$ — момент инерции этого диска, $c_{k-1, k}$ — жесткость вала на участке между $(k-1)$ -м и k -м дисками. Приближенные уравнения движения системы записываются в виде ¹⁾

$$J_k(\omega t)\varphi_k'' + c_{k-1, k}(\varphi_k - \varphi_{k-1}) + c_{k, k+1}(\varphi_k - \varphi_{k+1}) = P_k(\omega t) \\ (k = 1, 2, 3 \dots n),$$

где $P_k(\omega t)$ — известные функции времени. Методам исследования подобных уравнений посвящены вторая и третья части настоящей книги.

2. Хотя деление систем на два класса (с переменной жесткостью и переменной массой) во многих случаях физически оправдано, оно остается все же весьма условным. Ниже будет дан пример, приводящий к уравнению более общего вида.

Допустим, что по балке пролетом l с постоянной скоростью v движется груз массой M , причем в момент $t=0$ груз входит на балку (фиг. 83). Уравнение колебаний такой балки будет:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t), \quad (9.34)$$

¹⁾ Кочин Н. Е., Прикл. матем. и мех. 2, вып. 1 (1934).

где $y(x, t)$ и EJ — прогиб балки и ее изгибная жесткость, а m_0 — масса балки, отнесенная к единице ее длины. Функция, стоящая в правой части, учитывает вес груза $P(t)$ и силу инерции, сопряженную с массой M . Можно записать:

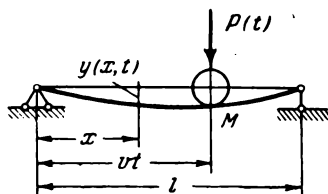
$$q(x, t) = 0, \quad \text{если } x < vt - \eta,$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{vt - \eta}^{vt + \eta} q(x, t) dx = P(t) - M \frac{d^2 y(vt, t)}{dt^2},$$

$$q(x, t) = 0, \quad \text{если } x > vt - \eta.$$

Здесь при вычислении ускорения берется полная (субстанциональная) производная, т. е.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$



Фиг. 83.

Решение этой задачи для случая шарнирно опертой балки естественно искать в виде ряда

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad (9.35)$$

где $f_i(t)$ — искомые функции времени. Ограничившись первым членом ряда, воспользуемся для вывода уравнения, которому должна подчиняться функция $f(t)$ (индекс опускаем), вариационным методом Галеркина. Вычисления дают ¹⁾:

$$(1 + 2\alpha \sin^2 kt) f'' + 2ak \sin 2kt \cdot f' + (\omega_0^2 - 2ak^3 \sin^2 kt) f = p(t, kt), \quad (9.36)$$

где обозначено:

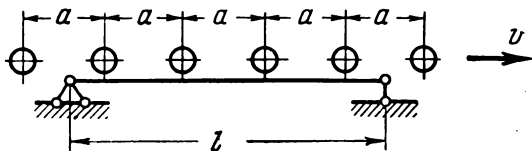
$$\alpha = \frac{M}{m_0 l}, \quad k = \frac{\pi v}{l}, \quad \omega_0^2 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2 m_0},$$

$$p(t, kt) = \frac{2P(t)}{m_0 l} \sin kt.$$

¹⁾ Обоснование этого приема при наличии разрывной функции $q(x, t)$ может быть получено методами теории линейных интегральных уравнений.

Уравнение (9.36) было получено Инглисом¹⁾, который дал его приближенное решение для ряда частных случаев. Дальнейшие обобщения рассмотрены автором²⁾.

Представим теперь, что по балке движется последовательность грузов, отстоящих друг от друга на l . Уравнение (9.36) описывает тогда колебательный процесс, который



Фиг. 84.

при некоторых соотношениях параметров может сопровождаться неограниченным возрастанием амплитуд.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее (9.36):

$$(1 + 2\alpha \sin^2 kt) f'' + 2\alpha k \sin 2kt \cdot f' + (\omega_0^2 - 2\alpha k^2 \sin^2 kt) f = 0. \quad (9.37)$$

Все его коэффициенты — периодические функции времени с периодом $\pi/k = l/v$. Коэффициенты при f'' и f , однако, — четные функции времени, а коэффициент при f' — нечетная функция. Поэтому вид уравнения (9.37) не меняется при замене t на $-t$, и это дает право утверждать, что произведение его характеристических корней равно единице³⁾. Следовательно, как и для уравнения Матье-Хилла, определение границ областей неустойчивости сводится к опре-

¹⁾ Inglis C. E., A mathematical treatise on vibrations in railway bridges. Cambridge, 1934.

²⁾ Болотин В. В., Труды МИИТ, вып. 74 (1950), 76 (1952).

³⁾ Действительно, одно из частных решений этого уравнения может быть представлено в виде (1.21)

$$f(t) = \chi(t) e^{\frac{t}{T} \ln \rho_1},$$

где ρ_1 — один из характеристических корней. Но замена t на $-t$ должна давать другое частное решение, откуда $\ln \rho_2 = -\ln \rho_1$ и $\rho_2 = 1/\rho_1$.

делению условий, при которых уравнение имеет решения с периодом l/v и $2l/v$.

Впрочем, подстановкой

$$f = u(t) \exp\left(-\int \frac{\alpha k \sin 2kt}{1 + 2\alpha \sin^2 kt} dt\right)$$

уравнение (9.37) приводится непосредственно к уравнению Хилла.

Задача может быть обобщена, если рассмотреть, например, бесконечную последовательность одинаковых грузов, движущихся с интервалом a . Пусть a — целая доля пролета (фиг. 84). Тогда уравнение задачи имеет коэффициенты с периодом a/v .

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

**ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ
УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ**

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЦ¹⁾

§ 37. Матрицы и действия над ними

1. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

.

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

или, короче,

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = b_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (10.1)$$

Соответствующая однородная система будет:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (10.2)$$

Уравнения (10.1) и (10.2) могут быть записаны в весьма компактной форме, если воспользоваться матричными обозначениями.

¹⁾ Здесь приводятся минимальные сведения, необходимые для понимания дальнейшего материала. Более полное изложение см., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, ч. 1. Гостехиздат, 1953; Мальцев А. И., Основы линейной алгебры. Гостехиздат, 1948; Булгаков Б. В., Колебания. Гостехиздат, 1954.

Обозначим таблицу, составленную из коэффициентов a_{ik} , одной буквой ¹⁾

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Такая таблица, называемая *матрицей*, характеризует совокупность всех n^2 коэффициентов системы (10.1).

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — решение системы (10.1). Совокупность этих n чисел можно рассматривать как вектор в пространстве n измерений

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Точно так же можно говорить о векторе «правой части»

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

При введенных обозначениях система уравнений (10.1) записывается в виде

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

причем на развернутую форму записи

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

следует смотреть как на определение правила *умножения матрицы на вектор*.

Решение уравнений (10.1) будет:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}, \quad (10.3)$$

где A^{-1} — так называемая *обратная* матрица. С другой стороны, из формул Крамера для решения неоднородных алгебраических уравнений следует, что

$$x_i = \frac{\sum_{k=1}^n A_{ik}b_k}{\Delta} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10.4)$$

¹⁾ В отличие от скалярных величин матрицы и векторы обозначаются здесь жирным шрифтом.

где Δ — определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} . Сравнение формул (10.3) и (10.4) дает:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{12}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{1n}}{\Delta} \\ \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{2n}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{n1}}{\Delta} & \frac{A_{n2}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{vmatrix}$$

или, короче,

$$\{A^{-1}\}_{ik} = \frac{A_{ik}}{\Delta}.$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений существенное значение имеет неравенство нулю определителя матрицы Δ . Если определитель матрицы равен нулю, то такую матрицу называют *особенной*, в противном случае матрица будет называться *неособенной*. Очевидно, что обратная матрица может существовать только у неособенной матрицы.

Введем также следующие определения. Матрицу, все элементы которой равны нулю, будем называть *нулевой* матрицей и обозначать просто через нуль. Особое значение имеют матрицы, у которых равны нулю только недиагональные элементы

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Такие матрицы будем называть *диагональными* и обозначать просто

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n].$$

Если все диагональные элементы равны между собой

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = \alpha,$$

то такая матрица называется *скалярной*. В частности, матрица, у которой все диагональные элементы равны единице

$$E = [1, 1, 1, \dots, 1],$$

называется *единичной*; как увидим в дальнейшем, эта матрица в алгебре матриц играет роль единицы.

2. Для построения теории матриц более удобной оказывается несколько иная трактовка линейных алгебраических систем.

Соотношения

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= y_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

будем рассматривать как формулы *линейного преобразования* n переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) к новым n переменным (y_1, y_2, \dots, y_n) . Матрица A с элементами a_{ik} характеризует в этом случае линейное преобразование вектора в пространстве n измерений $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ к новому вектору $y(y_1, y_2, \dots, y_n)$:

$$y = Ax.$$

Так, единичная матрица E , которая оставляет вектор x без изменения, соответствует тождественному преобразованию, а скалярная матрица — умножению всех компонент вектора на одно и то же число α (преобразованию подобия).

Определим теперь основные действия над матрицами. Суммой двух матриц A и B будем называть такую третью матрицу $A + B$, преобразование с помощью которой какого-либо вектора дает результат, равный сумме двух отдельных преобразований:

$$Ax + Bx = (A + B)x.$$

Как следует из формул (10.5), суммирование двух матриц сводится к суммированию их соответствующих элементов, т. е.

$$A + B = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nn} + b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Несколько сложнее определяется *произведение* двух матриц. Пусть вектор z получается путем последовательного преобразования вектора x с помощью двух матриц:

$$y = Ax, \quad z = By.$$

Это равносильно одному преобразованию

$$z = Cx$$

с матрицей

$$C = BA.$$

Элементы матрицы C можно найти, последовательно применяя преобразования

$$y_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k$$

и

$$z_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j.$$

Подстановка дает:

$$z_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ij} a_{jk} x_k,$$

откуда

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n b_{ij} a_{jk} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (10.6)$$

На формулу (10.6) следует смотреть как на *правило перемножения двух матриц*. Например, из самого определения обратной матрицы следует, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Другой пример — умножение на скалярную матрицу, которое, как нетрудно усмотреть из (10.6), сводится к

умножению всех элементов на одно и то же число:

$$AB = \alpha B.$$

Понятие произведения матриц может быть распространено на случай трех и большего числа сомножителей. В частности, можно дать определение m -й степени матрицы:

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \dots A}_{m \text{ раз}}$$

3. Пользуясь введенными выше правилами сложения и умножения матриц, можно построить матричную алгебру, во многом напоминающую обычную алгебру комплексных чисел. Существует, впрочем, одно существенное отличие. Это отличие вызывается *некоммутативностью умножения* матриц, т. е. зависимостью результата умножения от порядка сомножителей. Другими словами, если A и B — две произвольные матрицы, то, вообще говоря,

$$AB \neq BA.$$

Имеются, однако, классы матриц, которые коммутируют между собой. Таковы, например, все диагональные матрицы. Коммутируют между собой также степени одной и той же матрицы или, если взять более общий случай, функции одной и той же матрицы. Над такими матрицами можно производить действия, как над обычными числами. Например, в полной аналогии с рядом

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^m + \dots$$

можно написать разложение

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^m + \dots$$

Сходимость этого ряда должна быть рассмотрена особо.

§ 38. Приведение матриц к диагональному виду. Характеристическое уравнение

1. Рассмотрим преобразование

$$y = Ax \tag{10.7}$$

и выясним, как будет меняться матрица A , если мы подвергнем исходную систему координат некоторому линей-

ному преобразованию с неособенной матрицей U . Вектор $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ преобразуется при этом в новый вектор $x'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, составляющие которого выражаются через составляющие старого вектора:

$$x' = Ux.$$

Аналогично преобразуется и вектор y :

$$y' = Uy.$$

Определяя из этих формул первоначальные значения векторов и подставляя их в (10.7), получим:

$$y' = UAU^{-1}x'.$$

Итак, в новой системе координат преобразование (10.7) будет осуществляться матрицей

$$A' = UAU^{-1}. \quad (10.8)$$

Матрицы A и A' , связанные между собой соотношением (10.8), называются *подобными*. Между собой они, конечно, не равны, но в геометрическом смысле эквивалентны, поскольку осуществляют одно и то же преобразование, выраженное в разных координатных системах.

Среди бесчисленного множества координатных систем исключительный интерес представляет одна система — та, в которой матрица преобразования принимает простейший, диагональный вид

$$A' = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_n].$$

Если такая система координат существует, то преобразование, осуществляемое в старой системе матрицей A , сводилось бы в новых осях просто к растяжению вдоль этих осей

$$y'_k = \lambda_k x'_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

2. Введя новую матрицу $V = U^{-1}$, представим формулу (10.8) в виде

$$AV = VA'$$

или, если развернуть:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} v_{jk} = v_{ik} \lambda_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (10.9)$$

Уравнение (10.12), которое может быть записано кратко

$$|A - \lambda E| = 0,$$

называется *характеристическим уравнением* матрицы A ; оно имеет n корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, называемых *характеристическими числами* или *собственными значениями* матрицы A .

Если все характеристические числа различны между собой, то матрица

$$A' = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n]$$

и будет диагональным представлением исходной матрицы A . Простейший случай приведения линейного преобразования с двумя переменными к диагональному виду мы уже имели по существу в § 2, п. 1.

Для определения собственных векторов v_k поступим следующим образом. Подставим в уравнения (10.11) характеристическое число $\lambda_k = \lambda_1$ и, отбросив одно из уравнений (из n уравнений только $n - 1$ будут линейно независимыми), решим систему относительно составляющих v_{i1} . При этом $n - 1$ составляющих окажутся выраженными через одну, например v_{11} , которая останется неопределенной. Другими словами, компоненты собственного вектора v_{i1} определяются лишь с точностью до некоторого постоянного множителя. Чтобы устранить эту неопределенность, собственные векторы обычно *нормируют*, т. е. выбирают множитель таким образом, чтобы длина вектора оказалась равной единице:

$$\sum_{i=1}^n v_{i1}^2 = 1.$$

Аналогично определяются составляющие остальных $n - 1$ собственных векторов. Матрица, образованная по столбцам из n собственных векторов v_1, v_2, \dots, v_n , и является искомым матрицей преобразования V .

3. Существенный интерес представляют условия, при которых две матрицы A и B одновременно приводятся к главным осям. Покажем, что *коммутативность двух матриц является необходимым условием одновременного их приведения к диагональному виду*.

Пусть A и B — две матрицы, характеристические числа которых равны соответственно α и β . Если их главные оси совпадают, то имеют место уравнения

$$A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}, \quad B\mathbf{v} = \beta\mathbf{v},$$

где \mathbf{v} — общие для обеих матриц собственные векторы. Умножим первое уравнение почленно на B , второе — на A и вычтем одно из другого:

$$(BA - AB)\mathbf{v} = \alpha B\mathbf{v} - \beta A\mathbf{v}.$$

Но правая часть, очевидно, равна нулю, откуда следует, что матрицы должны коммутировать:

$$BA = AB.$$

Справедливо и обратное положение. Если две матрицы коммутируют, то при помощи одного и того же преобразования подобия их можно привести к диагональному виду. Иначе, коммутативность двух матриц является не только необходимым, но и достаточным условием возможности одновременного их приведения к главным осям.

4. До сих пор предполагалось, что характеристическое уравнение (10.12) имеет различные корни. Случай кратных корней представляет для исследования большие трудности. Так как этот случай также важен для дальнейшего изложения, мы приведем здесь некоторые окончательные результаты, отсылая за подробностями к специальным руководствам ¹⁾.

Рассмотрим определитель

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$

который представляет собой, очевидно, полином n -й степени. По правилам, которые мы здесь излагать не станем, этот полином разлагается на *элементарные делители*

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1}, (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2}, \dots, (\lambda - \lambda_j)^{\rho_j},$$

где

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_j = n.$$

¹⁾ См., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, ч. 2 (дополнение). Гостехиздат, 1953.

Если все характеристические числа λ_k различны, то элементарные делители будут иметь вид

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - \lambda_2), \dots, (\lambda - \lambda_n),$$

т. е. будут линейными или, как говорят, *простыми*.

Если среди характеристических чисел имеются одинаковые, то могут представиться два случая. Во-первых, все элементарные делители могут оказаться простыми; это значит, что каждый делитель, соответствующий корню кратности r_k , будет встречаться ровно r_k раз:

$$(\lambda - \lambda_1), (\lambda - \lambda_2), \dots, \overbrace{(\lambda - \lambda_k), (\lambda - \lambda_k) \dots (\lambda - \lambda_k)}^{r_k \text{ раз}}, \dots, (\lambda - \lambda_j).$$

В этом случае, как и в случае различных корней, матрица A может быть приведена к диагональному виду

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \overbrace{\lambda_k}^{r_k \text{ раз}} \\ & & & & \lambda_k \\ & & & & & \lambda_k \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & & \lambda_j \end{array} \right\|.$$

Во-вторых, элементарные делители (или хотя бы часть из них) могут оказаться *нелинейными*

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1}, (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2}, \dots, (\lambda - \lambda_j)^{\rho_j},$$

где по крайней мере одно из $\rho_k > 1$. В этом случае матрица A к диагональному виду приведена быть не может. Существует, однако, простейшее, *каноническое* представление матрицы ¹⁾.

¹⁾ Так называемая *нормальная жорданова форма*.

Каноническое представление будет:

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} A_{p_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{p_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{p_i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{p_j} \end{array} \right\|, \quad (10.13)$$

т. е. имеет вид матрицы, элементы которой $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots, A_{p_j}$ в свою очередь являются матрицами. Такие матрицы называют *квазиматрицами*. Если, как это оказалось в нашем случае, все квазиэлементы, кроме диагональных, равны нулю, то матрицу называют *квазидиагональной*.

Каждая составляющая матрица A_{p_k} имеет порядок, равный степени соответствующего элементарного делителя, и обладает специальной структурой:

$$A_{p_k} = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_k & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{array} \right\|. \quad (10.14)$$

Иначе, на главной диагонали такой матрицы везде стоит число λ_k , на следующей нижестоящей диагонали везде стоит единица, а все остальные элементы равны нулю. Если все элементарные делители — линейные, то матрицы A_{p_k} превращаются просто в числа λ_k , и каноническое представление совпадает с диагональной формой матрицы.

Как преобразуются в случае нелинейных элементарных делителей векторы φ_k ? Рассмотрим группу векторов, соответствующую элементарному делителю $(\lambda - \lambda_k)^{p_k}$. Как следует из самого вида матриц (10.13) и (10.14), эта группа векторов преобразуется независимо от остальных по

формулам

$$\left. \begin{aligned} A\varphi_1^{(k)} &= \lambda_k \varphi_1^{(k)}, \\ A\varphi_2^{(k)} &= \lambda_k \varphi_2^{(k)} + \varphi_1^{(k)}, \\ A\varphi_3^{(k)} &= \lambda_k \varphi_3^{(k)} + \varphi_2^{(k)}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A\varphi_{p_k}^{(k)} &= \lambda_k \varphi_{p_k}^{(k)} + \varphi_{p_k-1}^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

Если $p_k = 1$, то мы приходим, очевидно, к соотношению (10.10).

5. Остановимся несколько подробнее на особенностях *симметричных* матриц, т. е. таких матриц, у которых соответствующие элементы, стоящие по разные стороны от главной диагонали, равны между собой:

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Будем называть *транспонированной* по отношению к A такую новую матрицу A^* , которая получается из нее путем замены строк столбцами. Симметричные матрицы удовлетворяют, очевидно, условию

$$A^* = A.$$

Перечислим важнейшие свойства симметричных матриц.

Все характеристические числа симметричных матриц — вещественные, а элементарные делители — простые. Это значит, что симметричная матрица всегда может быть приведена к диагональному виду

$$A = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n],$$

причем $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — вещественные числа.

Симметричные матрицы (в более общем случае *матрицы Эрмита*) представляют особый интерес для приложений именно из-за вещественности характеристических чисел. Симметричные матрицы встречаются во многих задачах колебаний и упругой устойчивости, матрицы Эрмита — в квантовой механике.

Введем, далее, следующее определение. Два вектора $u(u_1, u_2, \dots, u_n)$ и $v(v_1, v_2, \dots, v_n)$ называются *ортого-*

нальными, если равно нулю их скалярное произведение (сумма произведений соответствующих координат):

$$\sum_{k=1}^n u_k v_k = 0.$$

Можно показать, что собственные векторы симметричных матриц всегда попарно ортогональны

$$\sum_{j=1}^n v_{ji} v_{jk} = 0 \quad (i \neq k).$$

Если собственные векторы нормированы

$$\sum_{j=1}^n v_{jk}^2 = 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n),$$

то говорят, что они составляют *ортонормированную* систему. Применяя символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k, \end{cases} \quad (10.16)$$

можем условие ортонормирования записать в виде

$$\sum_{j=1}^n v_{ji} v_{jk} = \delta_{ik}. \quad (10.17)$$

Иначе

$$V V^* = E, \quad (10.18)$$

где V — матрица, составленная из v_{ik} по столбцам. Из (10.17) видно, что любые два столбца матрицы V (а следовательно, и две строки) взаимно ортогональны. Такие матрицы называют *ортгональными*. Как следует из (10.18), $V^* = V^{-1}$, т. е. у ортогональной матрицы обратная и транспонированная матрицы совпадают.

Итак, симметричная матрица приводится к диагональному виду при помощи ортогонального преобразования.

6. Задача о приведении симметричной матрицы к диагональному виду находится в тесной связи с задачей о приведении квадратичной формы к сумме квадратов. *Квадратич-*

ной формой n переменных $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ называется однородный полином второй степени

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad (10.19)$$

где полагается, что $a_{ik} = a_{ki}$. Каждой квадратичной форме приводится в соответствие матрица ее коэффициентов

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

которая, очевидно, является симметричной.

Выясним, как преобразуется матрица A при переходе от переменных x_1, x_2, \dots, x_n к новым переменным y_1, y_2, \dots, y_n :

$$x_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} y_k. \quad (10.20)$$

Подставляя (10.20) в (10.19), получим преобразованную форму

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} y_i y_k, \quad (10.21)$$

где

$$c_{ik} = c_{ki} = \sum_{r=1}^n b_{ri} \sum_{s=1}^n a_{rs} b_{sk}. \quad (10.22)$$

Обозначив через B и C матрицы с элементами b_{ik} и c_{ik} соответственно, перепишем (10.22) в виде

$$C = B^* A B. \quad (10.23)$$

Преобразование (10.20) может быть подобрано таким образом, что матрица C окажется диагональной

$$C = [c_1, c_2, c_3, \dots, c_n].$$

В этом случае квадратичная форма (10.21) не будет содержать произведений координат или, как говорят, приведется к сумме квадратов:

$$\varphi(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n c_k y_k^2.$$

Существует бесчисленное множество таких преобразований, среди которых остановимся на ортогональном преобразовании ($B^* = B^{-1}$). Формула (10.23) принимает вид

$$C = B^{-1}AB.$$

Таким образом, чтобы привести квадратичную форму к сумме квадратов при помощи ортогонального преобразования, нужно привести к главным осям ее матрицу. Тогда

$$\varphi(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2.$$

Остановимся кратко на классификации квадратичных форм. Если при всех вещественных значениях x_k квадратичная форма остается положительной и лишь при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ обращается в нуль, она называется *определенно положительной*. Квадратичная форма, принимающая только отрицательные значения, называется *определенно отрицательной*. Если форма может принимать значения различных знаков, она называется *знакопеременной*.

Тип квадратичной формы легко устанавливается, если она приведена каким-либо способом к сумме квадратов. Так, если все коэффициенты при квадратах переменных оказались положительными, то форма — определено положительная (и наоборот).

Из сказанного следует вывод, который понадобится в дальнейшем. Если квадратичная форма — определено положительная, то все характеристические числа ее матрицы положительны.

§ 39. Собственные колебания упругих систем с конечным числом степеней свободы

1. Задача собственных колебаний систем с конечным числом степеней свободы находится в связи с изложенной выше алгебраической теорией приведения матриц к диагональному виду. Проследим эту связь.

Рассмотрим упругую систему с n степенями свободы. Удобной моделью такой системы является балка, несущая n сосредоточенных масс (фиг. 85). Деформированное состоя-

ние балки определено, если известны перемещения ее n точек y_1, y_2, \dots, y_n . Вектор

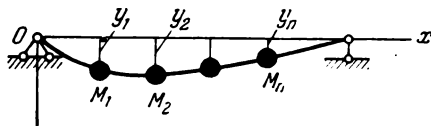
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

характеризует, таким образом, деформацию системы.

Обозначим, далее, через δ_{ik} перемещение i -й точки от единичной силы, приложенной в k -й точке¹⁾. Совокупность единичных перемещений составляет матрицу

$$K = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix},$$

которую будем называть *матрицей влияния перемещений* или просто *матрицей перемещений* для заданной системы.



Фиг. 85.

Свойства матрицы перемещений хорошо изучены. Так, из элементарного курса статики сооружений известно, что побочные перемещения, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

Это значит, что матрица перемещения является симметричной матрицей, и следовательно, все ее характеристические

¹⁾ Не смешивать с символом Кронекера (стр. 218).

числа — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} - \lambda & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} - \lambda & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

— вещественны.

Если заданная система статически устойчива, то, как можно показать, *все характеристические числа матрицы перемещений положительны*. Доказательство этого важного свойства требует рассмотрения потенциальной энергии деформации.

Пусть балка загружена n сосредоточенными силами $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Перемещение i -й точки от действия этих сил будет:

$$y_i = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} P_k, \quad (10.24)$$

а потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ik} P_i P_k. \quad (10.25)$$

Из формулы (10.25) видно, что потенциальная энергия деформации является квадратичной формой внешних сил, причем матрица этой квадратичной формы совпадает с матрицей перемещений. Но по своему смыслу потенциальная энергия деформации есть величина положительная; отсюда следует положительность всех характеристических чисел матрицы перемещений.

Оговорка насчет устойчивости заданной системы весьма существенна. Если система статически неустойчива, то квадратичная форма (10.25), где δ_{ik} определяются с учетом параметрической нагрузки ¹⁾, может принимать также и отрицательные значения. Число отрицательных характеристических чисел матрицы перемещений определяет тогда *степень неустойчивости* заданной системы, т. е. число воз-

¹⁾ Например, в случае стержня, сжатого продольной силой, «единичные» перемещения δ_{ik} находятся с учетом продольно-поперечного изгиба.

можных форм потери статической устойчивости. В дальнейшем мы, естественно, ограничимся статически устойчивыми системами.

2. После сделанных предварительных замечаний перейдем к составлению уравнений собственных колебаний.

Система, точкам которой даны отклонения от положения статического равновесия, будучи предоставлена самой себе, находится под действием сил инерции — $m_i y_i''$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

Вычисляя по формуле (10.24) прогиб в любой точке

$$y_i = - \sum_{k=1}^n \delta_{ik} m_k y_k'' \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

получаем уравнения собственных колебаний

$$\sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} y_k'' + y_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (10.26)$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений может быть записана в виде одного матричного уравнения. Введем матрицу C с элементами

$$C_{ik} = m_k \delta_{ik}.$$

Обозначив, далее, через y'' вектор, составляющие которого равны вторым производным от составляющих вектора y , перепишем систему (10.26) в виде ¹⁾

$$C y'' + y = 0. \quad (10.27)$$

Будем разыскивать свободные гармонические колебания:

$$y = v \sin(\omega t + \gamma), \quad (10.28)$$

где ω — частота колебаний, γ — начальная фаза, v — вектор, составляющие которого равны амплитудам колебаний сосредоточенных масс:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

¹⁾ Заметим, что часто уравнения собственных колебаний записывают через элементы матрицы C^{-1} , т. е. через коэффициенты жесткости системы.

Подставляя (10.28) в (10.27) и сокращая на $\sin(\omega t + \gamma)$, получим систему n алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{v} - \omega^2 \boldsymbol{C} \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \quad (10.29)$$

или в развернутом виде

$$v_i - \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} v_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (10.30)$$

Для того чтобы система (10.30) имела отличное от нуля решение, необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$|\boldsymbol{E} - \omega^2 \boldsymbol{C}| = 0. \quad (10.31)$$

Мы получаем, таким образом, алгебраическое уравнение, которое позволяет найти n собственных частот системы $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. В развернутой форме уравнение собственных частот принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1 - m_1 \delta_{11} \omega^2 & -m_2 \delta_{12} \omega^2 & \dots & -m_n \delta_{1n} \omega^2 \\ -m_1 \delta_{21} \omega^2 & 1 - m_2 \delta_{22} \omega^2 & \dots & -m_n \delta_{2n} \omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -m_1 \delta_{n1} \omega^2 & -m_2 \delta_{n2} \omega^2 & \dots & 1 - m_n \delta_{nn} \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив собственные частоты, подставим одну из них, например ω_j , в уравнения (10.30); мы найдем тогда формы собственных колебаний, т. е. совокупность перемещений, соответствующих каждой частоте ω_j :

$$v_{1j}, v_{2j}, v_{3j}, \dots, v_{nj}.$$

Как видно из (10.29), формы собственных колебаний — это собственные векторы матрицы \boldsymbol{C} ; собственные частоты согласно (10.31) выражаются через характеристические числа λ_k той же матрицы:

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ занумерованы в порядке убывания ($\lambda_1 = \lambda_{\max}$).

Матрица C симметричной, вообще говоря, не является. Будут ли все ее характеристические числа вещественными? Обозначим диагональную матрицу

$$M = [m_1, m_2, \dots, m_n].$$

Тогда $C = KM$, и уравнение (10.29) принимает вид

$$v - \omega^2 KMv = 0. \quad (10.32)$$

Введя новый вектор $u = M^{-\frac{1}{2}}v$, где

$$M^{-\frac{1}{2}} = [\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \dots, \sqrt{m_n}],$$

перепишем (10.32) в виде

$$M^{-\frac{1}{2}}u - \omega^2 KM^{-\frac{1}{2}}u = 0,$$

или после умножения слева на $M^{\frac{1}{2}}$

$$u - \omega^2 M^{\frac{1}{2}}KM^{-\frac{1}{2}}u = 0.$$

Характеристические числа матрицы $M^{\frac{1}{2}}KM^{-\frac{1}{2}}$ попрежнему равны $1/\omega^2$, однако эта матрица является симметричной. Следовательно, все сказанное в отношении симметричных матриц сохраняет силу для матриц типа KM . В частности, условие ортогональности (10.17) принимает вид

$$\sum_{j=1}^n m_j v_{ji} v_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases} \quad (10.33)$$

и истолковывается следующим образом: работа инерционных сил i -й формы колебаний на перемещениях k -й формы ($i \neq k$) всегда равна нулю.

3. В ряде случаев удобна несколько иная трактовка задачи о собственных колебаниях. Вернемся к уравнению (10.27)

$$Cy'' + y = 0.$$

Преобразуем переменные, выбрав их таким образом, чтобы матрица C стала диагональной:

$$C_0 = \left[\frac{1}{\omega_1^2}, \frac{1}{\omega_2^2}, \dots, \frac{1}{\omega_n^2} \right].$$

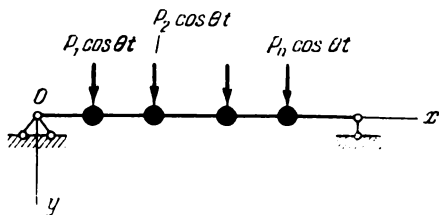
Тогда неизвестные разделятся, и система уравнений распадется на отдельные уравнения, каждое из которых содержит по одному неизвестному:

$$\frac{1}{\omega_k^2} y_k'' + y_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Говорят, что уравнение (10.27) приведено к главным осям матрицы C .

§ 40. Вынужденные колебания системы с конечным числом степеней свободы

1. Пусть система нагружена n сосредоточенными силами, частоты и фазы которых для простоты будем считать оди-



Фиг. 86.

наковыми (фиг. 86). Динамический прогиб в i -й точке согласно формуле (10.24) будет:

$$y_i = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} (P_k \cos \theta t - m_k y_k'').$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} y_k'' + y_i = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} P_k \cos \theta t \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

или в матричной форме

$$Cy'' + y = Kp \cos \theta t, \quad (10.34)$$

где p — вектор, составленный из амплитуд нагрузки P_i .
Решение системы (10.34) ищем в виде

$$y = a \cos \theta t.$$

Подставляя в (10.34) и сокращая на $\cos \theta t$, находим:

$$(E - \theta^2 C) a = Kp. \quad (10.35)$$

Отсюда

$$a = (E - \theta^2 C)^{-1} Kp. \quad (10.36)$$

Решение (10.36) существует лишь в том случае, если $|E - \theta^2 C| \neq 0$. Но в противном случае, очевидно, $\theta = \omega_j$, где ω_j — одна из собственных частот. Это соответствует резонансу вынужденных колебаний.

2. Возможен другой подход к этой задаче. Введем новые векторы b и q , связанные со старыми a и p соотношениями

$$a = Vb, \quad p = MVq. \quad (10.37)$$

Здесь V — ортогональная матрица, приводящая матрицу C к диагональной форме

$$V^{-1}CV = \left[\frac{1}{\omega_1^2}, \frac{1}{\omega_2^2}, \dots, \frac{1}{\omega_n^2} \right]. \quad (10.38)$$

Подставляя (10.37) в (10.35), умножая слева на V^{-1} и учитывая, что $KM = C$, находим:

$$V^{-1}(E - \theta^2 C)Vb = V^{-1}CVq.$$

Но на основании (10.38)

$$V^{-1}(E - \theta^2 C)V = \left[1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}, 1 - \frac{\theta^2}{\omega_2^2}, \dots, 1 - \frac{\theta^2}{\omega_n^2} \right],$$

отсюда

$$b_k = \frac{q_k \omega_k^2}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_k^2}}. \quad (10.39)$$

Компоненты вектора q_k представляют собой «обобщенные силы», соответствующие «обобщенным перемещениям» b_k ; как следует из второй формулы (10.37),

$$q = V^{-1} M^{-1} p$$

или в развернутой форме

$$q_i = \sum_{k=1}^n \frac{v_{ki}}{m_k} P_k.$$

Перемещения a_i определяются теперь по формуле

$$a_i = \sum_{k=1}^n \frac{v_{ik} q_k \omega_k^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2}}.$$

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ¹⁾

§ 41. Основные определения

1. Многие результаты, изложенные в предыдущей главе, находят далеко идущую аналогию, если вместо векторов в n -мерном пространстве рассматривать функции от одного или нескольких аргументов или, как говорят, векторы в функциональном пространстве.

Однозначную функцию $f(x)$, заданную в интервале $a \leq x \leq b$, можно рассматривать как вектор, имеющий непрерывное множество «составляющих». Независимая переменная x играет роль значка у составляющей, а значение функции $f(x)$ дает величину соответствующей составляющей. Относительно всех встречающихся в дальнейшем функций предполагаем, что они интегрируемы со своими квадратами.

Скалярным произведением двух функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называется интеграл

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx.$$

Две функции, скалярное произведение которых равно нулю:

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = 0,$$

¹⁾ Основная литература: Привалов И. И., Интегральные уравнения. ОНТИ, 1937; Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4. Гостехиздат, 1953.

называются *взаимно ортогональными* в интервале a , b . Скалярное произведение функции самой на себя определяет длину вектора в функциональном пространстве; если длина вектора равна единице

$$\int_a^b \varphi^2(x) dx = 1,$$

то такую функцию будем называть *нормированной*.

Выписанные формулы аналогичны соответствующим формулам для векторов в n -мерном пространстве с тем лишь отличием, что операция суммирования заменена интегрированием в интервале a , b .

О функциях $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ортогональных и нормированных

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = \delta_{ik} \quad (11.1)$$

(δ_{ik} — символ Кронекера), говорят, что они составляют *ортонормированную* систему.

Простейшим примером ортогональных систем являются системы тригонометрических функций. Так, функции

$$\sin x, \quad \sin 2x, \quad \sin 3x, \dots$$

ортогональны в интервале $0, 2\pi$. Для нормирования нужно каждую из них разделить на $\sqrt{\pi}$.

Система называется *полной* (замкнутой), если не существует функции, не принадлежащей к системе и ортогональной ко всем функциям этой системы. В противном случае система имеет пропуски и называется *неполной*. Например, приведенная выше система является неполной, потому что, скажем, функция $\cos x$ ортогональна в интервале $0, 2\pi$ ко всем функциям системы. В теории рядов Фурье доказывается, что полной будет система

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

Большое значение имеет задача о представлении произвольной функции $f(x)$ в виде ряда по ортонормированной системе функций

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x). \quad (11.2)$$

Такой ряд называют *обобщенным рядом Фурье*. Коэффициенты Фурье a_k определим, умножая ряд почленно на $\varphi_k(x)$ и интегрируя в интервале a, b . Используя (11.1), получим:

$$a_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx.$$

Числа a_k представляют собой «проекции» функционального вектора $f(x)$ на направление вектора $\varphi_k(x)$. Сходимость ряда (11.2) еще не означает, что его сумма равна $f(x)$. Для того чтобы ряд (11.2) для любой функции $f(x)$ сходился к этой функции, необходимо, чтобы система $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ была полной.

2. Линейному преобразованию в n -мерном пространстве соответствует интегральное преобразование

$$F(x) = \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Функция двух переменных $K(x, \xi)$ является аналогом матрицы преобразования; эта функция называется *ядром*. В дальнейшем мы встретимся только с ядрами, ограниченными и непрерывными относительно обоих аргументов.

Можно построить алгебру ядер, во многом напоминающую матричную алгебру. Так, произведение двух ядер $K(x, \xi)$ и $L(x, \xi)$ определяется как новое ядро

$$M(x, \xi) = \int_a^b K(x, \tau) L(\tau, \xi) d\tau.$$

«Степени» ядер

$$K_2(x, \xi) = \int_a^b K(x, \tau) K(\tau, \xi) d\tau$$

и вообще

$$K_{n+1}(x, \xi) = \int_a^b K_n(x, \eta) K(\eta, \xi) d\eta$$

называются *итерированными ядрами*. Как и в алгебре матриц, умножение здесь, вообще говоря, некоммутативно

$$\int_a^b K(x, \eta) L(\eta, \xi) d\eta \neq \int_a^b L(x, \eta) K(\eta, \xi) d\eta.$$

3. Уравнение

$$\int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x),$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная, а $f(x)$ — известная функции, называется *интегральным уравнением Фредгольма первого рода*. Решение такого уравнения сводится, очевидно, к определению ядра, обратного по отношению к $K(x, \xi)$; эта задача далеко не всегда разрешима.

Интегральным уравнением Фредгольма второго рода называется уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad (11.3)$$

где λ — некоторый параметр. При $f(x) \equiv 0$ уравнение называется *однородным*:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0. \quad (11.4)$$

Уравнение (11.4) удовлетворяется при $\varphi(x) \equiv 0$. Ненулевые решения оно имеет, вообще говоря, лишь при определенных значениях параметра λ . Эти значения λ_x называются *фундаментальными числами ядра* $K(x, \xi)$, а соответствующие решения — *фундаментальными функциями*. Фундамен-

тальные числа (точнее, их обратные значения) и фундаментальные функции являются аналогами характеристических чисел и собственных векторов в алгебре матриц¹⁾.

§ 42. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма

1. Существует класс интегральных уравнений, сводимых непосредственно к системам линейных алгебраических уравнений. Это — интегральные уравнения с *вырожденным* ядром. Будем называть ядро вырожденным, если оно имеет вид

$$K(x, \xi) = \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(\xi). \quad (11.5)$$

Существенно, что ядро состоит из *конечного* числа слагаемых. Подставив (11.5) в (11.3), получим:

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \int_a^b b_k(\xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x). \quad (11.6)$$

Из (11.6) видно, что

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) c_k, \quad (11.7)$$

где

$$c_k = \int_a^b b_k(\xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Для определения постоянных c_k умножим уравнение (11.6) почленно на $b_i(x)$ и проинтегрируем в интервале a, b . В результате получим систему уравнений

$$c_i - \lambda \sum_{k=1}^n a_{ik} c_k = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (11.8)$$

где обозначено:

$$a_{ik} = \int_a^b b_i(\xi) a_k(\xi) d\xi, \quad f_i = \int_a^b b_i(\xi) f(\xi) d\xi.$$

¹⁾ Общая точка зрения на эти объекты развивается в функциональном анализе. Об этом см., например, Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу. ИЛ, 1954.

Итак, решение уравнения (11.3) дается формулой (11.7), причем коэффициенты c_k определяются из системы алгебраических уравнений (11.8). Определитель этой системы имеет вид

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если определитель $D(\lambda)$ отличен от нуля, то система (11.8) имеет единственное определенное решение. В то же время однородная система

$$c_i - \lambda \sum_{k=1}^n a_{ik} c_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (11.9)$$

имеет только нулевое решение ($c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$).

Пусть теперь $D(\lambda) = 0$. В этом случае неоднородная система (11.8) допускает ненулевые решения. Уравнение $D(\lambda) = 0$ имеет, очевидно, n корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Следовательно, однородная система разрешима лишь при n значениях параметра λ .

Возвратимся к интегральным уравнениям (11.3) и (11.4). Если $\lambda \neq \lambda_k$, то неоднородное уравнение имеет единственное решение, а соответствующее однородное уравнение допускает только нулевое решение $\varphi(x) \equiv 0$. Если же $\lambda = \lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то неоднородное уравнение (11.3) за исключением случаев, зависящих от вида $f(x)$, неразрешимо; соответствующее однородное уравнение допускает ненулевые решения.

2. Эти результаты распространяются на общий случай произвольного ядра и формулируются в виде следующих *теорем Фредгольма*.

Неоднородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x)$$

имеет единственное конечное решение при всех $\lambda \neq \lambda_k$; при

этом однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0$$

допускает только нулевое решение.

Если $\lambda = \lambda_k$, то однородное уравнение и уравнение, сопряженное с ним [т. е. имеющее ядро $K(\xi, x)$, транспонированное по отношению к $K(x, \xi)$], имеют ненулевые решения:

$$\varphi_k(x) - \lambda_k \int_a^b K(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi = 0,$$

$$\psi_k(x) - \lambda_k \int_a^b K(\xi, x) \psi_k(\xi) d\xi = 0.$$

В этом случае неоднородное уравнение разрешимо лишь при условии

$$\int_a^b f(x) \psi_k(x) dx = 0. \quad (11.10)$$

§ 43. Симметричные интегральные уравнения. Разложение по фундаментальным функциям

1. Ядро (и соответствующее интегральное уравнение) называется *симметричным*, если

$$K(x, \xi) \equiv K(\xi, x).$$

Теоремы Фредгольма сохраняют силу для симметричных ядер; в этом случае, однако, отпадает необходимость различать заданное и сопряженное уравнения. Условие (11.10) принимает вид

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = 0. \quad (11.11)$$

Симметричные уравнения обладают и другими, более специальными свойствами. Все фундаментальные числа

симметричных ядер вещественны, а фундаментальные функции — взаимно ортогональны:

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = \delta_{ik}. \quad (11.12)$$

Рассмотрим вопрос о разложении некоторой функции $f(x)$ в ряд по фундаментальным функциям симметричного ядра

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x). \quad (11.13)$$

Здесь

$$f_k = \int_a^b f(\xi) \varphi_k(\xi) d\xi. \quad (11.14)$$

Фундаментальные функции произвольного симметричного ядра $K(x, \xi)$ полной системы, вообще говоря, не составляют. Поэтому ряд (11.13) может и не сходиться к функции $f(x)$. Установление класса функций, которые могут быть представлены в виде ряда по фундаментальным функциям ядра $K(x, \xi)$, является важной задачей; эту задачу решает известная *теорема Гильберта-Шмидта*.

Функция $f(x)$ называется представленной *«истокообразно»* через ядро $K(x, \xi)$, если существует непрерывная функция $p(x)$, такая, что

$$f(x) = \int_a^b K(x, \xi) p(\xi) d\xi. \quad (11.15)$$

Теорема Гильберта-Шмидта гласит, что функция $f(x)$, представленная истокообразно при помощи ядра $K(x, \xi)$, разлагается в равномерно сходящийся ряд по фундаментальным функциям этого ядра.

Само ядро $K(x, \xi)$ также может быть формально разложено в ряд (11.13). Согласно (11.14)

$$f_k = \int_a^b K(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi = \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k},$$

откуда

$$K(x, \xi) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(\xi)}{\lambda_k}. \quad (11.16)$$

Это — так называемая *билинейная* формула для ядра. Ряд (11.16) сходится не для всех ядер. Ядро $K(x, \xi)$ называется *определенно положительным*, если для всех непрерывных функций $p(x)$ аналог квадратичной формы

$$J = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) p(x) p(\xi) dx d\xi \quad (11.17)$$

принимает только положительные значения. В этом случае все фундаментальные числа ядра положительны. Согласно теореме Мерсера, если $K(x, \xi)$ — определено положительное ядро, то ряд (11.16) сходится абсолютно и равномерно. В теории интегральных уравнений доказывается, что теорема Мерсера остается справедливой также для тех ядер, которые имеют конечное число отрицательных фундаментальных чисел.

2. Рассмотрим неоднородное уравнение (11.3). Записав его в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (11.18)$$

замечаем, что второе слагаемое в правой части представлено «истокообразно» при помощи $K(x, \xi)$ [роль «истока» играет функция $\varphi(\xi)$ и, следовательно, к нему применима теорема Гильберта-Шмидта]. Отсюда вытекает возможность разложения в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x).$$

Для отыскания коэффициентов ряда преобразуем (11.18) к виду

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) [f(\xi) + g(\xi)] d\xi,$$

где $g(x) = \varphi(x) - f(x)$. Умножая это уравнение почленно на $\varphi_k(x)$ и интегрируя в интервале a, b , получим:

$$g_k = \frac{\lambda}{\lambda_k} (f_k + g_k).$$

Здесь f_k и g_k — коэффициенты Фурье для функций $f(x)$ и $g(x)$. Таким образом,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x)$$

и, следовательно,

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x). \quad (11.19)$$

Если функция $f(x)$, кроме того, разложима в ряд по $\varphi_k(x)$, формула (11.19) может быть записана в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x). \quad (11.20)$$

3. Изложенные выше результаты легко обобщаются на ядра типа $m(\xi)K(x, \xi)$, где $m(\xi)$ — положительная функция, т. е. $m(\xi) > 0$ для всех $a \leq \xi \leq b$. Такие ядра называют *нагруженными*.

Умножая обе части уравнения (11.18) на $\sqrt{m(x)}$ и вводя новую искомую функцию $\psi(x) = \sqrt{m(x)}\varphi(x)$, приходим к интегральному уравнению

$$\psi(x) = f(x)\sqrt{m(x)} + \lambda \int_a^b L(x, \xi)\psi(\xi) d\xi$$

с ядром

$$L(x, \xi) = \sqrt{m(x)m(\xi)}K(x, \xi).$$

Ядро $L(x, \xi)$ симметрично, поэтому к нему применима вся предыдущая теория. Условие ортогональности (11.12) принимает вид

$$\int_a^b \psi_i(x)\psi_k(x) dx = \delta_{ik}.$$

Отсюда, возвращаясь к прежним функциям $\varphi(x)$, получаем:

$$\int_a^b m(x) \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = \delta_{ik}. \quad (11.21)$$

В таких случаях говорят, что функции $\varphi_i(x)$ ортогональны с «весом» $m(x)$. Билинейная формула (11.16) записывается в виде

$$L(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x) \psi_k(\xi)}{\lambda_k},$$

откуда после сокращения на $\sqrt{m(x)m(\xi)}$ вновь получаем формулу (11.16).

Теорема Гильберта-Шмидта также сохраняет силу для нагруженных ядер; коэффициенты Фурье, однако, вычисляются с весом $m(x)$:

$$a_k = \int_a^b m(\xi) f(\xi) \varphi_k(\xi) d\xi.$$

4. При изложении теории интегральных уравнений мы пользовались обычным определением интеграла (в смысле Римана). Результаты могут быть распространены на уравнения с интегралами в смысле Стильтьеса.

Рассмотрим функцию $M(x)$, дифференцируемую всюду, за исключением конечного числа точек x_1, x_2, \dots, x_n . В этих точках функция $M(x)$ терпит разрывы первого рода

$$M(x_k + \varepsilon) - M(x_k - \varepsilon) = M_k.$$

Между точками разрыва

$$\frac{dM}{dx} = m(x).$$

Функция, обладающая перечисленными свойствами, называется *функцией распределения*. Приведем пример такой функции. Пусть балка, помимо распределенной массы $m(x)$, несет также n сосредоточенных масс M_1, M_2, \dots, M_n (фиг. 85). Вычисляя сумму масс, лежащих слева (или справа) от сечения с произвольной координатой x , мы получим, очевидно, функцию, обладающую всеми свойствами функции

распределения $M(x)$. Эта функция обладает еще одним важным свойством. Легко видеть, что $M(x_k) > M(x_i)$, если $x_k > x_i$, т. е. функция $M(x)$ — *монотонно возрастающая*.

Составим выражение

$$J = \int_a^b f(x) m(x) dx + \sum_{k=1}^n f(x_k) M_k,$$

состоящее из интеграла в обычном смысле и конечной суммы. Этот обобщенный интеграл называется *интегралом Стильтьеса* и обозначается

$$J = \int_a^b f(x) dM(x).$$

Интеграл Стильтьеса обладает всеми основными свойствами обычного интеграла ¹⁾

В дальнейшем нам понадобится формула интегрирования по частям

$$\int_a^b f(x) dM(x) = f(x) M(x) \Big|_a^b - \int_a^b M(x) df(x), \quad (11.22)$$

аналогичная общеизвестной формуле для интеграла Римана. Если $f(x)$ — дифференцируемая функция, то

$$df(x) = \frac{df}{dx} dx;$$

в этом случае формула (11.22) позволяет преобразовать интеграл Стильтьеса в интеграл в обычном смысле.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) dQ(\xi) = f(x),$$

где $K(x, \xi)$ — симметричное ядро. Если функция распределения $Q(x)$ — монотонно возрастающая, то все результаты классической теории линейных интегральных уравнений рас-

¹⁾ Об этом см., например, Г л и в е н к о В. И., Интеграл Стильтьеса, ОНТИ, 1936.

пространяются на уравнение с интегралом Стильтьеса. Нужно только во всех формулах, где стоят обыкновенные дифференциалы dx , $d\xi$ и т. д., поставить дифференциалы Стильтьеса $dQ(x)$, $dQ(\xi)$. Так, условие ортогональности (11.12) принимает вид

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dQ(x) = \delta_{ik}. \quad (11.23)$$

Определение «истокообразно» представленной функции изменяется следующим образом:

$$f(x) = \int_a^b K(x, \xi) p(\xi) dQ(\xi),$$

коэффициенты Фурье вместо (11.14) вычисляются по формуле

$$a_k = \int_a^b f(\xi) \varphi_k(\xi) dQ(\xi),$$

а билинейная формула (11.16) остается без изменения.

Легко видеть, что если функция распределения всюду непрерывна, то $dQ(\xi) = m(\xi) d\xi$, и уравнение с интегралом Стильтьеса переходит в уравнение с нагруженным ядром.

Если функция распределения — не монотонная, то теория усложняется. Так, в случае, если функция $Q(x)$ — неубывающая, т. е. есть участки, где $dQ(x) \equiv 0$, тогда условие ортогональности (11.23) останется в силе; однако теорема Гильберта-Шмидта и билинейная формула видоизменяются. Так, ряд (11.16) сходится всюду, за исключением отрезков, где $dQ(x) \equiv 0$ ¹⁾.

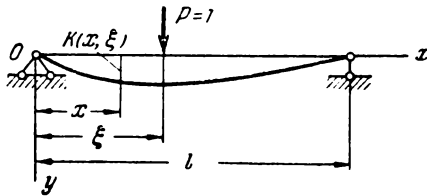
§ 44. Собственные и вынужденные колебания систем с бесконечным числом степеней свободы

1. Подобно тому как теория матриц находила естественное применение в задачах о колебаниях систем с конечным числом степеней свободы, теория линейных интегральных

¹⁾ Подробности см., например, Нудельман Я. Л., Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. Гостехиздат, 1949. См. также оригинальную статью М. Г. Крейна в «Сборнике памяти академика Граве». ГТТИ, 1940.

уравнений является естественным аппаратом для описания колебаний континуальных систем. В качестве модели такой системы рассмотрим балку с распределенной массой.*

Введем понятие о функции влияния прогибов упругой системы. *Функцией влияния прогибов* $K(x, \xi)$ будем называть аналитическое выражение прогиба в точке с координатой x от единичной силы, приложенной в точке с координатой ξ (фиг. 87). Функция влияния является, таким образом



Фиг. 87.

полным аналогом матрицы перемещений, причем, очевидно $\delta_{ik} = K(x_i, \xi_k)$. На основании известной теоремы о взаимности перемещений

$$K(x, \xi) \equiv K(\xi, x), \quad (11.24)$$

т. е. ядро $K(x, \xi)$ — симметричное.

При помощи функции влияния легко составить выражения для прогибов балок от любой комбинации нагрузок. Так, если балка загружена группой сил P_1, P_2, \dots, P_n , то

$$v(x) = \sum_{k=1}^n K(x, \xi_k) P_k. \quad (11.25)$$

Если балка загружена распределенной нагрузкой $q(x)$, то прогиб найдется вычислением интеграла

$$v(x) = \int_0^l K(x, \xi) q(\xi) d\xi. \quad (11.26)$$

Оба случая можно объединить, если ввести функцию распределения $Q(x)$ такую, что всюду, за исключением точек x_1, x_2, \dots, x_n ,

$$\frac{dQ}{dx} = q,$$

а в ЭТИХ ТОЧКАХ

$$Q(x_k + \varepsilon) - Q(x_k - \varepsilon) = P_k.$$

Очевидно, функция $Q(x)$ — обычная поперечная сила. Условимся, что на концах стержня поперечная сила равна нулю (хотя, конечно, может быть отлична от нуля в соседнем, бесконечно близком сечении). Условимся также относительно правила знаков. Прогиб $v(x)$ и нагрузку $q(x)$ будем считать положительными, если они направлены вниз (вдоль оси Oy). Но тогда из определения функции $Q(x)$ следует правило знаков для поперечной силы: будем считать ее положительной, когда она стремится повернуть элемент балки против часовой стрелки.

Функция $Q(x)$ монотонно возрастающей, вообще говоря, не является, однако весь формальный аппарат теории интегралов Стильтьеса применим и в этом случае. Объединяя формулы (11.25) и (11.26), получим:

$$v(x) = \int_0^l K(x, \xi) dQ(\xi). \quad (11.27)$$

Можно, впрочем, преобразовать эту формулу к интегралу Римана. Применим к (11.27) формулу интегрирования по частям (11.22). Учтывая, что $Q(0) = Q(l) = 0$, получаем:

$$v(x) = - \int_0^l \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} Q(\xi) d\xi. \quad (11.28)$$

Дифференцирование ядра $K(x, \xi)$ законно, так как все его производные до третьего порядка включительно по каждому из аргументов существуют. Например,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial x^2} \right] = Q(x, \xi),$$

где $Q(x, \xi)$ — поперечная сила в любом сечении от единичной сосредоточенной силы, EJ — жесткость при изгибе.

2. Составим уравнение собственных колебаний балки с распределенной массой $m(x)$. Определяя по формуле (11.26)

динамический прогиб от инерционной нагрузки, получаем:

$$v(x, t) = \int_0^l K(x, \xi) \left[-m(\xi) \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} \right] d\xi. \quad (11.29)$$

Отсюда приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$v(x, t) + \int_0^l m(\xi) K(x, \xi) \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi = 0. \quad (11.30)$$

Если балка, помимо распределенной массы, несет еще сосредоточенные массы M_1, M_2, \dots, M_n , то вместо (11.29) будем иметь:

$$v(x, t) = \int_0^l K(x, \xi) \left[-m(\xi) \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} \right] d\xi + \\ + \sum_{k=1}^n K(x, \xi_k) \left[-M_k \frac{d^2 v(\xi_k, t)}{dt^2} \right],$$

а вместо уравнения (11.30) — уравнение с интегралом Стильтьеса

$$v(x, t) + \int_0^l K(x, \xi) \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} dM(\xi) = 0. \quad (11.31)$$

Здесь $M(x)$ — функция распределения массы, введенная раньше (§ 43). В дальнейшем будем исходить, однако, из уравнения (11.30), помня, что все результаты для случая сосредоточенных масс могут быть получены формальной заменой $m(\xi) d\xi \rightarrow dM(\xi)$.

Решение уравнения (11.30) ищем в форме

$$v(x, t) = \varphi(x) \sin(\omega t + \gamma),$$

где $\varphi(x)$ — не известные пока формы колебаний. Подставляя в (11.30), получаем после сокращения на $\sin(\omega t + \gamma)$:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^l m(\xi) K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0. \quad (11.32)$$

Здесь

$$\lambda = \omega^2. \quad (11.33)$$

Мы пришли, таким образом, к интегральному уравнению с симметричным ядром $K(x, \xi)$ и «весовой» функцией $m(\xi)$, которая является существенно положительной. Спектр фундаментальных функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x), \dots$$

дает совокупность форм собственных колебаний, спектр фундаментальных чисел

$$\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_k^2, \dots$$

— совокупность частот собственных колебаний. Вещественность собственных частот следует из того, что, во-первых, ядро $K(x, \xi)$ — симметричное, во-вторых, определено положительное. Последнее вытекает из рассмотрения интегральной квадратичной формы (11.17), которая с точностью до $1/2$ равна потенциальной энергии, накопленной в системе с нагрузкой $p(x)$.

Условие ортогональности (11.21) приобретает ясный механический смысл: работа сил инерции l -й формы колебаний на перемещениях k -й формы равна нулю. Легко истолковывается также и теорема Гильберта-Шмидта. «Истокообразно» представленная функция

$$f(x) = \int_0^l K(x, \xi) p(\xi) d\xi$$

есть не что иное, как прогиб от действия некоторой нагрузки $p(x)$; следовательно, теорема означает в данном случае возможность разложения прогибов от любой нагрузки $p(x)$ в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды по формам собственных колебаний. Такие ряды по «балочным» функциям применяют весьма часто.

3. Рассмотрим теперь задачу о вынужденных колебаниях. Пусть система нагружена поперечной нагрузкой

$$\tilde{q}(x, t) = p(x) \cos \theta t.$$

Применяя формулу (11.26), приходим к уравнению

$$v(x, t) + \int_0^l m(\xi) K(x, \xi) \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi = \int_0^l K(x, \xi) p(\xi) \cos \theta t d\xi.$$

Подстановкой

$$v(x, t) = \varphi(x) \cos \theta t$$

оно приводится к неоднородному уравнению Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^l m(\xi) K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad (11.34)$$

где параметр $\lambda = \theta^2$, а $f(x)$ — статический прогиб от амплитудного значения нагрузки:

$$f(x) = \int_0^l K(x, \xi) p(\xi) d\xi. \quad (11.35)$$

Теоремы Фредгольма (§ 42) легко переводятся на язык теории колебаний. В частности, неразрешимость неоднородного уравнения при значении параметра λ , совпадающем с одним из λ_k , — это обычный резонанс вынужденных колебаний ($\theta = \omega_k$). Однако даже в случае синхронизма частот резонанс может и не наступить, если внешняя нагрузка удовлетворяет условию (11.11). Раскроем его смысл. Подставляя (11.35) в (11.11), находим:

$$\int_0^l \int_0^l K(x, \xi) \varphi_k(x) p(\xi) dx d\xi = 0.$$

Но вследствие симметрии ядра

$$\int_0^l K(x, \xi) \varphi_k(x) dx = \frac{\varphi_k(\xi)}{\lambda_k}.$$

Отсюда получаем, что внешняя нагрузка должна быть ортогональна к соответствующей форме колебаний

$$\int_0^l p(\xi) \varphi_k(\xi) d\xi,$$

или, иначе, не должна совершать работы на ее перемещениях.

Для вычисления амплитуд вынужденных колебаний воспользуемся формулой (11.20). Учитывая (11.33), находим:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k \omega_k^2}{\omega_k^2 - \theta^2} \varphi_k(x).$$

Это, по существу, известная формула теории колебаний. Формула покажется еще более знакомой, если учесть, что

$$f_k \omega_k^2 = \int_0^l p(\xi) \varphi_k(\xi) d\xi = Q_k,$$

где Q_k — «обобщенная сила», соответствующая «координате» $\varphi_k(x)$.

§ 45. Интегральные уравнения статической устойчивости

1. Рассмотрим изгиб упругого прямолинейного стержня под действием продольной нагрузки, вызывающей в стержне продольную силу $\alpha N(x)$. Продольная сила считается положительной, если она вызывает сжатие; α — параметр, с точностью до которого задана нагрузка. Опорные устройства стержня и закон изменения жесткости по длине могут быть произвольными; их характер передает функция влияния $K(x, \xi)$.

Составим уравнение продольного изгиба стержня. При отклонении стержня от начального неискривленного положения (фиг. 88) в его сечениях появляется поперечная сила ¹⁾

$$Q(x) = -\alpha N(x) \frac{dv(x)}{dx}. \quad (11.36)$$

Определив по формуле (11.28) прогиб от этой силы, найдем:

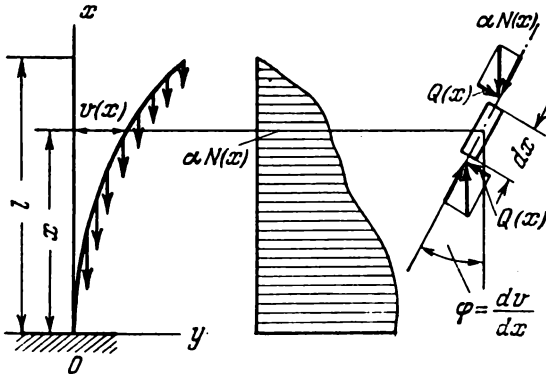
$$v(x) = - \int_0^l \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \left[-\alpha N(\xi) \frac{dv(\xi)}{d\xi} \right] d\xi,$$

¹⁾ Предполагается, что при изгибе стержня внешняя нагрузка не меняет своего направления (т. е. остается направленной вдоль оси Ox). Влияние поведения нагрузки будет рассмотрено ниже, в главе XVII.

откуда, обозначив $v(x) \equiv \psi(x)$, получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\psi(x) - \alpha \int_0^l N(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} d\xi = 0. \quad (11.37)$$

Это уравнение легко может быть сведено к интегральному



Фиг. 88.

уравнению Фредгольма. Дифференцируя (11.37) почленно по x , получаем:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} - \alpha \int_0^l N(\xi) \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial x \partial \xi} \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} d\xi = 0. \quad (11.38)$$

Спектр фундаментальных функций этого уравнения¹⁾

$$\frac{d\psi_1}{dx}, \quad \frac{d\psi_2}{dx}, \quad \dots, \quad \frac{d\psi_k}{dx}, \quad \dots$$

дает совокупность форм изгиба при потере статической устойчивости, спектр фундаментальных чисел

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_k, \quad \dots$$

— совокупность критических параметров.

¹⁾ Для частного случая опорных закреплений оно было установлено Треффцем (Trefftz E., Zeitschr. für angew. Math. und Mech., 1924) и обобщено Я. Л. Нудельманом (цит. на стр. 241).

Если $N(x) > 0$ всюду в интервале $0, l$, т. е. если стержень сжат по всей длине, то все результаты теории симметричных уравнений с нагруженным ядром немедленно прилагаются к уравнению (11.38). Так, условие ортогональности (11.21) принимает вид

$$\int_0^l N(x) \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_k}{dx} dx = \delta_{ik}. \quad (11.39)$$

Но согласно (11.36)

$$N(x) \frac{d\psi_k}{dx} = -\frac{1}{\alpha} Q_k(x),$$

где $Q_k(x)$ — поперечная сила, соответствующая k -й форме потери устойчивости. Подставляя в (11.39) и применяя формулу интегрирования по частям, находим:

$$\int_0^l \psi_i(x) dQ_k(x) = -\alpha \delta_{ik}.$$

Таким образом, работа упругих сил k -й формы потери устойчивости на перемещениях i -й формы равна нулю. Здесь имеет место полная аналогия с задачей собственных колебаний.

Билинейное разложение (11.16) для уравнения (11.38) имеет вид

$$\frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial x \partial \xi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} \frac{d\psi_k(x)}{dx} \frac{d\psi_k(\xi)}{d\xi},$$

причем этот ряд при сделанных оговорках относительно $N(x)$ сходится абсолютно и равномерно. Интегрируя, получаем:

$$K(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x) \psi_k(\xi)}{\alpha_k} + C.$$

Если стержень хотя бы в одной точке x_i имеет жесткую опору, то $K(x_i, \xi) = \psi_k(x_i) = 0$ и, следовательно, $C = 0$.

Билинейное разложение принимает вид

$$K(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x) \psi_k(\xi)}{\alpha_k}. \quad (11.40)$$

Дальнейшие подробности можно найти в книге Я. Л. Нудельмана¹⁾.

2. Пусть стержень наряду с продольной нагрузкой загружен также поперечной нагрузкой $q(x)$. Уравнение продольно-поперечного изгиба получим, применяя к этому случаю формулы (11.26) и (11.27):

$$v(x) = - \int_0^l \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi^2} \left[-\alpha N(\xi) \frac{dv(\xi)}{d\xi} \right] d\xi + \int_0^l K(x, \xi) q(\xi) d\xi.$$

Дифференцируя почленно по x и заменяя $v(x) \equiv \psi(x)$, получаем неоднородное уравнение Фредгольма

$$\frac{d\psi(x)}{dx} - \alpha \int_0^l N(\xi) \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial x \partial \xi^2} \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} d\xi = f(x),$$

где

$$f(x) = \int_0^l \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} q(\xi) d\xi.$$

Его решение согласно (11.20) будет:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k f_k}{\alpha_k - \alpha} \frac{d\psi_k(x)}{dx},$$

причем

$$f_k = \int_0^l N(x) \frac{d\psi_k(x)}{dx} f(x) dx.$$

После почленного интегрирования равномерно сходящегося ряда получаем:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k f_k}{\alpha_k - \alpha} \psi_k(x) + C.$$

В случае, если стержень имеет хотя бы одну жесткую опору, постоянная $C = 0$.

¹⁾ Цит. на стр. 241.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ
УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ

**§ 46. Вывод дифференциальных уравнений
динамической устойчивости**

1. Самые общие уравнения динамической устойчивости упругих систем могут быть получены только на основе уравнений теории упругости для случая конечных деформаций. Этому будет посвящена следующая (тринадцатая) глава книги.

Тем не менее, вид общих уравнений и их основные особенности могут быть установлены и на более простой модели. Удобной моделью для этого оказывается прямолинейный стержень, сжатый продольными силами, однако при самых общих предположениях относительно распределения нагрузок, масс и жесткостей и характера опорных закреплений.

Рассмотрим задачу о колебаниях прямолинейного стержня, нагруженного переменной (в частности, периодической) нагрузкой. Пусть эта нагрузка, распределенная по длине стержня по произвольному закону, вызывает в его сечениях продольную силу $N(x, t)$. Устройство опорных закреплений, а также закон изменения массы $m(x)$ и жесткости $EJ(x)$ будем считать произвольными.

Пусть $K(x, \xi)$ — функция влияния прогибов для данного стержня; тогда динамический прогиб в каждой точке стержня

$$v(x, t) = \int_0^l K(x, \xi) \left[-m(\xi) \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} \right] d\xi + \\ + \int_0^l K(x, \xi) dQ(\xi, t). \quad (12.1)$$

Первое слагаемое в правой части учитывает влияние сил инерции, второе — влияние продольной силы, причем, как и раньше (§ 44),

$$Q(\xi, t) = -N(\xi, t) \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial \xi}.$$

Преобразуем второе слагаемое, интегрируя его по частям:

$$\int_0^l K(x, \xi) dQ(\xi, t) = - \int_0^l N(\xi, t) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi.$$

Подставив результат преобразования в (12.1), получаем интегро-дифференциальное уравнение относительно $v(x, t)$:

$$v(x, t) + \int_0^l m(\xi) K(x, \xi) \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi - \\ - \int_0^l N(\xi, t) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi = 0. \quad (12.2)$$

Уравнение собственных колебаний (11.30) и уравнение статической устойчивости (11.38) — его частные случаи.

В дальнейшем мы будем заниматься нагрузкой вида

$$N(x, t) = \alpha N_0(x) + \beta N_t(x) \Phi(t),$$

где $\Phi(t)$ — некоторая периодическая функция периода $T = 2\pi/\theta$, а α и β — параметры, с точностью до которых заданы постоянная и периодическая составляющие внешней нагрузки. Соответственно уравнение (12.2) переписется в виде

$$v(x, t) + \int_0^l m(\xi) K(x, \xi) \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi - \alpha \int_0^l N_0(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \times \\ \times \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi - \beta \Phi(t) \int_0^l N_t(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi = 0. \quad (12.3)$$

2. Будем искать решение уравнения (12.3) в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \varphi_k(x), \quad (12.4)$$

где $\varphi_k(x)$ — фундаментальные функции ядра $m(\xi)K(x, \xi)$, т. е. решения однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^l m(\xi) K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0 \quad (\lambda = \omega^2), \quad (12.5)$$

а $f_k(t)$ — неизвестные пока функции времени. Фундаментальные функции в дальнейшем предполагаются нормированными.

Ряд (12.4) представляет собой, таким образом, часто применяемое разложение упругой кривой по формам собственных колебаний стержня. Равномерная сходимость этого ряда следует из основных теорем теории линейных интегральных уравнений; для доказательства сходимости достаточно применить теорему Гильберта-Шмидта к правой части выражения (12.1).

Подставляя ряд (12.4) в уравнение (12.3) и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2 f_k}{dt^2} \int_0^l m(\xi) K(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x) - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} f_k \int_0^l N_0(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_k(\xi)}{\partial \xi} d\xi - \\ & - \beta \Phi(t) \int_0^l N_t(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_k(\xi)}{\partial \xi} d\xi = 0. \quad (12.6) \end{aligned}$$

Из уравнения (12.5) следует, что

$$\int_0^l m(\xi) K(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi = \frac{\varphi_k(x)}{\omega_k^2}.$$

Далее, подставляя вместо $K(x, \xi)$ равномерно сходящийся ряд

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\omega_i^2},$$

получим:

$$\int_0^l N_0(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\varphi_k(\xi)}{d\xi} d\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{\omega_i^2} \int_0^l N_0(\xi) \frac{d\varphi_i(\xi)}{d\xi} \frac{d\varphi_k(\xi)}{d\xi} d\xi.$$

Аналогично

$$\int_0^l N_t(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\varphi_k(\xi)}{d\xi} d\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{\omega_i^2} \int_0^l N_t(\xi) \frac{d\varphi_i(\xi)}{d\xi} \frac{d\varphi_k(\xi)}{d\xi} d\xi.$$

Подстановка результатов преобразования в выражение (12.6) дает:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2 f_k}{dt^2} \frac{\varphi_k(x)}{\omega_k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x) - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} f_k \varphi_i(x) - \\ - \beta \Phi(t) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{ik} f_k \varphi_i(x) = 0, \end{aligned}$$

где для сокращения обозначено:

$$\left. \begin{aligned} a_{ik} &= \frac{1}{\omega_i^2} \int_0^l N_0(x) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx, \\ b_{ik} &= \frac{1}{\omega_i^2} \int_0^l N_t(x) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx. \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Представим полученное выражение в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega_i^2} \frac{d^2 f_i}{dt^2} + f_i - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k - \beta \Phi(t) \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} f_k \right] \varphi_i(x) = 0.$$

Для того чтобы левая его часть была равна нулю при любом x и t , нужно, чтобы функции $f_i(t)$ удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_i^2} \frac{d^2 f_i}{dt^2} + f_i - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k - \beta \Phi(t) \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} f_k = 0 \\ (i = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (12.8)$$

Итак, задача о динамической устойчивости сжатого стержня в самом общем случае приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (12.8).

Полученная система, строго говоря, является бесконечной. Однако в дальнейшем мы ограничимся конечным числом уравнений, выбирая каждый раз это число в зависимости от требуемой точности вычислений.

3. Введем вектор, составленный из коэффициентов ряда (12.4)

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

и матрицы

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Введя также диагональную матрицу

$$C_\varphi = \left[\frac{1}{\omega_1^2}, \frac{1}{\omega_2^2}, \dots, \frac{1}{\omega_n^2} \right],$$

перепишем систему (12.8) в виде

$$C_\varphi \frac{d^2 \mathbf{f}}{dt^2} + [E - \alpha A_\varphi - \beta \Phi(t) B_\varphi] \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (12.9)$$

Именно такова, как мы покажем несколько ниже, общая форма уравнений динамической устойчивости.

Установим механический смысл коэффициентов a_{ik} , b_{ik} . Для этого нужно рассмотреть задачу о статической устойчивости стержня. Задача о продольном изгибе стержня под

действием продольной силы $N_0(x)$ приводит к уравнению

$$\psi(x) - \alpha \int_0^l N_0(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} d\xi = 0. \quad (12.10)$$

Ищем решение этого уравнения в виде ряда по фундаментальным функциям ядра $m(\xi)K(x, \xi)$:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x), \quad (12.11)$$

где f_k — некоторые постоянные коэффициенты. Подставляя ряд (12.11), а также разложение

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\omega_i^2}$$

в уравнение (12.10), получим после сравнения коэффициентов при одинаковых $\varphi_i(x)$ систему однородных алгебраических уравнений

$$f_i - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Здесь

$$a_{ik} = \frac{1}{\omega_i^2} \int_0^l N_0(x) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx.$$

В матричной форме полученная система принимает вид

$$(E - \alpha A_{\varphi}) \mathbf{f} = 0.$$

Критические параметры могут быть найдены из уравнения

$$\left| A_{\varphi} - \frac{1}{\alpha} E \right| = 0,$$

или в развернутой форме

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \frac{1}{\alpha} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \frac{1}{\alpha} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \frac{1}{\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Это значит, что коэффициенты a_{ik} составляют матрицу, характеристические числа которой равны обратным значениям критических параметров нагрузки α_k .

Аналогично критические параметры нагрузки $N_i(x)$ могут быть найдены из уравнения

$$\left| B_{\varphi} - \frac{1}{\varphi} E \right| = 0.$$

§ 47. Другая форма дифференциальных уравнений динамической устойчивости

1. Выше мы искали решение задачи динамической устойчивости в виде разложения по фундаментальным функциям задачи собственных колебаний. Другой путь состоит в аппроксимации динамических прогибов с помощью фундаментальных функций задачи статической устойчивости.

Пусть функции

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_k(x), \dots$$

составляют полную систему решений уравнения

$$\psi(x) - \alpha \int_0^l N_0(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} d\xi = 0, \quad (12.12)$$

удовлетворяющих условию нормирования

$$\int_0^l N_0(x) \left(\frac{d\psi_i}{dx} \right)^2 dx = 1. \quad (12.13)$$

Будем искать решение уравнения (12.3) в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \psi_k(x). \quad (12.14)$$

Подстановка этого ряда в уравнение (12.3) дает:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2 f_k}{dt^2} \int_0^l m(\xi) K(x, \xi) \psi_k(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k(x) - \\ & - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} f_k \int_0^l N_0(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\psi_k(\xi)}{d\xi} d\xi - \\ & - \beta \Phi(t) \sum_{k=1}^{\infty} f_k \int_0^l N_t(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\psi_k(\xi)}{d\xi} d\xi = 0. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Учитывая, что

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x) \psi_i(\xi)}{\alpha_i}, \quad (12.16)$$

найдем:

$$\int_0^l m(\xi) K(x, \xi) \psi_k(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)}{\alpha_i} \int_0^l m(\xi) \psi_i(\xi) \psi_k(\xi) d\xi.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} & \int_0^l N_t(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\psi_k(\xi)}{d\xi} d\xi = \\ & = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)}{\alpha_i} \int_0^l N_t(\xi) \frac{d\psi_i(\xi)}{d\xi} \frac{d\psi_k(\xi)}{d\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_i} \int_0^l m(x) \psi_i \psi_k dx = c_{ik}, \\ & \frac{1}{\alpha_i} \int_0^l N_t(x) \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_k}{dx} dx = b_{ik}, \end{aligned} \right\} \quad (12.17)$$

перепишем результаты преобразования следующим образом:

$$\int_0^1 m(\xi) K(x, \xi) \psi_k(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{\infty} c_{ik} \psi_i(x),$$

$$\int_0^1 N_t(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\psi_k(\xi)}{d\xi} d\xi = \sum_{i=1}^{\infty} b_{ik} \psi_i(x).$$

Наконец, на основании уравнения (12.16) имеем:

$$\int_0^1 N_0(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\psi_k(\xi)}{d\xi} d\xi = \frac{\psi_k(x)}{\alpha_k}.$$

После подстановки выражение (12.15) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} \frac{d^2 f_k}{dt^2} \psi_i(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_k}\right) f_k \psi_k(x) -$$

$$- \beta \Phi(t) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} f_k \psi_i(x) = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых $\psi_i(x)$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} \frac{d^2 f_k}{dt^2} + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_i}\right) f_i - \beta \Phi(t) \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} f_k = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots).$$

Эту систему в дальнейшем будем считать состоящей из *конечного* числа уравнений, причем будем записывать ее в матричной форме

$$C_{\psi} \frac{d^2 f}{dt^2} + [E - \alpha A_{\psi} - \beta \Phi(t) B_{\psi}] f = 0. \quad (12.18)$$

Здесь B_{ψ} и C_{ψ} — матрицы с элементами b_{ik} и c_{ik} соответственно, A_{ψ} — диагональная матрица

$$A_{\psi} = \left[\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n} \right].$$

2. То, что системы уравнений (12.9) и (12.18) совпадают, не является простым следствием одинаковой системы

записи. Хотя соответствующие элементы одинаково обозначенных матриц, вообще говоря, различны, между ними существует вполне определенная связь. Для установления этой связи выясним прежде всего механический смысл коэффициентов c_{ik} .

Будем искать решение интегрального уравнения собственных колебаний

$$\varphi(x) - \omega^2 \int_0^l m(\xi) K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0 \quad (12.19)$$

в виде разложения по фундаментальным функциям задачи статической устойчивости

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k(x). \quad (12.20)$$

Подстановка рядов (12.20) и (12.16) в уравнение (12.19) дает:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k(x) - \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_{ik} f_k \psi_i(x) = 0,$$

где попрежнему

$$c_{ik} = \frac{1}{\alpha_i} \int_0^l m(x) \psi_i \psi_k dx. \quad (12.21)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых $\psi_i(x)$, получаем систему однородных алгебраических уравнений

$$f_i - \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} f_k = 0.$$

Уравнение собственных частот имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 c_{11} & -\omega^2 c_{12} & \dots & -\omega^2 c_{1n} \\ -\omega^2 c_{21} & 1 - \omega^2 c_{22} & \dots & -\omega^2 c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\omega^2 c_{n1} & -\omega^2 c_{n2} & \dots & 1 - \omega^2 c_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

или в матричной форме

$$\left| C_{\psi} - \frac{1}{\omega^2} E \right| = 0. \quad (12.22)$$

Его можно получить также из матричного уравнения (12.18), полагая в нем $\alpha = \beta = 0$, $f = a \sin(\omega t + \gamma)$.

Итак, коэффициенты c_{ik} составляют матрицу, характеристические числа которой равны $1/\omega^2$. Это значит, C_φ и C_ψ — подобные матрицы: они осуществляют одно и то же линейное преобразование, но описанное в «разных системах координат» (при различном выборе фундаментальных функций). Аналогичное заключение можно сделать относительно матриц A_φ и A_ψ , B_φ и B_ψ . Вообще, уравнения

$$\left. \begin{aligned} C_\varphi \frac{d^2 f_\varphi}{dt^2} + [E - \alpha A_\varphi - \beta \Phi(t) B_\varphi] f_\varphi &= 0, \\ C_\psi \frac{d^2 f_\psi}{dt^2} + [E - \alpha A_\psi - \beta \Phi(t) B_\psi] f_\psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.23)$$

описывают один и тот же процесс и отличаются только тем, что входящие в них матрицы и векторы взяты в «разных осях». Для установления вида этого преобразования рассмотрим два равномерно сходящихся ряда:

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{k\varphi}(t) \varphi_k(x),$$

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{k\psi}(t) \psi_k(x).$$

Используя условия ортогональности (11.21) и (11.39), легко получим:

$$f_{i\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{k\psi} \int_0^l m(x) \varphi_i \psi_k dx,$$

$$f_{i\psi} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{k\varphi} \int_0^l N_0(x) \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx.$$

Короче

$$f_\varphi = V f_\psi,$$

где

$$\{V\}_{ik} = \int_0^l m(x) \varphi_i \psi_k dx.$$

Обратное преобразование осуществляется матрицей с элементами

$$\{V^{-1}\}_{ik} = \int_0^l N_0(x) \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx.$$

Коэффициенты уравнений преобразуются следующим образом:

$$A_\psi = V^{-1} A_\varphi V,$$

$$B_\psi = V^{-1} B_\varphi V,$$

$$C_\psi = V^{-1} C_\varphi V.$$

3. Остановимся вкратце еще на одной форме уравнений динамической устойчивости. Перепишав уравнение в виде

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + C^{-1}(E - \alpha A) f - \beta \Phi(t) C^{-1} B f = 0,$$

попробуем выбрать такие оси координат, чтобы матрица $C^{-1}(E - \alpha A)$ стала диагональной. Уравнения динамической устойчивости в этом случае особенно упрощаются:

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + g_i f_i - \beta \Phi(t) \sum_{k=1}^n h_{ik} f_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (12.24)$$

Покажем, что такое преобразование равносильно принятию в качестве фундаментальных функций форм собственных колебаний стержня, нагруженного постоянной составляющей продольной нагрузки. Действительно, уравнение собственных колебаний нагруженного стержня имеет вид

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + (E - \alpha A) f = 0$$

и подстановкой

$$f(t) = u \sin(\Omega t + \gamma)$$

приводится к уравнению

$$(E - \alpha A - \Omega^2 C) u = 0.$$

Собственные частоты Ω находятся из уравнения

$$|C^{-1}(E - \alpha A) - \Omega^2 E| = 0, \quad (12.25)$$

из которого следует, что $g_i = \Omega_i^2$. Уравнения (12.24) записываются теперь в виде

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + \Omega_i^2 \left[f_i - 2\beta \Phi(t) \sum_{k=1}^n \mu_{ik} f_k \right] = 0, \quad (12.26)$$

где

$$\mu_{ik} = \frac{h_{ik}}{2\Omega_i^2}.$$

§ 48. Применение вариационных методов

1. Для составления уравнений динамической устойчивости наряду с описанным выше методом интегральных уравнений могут быть применены также вариационные методы — метод Ритца, метод Галеркина. Благодаря крайней простоте вычислений последний метод получил наибольшее распространение. Покажем применение метода Галеркина на примере задачи о динамической устойчивости сжатых прямолинейных стержней.

Дифференциальное уравнение продольного изгиба прямолинейного стержня, сжатого переменной по длине продольной силой $N(x)$, как известно, будет:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right] + \frac{d}{dx} \left[N(x) \frac{dv}{dx} \right] = 0.$$

Полагая в этом уравнении

$$N = \alpha N_0(x) + \beta N_t(x) \Phi(t)$$

и вводя в него силы инерции, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left[N_0(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \\ + \beta \Phi(t) \frac{\partial}{\partial x} \left[N_t(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Уравнение (12.27) составлено для случая, когда функции $N_0(x)$ и $N_t(x)$ непрерывны по всей длине стержня. Непрерывной вместе со своей производной считается также функция $J(x)$. Если стержень загружен сосредоточенными силами, а также в случае, когда закон изменения жесткости не является непрерывным, уравнение (12.27) должно быть заменено несколькими уравнениями такого же вида (по

числу участков) с дополнительными условиями на границе смежных участков. В этом отношении метод интегральных уравнений имеет то преимущество, что позволяет составить одно уравнение, пригодное для всего стержня независимо от характера загрузки и закона изменения жесткости.

Предполагая непрерывность всех коэффициентов уравнения (12.27), применим к нему вариационный метод Галеркина. Принимая приближенно

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^n f_k(t) \gamma_k(x),$$

где $\gamma_k(x)$ — аппроксимирующие функции, удовлетворяющие граничным условиям, подставим это выражение в уравнение (12.27). Потребуем в соответствии с методом Галеркина, чтобы результат подстановки был ортогонален каждой из функций $\gamma_i(x)$. Это приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $f_k(t)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{d^2 f_k}{dt^2} \int_0^l m \gamma_i \gamma_k dx + \sum_{k=1}^n f_k \int_0^l \gamma_i \frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 \gamma_k}{dx^2} \right) dx + \\ + \alpha \sum_{k=1}^n f_k \int_0^l \gamma_i \frac{d}{dx} \left(N_0 \frac{d \gamma_k}{dx} \right) dx + \\ + \beta \Phi(t) \sum_{k=1}^n f_k \int_0^l \gamma_i \frac{d}{dx} \left(N_t \frac{d \gamma_k}{dx} \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Введем матрицы F , R , P и Q с элементами

$$\begin{aligned} \{F\}_{ik} &= \int_0^l m \gamma_i \gamma_k dx, \\ \{R\}_{ik} &= \int_0^l \gamma_i \frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 \gamma_k}{dx^2} \right) dx, \\ \{P\}_{ik} &= - \int_0^l \gamma_i \frac{d}{dx} \left(N_0 \frac{d \gamma_k}{dx} \right) dx, \\ \{Q\}_{ik} &= - \int_0^l \gamma_i \frac{d}{dx} \left(N_t \frac{d \gamma_k}{dx} \right) dx. \end{aligned}$$

В матричной форме полученная система уравнений принимает вид

$$F \frac{d^2 f}{dt^2} + [R - \alpha P - \beta \Phi(t) Q] f = 0. \quad (12.28)$$

Положив

$$R^{-1} F = C, \quad R^{-1} P = A, \quad R^{-1} Q = B,$$

приведем уравнение (12.28) к виду, аналогичному (12.23):

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B] f = 0. \quad (12.29)$$

В том случае, когда за аппроксимирующие функции приняты решения дифференциального уравнения собственных колебаний

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \right) - m \omega_k^2 \varphi_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

уравнение (12.29) принимает вид, целиком совпадающий с (12.9).

В приведенном выводе мы предполагали непрерывность всех коэффициентов уравнения (12.27).

Формальное распространение этого приема на случай многих участков интегрирования не обосновано и может привести к ошибочным результатам. Кроме того, формулы для матричных элементов могут оказаться неприменимыми, если выбранные аппроксимирующие функции удовлетворяют геометрическим граничным условиям, но не удовлетворяют динамическим условиям, содержащим производные выше первого порядка. Легко, однако, указать такое преобразование формул, при котором указанные ограничения отпадают. Рассмотрим, например, матричный элемент

$$p_{ik} = - \int_0^l \gamma_i \frac{d}{dx} \left(N_0 \frac{d\chi_k}{dx} \right) dx.$$

Введя функцию распределения $Q_k(x) = N_0 \frac{d\chi_k}{dx}$, которая с точностью до знака равна поперечной силе, соответствующей форме изгиба $\chi_k(x)$, запишем:

$$p_{ik} = - \int_0^l \gamma_i dQ_k(x).$$

Отсюда, интегрируя по частям и полагая, как и ранее, $Q_k(0) = Q_k(l) = 0$, получим:

$$P_{ik} = \int_0^l N_0(x) \frac{d\gamma_i}{dx} \frac{d\gamma_k}{dx} dx.$$

Эта формула уже не содержит производных выше первого порядка и, следовательно, нечувствительна к динамическим граничным условиям для $\gamma_k(x)$. Те же результаты получим, трактуя метод Галеркина в смысле принципа возможных перемещений. Левую часть уравнения (12.27) следует рассматривать как выражение для равнодействующей внешних и внутренних сил, приложенных к единице длины стержня. Составляя работу этих сил на виртуальных перемещениях $\delta f_k \gamma_k(x)$ и добавляя к ней работу сосредоточенных сил, после приравнивания суммы нулю придем к упомянутым выше результатам.

Заметим в заключение, что формальный прием, аналогичный вариационному методу Галеркина, может быть применен и к интегро-дифференциальному уравнению (12.3). Этот прием является развитием вариационного метода, известного под наименованием «метода моментов». Обозначим через $L_\varphi(v)$ и $L_\psi(v)$ результаты подстановки в уравнение (12.3) рядов

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \varphi_k(x)$$

и

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \psi_k(x)$$

соответственно. Тогда дифференциальная система (12.8) может быть получена из уравнения (12.3) путем применения «обобщенного условия ортогональности»

$$\int_0^l L_\varphi(v) m(x) \varphi_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

а система (12.17) — путем применения условия

$$\int_0^l \frac{\partial L_{\psi}(v)}{\partial x} N_0(x) \frac{d\psi_i(x)}{dx} dx = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Для правильного выбора условия ортогональности может оказаться полезной трактовка метода Галеркина как аналога принципа возможных перемещений.

2. Несколько бóльшую свободу в выборе аппроксимирующих функций представляет метод Рунца.

Решение вариационной проблемы

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \min$$

дается, как известно, уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - U) = Q_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (12.30)$$

Здесь T — кинетическая, U — потенциальная энергия системы, q_i — обобщенные координаты, за которые в данном случае примем коэффициенты f_i ряда

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \gamma_i(x), \quad (12.31)$$

Q_i — соответствующие обобщенные силы.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx.$$

После подстановки ряда (12.31) получаем:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{df_i}{dt} \frac{df_k}{dt} \int_0^l m(x) \gamma_i \gamma_k dx.$$

Потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(x) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

Подстановка дает:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_i f_k \int_0^l EJ(x) \frac{d^2 \gamma_i}{dx^2} \frac{d^2 \gamma_k}{dx^2} dx.$$

Для определения обобщенных сил Q_i составим выражение для работы внешней нагрузки. Продольное перемещение вследствие деформации элемента длиной dx с точностью до величин второго порядка, как известно ¹⁾,

$$d\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Работа, совершаемая продольной силой $N(x, t)$ на этом перемещении, будет:

$$dV = N(x, t) d\omega.$$

Полная работа

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l N(x, t) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx$$

или после подстановки ряда (12.31)

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_i f_k \int_0^l N(x, t) \frac{d \gamma_i}{dx} \frac{d \gamma_k}{dx} dx.$$

Обобщенная сила, соответствующая координате f_i :

$$Q_i = \frac{\partial V}{\partial f_i} = \sum_{k=1}^n f_k \int_0^l N(x, t) \frac{d \gamma_i}{dx} \frac{d \gamma_k}{dx} dx.$$

Подстановка полученных выражений в уравнения Лагранжа (12.30) дает:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{d^2 f_k}{dt^2} \int_0^l m(x) \gamma_i \gamma_k dx + \sum_{k=1}^n f_k \int_0^l EJ(x) \frac{d^2 \gamma_i}{dx^2} \frac{d^2 \gamma_k}{dx^2} dx = \\ & = \sum_{k=1}^n f_k \int_0^l N(x, t) \frac{d \gamma_i}{dx} \frac{d \gamma_k}{dx} dx \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned}$$

1) Ось бруса считается несжимаемой.

Полагая, как и ранее,

$$N(x, t) = \alpha N_0(x) + \beta N_t(x) \Phi(t),$$

получим систему дифференциальных уравнений типа (12.28).

§ 49. Особый случай и признаки его существования

1. В предыдущих параграфах было показано, что независимо от выбора фундаментальных функций задачи динамической устойчивости описываются системами дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами одного и того же вида

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B] f = 0. \quad (12.32)$$

Однако структура коэффициентов существенно меняется с переходом от одной системы функций к другой. Так, если в качестве фундаментальных функций приняты формы собственных колебаний стержня $\varphi(x)$, то матрица C будет диагональной, в то время как матрицы A и B диагональными, вообще говоря, не будут. Наоборот, в том случае, когда в качестве фундаментальных функций приняты ψ -функции, диагональной будет матрица A , а если нагрузка $N_0(x)$ и $N_t(x)$ по своему виду совпадают, — то и матрица B . Для упрощения дальнейших выводов будем считать, что это последнее условие выполняется.

Пусть фундаментальные функции задач собственных колебаний и статической устойчивости совпадают¹⁾, т. е.

$$\varphi_k(x) = \psi_k(x). \quad (12.33)$$

В этом случае все три матрицы A , B , C одновременно приводятся к диагональному виду, а система дифференциальных уравнений (12.32) распадается на ряд отдельных уравнений, каждое из которых содержит по одной неизвестной функции:

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + \omega_i^2 \left[1 - \frac{\alpha}{\alpha_i} - \frac{\beta}{\beta_i} \Phi(t) \right] f_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (12.34)$$

Этот частный случай, представляющий значительный интерес, мы уже ранее (глава IX) назвали *особым*; рассмотрим

¹⁾ Точнее, совпадают с точностью до постоянного множителя, так как условия нормирования (11.21) и (11.39) различны.

его теперь более подробно. Матрица A_φ будет диагональной, если

$$\int_0^l N_0(x) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx = 0 \quad \text{при } i \neq k. \quad (12.35)$$

Таким образом, для того чтобы задача динамической устойчивости приводила к уравнениям особого случая (12.34), достаточно, чтобы фундаментальные функции задачи собственных колебаний удовлетворяли условиям ортогональности для фундаментальных функций задачи статической устойчивости.

Другой критерий существования особого случая получим, приравняв нулю побочные элементы матрицы C :

$$\int_0^l m(x) \psi_i' \psi_k' dx = 0 \quad \text{при } i \neq k. \quad (12.36)$$

Формула (12.36) содержит требование, чтобы фундаментальные функции задачи статической устойчивости удовлетворяли условиям ортогональности для фундаментальных функций задачи собственных колебаний.

Критерии (12.35) и (12.36) имеют перед (12.33) то преимущество, что требуют знания только одной системы фундаментальных функций.

2. Несколько примеров, принадлежащих согласно введенной терминологии к особому случаю, было указано в главе IX. Из следующих соображений будет видно, что этими примерами класс задач, приводящих к дифференциальным уравнениям типа (12.34), не исчерпывается.

Попробуем сформулировать условия, при которых имеет место общность фундаментальных функций задач статической устойчивости и собственных колебаний. Пусть $\varphi(x)$ удовлетворяют одновременно двум интегральным уравнениям:

$$\varphi(x) - \omega^2 \int_0^l m(\xi) K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0,$$

$$\varphi(x) - \alpha \int_0^l S(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0.$$

Второе уравнение имеет смысл только при выполнении условий, оговоренных выше (§ 45). Ограничивая общность вывода, считаем, что эти условия выполняются.

Два интегральных оператора имеют совпадающие фундаментальные функции, если они коммутируют (ср. аналогичное положение из теории матриц, § 38):

$$\int_0^l S(x, \eta) m(\xi) K(\eta, \xi) d\eta = \int_0^l m(\eta) K(x, \eta) S(\eta, \xi) d\eta. \quad (12.37)$$

Для случая закрепленных концов и дифференцируемой функции $N_0(x)$ ядро $S(x, \xi)$ может быть записано в виде

$$S(x, \xi) = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[N_0(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \right].$$

Положив для упрощения $N_0 = \text{const}$, получим:

$$S(x, \xi) = - N_0 \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial \xi^2}.$$

Из механического смысла функции влияния прогибов $K(x, \xi)$ следует, что она выражается через функцию влияния моментов $M(x, \xi)$:

$$\frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial x^2} = - \frac{M(x, \xi)}{EJ(x)}.$$

Используя симметрию $K(x, \xi) \equiv K(\xi, x)$, находим:

$$S(x, \xi) = N_0 \frac{M(\xi, x)}{EJ(\xi)}. \quad (12.38)$$

Согласно известной формуле Максвелла-Мора

$$K(x, \xi) = \int_0^l \frac{M(\eta, x) M(\eta, \xi)}{EJ(\eta)} d\eta. \quad (12.39)$$

Подставляя (12.38) и (12.39) в (12.37), получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^l \frac{M(\zeta, x) m(\xi) M(\eta, \zeta) M(\eta, \xi)}{EJ(\zeta) EJ(\eta)} d\eta d\zeta &= \\ &= \int_0^l \int_0^l \frac{m(\zeta) M(\zeta, x) M(\zeta, \eta) M(\xi, \eta)}{EJ(\zeta) EJ(\xi)} d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

Это соотношение можно переписать в следующем виде:

$$\int_0^l \left[\int_0^l \frac{m(\xi) M(\eta, \zeta) M(\eta, \xi)}{EJ(\eta)} d\eta - \int_0^l \frac{m(\eta) M(\zeta, \eta) M(\xi, \eta)}{EJ(\xi)} d\eta \right] \frac{M(\zeta, x)}{EJ(\zeta)} dx = 0.$$

Поскольку оно должно соблюдаться при любом x , получаем:

$$\int_0^l \frac{m(\xi) M(\eta, \zeta) M(\eta, \xi)}{EJ(\eta)} d\eta = \int_0^l \frac{m(\eta) M(\zeta, \eta) M(\xi, \eta)}{EJ(\xi)} d\eta. \quad (12.40)$$

Нетрудно видеть, что условие (12.40) будет выполнено, если стержень имеет симметричную функцию влияния моментов

$$M(x, \xi) \equiv M(\xi, x) \quad (12.41)$$

и если, кроме того, поперечные сечения стержня изменяются по закону

$$J(x) m(x) = \text{const.} \quad (12.42)$$

Условие (12.41) соблюдается, как известно, для стержня, шарнирно опертого по обоим концам¹⁾. Таким образом, если сечение шарнирно опертого стержня, изменяясь по длине, удовлетворяет соотношению (12.42), то задача о динамической устойчивости этого стержня под действием приложенных по концам периодических сил приводится к дифференциальным уравнениям типа (12.34). Частным случаем этой задачи является, очевидно, задача, разобранная Н. М. Беляевым.

Условие (12.41) выполняется также для призматического стержня бесконечной длины, лежащего на сплошном упругом основании.

¹⁾ Условие (12.41) представляет собой в конечном счете требование того, чтобы «фиктивная балка» в графоаналитическом методе определения прогибов совпадала с заданной балкой.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ
**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ
УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ**

§ 50. Предварительные замечания

1. Предыдущее исследование было произведено применительно к простейшей задаче динамической устойчивости прямолинейных стержней, сжатых продольной вибрационной нагрузкой. Однако легко показать, что все основные результаты, полученные для этой простейшей задачи, без каких-либо принципиальных изменений могут быть распространены на общий случай колебаний упругой системы, вызванных действием вибрационной параметрической нагрузки. При этом изменится только вид формул, служащих для вычисления коэффициентов дифференциальных уравнений.

Так, все уравнения, выведенные в предыдущей главе, остаются справедливыми в случае стержневой системы — рамы, нагруженной узловой периодической нагрузкой. Если узлы рамы имеют линейные смещения, то к интегро-дифференциальному уравнению типа (12.3) добавляются дополнительные уравнения, отчего, впрочем, структура окончательных уравнений не изменяется.

В случае криволинейных стержней, очерченных на кривой давления от заданной нагрузки, а также пластинок, нагруженных силами, действующими в срединной плоскости, изменяется только способ вычисления матричных коэффициентов.

Несколько сложнее обстоит дело с задачей о пространственной динамической устойчивости упругих систем, например о динамической устойчивости сжатых тонкостенных стержней или балок, испытывающих изгиб в плоскости наибольшей жесткости. В этом случае колебания сопровождаются

изгибом в одной или двух плоскостях и, кроме того, закручиванием. В соответствии с этим вместо одного исходного уравнения типа (12.3) мы будем иметь два или три уравнения, а вместо дифференциальной системы типа (12.9) — две или три аналогичные системы. Впрочем, известными методами эти системы могут быть объединены в одну, имеющую такую же структуру и обладающую такими же свойствами, как система (12.9).

Вообще задача о колебаниях упругой системы, нагруженной вибрационной параметрической нагрузкой с параметрами α и β , всегда приводит к уравнениям вида

$$L_{\omega} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right) + L_0(\omega) - \alpha L_{\alpha}(\omega) - \beta \Phi(t) L_{\beta}(\omega) = 0, \quad (13.1)$$

где L_{ω} , L_0 , L_{α} , L_{β} — некоторые интегро-дифференциальные операторы, а функция $\omega(x, y, z, t)$ описывает деформированное состояние системы. В том случае, когда это состояние характеризуется несколькими функциями, будем смотреть на уравнение (13.1) как на символическую (тензорную) запись некоторой системы интегро-дифференциальных уравнений.

Частным случаем уравнения (13.1) являются уравнение собственных колебаний

$$(L_0 - \omega^2 L_{\omega}) \varphi = 0$$

и уравнения статической устойчивости

$$(L_0 - \alpha L_{\alpha}) \psi_{\alpha} = 0,$$

$$(L_0 - \beta L_{\beta}) \psi_{\beta} = 0.$$

Выбрав соответствующую систему линейно независимых фундаментальных функций

$$\gamma_1(x, y, z), \quad \gamma_2(x, y, z), \dots, \quad \gamma_n(x, y, z),$$

запишем уравнение (13.1) в матричном представлении:

$$F \frac{d^2 \mathbf{f}}{dt^2} + [R - \alpha P - \beta \Phi(t) Q] \mathbf{f} = 0. \quad (13.2)$$

Здесь \mathbf{f} — вектор, составленный из коэффициентов ряда

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \gamma_k(x, y, z).$$

Способ вычисления матриц — коэффициентов уравнения (13.2) зависит от вида операторов, входящих в (13.1), и от характера фундаментальных функций χ_k . В том случае, когда возможно применение вариационного метода Галеркина, матричные элементы определяются, очевидно, следующим образом:

$$\{F\}_{ik} = \iiint \chi_i L_\omega(\chi_k) dx dy dz,$$

$$\{R\}_{ik} = \iiint \chi_i L_0(\chi_k) dx dy dz,$$

$$\{P\}_{ik} = \iiint \chi_i L_\alpha(\chi_k) dx dy dz,$$

$$\{Q\}_{ik} = \iiint \chi_i L_\beta(\chi_k) dx dy dz.$$

Интегрирование распространяется по всей системе.

Поскольку фундаментальные функции χ_k линейно независимы, определитель $|R| \neq 0$, и, следовательно, уравнение (13.2) можно привести к виду

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B] f = 0,$$

где

$$A = R^{-1}P,$$

$$B = R^{-1}Q,$$

$$C = R^{-1}F.$$

Дальнейшее исследование приводит к результатам, полностью совпадающим с результатами, полученными выше для случая прямолинейных стержней. Этих результатов мы здесь не приводим.

2. Самые общие уравнения динамической устойчивости упругих систем могут быть получены, если исходить из уравнений движения сплошной упругой среды. Эта задача не может быть решена в рамках классической теории малых деформаций, для которых имеет место теорема единственности Кирхгофа; здесь должны быть рассмотрены конечные, хотя и достаточно малые деформации.

Единственность решений в классической теории упругости обусловлена тем, что там не делается различий между геометрией начального, недеформированного состояния среды и геометрией среды после деформации; точнее, уравнения

движения, граничные условия и уравнения связи между напряжениями и деформациями составляют в системе координат недеформированного тела, без учета перемещений, происходящих при переходе в деформированное состояние.

Недостаточность такого описания видна на простейшем примере статического продольного изгиба сжатого стержня. Поставив эту задачу в духе классической теории малых деформаций, мы получим единственное решение, справедливое для всех значений сжимающей нагрузки. Лишь учет дополнительных внутренних сил, возникающих при отклонении стержня от начального положения, позволяет найти правильное решение.

Выше было сказано, что при исследовании устойчивости достаточно ограничиться малыми, хотя и конечными деформациями. Поясним это замечание. Прежде всего, начальное состояние, которое варьируется, обычно характеризуется малыми деформациями и может быть, как правило, определено методами классической теории. Исключение представляют случаи, когда потере устойчивости предшествуют большие деформации в первоначальном состоянии (статические или динамические). В то же время при составлении уравнений, описывающих возмущенное состояние, должны рассматриваться конечные, нелинейные деформации.

При деформации изменяются длины линейных элементов, площади и объемы. Влияние этих изменений на устойчивость обычно ничтожно мало и им можно пренебречь, считая, что относительные деформации достаточно малы по сравнению с единицей. Однако углами поворота и вообще безразмерными перемещениями по сравнению с единицей пренебрегать нельзя. Так, при решении задачи продольного изгиба сжатого стержня не считаются с изменением площади его поперечного сечения и длины, однако учитывают в то же время дополнительные силы, появляющиеся при повороте его поперечных сечений.

И, наконец, последнее замечание. Если ставится задача об определении критических параметров (критических сил или критических частот), то они могут быть найдены из уравнений, которые получаются из уравнений возмущенного состояния после отбрасывания в них членов, содержащих возмущения в степенях выше первой.

§ 51. Сведения из теории конечных деформаций

1. Существуют два способа описания конечных деформаций сплошной среды¹⁾. Во-первых, можно ввести систему координат x_1, x_2, x_3 (прямоугольную декартову или криволинейную), отнесенную к недеформированной среде. Если соответствующие перемещения точек среды u_1, u_2, u_3 , то новые координаты будут:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + u_1(x_1, x_2, x_3), \\ \xi_2 &= x_2 + u_2(x_1, x_2, x_3), \\ \xi_3 &= x_3 + u_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

В противоположность этому способу описания (способ Лагранжа) в способе Эйлера за независимые переменные принимаются координаты точек деформированной среды (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Связь между обеими системами координат дается формулами (13.3).

Допустим, что эйлерова система координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 — прямоугольная декартова. Уравнения движения имеют вид

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial \xi_k} + X_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (13.4)$$

Здесь σ_{ik} — компоненты тензора напряжений, X_i — компоненты объемной силы, отнесенные к единице объема в деформированном состоянии, ρ — плотность деформированной среды. В правой части берется полная (субстанциональная) производная по времени.

Как это принято в тензорном анализе, будем опускать знак суммы в тех случаях, когда суммирование производится по всем возможным значениям индекса ($k = 1, 2, 3$). Наличие пары одинаковых (или, как говорят, «немых») индексов указывает каждый раз на то, что здесь подразумевается суммирование по этим индексам. Например, согласно указанному правилу уравнения (13.4) записываются в виде

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial \xi_k} + X_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2}. \quad (13.5)$$

¹⁾ См., например, Новожилов В. В., Основы нелинейной теории упругости, Гостехиздат, 1948; Кутилин Д. И., Теория конечных деформаций, Гостехиздат, 1947. Изложение настоящего параграфа следует в основном первой книге.

По внешнему виду уравнения (13.5) идентичны уравнениям движения классической теории упругости. Однако здесь дифференцирование производится по координатам деформированного состояния, т. е. по параметрам, зависящим в конечном счете от искомым функций u_1 , u_2 , u_3 . Поэтому целесообразно преобразовать уравнения (13.5), перейдя к лагранжевым переменным для недеформированной среды.

Отсылая за подробностями к специальным руководствам ¹⁾, выпишем уравнения для случая прямоугольной декартовой системы координат

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \sigma_{jk}^* \right] + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (13.6)$$

В этих уравнениях и ниже: u_i — компоненты вектора смещения в лагранжевых переменных x_1 , x_2 , x_3 ; X_i — компоненты объемной силы в тех же переменных, отнесенные к недеформированному состоянию; ρ — плотность недеформированной среды; δ_{ik} — символ Кронекера; σ_{ik}^* — тензор, который связан с объемной плотностью энергии для недеформированного состояния $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ и тензором деформаций в лагранжевых переменных

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad (13.7)$$

зависимостью

$$\sigma_{ik}^* = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ik}}.$$

Дифференцирование в уравнениях (13.6) производится по координатам недеформированной среды, что дает определенные удобства. Тензор σ_{ik}^* , однако, не является «истинным» тензором напряжений. Известно, что он может быть выражен через тензор напряжений в лагранжевых переменных σ_{ik} :

$$\sigma_{ik}^* = \frac{df_i^*}{df_i} \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{kk}}}.$$

¹⁾ См. книгу В. В. Новожилова, цит. на стр. 277.

Здесь df_i и df_i^* — площади элемента, перпендикулярного к оси x_i , до и после деформации. Если, однако, ограничиться малыми деформациями, когда изменением длин и площадей возможно пренебречь (деформации малы, но перемещения могут быть велики!), то тензоры σ_{ik}^* и σ_{ik} могут быть отождествлены. Это приближение практически оказывается удовлетворительным всюду, кроме разве случая резины и резиноподобных материалов. В дальнейшем мы не будем делать различия между тензорами σ_{ik}^* и σ_{ik} .

2. Переходим к граничным условиям. На части поверхности могут быть заданы перемещения, на другой — поверхностная нагрузка. Рассмотрим последний случай. Пусть n_i — направляющие косинусы недеформированной поверхности, p_i — составляющие поверхностной нагрузки, отнесенные к лагранжеву базису недеформированной среды. В любой точке нагруженной поверхности S должно быть:

$$\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \sigma_{jk} n_k = p_i. \quad (13.8)$$

Выше мы пользовались прямоугольной декартовой системой координат. Читатель, владеющий тензорным анализом, легко переписет результаты в форме, пригодной для произвольных криволинейных координат. Для этого достаточно заменить частное дифференцирование тензорным и расставить индексы так, чтобы выполнялось требование тензорной размерности.

§ 52. Постановка задачи о динамической устойчивости сплошного упругого тела

1. Рассмотрим движение упругого тела, вызванное действием периодической поверхностной нагрузки

$$p_i = \alpha p_i^{(0)} + \beta p_i^{(t)} \Phi(t)$$

и периодических объемных сил

$$X_i = \alpha X_i^{(0)} + \beta X_i^{(t)} \Phi(t).$$

Здесь α и β — параметры, с точностью до которых заданы постоянная и переменная части нагрузки.

Будем различать два состояния тела. В первом состоянии, которое будем называть невозмущенным, оно совершает установившиеся вынужденные колебания. Компоненты тензора напряжений σ_{ik} и компоненты вектора смещения v_i для невозмущенного движения удовлетворяют уравнениям (13.6)

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\delta_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \sigma_{jk} \right] + X_i = \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \quad (13.9)$$

и условиям на поверхности (13.8)

$$\left(\delta_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \sigma_{jk} n_k = p_i. \quad (13.10)$$

Наряду с невозмущенным движением рассмотрим движение, отличающееся от него наличием малых возмущений напряженного и деформированного состояний:

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \sigma_{ik} + \Delta \sigma_{ik},$$

$$\tilde{p}_i = p_i + \Delta p_i,$$

$$\tilde{X}_i = X_i + \Delta X_i,$$

$$\tilde{u}_i = v_i + u_i.$$

Уравнения возмущенного движения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\delta_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) (\sigma_{jk} + \Delta \sigma_{jk}) \right] + X_i + \Delta X_i = \\ = \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что параметры невозмущенного движения связаны уравнениями (13.9), и отбрасывая малые величины второго порядка (такими величинами при условии $u_i \ll v_i$ будут члены порядка $\Delta \sigma_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\delta_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \Delta \sigma_{jk} \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \Delta X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (13.11)$$

Если вынужденные колебания происходят вдалеке от резонанса, то перемещения v_i и u_i можно считать величинами одного порядка и пренебречь на этом основании произведениями $\Delta \sigma_{jk} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

Уравнения (13.11) упрощаются:

$$\frac{\partial \Delta \tau_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\tau_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \Delta X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (13.12)$$

2. В уравнениях (13.11) и (13.12) v_i и σ_{ik} являются известными функциями, u_i и $\Delta \sigma_{ik}$ — неизвестными. Чтобы исключить $\Delta \sigma_{ik}$, нужно воспользоваться соотношениями, связывающими напряжения и деформации.

Поскольку уравнения устойчивости линейны по отношению к возмущениям, мы вправе пользоваться законом Гука ¹⁾

$$\Delta \sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{ik}, \quad (13.13)$$

где λ и μ — постоянные Ляме, $\varepsilon_{jj} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$. При этом деформации ε_{ik} вычисляются по формулам (13.7), в которых опущены нелинейные члены:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (13.14)$$

Для дополнительных напряжений $\Delta \sigma_{ik}$ получаем, таким образом, формулы

$$\Delta \sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (13.15)$$

Дифференцируя (13.15), суммируя по k и меняя обозначение для «немых» индексов в последнем слагаемом, найдем:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\Delta \sigma_{ik}) = \mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j},$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Уравнения (13.11) принимают вид (при $\Delta X_i \equiv 0$)

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left[\lambda \delta_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

1) Вместо более общих нелинейных зависимостей, например, закона Мурнагана (Murnaghan F., Finite deformation of an elastic solid. New York, 1951).

Таковы уравнения динамической устойчивости однородной и изотропной среды. При условии малости перемещений в невозмущенном состоянии получаем:

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (13.16)$$

Легко получается обобщение на случай произвольной анизотропии и неоднородности. Вместо (13.15) нужно взять общее соотношение

$$\Delta \sigma_{ik} = \lambda_{ikmr} \varepsilon_{mn},$$

где λ_{ikmn} — тензор упругих постоянных. Тогда, например,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\Delta \sigma_{ik}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_{ikmn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right).$$

3. Граничное условие (13.8) для возмущенного движения имеет вид

$$\left(\delta_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) (\sigma_{jk} + \Delta \sigma_{jk}) n_k = p_i + \Delta p_i.$$

Учитывая (13.10) и линеаризируя, получим:

$$\left(\delta_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \Delta \sigma_{jk} n_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{jk} n_k = \Delta p_i.$$

Если пренебречь перемещениями v_i , граничное условие упрощается:

$$\left(\Delta \sigma_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{jk} \right) n_k = \Delta p_i. \quad (13.17)$$

Здесь Δp_i — изменение интенсивности поверхностной нагрузки в возмущенном движении. Рассмотрим различные случаи определения Δp_i .

Если поверхностная нагрузка остается неизменной как по величине, так и по направлению, то $\Delta p_i \equiv 0$. Если нагрузка поворачивается вместе с направленным элементом поверхности, то

$$\Delta p_i = p_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (13.18)$$

Например, в случае гидростатической нагрузки $p_k = -p n_k$, где p — давление. Тогда граничное условие (13.17) примет вид

$$\Delta \sigma_{ik} n_k - \frac{\partial u_i}{\partial x} (\sigma_{jk} - p \delta_{jk}) n_k = 0.$$

Если тело частью своей поверхности граничит с упругой средой, препятствующей смещениям (обобщенное винклеровское основание), то $\Delta p_i = -c_{ik}u_k$, где c_{ik} — «тензор коэффициентов отпора».

§ 53. Тензор Грина для сплошного упругого тела. Интегральные уравнения колебаний и устойчивости

1. Уравнения, получаемые из (13.16) путем отбрасывания параметрических членов

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + X_i = 0,$$

или, в более общем случае,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_{ikmn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right) + X_i = 0, \quad (13.19)$$

соответствуют обычному приближению классической теории упругости (уравнения Ляме). Граничные условия (13.8) в классической теории принимают вид

$$\sigma_{ik} n_k = p_i. \quad (13.20)$$

Введем *тензор Грина* для системы уравнений (13.19) и однородных граничных условий, соответствующих незагруженному телу:

$$G_{ik}(P, Q) = \left\| \begin{array}{ccc} G_{11}(P, Q) & G_{12}(P, Q) & G_{13}(P, Q) \\ G_{21}(P, Q) & G_{22}(P, Q) & G_{23}(P, Q) \\ G_{31}(P, Q) & G_{32}(P, Q) & G_{33}(P, Q) \end{array} \right\|.$$

Согласно физическому смыслу задачи компоненты тензора Грина представляют собой определенные в рамках классической теории компоненты вектора смещения точки тела $P = P(x_1, x_2, x_3)$ от единичной силы, приложенной в точке тела $Q = Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и направленной вдоль одного из векторов координатного базиса. Например, для однородного и изотропного пространства тензор Грина совпадает с известным тензором Сомильяна. Компоненты $G_{ik}(P, Q)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\lambda_{ikmn} \frac{\partial G_{mj}(P, Q)}{\partial x_n} \right] + \delta_{ij} \delta(P - Q) = 0,$$

где $\delta(P - Q)$ — трехмерная дельта-функция.

При помощи тензора Грина решение уравнений (13.19) с краевыми условиями (13.20) представляется в виде

$$u_i(P) = \int_V G_{ik}(P, Q) X_k(Q) dV_Q + \int_S \int G_{ik}(P, Q) p_k(Q) dS_Q. \quad (13.21)$$

Здесь V — объем тела, S — его нагруженная поверхность.

2. Остановимся на некоторых свойствах тензора $G_{ik}(P, Q)$. Из общих теорем классической теории упругости вытекают его симметричность

$$\left. \begin{aligned} G_{kk}(P, Q) &\equiv G_{kk}(Q, P), \\ G_{ik}(P, Q) &\equiv G_{ki}(Q, P) \end{aligned} \right\} \quad (13.22)$$

и положительность, т. е.

$$\int_V \int_V G_{ik}(P, Q) u_k(P) u_k(Q) dV_P dV_Q > 0 \quad (13.23)$$

для каждого вектора $u_k(P)$, отличного внутри V от нуля.

Укажем также на связь тензора Грина с проблемой малых колебаний. Уравнения собственных малых колебаний упругого тела получим из (13.19), применяя принцип Даламбера:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_{ikmn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right) - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0. \quad (13.24)$$

Здесь ρ — плотность тела в каждой точке. Обычной подстановкой в (13.24)

$$u_i(P, t) = \varphi_i(P) \cos(\omega t + \delta)$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_{ikmn} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \right) + \rho \omega^2 \varphi_i = 0.$$

Эквивалентная система интегральных уравнений, как следует из (13.21), имеет вид

$$\varphi_i(P) - \lambda \int_V \rho(Q) G_{ik}(P, Q) \varphi_k(Q) dV_Q = 0, \quad (13.25)$$

где $\lambda = \omega^2$. Эта система равносильна одному интегральному уравнению Фредгольма с симметричным ядром

$$\Phi(M) - \lambda \int_{V_1 + V_2 + V_3} K(M, N) \Phi(N) dV_N = 0, \quad (13.26)$$

в котором интегрирование производится по трем экземплярам объема $V_1 + V_2 + V_3 = V$, причем

$$K(M, N) = \sqrt{\rho(P)\rho(Q)} G_{ik}(P, Q), \text{ если } M \in V_i, N \in V_k,$$

$$\Phi(M) = \sqrt{\rho(P)} \varphi_i(P), \text{ если } M \in V_i.$$

Фундаментальные числа уравнения (13.26), или, что то же самое, системы (13.25), образуют счетное множество $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots$. Каждому числу этого множества соответствует фундаментальная функция $\Phi_m(M)$ или «тройка» фундаментальных функций $\varphi_1^{(m)}(P), \varphi_2^{(m)}(P), \varphi_3^{(m)}(P)$, которую мы будем называть *фундаментальным вектором* $\varphi_i^{(m)}(P)$ системы (13.25). Величины $\varphi_i^{(m)}(P)$ не являются, разумеется, тензорами, а лишь векторами по нижнему индексу. Условимся, что на верхние индексы, указывающие номер фундаментального вектора, обычное правило суммирования по «немым» индексам не распространяется, и оставим для этих индексов буквы m и n .

Из факта сведения системы (13.25) к уравнению (13.26) и свойств тензора Грина (13.22) и (13.23) следуют важные положения, которые мы здесь кратко сформулируем.

1) Фундаментальные векторы $\varphi_i^{(m)}(P)$ составляют ортонормированную систему в смысле

$$\int_V \varphi_i^{(m)} \varphi_i^{(n)} dV = \delta_{mn}. \quad (13.27)$$

2) Всякий вектор с непрерывными компонентами $u_i(P)$, представленный «истокообразно» при помощи тензора Грина $G_{ik}(P, Q)$ и вектора $X_k(P)$, т. е.

$$u_i(P) = \int_V G_{ik}(P, Q) X_k(P) dV_Q,$$

может быть разложен в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по фундаментальным векторам $\varphi_i^{(m)}(P)$:

$$u_i(P) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \varphi_i^{(m)}(P).$$

Коэффициенты этого ряда будут:

$$a_m = \int_V u_i(P) \varphi_i^{(m)} dV.$$

3) Компоненты тензора Грина $G_{ik}(P, Q)$ разлагаются в билинейные ряды

$$G_{ik}(P, Q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^{(m)}(P) \varphi_k^{(m)}(Q)}{\lambda_m}, \quad (13.28)$$

которые сходятся абсолютно и равномерно относительно обеих переменных.

3. Рассмотрим теперь проблему статической устойчивости. Ограничимся случаем, когда внешняя нагрузка такова, что ни ее направление, ни интенсивность, отнесенные к первоначальной метрике, при потере устойчивости не меняются ($\Delta X_i = \Delta p_i = 0$). Будем пренебрегать перемещениями в исходном состоянии, отождествляя последнее с недеформированным состоянием. При сделанных оговорках дифференциальные уравнения статической устойчивости принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_{ikmn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right) - \alpha \frac{\partial}{\partial x_k} \left(s_{jk} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (13.29)$$

а граничные условия на поверхности тела —

$$\Delta \sigma_{ik} n_k = \alpha s_{jk} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} n_k. \quad (13.30)$$

Здесь предположено, что внешняя нагрузка, а следовательно, и все компоненты исходного напряженного состояния заданы с точностью до одного параметра α , причем $\sigma_{ik} = -\alpha s_{ik}$.

Применим теперь интегральную формулу (13.21). В результате получим систему уравнений:

$$u_i(P) + \alpha \int_V G_{ik}(P, Q) \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left[s_{jl}(Q) \frac{\partial u_k(Q)}{\partial \xi_j} \right] dV_Q - \\ - \alpha \int_S \int G_{ik}(P, Q) s_{jl}(Q) \frac{\partial u_k(Q)}{\partial \xi_j} n_l dS_Q = 0. \quad (13.31)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся формулой Гаусса — Остроградского

$$\int_V \frac{\partial A_k}{\partial x_k} dV = \int_S A_k n_k dS.$$

Составив тождество

$$G_{ik}(P, Q) \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left[s_{jl}(Q) \frac{\partial u_k(Q)}{\partial \xi_j} \right] \equiv \\ \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left[G_{ik}(P, Q) s_{jl}(Q) \frac{\partial u_k(Q)}{\partial \xi_j} \right] - \frac{\partial G_{ik}(P, Q)}{\partial \xi_l} \cdot s_{jl}(Q) \frac{\partial u_k(Q)}{\partial \xi_j},$$

найдем:

$$\int_V G_{ik}(P, Q) \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left[s_{jl}(Q) \frac{\partial u_k(Q)}{\partial \xi_j} \right] dV_Q = \\ = \int_S \int G_{ik}(P, Q) s_{jl}(Q) \frac{\partial u_k(Q)}{\partial \xi_j} n_l dS_Q - \\ - \int_V \frac{\partial G_{ik}(P, Q)}{\partial \xi_l} s_{jl}(Q) \frac{\partial u_k(Q)}{\partial \xi_j} dV_Q.$$

Отсюда после подстановки в (13.31) получим:

$$u_i(P) - \alpha \int_V s_{jl}(Q) \frac{\partial G_{ik}(P, Q)}{\partial \xi_l} \frac{\partial u_k(Q)}{\partial \xi_j} dV_Q = 0.$$

После почленного дифференцирования уравнения приводятся к системе 3^3 интегральных уравнений относительно $\partial \psi_i / \partial x_g \equiv \partial u_i / \partial x_g$:

$$\frac{\partial \psi_i(P)}{\partial x_g} - \alpha \int_V s_{jl}(Q) \frac{\partial^2 G_{ik}(P, Q)}{\partial x_g \partial \xi_l} \frac{\partial \psi_k(Q)}{\partial \xi_j} dV_Q = 0. \quad (13.32)$$

Эта система может быть представлена в виде одного

интегрального уравнения с симметричным ядром и, вообще говоря, немонотонной функцией распределения. Формы потери статической устойчивости (точнее, их первые производные по координатам) и критические параметры суть фундаментальные функции и фундаментальные числа указанного уравнения. Отсюда следует условие ортогональности для форм потери устойчивости

$$\int_V s_{ij} \frac{\partial \psi_k^{(m)}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \psi_k^{(n)}}{\partial \xi_j} dV = \delta_{mn}, \quad (13.33)$$

где $\frac{\partial \psi_k^{(m)}}{\partial \xi_i}$ и $\frac{\partial \psi_k^{(n)}}{\partial \xi_j}$ — фундаментальные векторы задачи статической устойчивости (тройки фундаментальных функций), соответствующие фундаментальным числам α_m и α_n . Если все главные значения тензора s_{ij} положительны, то все $\alpha_m > 0$, и имеют место теорема о разложении и билинейная формула для компонент тензора Грина.

Рассмотрим частные случаи. В задаче о продольном изгибе прямого сжатого стержня

$$s_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{N}{F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Полагая, как обычно, что деформация при потере устойчивости может быть описана поперечными смещениями точек, лежащих на оси стержня, получим интегральное уравнение (11.32)

$$\frac{d\psi(x)}{dx} - \alpha \int_0^l N(\xi) \frac{\partial^2 \mathcal{J}(x, \xi)}{\partial x \partial \xi} \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} d\xi = 0.$$

(Здесь индексы опущены.)

В задаче об устойчивости пластинки, нагруженной в ее срединной плоскости,

$$s_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{N_{11}}{h} & \frac{N_{12}}{h} & 0 \\ \frac{N_{21}}{h} & \frac{N_{22}}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где N_{ik} — силы, отнесенные к единице длины, h — толщина пластинки. Уравнение (13.32) принимает вид

$$\frac{\partial \psi(P)}{\partial x_g} - \alpha \int_{\Omega} \int N_{jl}(Q) \frac{\partial^2 G(P, Q)}{\partial x_g \partial \xi_l} \frac{\partial \psi(Q)}{\partial \xi_j} d\Omega = 0$$

$$(g, l, j = 1, 2),$$

где $\psi(P)$ — поперечный прогиб пластинки, $G(P, Q)$ — функция влияния для него, $d\Omega$ — элемент площади срединной поверхности Ω .

Интегральное уравнение продольного изгиба арок получим, введя криволинейную систему координат, связанную с осью арки, и заменив частное интегрирование тензорным. Аналогично выводятся интегральные уравнения устойчивости оболочек.

Выясним, как изменится структура уравнений, если векторы внешней нагрузки поворачиваются вместе с направленным элементом поверхности¹⁾. Вместо (13.30) имеем согласно (13.17) и (13.18):

$$\Delta \sigma_{ik} n_k = \alpha s_{jk} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} n_k + \alpha p_k \frac{\partial u_l}{\partial x_k}.$$

Составив уравнения типа (13.31) и произведя преобразования, получим вместо (13.32):

$$\psi_i(P) + \alpha \int_V s_{jl}(Q) G_{ik}(P, Q) \frac{\partial^2 \psi_k(Q)}{\partial \xi_j \partial \xi_l} dV_Q = 0.$$

В отличие от (13.32) эта система уравнений в общем случае не может быть сведена к интегральному уравнению с симметричным (или симметризуемым) ядром. Следовательно, задача статической устойчивости под действием следящей нагрузки может наряду с вещественными иметь комплексные собственные значения и даже вовсе не иметь вещественных собственных значений. Этот результат станет более понятным, если учесть, что следящая нагрузка, вообще говоря, не является консервативной.

¹⁾ Так называемая *следящая нагрузка*.

§ 54. Приведение к системам обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Будем исходить в дальнейшем из уравнений (13.16) и граничных условий (13.17), полагая в них

$$\sigma_{ik} = -\alpha s_{ik}^{(0)} - \beta \Phi(t) s_{ik}^{(t)}$$

Здесь α и β — параметры, с точностью до которых заданы компоненты напряженного состояния.

Обычное приближение теории динамической устойчивости строится в предположении, что начальное состояние, которое варьируется, может быть отождествлено с равновесием. Это равносильно тому, что характеристики начального состояния определяются квазистатически, т. е. при времени t , рассматриваемом как параметр. Тогда $s_{ik}^{(0)}$ определяются от статической нагрузки $p_i^{(0)}$ и $X_i^{(0)}$, заданной с точностью до α , а $s_{ik}^{(t)}$ — от амплитудного значения переменной нагрузки $p_i^{(t)}$ и $X_i^{(t)}$, заданных с точностью до β .

Допустим, что компоненты внешней нагрузки не меняют при деформации ни своей величины, ни направления. Тогда $\Delta X_i = \Delta p_i = 0$. Применяя интегральную формулу (13.21) и производя преобразования типа тех, которые дают переход от (13.31) к (13.32), найдем, что уравнения (13.16) с граничными условиями (13.17) эквивалентны системе интегродифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} u_i(P, t) - \int_V \rho(Q) G_{ik}(P, Q) \frac{\partial^2 u_k(Q, t)}{\partial t^2} dV_Q - \\ - \alpha \int_V s_{jl}^{(0)}(Q) \frac{\partial G_{ik}(P, Q)}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k(Q, t)}{\partial \xi_j} dV_Q - \\ - \beta \Phi(t) \int_V s_{jl}^{(t)}(Q) \frac{\partial G_{ik}(P, Q)}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k(Q, t)}{\partial \xi_j} dV_Q = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.34)$$

Уравнение (12.3) может быть получено отсюда как частный случай.

Решение системы (13.34) будем искать в виде

$$u_i(P, t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \varphi_i^{(m)}(P), \quad (13.35)$$

где $\varphi_i^{(m)}(P)$ — фундаментальные векторы задачи собственных колебаний. Подставив ряд (13.35) в (13.34) и воспользовавшись теоремой о разложении (или билинейной формулой для тензора Грина), получим после сравнения коэффициентов при одинаковых $\varphi_i^{(m)}(P)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{\omega_m^2} \frac{d^2 f_m}{dt^2} + f_m - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f_n - \beta \Phi(t) \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} f_n = 0$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots). \tag{13.36}$$

Эта система совпадает с (12.8) с той лишь разницей, что здесь

$$\left. \begin{aligned} a_{mn} &= \frac{1}{\omega_m^2} \int_V s_{jl}^{(j)} \frac{\partial \varphi_k^{(m)}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi_k^{(n)}}{\partial \xi_i} dV, \\ b_{mn} &= \frac{1}{\omega_m^2} \int_V s_{jl}^{(t)} \frac{\partial \varphi_k^{(m)}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi_k^{(n)}}{\partial \xi_i} dV. \end{aligned} \right\} \tag{13.37}$$

2. Допустим теперь, что фундаментальные векторы задач собственных колебаний и статической устойчивости для состояний $s_{jl}^{(0)}$ и $s_{jl}^{(t)}$ совпадают. Но тогда $\varphi_k^{(m)}$ должны удовлетворять условиям ортогональности (13.33) для $\psi_k^{(m)}$. При этом все a_{mn} и b_{mn} при $m \neq n$ обращаются в нуль, и следовательно, система (13.36) распадается на отдельные уравнения типа Матье-Хилла. Это и есть *особый случай*.

Вместо (13.35) можно предложить другой способ аппроксимации. Каждую компоненту $u_i(P, t)$ будем искать в виде ряда по функциям $\varphi_i^{(m)}(P)$ с неизвестными пока коэффициентами $f_i^{(m)}(t)$:

$$u_i(P, t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_i^{(m)}(t) \varphi_i^{(m)}(P). \tag{13.38}$$

В отличие от этого в (13.35) искомый коэффициент принадлежит сразу «тройке» функций. Подстановка (13.38) в (13.34)

дает после преобразований:

$$\frac{1}{\omega_m^2} \frac{d^2 f_i^{(m)}}{dt^2} + f_i^{(m)} - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 a_{ik}^{(mn)} f_k^{(n)} - \\ - \beta \Phi(t) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 b_{ik}^{(mn)} f_k^{(n)} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \dots, \\ i = 1, 2, 3 \end{array} \right), \quad (13.39)$$

где

$$a_{ik}^{(mn)} = \frac{1}{\omega_m^2} \int_V s_{ji}^{(0)} \frac{\partial \varphi_i^{(m)}}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial \varphi_k^{(n)}}{\partial \bar{z}_l} dV, \\ b_{ik}^{(mn)} = \frac{1}{\omega_m^2} \int_V s_{ji}^{(t)} \frac{\partial \varphi_i^{(m)}}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial \varphi_k^{(n)}}{\partial \bar{z}_l} dV.$$

Система (13.39) при одном и том же числе членов ряда (13.38) содержит втрое большее число уравнений, чем (13.36).

Предположим теперь, что хотя фундаментальные векторы задач колебаний и устойчивости не совпадают, но функции, входящие в них, совпадают с точностью до постоянных множителей. Другими словами, допустим, что одни и те же функции входят в фундаментальные векторы с разными «весами»¹⁾. При этом $a_{ik}^{(mn)}$ при $m \neq n$ обращаются в нуль, но при разных i и k нулю, вообще говоря, не равны. Матрица из $a_{ik}^{(mn)}$ становится *квазидиагональной*; каждый квазиэлемент имеет порядок три, если потеря устойчивости описывается тремя функциями, порядок два — если двумя функциями. Допустим, что тем же свойством обладает и матрица $b_{ik}^{(mn)}$. Тогда система (13.39) распадается на независимые системы третьего или второго порядка. Такой случай можно назвать *квазиособым*. Если потеря устойчивости описывается одной функцией, как, например, в задаче о плоских колебаниях прямого стержня, то различие между особым и квазиособым случаем исчезает.

1) Например, формы собственных колебаний и статической устойчивости свободно опертого призматического стержня — синусоиды. Однако соотношения между прогибом и углом закручивания в указанных формах, вообще говоря, различны (если центр изгиба не совпадает с центром тяжести поперечных сечений).

Остановимся вкратце на приближенных решениях. Если формы собственных колебаний и формы потери статической устойчивости мало отличаются друг от друга (а для первых, основных форм это в большинстве случаев имеет место), то в уравнениях (13.36) можно пренебречь взаимным влиянием недиагональных элементов. Приближенные уравнения принимают вид

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \omega_m^2 [1 - \alpha a_{mm} - \beta \Phi(t) b_{mm}] f_m = 0 \quad (13.40)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots).$$

Но с той же степенью точности

$$a_{mm} \approx \frac{1}{\alpha_m}, \quad b_{mm} \approx \frac{1}{\beta_m},$$

где α_m и β_m — критические параметры нагрузки. Таким образом, при сделанных допущениях уравнения особого случая дают приближенное решение задачи.

До сих пор мы пользовались разложением по формам собственных колебаний. Применение форм потери статической устойчивости менее удобно. Как мы уже упоминали, для того чтобы имела место теорема о разложении, необходимо, чтобы все главные значения тензора s_{ik} были положительными (т. е. в терминах классической теории упругости, чтобы все главные нормальные напряжения были сжимающими). И хотя в одномерных и двумерных задачах это требование может быть смягчено, значительные ограничения остаются. Так, если стержень сжат лишь на части своей длины, то система фундаментальных функций задачи статической устойчивости полной, вообще говоря, не будет.

Следующее практическое соображение также склоняет нас к выбору аппроксимации при помощи форм собственных колебаний. В приложениях обычно встречаются нагрузки, достаточно малые по сравнению со статическим критическим значением. Следовательно, формы потери динамической устойчивости по характеру ближе к формам собственных колебаний, чем к формам потери статической устойчивости, что и предопределяет выбор аппроксимирующих функций.

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ
ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ
НЕУСТОЙЧИВОСТИ

§ 55. Сведения из теории дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами¹⁾

1. В настоящей главе будут рассмотрены методы определения областей динамической неустойчивости для задач, приводящих к системам дифференциальных уравнений

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B] f = 0. \quad (14.1)$$

Здесь A , B , C — матрицы с постоянными элементами, $\Phi(t)$ — периодическая функция времени периода T

$$\Phi(t + T) = \Phi(t), \quad (14.2)$$

которую мы будем считать представимой в виде ряда Фурье.

Чтобы придать излагаемым ниже результатам большую симметрию, вместо системы n уравнений второго порядка (14.1) будем рассматривать эквивалентную ей систему $2n$ уравнений первого порядка.

Представим уравнения (14.1) в виде

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + \sum_{k=1}^n \Phi_{ik}(t) f_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (14.3)$$

где

$$\|\Phi_{ik}\| = C^{-1} [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B].$$

¹⁾ Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, изд. 2, 1955; Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952; Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, изд. 2, 1949.

Введем далее новые переменные

$$\left. \begin{aligned} x_j &= f_j & (j = 1, 2, \dots, n), \\ x_j &= \frac{df_{j-n}}{dt} & (j = n+1, n+2, \dots, 2n). \end{aligned} \right\} \quad (14.4)$$

Уравнение (14.3) совместно со второй группой равенств (14.4) составляет систему $2n$ уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} - x_{n+i} &= 0 & (i = 1, 2, \dots, n), \\ \frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^n \Phi_{ik}(t) x_k &= 0 & (i = n+1, n+2, \dots, 2n) \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

или короче

$$\frac{dx}{dt} + \Phi(t) x = 0. \quad (14.6)$$

Здесь x — вектор с компонентами x_i ($i = 1, 2, \dots, 2n$), $\Phi(t)$ — матрица порядка $2n$, структура которой ясна из (14.5). Из (14.2) следует, что

$$\Phi(t+T) = \Phi(t). \quad (14.7)$$

В дальнейшем для удобства полагаем $2n = m$.

2. Допустим, что для уравнений (14.6) найдены все m линейно независимых решений

$$x_{1k}(t), x_{2k}(t), x_{3k}(t), \dots, x_{mk}(t) \quad (k = 1, 2, 3, \dots, m).$$

Эта система решений, называемая *фундаментальной*, составляет матрицу

$$X(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1m}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1}(t) & x_{m2}(t) & \dots & x_{mm}(t) \end{vmatrix},$$

где первый индекс означает номер функции, второй — номер решения.

Очевидно, матрица $X(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + X\Phi(t) = 0. \quad (14.8)$$

Если в уравнении (14.8) произвести замену t на $t+T$, то согласно (14.7) вид его не изменится. Следовательно, матрица $X(t+T)$ также является решением и может быть

получена из $X(t)$ с помощью некоторого неособенного линейного преобразования с постоянными коэффициентами

$$X(t+T) = RX(t). \quad (14.9)$$

Коэффициенты этого преобразования r_{ik} могут быть найдены следующим образом. Допустим, что рассматриваемая фундаментальная система удовлетворяет начальным условиям

$$x_{ik}(0) = \delta_{ik}.$$

Тогда, полагая в (14.9) $t = 0$, получим

$$X(T) = R$$

или

$$r_{ik} = x_{ik}(T).$$

Таким образом, для определения коэффициентов преобразования (14.9) нужно знать фундаментальную систему решений по крайней мере на протяжении одного периода.

Составим характеристическое уравнение

$$|R - \rho E| = 0, \quad (14.10)$$

которое имеет m корней, соответствующих m линейно независимым решениям системы (14.6).

Пусть $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ — корни характеристического уравнения, среди которых не имеется кратных. В этом случае соответствующим выбором первоначальной системы функций матрица R может быть приведена к диагональному виду

$$R = \left\| \begin{array}{cccc} \rho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_m \end{array} \right\|.$$

Другими словами, найдется такая фундаментальная система, которая при добавлении к t периода преобразуется по формулам

$$x_{ik}(t+T) = \rho_k x_{ik}(t) \quad (i, k = 1, 2, \dots, m)$$

или в векторной записи

$$x_k(t+T) = \rho_k x_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (14.11)$$

Здесь $x_k(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk})$ — вектор k -го решения, т. е. k -й столбец матрицы $X(t)$.

Из формулы (14.11) следует, что решения системы (14.6) могут быть представлены в виде

$$x_k(t) = e^{\frac{t}{T} \ln \rho_k} \chi_k(t), \quad (14.12)$$

где $\chi_k(t)$ — периодический вектор с периодом T . В самом деле,

$$x_k(t+T) = e^{\left(\frac{t}{T}+1\right) \ln \rho_k} \chi_k(t+T) = e^{\ln \rho_k} e^{\frac{t}{T} \ln \rho_k} \chi_k(t) = \rho_k x_k(t).$$

Иначе

$$x_k(t) = e^{\frac{t}{T} \ln |\rho_k|} \varphi_k(t), \quad (14.13)$$

где $\varphi_k(t)$ — некоторый, вообще говоря, почти периодический вектор

$$\varphi_k(t) = \chi_k(t) \exp\left(\frac{it}{T} \arg \rho_k\right).$$

3. Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни, то вид решений зависит от структуры элементарных делителей матрицы $R = \rho E$.

В случае, когда элементарные делители — простые (§ 38)

$$\rho - \rho_1, \rho - \rho_2, \dots, \rho - \rho_m,$$

матрица R может быть приведена к диагональному виду. Фундаментальная система решений имеет в этом случае вид (14.12). Если же матрица $R = \rho E$ имеет нелинейные элементарные делители

$$(\rho - \rho_1)^{\mu_1}, (\rho - \rho_2)^{\mu_2}, \dots, (\rho - \rho_k)^{\mu_k} \quad (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = m),$$

где по крайней мере одно $\mu_i > 1$, то матрица R к диагональному виду приведена быть не может. Она может быть приведена, однако, к нормальной жордановой форме

$$R = \left\| \begin{array}{cccc} \boxed{R_1} & & & \\ & \boxed{R_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{R_k} \end{array} \right\|,$$

где $\varphi_k(t)$ — периодические векторы периода T , а $g_s(t)$ — полиномы, определяемые согласно

$$g_1(t) = \frac{t}{T}, \quad g_2(t) = \frac{g_1(g_1-1)}{2!}, \quad \dots,$$

$$g_s(t) = \frac{(g_1-1)(g_1-2)\dots(g_1-s+1)}{s!}.$$

В справедливости этого можно убедиться непосредственной подстановкой в формулы для $x_s(t)$ вместо t переменной $t + T$.

Итак, в случае нелинейных элементарных делителей фундаментальная система решений имеет вид

$$x_{\alpha_i} = e^{\frac{t}{T} \ln \rho_i} P_{\alpha_i}(t), \quad (14.15)$$

где $P_{\alpha_i}(t)$ — вектор, составленный из полиномов относительно t с периодическими коэффициентами. При этом наибольшая степень полиномов не превосходит $\mu_i - 1$, а в каждой группе решений, соответствующей корню ρ_i , имеется по крайней мере одно вида

$$x_{j+1} = e^{\frac{t}{T} \ln \rho_i} \varphi_{j+1}(t).$$

4. Система уравнений (14.6) имеет, очевидно, нулевое решение

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0.$$

Помимо этого тривиального решения, которому в рассматриваемой механической задаче соответствует первоначальное положение равновесия (движения), система допускает также ненулевые решения, аналитический вид которых был установлен выше.

Введем понятие о характеристическом показателе

$$h = \frac{1}{T} \ln \rho.$$

Из вида решений (14.12) и (14.15) следует, что если все характеристические показатели имеют отрицательные вещественные части, то общее решение системы (14.6) будет неограниченно затухать со временем. Иными словами, будет иметь место устойчивость первоначальной формы равновесия

(движения). Если же среди характеристических показателей окажется хотя бы один, вещественная часть которого положительна, то система будет иметь частные решения, неограниченно возрастающие со временем, и, следовательно, будет иметь место неустойчивость.

Учитывая, что

$$\ln \rho = \ln |\rho| + i \arg \rho,$$

приходим к следующему выводу. Если все корни характеристического уравнения имеют модули, меньшие единицы, то имеет место устойчивость. Если среди характеристических корней окажется хотя бы один, превышающий по модулю единицу, то будет иметь место неустойчивость.

Характеристическим числам, равным по модулю единице, соответствуют, очевидно, чисто мнимые характеристические показатели. Здесь может иметь место как устойчивость, так и неустойчивость.¹⁾ Если характеристические числа — простые, то соответствующие частные решения будут ограничены во времени (точнее — будут почти периодическими функциями). В случае кратных корней характер решения зависит от структуры элементарных делителей. А именно, если элементарные делители — простые, то имеет место устойчивость, в противном случае будет иметь место вековая неустойчивость, обусловленная появлением в общем интеграле вековых членов вида $t^m \varphi(t)$.

§ 56. Уравнение для определения характеристических показателей²⁾

Среди решений, соответствующих какому-либо из характеристических корней, всегда найдется хотя бы одно решение вида

$$x(t) = e^{ht} \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — вектор с компонентами периода T . Оно будет во всяком случае непрерывно, и следовательно, составляющие вектора $\varphi(t)$ могут быть разложены в ряды Фурье.

¹⁾ В данном случае под устойчивостью понимается ограниченность решений во времени.

²⁾ Болотин В. В., Инж. сборн. 14, 1953.

Этим обстоятельством можно воспользоваться для определения характеристических показателей. Поясним это на примере системы n уравнений второго порядка

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + (E - \alpha A - \beta B \cos \theta t) f = 0. \quad (14.16)$$

Будем искать решение системы (14.16) в виде

$$f(t) = e^{ht} \left[\frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\theta t + b_k \cos k\theta t) \right], \quad (14.17)$$

где a_k и b_k — некоторые не зависящие от времени векторы. Разложение (14.17) равносильно, очевидно, n разложениям вида

$$f_i(t) = e^{ht} \left[\frac{1}{2} b_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{ik} \sin k\theta t + b_{ik} \cos k\theta t) \right],$$

где a_{ik} и b_{ik} — скалярные коэффициенты. Подставляя ряд (14.17) в уравнение (14.16) и приравнявая коэффициенты при одинаковых $e^{ht} \sin k\theta t$ и $e^{ht} \cos k\theta t$, получим систему однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & h^2 C b_0 + (E - \alpha A) b_0 - \beta B b_1 = 0, \\ (h^2 - k^2 \theta^2) C a_k + 2 h k \theta C b_k + \\ & + (E - \alpha A) a_k - \frac{1}{2} \beta B (a_{k-1} + a_{k+1}) = 0, \\ (h^2 - k^2 \theta^2) C b_k + 2 h k \theta C a_k + \\ & + (E - \alpha A) b_k - \frac{1}{2} \beta B (b_{k-1} + b_{k+1}) = 0 \\ & \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, 3, \dots, \\ a_0 = 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Чтобы эта система имела отличные от нуля решения, необходимо, чтобы равнялся нулю определитель, составленный из ее коэффициентов. Мы получаем, таким образом,

уравнение для определения характеристических показателей

$$\begin{vmatrix} (h^2 - \theta^2) C + E - \alpha A & -\frac{1}{2} \beta B & 2h\theta C \\ -\beta B & h^2 C + E - \alpha A & 0 \\ -2h\theta C & 0 & (h^2 - \theta^2) C + E - \alpha A \end{vmatrix} = 0. \quad (14.18)$$

В уравнении (14.18) мы ограничились выписыванием центральных квазиэлементов. Имеется в виду, что место каждого квазиэлемента занимают n^2 его элементов, выписанных в обычном порядке.

Исследование устойчивости нулевого решения сводится теперь к отысканию условий, при которых уравнение (14.18) не имеет корней с положительной вещественной частью. Однако непосредственное применение уравнения (14.18) неудобно для практических вычислений.

§ 57. Вывод уравнений критических частот

1. Покажем, прежде всего, что характеристическое уравнение для рассматриваемой задачи — возвратное, т. е. имеет вид

$$\rho^m + a_1 \rho^{m-1} + a_2 \rho^{m-2} + \dots + a_{m-2} \rho^2 + a_{m-1} \rho + a_m = 0,$$

где $a_k = a_{m-k}$. Другими словами, если ρ — один из характеристических корней, то $1/\rho$ также является характеристическим корнем.

Проще всего это показывается для случая, когда $\Phi(t)$ — четная функция времени:

$$\Phi(-t) = \Phi(t). \quad (14.19)$$

Вследствие (14.19) система (14.3) не меняет своего вида при замене t на $-t$. Следовательно, если

$$x(t) = e^{\frac{t}{T} \ln \rho} \chi(t)$$

— одно из решений системы (14.3), то

$$x(-t) = e^{-\frac{t}{T} \ln \rho} \chi(-t) = e^{\frac{t}{T} \ln \left(\frac{1}{\rho}\right)} \chi(-t)$$

также является его решением, т. е. $1/\rho$ является характеристическим корнем.

Это свойство сохраняет силу и в общем случае произвольной периодической функции. Доказательство основано на известной теореме А. М. Ляпунова¹⁾.

Если дифференциальная система — каноническая

$$\begin{aligned}\frac{dp_k}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \\ \frac{dq_k}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_k}\end{aligned}$$

или приводится к каноническому виду посредством неособенного линейного преобразования с постоянными или периодическими коэффициентами, то характеристическое уравнение такой системы — возвратное. Здесь $H(p, q, t)$ — функция Гамильтона.

Рассмотрим систему (12.8)

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f_i}{dt^2} + \omega_i^2 \left[f_i - \alpha \sum_{k=1}^n a_{ik} f_k - \beta \Phi(t) \sum_{k=1}^n b_{ik} f_k \right] &= 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n).\end{aligned}$$

Полагая $f_k = q_k$, $\frac{df_k}{dt} = p_k$, получим:

$$\left. \begin{aligned}\frac{dp_i}{dt} &= -\omega_i^2 \left[q_i - \alpha \sum_{k=1}^n a_{ik} q_k - \beta \Phi(t) \sum_{k=1}^n b_{ik} q_k \right], \\ \frac{dq_i}{dt} &= p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).\end{aligned} \right\} (14.20)$$

Уравнениям (14.20) соответствует функция Гамильтона

$$\begin{aligned}H(p, q, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 q_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 - \\ &- \frac{1}{2} \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a'_{ik} q_i q_k - \frac{1}{2} \beta \Phi(t) \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b'_{ik} q_i q_k,\end{aligned}$$

¹⁾ Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.

в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Здесь

$$a'_{ik} = \omega_i^2 a_{ik} = \int_0^l N_0(x) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx = a'_{ki},$$

$$b'_{ik} = \omega_i^2 b_{ik} = \int_0^l N_t(x) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx = b'_{ik}.$$

Таким образом, теорема справедлива для системы (12.8). Но она остается справедливой и для любой другой системы, получаемой из нее путем линейного преобразования с постоянными коэффициентами.

Функция Гамильтона может быть построена и в общем случае произвольного упругого тела, так как согласно (13.37)

$$a'_{ik} = \omega_i^2 a_{ik} = \int_V \sigma_{mn}^{(0)} \frac{\partial \varphi_j^{(i)}}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_j^{(k)}}{\partial x_n} dV = a'_{ki},$$

$$b'_{ik} = \omega_i^2 b_{ik} = \int_V \sigma_{mn}^{(t)} \frac{\partial \varphi_j^{(i)}}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_j^{(k)}}{\partial x_n} dV = b'_{ki}.$$

2. Переходя к исследованию устойчивости нулевого решения, рассмотрим сначала случай, когда характеристическое уравнение имеет не более одной пары кратных корней одновременно. Как убедимся, в дальнейшем, этому ограничению можно придать определенный физический смысл.

Рассмотрим пару частных решений, соответствующих паре взаимно обратных характеристических корней

$$\left. \begin{aligned} f_k(t) &= \chi_k(t) \exp\left(\frac{t}{T} \ln \rho_k\right), \\ f_{n+k}(t) &= \chi_{n+k}(t) \exp\left(-\frac{t}{T} \ln \rho_k\right). \end{aligned} \right\} \quad (14.21)$$

Пусть ρ_k вещественно и отлично от ± 1 ; тогда одно из частных решений будет неограниченно возрастать со временем. Поэтому область вещественных ρ будет областью неограниченно возрастающих решений (областью неустойчивости).

Варируя коэффициенты системы, можно добиться того, что характеристическое число станет $\rho_k = 1$ или $\rho_k = -1$ и

будет кратным. В первом случае решение будет периодическим с периодом T , во втором — с периодом $2T$. При дальнейшем изменении коэффициентов рассматриваемая пара характеристических корней станет комплексно сопряженной

$$\begin{aligned}\rho_k &= a + ib, \\ \rho_{n+k} &= a - ib\end{aligned}$$

и вследствие соотношения $\rho_k \rho_{n+k} = 1$ будет равна по модулю единице. Область комплексных корней является, таким образом, областью ограниченных решений (областью устойчивости).

Отсюда следует, что на границах областей неустойчивости дифференциальная система имеет периодические решения с периодом T или $2T$. Точнее, два решения одинакового периода ограничивают область неустойчивости, два решения разных периодов — область устойчивости. Иначе в интервале между корнями $\rho = 1$ и $\rho = -1$ лежал бы корень $\rho = 0$, что невозможно ввиду неособенности преобразования (14.9).

Поведение решений на границах областей неустойчивости зависит от структуры элементарных делителей, однако с практической точки зрения этот вопрос интереса не представляет. Независимо от характера решений на границе области неустойчивости нахождение на ней системы должно считаться недопустимым.

3. На основании предыдущего отыскание областей неустойчивости сводится к определению условий, при которых система (14.1) имеет периодические решения с периодом T или $2T$.

Для упрощения выкладок рассмотрим систему ¹⁾

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + (E - \alpha A - \beta B \cos \theta t) f = 0. \quad (14.22)$$

Ищем решение системы (14.22) в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right), \quad (14.23)$$

¹⁾ Болотин В. В., Сборн. «Поперечные колебания и критические скорости», вып. 2. Изд. АН СССР, 1953.

где \mathbf{a}_k и \mathbf{b}_k — некоторые векторы, не зависящие от времени. Очевидно, что ряд (14.23) эквивалентен n рядам Фурье, в которые разлагаются компоненты вектора $\mathbf{f}(t)$. Эти ряды сходятся, поскольку периодические решения системы (14.22) во всяком случае удовлетворяют условиям Дирихле.

Подставляя (14.23) в (14.22), получим после приравнивания коэффициентов при одинаковых $\sin \frac{k\theta t}{2}$ и $\cos \frac{k\theta t}{2}$ следующую систему матричных уравнений:

$$\begin{aligned} \left(E - \alpha A + \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C \right) \mathbf{a}_1 - \frac{1}{2} \beta B \mathbf{a}_3 &= 0, \\ \left(E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C \right) \mathbf{a}_k - \frac{1}{2} \beta B (\mathbf{a}_{k-2} + \mathbf{a}_{k+2}) &= 0 \\ (k = 3, 5, \dots); \\ \left(E - \alpha A - \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C \right) \mathbf{b}_1 - \frac{1}{2} \beta B \mathbf{b}_3 &= 0, \\ \left(E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C \right) \mathbf{b}_k - \frac{1}{2} \beta B (\mathbf{b}_{k-2} + \mathbf{b}_{k+2}) &= 0 \\ (k = 3, 5, \dots). \end{aligned}$$

Условие существования решений с периодом $4\pi/\theta$ имеет вид (здесь объединены два условия под знаком \pm)

$$\begin{vmatrix} E - \alpha A \pm \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B & 0 & \vdots \\ -\frac{1}{2} \beta B & E - \alpha A - \frac{9}{4} \theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} \beta B & E - \alpha A - \frac{25}{4} \theta^2 C & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (14.24)$$

Подставляя в уравнения (14.22) ряд

$$\mathbf{f}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{b}_0 + \sum_{k=2, 4, 6}^{\infty} \left(\mathbf{a}_k \sin \frac{k\theta t}{2} + \mathbf{b}_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right),$$

получим следующие условия существования решений с периодом $2\pi/\theta$:

$$\begin{vmatrix} E - \alpha A - \theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B & 0 & \vdots \\ -\frac{1}{2} \beta B & E - \alpha A - 4\theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} \beta B & E - \alpha A - 16\theta^2 C & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (14.25)$$

$$\begin{vmatrix} E - \alpha A & -\beta B & 0 & 0 & \vdots \\ -\frac{1}{2} \beta B & E - \alpha A - \theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B & 0 & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} \beta B & E - \alpha A - 4\theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \beta B & E - \alpha A - 16\theta^2 C & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (14.26)$$

Покажем, что полученные бесконечные определители относятся к классу *нормальных*. Рассмотрим, например, определитель (14.24). Выполним над ним элементарные преобразования

$$\Delta = \begin{vmatrix} E - \frac{4}{\theta^2} F_0 & \frac{2\beta}{\theta^2} G & 0 & \vdots \\ \frac{2\beta}{9\theta^2} G & E - \frac{4}{9\theta^2} F & \frac{2\beta}{9\theta^2} G & \vdots \\ 0 & \frac{2\beta}{25\theta^2} G & E - \frac{4}{25\theta^2} F & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

где

$$F_0 = C^{-1} \left(E - \alpha A \pm \frac{1}{2} B \right), \quad F = C^{-1} (E - \alpha A), \quad G = C^{-1} B.$$

Пусть M_0 , M и N — верхние грани модулей матричных элементов F_0 , F и G соответственно. Перепишав определи-

тель Δ в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot \\ a_{21} & 1 + a_{22} & a_{23} & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & 1 + a_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

где a_{ik} — элементы в обычном смысле, покажем, что двойной ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$$

сходится абсолютно. В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \leq \frac{4n^2 M_0}{\theta^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4n^2 (M + \beta N)}{k^2 \theta^2},$$

причем в правой части стоит сходящийся ряд.

Аналогично доказывается сходимость остальных определителей.

4. Сравнивая уравнения (14.24), (14.25), (14.26) с соответствующими уравнениями особого случая, замечаем их полную аналогию. Уравнения особого случая могут быть получены из общих уравнений, если заменить входящие в них матрицы их собственными значениями

$$C \rightarrow \frac{1}{\omega_k^2}, \quad A \rightarrow \frac{1}{\alpha_k}, \quad B \rightarrow \frac{1}{\beta_k}, \quad E \rightarrow 1.$$

Эта аналогия, как мы сейчас покажем, не ограничивается внешним сходством.

Рассмотрим некоторые предельные случаи. Пусть постоянная составляющая параметрической нагрузки отсутствует, а амплитуда периодической составляющей весьма мала ($\beta \rightarrow 0$). Уравнения критических частот примут вид

$$\begin{vmatrix} E - \frac{1}{4} \theta^2 C & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & E - \frac{9}{4} \theta^2 C & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & E - \frac{25}{4} \theta^2 C & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

и соответственно

$$\begin{vmatrix} E - \theta^2 C & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & E - 4\theta^2 C & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & E - 16\theta^2 C & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & E - 36\theta^2 C & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Существенно, что уравнения, определяющие условия существования решений одинакового периода, попарно совпадают. Это значит, что области неустойчивости, ограниченные решениями одинакового периода, вырождаются в некоторые линии. Они определяются из условия

$$\left| E - \frac{k^2 \theta^2}{4} C \right| = 0$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots).$$

Вспомогая, что характеристические числа матрицы C будут $1/\omega_k^2$, найдем, что

$$\theta_* = \frac{2\omega}{k}$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots).$$

В более общем случае, когда $\alpha \neq 0$, аналогичным путем получаем:

$$\left| E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C \right| = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (14.27)$$

Сравним эти уравнения с уравнением для определения частот собственных колебаний нагруженной системы

$$\left| E - \alpha A - \Omega^2 C \right| = 0. \quad (14.28)$$

Легко получаем, что

$$\theta_* = \frac{2\Omega}{k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (14.29)$$

Заметим, что уравнение критических частот (14.27) включает как частный случай (при $k = 0$) также уравнение статической

устойчивости

$$|E - \alpha A| = 0.$$

Итак, резонансный спектр системы дифференциальных уравнений (14.22) совершенно аналогичен спектру уравнения Матье-Хилла. Различие заключается в способе определения частот собственных колебаний нагруженной системы. Для задач, относящихся к особому случаю, эти частоты определяются по формуле

$$\Omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\alpha_k}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots);$$

в общем случае для определения собственных частот приходится решать уравнение (14.28).

Для детального расчета областей неустойчивости следует рассмотреть уравнения (14.24)—(14.26).

Будем попрежнему называть *главными* те области неустойчивости, которым в формуле (14.29) соответствует $k = 1$. Приближенное выражение для границ главных областей неустойчивости получим, приравняв нулю определитель верхнего диагонального квазиэлемента матрицы (14.24):

$$\left| E - \alpha A \pm \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C \right| = 0. \quad (14.30)$$

Это приближение равносильно допущению, что периодические решения на границах главных областей неустойчивости носят гармонический характер

$$f(t) = a \sin \frac{\theta t}{2} + b \cos \frac{\theta t}{2}.$$

Уравнение (14.30) допускает простое истолкование. Составим уравнения собственных частот для системы, которая нагружена постоянной параметрической нагрузкой с параметрами α , $\beta/2$ и α , $-\beta/2$ соответственно. Эти уравнения имеют вид

$$\left| E - \alpha A - \frac{1}{2} \beta B - \Omega_{\alpha + \frac{1}{2} \beta}^2 C \right| = 0,$$

$$\left| E - \alpha A + \frac{1}{2} \beta B - \Omega_{\alpha - \frac{1}{2} \beta}^2 C \right| = 0.$$

Сравнивая эти уравнения с (14.30), находим:

$$\theta_* = 2\Omega_{\alpha \pm \frac{1}{2}\beta}.$$

Таким образом, частоты, соответствующие границам главных областей неустойчивости, в первом приближении могут быть определены как удвоенные собственные частоты системы, нагруженной постоянной нагрузкой с параметрами α , $\beta/2$ и α , $-\beta/2$ соответственно. Попытка связать критические частоты с частотами собственных колебаний нагруженного стержня была сделана А. Ф. Смирновым¹⁾.

§ 58. Пример определения границ областей динамической неустойчивости

1. В качестве примера применения изложенного выше метода рассмотрим систему второго порядка

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + [E - (\alpha + \beta \cos \theta t) A] f = 0, \quad (14.31)$$

где

$$C = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_2^2} \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}.$$

К системам такого вида приводят, как мы увидим ниже, многие задачи динамической устойчивости пластинок и плоской формы изгиба²⁾.

Уравнение статической устойчивости для этой задачи

$$|E - \alpha A| = 0$$

¹⁾ Смирнов А. Ф., Статическая и динамическая устойчивость сооружений. Трансжелдориздат, 1947.

²⁾ Болотин В. В., Инж. сборн. 14, 1953.

имеет решение

$$\alpha_* = \pm \frac{1}{\sqrt{a_{12}a_{21}}}. \quad (14.32)$$

Границы главных областей в первом приближении могут быть найдены из уравнения

$$\left| E - \left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) A - \frac{1}{4} \theta^2 C \right| = 0$$

или в развернутой форме

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_1^2} & - \left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) a_{12} \\ - \left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) a_{21} & 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_2^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и учитывая (14.32), получаем уравнение

$$\left(1 - \frac{\theta^2}{4\omega_1^2} \right) \left(1 - \frac{\theta^2}{4\omega_2^2} \right) - \frac{\left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right)^2}{\alpha_*^2} = 0,$$

решение которого дает выражения для границ двух главных областей неустойчивости

$$\left. \begin{aligned} \theta_* &= \frac{2\omega_1}{\sqrt{2\gamma}} \sqrt{1 + \gamma - \sqrt{(1 - \gamma)^2 + 4\gamma \frac{\left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right)^2}{\alpha_*^2}}}, \\ \theta_* &= \frac{2\omega_2}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \gamma + \sqrt{(1 - \gamma)^2 + 4\gamma \frac{\left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right)^2}{\alpha_*^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.33)$$

Здесь введено обозначение для отношения квадратов парциальных частот

$$\gamma = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}. \quad (14.34)$$

Если это отношение значительно отличается от единицы например $\gamma \ll 1$, формулам (14.33) можно придать более

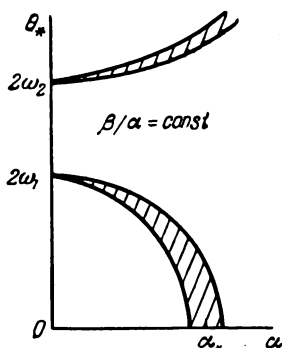
обозримый вид

$$\left. \begin{aligned} \theta_* &= 2\omega_1 \sqrt{1 - \frac{(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta)^2}{(1-\gamma)\alpha_*^2}}, \\ \theta_* &= 2\omega_2 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta)^2}{\alpha_*^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.35)$$

Таким образом, существуют две главные области неустойчивости, одна из которых при малых α/α_* лежит вблизи частоты $2\omega_1$, другая — вблизи $2\omega_2$. Характерным для данной задачи является возрастание резонансной частоты одной из областей с увеличением α/α_* (фиг. 89).

2. Переходим к расчету областей неустойчивости, которым в формуле (14.29) соответствует $k=2$. Рассмотрим уравнения

$$\left. \begin{aligned} |E - \alpha A - \theta^2 C| &= 0, \\ \left| \begin{array}{cc} E - \alpha A & -\beta A \\ -\frac{1}{2}\beta A & E - \alpha A - \theta^2 C \end{array} \right| &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14.36)$$



Фиг. 89.

которые соответствуют гармоническому приближению

$$f(t) = \frac{1}{2} b_0 + a_2 \sin \theta t + b_2 \cos \theta t.$$

Первое из уравнений (14.36) в развернутой форме имеет вид

$$\left| \begin{array}{cc} 1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2} & -\alpha a_{12} \\ -\alpha a_{21} & 1 - \frac{\theta^2}{\omega_2^2} \end{array} \right| = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение

$$\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{\alpha^2}{\alpha_*^2} = 0,$$

которое при $\gamma \ll 1$ дает:

$$\left. \begin{aligned} \theta_* &= \omega_1 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{(1-\gamma)\alpha_*^2}}, \\ \theta_* &= \omega_2 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\alpha^2}{\alpha_*^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.37)$$

Формулы (14.37) позволяют найти одну из границ каждой области неустойчивости; для определения второй границы рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha a_{12} & 0 & -\beta a_{12} \\ -\alpha a_{21} & 1 & -\beta a_{21} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta a_{12} & 1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2} & -\alpha a_{12} \\ -\frac{1}{2}\beta a_{21} & 0 & -\alpha a_{21} & 1 - \frac{\theta^2}{\omega_2^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Решая это уравнение, получим при $\gamma \ll 1$:

$$\left. \begin{aligned} \theta_* &= \omega_1 \sqrt{1 - \frac{\mu^2 - 2(1-\gamma)v^2 - (\mu^2 - 2v^2)^2}{(1-\gamma)(1-\mu^2) - 2v^2}}, \\ \theta_* &= \omega_2 \sqrt{1 + \frac{\gamma[\mu^2 - (\mu^2 - 2v^2)^2] - 2(1-\gamma)v^2}{(1-\gamma)(1-\mu^2) + 2\gamma v^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.38)$$

Здесь для сокращения $\mu = \frac{\alpha}{\alpha_*}$, $v = \frac{\beta}{2\alpha_*}$.

3. Для того чтобы найти границы областей неустойчивости при $k=3$, а также уточнить границы главных областей, нужно рассмотреть уравнение

$$\begin{vmatrix} E - \left(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta\right)A - \frac{1}{4}\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta A \\ -\frac{1}{2}\beta A & E - \alpha A - \frac{9}{4}\theta^2 C \end{vmatrix} = 0$$

или в развернутом виде

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_1^2} & -\left(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta\right)a_{12} & 0 & -\frac{1}{2}\beta a_{12} \\ -\left(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta\right)a_{21} & 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_2^2} & -\frac{1}{2}\beta a_{21} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta a_{12} & \boxed{1 - \frac{9\theta^2}{4\omega_1^2}} & -\alpha a_{12} \\ -\frac{1}{2}\beta a_{21} & 0 & -\alpha a_{21} & 1 - \frac{9\theta^2}{4\omega_2^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (14.39)$$

Задавшись целью определить границы области, лежащей вблизи $\theta = 2/3\omega_1$, подставим это значение во все элементы определителя (14.39), кроме обведенного рамкой:

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{9} & -\left(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta\right)a_{12} & 0 & -\frac{1}{2}\beta a_{12} \\ -\left(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta\right)a_{21} & 1 - \frac{\gamma}{9} & -\frac{1}{2}\beta a_{21} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta a_{12} & \boxed{1 - \frac{9\theta^2}{4\omega_1^2}} & -\alpha a_{12} \\ -\frac{1}{2}\beta a_{21} & 0 & -\alpha a_{21} & 1 - \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

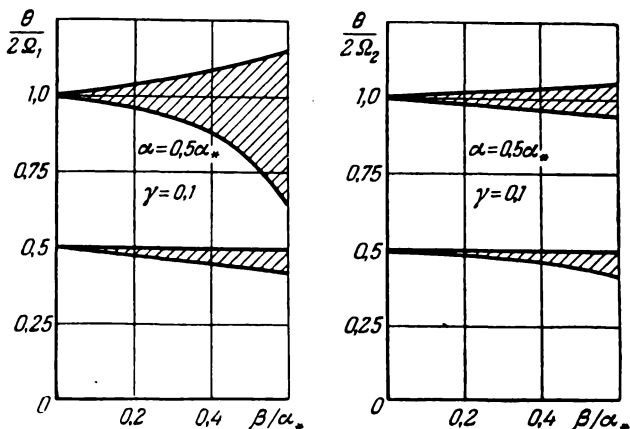
Решив это уравнение, получим формулу для критических частот

$$\theta_* = \frac{2}{3}\omega_1 \sqrt{1 - \frac{\frac{8}{9}[\mu^2 + \nu^2(1-\gamma)] - [\mu(\mu \pm \nu) + \nu^2]^2}{(1-\gamma)\left[\frac{8}{9} - (\mu \pm \nu)^2\right] - \nu^2}}. \quad (14.40)$$

Аналогично выводится формула для области $\theta = 2/3\omega_2$

$$\theta_* = \frac{2}{3}\omega_2 \sqrt{1 + \frac{\frac{8}{9}[\gamma\mu^2 + \nu^2(1-\gamma)] - \gamma[\mu(\mu \pm \nu) + \nu^2]^2}{(1-\gamma)\left[\frac{8}{9} - (\mu \pm \nu)^2\right] + \gamma\nu^2}}. \quad (14.40')$$

Распределение первых двух областей неустойчивости на плоскости параметров $(\beta/\alpha_*, \theta/2\Omega)$ изображено на фиг. 90.



Фиг. 90.

Частоты собственных колебаний нагруженной системы определены по приближенным формулам

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \omega_1 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{(1-\gamma)\alpha_*^2}}, \\ \Omega_2 &= \omega_2 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\alpha^2}{\alpha_*^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.41)$$

Отношение парциальных частот принято $\gamma = 0,1$.

4. Оценим порядок ширины первых трех областей неустойчивости. Из формул (14.35) видно, что ширина первой области

$$\frac{\Delta\theta}{\omega_1} \sim \frac{\alpha\beta}{\alpha_*^2}.$$

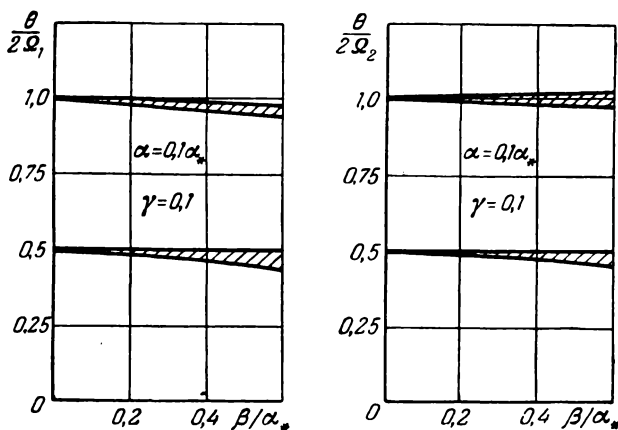
Вторая область, как видно из (14.37) и (14.38), имеет ширину порядка

$$\frac{\Delta\theta}{\omega_1} \sim \frac{\beta^2}{\alpha_*^2}.$$

Ширина третьей области оценивается величинами порядка

$$\frac{\Delta\theta}{\omega_1} \sim \frac{\alpha^3\beta}{\alpha_*^4} + \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha_*^4} + \frac{\alpha\beta^3}{\alpha_*^4}.$$

Таким образом, для рассматриваемой задачи в противоположность особому случаю ширина первой и второй области



Фиг. 91.

измеряется величинами одного и того же порядка. При заданном β первая область будет тем уже, чем меньше постоянная составляющая нагрузки α . Это означает, что при малых α наиболее широкой будет вторая область неустойчивости (фиг. 91).

§ 59. Приближенный метод расчета областей неустойчивости

Описанный метод требует, как было видно, раскрытия определителей высоких порядков. Для оценки ширины областей неустойчивости можно предложить более простой, приближенный метод расчета, идея которого состоит в следующем. Матричное уравнение

$$Cf'' + [E - \alpha A - \beta\Phi(t)B]f = 0 \quad (14.42)$$

описывает колебания некоторой системы с переменными частотами собственных колебаний. Определим «мгновенные» частоты этой системы, рассматривая время t как параметр. Это будут корни уравнения

$$|E - \alpha A - \beta \Phi(t) B - \Omega^2(t) C| = 0. \quad (14.43)$$

С известной степенью точности, которая будет установлена ниже, матричное уравнение (14.42) может быть заменено системой обыкновенных уравнений с разделяющимися переменными

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \Omega_k^2(t) f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (14.44)$$

Легко видеть, что функции $\Omega_k(t)$ будут иметь основной период $2\pi/\theta$ и могут быть представлены в виде рядов типа

$$\Omega_k(t) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\theta t.$$

Мы получили, таким образом, уравнения Хилла.

Если матрицы A , B , C одновременно приводятся к диагональному виду (особый случай), уравнения (14.44) дают точное решение задачи. Действительно,

$$\Omega_k^2(t) = \omega_k^2 \left[1 - \frac{\alpha}{\alpha_k} - \frac{\beta}{\beta_k} \Phi(t) \right],$$

так что уравнения (14.44) совпадают с (12.34).

Для того чтобы оценить погрешность в общем случае, рассмотрим пример предыдущего параграфа:

$$C = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_2^2} \end{vmatrix}, \quad A = B = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}.$$

В этом случае мы вправе ожидать наибольшую погрешность, так как матрицы A и B существенно отличаются от диагональных. Уравнение (14.43) принимает вид

$$\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{(\alpha + \beta \cos \theta t)^2}{\alpha_*^2} = 0,$$

откуда

$$\Omega_{1,2}^2(t) = \frac{\omega^2}{2\gamma} \left[1 + \gamma \mp \sqrt{(1-\gamma)^2 + \frac{4\gamma}{\alpha_*^2} (\alpha + \beta \cos \theta t)^2} \right].$$

Разлагая радикал в ряд и ограничиваясь первыми членами, получим при $\gamma \ll 1$:

$$\Omega_1^2 = \omega_1^2 \left[1 - \frac{(\alpha + \beta \cos \theta t)^2}{(1-\gamma)\alpha_*^2} \right] + \dots,$$

$$\Omega_2^2 = \omega_2^2 \left[1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{(\alpha + \beta \cos \theta t)^2}{\alpha_*^2} \right] + \dots$$

Задача приведена к двум независимым уравнениям вида

$$f'' + \omega^2 \left(1 - \nu_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \cos k\theta t \right) f = 0.$$

В первом случае

$$\nu_0 = \frac{\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2}{(1-\gamma)\alpha_*^2},$$

$$\nu_1 = \frac{2\alpha\beta}{(1-\gamma)\alpha_*^2},$$

$$\nu_2 = \frac{\beta^2}{2(1+\gamma)\alpha_*^2}.$$

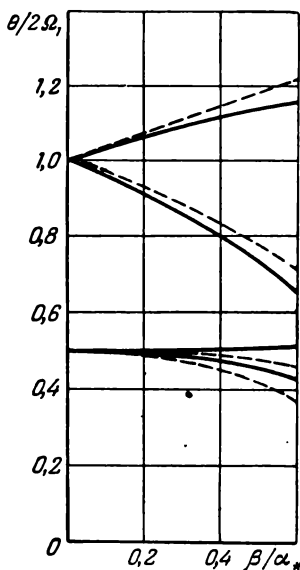
Критерий неустойчивости (1.41) в новых обозначениях принимает вид

$$\theta_*^2 = 4\omega_1^2 \left(1 - \nu_0 \pm \frac{1}{2}\nu_k \right) \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

откуда для основной области

$$\theta_*^2 = 4\omega_1^2 \left[1 - \frac{\alpha^2 \pm \alpha\beta + \frac{1}{2}\beta^2}{(1-\gamma)\alpha_*^2} \right]. \quad (14.45)$$

Для второй области неустойчивости соответственно получаем:



Фиг. 92.

$$\left. \begin{aligned} \theta_*^2 &= \omega_1^2 \left[1 - \frac{\alpha^2 + \frac{3}{4} \beta^2}{(1-\gamma) \alpha_*^2} \right], \\ \theta_*^2 &= \omega_1^2 \left[1 - \frac{\alpha^2 + \frac{1}{4} \beta^2}{(1-\gamma) \alpha_*^2} \right]. \end{aligned} \right\} (14.46)$$

Во втором случае

$$\begin{aligned} \nu_0 &= -\frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\alpha^2 + \frac{1}{2} \beta^2}{\alpha_*^2}, \\ \nu_1 &= -\frac{2\gamma\alpha\beta}{(1-\gamma) \alpha_*^2}, \\ \nu_2 &= -\frac{\gamma\beta^2}{2\alpha_*^2(1-\gamma)}. \end{aligned}$$

Подстановка дает:

$$\left. \begin{aligned} \theta_*^2 &= 4\omega_2^2 \left(1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\alpha^2 \pm \alpha\beta + \frac{1}{2} \beta^2}{\alpha_*^2} \right), \\ \theta_*^2 &= \omega_2^2 \left(1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\alpha^2 + \frac{3}{4} \beta^2}{\alpha_*^2} \right), \\ \theta_*^2 &= \omega_2^2 \left(1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\alpha^2 + \frac{1}{4} \beta^2}{\alpha_*^2} \right). \end{aligned} \right\} (14.47)$$

Сравнение результатов подсчетов по формулам (14.45), (14.46) и по формулам предыдущего параграфа дано на фиг. 92 (только что полученное решение показано пунктиром).

Чтобы выяснить характер сделанных приближений, поступим следующим образом. Пусть матрица $V(t)$ приводит матрицу $C[E - \alpha A - \beta \Phi(t) B]$ к главным осям (время t рас-

сма тривается как параметр). Сделаем в уравнении (14.42) подстановку $\mathbf{f} = \mathbf{V}\varphi$. В новой системе координат уравнение (14.42) запишется следующим образом:

$$V^{-1} \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{V}\varphi) + V^{-1} \mathbf{C} [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B] \mathbf{V}\varphi = 0.$$

Но согласно условию

$$V^{-1} \mathbf{C} [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B] V = [\Omega_1^2(t), \Omega_2^2(t), \dots, \Omega_n^2(t)] = \Omega^2(t),$$

а по правилу дифференцирования матриц

$$\frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{V}\varphi) = V \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dV}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d^2V}{dt^2} \varphi.$$

Поэтому уравнение (14.42) принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 V^{-1} \frac{dV}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + V^{-1} \frac{d^2V}{dt^2} \varphi + \Omega^2(t) \varphi = 0. \quad (14.48)$$

Если $V = \text{const}$ (это будет в случае, когда матрицы A , B и C одновременно приводятся к главным осям), то уравнение (14.48) принимает вид (14.44). В противном случае для получения уравнений (14.44) приходится пренебречь в уравнении (14.48) подчеркнутыми членами. Эти члены учитывают силы инерции, возникающие вследствие изменения мгновенных форм колебаний [они описываются матрицей $V(t)$] в течение одного периода. Чем меньше параметр β , тем меньше будет влияние отброшенных членов.

§ 60. Случай кратных корней, отличных от ± 1 . Комбинационный резонанс

Выше (§§ 57—58) был рассмотрен случай, когда характеристическое уравнение не имеет кратных корней помимо ± 1 . В случае кратных корней, отличных от ± 1 , их будет, по крайней мере, две пары. Этот случай соответствует комбинационному резонансу относительно двух собственных частот системы.

Возвратимся к уравнению (14.18). Полагая в нем $\beta \rightarrow 0$, получим уравнения

$$\begin{aligned} & |h^2 \mathbf{C} + E - \alpha A| = 0, \\ & \left| \begin{array}{cc} (h^2 - k^2 h^2) \mathbf{C} + E - \alpha A & 2kh^2 \mathbf{C} \\ -2kh^2 \mathbf{C} & (h^2 - k^2 h^2) \mathbf{C} + E - \alpha A \end{array} \right| = 0, \\ & \qquad \qquad \qquad (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

которые в главных осях матрицы $C^{-1}(E - \alpha A)$ запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} h^2 + \Omega_p^2 = 0, \\ \left| \begin{array}{cc} h^2 - k^2\theta^2 + \Omega_p^2 & 2hk\theta \\ -2hk\theta & h^2 - k^2\theta^2 + \Omega_p^2 \end{array} \right| = 0 \\ (p = 1, 2, 3, \dots), \\ (k = 1, 2, 3, \dots). \end{array} \right\} (14.49)$$

Решение уравнений (14.49) дает:

$$h = \pm i(\Omega_p \pm k\theta) \quad \left(\begin{array}{l} p = 1, 2, 3, \dots, \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{array} \right),$$

где i — мнимая единица.

Приравнявая значения h при различных p и k , получим условие, при котором характеристическое уравнение будет иметь кратные корни:

$$\Omega_p \pm \Omega_q = k\theta \quad \left(\begin{array}{l} p, q = 1, 2, 3, \dots, \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{array} \right). \quad (14.50)$$

При $p = q$ формула (14.50) совпадает, очевидно, с формулой (14.29), при $p \neq q$ она дает условие возникновения комбинационного резонанса¹⁾.

Следует указать, что соотношениям (14.50) соответствует случай линейных элементарных делителей. Это видно из того, что мы предполагаем одновременное существование двух независимых решений типа (14.13).

Комбинационный резонанс имеет для практических приложений второстепенное значение; детального расчета этого резонанса мы здесь не приводим.

¹⁾ Соотношения типа (14.50) для одной из задач небесной механики были получены Н. А. Артемьевым (Известия АН СССР, сер. матем., 1944), который рассматривал систему уравнений с периодическими коэффициентами.

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ
ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ
С УЧЕТОМ ЗАТУХАНИЯ

§ 61. Предварительные замечания

1. Наличие в реальных системах сил сопротивления учитывается обычно путем введения в соответствующие дифференциальные уравнения дополнительных членов, содержащих первые производные от перемещений по времени. Так, естественным обобщением обычного уравнения затухающих колебаний

$$f'' + 2\epsilon f' + \omega^2 f = 0$$

на случай системы со многими степенями свободы является матричное уравнение

$$f'' + 2\epsilon f' + \omega^2 f = 0, \quad (15.1)$$

где f — вектор, составленный из обобщенных координат f_i , ω^2 — диагональная матрица

$$\omega^2 = [\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2],$$

ϵ — матрица рассеяния

$$\epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \dots & \epsilon_{1n} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \dots & \epsilon_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \epsilon_{n1} & \epsilon_{n2} & \dots & \epsilon_{nn} \end{vmatrix}. \quad (15.2)$$

Мы не будем вдаваться здесь в дискуссию о том, насколько подобный способ учета сил сопротивления приемлем в инженерных расчетах (некоторые соображения см. в § 15).

Ограничимся замечанием, обоснование которому будет дано ниже, в главе XVI.

Для разрешения вопроса о границах областей динамической неустойчивости достаточно линейной трактовки; в уравнениях (15.1) могут быть сохранены лишь члены, учитывающие «линейное» затухание. Исключения из этого правила составляют случаи, когда силы сопротивления имеют разрывный характер. Так, в случае сопротивления типа «сухого» трения линеаризация уравнений недопустима (§ 67).

2. Выясним теперь основные свойства матрицы (15.2). Прежде всего она должна быть симметричной матрицей. В противном случае, воспользовавшись тождеством

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ki}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ki}),$$

можем представить матрицу ε в виде суммы двух матриц. Одна из них, очевидно, симметрична, вторая с элементами

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ki})$$

антисимметрична, т. е.

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}, \quad \gamma_{kk} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (15.3)$$

Покажем, что общая работа сил, которым соответствует матрица γ_{ik} , на действительных перемещениях равна нулю. Элементарная работа обобщенных сил Q_i на перемещениях f_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) составляет:

$$dA = \sum_{i=1}^n Q_i df_i = \sum_{i=1}^n Q_i f'_i dt.$$

Подставляя сюда

$$Q_i = - \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} f'_k \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

и учитывая (15.3), находим:

$$dA = - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} f'_i f'_k dt \equiv 0.$$

Итак, матрица ϵ , описывающая рассеяние энергии, является симметричной. Следовательно, все ее характеристические числа $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ — корни уравнения

$$|\epsilon - \epsilon E| = 0$$

— вещественны. Можно показать далее, что все характеристические числа ϵ_k положительны. Составим квадратичную форму

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \epsilon_{ik} f'_i f'_k.$$

Взятое с обратным знаком, это выражение дает работу сил сопротивления на перемещениях f_i . Если некоторые $\epsilon_k < 0$, то квадратичная форма φ будет неопределенной, а заданная система — автоколебательной (при определенных соотношениях между f_i силы сопротивления совершают положительную работу — «раскачку» колебаний). Автоколебательные системы из нашего рассмотрения исключаются.

Далее, ни одно из ϵ_k не равно нулю. В противном случае система имела бы неполную диссипацию, т. е. существовали бы такие движения, которые не сопровождаются потерей энергии. Эта возможность также исключается.

3. Дальнейшие заключения о характере матрицы ϵ должны быть основаны на опытных данных.

Естественно предположить, что в главных осях матрицы ω матрица рассеяния также является диагональной. В этом случае уравнение (15.1) распадается на отдельные скалярные уравнения

$$f''_i + 2\epsilon_{ii} f'_i + \omega_i^2 f_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (15.4)$$

решения которых при начальных отклонениях $f_i(0) = a_i$ и начальных фазах λ_i имеют вид

$$f_i(t) = a_i e^{-\epsilon_{ii} t} \cos(\bar{\omega}_i t + \lambda_i), \quad (15.5)$$

где $\bar{\omega}_i$ — собственная частота с поправкой на затухание

$$\bar{\omega}_i^2 = \omega_i^2 - \epsilon_{ii}^2.$$

Предположение о диагональности матрицы ϵ равносильно допущению, что между главными формами колебаний не происходит перекачки энергии, обусловленной силами

Подставим (15.9) в правые части второй группы уравнений (15.8). Тогда

$$\frac{d^2 f_i^{(1)}}{dt^2} + 2\varepsilon_{ii} \frac{d f_i^{(1)}}{dt} + \omega_i^2 f_i^{(1)} = F_i(t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

где

$$F_i(t) = 2 \sum_{k=1}^n a_k \varepsilon_{ik} e^{-\varepsilon_{kk} t} (\varepsilon_{kk} \cos \bar{\omega}_k t + \bar{\omega}_k \sin \bar{\omega}_k t). \quad (15.10)$$

Решение этой системы, обращающееся с первой производной в нуль при $t = 0$, имеет вид

$$f_i^{(1)} = \frac{e^{-\varepsilon_{ii} t}}{\bar{\omega}_i} \int_0^t F_i(\tau) e^{\varepsilon_{ii} \tau} \sin \bar{\omega}_i(t - \tau) d\tau.$$

Подстановка (15.10) после преобразований дает (при $\omega_i \neq \bar{\omega}_k$):

$$f_i^{(1)} = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^n a_k \varepsilon_{ik} e^{-\varepsilon_{kk} t} (M_{ik} \sin \bar{\omega}_k t + N_{ik} \cos \bar{\omega}_k t). \quad (15.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M_{ik} &= - \frac{\bar{\omega}_k (\bar{\omega}_k + \bar{\omega}_i) - \varepsilon_{kk} (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{kk})}{(\bar{\omega}_k + \bar{\omega}_i)^2 + (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{kk})^2} + \\ &\quad + \frac{\bar{\omega}_k (\bar{\omega}_k - \bar{\omega}_i) - \varepsilon_{kk} (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{kk})}{(\bar{\omega}_k - \bar{\omega}_i)^2 + (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{kk})^2}, \\ N_{ik} &= \frac{\bar{\omega}_k \varepsilon_{ii} + \varepsilon_{kk} \bar{\omega}_i}{(\bar{\omega}_k + \bar{\omega}_i)^2 + (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{kk})^2} - \frac{\bar{\omega}_k \varepsilon_{ii} - \varepsilon_{kk} \bar{\omega}_i}{(\bar{\omega}_k - \bar{\omega}_i)^2 + (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{kk})^2}. \end{aligned} \right\} \quad (15.12)$$

Легко видеть, что выражение (15.11) содержит члены порядка ε/ω , $(\varepsilon/\omega)^2$, $(\varepsilon/\omega)^3$, ... (индексы при ε_{ik} и $\bar{\omega}_k$ опущены). Для диагональных элементов ε_{ii}

$$\frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{\delta}{2\pi},$$

где δ — декремент затухания собственных колебаний. Для металлических конструкций $\delta = 0,005 \div 0,05$, что дает право

пренебречь в (15.11) членами второго и высших порядков малости. Это равносильно тому, чтобы положить:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_i &\approx \omega_i, \\ M_{ik} &\approx -\frac{\omega_k}{\omega_k + \omega_i} + \frac{\omega_k}{\omega_k - \omega_i} = \frac{2\omega_i\omega_k}{\omega_k^2 - \omega_i^2}, \\ N_{ik} &\approx 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, \dots, n).\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (15.11), возвращаясь к (15.7) и полагая $\mu = 1$, получаем первое приближение

$$f_i(t) = a_i e^{-\varepsilon_{ii}t} \cos \omega_i t + \sum_{k=1}^n \frac{a_k \varepsilon_{ik} \omega_k}{\omega_k^2 - \omega_i^2} e^{-\varepsilon_{kk}t} \sin \omega_k t$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (15.13)$$

Из (15.13) видно прежде всего, что побочные элементы в первом приближении не влияют на *скорость* затухания колебаний. Колебания несут, однако, связанный характер. Так, поведение $f_i(t)$ зависит от всех $f_k(0) = a_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$). Это влияние, впрочем, оценивается величинами порядка $\varepsilon_{ik}/\omega_k$, т. е. даже при $\varepsilon_{ik} \sim \varepsilon_{ii}$ весьма невелики.

Выше было оговорено, что $\omega_i \neq \omega_k$. В случае близких по величине собственных частот связь между формами колебаний усиливается.

Рассмотрим случай кратных частот $\omega_i = \omega_j$, принимая, однако, что $\varepsilon_{ii} \neq \varepsilon_{jj}$. Здесь могут быть использованы формулы (15.12). Выражения для M_{ik} и N_{ik} содержат, очевидно, величины порядка $(\varepsilon/\omega)^{-1}$, 1 , ε/ω , $(\varepsilon/\omega)^2$ и т. д. С точностью до величин порядка единицы

$$\begin{aligned}-M_{ij} &\approx \frac{2\omega_j^2}{(2\omega_j)^2} + \frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}}, \\ N_{ij} &\approx -\frac{\omega_i}{\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}}.\end{aligned}$$

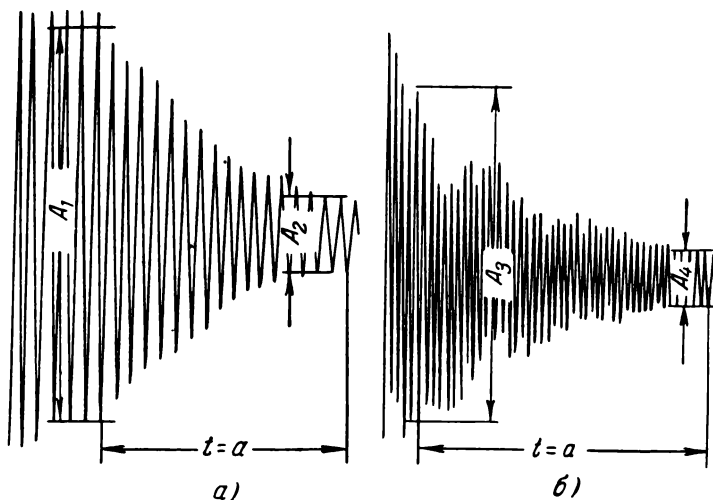
Роль побочных элементов ε_{ij} возрастает, ибо подстановка N_{ij} в формулу (15.11) дает слагаемые типа

$$\frac{a_j \varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}} e^{-\varepsilon_{jj}t} \sin \omega_j t.$$

4. Итак, по крайней мере, в случае неравных (точнее, не слишком близких) собственных частот матрицу рассеяния

можно считать диагональной. Возникает вопрос о соотношении между диагональными элементами матрицы — коэффициентами затухания ε_i .

В некоторых случаях эти коэффициенты могут оказаться равными. Так, на фиг. 93 приведены осциллограммы собственных затухающих колебаний для модели двухшарнирной



Фиг. 93.

арки. (Эта арка описана ниже, в главе XVIII.) Первая осциллограмма изображает затухание основной, косимметричной формы колебаний, вторая — затухание симметричной формы. То, что показатели обеих экспонент примерно равны, видно на глаз. Вычисления дают $\varepsilon_1 = 0,114 \text{ сек}^{-1}$ и $\varepsilon_2 = 0,122 \text{ сек}^{-1}$. Разница составляет около 7%. Для других систем коэффициенты затухания различных форм могут значительно отличаться друг от друга ¹⁾.

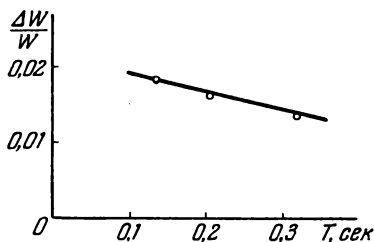
Опыты показывают, что во многих случаях константой системы (в смысле величины, не зависящей от номера формы колебаний) является не коэффициент затухания ε_k , а декремент δ_k . Это оправдывается и некоторыми теоретическими

¹⁾ См. работу Г. В. Федоркова, цитированную на стр. 326.

соображениями. Декремент затухания связан с относительным рассеянием энергии за период простой приближенной зависимостью

$$\delta \cong \frac{1}{2} \frac{\Delta W}{W}.$$

Для сопоставимых деформаций (например, для колебаний балки по синусоиде с различной длиной полуволны) относительное рассеяние внутренней энергии может считаться величиной постоянной. Если



Фиг. 94.

кроме того, удельный вес внешних сопротивлений в общем балансе невелик, то декремент затухания будет примерно одинаков для всех форм колебаний данной системы.

На фиг. 94 приведен график изменения $\Delta W/W$ (т. е. удвоенного декремента затухания) для шарнирно опертых балок из прокатного швеллера, имеющих различные пролеты. Из графика видно, что при увеличении пролета вдвое декремент меняется с 0,0095 до 0,007. Убывание декремента объясняется уменьшением доли внешних потерь в энергетическом балансе.

Принимая

$$\delta = \frac{2\pi e}{\omega} = \text{const},$$

получаем для матрицы рассеяния:

$$e = \frac{\delta}{\pi} C^{-\frac{1}{2}}, \quad (15.14)$$

где $C = \omega^{-2}$. Эта формула справедлива при любом выборе координат.

Еще одно представление для матрицы e может быть получено следующим образом. Рассмотрим колебания призматического прямолинейного стержня с учетом внешнего и внутреннего сопротивлений. Внешнее сопротивление возьмем пропорциональным скоростям соответствующих точек. Относительно внутреннего сопротивления предположим, что оно

пропорционально скоростям деформации продольных волокон. Иначе, предположим, что стержень является упруго-вязким телом. Уравнение собственных колебаний имеет вид

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2\xi \frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial t} + 2\eta \frac{\partial v}{\partial t} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

где ξ и η — некоторые константы. Второй член учитывает внутреннее, третий — внешнее сопротивление. Полагая

$$v(x, t) = f_k(t) \varphi_k(x),$$

где $\varphi_k(x)$ — формы колебаний консервативной задачи, удовлетворяющие уравнению

$$EJ \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - m\omega^2 \varphi = 0,$$

придем к уравнению типа (15.4)

$$f_k'' + 2\varepsilon_k f_k' + \omega_k^2 f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где

$$\varepsilon_k = \frac{\eta}{m} + \frac{\xi}{EJ} \omega_k^2.$$

Следовательно, при сделанных допущениях матрица рассеяния имеет вид

$$\varepsilon = \frac{\eta}{m} E + \frac{\xi}{EJ} C^{-1}. \quad (15.15)$$

Вообще, если матрицы ε и C одновременно приводятся к диагональному виду, то одна из них может быть представлена в виде функции другой. Частными случаями являются формулы (15.14) и (15.15). Отыскание общего вида функции $\varepsilon(C)$ требует сочетания усилий в области теории и эксперимента.

§ 62. Определение областей динамической неустойчивости

1. Уравнение динамической устойчивости с учетом затухания получим, введя в уравнение

$$f'' + C^{-1} [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B] f = 0$$

дополнительный член с первой производной от вектора смещения. В дальнейшем запишем уравнение в виде

$$Cf'' + 2C\epsilon f' + [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B]f = 0, \quad (15.16)$$

справедливым при любом выборе координатных функций.

Для того чтобы установить вид решений (15.16), желательно найти подстановку, избавляющую от члена с f' , т. е. приводящую к уравнениям, аналитический вид решений которых известен.

Пусть X — некоторая матрица. По аналогии с разложением для скаляра

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

назовем показательной функцией от матрицы X разложение ¹⁾

$$e^X = E + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

Пользуясь этим определением, введем матрицу

$$e^{-st} = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k (-t)^k}{k!}.$$

Составим производную от этой матрицы по t :

$$\frac{d}{dt}(e^{-st}) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k (-t)^{k-1}}{(k-1)!} = -se^{-st}.$$

Таким образом, показательная функция от матрицы обладает основными свойствами скалярной показательной функции. В главных осях

$$e^{-st} = [e^{-s_1 t}, e^{-s_2 t}, \dots, e^{-s_n t}].$$

По аналогии с подстановкой

$$f = e^{-st} u(t),$$

¹⁾ Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. Гостехиздат, 1953.

приводящей уравнение «особого» случая (2.1) к уравнению Матье-Хилла, введем матричную подстановку

$$f = e^{-st} u(t). \quad (15.17)$$

Здесь $u(t)$ — вектор с компонентами, подлежащими определению. Дважды дифференцируя, получаем:

$$\begin{aligned} f' &= e^{-st} (u' - su), \\ f'' &= e^{-st} (u'' - 2su' + s^2u). \end{aligned}$$

Подстановка в (15.16) дает:

$$C e^{-st} u'' + [E - C e^2 - \alpha A - \beta \Phi(t) B] e^{-st} u = 0, \quad (15.18)$$

т. е. члены с f' действительно исчезают. При условии, что (15.18) может быть записано в виде

$$e^{-st} \{ C u'' + [E - C e^2 - \alpha A - \beta \Phi(t) B] u \} = 0, \quad (15.19)$$

и учитывая, что e^{-st} — неособенная матрица (все $e^{-s^2 k^2} > 0$), приходим к уравнению

$$C u'' + [E - C e^2 - \alpha A - \beta \Phi(t) B] u = 0. \quad (15.20)$$

Выражения (15.18) и (15.19) далеко не всегда эквивалентны. Произведение двух матриц, вообще говоря, некоммутативно, поэтому вынесение матрицы e^{-st} за скобки в (15.19) возможно лишь при определенных оговорках относительно A , B , C и e .

Если две матрицы X и Y коммутируют

$$XY = YX,$$

будем обозначать это $X \rightleftarrows Y$. Сформулируем две теоремы о коммутирующих матрицах.

I. Если $X \rightleftarrows Y$, то $f(X) \rightleftarrows Y$.

II. Если $X \rightleftarrows Y$ и $Z \rightleftarrows Y$, то $X \rightleftarrows Z$.

Доказательство этих теорем следует из того, что коммутирующие матрицы имеют совпадающие собственные векторы.

Возвратимся к уравнению (15.18). На основании теоремы I исследование коммутативности e^{-st} заменяется исследованием коммутативности матрицы e . Могут представиться два случая. Матрица e коммутирует со всеми тремя

матрицами A, B, C , если эти матрицы коммутируют между собой и $\varepsilon \not\rightarrow C$ (это следует из теоремы II). Но в этом «особом» случае уравнение (15.16) может быть приведено к диагональному виду

$$f_k'' + 2\varepsilon_k f_k' + \omega_k^2 \left[1 - \frac{\alpha}{\alpha_k} - \frac{\beta}{\beta_k} \Phi(t) \right] f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

т. е. к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые уже подробно исследованы (глава II).

Второй случай, когда подстановка (15.17) приводит к уравнению (15.20), — это случай скалярной матрицы

$$\varepsilon = \varepsilon E, \quad (15.21)$$

коммутирующей с любой другой матрицей. Здесь ε — коэффициент затухания, одинаковый для всех форм колебаний. В дальнейшем остановимся на этом случае.

2. Решения уравнения (15.20) в случае, когда элементарные делители у характеристического уравнения — простые, имеют вид (14.12)

$$u_k = e^{h_k t} \chi_k(t), \quad (15.22)$$

где $h_k = \frac{\theta}{2\pi} \ln \rho_k$ — характеристические показатели, $\chi_k(t)$ — векторы, компоненты которых являются периодическими функциями времени с периодом $2\pi/\theta$. Каждому характеристическому корню ρ_k соответствует второй корень $\rho_{n+k} = 1/\rho_k$, а каждому решению (15.22) — решение

$$u_{n+k} = e^{-h_k t} \chi_{n+k}(t).$$

Если все ρ_k — комплексные числа, то $|\rho_k| = 1$ и $h_k = i \arg \rho_k$. В этом случае, как видно из (15.17), все решения уравнения (15.16) затухают со скоростью затухания собственных колебаний.

Пусть характеристическое уравнение для (15.20) имеет пару вещественных корней ρ_k и $\rho_{n+k} = 1/\rho_k$. Рассмотрим пару соответствующих решений уравнения (15.16):

$$\left. \begin{aligned} f_k &= e^{(h_k - \varepsilon)t} \chi_k(t), \\ f_{n+k} &= e^{-(h_k + \varepsilon)t} \chi_{n+k}(t). \end{aligned} \right\} \quad (15.23)$$

Положим для определенности $|\rho_k| > 1$, тогда первое решение неограниченно возрастает при $\operatorname{Re} h_k > \varepsilon$, затухает при

$\operatorname{Re} h_k < \varepsilon$ и является периодическим при $\operatorname{Re} h_k = \varepsilon$. При этом в случае $\rho_k > 0$ имеем $\operatorname{Im} h_k = 0$, и следовательно, первое решение имеет период $2\pi/\theta$. В случае $\rho_k < 0$

$$h_k = \frac{\theta}{2\pi} \ln |\rho_k| + i\pi$$

и, следовательно, первое решение имеет период $4\pi/\theta$. Второе решение, как видно из (15.23), затухает при всех значениях ε . Отсюда следует, что, как и в консервативном случае, периодические решения с периодом $2\pi/\theta$ и $4\pi/\theta$ отделяют области неустойчивости от областей, в которых решения затухают.

Остановимся кратко на случае кратных корней при нелинейных элементарных делителях. Пусть характеристическое уравнение для (15.20) имеет двойной корень; это будет, очевидно, либо $\rho_k = \rho_{n+k} = 1$, либо $\rho_k = \rho_{n+k} = -1$. В этом случае решения уравнения (15.20) имеют вид (14.14)

$$\begin{aligned} u_k &= \chi_k(t), \\ u_{n+k} &= \chi_{n+k}(t) + t\chi_k(t), \end{aligned}$$

где $\chi_k(t)$ и $\chi_{n+k}(t)$ — периодические векторы с периодом $2\pi/\theta$ или $4\pi/\theta$. Переходя к $f_k(t)$ при помощи подстановки (15.17) и учитывая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-\varepsilon t} = 0,$$

получаем для случая двойных корней устойчивость.

3. Приведем некоторые качественные соображения об областях неустойчивости с учетом затухания.

Из предыдущего вытекает, что области неустойчивости для уравнения (15.16) всегда лежат внутри областей неустойчивости для (15.20). В самом деле, только внутри этих областей характеристические показатели h_k имеют вещественную часть, и следовательно, может выполняться равенство

$$\operatorname{Re} h_k = \varepsilon.$$

Но уравнение (15.20) описывает колебания консервативной системы с собственными частотами, вычисленными с поправкой на затухание. Чтобы показать это, отбросим в (15.20) члены с $\Phi(t)$:

$$Cf'' + (E - C\varepsilon^2 - \alpha A)f = 0.$$

Полагая

$$f = a \sin(\bar{\Omega}t + \lambda),$$

где $\bar{\Omega}$ — частота собственных колебаний, приходим к характеристическому уравнению

$$|E - \alpha A - (\bar{\Omega}^2 + \epsilon^2) C| = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением собственных частот для консервативной задачи

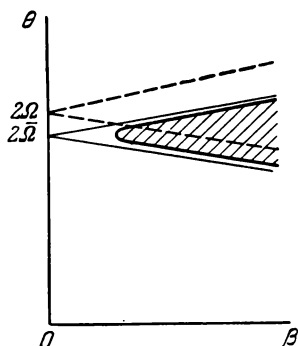
$$|E - \alpha A - \Omega^2 C| = 0,$$

находим:

$$\bar{\Omega}^2 = \Omega^2 - \epsilon^2.$$

Отсюда вытекает, что области неустойчивости для (15.20) несколько смещены (в сторону низших частот) относительно областей неустойчивости для уравнения

$$Cf'' + [E - \alpha A - \beta\Phi(t)B]f = 0.$$



Фиг. 95.

В некоторых случаях области неустойчивости для задачи с затуханием могут выйти за пределы соответствующих областей консервативной задачи. Это схематически показано на фиг. 95, где области неустойчивости с учетом затухания заштрихованы, границы областей неустойчивости для консервативной задачи обозначены сплошными линиями и

границы областей неустойчивости для уравнения (15.20) — пунктирными линиями. Такое распределение, впрочем, может быть получено лишь при достаточно большом затухании.

§ 63. Уравнение критических частот

1. Вывод уравнения критических частот аналогичен тому, который для консервативной задачи приведен в § 57. Решение уравнения (15.16) с периодом $4\pi/\theta$ ищется в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right), \quad (15.24)$$

где \mathbf{a}_k и \mathbf{b}_k — векторы с постоянными коэффициентами. Предполагается, что периодическая функция $\Phi(t)$ может быть представлена в виде ряда

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\theta t.$$

Рассмотрим случай $\Phi(t) = \cos \theta t$. Подставляя (15.24) в (15.16), получим после сравнения коэффициентов при одинаковых $\sin \frac{k\theta t}{2}$ и $\cos \frac{k\theta t}{2}$ систему уравнений:

$$\begin{aligned} (E - \alpha A + \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C) \mathbf{a}_1 - \theta C_s \mathbf{b}_1 - \frac{1}{2} \beta B \mathbf{a}_3 &= 0, \\ (E - \alpha A - \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C) \mathbf{b}_1 + \theta C_s \mathbf{a}_1 - \frac{1}{2} \beta B \mathbf{a}_3 &= 0, \\ (E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C) \mathbf{a}_k - k \theta C_s \mathbf{b}_k - \frac{1}{2} \beta B (\mathbf{a}_{k-2} + \mathbf{a}_{k+2}) &= 0, \\ (E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C) \mathbf{b}_k + k \theta C_s \mathbf{a}_k - \frac{1}{2} \beta B (\mathbf{b}_{k-2} + \mathbf{b}_{k+2}) &= 0 \\ (k = 3, 5, 7, \dots). \end{aligned}$$

В отличие от консервативной задачи здесь уравнения для \mathbf{a}_k и \mathbf{b}_k не разделяются. Условие существования решений с периодом $4\pi/\theta$ принимает вид

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E - \alpha A - \frac{9}{4} \theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B & 0 & -3\theta C_s & \dots \\ -\frac{1}{2} \beta B & E - \alpha A + \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C & -\theta C_s & 0 & \dots \\ 0 & \theta C_s & E - \alpha A - \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B & \dots \\ 3\theta C_s & 0 & -\frac{1}{2} \beta B & E - \alpha A - \frac{9}{4} \theta^2 C & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (15.25)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ определитель (15.25) превращается в произведение двух определителей, совпадающих с уравнениями критических частот (14.24) для консервативной задачи. Из (15.25) получаем области неустойчивости, лежащие вблизи частот

$$\theta = \frac{2\Omega_j}{k} \quad \left(\begin{array}{l} j = 1, 2, 3, \dots, \\ k = 1, 3, 5, \dots \end{array} \right).$$

Заменяя матрицы соответствующими характеристическими числами

$$A \rightarrow \frac{1}{\alpha_k}, \quad B \rightarrow \frac{1}{\beta_k}, \quad C \rightarrow \frac{1}{\omega_k^2}, \quad E \rightarrow 1,$$

приходим к уравнениям особого случая (2.7).

2. Установим условие существования решений с периодом $2\pi/\theta$. Подставим в уравнение (15.16) ряд

$$f = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=2,4,6}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right). \quad (15.26)$$

После необходимых преобразований получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} (E - \alpha A) b_0 - \beta B b_2 &= 0, \\ (E - \alpha A - \theta^2 C) a_2 - 2\theta C \epsilon b_2 - \frac{1}{2} \beta B a_4 &= 0, \\ (E - \alpha A - \theta^2 C) b_2 + 2\theta C \epsilon a_2 - \frac{1}{2} \beta B (b_0 + b_4) &= 0, \\ (E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C) a_k - k\theta C \epsilon b_k - \frac{1}{2} \beta B (a_{k-2} + a_{k+2}) &= 0, \\ (E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C) b_k + k\theta C \epsilon a_k - \frac{1}{2} \beta B (b_{k-2} + b_{k+2}) &= 0 \\ (k = 4, 6, \dots), \end{aligned}$$

определитель которой из условий разрешимости должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E - \alpha A - 4\theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B & 0 & 0 & -4\theta C \epsilon \\ -\frac{1}{2} \beta B & E - \alpha A - \theta^2 C & 0 & -2\theta C \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & E - \alpha A & -\beta B & 0 \\ 0 & 2\theta C \epsilon & -\frac{1}{2} \beta B & E - \alpha A - \theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B \\ 4\theta C \epsilon & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \beta B & E - \alpha A - 4\theta^2 C \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (15.27)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ это уравнение распадается на два уравнения (14.25) и (14.26); соответствующие области неустойчивости лежат вблизи частот

$$\omega_j = \frac{2\Omega_j}{k} \quad \left(\begin{array}{l} j = 1, 2, 3, \dots \\ k = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right).$$

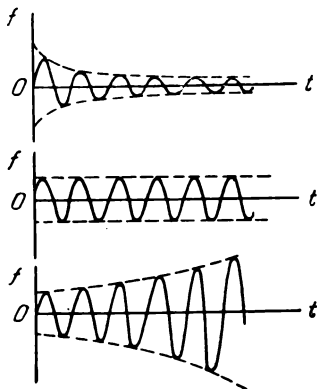
3. То, что периодические решения соответствуют границам областей неустойчивости, не является неожиданным: по своему характеру периодические решения занимают граничное положение между затухающими и неограниченно возрастающими решениями (фиг. 96). Предыдущие выводы относились, однако, к случаю, когда ε — скалярная матрица. Возникает вопрос о распространении результатов на случай произвольной матрицы рассеяния.

Пусть коэффициенты затухания различных форм удовлетворяют неравенствам

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \dots < \varepsilon_n.$$

Допустим, далее, что, изменяя один из параметров системы (например, β), мы переходим от затухающих решений (область устойчивости) к неограниченно возрастающим решениям (область неустойчивости). На первый взгляд, может представиться следующая возможность перехода.

В пределах области устойчивости все обобщенные перемещения f_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) затухают. На границе области одна из функций (возможно, что это будет f_1 , как соответствующая форме с минимальным затуханием) станет периодической, остальные будут попрежнему затухать со временем. При дальнейшем увеличении параметра функция f_1 станет неограниченно возрастающей, причем найдется такое значение параметра, при котором периодической станет функция f_2 , и т. д. Таким образом, может случиться, что на границах областей неустойчивости лишь одна функция f_1



Фиг. 96.

является периодической; остальные же функции f_i ($i \geq 2$) затухают со временем.

Приведенный выше вывод, тем не менее, опровергается следующими нестрогими, но достаточно убедительными соображениями. Во-первых, ряды (15.24) и (15.26) формально удовлетворяют уравнению (15.16) при любом предположении относительно матрицы ε . Это значит, что при достаточно малых ε_{ik} всегда можно подобрать такие вещественные θ и β , чтобы определители (15.25) или (15.27) обратились в нуль. При $\varepsilon \rightarrow 0$ это очевидно, а при $\varepsilon \neq 0$ следует из непрерывной зависимости корней алгебраического уравнения от его коэффициентов. Значит, и в случае произвольной матрицы ε_{ik} существуют такие соотношения параметров, при которых все f_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) являются периодическими; по смыслу эти соотношения принадлежат границам областей неустойчивости.

Можно привести и другой довод. Ниже (глава XVI) мы займемся исследованием уравнения, получаемого из (15.16) путем добавления нелинейных членов от f , f' и f'' . Будет показано, что нелинейное уравнение наряду с тривиальным нулевым решением $f_i = 0$ в определенных областях изменения параметров допускает периодические решения с периодом $2\pi/\theta$ или $4\pi/\theta$. Точки разветвления нулевых и периодических решений дают границы областей динамической неустойчивости, причем уравнения для точек разветвления совпадают с (15.25) и (15.26) и справедливы для любой матрицы рассеяния.

§ 64. Пример

1. Рассмотрим систему, которая описывается матрицами ¹⁾

$$A = B = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_2^2} \end{vmatrix},$$

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}.$$

¹⁾ Соответствующая консервативная задача рассмотрена в § 58.

Определим *главные* области неустойчивости, лежащие вблизи частот

$$\theta = 2\Omega_j \quad (j = 1, 2).$$

Выделив в (15.25) центральные квазиэлементы, получим уравнение

$$\begin{vmatrix} E - \alpha A + \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^3 C & -\theta C \varepsilon \\ \theta C \varepsilon & E - \alpha A - \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^3 C \end{vmatrix} = 0.$$

В развернутой форме это уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 - \frac{\theta^2}{4\omega_1^2}} & -\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right) a_{12} & -\frac{\varepsilon_1 \theta}{\omega_1^2} & 0 \\ -\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right) a_{21} & 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_2^2} & 0 & -\frac{\varepsilon_2 \theta}{\omega_2^2} \\ \frac{\varepsilon_1 \theta}{\omega_1^2} & 0 & \boxed{1 - \frac{\theta^2}{4\omega_1^2}} & -\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right) a_{12} \\ 0 & \frac{\varepsilon_2 \theta}{\omega_2^2} & -\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right) a_{21} & 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_2^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (15.28)$$

и является, очевидно, алгебраическим четвертой степени уравнением относительно θ^3 . Чтобы получить обозримые результаты, предположим, что

$$\gamma = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \ll 1, \quad \frac{\alpha^2}{\alpha_*^2} \ll 1, \quad \frac{\beta^2}{\alpha_*^2} \ll 1,$$

где α_* определяется согласно (14.32). Тогда в нулевом приближении

$$\theta_* \approx 2\omega_1, \quad \theta_* \approx 2\omega_2. \quad (15.29)$$

Подставим первое из значений (15.29) во все элементы определителя (15.28), кроме первого и третьего диагональ-

ных. Тогда получим уравнение

$$\begin{vmatrix} \xi & -\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)a_{12} & -\frac{\delta_1}{\pi} & 0 \\ -\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)a_{21} & 1 - \gamma & 0 & -\frac{\delta_2}{\pi}\gamma \\ \frac{\delta_1}{\pi} & 0 & \xi & -\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)a_{12} \\ 0 & \frac{\delta_2}{\pi}\gamma & -\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)a_{21} & 1 - \gamma \end{vmatrix} = 0, \quad (15.30)$$

где

$$\xi = 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_1^2}, \quad \delta_1 = \frac{2\pi\epsilon_1}{\omega_1}, \quad \delta_2 = \frac{2\pi\epsilon_2}{\omega_2}. \quad (15.31)$$

Очевидно, δ_1 и δ_2 — декременты затухания парциальных форм колебаний. Раскроем определитель (15.30):

$$\xi^2 \left[(1 - \gamma)^2 + \left(\frac{\delta_2}{\pi} \gamma \right)^2 \right] - 2\xi(1 - \gamma)(\mu^2 + \nu^2) + \left[\mu^2 - \nu^2 + \frac{\delta_1\delta_2}{\pi} \gamma \right]^2 + \left(\frac{\delta_1}{\pi} \right)^2 (1 - \gamma)^2 = 0.$$

Здесь

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha_*}, \quad \nu = \frac{\beta}{2\beta_*}.$$

В практических приложениях $\delta_1 \ll 1$, $\delta_2 \ll 1$, что позволяет отбросить в уравнении члены выше второго порядка малости:

$$(1 - \gamma)^2 \xi^2 - 2\xi(1 - \gamma)(\mu^2 - \nu^2) + (\mu^2 - \nu^2)^2 + \left(\frac{\delta_1}{\pi} \right)^2 (1 - \gamma)^2 = 0.$$

Отсюда

$$\xi = \frac{\mu^2 + \nu^2 \pm \sqrt{4\mu^2\nu^2 - \left(\frac{\delta_1}{\pi}\right)^2 (1 - \gamma)^2}}{1 - \gamma}.$$

С учетом (15.31) формула для критических частот принимает вид

$$\theta_* = 2\omega_1 \sqrt{1 - \frac{\mu^2 + \nu^2 \pm \sqrt{4\mu^2\nu^2 - \left(\frac{\delta_1}{\pi}\right)^2 (1 - \gamma)^2}}{1 - \gamma}}. \quad (15.32)$$

Если

$$4\mu^2\nu^2 - \left(\frac{\delta_1}{\pi}\right)^2 (1-\gamma)^2 < 0,$$

то формула (15.32) дает для критической частоты комплексные значения. Итак, наибольшее значение декремента затухания, при котором еще возможна динамическая неустойчивость, будет $\delta_{1*} = 2\pi\mu\nu$ или, если возвратиться к прежним обозначениям,

$$\delta_{1*} = \frac{\pi\alpha\beta}{\alpha_*^2(1-\gamma)}. \quad (15.33)$$

Можно подойти к вопросу иначе, определяя при заданном затухании минимальное значение β , при котором уже возможно поддержание незатухающих колебаний:

$$\beta_{**} = \frac{\alpha_*^2 \delta (1-\gamma)}{\pi\alpha}. \quad (15.34)$$

Напомним, что для «особого» случая (§ 9) мы имели соотношение $\mu_* = \Delta/\pi$, где μ — коэффициент возбуждения, Δ — декремент затухания нагруженной системы

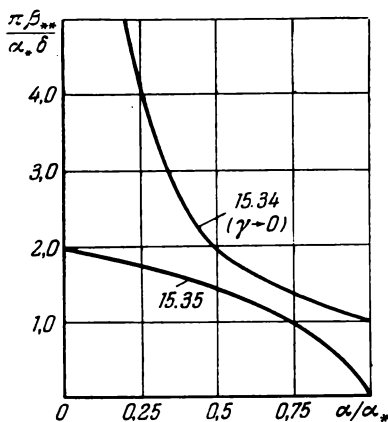
$$\mu = \frac{\beta}{2(\alpha_* - \alpha)},$$

$$\Delta = \frac{\delta}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_*}}}.$$

Отсюда получаем формулу для β_{**} :

$$\beta_{**} = \frac{2\alpha\delta}{\pi} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\alpha_*}}. \quad (15.35)$$

По формулам (15.34) и (15.35) построен график на фиг. 97. Из графика видно, что при одинаковых α/α_* и одинаковых декрементах для возбуждения колебаний в «особом» случае всегда требуется меньшая амплитуда нагрузки, чем в рассматриваемом случае ($\gamma < 0,25$).



Фиг. 97.

2. Определим теперь область неустойчивости для $\theta \approx 2\omega_2$. Подставляя это значение во все элементы (15.28), кроме второго и четвертого диагональных, получаем:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1-\gamma}{\gamma} & -\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)a_{12} & -\frac{\delta_1}{\pi} \frac{1}{\gamma} & 0 \\ -\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)a_{21} & \xi & 0 & -\frac{\delta_2}{\pi} \\ \frac{\delta_1}{\pi} \frac{1}{\gamma} & 0 & -\frac{1-\gamma}{\gamma} & -\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)a_{12} \\ 0 & \frac{\delta_2}{\pi} & -\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)a_{21} & \xi \end{vmatrix} = 0,$$

где на этот раз

$$\xi = 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_2^2}. \quad (15.36)$$

Раскрывая определитель, приходим к уравнению

$$\xi^2 \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{\delta_1}{\pi\gamma} \right)^2 \right] + 2\xi \frac{1-\gamma}{\gamma} (\mu^2 + \nu^2) + (\mu^2 - \nu^2 + \frac{\delta_1\delta_2}{\pi\gamma})^2 + \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^2 \left(\frac{\delta_2}{\pi} \right)^2 = 0.$$

Его корни будут:

$$\xi = \frac{1}{\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{\delta_1}{\pi\gamma} \right)^2} \left\{ -\frac{1-\gamma}{\gamma} (\mu^2 + \nu^2) \pm \sqrt{\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^2 4\mu^2\nu^2 - \frac{2\delta_1\delta_2}{\pi^2\gamma} (\mu^2 - \nu^2) - \left(\frac{\delta_2}{\pi} \right)^2 \left[\left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{\delta_1}{\pi\gamma} \right)^2 \right]} \right\}$$

или с точностью до величин второго порядка:

$$\xi \approx -\frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\mu^2 + \nu^2 \pm \sqrt{4\mu^2\nu^2 - \left(\frac{\delta_2}{\pi} \right)^2} \right].$$

Отсюда с учетом (15.36)

$$\theta_* = 2\omega_2 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\mu^2 + \nu^2 \pm \sqrt{4\mu^2\nu^2 - \left(\frac{\delta_2}{\pi} \right)^2} \right]}. \quad (15.37)$$

Для предельного значения δ_2 получаем формулу, аналогичную (15.33):

$$\delta_{2*} = \frac{\pi\alpha\beta}{\alpha_*^2}.$$

Заметим, что со степенью точности формул (15.32) и (15.37) изменение декремента затухания одной формы колебаний не влияет на границы области неустойчивости для другой формы¹⁾. Действительно, в (15.32) не входит δ_2 , а в (15.37) — δ_1 .

Заметим в заключение, что если $\delta_1 = \delta_2 = 0$, формулы (15.32) и (15.37) принимают вид

$$\theta_* = 2\omega_1 \sqrt{1 - \frac{(\mu \pm \nu)^2}{1 - \gamma}},$$

$$\theta_* = 2\omega_2 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{1 - \gamma} (\mu \pm \nu)^2},$$

т. е. совпадают с формулами (14.35).

§ 65. Приближенный способ учета затухания

Приближенный способ, развитый в § 59 для консервативной задачи, легко может быть распространен и на системы с затуханием. Приведем уравнение (15.16) к главным осям матрицы $\mathbf{E} - \alpha \mathbf{A} - \beta \Phi(t) \mathbf{B}$ и отбросив малые члены, получим скалярные уравнения типа

$$f_k'' + 2\varepsilon_k f_k' + \Omega_k^2(t) f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (15.38)$$

Здесь ε_k — коэффициент затухания k -й формы, который может быть определен из опыта при $\beta = 0$, $\Omega_k(t)$ — «мгновенное» значение k -й частоты собственных колебаний, т. е. один из корней уравнения

$$|\mathbf{E} - \alpha \mathbf{A} - \beta \Phi(t) \mathbf{B} - \Omega^2(t) \mathbf{C}| = 0,$$

¹⁾ Поскольку во всех случаях, кроме «особого», формы колебаний параметрически связаны, понятие «область неустойчивости для j -й формы» имеет лишь условный смысл. Оно означает, что при $\alpha = \beta = 0$ соответствующая область неустойчивости вырождается в линию $\theta = 2\omega_j/k$.

при решении которого время t рассматривается как параметр. Поскольку уравнения (15.38) представляют собой уравнения Хилла с диссипативным членом, для их анализа должны быть использованы результаты § 10.

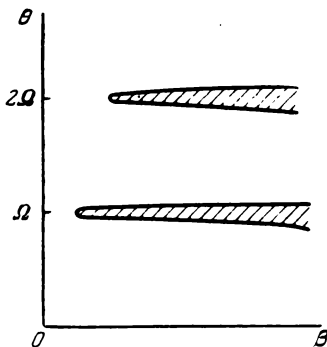
Покажем применение этого приема на только что рассмотренном примере. Для уравнения типа (15.38) имеем согласно (2.25) следующее приближенное условие возникновения i -го резонанса k -й формы колебаний

$$\mu_{ik} > \frac{\Delta_k}{\pi} \quad (i, k = 1, 2, 3, \dots). \quad (15.39)$$

Здесь μ_{ik} — i -й член разложения

$$\Omega_k^2(t) = \Omega_k^2 \left(1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{ik} \cos i\theta t \right) \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

Δ_k — декремент затухания k -й формы (с учетом постоянной составляющей параметрической нагрузки). Используя обозначения § 59, запишем:



Фиг. 98.

$$\mu_{ik} = \frac{\nu_{ik}}{2(1 - \nu_{0i})},$$

$$\Delta_k = \frac{2\pi \varepsilon_k}{\omega_k \sqrt{1 - \nu_{0i}}} = \frac{\delta_i}{\sqrt{1 - \nu_{0i}}},$$

откуда вместо (15.39) получаем:

$$\nu_{ik} > \frac{2\delta_k}{\pi} \sqrt{1 - \nu_{0k}}$$

$$(i, k = 1, 2, 3, \dots). \quad (15.40)$$

Пусть $k = 1$. Тогда наибольшее значение декремента, при котором еще возможно возбуждение, будет:

$$\delta_{*1} = \frac{\pi \alpha_0^2}{\alpha_0^2(1 - \gamma) \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2}{(1 - \gamma)\alpha_0^2}}}. \quad (15.41)$$

Легко видеть, что разница между формулами (15.41) и (15.33) имеет порядок членов, отброшенных при выводе формулы (15.33) ввиду предположения (15.29).

Преимущество изложенного метода состоит в том, что он позволяет сразу оценить порядок предельного декремента для любой области неустойчивости. Так, для резонанса $\theta = \Omega_1$ получаем условие возбуждения

$$\frac{\beta^2}{2(1-\gamma)\alpha_*^2} > \frac{2\delta_1}{\pi} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2}{(1-\gamma)\alpha_*^2}}.$$

Следовательно, если для главной резонансной области

$$\beta_{**}/\alpha_* \sim \frac{\delta}{\pi} \alpha_*/\alpha,$$

то для второй области, очевидно,

$$\beta_{**}/\alpha_* \sim 2 \sqrt{\frac{\delta}{\pi}}.$$

При достаточной малости постоянной составляющей нагрузки второй резонанс может наступить при меньших значениях β , чем первый (фиг. 98).

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 66. Методы составления уравнений нелинейной задачи

1. В каждой задаче динамической устойчивости можно выделить основное движение, осуществимое при всех значениях параметров, и дополнительное движение, возникающее лишь при определенных соотношениях. Первое движение относится к обычным вынужденным колебаниям, второе — к параметрически возбуждаемым колебаниям.

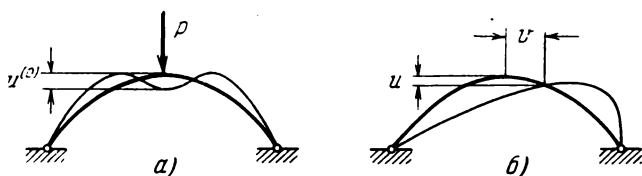
Составление линейных уравнений динамической устойчивости сводится к следующему. Наряду с основным движением рассматривается возмущенное движение, отличающееся наличием качественно нового вида деформаций. (В задаче о колебаниях сжатого стержня этим новым видом деформации является поперечный изгиб стержня.) В результате получаются уравнения относительно вариаций заданного движения, «уравнения в вариациях». Если эти вариации затухают со временем, то заданное движение устойчиво; неограниченное возрастание вариаций означает динамическую неустойчивость заданной формы движения.

К сказанному необходимо добавить следующее. Хотя во всех задачах динамической устойчивости исходной формой являются установившиеся вынужденные колебания, стало обычным варьировать недеформированное состояние системы. Так сделано почти во всех опубликованных работах, причем необходимые оговорки зачастую отсутствуют. Так сделано в первой части настоящей книги, и лишь в главе VIII были указаны пути более полного решения задачи.

В большинстве частных задач (но не во всех!) замена исходного вынужденного движения состоянием равновесия может быть оправдана. Если частота внешней нагрузки такова, что вынужденные колебания системы происходят вдалеке от резонанса, то их амплитуды достаточно малы, и невозмущенное движение с достаточной точностью может быть отождествлено с недеформированным состоянием. В тех же случаях, когда резонанс вынужденных колебаний расположен вблизи параметрического резонанса, необходимо совместное рассмотрение обоих видов движения. Для простейшей задачи это выполнено в главе VIII; там же дана оценка погрешности приближенных решений.

2. Составление нелинейных уравнений динамической устойчивости может быть проведено двумя способами. Первый способ, развитый в главах III—VII, состоит в добавлении к обычным линейным уравнениям нелинейных членов, найденных из дополнительных соображений. Другой способ основан на совместном рассмотрении вынужденных и параметрических колебаний. Остановимся сначала на первом способе.

Пусть u_1, u_2, \dots, u_m — обобщенные координаты, соответствующие заданному движению, v_1, v_2, \dots, v_n — обобщенные координаты параметрически возбуждаемых колебаний. Так, в задаче о колебаниях сжатого прямолинейного



Фиг. 99.

стержня u_k и v_k — обобщенные координаты продольных и поперечных перемещений соответственно; в задаче о динамической устойчивости симметричной формы колебаний арки (фиг. 99) u_k и v_k — обобщенные координаты симметричной и кососимметричной деформаций.

Для невозмущенного движения имеем $u_k = u_k^{(0)}$, а все $v_k = 0$. Для возмущенного движения $v_k \neq 0$, и в первом

приближении попережнему $u_k = u_k^{(0)}$. Легко показать, однако, что

$$u_k = u_k^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n h_{pq}^{(k)} v_p v_q + O(v_i^4), \quad (16.1)$$

где $h_{pq}^{(k)}$ — некоторые постоянные, а символ $O(v_i^4)$ означает члены четвертого порядка и выше. В большинстве задач можно пренебречь деформациями в начальном движении, положив $u_k^{(0)} = 0$.

Например, для прямолинейного стержня продольное перемещение подвижного конца

$$w = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + O(v^4)$$

(деформацией сжатия пренебрегаем). Отсюда, полагая

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^n f_k(t) \varphi_k(x),$$

с точностью до величин второго порядка находим:

$$w = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n h_{pq} f_p f_q. \quad (16.2)$$

Здесь

$$h_{pq} = \int_0^l \frac{d\varphi_p}{dx} \frac{d\varphi_q}{dx} dx. \quad (16.3)$$

Соотношения, аналогичные (16.2), могут быть получены и для других упругих систем. Так, при чисто кососимметричной деформации арки ее замок получит вертикальное перемещение u (т. е. симметричную компоненту), которая является величиной второго порядка малости по сравнению, скажем, с горизонтальным перемещением замка v (фиг. 99, б). Если узкую полосу подвергнуть изгибно-крутильной деформации из плоскости наибольшей жесткости, то центры тяжести ее сечений получат вертикальные перемещения. Эти перемещения будут величинами второго порядка малости по сравнению с компонентами кососимметричной деформации.

Число примеров легко увеличить. Впрочем, результат (16.1) вытекает из самой постановки задачи динамической устойчивости.

Напомним, что задачами динамической устойчивости мы называли задачи о колебаниях систем под действием периодической параметрической нагрузки. Нагрузка называлась параметрической (по отношению к перемещениям v_k), если она входит в уравнения возмущенного движения как множитель при v_1, v_2, \dots, v_n .

Дадим теперь другое определение параметрической нагрузки. Назовем нагрузку параметрической (по отношению к перемещениям v_k), если она совершает работу на перемещениях u_k , являющихся величинами второго порядка малости по сравнению с v_k (16.1). Оба определения равноценны. Чтобы доказать это, составим уравнения Лагранжа для возмущенного движения:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v'_k} \right) - \frac{\partial}{\partial v_k} (T - U) = \frac{\partial V}{\partial v_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (16.4)$$

Здесь T и U — кинетическая и потенциальная энергия системы, V — силовая функция. Пусть Q_k — обобщенные силы параметрической нагрузки, соответствующие перемещениям u_k ; тогда с точностью до величин второго порядка силовая функция

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n h_{pq}^{(k)} Q_k v_p v_q.$$

Подставляя это выражение в (16.4), получим в правой части «параметрические» члены

$$\frac{\partial V}{\partial v_i} = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n h_{iq}^{(p)} Q_p v_q.$$

На перемещениях u_1, u_2, \dots, u_m возникают силы упругости, сопротивления и инерции, связанные с перемещениями v_1, v_2, \dots, v_n нелинейно. Очевидно, что эти силы будут параметрическими по отношению к v_1, v_2, \dots, v_n и, следовательно, будут входить в уравнения возмущенного движения как коэффициенты при v_1, v_2, \dots, v_n . Это дает нелинейные выражения, начинающиеся с членов третьего порядка.

Если отвлечься от специфических нелинейностей, связанных с конструкцией системы (зазоры, односторонние связи, сухое трение), то введенные таким образом нелинейности образуют достаточно широкий класс нелинейных факторов, присущих каждой упругой системе. Добавляя нелинейные члены в уравнения динамической устойчивости, приходим к уравнениям нелинейной задачи.

3. Поясним это на примере прямолинейного стержня, сжатого произвольной нагрузкой

$$N(z, t) = \alpha N_0(z) + \beta \Phi(t) N_t(z).$$

Уравнения линейной задачи имеют вид

$$Cf'' + C\epsilon f' + [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B]f = 0. \quad (16.5)$$

Если за фундаментальные функции приняты нормированные формы собственных колебаний, то, как показано в главе XIII,

$$c_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{\omega_i^2}, \quad a_{ik} = \frac{1}{\omega_i^2} \int_0^l N_0(x) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx,$$

$$b_{ik} = \frac{1}{\omega_i^2} \int_0^l N_t(x) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx.$$

Предположим, что на конце стержня имеются сосредоточенная масса, продольное вязкое трение и продольная упругая связь. Пренебрегая распределенными силами инерции, получим дополнительную продольную силу

$$\Delta N(t) = -c\omega - k_L \frac{d\omega}{dt} - M \frac{d^2\omega}{dt^2}. \quad (16.6)$$

Вводя эту силу в уравнение (16.5), найдем:

$$Cf'' + C\epsilon f' + [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B]f + V(f, f', f'')f = 0, \quad (16.7)$$

где матрица V по аналогии с матрицами A и B имеет компоненты

$$v_{ik} = -\frac{1}{\omega_i^2} \int_0^l \Delta N(x, t) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx.$$

Последовательное дифференцирование формулы (16.2) дает:

$$\frac{dw}{di} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ik} f_i f'_k,$$

$$\frac{d^2w}{di^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ik} (f'_i f''_k + f'_i f'_k).$$

Отсюда с учетом (16.6) получаем:

$$v_{ik} = \frac{h_{ik}c}{2\omega_i^2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n h_{pq} f_p f_q + \frac{h_{ik}k_L}{\omega_i^2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n h_{pq} f_p f'_q +$$

$$+ \frac{h_{ik}M_L}{\omega_i^2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n h_{pq} (f'_p f'_q + f_p f''_q).$$

Уравнение (16.7) может быть переписано в виде

$$Cf'' + C_3f + [E - \alpha A - \beta\Phi(t)B]f + \psi(f, f', f'') = 0. \quad (16.8)$$

Здесь ψ — вектор с компонентами

$$\psi_i = \sum_{r=1}^n v_{ir} f_r =$$

$$= \frac{c}{2\omega_i^2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n h_{ir} h_{pq} f_p f_q f_r + \frac{k_L}{\omega_i^2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n h_{ir} h_{pq} f_p f'_q f_r +$$

$$+ \frac{M_L}{\omega_i^2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n h_{ir} h_{pq} (f'_p f'_q + f_p f''_q) f_r.$$

Первая группа членов образует «нелинейную упругость», вторая — «нелинейное затухание» и, наконец, последняя — «нелинейную инерционность» системы. Все члены являются однородными третьей степени функциями f_i, f'_i, f''_i ; если удержать следующие члены разложения, то они окажутся, очевидно, пятого порядка.

4. Только что описанный способ составления нелинейных уравнений основан на раздельном рассмотрении вынужденных и параметрически возбуждаемых колебаний. Точнее, как и при составлении уравнений линейной задачи, невозмущенное

движение отождествлялось с недеформированным состоянием; учитывались лишь реакции «продольной» системы на перемещениях w_i , которые связаны с прогибами стержня чисто геометрически.

Приближенный способ совместного рассмотрения вынужденных и параметрически возбуждаемых колебаний применительно к нелинейной задаче был намечен в § 31. Этот способ может быть развит для любой упругой системы; ниже будет показано его применение для общей задачи динамической устойчивости прямолинейных стержней.

Будем исходить из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \int_0^x m(\zeta) \left[\frac{\partial v}{\partial \zeta} \frac{\partial^3 v}{\partial \zeta^3} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \right)^2 \right] d\zeta = \\ = -p(x, t), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \right\} (16.9)$$

которые являются обобщением уравнений (8.4) и (8.5) на случай стержня переменного сечения. Здесь $u(x, t)$ — продольное перемещение, которое будем считать положительным, если оно направлено в сторону, противоположную оси x ; $p(x, t)$ — распределенная сжимающая нагрузка такая, что всюду, за исключением точек приложения сосредоточенных сил,

$$dN = p dx.$$

Нижний конец стержня закреплен от продольных смещений, на верхнем конце приложена сосредоточенная сила

$$N(l, t) = P_0 + P_t \cos \omega t - c w - k_L \frac{dw}{dt} - M_L \frac{d^2 w}{dt^2}, \quad (16.10)$$

где $w(t)$ определяется из (16.2). Следовательно, граничные условия для $u(x, t)$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) = 0, \\ EF \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = N(l, t). \end{aligned} \right\} (16.11)$$

Что касается граничных условий для поперечного прогиба $v(x, t)$, то они могут быть произвольны. Решение задачи

ищем в форме рядов

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^m u_k(t) \psi_k(x), \\ v(x, t) &= \sum_{k=1}^n f_k(t) \varphi_k(x), \end{aligned} \right\} \quad (16.12)$$

где u_k и f_k — функции времени, подлежащие определению, $\psi_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ — формы собственных продольных и поперечных колебаний. Функции $\psi_k(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dx} \left(EF \frac{d\psi}{dx} \right) + m\omega_L^2 \psi = 0 \quad (16.13)$$

при граничных условиях

$$\psi(0) = \frac{d\psi(l)}{dx} = 0 \quad (16.14)$$

(ω_L — частоты собственных продольных колебаний), а функции $\varphi_k(x)$ —

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) - m\omega^2 \varphi = 0 \quad (16.15)$$

при граничных условиях, установленных для поперечных перемещений.

Преобразуем граничные условия (16.11) к однородным условиям типа (16.14). Для этого введем продольную нагрузку

$$\begin{aligned} \bar{p}(x, t) &= p \quad (0 \leq x \leq l - \epsilon), \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{l-\epsilon}^l \bar{p}(x, t) dx &= N(l, t). \end{aligned}$$

Эту нагрузку следует ввести вместо $p(x, t)$ в правую часть первого из уравнений (16.9). Подставив ряды (16.12) в уравнения (16.9) и применяя метод Галеркина, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^l L_1(u, v) \psi_i(x) dx &= \int_0^l \bar{p}(x, t) \psi_i(x) dx \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m), \\ \int_0^l L_2(u, v) \varphi_k(x) dx &= 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n), \end{aligned}$$

где L_1 и L_2 — левые части (16.9). Вычисления дают:

$$u_i'' + \omega_{Li}^2 u_i + \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n g_{pq}^{(i)} (f_p f_q'' + f_p' f_q') = \\ = \int_0^l p \psi_i dx + \psi_i(l) N(t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (16.16)$$

$$f_k'' + \omega_k^2 f_k + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n s_{pq}^{(k)} u_p f_q = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Здесь использованы соотношения (16.13) и (16.15) и, кроме того, условие ортонормированности фундаментальных функций

$$\int_0^l m \varphi_i \varphi_k dx = \int_0^l m \psi_i \psi_k dx = \delta_{ik}.$$

Далее, введены обозначения

$$g_{pq}^{(i)} = \int_0^l m \frac{d\varphi_p}{dx} \frac{d\varphi_q}{dx} \psi_i dx, \\ s_{pq}^{(k)} = - \int_0^l \frac{d}{dx} \left(EF \frac{d\psi_p}{dx} \frac{d\varphi_q}{dx} \right) \varphi_k dx.$$

Интегрируя последнюю формулу по частям и учитывая (16.14), находим:

$$s_{pq}^{(k)} = \int_0^l EF \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_q}{dx} \frac{d\psi_p}{dx} dx. \quad (16.17)$$

Вместо $N(t)$ в первую группу уравнений нужно подставить:

$$N(t) = P_0 + P_t \cos \theta t - \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n h_{pq} \left[\frac{c}{2} f_p f_q + \right. \\ \left. + k_L f_p' f_q' + M (f_p f_q'' + f_p' f_q') \right].$$

5. Система (16.16) учитывает взаимодействие вынужденных и параметрически возбуждаемых колебаний. Даже в ли-

нейном относительно $v(x, t)$ приближении эти типы колебаний не разделяются:

$$\left. \begin{aligned} u_i'' + \omega_{Li}^2 u_i &= \int_0^l p \psi_i dx + \psi_i(l) (P_0 + P_t \cos \theta t), \\ f_k'' + \omega_k^2 f_k - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n s_{pq}^{(k)} u_p f_q &= 0 \\ (i &= 1, 2, \dots, m, \\ k &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} (16.18)$$

Однако здесь возможно последовательное разрешение уравнений. Найдя решение задачи продольных колебаний $u(x, t)$, подставим его в уравнения динамической устойчивости

$$N(x, t) = EF \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

Это соответствует учету «линейного» взаимодействия между заданным и параметрически возбуждаемым движением. Применение этого метода к простейшей задаче показано в § 30.

Опустим в уравнениях (16.18) члены с u_i'' . Отсюда найдем «квазистатическое» значение $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^m \frac{\psi_i(x)}{\omega_{Li}^2} \left[\int_0^l p \psi_i dx + \psi_i(l) (P_0 + P_t \cos \theta t) \right].$$

Это дает в конечном счете обычное приближение линейной теории. Определяя $u(x, t)$ из уравнений (16.16), получим при $u_i'' = 0$ приближенные нелинейные уравнения (16.8).

Правильный выбор того или иного приближения основан на следующем. Пусть ω_L — низшая собственная частота движения, устойчивость которого исследуется (для сжатого стержня это частота собственных продольных колебаний). Если

$$\beta = \frac{\theta^2}{\omega_L^2} \ll 1,$$

то усилия, возникающие в системе, могут быть определены «квазистатически» — без учета вынужденных колебаний.

В третьей части книги будут указаны задачи, в которых совместное рассмотрение заданного и возмущенного движения необходимо.

§ 67. Соотношение между линейной и нелинейной теориями

1. Задача о динамической устойчивости по существу является задачей нелинейной, поэтому, естественно, возникает вопрос о границах применимости выводов линейной теории. Правильное соотношение между линейной теорией и теорией, основанной на нелинейных дифференциальных уравнениях, может быть понято на основе теории устойчивости движения А. М. Ляпунова ¹⁾.

Пусть движение системы описывается уравнениями вида

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (16.19)$$

где $F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ — некоторые непрерывные нелинейные функции времени и обобщенных координат x_1, x_2, \dots, x_n .

Рассмотрим какое-либо частное решение системы (16.19)

$$x_i = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

соответствующее невозмущенному движению. Наряду с невозмущенным движением рассмотрим также другие, соседние с ним движения

$$x_i = f_i(t) + \xi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

начальные условия для которых достаточно мало отличаются от начальных условий для $f_i(t)$. Эти движения будем называть *возмущенными*, а разности

$$f_i(t) - x_i(t)$$

— *возмущениями*.

Приведем теперь определение устойчивости (неустойчивости) движения, сформулированное А. М. Ляпуновым. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ — произвольно заданные положительные числа. Если при всяких ε_k , как бы малы они ни были, могут быть найдены такие положительные числа $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, чтобы при всяких начальных возмущениях, удовлетворяющих условиям

$$|\xi_i(t_0)| \leq \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

¹⁾ Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950. См. также Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.

и при всяком $t > t_0$ выполнялись неравенства

$$|\xi_i(t)| < \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (16.20)$$

то невозмущенное движение устойчиво, в противном случае — неустойчиво. Иначе, движение называется устойчивым, если малые изменения в начальных условиях достаточно мало отклоняют систему от невозмущенного движения; при этом, уменьшая начальные возмущения, можно сделать отклонения при $t > t_0$ сколь угодно малыми.

Если выполняется условие, более сильное, чем (16.20), а именно, если возмущения асимптотически затухают со временем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\xi_i(t)| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то движение называется *асимптотически устойчивым*.

2. Для суждения об устойчивости невозмущенного движения зачастую решающее значение имеют «уравнения в вариациях», соответствующие заданной дифференциальной системе. Для получения уравнений в вариациях поступим следующим образом.

Подставим возмущенные значения x_i в (16.19):

$$\frac{d}{dt}(f_i + \xi_i) = F_i(t, f_1 + \xi_1, f_2 + \xi_2, \dots, f_n + \xi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Разлагая правую часть в ряд по степеням возмущений и учитывая, что f_i удовлетворяют уравнениям невозмущенного движения, находим:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{k=1}^n p_{ik} \xi_k + R_i(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Здесь

$$p_{ik} = \frac{\partial F_i(t, f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial f_k},$$

а R_i — члены разложения, содержащие ξ_k в степенях выше первой. Отбрасывая эти члены, получаем *уравнения в вариациях*

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{k=1}^n p_{ik} \xi_k \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (16.21)$$

Если в исходной системе (16.19) F_i периодически зависят от времени и если исследуется устойчивость периодического решения, то система (16.21) имеет периодические коэффициенты. Задача об устойчивости заданного движения сводится, следовательно, к системе линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

А. М. Ляпунову принадлежит разрешение вопроса о том, в каких именно случаях уравнения первого приближения полностью решают задачу об устойчивости нелинейной системы. Здесь важную роль играют корни характеристического уравнения системы (16.21), называемого в дальнейшем просто «характеристическим уравнением».

Имеет место следующая теорема.

Если все корни характеристического уравнения по модулю меньше единицы, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, каковы бы ни были члены высшего порядка в уравнениях возмущенного движения. Если же в числе корней характеристического уравнения находятся такие, модуль которых больше единицы, — невозмущенное движение неустойчиво.

Если характеристическое уравнение, не имея корней с модулями, большими единицы, имеет корни с модулями, равными единице, случай этот остается сомнительным: первое приближение не решает вопроса об устойчивости движения. Для разрешения его надлежит рассмотреть члены высших порядков в уравнениях возмущенного движения; от величины этих членов и будет зависеть устойчивость или неустойчивость движения.

3. Возвратимся к уравнениям динамической устойчивости. Легко видеть, что уравнения линейной задачи (16.5) являются уравнениями в вариациях для системы (16.8), составленными при условии, что варьируется недеформированное состояние системы.

Действительно, система (16.8) имеет тривиальное решение $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Подставляя в (16.8) вместо \mathbf{f} возмущенное значение $\mathbf{f} + \xi$ и опуская нелинейные члены, приходим к (16.5), где вместо ξ вновь написано \mathbf{f} .

Из теоремы Ляпунова следует, что нулевое решение нелинейной системы устойчиво всюду, за исключением областей возбуждения линейной системы (т. е. области динамической неустойчивости). В пределах этих областей нулевое

решение неустойчиво. Следовательно, линейная теория полностью отвечает на вопрос об устойчивости исходной формы движения (отождествляемого с недеформированным состоянием).

Некоторые сомнения могут появиться в отношении консервативной задачи. В этом случае вне пределов областей возбуждения корни характеристического уравнения равны по модулю единице; поэтому на первый взгляд кажется, что мы имеем дело здесь с сомнительным случаем, когда первое приближение не решает вопроса об устойчивости решений.

Следует учитывать, однако, что случай корней, равных по модулю единице, принадлежит исключительно консервативным системам и должен рассматриваться как результат идеализации реальных систем. Введение же в соответствующие дифференциальные уравнения сколь угодно малого затухания (при полной диссипации) дает асимптотическую устойчивость нулевых решений всюду, за исключением областей возбуждения.

Рассмотрим теперь более общие уравнения (16.16). Введя «продольное» и «поперечное» затухание с коэффициентами ε_L и ε , перепишем их в виде

$$\left. \begin{aligned} u_i'' + 2\varepsilon_L u_i' + \omega_{L_i}^2 u_i + F_i(f_p, f_p', f_p'') &= \\ &= \int_0^l p_{\gamma_i}^{\psi} dx + \psi_i(l)(P_0 + P_i \cos \theta t), \\ f_k'' + 2\varepsilon f_k' + \omega_k^2 f_k - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n s_{pq}^{(k)} u_p f_q &= 0 \\ (i = 1, 2, \dots, m), \\ (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (16.22)$$

где F_i — совокупность членов второго порядка из левой и правой частей уравнений (16.16). Для заданного невозмущенного движения все $f_i = 0$, а u_i определяется из линейной системы

$$u_i'' + 2\varepsilon_L u_i' + \omega_{L_i}^2 u_i = \int_0^l p_{\gamma_i}^{\psi} dx + \psi_i(l)(P_0 + P \cos \theta t) \quad (16.23)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m),$$

Обозначим решение (16.23) через $u_{0i}(t)$. Тогда для возмущенного движения

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u_{0i} + \bar{u}_i, \\ f_j &= \bar{f}_j, \end{aligned} \right\} \quad (16.24)$$

где черточки наверху — знак малого возмущения. Подставляя (16.24) в (16.22) и учитывая, что u_{0i} удовлетворяют (16.23), получим уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned} \bar{u}_i'' + 2\varepsilon_L \bar{u}_i' + \omega_{Li}^2 \bar{u}_i + F_i(\bar{f}_p, \bar{f}_p', \bar{f}_p'') &= 0, \\ \bar{f}_k'' + 2\varepsilon \bar{f}_k' + \omega_k^2 \bar{f}_k - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n s_{pq}^{(k)} (u_{0p} + \bar{u}_p) \bar{f}_q &= 0 \\ (i = 1, 2, \dots, m), \\ (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Уравнения в вариациях принимают вид (черточки в дальнейшем опущены)

$$\begin{aligned} u_i'' + 2\varepsilon_L u_i' + \omega_{Li}^2 u_i &= 0, \\ f_k'' + 2\varepsilon f_k' + \omega_k^2 f_k - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n s_{pq}^{(k)} u_{0p} f_q &= 0 \\ (i = 1, 2, \dots, m), \\ (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Из первой группы уравнений видно, что возмущения u_i асимптотически затухают со временем. Вторая группа уравнений может быть представлена в виде

$$f_k'' + 2\varepsilon f_k' + \omega_k^2 f_k - \sum_{i=1}^n r_{ik} f_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (16.25)$$

где

$$r_{ik} = \sum_{p=1}^m s_{pk}^{(i)} u_{0p}.$$

Учитывая (16.17), получим:

$$r_{ik} = \sum_{p=1}^m u_{0p} \int_0^l EF \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\psi_p}{dx} dx = \int_0^l N_d(x, t) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx.$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} N_d(x, t) &= EF \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x}, \\ u_0(x, t) &= \sum_{p=1}^m u_{0p} \psi_p(x). \end{aligned} \right\} \quad (16.26)$$

Таким образом, задача сводится к обычным линейным уравнениям динамической устойчивости, с той разницей, что вместо силы $N(x, t)$, определяемой из квазистатических соображений, в них вводится динамическая сила (16.26).

Пусть

$$\int_0^l p \psi_i dx + \psi_i(l) (P_0 + P_t \cos \theta t) = (\alpha + \beta \cos \theta t) Q_i,$$

где Q_i — обобщенная сила, соответствующая перемещению u_i . Из уравнения (16.23)

$$u_{0i}(t) = \frac{\alpha Q_i}{\omega_{Li}^2} + \frac{\beta Q_i \cos \theta t}{\sqrt{(\omega_{Li}^2 - \theta^2)^2 + 4\theta^2 \epsilon_L^2}}.$$

Отсюда, учитывая (16.26), находим:

$$\begin{aligned} N_d(x, t) &= \alpha EF \sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{\omega_{Li}^2} \frac{d\psi_i}{dx} + \\ &+ \beta EF \cos \theta t \sum_{i=1}^m \frac{Q_i \frac{d\psi_i}{dx}}{\sqrt{(\omega_{Li}^2 - \theta^2)^2 + 4\theta^2 \epsilon_L^2}}. \end{aligned}$$

В случае, когда вынужденные колебания могут быть описаны одной обобщенной координатой, имеет место при-

ближенное равенство

$$N_d(x, t) \approx \alpha N_0(x) + \frac{\int N_t(x) \cos \theta t}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_L^2}\right)^2 + \frac{4\theta^2 \epsilon_L^2}{\omega_L^4}}}$$

Заметим в заключение, что результаты данного параграфа основаны на предположении, что нелинейные функции в (16.19) являются непрерывными по всем аргументам. В противном случае теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению становится неприменимой. В качестве примера системы с разрывными нелинейными функциями укажем на систему с сухим трением. Сила сопротивления в этом случае, как известно,

$$R_i = -k_i \operatorname{sign} f'_i$$

и, следовательно, нелинейные функции терпят разрыв первого рода при $f'_i = 0$.

§ 68. О периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

1. Для отыскания периодических решений нелинейных уравнений в первой части книги (§§ 19—20) применялся простой приближенный метод, основанный на разложении в тригонометрические ряды. Недостатком этого метода является то, что существование периодических решений постулируется, а сходимости рядов остается недоказанной.

Общие методы нахождения периодических решений систем дифференциальных уравнений были даны А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым¹⁾. Основываясь на этих методах, Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси разработали теорию периодических решений систем с периодическими коэффициентами и малой нелинейностью²⁾. В качестве исходного пункта берется периодическое решение линейной системы с периоди-

1) Ляпунов А. М., цит. на стр. 358; Poincaré H., Des méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1892. См. также Малкин И. Г., Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1949.

2) Журн. теор. и эксп. физ. 15, 605—612 (1945).

ческими коэффициентами. На основе этого решения методом последовательных приближений находится приближенное периодическое решение нелинейной системы. Попутно устанавливаются условия существования периодических решений.

Рассмотрим систему уравнений типа

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^n p_{ik} x_k + \mu V_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0 \\ (i = 1, 2, 3, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (16.27)$$

где p_{ik} — периодические функции времени с периодом T , V_i — нелинейные функции от x_1, x_2, \dots, x_n и периодические (с периодом T) функции времени, μ — малый параметр. Эти функции предполагаются непрерывными по всем аргументам.

В отличие от функций ψ_i в уравнениях (16.8) функции V_i могут содержать также и линейные члены. Последние выбираются таким образом, чтобы система

$$\frac{d\zeta_i}{dt} + \sum_{k=1}^m p_{ik} \zeta_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (16.28)$$

имела периодическое решение. Систему (16.28), получаемую из (16.27) при $\mu = 0$, будем называть *укороченной*.

Наряду с системой (16.28) рассмотрим также систему, *сопряженную* с ней, т. е. полученную из (16.28) путем замены матрицы p_{ik} транспонированной и взятой с обратным знаком:

$$\frac{d\eta_i}{dt} - \sum_{k=1}^n p_{ki} \eta_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (16.29)$$

Решения заданной и сопряженной систем удовлетворяют, как известно, условию

$$\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n = \text{const}. \quad (16.30)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать (16.30) по времени и использовать (16.28) и (16.29). Из (16.30) вытекает следующая теорема, установленная А. М. Ляпуновым:

Если ρ_k — корень характеристического уравнения для системы (16.28), то $1/\rho_k$ будет корнем характеристического уравнения для сопряженной системы. При этом кратность обеих корней и структура элементарных делителей у обеих систем одинаковы.

Из (16.30) следует также, что если полное решение системы (16.28) известно, то определение решений сопряженной системы сводится к решению алгебраических линейных уравнений.

2. Из теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами известно (главы XIV—XV), что периодическое решение системы (16.28), если оно существует, имеет период T или $2T$. Задача состоит в том, чтобы установить, существует ли при достаточно малом значении μ периодическое решение нелинейной системы (16.27) с тем же периодом, что и у линейной системы (16.28); если оно существует, его нужно найти с тем или иным приближением. Речь идет здесь о тех решениях нелинейной системы, которые при достаточно малом μ мало отличаются от соответствующего решения укороченной системы, или, точнее, при $\mu = 0$ обращаются в соответствующее решение системы (16.28).

Пусть

$$\xi_i = \xi_i(t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (16.31)$$

— какое-либо периодическое решение укороченной системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$\xi_1(0) = C, \quad \xi_i(0) = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (16.32)$$

Это решение будем называть *порождающим*. Периодическое решение нелинейной системы, если оно существует, будет зависеть от малого параметра μ и, кроме того, от n параметров β_i :

$$x_i = x_i(t, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \mu) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (16.33)$$

Параметры β представляют собой малые изменения начальных условий:

$$\left. \begin{aligned} x_1(0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \mu) &= C + \beta_1, \\ x_i(0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \mu) &= \beta_i \quad (i = 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (16.34)$$

Попробуем подобрать величины β_i как функции μ таким образом, чтобы они обращались в нуль при $\mu = 0$ и чтобы решение (16.33) было периодическим с периодом T (или $2T$). Другими словами, попробуем подобрать такие β_i , чтобы (16.33) было периодическим решением, обращающимся при $\mu = 0$ в порождающее решение (16.31). Условие периодичности x_i имеет вид

$$x_i(T, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \mu) - x_i(0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \mu) = 0 \quad (16.35)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Обозначив левые части в (16.35) через ψ_i , разложим их в ряды по степеням $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$. Из периодичности порождающего решения следует, что при $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \mu = 0$ все ψ_i обращаются в нуль. Отсюда

$$\begin{aligned} \psi_i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \mu) &= \\ &= \frac{\partial \psi_i}{\partial \beta_1} \beta_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial \beta_2} \beta_2 + \dots + \frac{\partial \psi_i}{\partial \beta_n} \beta_n + \frac{\partial \psi_i}{\partial \mu} \mu + \dots, \end{aligned}$$

где члены высших порядков не выписаны. (Производные $\partial \psi_i / \partial \beta_k$ и $\partial \psi_i / \partial \mu$ берутся при $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \mu = 0$.) Определитель при первых степенях β_1 имеет вид

$$\frac{\partial (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{\partial (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial \beta_n} \end{vmatrix}. \quad (16.36)$$

Если определитель (16.36) отличен от нуля, то существует единственная система функций $\beta_i(\mu)$, которые удовлетворяют условиям (16.35) и обращаются в нуль при $\mu = 0$. Эти функции будут аналитическими при достаточно малом μ . Таким образом, мы приходим к следующей *теореме Пуанкаре*.

Если для рассматриваемого порождающего решения функциональный определитель (16.36) не обращается в нуль при $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \mu = 0$, то при достаточно малом μ существует одно и только одно периодическое

решение нелинейной системы, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее решение.

3. Фактическое вычисление периодических решений представляет серьезные затруднения. Будем искать x_i в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \mu$. Учитывая, что при $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \mu = 0$ мы должны получить порождающее решение, положим:

$$x_i = \xi_i + \mu A_i(t) + \sum_{k=1}^n \beta_k B_{ik}(t) + \dots \quad (16.37)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

(члены высшего порядка не выписаны). Здесь в соответствии с начальными условиями (16.34)

$$A_i(0) = 0, \quad B_{ik}(0) = \delta_{ik}. \quad (16.38)$$

Для определения функций $A_i(t)$ и $B_{ik}(t)$ подставим ряды (16.37) в основное уравнение (16.27). Принимая во внимание (16.28), получаем после сравнения коэффициентов при μ и β_i

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_i}{dt} + \sum_{k=1}^n p'_{ik} A_k &= 0 & (i = 1, 2, 3, \dots, n), \\ \frac{dB_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^n p'_{ik} B_{kj} &= 0 & (i, j = 1, 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (16.39)$$

и аналогичные системы для определения коэффициентов при высших членах разложения (16.37). В уравнениях (16.39)

$$p'_{ik} = p_{ik} + \frac{\partial V_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, t)}{\partial \xi_k}. \quad (16.40)$$

Из формулы (16.40) видно, что коэффициенты p'_{ik} являются периодическими функциями времени. Таким образом, определение функций $A_i(t)$ и $B_{ik}(t)$ требует решения системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

Этим трудности отыскания периодического решения не ограничиваются. Решив систему (16.39), мы найдем коэффициенты рядов (16.37) и, следовательно, решения x_i как

функции n параметров $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Эти параметры должны быть найдены из условий (16.35).

Здесь необходимо обратить внимание на следующее. Из начальных условий (16.32) видно, что порождающее решение определяется с точностью до постоянной C . Наличие только одной постоянной вполне естественно: периодическое решение линейной укороченной системы может быть определено лишь с точностью до постоянного множителя. Это соответствует известному механическому факту, что амплитуда линейной системы остается неопределенной.

Учет нелинейных членов устраняет эту неопределенность. Первый вопрос, который здесь возникает, вблизи какого решения линейной системы лежит периодическое решение нелинейной системы. Иначе, нужно сначала найти значение постоянного множителя при решении укороченной системы. Это будет нулевое приближение для «амплитуды» нелинейной системы. Для практических целей часто оказывается достаточным нулевое приближение.

4. Для дальнейших вычислений преобразуем систему (16.27) к такому виду, чтобы укороченная система (16.28) имела постоянные коэффициенты. Такое преобразование всегда возможно, что вытекает из следующей теоремы:

Любая система линейных уравнений с периодическими коэффициентами может быть преобразована в систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи некоторой неособенной линейной подстановки с периодическими коэффициентами. Покажем это на примере укороченной системы (16.28). В случае, когда она допускает одно периодическое решение с периодом T , и все элементарные делители — простые, полная система решений имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_{i1} &= \varphi_{i1}(t), \\ \xi_{ik} &= e^{h_k t} \varphi_{ik}(t) \\ &\left(\begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \dots, n, \\ k = 2, 3, \dots, n \end{array} \right), \end{aligned}$$

где $\varphi_{ik}(t)$ — периодические функции с периодом T , $h_k = \ln \rho_k / T$ — характеристические показатели. Первый индекс обозначает номер функции, второй — номер решения.

Для сопряженной системы на основании теоремы Ляпунова (стр. 366) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{i1} &= \psi_{i1}(t), \\ \eta_{ik} &= e^{-h_k t} \psi_{ik}(t) \\ &\left(\begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \dots, n, \\ k = 2, 3, \dots, n \end{array} \right), \end{aligned} \right\} \quad (16.41)$$

где $\psi_{ik}(t)$ — периодические функции. Формула (16.30) дает:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \xi_{i1} \psi_{i1} &= \text{const}, \\ e^{-h_k t} \sum_{i=1}^n \xi_{ik} \psi_{ik} &= \text{const} \quad (k = 2, 3, \dots, n). \end{aligned}$$

Дифференцируя по времени и обозначая

$$\sum_{i=1}^n \xi_{ik} \psi_{ik} = \zeta_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (16.42)$$

приходим к уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\zeta_1}{dt} &= 0, \\ \frac{d\zeta_i}{dt} - h_i \zeta_i &= 0 \\ &(i = 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (16.43)$$

Итак, система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (16.28) при помощи подстановки (16.42) преобразована к виду (16.43).

Возвратимся к исходной нелинейной системе

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^n p_{ik} x_k + \mu V_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (16.44)$$

Попробуем преобразовать ее таким образом, чтобы укороченная система для преобразованных уравнений совпала

с (16.43). Наряду с (16.44) рассмотрим систему

$$\frac{d\eta_i}{dt} - \sum_{k=1}^n p_{ki} \eta_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (16.45)$$

Умножая i -е уравнение из (16.44) на η_i , i -е уравнение из (16.45) на x_i и складывая результаты, получим:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n x_i \eta_i + \mu \sum_{i=1}^n \eta_i V_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0.$$

Подстановка (16.41) дает для n независимых решений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n x_i \psi_{i1} + \mu \sum_{i=1}^n \psi_{i1} V_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n x_i \psi_{ik} - h_i \sum_{i=1}^n x_i \psi_{ik} + \mu \sum_{i=1}^n \psi_{ik} V_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) &= 0 \\ &(k = 2, 3, \dots, n). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i \psi_{ik} &= z_k, \\ \sum_{i=1}^n \psi_{ik} V_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) &= F_k(z_1, z_2, \dots, z_n, t) \end{aligned} \right\} \quad (16.46)$$

($k = 1, 2, 3, \dots, n$).

Преобразованная система принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} + \mu F_1(z_1, z_2, \dots, z_n, t) &= 0, \\ \frac{dz_i}{dt} - h_i z_i + \mu F_i(z_1, z_2, \dots, z_n, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.47)$$

($i = 2, 3, \dots, n$).

Ее укороченная система совпадает, очевидно, с (16.43). Из (16.46) видно, что периодическим решениям x_i соответствуют периодические решения системы (16.47).

Б. Периодическое решение укороченной системы определяется без труда; оно имеет вид

$$\zeta_1 = C, \quad \zeta_i = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (16.48)$$

Построим решение системы (16.47), удовлетворяющее начальным условиям

$$z_1(0) = C + \beta_1, \quad z_i(0) = \beta_i \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Интегрируя уравнения (16.47) почленно, найдем:

$$\left. \begin{aligned} z_1(t) &= C + \beta_1 - \mu \int_0^t F_1(z_1, z_2, \dots, z_n, \tau) d\tau, \\ z_i(t) &= \beta_i e^{h_i t} - \mu e^{h_i t} \int_0^t e^{-h_i \tau} F_i(z_1, z_2, \dots, z_n, \tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (16.49)$$

($i = 2, 3, \dots, n$).

Условие периодичности решения требует, чтобы

$$\left. \begin{aligned} z_1(T) - z_1(0) &= -\mu \int_0^T F_1(z_1, z_2, \dots, z_n, t) dt = 0, \\ z_i(T) - z_i(0) &= \beta_i (e^{h_i T} - 1) - \\ &- \mu e^{h_i T} \int_0^T e^{-h_i t} F_i(z_1, z_2, \dots, z_n, t) dt = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.50)$$

($i = 2, 3, \dots, n$).

Первое из уравнений (16.50) может быть использовано для определения «амплитуды» нулевого приближения C .
Условие

$$\int_0^T F_1(z_1, z_2, \dots, z_n, t) dt = 0$$

должно выполняться при любом достаточно малом μ . Но при $\mu \rightarrow 0$ согласно (16.48) $z_1 = C, z_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots, n$).

Отсюда получаем уравнение относительно C

$$\int_0^T F_1(C, 0, 0, \dots, t) dt = 0. \quad (16.51)$$

Решая его, найдем «амплитуду» нулевого приближения.

Переходим к условиям существования периодического решения. Обозначим:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \int_0^T F_1(z_1, z_2, \dots, z_n, t) dt, \\ \psi_i &= -\mu e^{h_i T} \int_0^T e^{-h_i t} F_i(z_1, z_2, \dots, z_n, t) dt + \beta_i (e^{h_i T} - 1) \\ &\quad (i = 2, 3, \dots, n). \end{aligned}$$

Составим функциональный определитель (16.36) при

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \mu = 0.$$

Из (16.49) видно, что в выражение для ψ_1 параметр β_1 входит в первой степени с коэффициентом $\left[\frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} \right]$ (квадратные скобки указывают на то, что после дифференцирования нужно положить $z_1 = C$, а все остальные $z_i = 0$). Определитель (16.36) принимает вид

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{\partial(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} = \begin{vmatrix} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} \right] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{h_2 T} - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{h_3 T} - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{h_n T} - 1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{\partial(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} = \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} \right] \prod_{k=2}^n (e^{h_k T} - 1).$$

Учитывая, что периодическое решение укороченной системы (16.28) является единственным, получаем, что все

$h_k (k \geq 2)$ отличны от нуля. Отсюда находим условие существования периодического решения нелинейной системы:

$$\left[\frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} \right] \neq 0.$$

Одновременное обращение в нуль ψ_1 и $\frac{\partial \psi_1}{\partial z_1}$ при $z_1 = C$ означает, что C является кратным корнем уравнения (16.51).

Итак, если укороченная система (16.28) имеет единственное периодическое решение, а уравнение (16.51) имеет простые вещественные корни, то при достаточно малом μ нелинейная система (16.27) имеет периодическое решение, обращающееся в порождающее решение при $\mu = 0$. Нулевое приближение определится из алгебраической системы

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k \psi_{k1} &= C, \\ \sum_{k=1}^n x_k \psi_{ki} &= 0 \\ (i = 2, 3, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (16.52)$$

где C — корень уравнения (16.51).

§ 69. Пример. Случай системы второго порядка

1. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df}{dt} + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) f + \gamma f^3 = 0. \quad (16.53)$$

Перепишем уравнение (16.53) таким образом, чтобы его «линейная» часть допускала периодическое решение. Этого можно добиться различными способами, варьируя ε , μ и Ω . Так, при фиксированном μ всегда можно найти подходящую частоту Ω_* и коэффициент затухания ε_* . Тогда уравнение (16.53) принимает вид

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2\varepsilon_* \frac{df}{dt} + \Omega_*^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) f + V\left(f, \frac{df}{dt}, t\right) = 0, \quad (16.54)$$

где

$$\begin{aligned} V\left(f, \frac{df}{dt}, t\right) &= \gamma f^3 + (\Omega^2 - \Omega_*^2) (1 - 2\mu \cos \theta t) f + \\ &+ 2(\varepsilon - \varepsilon_*) \frac{df}{dt}. \end{aligned} \quad (16.55)$$

Считается, что малый параметр включен в выражение $V\left(f, \frac{df}{dt}, t\right)$. Следовательно, все три слагаемых в (16.55) должны быть одного порядка малости, т. е. Ω и Ω_* , ε и ε_* должны быть достаточно близкими.

Установим значения ε_* и Ω_* . Для этого преобразуем уравнение (16.54) к безразмерному виду, введя новое переменное $\theta = 2\tau$:

$$\frac{d^2f}{d\tau^2} + \frac{4\varepsilon_*}{\theta} \frac{df}{d\tau} + \frac{4\Omega^2}{\theta^2} (1 - 2\mu \cos 2\tau) f + V\left(f, \frac{df}{d\tau}, \tau\right) = 0. \quad (16.56)$$

Сравним это уравнение с линейным уравнением динамической устойчивости, приведенным к безразмерному виду

$$\frac{d^2f}{d\tau^2} + \frac{4\varepsilon}{\theta} \frac{df}{d\tau} + \frac{4\Omega^2}{\theta^2} (1 - 2\mu \cos 2\tau) f = 0. \quad (16.57)$$

Уравнение (16.57) имеет периодические решения при $\theta = \theta_*$, где θ_* — критическая частота. Сопоставляя коэффициенты, находим:

$$\Omega_* = \Omega \frac{\theta}{\theta_*}, \quad \varepsilon_* = \varepsilon \frac{\theta}{\theta_*}. \quad (16.58)$$

Условие малости функции (16.55) сводится, таким образом, к требованию, чтобы возбуждающая частота θ , для которой ищется решение нелинейной системы, находилась в достаточной близости от одной из критических частот θ_* .

2. Обозначив $f = x_1$, $df/dt = x_2$, запишем уравнение (16.54) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} - x_2 &= 0, \\ \frac{dx_2}{dt} + 2\varepsilon_* x_2 + \Omega_*^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) x_1 + V(x_1, x_2, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.59)$$

Соответствующая укороченная система будет

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} - \xi_2 &= 0, \\ \frac{d\xi_2}{dt} + 2\varepsilon_* \xi_2 + \Omega_*^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) \xi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.60)$$

и сопряженная с ней

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta_1}{dt} - \Omega_*^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) \eta_2 &= 0, \\ \frac{d\eta_2}{dt} + \eta_1 - 2\varepsilon_* \eta_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.61)$$

Заметим, что из (16.61) следует уравнение для η_2

$$\frac{d^2\eta_2}{dt^2} - 2\varepsilon_* \frac{d\eta_2}{dt} + \Omega_*^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) \eta_2 = 0,$$

т. е. уравнение для η_2 отличается от уравнения для ξ_1

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + 2\varepsilon_* \frac{d\xi_1}{dt} + \Omega_*^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) \xi_1 = 0 \quad (16.62)$$

знаком перед вторым членом. Одно уравнение может быть получено из другого заменой t на $-t$. Следовательно, между решениями сопряженных систем существует зависимость

$$\eta_2(t) = \xi_1(-t). \quad (16.63)$$

Ближайшая задача состоит в отыскании периодических решений систем (16.60) и (16.61). Как известно (§ 7), решения уравнения (16.62) имеют вид

$$\xi_1 = u(t) e^{-\varepsilon_* t},$$

где $u(t)$ — решения уравнения Матье

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \Omega_*^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_*^2}{\Omega_*^2} - 2\mu \cos \theta t \right) u = 0. \quad (16.64)$$

Линейно независимые решения уравнения Матье

$$u_1(t) = e^{ht} \varphi(t), \quad u_2(t) = e^{-ht} \varphi(-t),$$

где h — характеристический показатель, $\varphi(t)$ — периодическая функция времени с периодом $T = 2\pi/\theta$ или $2T$. Условие периодичности для ξ_{11} и ξ_{12} требует, чтобы

$$h = \varepsilon_*.$$

Отсюда находим, что первое (периодическое) решение системы (16.60) имеет вид

$$\xi_{11} = \varphi(t), \quad \xi_{21} = \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (16.65)$$

Второе (затухающее) решение будет:

$$\xi_{12} = e^{-2\epsilon_* t} \varphi(-t), \quad \xi_{22} = \frac{d}{dt} [e^{-2\epsilon_* t} \varphi(-t)].$$

Для сопряженной системы, используя (16.63), находим:

$$\begin{aligned} \eta_{21}(t) &= \xi_{11}(-t) = \varphi(-t), \\ \eta_{22}(t) &= \xi_{12}(-t) = e^{2\epsilon_* t} \varphi(t). \end{aligned}$$

Отсюда при помощи второго из уравнений (16.61) получаем:

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= 2\epsilon_* \varphi(-t) - \frac{d\varphi(-t)}{dt}, \\ \eta_{12} &= -e^{2\epsilon_* t} \frac{d\varphi(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Таким образом, вспоминая обозначения (16.41), можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{11} &= 2\epsilon_* \varphi(-t) - \frac{d\varphi(-t)}{dt}, & \psi_{21} &= \varphi(-t); \\ \psi_{12} &= -\frac{d\varphi(t)}{dt}, & \psi_{22} &= \varphi(t). \end{aligned} \right\} \quad (16.66)$$

Установим теперь связь между постоянной C в уравнении нулевого приближения (16.51) и периодическим решением нелинейной системы (16.59). Уравнения (16.52) для случая системы второго порядка имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 \psi_{11} + x_2 \psi_{21} &= C, \\ x_1 \psi_{12} + x_2 \psi_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Решая уравнения, находим:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= C \frac{\psi_{22}}{\Delta}, \\ x_2 &= -C \frac{\psi_{12}}{\Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (16.67)$$

где

$$\Delta = \psi_{11} \psi_{22} - \psi_{12} \psi_{21}.$$

Из сравнения (16.66) и (16.65) следует, что

$$\psi_{22} = \xi_{11}, \quad \psi_{12} = -\xi_{21}.$$

Далее, очевидно, что

$$\psi_{11} = \eta_{11}, \quad \psi_{21} = \eta_{21}.$$

Отсюда

$$\Delta = \xi_{11}\eta_{11} + \xi_{21}\eta_{21},$$

причем на основании (16.10) $\Delta = \text{const.}$ Значение этой постоянной легко найдем, уточнив начальные условия для η и ξ . Пусть

$$\xi_1(0) = \eta_1(0) = 1,$$

$$\xi_2(0) = \eta_2(0) = 0.$$

Тогда $\Delta = 1$, и первая из формул (16.67) принимает вид

$$x_1 = f(t) = C\varphi(t). \quad (16.68)$$

Подстановка в уравнение (16.51) с использованием (16.46) и (16.66) дает:

$$\int_0^T V \left[C\varphi(t), C \frac{d\varphi(t)}{dt}, t \right] \varphi(-t) dt = 0, \quad (16.69)$$

причем, как видно из (16.68), постоянная C действительно является амплитудой нулевого приближения.

3. Для определения функции $\varphi(t)$ могут быть использованы известные результаты, относящиеся к уравнению Матье¹⁾. Преобразуем уравнение (16.64) к виду

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau) u = 0,$$

где

$$a = \frac{4\Omega_*^2}{\theta^2} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Omega_*^2} \right), \quad q = \mu \frac{4\Omega_*^2}{\theta^2}, \quad \theta t = 2\tau.$$

Его решение имеет вид

$$u_1(\tau) = e^{\nu\tau} \varphi(\tau, \sigma) \quad \left(\nu = \frac{1}{2} \theta h \right),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, \sigma) = & \sin(\tau - \sigma) + s_3 \sin(3\tau - \sigma) + s_5 \sin(5\tau - \sigma) + \dots \\ & \dots + c_3 \cos(3\tau - \sigma) + c_5 \cos(5\tau - \sigma) + \dots \end{aligned}$$

¹⁾ См., например, М а к-Л а х л а н, цит. на стр. 22.

Все s_k и c_k , а также σ зависят от a и q :

$$s_3 = -\frac{1}{8}q + \frac{1}{64}q^2 \cos 2\sigma + O(q^3),$$

$$s_5 = \frac{1}{192}q^2 + O(q^3),$$

$$c_3 = \frac{3}{64}q^2 \sin 2\sigma + O(q^3),$$

(остальные коэффициенты имеют порядок q^3 и выше). Для определения параметра σ и характеристического показателя имеем уравнения

$$a = 1 - q \cos 2\sigma + 4q^2 \left(-1 + \frac{1}{2} \cos 4\sigma \right) + O(q^3),$$

$$\nu = -\frac{1}{2}q \sin 2\sigma + O(q^3).$$

Полагая $\nu = \frac{1}{2} \theta \varepsilon_*$, найдем из второго уравнения σ . Тем самым функция $\varphi(\tau, \sigma)$ определена, и вычисление амплитуды C сводится к квадратурам.

Вычисления упрощаются в случае консервативной задачи. Функция $\varphi(\tau, \sigma)$ вырождается здесь в одну из функций Матье целого порядка (в зависимости от того, в окрестности какой именно области возбуждения ищется периодическое решение). Так, для главной области следует взять

$$\varphi(\tau) = ce_1(\tau)$$

или

$$\varphi(\tau) = se_1(\tau),$$

где

$$ce_1(\tau) = \cos \tau - \frac{1}{8}q \cos 3\tau + \frac{1}{64}q^2 \left(-\cos 3\tau + \frac{1}{3} \cos 5\tau \right) + O(q^3),$$

$$se_1(\tau) = \sin \tau - \frac{1}{8}q \sin 3\tau + \frac{1}{64}q^2 \left(\sin 3\tau + \frac{1}{3} \sin 5\tau \right) + O(q^3).$$

Для случая $q \ll 1$ возьмем:

$$ce_1(\tau) \approx \cos \tau, \quad se_1(\tau) \approx \sin \tau.$$

Уравнение (16.69) для первого случая с учетом (16.55) и (16.58) принимает вид

$$\frac{2\pi}{\theta} \int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} \left[\gamma C^3 \cos^2 \frac{\theta t}{2} + \Omega^2 C \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_*^2} \right) (1 - 2\mu \cos \theta t) \right] \cos^2 \frac{\theta t}{2} dt = 0.$$

Вычисляя квадратуры, находим:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} \cos^4 \frac{\theta t}{2} dt = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\theta},$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} \cos \theta t \cos^2 \frac{\theta t}{2} dt = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\theta},$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} \cos^2 \frac{\theta t}{2} dt = \frac{\pi}{\theta},$$

откуда

$$\frac{3}{4} \gamma C^3 + \Omega^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_*^2} \right) (1 - \mu) C = 0.$$

Решая уравнение, помимо тривиального корня $C = 0$, получаем:

$$C = \pm \frac{2\Omega}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{\left(\frac{\theta^2}{\theta_*^2} - 1 \right) (1 - \mu)}. \quad (16.70)$$

Здесь вместо θ_* нужно взять критическую частоту на нижней границе главной области неустойчивости

$$\theta_*^2 \cong 4\Omega^2 (1 - \mu). \quad (16.71)$$

Если порождающее решение берется в виде $se_1(\tau)$, то в формулах (16.70) и (16.71) знак перед μ нужно переменить на обратный. Легко видеть, что амплитуда, вычисленная по формуле (16.70), отличается от амплитуды, найденной в § 20, лишь членами порядка μ^2 . Эти члены по смыслу должны принадлежать последующим приближениям.

Заметим, что теория, изложенная в предыдущем параграфе, годится, строго говоря, только для неконсервативной задачи. Действительно, оговорка о линейном характере элементарных делителей весьма существенна, в случае же консервативной задачи периодическим решениям соответствуют двойные характеристические корни при нелинейных элементарных делителях.

§ 70. Метод формальных разложений в тригонометрические ряды

1. Рассмотрим общую систему нелинейных уравнений динамической устойчивости

$$Cf'' + 2Kf' + [E - \alpha A - \beta \Phi(t)B]f + \psi(f, f', f'') = 0. \quad (16.72)$$

Здесь $f(t)$ — вектор n -го порядка, $A, B, C, K = C\varepsilon$ — матрицы n -го порядка, свойства которых изучены выше, $\Phi(t)$ — периодическая функция времени с периодом $T = 2\pi/\theta$. Будем считать, что эта функция разлагается в равномерно сходящийся ряд

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\theta t. \quad (16.73)$$

Компоненты вектора ψ представляют собой суммы выражений типа

$$f_p f_q f_r, \quad f_p f_q f'_r, \quad f_p f'_q f'_r, \quad f'_p f'_q f'_r, \quad f_p f_q f''_r,$$

умноженных на некоторые постоянные коэффициенты, т. е. являются однородными третьей степени функциями от компонент векторов f, f', f'' :

$$\psi_i(f, f', f'') = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n (A_{pqr}^{(i)} f_p f_q f_r + B_{pqr}^{(i)} f_p f_q f'_r + \dots). \quad (16.74)$$

Метод построения периодических решений, изложенный выше, требует весьма больших вычислений и поэтому не

пригоден для фактического отыскания решений. В дальнейшем для этой цели будет развит метод формальных разложений в тригонометрические ряды. При этом будет сохранено полное соответствие между способами рассмотрения линейной и нелинейной проблем.

Периодическое решение типа

$$f\left(t + \frac{4\pi}{\theta}\right) = f(t)$$

будем искать в виде

$$f = \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right), \quad (16.75)$$

где a_k и b_k — векторы с постоянными составляющими. Легко видеть, что ряд (16.75) при надлежащем выборе коэффициентов формально удовлетворяет уравнению (16.72) с нелинейной частью (16.74). Это будет выполняться также в том случае, если к функциям ψ_i добавить однородные алгебраические формы пятой, седьмой и вообще нечетных степеней.

Прежде всего подставим ряд (16.75) в выражения для ψ_i . Тогда, очевидно,

$$\psi_i(f, f', f'') = \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \left(v_{ik} \sin \frac{k\theta t}{2} + w_{ik} \cos \frac{k\theta t}{2} \right), \quad (16.76)$$

где

$$v_{ik} = v_{ik}(a_1, a_3, \dots, b_1, b_3, \dots),$$

$$w_{ik} = w_{ik}(a_1, a_3, \dots, b_1, b_3, \dots)$$

— однородные третьей степени функции от компонент векторов a_k и b_k . Векторы, составленные из v_{ik} и w_{ik} , обозначим соответственно через v_i и w_i .

Подставим (16.75) и (16.76) в уравнение (16.72) и приравняем коэффициенты при одинаковых $\sin \frac{k\theta t}{2}$ и $\cos \frac{k\theta t}{2}$. В результате получим системы векторных уравнений, кото-

рые для случая $\Phi(t) = \cos \theta t$ принимают вид

$$\left. \begin{aligned} (E - \alpha A + \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C) a_1 - \theta K b_1 - \frac{1}{2} \beta B a_3 + v_1 &= 0, \\ (E - \alpha A - \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C) b_1 + \theta K a_1 - \frac{1}{2} \beta B b_3 + w_1 &= 0, \\ (E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C) a_k - k \theta K b_k - \frac{1}{2} \beta B (a_{k-2} + a_{k+2}) &= 0, \\ (E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C) b_k + k \theta K a_k - \frac{1}{2} \beta B (b_{k-2} + b_{k+2}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (k = 3, 5, \dots). \quad (16.77)$$

Если в ряду (16.73) удержать первые m членов, то порядок системы (16.77) будет, очевидно, $6m$.

В случае консервативной задачи система (16.77) распадается на две независимые системы, одна из которых

$$\begin{aligned} (E - \alpha A + \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C) a_1 - \frac{1}{2} \beta B a_3 + v_1 &= 0, \\ (E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C) a_k - \frac{1}{2} \beta B (a_{k-2} + a_{k+2}) + v_k &= 0 \\ &(k = 3, 5, \dots) \end{aligned}$$

содержит только a_k , другая — только b_k :

$$\begin{aligned} (E - \alpha A - \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C) b_1 - \frac{1}{2} \beta B b_3 + w_1 &= 0, \\ (E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C) b_k - \frac{1}{2} \beta B (b_{k-2} + b_{k+2}) + w_k &= 0 \\ &(k = 3, 5, \dots). \end{aligned}$$

Здесь $v_k = v_k(a_1, a_3, \dots)$, $w_k = w_k(b_1, b_3, \dots)$. Действительно, при $K = 0$ уравнение (16.72) удовлетворяется формальными разложениями

$$\sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} a_k \sin \frac{k\theta t}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} b_k \cos \frac{k\theta t}{2}.$$

Аналогично ищется решение

$$f\left(t + \frac{2\pi}{\theta}\right) = f(t).$$

Подставляя в уравнение (16.72) ряд

$$f(t) = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=2, 4, 6}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right), \quad (16.78)$$

после аналогичных преобразований находим:

$$\left. \begin{aligned} (E - \alpha A) b_0 - \beta B b_2 + 2v_0 &= 0, \\ (E - \alpha A - \theta^2 C) a_2 - 2\theta K b_2 - \frac{1}{2} \beta B a_4 + v_2 &= 0; \\ (E - \alpha A - \theta^2 C) b_2 + 2\theta K a_2 - \frac{1}{2} \beta B (b_0 + b_4) + w_2 &= 0, \\ (E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C) a_k - 2k\theta K b_k - \\ &- \frac{1}{2} \beta B (a_{k-2} + a_{k+2}) + v_k = 0, \\ (E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C) b_k + 2k\theta K a_k - \\ &- \frac{1}{2} \beta B (b_{k-2} + b_{k+2}) + w_k = 0 \\ &(k = 4, 6, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (16.79)$$

Здесь

$$\begin{aligned} v_k &= v_k(a_2, a_4, \dots, b_0, b_2, b_4, \dots), \\ w_k &= w_k(a_2, a_4, \dots, b_0, b_2, b_4, \dots). \end{aligned}$$

В случае, когда все четыре матрицы A , B , C и K одновременно приводятся к диагональному виду, получаем системы уравнений, исследованных в первой части (главы V—VI). Так, заменяя матрицы их характеристическими числами

$$A \rightarrow \frac{1}{\alpha_*}, \quad B \rightarrow \frac{1}{\beta_*}, \quad C \rightarrow \frac{1}{\omega^2}, \quad K \rightarrow \frac{\epsilon}{\omega^2}, \quad E \rightarrow 1,$$

получаем вместо (16.77):

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_*} + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\beta_*} - \frac{1}{4} \frac{\theta^2}{\omega^2} \right) a_1 - \frac{\epsilon \theta}{\alpha \omega^2} b_1 - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\beta_*} a_3 + v_1 &= 0, \\ \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_*} - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\beta_*} - \frac{1}{4} \frac{\theta^2}{\omega^2} \right) b_1 + \frac{\epsilon \theta}{\alpha \omega^2} a_1 - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\beta_*} b_3 + w_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_*} - \frac{1}{4} \frac{k^2 \theta^2}{\omega^2}\right) a_k - \frac{k \epsilon \theta}{\omega^2} b_k - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\beta_*} (a_{k-2} + a_{k+2}) + v_k &= 0, \\ \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_*} - \frac{1}{4} \frac{k^2 \theta^2}{\omega^2}\right) b_k + \frac{k \epsilon \theta}{\omega^2} a_k - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\beta_*} (b_{k-2} + b_{k+2}) + w_k &= 0 \\ (k = 3, 5, \dots). \end{aligned}$$

Эта система соответствует дифференциальному уравнению «кособого» случая

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2\epsilon \frac{df}{dt} + \omega^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_*} - \frac{\beta}{\beta_*} \cos \theta t\right) f + \psi(f, f', f'') = 0$$

и лишь обозначениями отличается от системы (5.7).

Для определения амплитуд установившихся колебаний вблизи главной области возбуждения большое значение имеет гармоническое приближение

$$f(t) \approx a \sin \frac{\theta t}{2} + b \cos \frac{\theta t}{2}. \quad (16.80)$$

Векторы a и b определяются из системы уравнений порядка $6n$:

$$\left. \begin{aligned} (E - \alpha A + \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C) a - \theta K b + v(a, b) &= 0, \\ (E - \alpha A - \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C) b + \theta K a + w(a, b) &= 0. \end{aligned} \right\} (16.81)$$

2. В качестве примера рассмотрим систему, характеризующуюся матрицами

$$C = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_2^2} \end{vmatrix}, \quad A = B = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix},$$

$$K = \begin{vmatrix} \frac{\epsilon_1}{\omega_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_2}{\omega_2^2} \end{vmatrix}.$$

Пусть, далее,

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(f, f', f'') &= \frac{2\kappa}{\omega_1^2} f_1 [(f_1')^2 + f_1 f_1''], \\ \psi_2(f, f', f'') &= \frac{2\kappa}{\omega_2^2} f_2 [(f_1')^2 + f_1 f_1''], \end{aligned} \right\} (16.82)$$

где κ — некоторая постоянная ($\kappa > 0$). Подставляя в (16.82)

выражения

$$f_1 = a_1 \sin \frac{\theta t}{2} + b_1 \cos \frac{\theta t}{2},$$

$$f_2 = a_2 \sin \frac{\theta t}{2} + b_2 \cos \frac{\theta t}{2},$$

находим:

$$\psi_1 = -\frac{\chi \theta^2}{4\omega_1^2} a_1 (a_1^2 + b_1^2) \sin \frac{\theta t}{2} - \frac{\chi \theta^2}{4\omega_1^2} b_1 (a_2^2 + b_2^2) \cos \frac{\theta t}{2} + \dots,$$

$$\psi_2 = -\frac{\chi \theta^2}{4\omega_2^2} a_2 (a_1^2 + b_1^2) \sin \frac{\theta t}{2} - \frac{\chi \theta^2}{4\omega_2^2} b_2 (a_1^2 + b_1^2) \cos \frac{\theta t}{2} + \dots$$

(точками обозначены члены, содержащие гармоники). Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{\chi \theta^2}{4} A_1^2 \begin{vmatrix} \frac{a_1}{\omega_1^2} \\ \frac{a_2}{\omega_2^2} \end{vmatrix} = -\frac{\chi \theta^2}{4} A_1^2 \mathbf{Ca}, \\ \mathbf{w} &= -\frac{\chi \theta^2}{4} A_1^2 \begin{vmatrix} \frac{b_1}{\omega_1^2} \\ \frac{b_2}{\omega_2^2} \end{vmatrix} = -\frac{\chi \theta^2}{4} A_1^2 \mathbf{Cb}, \end{aligned}$$

где $A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ — амплитуда первой компоненты вектора \mathbf{f} . Подставим найденные выражения в (16.81):

$$\left. \begin{aligned} \left[E - \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta \right) \mathbf{B} - \frac{1}{4} \theta^2 \mathbf{C} (1 + \chi A_1^2) \right] \mathbf{a} - \theta \mathbf{K} \mathbf{b} &= \mathbf{0}, \\ \left[E - \left(\alpha + \frac{1}{2} \beta \right) \mathbf{B} - \frac{1}{4} \theta^2 \mathbf{C} (1 + \chi A_1^2) \right] \mathbf{b} + \theta \mathbf{K} \mathbf{a} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \right\} \quad (16.83)$$

Система (16.83), помимо тривиального решения $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$, имеет решения, определяемые из условия

$$\begin{vmatrix} E - \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta \right) \mathbf{B} - \frac{1}{4} \theta^2 \mathbf{C} (1 + \chi A_1^2) & -\theta \mathbf{K} \\ \theta \mathbf{K} & E - \left(\alpha + \frac{1}{2} \beta \right) \mathbf{B} - \frac{1}{4} \theta^2 \mathbf{C} (1 + \chi A_1^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (16.84)$$

Мы получили, таким образом, алгебраическое четвертой степени уравнение относительно амплитуды A_1 . Развертывая

это уравнение, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_1^2}(1 + \kappa A_1^2) & -\frac{\alpha - \frac{1}{2}\beta}{a_{12}} & -\frac{\varepsilon_1\theta}{\omega_1^2} & 0 \\ -\frac{\alpha - \frac{1}{2}\beta}{a_{21}} & 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_2^2}(1 + \kappa A_1^2) & 0 & -\frac{\varepsilon_2\theta}{\omega_2^2} \\ \frac{\varepsilon_1\theta}{\omega_1^2} & 0 & 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_1^2}(1 + \kappa A_1^2) & -\frac{\alpha + \frac{1}{2}\beta}{a_{12}} \\ 0 & \frac{\varepsilon_2\theta}{\omega_2^2} & -\frac{\alpha + \frac{1}{2}\beta}{a_{21}} & 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_2^2}(1 + \kappa A_1^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Наряду с (16.84) рассмотрим также уравнение критических частот

$$\begin{vmatrix} E - \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)B - \frac{1}{4}\theta^2 C & -\theta K \\ \theta K & E - \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)B - \frac{1}{4}\theta^2 C \end{vmatrix} = 0. \quad (16.85)$$

Его корни обозначим через θ_* . Сравнивая (16.84) и (16.85), находим, что первое уравнение будет удовлетворено при

$$\theta^2(1 + \kappa A_1^2) = \theta_*^2.$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{\frac{\theta_*^2}{\theta^2} - 1}.$$

§ 71. Вывод уравнений неустановившихся колебаний

Приближенное решение задачи о неустановившихся колебаниях получим, полагая компоненты векторов \mathbf{a}_k и \mathbf{b}_k в выражениях (16.75) и (16.78) медленно изменяющимися функциями времени:

$$\left. \begin{aligned} |a'_{ik}| \frac{2\pi}{\theta} \ll |a_{ik}|, \quad |b'_{ik}| \frac{2\pi}{\theta} \ll |b_{ik}|, \\ |a''_{ik}| \frac{2\pi}{\theta} \ll |a'_{ik}|, \quad |b''_{ik}| \frac{2\pi}{\theta} \ll |b'_{ik}|. \end{aligned} \right\} \quad (16.86)$$

Решение с периодом $4\pi/\theta$ ищем в виде

$$f(t) = \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \left(a_k(t) \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k(t) \cos \frac{k\theta t}{2} \right).$$

Учитывая (16.86), получим приближенное значение для f'

$$f' \approx \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \frac{k\theta}{2} \left(a_k \cos \frac{k\theta t}{2} - b_k \sin \frac{k\theta t}{2} \right).$$

Для второй производной f'' возьмем выражение

$$f'' \approx - \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \frac{k^2\theta^2}{4} \left[\left(a_k + \frac{4}{k\theta} b'_k \right) \sin \frac{k\theta t}{2} + \left(b_k - \frac{4}{k\theta} a'_k \right) \cos \frac{k\theta t}{2} \right].$$

При подстановке в нелинейные члены, содержащие малый параметр, это выражение может быть упрощено

$$f'' \approx - \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \frac{k^2\theta^2}{4} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right).$$

Подставим эти ряды в уравнение (16.72). После сравнения коэффициентов при одинаковых $\sin \frac{k\theta t}{2}$ и $\cos \frac{k\theta t}{2}$ получим:

$$\begin{aligned} & -\theta C b'_1 + \left(E - \alpha A + \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C \right) a_1 - \\ & \quad - \theta K b_1 - \frac{1}{2} \beta B a_3 + v_1 = 0, \\ & \theta C a'_1 + \left(E - \alpha A + \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C \right) b_1 + \\ & \quad + \theta K a_1 - \frac{1}{2} \beta B b_3 + w_1 = 0, \\ & -k\theta C b'_k + \left(E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C \right) a_k - k\theta K b_k - \\ & \quad - \frac{1}{2} \beta B (a_{k-2} + a_{k+2}) + v_k = 0, \\ & k\theta C a'_k + \left(E - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C \right) b_k + k\theta K a_k - \\ & \quad - \frac{1}{2} \beta B (b_{k-2} + b_{k+2}) + w_k = 0 \\ & \quad (k = 3, 5, \dots). \end{aligned}$$

В гармоническом приближении

$$\left. \begin{aligned} -\theta Cb' + \left(E - \alpha A + \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C\right) a - \theta K b + v &= 0, \\ \theta Ca' + \left(E - \alpha A - \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C\right) b + \theta K a + w &= 0 \end{aligned} \right\} (16.87)$$

(индексы при a_1 , b_1 , v_1 и w_1 опущены).

Для задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе, уравнения неустановившегося движения (16.87) имеют вид

$$\frac{\theta}{\omega_1^2} \frac{db_1}{dt} = \left[1 - \frac{\theta^2}{4\omega_1^2} (1 + \kappa A_1^2) \right] a_1 - \frac{\alpha - \frac{1}{2} \beta}{a_{12}} a_2 - \frac{\varepsilon_1 \theta}{\omega_1^2} b_1,$$

$$\frac{\theta}{\omega_2^2} \frac{db_2}{dt} = -\frac{\alpha - \frac{1}{2} \beta}{a_{21}} a_1 + \left[1 - \frac{\theta^2}{4\omega_2^2} (1 + \kappa A_1^2) \right] a_2 - \frac{\varepsilon_1 \theta}{\omega_2^2} b_2,$$

$$\frac{\theta}{\omega_1^2} \frac{da_1}{dt} = -\frac{\varepsilon_1 \theta}{\omega_1^2} a_1 - \left[1 - \frac{\theta^2}{4\omega_1^2} (1 + \kappa A_1^2) \right] b_1 + \frac{\alpha + \frac{1}{2} \beta}{a_{12}} b_2,$$

$$\frac{\theta}{\omega_2^2} \frac{da_2}{dt} = -\frac{\varepsilon_2 \theta}{\omega_2^2} a_2 + \frac{\alpha + \frac{1}{2} \beta}{a_{21}} b_1 - \left[1 - \frac{\theta^2}{4\omega_2^2} (1 + \kappa A_1^2) \right] b_2.$$

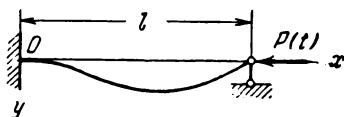
Полученные уравнения могут быть численно проинтегрированы «шаг за шагом».

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ
ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ
ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ
СТЕРЖНЕЙ

§ 72. Различные случаи опорного закрепления.
Влияние поведения нагрузки.

1. В первой части книги был подробно рассмотрен случай прямолинейного призматического стержня, шарнирно опертого по обоим концам. Эта задача приводила к разделяющимся уравнениям с периодическими коэффициентами (особый случай). Другие случаи опорного закрепления при-



Фиг. 100.

водят к системам уравнений с периодическими коэффициентами; способы составления и исследования этих систем были описаны выше.

Рассмотрим задачу о динамической устойчивости прямолинейного призматического стержня, заделанного одним концом и шарнирно опертого на другом конце, сжатого периодической продольной силой $P(t)$ (фиг. 100). В качестве фундаментальных функций примем формы собственных колебаний незагруженного стержня

$$\varphi_k(x) = \sin \frac{n_k x}{l} - \frac{\sin n_k}{\operatorname{sh} n_k} \operatorname{sh} \frac{n_k x}{l}. \quad (17.1)$$

В формуле (17.1) через n_k обозначены корни характеристического уравнения

$$\operatorname{tg} n_k = \operatorname{th} n_k. \quad (17.2)$$

После подчинения условиям нормирования фундаментальные функции принимают вид

$$\bar{\varphi}_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{m \int_0^l \varphi_k^2(x) dx}} \quad (17.3)$$

(нормированные функции снабжены сверху черточками). Запишем основное уравнение задачи

$$Cf'' + [E - P(t)A]f = 0.$$

Элементы матрицы A определяются по формуле (12.7)

$$a_{ik} = \frac{1}{\omega_i^2} \int \frac{d\bar{\varphi}_i}{dx} \frac{d\bar{\varphi}_k}{dx} dx,$$

где собственные частоты

$$\omega_i^2 = \frac{n_i^4 EJ}{ml^4}.$$

Подстановка (17.3) дает:

$$a_{ik} = \frac{l^4}{n_i^4 EJ} \frac{\int_0^l \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx}{\sqrt{\int_0^l \varphi_i^2 dx \int_0^l \varphi_k^2 dx}}.$$

Для вычисления коэффициентов a_{ik} могут быть использованы известные таблицы интегралов «балочных» функций. Выдержка из такой таблицы¹⁾ приводится на стр. 392; там же даны значения первых трех корней уравнения (17.2).

Что касается матрицы C , то она, очевидно, является диагональной с элементами

$$c_{ik} = \delta_{ik} \frac{ml^4}{n_i^4 EJ}.$$

Пусть $P(t) = P_0 + P_t \cos \theta t$. Уравнение критических частот (14.30) представим в виде

$$\left| C^{-1} - \left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t \right) C^{-1} A - \frac{1}{4} \theta^2 E \right| = 0.$$

¹⁾ Сорокин Е. С., Динамика междуэтажных перекрытий. Стройиздат, 1941.

	n_i	$\frac{1}{l} \int_0^l \varphi_i^2 dx$	$l \int_0^l \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx$		
			$k=1$	$k=2$	$k=3$
$l=1$	3,927	0,4996	5,5724	2,1424	-1,900
$l=2$	7,069	0,5010	2,1424	21,451	3,909
$l=3$	10,210	0,5000	-1,900	3,909	47,017

Подставляя сюда значения матричных элементов, получаем с точностью до матриц третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 231 - 11,1\alpha - \lambda & -4,29\alpha & 3,80\alpha \\ -4,29\alpha & 2500 - 42,9\alpha - \lambda & -7,82\alpha \\ 3,80\alpha & -7,82\alpha & 10840 - 94,0\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (17.4)$$

Здесь для сокращения обозначено:

$$\alpha = \frac{\left(P_0 \pm \frac{1}{2}P_t\right) l^2}{EJ}, \quad \lambda = \frac{m l^4 \omega^2}{4EJ}. \quad (17.5)$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть $P_0 = 10EJ/l^2$, $P_t = 0,2P_0 = 2EJ/l^2$. Подставляя в (17.4) значение $\alpha = 11,0$ и решая получаемое уравнение относительно λ , находим:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 113,9, \\ \lambda_2 &= 2030, \\ \lambda_3 &= 9806. \end{aligned}$$

Подстановка другого значения $\alpha = 9,0$ дает:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 136,3, \\ \lambda_2 &= 2115, \\ \lambda_3 &= 9993. \end{aligned}$$

Возвращаясь к обозначениям (17.5), находим границы трех

главных областей неустойчивости (резонансов относительно трех первых собственных частот):

$$\begin{aligned} \frac{21,4}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} &\leq \theta \leq \frac{23,3}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \\ \frac{90,1}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} &\leq \theta \leq \frac{92,0}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \\ \frac{198,0}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} &\leq \theta \leq \frac{200}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \end{aligned}$$

Сравним эти результаты с первым приближением по методу Галеркина, которое получим, приравнявая нулю «определители» первого порядка:

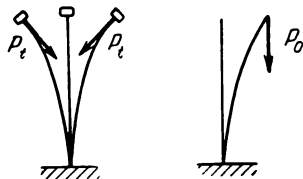
$$\omega_k^2 - \left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t \right) \omega_k^2 a_{kk} - \frac{\theta^2}{4} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Отсюда

$$\theta_* = 2\omega_k \sqrt{1 - \left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t \right) a_{kk}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Для первых трех областей разница по сравнению с найденным выше уточненным решением не превышает 1%. Это объясняется близостью форм собственных колебаний и форм потери статической устойчивости.

2. В практических приложениях встречаются задачи, где вектор периодической нагрузки поворачивается вместе с соответствующим сечением, оставаясь все время направленным по касательной к упругой кривой («следящая» нагрузка). Так будет, например, в том случае, когда периодическая нагрузка вызвана неуравновешенными вращающимися массами, а возбудитель колебаний жестко связан с колеблющимся стержнем. Постоянная составляющая (сила веса) своего направления не меняет (фиг. 101).



Фиг. 101.

Составим уравнения колебаний стержня под действием нагрузки, векторы которой остаются касательными к упругой кривой. Отличие от задач, разобранных ранее (§ 46

и дальше) состоит здесь в способе вычисления приведенной нагрузки. Предположим вначале, что стержень загружен только распределенной продольной нагрузкой $\beta n(x) \Phi(t)$. Влияние поворота будет учтено, если, помимо введенной ранее поперечной силы типа (11.36), мы рассмотрим распределенную нагрузку

$$q_1(x, t) = \beta n(x) \Phi(t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}.$$

Иначе

$$q_1(x, t) = \beta \Phi(t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \frac{dN_t(x)}{dx},$$

так как в этом случае продольная сила является дифференцируемой функцией.

Для учета сосредоточенных сил введем дифференциал в смысле Стильтьеса, заменив

$$q_1(x, t) dx \rightarrow dQ_1(x, t);$$

здесь

$$dQ_1(x, t) = \beta \Phi(t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} dN_t(x). \quad (17.6)$$

Например, если стержень, заделанный одним концом, загружен на свободном конце «следящей» силой (фиг. 101), то влияние поворота сказывается в появлении поперечной составляющей

$$P_t \Phi(t) \frac{\partial v(t, t)}{\partial x}.$$

Эта составляющая и учитывается формулой (17.6).

Уравнение рассматриваемой задачи получим, добавив в правую часть интегро-дифференциального уравнения (12.3) дополнительный член, учитывающий силу dQ_1 :

$$\begin{aligned} v(x, t) + \int m(\xi) K(x, \xi) \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi - \\ - \int N(\xi, t) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi = \\ = \beta \Phi(t) \int K(x, \xi) \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial \xi} dN_t(\xi). \end{aligned}$$

Преобразуем добавленное слагаемое, интегрируя его по частям:

$$\int K(x, \xi) \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial \xi} dN_t(\xi) = - \int N_t(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[K(x, \xi) \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial \xi} \right] d\xi$$

(напоминаем, что на концах $Q_1 = N_t = 0!$). После подстановки и сокращения получаем:

$$v(x, t) + \int m(\xi) K(x, \xi) \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi - \\ - \alpha \int N_0(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi + \\ + \beta \Phi(t) \int N_t(\xi) K(x, \xi) \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial \xi^2} d\xi = 0.$$

К этому уравнению могут быть применены методы §§ 46—47. Не останавливаясь на промежуточных выкладках, дадим формулы для матричных элементов. Если в качестве фундаментальных функций взяты нормированные формы собственных колебаний незагруженного стержня, то

$$b_{ik} = - \frac{1}{\omega_i^2} \int N_t(x) \varphi_i \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} dx.$$

Если в основу положены формы потери статической устойчивости под действием нагрузки неизменного направления, то получаем формулу

$$b_{ik} = - \frac{1}{\alpha_i} \int N_t(x) \psi_i \frac{d^2 \psi_k}{dx^2} dx. \quad (17.7)$$

При этом, очевидно, $a_{ik} = \delta_{ik}/\alpha_k$.

3. В качестве примера рассмотрим задачу, изображенную на фиг. 101. Воспользуемся этим примером также для того, чтобы показать применение ψ -функций.

Формы потери устойчивости и критические силы для призматического стержня, заделанного одним концом и нагруженного приложенной на другом (свободном) конце сосредоточенной силой, как известно, будут:

$$\psi_k(x) = 1 - \cos \frac{k\pi x}{2l},$$

$$P_* = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{4l^2}$$

$$(k = 1, 3, 5, \dots).$$

Нормируя функции согласно (12.13) и вводя сплошную нумерацию, получаем:

$$\bar{\psi}_k(x) = \frac{2\sqrt{2l}}{(2k-1)\pi} \left[1 - \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l} \right],$$

$$P_k = \frac{(2k-1)^2 \pi^2 EJ}{4l^2}$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots).$$

Следовательно,

$$A = \frac{4l^2}{\pi^2 EJ} \left[1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \dots \right].$$

Примем силу P_t за параметр β . Тогда $N_t = 1$, и формула (17.7) принимает вид

$$b_{ik} = -\frac{8l(2k-1)}{(2l-1)^3 \pi^2 EJ} \int_0^l \left[1 - \cos \frac{(2l-1)\pi x}{2l} \right] \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l} dx.$$

Вычисляя квадратуры, находим:

$$b_{ik} = \begin{cases} \frac{8l^2}{(2k-1)^2 \pi^2 EJ} \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} \right] & (i = k), \\ \frac{16l^2 (-1)^k}{\pi^3 (2l-1)^3 EJ} & (i \neq k). \end{cases}$$

В дальнейшем ограничимся матрицами третьего порядка:

$$B = \frac{4l^2}{\pi^2 EJ} \begin{vmatrix} -0,2732 & 1,2732 & -1,2732 \\ -0,0472 & 0,1582 & -0,0472 \\ -0,0102 & 0,0102 & 0,0302 \end{vmatrix}.$$

Элементы матрицы C согласно формулам (12.17) имеют вид

$$c_{ik} = \frac{32ml^3}{(2l-1)^3 (2k-1)\pi^4 EJ} \int_0^l \left[1 - \cos \frac{(2l-1)\pi x}{2l} \right] \times$$

$$\times \left[1 - \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l} \right] dx$$

или после интегрирования

$$c_{ik} = \begin{cases} \frac{32ml^4}{(2k-1)^4 \pi^4 EJ} \left[\frac{3}{2} + \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^k}{2k-1} \right] & (i = k), \\ \frac{32ml^4}{(2l-1)^3 (2k-1)\pi^4 EJ} \left[1 + \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^i}{2l-1} + \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k}{2k-1} \right] & (i \neq k). \end{cases}$$

Таким образом,

$$C = \frac{ml^4}{\pi^4 EJ} \begin{vmatrix} 7,2576 & 6,1408 & 1,5004 \\ 0,6816 & 0,7584 & 0,2592 \\ 0,0608 & 0,0928 & 0,0608 \end{vmatrix}.$$

Разложение по ψ -функциям дает наибольшую погрешность при отсутствии параметрической нагрузки. Воспользуемся этим для оценки величины возможных ошибок. Из уравнения $|E - \omega^2 C| = 0$, беря в первом приближении «определитель» первого порядка, получим минимальную собственную частоту

$$\omega_1 = \frac{3,66}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Расхождение с точным значением ¹⁾ составляет около 4%. Если взять определитель второго порядка, то для первых двух частот получим:

$$\omega_1 = \frac{3,52}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad \omega_2 = \frac{24,2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Первая частота практически совпадает с точным значением, ошибка в определении следующей частоты еще достаточно велика.

4. Уравнение динамической устойчивости имеет вид

$$Cf'' + [E - P_0 A - P_t \Phi(t) B] f = 0.$$

Пусть $\Phi(t) = \cos \theta t$. Тогда для определения главных областей получаем уравнение

$$\left| E - P_0 A \pm \frac{1}{2} P_t B - \frac{1}{4} \theta^2 C \right| = 0.$$

Ограничившись матрицами второго порядка, запишем это уравнение подробнее:

$$\begin{vmatrix} 1 - \alpha \mp 0,1366\beta - 7,2576\lambda & \pm 0,6366\beta - 6,1408\lambda \\ \mp 0,0236\beta - 0,6816\lambda & 1 - 0,1111\alpha \pm 0,0791\beta - \\ & - 0,7584\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

¹⁾ Точные значения двух первых частот:

$$\omega_1 = \frac{3,516}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad \omega_2 = \frac{22,035}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

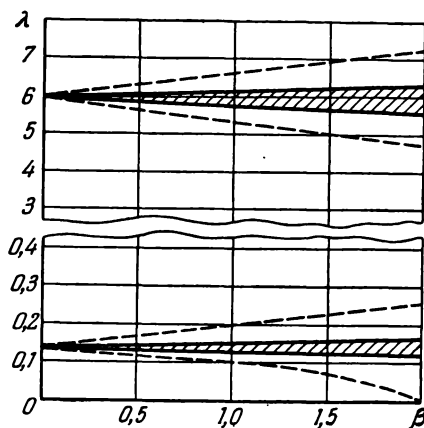
где для сокращения обозначено:

$$\frac{4P_0 l^2}{\pi^2 EJ} = \alpha, \quad \frac{4P_t l^2}{\pi^2 EJ} = \beta, \quad \frac{ml^4 \theta^2}{4\pi^4 EJ} = \lambda.$$

В дальнейшем будем рассматривать случай чисто периодической нагрузки ($\alpha = 0$). Раскрыв определитель, получим:

$$1,319\lambda^2 - (8,016 \pm 0,1815\beta)\lambda + 1 \mp 0,0575\beta + 0,0042\beta^2 = 0. \quad (17.8)$$

График, изображенный на фиг. 102, дает представление о первых двух главных областях неустойчивости. Для срав-



Фиг. 102.

нения на том же графике нанесены границы областей неустойчивости в случае нагрузки неизменного направления. Эти границы найдены из уравнения

$$\left| E \pm \frac{1}{2} P_t A - \frac{1}{4} \theta^2 C \right| = 0.$$

Учет поведения нагрузки дает, таким образом, сужение областей динамической неустойчивости. Этот результат станет несколько более понятным, если рассмотреть соответствующую статическую задачу. Известно ¹⁾, что под дей-

¹⁾ См., например, Феодосьев В. И., Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. Гостехиздат, 1953.

ствием «следящей» нагрузки потеря статической устойчивости в смысле Эйлера вообще невозможна (речь идет, разумеется, об устойчивости в упругой стадии). Следовательно, задача статической устойчивости не имеет в данном случае вещественных собственных значений, что, впрочем, можно было ожидать и из рассмотрения общих уравнений.

Интегральное уравнение продольного изгиба для случая нагрузки неизменного направления имеет вид (§ 45)

$$\frac{dv(x)}{dx} - \alpha \int N(\xi) \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial x \partial \xi} \frac{dv(\xi)}{d\xi} d\xi = 0 \quad (17.9)$$

и легко симметризуется путем введения новой неизвестной

$$\psi(x) = \sqrt{N(x)} \frac{dv}{dx}.$$

Уравнение же для случая поворачивающейся нагрузки

$$v(x) + \beta \int N(\xi) K(x, \xi) \frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} d\xi = 0 \quad (17.10)$$

после двукратного дифференцирования по x приводится к интегральному уравнению

$$u(x) + \beta \int N(\xi) \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial x^2} u(\xi) d\xi = 0,$$

где $u = \frac{d^2 v}{dx^2}$. Ядро этого уравнения симметричным, вообще говоря, не является, и следовательно, краевая задача может и не иметь вещественных собственных значений¹⁾.

Остановимся на одном из исключений. Пусть стержень загружен сосредоточенными силами N_1, N_2, \dots, N_n , приложенными в точках с координатами a_1, a_2, \dots, a_n . Тогда, очевидно, $dN/dx = 0$ всюду, за исключением указанных точек, где имеют место разрывы

$$N(a_k + 0) - N(a_k - 0) = -N_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (17.11)$$

¹⁾ Это вытекает также из общих уравнений § 53, основанных на уравнениях нелинейной теории упругости.

Применим к интегралу в уравнении (17.10) формулу интегрирования по частям:

$$\int N(\xi) K(x, \xi) \frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} d\xi = - \int \frac{dv(\xi)}{d\xi} d[N(\xi) K(x, \xi)].$$

Отсюда, учитывая определение интеграла Стильтьеса и формулу (17.11), получаем:

$$\begin{aligned} & \int N(\xi) K(x, \xi) \frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} d\xi = \\ & = \sum_{k=1}^n N_k K(x, a_k) \frac{dv(a_k)}{dx} - \int N(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{dv(\xi)}{d\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Если во всех точках, где приложены сосредоточенные силы, имеем $v = 0$ или $dv/dx = 0$, то конечная сумма обращается в нуль. В этом случае уравнение (17.10) приводится к уравнению (17.9) с симметризуемым ядром, и между двумя рассматриваемыми задачами нет по существу никакого различия. Механический смысл высказанного положения очевиден. В точках, где $dv/dx = 0$, дополнительная приведенная нагрузка обращается в нуль; там же, где $v = 0$, эта нагрузка воспринимается опорой.

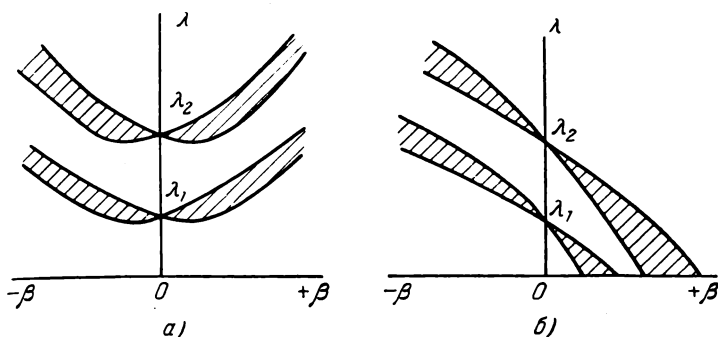
Б. Если задача статической устойчивости не имеет вещественных собственных значений, это должно отразиться и на конфигурации областей неустойчивости. Это видно хотя бы из того, что частота собственных колебаний нагруженного стержня, закон изменения которой обуславливает ход «скелетных кривых» областей неустойчивости, должна быть отлична от нуля при любом значении параметра α (обращение ее в нуль означало бы потерю статической устойчивости).

Следовательно, в отличие от случая нагрузки неизменного направления области неустойчивости на плоскости λ, β не пересекают ось β , а остаются в верхней полуплоскости.

Примерное расположение областей неустойчивости показано на фиг. 103, а.

При оценке этого графика следует учитывать, что он получен из уравнения, которое основано на гармоническом приближении и аппроксимации форм колебаний при помощи двух функций, т. е. пригоден при не слишком больших

значениях β . Этот график, повидимому, правильно передает основные особенности главных областей неустойчивости для «следящей» нагрузки. Для сравнения на фиг. 103, б показано примерное расположение областей



Фиг. 103.

для случая, когда направление нагрузки в процессе колебаний не изменяется.

6. Остановимся более подробно на вопросе об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого стержня, находящегося под действием постоянной по величине «следящей» силы. То, что для этой задачи не существует критической силы в смысле Эйлера, еще не означает, что упругое равновесие прямолинейного стержня будет устойчиво при всех значениях силы P .

Классическая трактовка понятия упругой устойчивости предполагает возмущения малыми и не зависящими от времени. Критические параметры определяются из условия, что наряду с заданной формой равновесия существуют другие, смежные формы. Если даже ограничиться устойчивостью в малом, то такая трактовка представляется все же недостаточной.

Рассмотрим уравнение малых колебаний системы относительно заданного положения равновесия:

$$f'' + C^{-1}(E - \alpha A)f = 0.$$

Полагая

$$f = ae^{i\beta t},$$

получим характеристическое уравнение

$$|C^{-1}(E - \alpha A) - \rho^2 E| = 0.$$

Если все ρ вещественны или имеют положительные мнимые части, то заданное положение устойчиво. Если среди корней ρ окажется хотя бы один, имеющий отрицательную мнимую часть, то возмущения будут неограниченно возрастать со временем. Равновесие, устойчивое в смысле Эйлера, окажется неустойчивым в динамическом смысле.

В случае, когда все внешние силы — консервативные, матрицы C и $C^{-1}A$ симметричны и, следовательно, все ρ^2 вещественны. Переход от вещественных ρ к мнимым возможен только через значение $\rho = 0$, т. е. через безразличное равновесие в смысле Эйлера. Таким образом, для упругих систем, нагруженных консервативными силами, классическая трактовка понятия статической устойчивости оказывается достаточной.

«Следящие» силы, вообще говоря, являются неконсервативными. Например, работа силы P (фиг. 101) зависит от выбора пути, которым стержень приводится к окончательному положению. В случае неконсервативных параметрических сил матрица $C^{-1}A$ несимметрична и, следовательно, ρ^2 могут быть как вещественными, так и комплексными. И, что особенно важно, переход от вещественных к комплексным корням может происходить через кратные значения, отличные от нуля, т. е. минуя безразличное равновесие¹⁾.

Задача об устойчивости упругого стержня, заделанного одним концом и нагруженного на другом конце «следящей» силой, является как раз задачей такого рода. Считалось, что прямолинейная форма стержня останется устойчивой при всех значениях силы P ²⁾. Совсем недавно было показано³⁾, что при достаточно больших значениях силы возможна потеря устойчивости в динамическом смысле. Это вытекает также из составленных выше уравнений.

1) См. Е. Л. Николаи, Труды по механике, Гостехиздат, 1955, стр. 357 и далее.

2) Pflüger, A., Stabilitätsprobleme der Elastostatik, Berlin, 1950, стр. 217; Феодосьев В. И., Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. Гостехиздат, 1953, стр. 165.

3) Векс М., Zeitschr. angew. Math. Phys. 3, 1952, № 3; Дейнеко К. С., Леонов М. Я., Прикл. мат. и мех. 19, 1955, № 6.

Уравнение «собственных частот» имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 + 0,2732\beta - 7,2576\lambda & -1,2732\beta - 6,1408\lambda \\ 0,0472\beta - 0,6816\lambda & 1 - 0,1582\beta - 0,7584\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\beta = \frac{4Pl^2}{\pi^2 EJ}, \quad \lambda = \frac{ml^4 p^2}{\pi^4 EJ}.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение

$$1,3186\lambda^2 - (8,0160 - 0,3630\beta)\lambda + 1 + 0,1150\beta + 0,0169\beta^2 = 0$$

все корни которого — вещественные и простые, пока

$$(8,0160 - 0,3630\beta)^2 - 4 \cdot 1,3186(1 + 0,1150\beta + 0,0169\beta^2) > 0.$$

Отсюда находим два значения β , соответствующие появлению пары кратных корней: $\beta_1 = 0,9942$, $\beta_2 = -140,5$ (второе значение ввиду приближенности уравнения едва ли является достоверным). Если $\beta > \beta_1$ то среди p появляются такие, которые имеют отрицательную мнимую часть. Минимальное значение критической силы составляет:

$$P_* = 24,43 \frac{EJ}{l^2},$$

что на 20% больше, чем точное значение, полученное в цитированных выше работах М. Бека, К. С. Дейнеко и М. Я. Леонова.

Приведенный выше анализ, является, однако, недостаточным. Задача устойчивости форм равновесия стержня по существу является *нелинейной*, и то, что было квалифицировано как устойчивость, на самом деле является сомнительным случаем по Ляпунову. Для определенного класса задач теории упругой устойчивости такой грубый подход может быть оправдан. Если доказано, что введение сколь угодно малого затухания обращает сомнительный случай в асимптотическую устойчивость, то это избавляет нас от необходимости производить строгий анализ там, где требуется лишь приближенное решение. Здесь это, вообще говоря, не имеет места. Так, Циглер¹⁾ показал, что в случае простейшей системы, находящейся под

¹⁾ Ziegler H., Ing. Arch. 20, № 1, 1952.

действием «следящей» силы, введение затухания снижает критическое значение по сравнению с тем, которое получается из упрощенного анализа. На первый взгляд этот результат кажется парадоксальным. Но следует вспомнить, что в неконсервативных системах затухание может оказать дестабилизирующее влияние (такова, например, неустойчивость вращающихся валов вследствие внутреннего трения).

Итак, задача об устойчивости равновесия упругих систем, находящихся под действием «следящих» сил, должна рассматриваться с учетом затухания, а в некоторых случаях — в нелинейной постановке. Характер и величина сил сопротивления оказывают существенное влияние на величину критических параметров. Указанный вопрос требует углубленного изучения.

§ 73. Уравнения динамической устойчивости тонкостенных стержней

1. До сих пор рассматривались исключительно плоские колебания стержней. Полученные результаты будут в значительной мере обобщены, если рассмотреть случай пространственной динамической устойчивости тонкостенных стержней.

Статическая устойчивость тонкостенных стержней открытого профиля с недеформируемым сечением подробно исследована В. З. Власовым¹⁾. Выведенные им дифференциальные уравнения для случая, когда продольная сила постоянна по длине стержня, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{d^4 u}{dz^4} + N \frac{d^2 u}{dz^2} + (a_y - e_y) N \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= 0, \\ EJ_x \frac{d^4 v}{dz^4} + N \frac{d^2 v}{dz^2} - (a_x - e_x) N \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= 0, \\ (a_y - e_y) N \frac{d^2 u}{dz^2} - (a_x - e_x) \frac{d^2 v}{dz^2} + EJ_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + \\ + [(r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) N - GJ_d] \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= 0. \end{aligned} \right\} (17.12)$$

¹⁾ Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни. Стройиздат, 1940.

В уравнениях (17.12) введены следующие обозначения (фиг. 104): u , v — перемещения центра изгиба A в направлении осей Ox и Oy , φ — угол закручивания, EJ_x , EJ_y , EJ_ω , GJ_a — изгибные, секториальная и крутильная жесткости сечения, a_x , a_y — координаты центра изгиба, e_x , e_y — координаты точки приложения продольной силы, r , β_x , β_y — геометрические характеристики, вычисляемые по формулам

$$r^2 = \frac{J_x + J_y}{F} + a_x^2 + a_y^2,$$

$$\beta_x = \frac{1}{2J_y} \int x(x^2 + y^2) dF - a_x,$$

$$\beta_y = \frac{1}{2J_x} \int y(x^2 + y^2) dF - a_y.$$

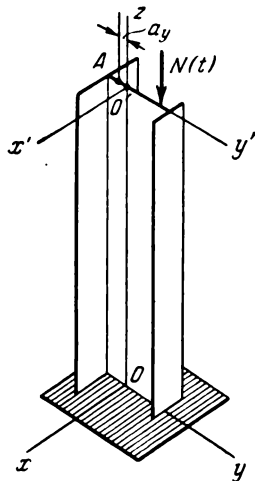
Ось Oz направлена вдоль стержня, оси Ox и Oy совпадают с главными центральными осями инерции сечения (фиг. 104).

Уравнения колебаний тонкостенного стержня, нагруженного переменной продольной силой $N(t)$, получим, введя в уравнения (17.12) инерционные члены. При вычислении сил инерции мы пренебрежем, как это обычно и делается, влиянием составляющих, вызванных вращением поперечных сечений относительно своих главных осей, а также их деформацией. Тогда для проекций инерционных сил на оси Ox и Oy и для инерционного момента относительно оси центров изгиба получим следующие выражения (на единицу длины стержня):

$$q_x = -m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - m a_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

$$q_y = -m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + m a_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

$$m_A = -m r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - m a_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m a_x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$



Фиг. 104.

Подставив эти выражения в (17.12), получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + N(t) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + N_t (a_y - e_y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \\ + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + ma_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \\ EJ_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + N(t) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - N_t (a_x - e_x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \\ + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - ma_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \\ N(t) (a_y - e_y) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - N(t) (a_x - e_x) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \\ + EJ_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + [N(t) (r^2 + 2^3_x e_x + 2^3_y e_y) - \\ - GJ_d] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + mr^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + ma_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ma_x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.13)$$

В дальнейшем остановимся на случае стержня, опертого по обоим концам (обобщение на другие случаи опорного закрепления тривиально). Граничным условиям

$$\begin{aligned} u(0) = v(0) = \varphi(0) = \frac{\partial^2 u(0)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v(0)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial z^2} = 0, \\ u(l) = v(l) = \varphi(l) = \frac{\partial^2 u(l)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v(l)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi(l)}{\partial z^2} = 0 \end{aligned}$$

можно удовлетворить, положив

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) \sin \frac{k\pi z}{l}, \\ v(z, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{k\pi z}{l}, \\ \varphi(z, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t) \sin \frac{k\pi z}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (17.14)$$

где $U_k(t)$, $V_k(t)$, $\Phi_k(t)$ — некоторые функции времени. Подстановка рядов (17.14) в уравнения (17.13) приводит к си-

стемам обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 m \frac{d^2 U_k}{dt^2} + m a_y \frac{d^2 \Phi_k}{dt^2} + E J_y \lambda_k^4 U_k - \\
 - \lambda_k^2 N(t) [U_k + (a_y - e_y) \Phi_k] = 0, \\
 m \frac{d^2 V_k}{dt^2} - m a_x \frac{d^2 \Phi_k}{dt^2} + E J_x \lambda_k^4 V_k - \\
 - \lambda_k^2 N(t) [V_k - (a_x - e_x) \Phi_k] = 0, \\
 m a_y \frac{d^2 U_k}{dt^2} - m a_x \frac{d^2 V_k}{dt^2} + m r^2 \frac{d^2 \Phi_k}{dt^2} + \\
 + (E J_\omega \lambda_k^4 + G J_d \lambda_k^2) \Phi_k - \lambda_k N(t) [(a_y - e_y) U_k - \\
 - (a_x - e_x) V_k + (r^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) \Phi_k] = 0 \\
 (k = 1, 2, 3, \dots),
 \end{aligned} \right\} (17.15)$$

где введено обозначение $\lambda_k = k\pi/l$. Уравнения (17.15) в связи с задачей о собственных колебаниях составлены В. З. Власовым¹⁾; в применении к задаче о динамической устойчивости они обсуждались И. И. Гольденблатом²⁾.

Каждая из систем (17.15) при $k = 1, 2, 3, \dots$ содержит лишь те функции U_k, V_k, Φ_k , которые имеют одинаковый индекс k . Вместо системы бесконечного числа уравнений, как и в общем случае, мы получаем бесконечную последовательность систем по три уравнения в каждой. Мы имеем здесь пример *квазиисобого* случая, понятие о котором было введено в § 54.

2. Уравнения (17.15) могут быть записаны в компактной форме, если ввести матричные обозначения

$$\mathbf{f}_k = \begin{vmatrix} U_k \\ V_k \\ \Phi_k \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_y \\ 0 & 1 & -a_x \\ a_y & -a_x & r^2 \end{vmatrix},$$

¹⁾ Цит. на стр. 404.

²⁾ Гольденблат И. И., Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений. Стройиздат, 1947.

$$R_k = \begin{vmatrix} EJ_y \lambda_k^4 & 0 & 0 \\ 0 & EJ_x \lambda_k^4 & 0 \\ 0 & 0 & EJ_\omega \lambda_k^4 + GJ_d \lambda_k^2 \end{vmatrix},$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_y - e_y \\ 0 & 1 & -(a_x - e_x) \\ a_y - e_y & -(a_x - e_x) & r^2 + 2i_x^2 e_x + 2i_y^2 e_y \end{vmatrix}.$$

Тогда система (17.15) примет вид

$$mF \frac{d^2 f}{dt^2} + [R_k - \lambda_k^2 N(t) S] f = 0. \quad (17.16)$$

Достаточно произвести замену

$$mR_k^{-1} F = C, \quad \lambda_k^2 R_k^{-1} S = A,$$

чтобы уравнение (17.15) полностью совпало с (14.1). Отсюда непосредственно следует, что задача об определении частот собственных колебаний незагруженного стержня приводит к уравнению

$$|R_k - m\omega^2 F| = 0,$$

задача об определении критических сил — к уравнению

$$|R_k - \lambda_k^2 NS| = 0$$

и задача об определении частот собственных колебаний стержня, нагруженного постоянной продольной силой, — к уравнению

$$|R_k - \lambda_k^2 NS - m\Omega^2 F| = 0. \quad (17.17)$$

Легко показать, далее, что задача об определении первой, третьей и т. д. областей динамической неустойчивости для случая стержня, нагруженного периодической продольной силой $N_0 + N_t \cos \theta t$, приводит к уравнению

$$\begin{vmatrix} R_k - \lambda_k^2 \left(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t \right) S - \frac{1}{4} m\theta^2 F & -\frac{1}{2} \lambda_k^2 N_t S & 0 \\ -\frac{1}{2} \lambda_k^2 N_t S & R_k - \lambda_k^2 N_0 S - \frac{9}{4} m\theta^2 F & -\frac{1}{2} \lambda_k^2 N_t S \\ 0 & -\frac{1}{2} \lambda_k^2 N_t S & R_k - \lambda_k^2 N_0 S - \frac{25}{4} m\theta^2 F \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (17.18)$$

и к аналогичным уравнениям для определения четных областей неустойчивости.

Можно сделать следующие общие выводы относительно характера распределения областей неустойчивости. При достаточно малых значениях амплитуды продольной силы области неустойчивости лежат вблизи частот

$$\theta = \frac{2\Omega}{j} \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

где Ω — частоты собственных изгибно-крутильных колебаний стержня, нагруженного постоянной составляющей продольной силы, т. е. корни уравнения (17.17). Кроме того, возможно наступление комбинационного резонанса при частотах, определяемых из условия

$$\Omega_{k_1} \pm \Omega_{k_2} = n\theta \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

где Ω_{k_1} и Ω_{k_2} — два корня уравнения (17.17), вычисленные при одном и том же k .

Границы областей неустойчивости, лежащих вблизи $\theta = 2\Omega$, могут быть с достаточной точностью определены из уравнения

$$\left| R_k - \left(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t \right) \lambda_k^2 S - \frac{1}{4} m \theta^2 F \right| = 0. \quad (17.19)$$

Применение уравнения (17.19) к анализу различных частных задач будет дано в следующем параграфе.

§ 74. Частные задачи динамической устойчивости тонкостенных стержней

1. Начнем с того случая, когда сечение стержня имеет две оси симметрии, а продольная сила приложена в центре тяжести сечения ($a_x = a_y = \beta_x = \beta_y = e_x = e_y = 0$).

В этом случае все три матрицы F , R , и Q являются диагональными, вследствие чего неизвестные в уравнениях (17.15) разделяются:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V}{dt^2} + \omega_x^2 \left[1 - \frac{N(t)}{N_x} \right] U &= 0, \\ \frac{d^2 V}{dt^2} + \omega_y^2 \left[1 - \frac{N(t)}{N_y} \right] V &= 0, \\ \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \omega_\varphi^2 \left[1 - \frac{N(t)}{N_\varphi} \right] \Phi &= 0, \end{aligned}$$

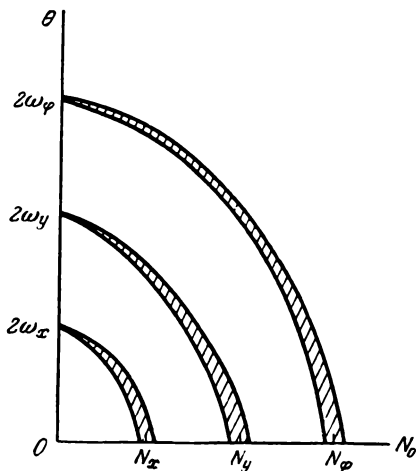
Здесь введены обозначения для парциальных собственных частот

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{k^2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_y}{m}}, & \omega_y &= \frac{k^2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{m}}, \\ \omega_\varphi &= \frac{k\pi}{lr} \sqrt{\frac{1}{m} \left(EJ_\omega \frac{n^2\pi^2}{l^2} + GJ_d \right)} \end{aligned} \right\} \quad (17.20)$$

и парциальных критических сил (индекс n опущен)

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{k^2\pi^2 EJ_y}{l^2}, \\ N_y &= \frac{k^2\pi^2 EJ_x}{l^2}, \\ N_\varphi &= \frac{1}{r^2} \left(EJ_\omega \frac{k^2\pi^2}{l^2} + GJ_d \right). \end{aligned} \quad (17.21)$$

Таким образом, при выполнении упомянутых условий изгибные колебания в обеих главных плоскостях и крутиль-



Фиг. 105.

ные колебания происходят независимо друг от друга. Это обстоятельство было отмечено для свободных колебаний В. З. Власовым и для параметрически возбуждаемых колебаний — И. И. Гольденблатом.

Если $N(t) = N_0 + N_t \cos \theta t$, то границы главных областей приближенно определяются по формулам

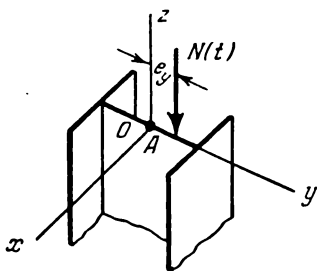
$$\theta_* = 2\omega_x \sqrt{1 - \frac{N_0}{N_x} + \frac{N_t}{2N_x}},$$

$$\theta_* = 2\omega_y \sqrt{1 - \frac{N_0}{N_y} + \frac{N_t}{2N_y}},$$

$$\theta_* = 2\omega_\varphi \sqrt{1 - \frac{N_0}{N_\varphi} + \frac{N_t}{2N_\varphi}}.$$

Примерное распределение областей неустойчивости на плоскости параметров (N_0, θ) представлено на фиг. 105.

2. Перейдем к более сложному случаю, когда сечение, имеющее две оси симметрии, загружено внецентренно приложенной продольной силой. Пусть это будет эксцентриситет в плоскости наибольшей жесткости (фиг. 106).



Фиг. 106.

В этом случае второе из уравнений (17.15) будет содержать только $V_k(t)$ и выпадет из общей системы уравнений. Поскольку оно описывает вынужденные колебания стержня в плоскости наибольшей жесткости (ему соответствуют неоднородные граничные условия $EJ_y \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = Ne$ при $z = 0$ и $z = l$), оно требует

специального рассмотрения (ср. § 27 первой части).

Оставшиеся уравнения составляют систему двух дифференциальных уравнений типа (17.16) с матрицами

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix},$$

$$R_k = \begin{vmatrix} EJ_y \lambda_k^4 & 0 \\ 0 & EJ_\omega \lambda_k^4 + GJ_d \lambda_k^2 \end{vmatrix},$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & -e_y \\ -e_y & r^2 \end{vmatrix}.$$

Уравнение (17.19) для данной задачи принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1 - (\mu \pm \nu) - n^2 & (\mu \pm \nu) e_y \\ (\mu \pm \nu) \frac{\gamma e_y}{r^2} & 1 - (\mu \pm \nu) \gamma - \gamma n^2 \end{vmatrix} = 0,$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{N_0}{N_x}, \quad \nu = \frac{N_t}{2N_x}, \quad n = \frac{\theta^2}{4\omega_x^2}, \\ \gamma &= \frac{\omega_x^2}{\omega_\varphi^2} = \frac{N_x}{N_\varphi} = \frac{k^2 \pi^2 r^2}{l^2} \frac{EJ_y}{EJ_\omega \frac{k^2 \pi^2}{l^2} + GJ_d} \end{aligned} \right\} \quad (17.22)$$

Это уравнение позволяет оценить влияние эксцентриситета в плоскости наибольшей жесткости на параметрические колебания, происходящие из этой плоскости. Помимо самой величины эксцентриситета, степень этого влияния существенно зависит также и от параметра γ , т. е. от соотношения между парциальными собственными частотами (парциальными критическими силами). В случае стержня с нулевой секториальной жесткостью параметр γ может быть больше единицы (для достаточно коротких стержней) и меньше единицы (для длинных, гибких стержней). Если секториальная жесткость не равна нулю, то с уменьшением длины стержня параметр γ приближается к некоторому постоянному значению, имеющему для двутавра с тонкой стенкой порядок единицы.

Рассмотрим случай достаточно гибкого стержня, для которого можно положить $\gamma \ll 1$. Легко получим приближенные формулы

$$\left. \begin{aligned} \theta_* &= 2\omega_x \sqrt{1 - (\mu \pm \nu) - \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{e_y^2}{r^2} (\mu \pm \nu)^2}, \\ \theta_* &= 2\omega_\varphi \sqrt{1 - (\mu \pm \nu) + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{e_y^2}{r^2} (\mu \pm \nu)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.23)$$

Первая формула дает границы области, которая при $\mu = \nu = 0$ стягивается в линию $\theta_* = 2\omega_x$. Внутри этой области колебания носят преимущественно изгибный характер. Действи-

тельно, беря первую строку матричного уравнения ¹⁾.

$$\left[R_k - \left(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t \right) \lambda_k^2 S - \frac{1}{4} m^{(3)} F \right] f = 0,$$

получим:

$$[1 - (\mu \pm \nu) - n^2] U_0 + (\mu \pm \nu) e_y \Phi_0 = 0.$$

Отсюда для рассматриваемой области

$$\Phi_0 \sim \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{\mu e_y}{r^2} U_0,$$

т. е. даже при $e_y \sim r$ имеем в силу $\gamma \ll 1$, $\mu \ll 1$ соотношение $\Phi_0 \ll U_0/r$.

Аналогично можно показать, что внутри другой области колебания имеют преимущественно крутильный характер. Поэтому в дальнейшем будем говорить о резонансе изгибных и крутильных колебаний соответственно, имея, впрочем, в виду, что колебания все же являются связанными (изгибно-крутильными), и, кроме того, это деление имеет смысл лишь для случая $\gamma \ll 1$ (или $\gamma \gg 1$). Из формул (17.23) видно, что влияние эксцентриситета возрастает с приближением γ к единице.

3. В качестве следующего примера рассмотрим задачу о динамической устойчивости стержня, сечение которого имеет одну ось симметрии. Пусть это будет ось Oy (фиг. 104).

В этом случае из системы (17.15), как и прежде, выделяется второе уравнение. Коэффициенты оставшихся уравнений составляют матрицы

$$F = \begin{vmatrix} 1 & a_y \\ a_y & r^2 \end{vmatrix},$$

$$R_k = \begin{vmatrix} EJ_y \lambda_k^4 & 0 \\ 0 & EJ_\omega \lambda_k^4 + GJ_d \lambda_k^2 \end{vmatrix},$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & a_y - e_y \\ a_y - e_y & r^2 + 2\beta_y e_y \end{vmatrix}.$$

¹⁾ Ср. уравнение (17.19).

Для определения границ главных областей неустойчивости получаем уравнение

$$\left| R_k - \left(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t \right) \lambda_k^2 S - \frac{1}{4} m h^2 F \right| = 0$$

или в развернутом виде

$$\begin{vmatrix} 1 - (\mu \pm \nu) - n^2 & -(\mu \pm \nu)(a_y - e_y) - n^2 a_y \\ -(\mu \pm \nu) \frac{a_y - e_y}{r^2} - \gamma n^2 \frac{a_y}{r^2} & 1 - (\mu \pm \nu) \gamma \left(1 + \frac{2^2 e_y e_y}{r^2} \right) - \gamma n^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (17.24)$$

где использованы обозначения (17.22). Если $\gamma \ll 1$, то, полагая для области изгибных колебаний

$$n_*^2 = 1 - (\mu \pm \nu)$$

и подставляя это выражение во все элементы определителя (17.24), кроме верхнего диагонального, получим (при $e_y = 0$):

$$\begin{vmatrix} 1 - (\mu \pm \nu) - n^2 & -a_y \\ -\frac{a_y \gamma}{r^2} & 1 - \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда безразмерная критическая частота

$$n_* = \sqrt{1 - (\mu \pm \nu) - \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{a_y^2}{r^2}}. \quad (17.25)$$

Для другой главной области неустойчивости аналогично получим:

$$n_* = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{1 - (\mu \pm \nu) + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{a_y^2}{r^2}}.$$

До сих пор мы занимались исключительно главными областями динамической неустойчивости. Для того чтобы определить побочные области, необходимо вернуться к общим уравнениям типа (17.18). Эти уравнения, конечно, уже не могут быть разрешены в общем виде относительно критических частот. Здесь возможно лишь численное решение для определенных частных значений параметров.

§ 75. Задача динамической устойчивости тонкостенных стержней в нелинейной постановке

1. В отличие от нелинейной задачи, рассмотренной в первой части книги, задача динамической устойчивости тонкостенных стержней требует исследования системы двух или трех нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Особые трудности вызывает также определение нелинейных характеристик системы. Дальнейшее исследование мы проведем с учетом основного нелинейного фактора — нелинейной инерционности, причем ограничимся случаем сечения, имеющего одну ось симметрии (фиг. 104).

На продольных перемещениях

$$w(z, t) = \frac{1}{2} \int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 d\zeta \quad (17.26)$$

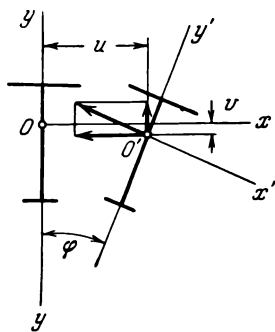
возникает инерционная продольная сила, которая должна быть учтена при составлении нелинейных уравнений. Но в отличие от плоской задачи здесь мы имеем также нелинейные инерционные силы другого типа. Изгибно-крутильные колебания стержня из плоскости Ouz описываются линейным смещением $u(z, t)$ и углом закручивания $\varphi(z, t)$. Кроме того, центры тяжести сечений получают также перемещение $v(z, t)$ в направлении оси Oy (фиг. 107); оно измеряется величинами второго порядка малости и связано с основными перемещениями $u(z, t)$ и $\varphi(z, t)$ нелинейно. Установим эту связь.

Проектируя кривизну стержня в плоскости $O'x'z'$ на ось Oy , получим кривизну в плоскости Ouz

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \varphi.$$

После двукратного интегрирования

$$v(z, t) = \int \int \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \varphi dz dz_1 + Cz + C_1, \quad (17.27)$$



Фиг. 107.

причем постоянные определяются из граничных условий. Так, в случае стержня, шарнирно закрепленного по обоим концам, можно положить:

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &= U(t) \sin \frac{\pi z}{l}, \\ \varphi(z, t) &= \Phi(t) \sin \frac{\pi z}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (17.28)$$

Тогда согласно формуле (17.27)

$$v(z, t) = -\frac{\pi^2}{l^2} U(t) \Phi(t) \left(\frac{z^2}{4} + \frac{l^2}{8\pi^2} \cos \frac{2\pi z}{l} + Cz + C_1 \right).$$

Из граничных условий

$$v(0, t) = v(l, t) = 0$$

следует, что

$$C = -\frac{1}{4} l, \quad C_1 = -\frac{l^2}{8\pi^2}.$$

Окончательно получаем:

$$v(z, t) = \frac{\pi^2}{4l^2} U(t) \Phi(t) \left[z(l-z) + \frac{l^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi z}{l} \right]. \quad (17.29)$$

Аналогично определяются прогибы и в других случаях опорного закрепления. Таким образом, при изгибно-крутильных колебаниях возникает инерционная нагрузка

$$\Delta q(z, t) = -m \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2}$$

или

$$\begin{aligned} \Delta q(z, t) &= -\frac{m\pi^2}{4l^2} (U''\Phi + 2U'\Phi' + U\Phi'') \times \\ &\quad \times \left[z(l-z) + \frac{l^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi z}{l} \right]. \end{aligned} \quad (17.30)$$

В общем случае

$$\Delta q(z, t) = -(U''\Phi + 2U'\Phi' + U\Phi'') f(z), \quad (17.31)$$

где $f(z)$ — некоторая функция, характеризующая формы колебаний балки и закон распределения массы по длине. Дополнительный изгибающий момент, вызванный этой нагрузкой, будет, очевидно:

$$\Delta M(z, t) = -(U''\Phi + 2U'\Phi' + U\Phi'') F(z), \quad (17.32)$$

где

$$F(z) = - \int \int f(z) dz dz_1 + Dz + D_1.$$

Постоянные D и D_1 определяются из граничных условий.

Инерционная продольная сила вычисляется по формуле

$$\Delta N(z, t) = - \int_1^{l-z} m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz. \quad (17.33)$$

Используя (17.26) и (17.28), найдем, что

$$w(z, t) = \frac{U^2 \pi^2}{2l^2} \left(z + \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi z}{l} \right).$$

Применение формулы (17.33) дает:

$$\Delta N(z, t) = - \frac{\pi^2 m}{4} [(U')^2 + UU''] \left(1 - \frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi z}{l} \right).$$

Если на подвижном конце стержня находится масса M_L , то, как и в случае плоских колебаний,

$$\begin{aligned} \Delta N(z, t) = \\ = - \frac{\pi^2 m}{4} [(U')^2 + UU''] \left(1 - \frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi z}{l} + \frac{2M_L}{ml} \right); \end{aligned} \quad (17.34)$$

и вообще

$$\Delta N(z, t) = - [(U')^2 + UU''] G(z). \quad (17.35)$$

Функция $G(z)$ зависит от граничных условий и распределения массы по длине стержня.

2. Дифференциальные уравнения изгибно-крутильных колебаний бруса с сечением, имеющим одну ось симметрии (ось Oy), нагруженного продольной силой $N(t)$ и дополнительной силой ¹⁾ $\Delta N(z, t)$, а также нагрузкой $\Delta q(z, t)$, вызы-

¹⁾ В отличие от $N(t)$ эта сила центральна, что отражено в уравнениях.

вающей изгибающий момент $\Delta M(z, t)$, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + N(t) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + N(t) (a_y - e_y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ + m a_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Delta M \varphi) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\Delta N \left(\frac{\partial u}{\partial z} + a_y \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] = 0, \\ N(t) (a_y - e_y) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + EJ_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + IN(t) (r^2 + 2\beta_y e_y) - \\ - GJ_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + m r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + m a_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Delta N \left[r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. + a_y \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right\} + \Delta M \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\beta_y \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta M \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \Delta q a_y \varphi = 0. \end{aligned} \right\} (17.36)$$

Эти уравнения легко получаются из известных уравнений В. З. Власова¹⁾; в отличие от последних они учитывают инерционные составляющие ΔN , Δq , ΔM , которые нелинейно связаны с основными перемещениями u и φ .

Положив для случая шарнирно опертого стержня, что

$$u(z, t) = U(t) \sin \frac{\pi z}{l},$$

$$\varphi(z, t) = \Phi(t) \sin \frac{\pi z}{l},$$

будем искать приближенное решение с помощью метода Галеркина. В результате получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} U'' + a_y \Phi'' + \omega_x^2 \left\{ U - \frac{N(t)}{N_x} [U + (a_y - e_y) \Phi] \right\} + \\ + \psi_x(U, U', U'', \Phi, \Phi', \Phi'') = 0, \\ \frac{a_y}{r^2} U'' + \Phi'' + \omega_\varphi^2 \left\{ \Phi - \frac{N(t)}{N_\varphi} \left[\frac{a_y - e_y}{r^2} U + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 + \frac{2\beta_y e_y}{r^2} \right) \Phi \right] \right\} + \psi_\varphi(U, U', U'', \Phi, \Phi', \Phi'') = 0. \end{aligned} \right\} (17.37)$$

¹⁾ См. сноску на стр. 404.

В этих уравнениях, помимо обозначений § 74, обозначено:

$$\begin{aligned} \psi_x &= \frac{2\Phi}{ml} \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\Delta M \sin \frac{\pi z}{l} \right) \sin \frac{\pi z}{l} dz + \\ &\quad + \frac{2\pi}{ml^2} (U + a_y \Phi) \int_0^l \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta N \cos \frac{\pi z}{l} \right) \sin \frac{\pi z}{l} dz, \\ \psi_\varphi &= -\frac{2\pi^2 U}{ml^3} \int_0^l \Delta M \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz + \\ &\quad + \frac{2\pi}{ml^2} \left(\frac{a_y}{r^2} U + \Phi \right) \int_0^l \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta N \cos \frac{\pi z}{l} \right) \sin \frac{\pi z}{l} dz - \\ &\quad - \frac{2\Phi}{ml} \int_0^l \sin \frac{\pi z}{l} \left[\frac{2\pi^2 a_y}{l} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta M \cos \frac{\pi z}{l} \right) + \Delta q a_y \sin \frac{\pi z}{l} \right] dz. \end{aligned}$$

Учитывая (17.31), (17.32) и (17.35), найдем:

$$\begin{aligned} \psi_x &= I_1 \Phi (U'' \Phi + 2U' \Phi' + U \Phi'') + 2\kappa (U + a_y \Phi) [(U')^2 + UU''], \\ \psi_\varphi &= \frac{1}{r^2} (I_1 U - 2\beta_y I_2 \Phi + a_y I_3 \Phi) (U'' \Phi + 2U' \Phi' + U \Phi'') + \\ &\quad + 2\kappa \left(\frac{a_y}{r^2} U + \Phi \right) [(U')^2 + UU''] \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2\pi^2}{ml^3} \int_0^l F(z) \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = -\frac{2}{ml} \int_0^l \frac{d^2}{dz^2} \left[F(z) \sin \frac{\pi z}{l} \right] \sin \frac{\pi z}{l} dz, \\ I_2 &= \frac{2\pi^2}{ml^3} \int_0^l F(z) \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz = -\frac{2\pi}{ml^2} \int_0^l \frac{d}{dz} \left[F(z) \cos \frac{\pi z}{l} \right] \sin \frac{\pi z}{l} dz, \\ I_3 &= \frac{2}{ml} \int_0^l f(z) \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\frac{2\pi^2}{ml^3} \int_0^l G(z) \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz = -\frac{2\pi}{ml^2} \int_0^l \frac{d}{dz} \left[G(z) \cos \frac{\pi z}{l} \right] dz = 2\kappa.$$

Для приближенного вычисления интегралов I_1 , I_2 и I_3 заметим, что с известной степенью точности

$$f(z) = \frac{m\pi^2}{4l^2} \left[z(l-z) + \frac{l^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi z}{l} \right] \approx \frac{m\pi^2}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \right) \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Интегрируя дважды и подчиняя граничным условиям $F(0) = F(l) = 0$, найдем:

$$F(z) = \frac{ml^2}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \right) \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Тогда

$$I_1 = I_3 = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \right) = 0,736,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 = 0,368.$$

Кроме того (ср. § 14),

$$\kappa = \frac{\pi^4}{4l^2} \left(\frac{ML}{ml} + 0,27 \right).$$

3. Рассмотрим уравнения (17.37) с нелинейными функциями

$$\left. \begin{aligned} \psi_x &= I_1 \Phi (U'' \Phi + 2U' \Phi' + U \Phi'') + \\ &\quad + 2\kappa (U + a_y \Phi) [(U')^2 + UU''], \\ \psi_\varphi &= \frac{I_1}{r^2} [U + (a_y - \beta_y) \Phi] (U'' \Phi + 2U' \Phi' + U \Phi'') + \\ &\quad + 2\kappa \left(\frac{a_y}{r^2} U + \Phi \right) [(U')^2 + UU'']. \end{aligned} \right\} \quad (17.38)$$

Будем искать установившиеся решения в пределах главных областей возбуждения в виде

$$\left. \begin{aligned} U(t) &= U_0 \sin \frac{\theta t}{2} + \dots, \\ \Phi(t) &= \Phi_0 \sin \frac{\theta t}{2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (17.39)$$

Подставляя (17.39) в (17.38), после соответствующих преобразований находим:

$$\left. \begin{aligned} \psi_x &= -\frac{\theta^2}{4} [\kappa U_0^2 (U_0 + a_y \Phi_0) + I_1 U_0 \Phi_0^2] \sin \frac{\theta t}{2} + \dots, \\ \psi_\varphi &= -\frac{\theta^2}{4} \left\{ \kappa U_0^2 \left(\frac{a_y}{r^2} U_0 + \Phi_0 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_1}{r^2} U_0 \Phi_0 [U_0 + (a_y - \beta_y) \Phi_0] \sin \frac{\theta t}{2} + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (17.40)$$

Точками обозначены невыписанные члены, содержащие гармоники.

Подстановка выражений (17.39) и (17.40) в дифференциальные уравнения (17.37) дает после сравнения коэффициентов при $\sin \frac{\theta t}{2}$ следующую систему алгебраических уравнений (в обозначениях предыдущего параграфа):

$$\left. \begin{aligned} [1 - (\mu - \nu)] U_0 - (a_y - e_y)(\mu - \nu) \Phi_0 - \\ - n^2 [(1 + \kappa U_0^2)(U_0 + a_y \Phi_0) + I_1 U_0 \Phi_0^2] = 0, \\ - \frac{a_y - e_y}{r^2} \gamma (\mu - \nu) U_0 + \left[1 - \gamma (\mu - \nu) \left(1 + \frac{2\beta_y e_y}{r^2} \right) \right] \Phi_0 - \\ - \gamma n^2 \left\{ (1 + \kappa U_0^2) \left(\frac{a_y}{r^2} U_0 + \Phi_0 \right) + \right. \\ \left. + \frac{I_1}{r^2} U_0 \Phi_0 [U_0 + (a_y - \beta_y) \Phi_0] \right\} = 0. \end{aligned} \right\} (17.41)$$

Решая эту систему, найдем амплитуды установившихся колебаний U_0 и Φ_0 . Чтобы получить более обозримые результаты, рассмотрим сначала случай, когда влиянием инерционной нагрузки $\Delta q(z, t)$ можно пренебречь (границы применимости будут указаны ниже). Вместо (17.41) получаем:

$$\left. \begin{aligned} [1 - (\mu - \nu)] U_0 - (a_y - e_y)(\mu - \nu) \Phi_0 - \\ - n^2 (1 + \kappa U_0^2)(U_0 + a_y \Phi_0) = 0 \\ - \frac{a_y - e_y}{r^2} \gamma (\mu - \nu) U_0 + \left[1 - \gamma (\mu - \nu) \left(1 + \frac{2\beta_y e_y}{r^2} \right) \right] \Phi_0 - \\ - \gamma n^2 (1 + \kappa U_0^2) \left(\frac{a_y}{r^2} U_0 + \Phi_0 \right) = 0. \end{aligned} \right\} (17.42)$$

Эта система удовлетворяется при $U_0 = \Phi_0 = 0$, что соответствует отсутствию изгибно-крутильных колебаний. Для получения условий существования ненулевых решений приравняем нулю определитель, составленный из коэффициентов при U_0 и Φ_0 . Вычисление амплитуд сводится теперь к решению

уравнения, содержащего только U_0 :

$$\begin{vmatrix} 1 - (\mu - \nu) - n^2(1 + \alpha U_0^2) & - (a_y - e_y)(\mu - \nu) - \\ & - n^2(1 + \alpha U_0^2) a_y \\ - \frac{a_y - e_y}{r^2} \gamma (\mu - \nu) - & 1 - \gamma (\mu - \nu) \left(1 + \frac{2\beta_y e_y}{r^2}\right) - \\ & - \gamma n^2(1 + \alpha U_0^2) \frac{a_y}{r^2} & - \gamma n^2(1 + \alpha U_0^2) \end{vmatrix} = 0.$$

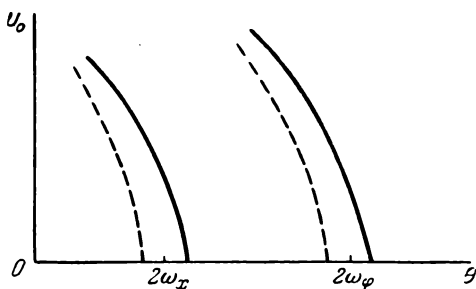
Сравнение этого уравнения с уравнением критических частот (17.24) показывает, что оно может быть удовлетворено, если положить:

$$n^2(1 + \alpha U_0^2) = n_*^2 \quad (17.43)$$

(n_* — безразмерная верхняя критическая частота). Отсюда следует весьма простая формула¹⁾

$$U_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{\theta_*^2}{\theta^2} - 1}. \quad (17.44)$$

Таким образом, при сделанных предположениях амплитуда изгибных колебаний определяется по той же формуле,



Фиг. 108.

что и в случае плоских колебаний стержня (§ 21). График, показывающий зависимость амплитуды от частоты, приведен на фиг. 108. Пунктиром нанесены неустойчивые решения,

¹⁾ См. также пример из § 70.

которые получим, положив

$$U(t) = U_0 \cos \frac{\theta t}{2} + \dots, \quad \Phi(t) = \Phi_0 \cos \frac{\theta t}{2} + \dots$$

Чтобы выяснить, как меняется амплитуда угла закручивания, рассмотрим второе из уравнений (17.42). Для случая $e_y = 0$ находим:

$$\Phi_0 = \frac{\mu - \nu + n^2(1 + \kappa U_0^2)}{1 - \gamma[\mu - \nu + n^2(1 + \kappa U_0^2)]} \cdot \frac{\gamma a_y U}{r^2}$$

или, если учесть (17.43), а также, что $n_*^2 \sim 1$,

$$\Phi_0 \sim \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{a_y U_0}{r^2}. \quad (17.45)$$

Следовательно, для области преимущественно изгибных колебаний деформации кручения увеличиваются по мере удаления центра изгиба от центра тяжести, а также по мере сближения парциальных частот.

Используя формулу (17.45), попробуем оценить влияние инерционной нагрузки $\Delta q(z, t)$ на амплитуды изгибных колебаний. Для этого приближенное значение Φ_0 подставим из (17.45) в первое из уравнений (17.41). При $e_y = 0$ легко получим:

$$U_0^2 = \frac{1}{n^2} \frac{1 - (\mu - \nu - n^2)(1 + c)}{\kappa(1 + c) + \frac{I_1 c^2}{r^2}},$$

где

$$c = \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{a_y^2}{r^2}.$$

Но из (17.25) видно, что при $c \ll 1$

$$\frac{1}{1 + c} - (\mu - \nu) \approx n_*^2.$$

Следовательно,

$$U_0^2 = \frac{\frac{n_*^2}{n^2} - 1}{\kappa + \frac{I_1}{r^2} \frac{c^2}{1 + c}}.$$

Эта формула может быть также представлена в виде (17.44), если заменить в ней x на величину

$$x_1 = x \left(1 + \frac{I_1}{x r^2} \frac{c^2}{1 + c} \right). \quad (17.46)$$

Рассмотрение формулы (17.46) показывает, что влияние инерционной нагрузки $\Delta q(z, t)$ будет тем меньше, чем сильнее неравенства $a_y \ll r$, $\gamma \ll 1$, $M \ll ml$. В частности, для стержней, у которых центр изгиба значительно удален от центра тяжести (к подобным стержням может быть отнесена, например, разрезная труба), этот нелинейный фактор может оказаться решающим.

ГЛАВА ВОСЕМНАДЦАТАЯ

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 76. Элементарные задачи

1. Дифференциальное уравнение изгибных колебаний кругового стержня постоянного сечения, нагруженного радиальной равномерно распределенной нагрузкой $q_0 + q_t \Phi(t)$, может быть получено из уравнения изгиба

$$\frac{EJ}{R^4} \left(\frac{d^5 u}{d\varphi^5} + 2 \frac{d^3 u}{d\varphi^3} + \frac{du}{d\varphi} \right) = \frac{dq_r}{d\varphi} - q_\varphi \quad (18.1)$$

путем введения в его правую часть членов, которые учитывают дополнительные составляющие внешней нагрузки, возникающие при выпучивании, и составляющие сил инерции. Продольными колебаниями будем пренебрегать.

Используем следующие обозначения: R — радиус оси стержня, u , v — радиальное и тангенциальное перемещения точек оси стержня, q_r , q_φ — радиальная и тангенциальная составляющие внешней нагрузки, φ — центральный угол, отсчитываемый от некоторой начальной точки.

Полагая, что векторы внешней нагрузки при колебаниях поворачиваются вместе с соответствующими сечениями, оставаясь перпендикулярными к оси стержня, находим:

$$q_r = (q_0 + \Phi q_t) \left[1 - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u \right) \right] - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$q_\varphi = -m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Подстановка в уравнение (18.1) дает:

$$\frac{EJ}{R^4} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial \varphi^5} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{q_0 + q_t \Phi(t)}{R} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + m \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \varphi \partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (18.2)$$

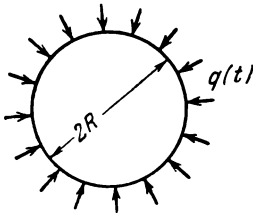
Одно из неизвестных в уравнении (18.2) можно исключить, воспользовавшись уравнением продольной деформации

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} - u = \frac{NR}{EF}.$$

Так, если исходить из допущения о несжимаемости оси арки, получим следующее уравнение:

$$\frac{EJ}{R^4} \left(\frac{\partial^5 v}{\partial \varphi^5} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{q_0 + q_t \Phi(t)}{R} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) + m \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (18.3)$$

2. Рассмотрим прежде всего случай замкнутого кругового кольца (фиг. 109). Допустим, что на формы колебаний не накладывается никаких ограничений, кроме условия периодичности



Фиг. 109.

$$u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi),$$

$$v(\varphi + 2\pi) = v(\varphi).$$

В этом случае решение уравнения (18.3) может быть представлено в виде

$$v_k(\varphi, t) = f_k(t) \sin k\varphi$$

$$(k = 2, 3, 4, \dots).$$

В результате подстановки получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения относительно функций $f_k(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 f_k}{dt^2} + \omega_k^2 \left[1 - \frac{q_0 + q_t \Phi(t)}{q_k} \right] f_k = 0 \\ (k = 2, 3, 4, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

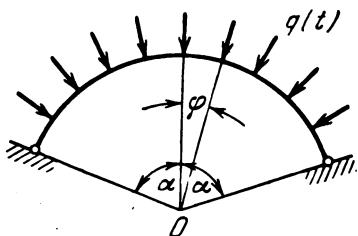
В уравнениях (18.4) введены обозначения для собственных частот и критических нагрузок

$$\omega_k = \frac{k(k^2 - 1)}{R^2} \sqrt{\frac{EJ}{m(k^2 + 1)}},$$

$$q_k = \frac{EJ}{R^3} (k^2 - 1).$$

Таким образом, задача о колебаниях замкнутого кругового кольца приводит к уравнениям особого случая¹⁾.

В отличие от только что рассмотренного случая двухшарнирной арки (фиг. 110) приводит к системе неразделяющихся дифференциальных уравнений. Действительно, в этом случае фундаментальные функции задачи собственных колебаний и задачи статической устойчивости не совпадают.



Фиг. 110.

Ограничиваясь косимметричными колебаниями, будем искать решение уравнения (18.2) в виде рядов

$$\left. \begin{aligned} u(\varphi, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin n_k \varphi, \\ v(\varphi, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \frac{(-1)^k - \cos n_k \varphi}{n_k}, \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

удовлетворяющих граничным условиям задачи

$$u(\alpha) = u(-\alpha) = v(\alpha) = v(-\alpha) = \frac{\partial^2 u(\alpha)}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u(-\alpha)}{\partial \varphi^2} = 0$$

и условию несжимаемости. Здесь введено обозначение

$$n_k = \frac{k\pi}{\alpha}.$$

¹⁾ Джанелидзе Г. Ю. и Радциг М. А., Прикл. матем. и мех. 4, вып. 5—6 (1940). В этой работе рассмотрены также изгибно-крутильные колебания кольца.

Для отыскания соотношений между функциями $f_k(t)$ воспользуемся методом Галеркина. Могут возникнуть затруднения в выборе условия ортогональности (мы имеем здесь две системы фундаментальных функций). На помощь приходит трактовка метода Галеркина как формы принципа возможных перемещений. Учитывая, что уравнение (18.3) выражает равенство нулю *тангенциальной* составляющей всех сил, приложенных к элементу длины арки, приходим к условиям ортогональности

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} L(u, v, t) [(-1)^k - \cos n_k \varphi] d\varphi = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Подстановка дает:

$$\frac{mR^4}{n_k^2 (n_k^2 - 1)^3 EJ} \left[(n_k^2 + 3) \frac{d^2 f_k}{dt^2} + 2n_k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+i}}{n_i} \frac{d^2 f_i}{dt^2} \right] + \left[1 - \frac{q_0 + q_t \Phi(t)}{q_k} \right] f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где через q_k обозначен k -й критический параметр

$$q_k = \frac{(n_k^2 - 1) EJ}{R^3}.$$

Полученные уравнения, будучи записаны в матричной форме,

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + [E - q_0 A - q_t \Phi(t) B] f = 0,$$

совпадают с уравнениями (13.18). Действительно, матрица A является в данном случае диагональной

$$A = \frac{R^3}{EJ} \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1^2 - 1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{n_2^2 - 1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_3^2 - 1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

а матрица C имеет вид

$$C = \frac{mR^4}{EJ} \begin{pmatrix} \frac{n_1^2 + 3}{n_1^2 (n_1^2 - 1)^2} & -\frac{2}{n_1 n_2 (n_1^2 - 1)^2} & \frac{2}{n_1 n_3 (n_1^2 - 1)^2} & \vdots \\ -\frac{2}{n_1 n_2 (n_2^2 - 1)^2} & \frac{n_2^2 + 3}{n_2^2 (n_2^2 - 1)^2} & \frac{2}{n_2 n_3 (n_2^2 - 1)^2} & \vdots \\ \frac{2}{n_3 n_1 (n_3^2 - 1)^2} & -\frac{2}{n_3 n_2 (n_3^2 - 1)^2} & \frac{n_3^2 + 3}{n_3^2 (n_3^2 - 1)^2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Этот результат не является неожиданным, поскольку принятые нами фундаментальные функции (18.5) представляют собой формы потери статической устойчивости арки. Из уравнения

$$\left| E - \left(q_0 \pm \frac{1}{2} q_t \right) A - \frac{1}{4} \theta^2 C \right| = 0$$

в первом приближении получаем следующую формулу для критических частот¹⁾:

$$\theta_* = \frac{2n_k (n_k^2 - 1)}{R^2} \sqrt{\frac{EJ}{m (n_k^2 + 3)} \left(1 - \frac{q_0 \pm \frac{1}{2} q_t}{q_k} \right)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (18.6)$$

Формула (18.6) должна, очевидно, давать наибольшую погрешность при малых значениях q_0/q_k . Для того чтобы оценить эту погрешность, рассмотрим задачу о собственных колебаниях арки, которая приводится к уравнению

$$|E - \omega^2 C| = 0.$$

Первое приближение дает:

$$\tilde{\omega}_k = \frac{n_k (n_k^2 - 1)}{R^2} \sqrt{\frac{EJ}{m (n_k^2 + 3)}}. \quad (18.7)$$

¹⁾ Первое приближение рассмотрено Р. Л. Малкиной, Инж. сборн. 14 (1953).

Рассмотрим уравнение второго приближения

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_1^2} & -\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_1^2 (n_1^2 + 3)} \\ -\frac{4\omega^2}{\tilde{\omega}_2^2 (n_2^2 + 3)} & 1 - \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_2^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Легко найдем, что

$$\begin{aligned} \omega_1 &\approx \tilde{\omega}_1 \sqrt{1 - \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{4}{(n_1^2 + 3)(n_2^2 + 3)}}, \\ \omega_2 &\approx \tilde{\omega}_2 \sqrt{1 + \frac{1}{1 - \gamma} \frac{4}{(n_1^2 + 3)(n_2^2 + 3)}}, \end{aligned} \quad \left(\gamma = \frac{\tilde{\omega}_1^2}{\tilde{\omega}_2^2} \right).$$

Как видно из полученных формул, поправка второго приближения весьма мала (для нижней частоты полуциркулярной арки она составляет всего $0,2^0/0$).

§ 77. Функции влияния прогибов для арок

1. Для исследования динамической устойчивости арок в более широкой постановке (произвольное очертание оси, переменная жесткость и т. д.) целесообразно перейти к методу интегральных уравнений. Это позволит получить ряд результатов, сохраняя достаточно общие предположения относительно устройства арки и характера внешней нагрузки.

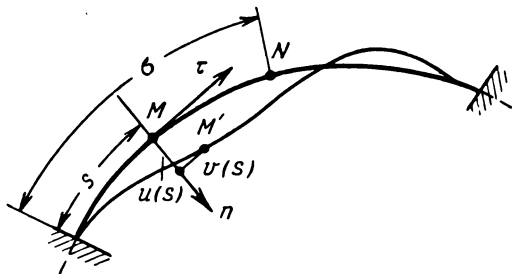
Радиальное и тангенциальное перемещения любой точки арки (фиг. 111) могут быть выражены через радиальную и тангенциальную составляющие внешней нагрузки следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u(s) &= \int K_{rr}(s, \sigma) q_r(\sigma) d\sigma + \int K_{r\varphi}(s, \sigma) q_\varphi(\sigma) d\sigma, \\ v(s) &= \int K_{\varphi r}(s, \sigma) q_r(\sigma) d\sigma + \int K_{\varphi\varphi}(s, \sigma) q_\varphi(\sigma) d\sigma. \end{aligned} \right\} (18.8)$$

В формулах (18.8) через $K_{rr}(s, \sigma)$, $K_{r\varphi}(s, \sigma)$, $K_{\varphi r}(s, \sigma)$, $K_{\varphi\varphi}(s, \sigma)$ обозначены соответствующие функции влияния; первый индекс обозначает направление искомого перемеще-

ния, второй — направление единичного воздействия. Интегрирование распространяется на всю длину арки.

Соотношения (18.8) легко обобщаются на случай, когда наряду с распределенной нагрузкой имеются сосредоточенные силы. Для этого достаточно ввести интегралы в смысле



Фиг. 111.

Стильтеса. Мы ограничимся, тем не менее, случаем распределенных нагрузок (распределенных масс), принимая во внимание, что обобщение дальнейших результатов элементарно.

Функции влияния составляют *тензор влияния*¹⁾

$$K(s, \sigma) = \begin{vmatrix} K_{rr}(s, \sigma) & K_{r\varphi}(s, \sigma) \\ K_{\varphi r}(s, \sigma) & K_{\varphi\varphi}(s, \sigma) \end{vmatrix},$$

который является симметричным тензором; действительно, на основании теоремы о взаимности перемещений имеем:

$$K_{rr}(s, \sigma) \equiv K_{rr}(\sigma, s),$$

$$K_{\varphi\varphi}(s, \sigma) \equiv K_{\varphi\varphi}(\sigma, s),$$

$$K_{r\varphi}(s, \sigma) \equiv K_{\varphi r}(\sigma, s).$$

Далее, все компоненты тензора влияния можно выразить через какую-либо одну компоненту. Так, если исходить из допущения о несжимаемости оси арки ($\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{u}{r} = 0$), найдем:

$$K_{r\varphi}(s, \sigma) = r(s) \frac{\partial K_{\varphi\varphi}(s, \sigma)}{\partial s},$$

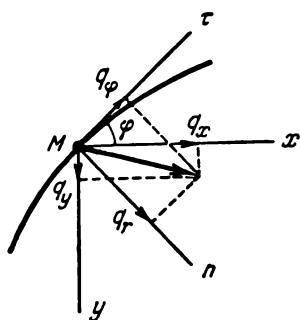
$$K_{rr}(s, \sigma) = r(s) r(\sigma) \frac{\partial^2 K_{\varphi\varphi}(s, \sigma)}{\partial s \partial \sigma}.$$

¹⁾ Или тензор Грина (ср. § 59).

Таким образом,

$$K(s, \sigma) = \begin{vmatrix} r(s)r(\sigma) \frac{\partial^2 K_{\varphi\varphi}(s, \sigma)}{\partial s \partial \sigma} & r(s) \frac{\partial K_{\varphi\varphi}(s, \sigma)}{\partial s} \\ r(\sigma) \frac{\partial K_{\varphi\varphi}(s, \sigma)}{\partial \sigma} & K_{\varphi\varphi}(s, \sigma) \end{vmatrix}.$$

Выясним, как изменяется тензор $K(s, \sigma)$ при переходе к другим осям, скажем к осям (x, y) . Компоненты нагрузки преобразуются при этом следующим образом (фиг. 112):



Фиг. 112.

$$q_y = q_r \cos \varphi - q_\varphi \sin \varphi,$$

$$q_x = q_r \sin \varphi + q_\varphi \cos \varphi.$$

Аналогичное преобразование имеет место и для перемещений

$$\eta = u \cos \varphi - v \sin \varphi,$$

$$\xi = u \sin \varphi + v \cos \varphi.$$

Введя тензор поворота

$$T = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix},$$

легко докажем с помощью формул (18.8), что

$$K^*(s, \sigma) = T^{-1}(s) K(s, \sigma) T(\sigma).$$

2. В качестве примера рассмотрим построение функции влияния $K_{yy}(x, \xi)$ для двухшарнирной арки (фиг. 113). Применение известной формулы дает:

$$K_{yy}(x, \xi) = \int_0^l \frac{M(\zeta, \xi) M_0(\zeta, x)}{EJ(\zeta) \cos \varphi(\zeta)} d\zeta, \quad (18.9)$$

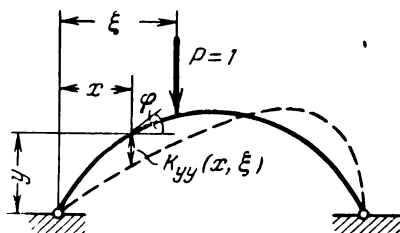
где $M_0(x, \xi)$ — функция влияния балочного момента, $M(x, \xi)$ — функция влияния момента для арки:

$$M(x, \xi) = M_0(x, \xi) - H(\xi) y(x),$$

$H(\xi)$ — функция влияния распора:

$$H(\xi) = \frac{\int_0^l \frac{M_0(x, \xi) y(x)}{EJ(x) \cos \varphi(x)} dx}{\int_0^l \frac{y^2(x) dx}{EJ(x) \cos \varphi(x)}}.$$

Через $y(x)$ обозначена ордината оси арки, а через $\varphi(x)$ — угол, который касательная к оси составляет с гори-



Фиг. 113.

зонтом. Для практических вычислений удобнее рассматривать ядро $K_{yy}(x, \xi)$ как предел некоторого вырожденного ядра. Поэтому представим функцию влияния балочного момента в виде ряда

$$M_0(x, \xi) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi \xi}{l}}{k^2}. \quad (18.10)$$

Используя (18.10), получим следующее разложение для функции влияния распора:

$$H(\xi) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k^2 c} \sin \frac{k\pi \xi}{l},$$

где

$$\lambda_k = \int_0^l \frac{y(x) \sin \frac{k\pi x}{l}}{EJ(x) \cos \varphi} dx, \quad c = \int_0^l \frac{y^2(x) dx}{EJ(x) \cos \varphi}.$$

Для функции влияния прогибов $K_{yy}(x, \xi)$ получаем соответственно ¹⁾:

$$K_{yy}(x, \xi) = \frac{4l^2}{\pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{ik} - \frac{\lambda_i \lambda_k}{c}}{l^2 k^2} \sin \frac{l\pi x}{l} \sin \frac{k\pi \xi}{l}, \quad (18.11)$$

где введено обозначение

$$\mu_{ik} = \int_0^l \frac{\sin \frac{l\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}}{EJ(x) \cos \varphi} dx.$$

Симметричность функции влияния обеспечивается тем обстоятельством, что $\mu_{ik} \equiv \mu_{ki}$.

§ 78. Интегральные уравнения колебаний, устойчивости и динамической устойчивости арок

1. Рассмотрим задачу о колебаниях арки под действием периодической внешней нагрузки

$$q_r(s, t) = [\alpha + \beta \Phi(t)] p_r(s),$$

$$q_\varphi(s, t) = [\alpha + \beta \Phi(t)] p_\varphi(s).$$

В отношении этой нагрузки сделаем предположение, что при колебаниях она поворачивается, составляя с изогнутой осью арки первоначальный угол. В этом случае дополнительные изгибающие моменты, возникающие при отклонении оси арки от начального положения, могут быть учтены путем введения нагрузки

$$\Delta q_r = - \frac{\partial}{\partial s} \left[N(s, t) \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{v}{r} \right) \right],$$

$$\Delta q_\varphi = 0.$$

Добавляя к нагрузке силы инерции, получаем:

$$q_r(s, t) = [\alpha + \beta \Phi(t)] p_r(s) - \frac{\partial}{\partial s} \left[N(s) \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{v}{r} \right) \right] - m(s) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$q_\varphi(s, t) = [\alpha + \beta \Phi(t)] p_\varphi(s) - m(s) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

¹⁾ Формула (18.11) выведена в работе автора, Труды МИИТ, № 74, 1952

Подставим эти выражения в (18.8). Если ось арки очерчена по кривой давления от заданной нагрузки, то ¹⁾

$$\int K_{rr}(s, \sigma) p_r(\sigma) d\sigma + \int K_{r\varphi}(s, \sigma) p_\varphi(\sigma) d\sigma \equiv 0,$$

$$\int K_{\varphi r}(s, \sigma) p_r(\sigma) d\sigma + \int K_{\varphi\varphi}(s, \sigma) p_\varphi(\sigma) d\sigma \equiv 0,$$

и мы получаем следующую систему однородных интегродифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u(s, t) - \int N(\sigma, t) \frac{\partial K_{rr}(s, \sigma)}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial u(\sigma, t)}{\partial \sigma} + \frac{v(\sigma, t)}{r(\sigma)} \right] d\sigma + \\ + \int K_{rr}(s, \sigma) m(\sigma) \frac{\partial^2 u(\sigma, t)}{\partial t^2} d\sigma + \\ + \int K_{r\varphi}(s, \sigma) m(\sigma) \frac{\partial^2 v(\sigma, t)}{\partial t^2} d\sigma = 0, \\ v(s, t) - \int N(\sigma, t) \frac{\partial K_{\varphi r}(s, \sigma)}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial u(\sigma, t)}{\partial \sigma} + \frac{v(\sigma, t)}{r(\sigma)} \right] d\sigma + \\ + \int K_{\varphi r}(s, \sigma) m(\sigma) \frac{\partial^2 u(\sigma, t)}{\partial t^2} d\sigma + \\ + \int K_{\varphi\varphi}(s, \sigma) m(\sigma) \frac{\partial^2 v(\sigma, t)}{\partial t^2} d\sigma = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.12)$$

Уравнения (18.12) не являются линейно независимыми: легко видеть, что одно получается из другого почленным дифференцированием. Однако для дальнейших выводов удобнее все же рассматривать совокупность обоих уравнений.

2. Остановимся на частном случае уравнений (18.12) — на интегральных уравнениях собственных колебаний арки

$$\left. \begin{aligned} u(s) - \omega^2 \int m(\sigma) K_{rr}(s, \sigma) u(\sigma) d\sigma - \\ - \omega^2 \int m(\sigma) K_{r\varphi}(s, \sigma) v(\sigma) d\sigma = 0, \\ v(s) - \omega^2 \int m(\sigma) K_{\varphi r}(s, \sigma) u(\sigma) d\sigma - \\ - \omega^2 \int m(\sigma) K_{\varphi\varphi}(s, \sigma) v(\sigma) d\sigma = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.13)$$

¹⁾ Обжатием оси арки и продольными колебаниями пренебрегаем.

Эти уравнения можно объединить в одном уравнении

$$\psi(s) - \omega^2 \int_{L_1+L_2} K(s, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma = 0,$$

если условно считать область интегрирования состоящей из двух областей L_1 и L_2 , каждая из которых совпадает с областью интегрирования в (18.13). Фундаментальные функции и ядро этого нового уравнения определяются следующим образом:

$$\psi(s) = \begin{cases} \sqrt{m(s)} u(s) & (s \in L_1), \\ \sqrt{m(s)} v(s) & (s \in L_2); \end{cases}$$

$$K(s, \sigma) = \begin{cases} \sqrt{m(s)m(\sigma)} K_{rr}(s, \sigma) & (s \in L_1, \sigma \in L_1), \\ \sqrt{m(s)m(\sigma)} K_{r\varphi}(s, \sigma) & (s \in L_1, \sigma \in L_2), \\ \sqrt{m(s)m(\sigma)} K_{\varphi r}(s, \sigma) & (s \in L_2, \sigma \in L_1), \\ \sqrt{m(s)m(\sigma)} K_{\varphi\varphi}(s, \sigma) & (s \in L_2, \sigma \in L_2). \end{cases}$$

Поскольку образованное таким образом ядро $K(s, \sigma)$ является симметричным, фундаментальные функции удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{L_1+L_2} \psi_i \psi_k ds = \delta_{ik}.$$

Возвращаясь к исходным уравнениям, получаем:

$$\int mu_i u_k ds + \int mv_i v_k ds = \delta_{ik}. \quad (18.14)$$

Условие (18.14) допускает простое механическое истолкование. Оно означает, что работа сил инерции, возникающих при колебаниях по какой-либо форме собственных колебаний, на перемещениях, соответствующих остальным формам колебаний, равна нулю¹⁾. От аналогичного условия (12.21) оно отличается наличием члена, учитывающего работу тангенциальных сил инерции.

Далее, из рассмотрения потенциальной энергии деформации арки следует, что ядро $K(s, \sigma)$ является определенно

¹⁾ Условие (18.14) может быть получено, конечно, и непосредственно из уравнений (18.13), если рассмотреть два решения, соответствующие различным фундаментальным числам.

положительным и удовлетворяет, таким образом, условиям теоремы Мерсера. Поэтому оно может быть разложено в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по своим фундаментальным функциям

$$K(s, \sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(s) \psi_k(\sigma)}{\omega_k^2}.$$

Возвращаясь к исходным ядрам, получаем важные для приложений формулы

$$\left. \begin{aligned} K_{rr}(s, \sigma) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(s) u_k(\sigma)}{\omega_k^2}, & K_{r\varphi}(s, \sigma) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(s) v_k(\sigma)}{\omega_k^2}, \\ K_{\varphi r}(s, \sigma) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(s) u_k(\sigma)}{\omega_k^2}, & K_{\varphi\varphi}(s, \sigma) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(s) v_k(\sigma)}{\omega_k^2}. \end{aligned} \right\} (18.15)$$

Эти формулы позволяют выразить функции влияния прогибов через фундаментальные функции задачи собственных колебаний.

3. Переходим к другому частному случаю — к уравнениям статической устойчивости

$$\left. \begin{aligned} u(s) - \alpha \int N_0(\sigma) \frac{\partial K_{rr}(s, \sigma)}{\partial \sigma} \left[\frac{du(\sigma)}{d\sigma} + \frac{v(\sigma)}{r(\sigma)} \right] d\sigma &= 0, \\ v(s) - \alpha \int N_0(\sigma) \frac{\partial K_{\varphi r}(s, \sigma)}{\partial \sigma} \left[\frac{du(\sigma)}{d\sigma} + \frac{v(\sigma)}{r(\sigma)} \right] d\sigma &= 0. \end{aligned} \right\} (18.16)$$

Дифференцируя первое уравнение почленно по s , деля второе на $r(s)$ и складывая результаты, получим следующее интегральное уравнение:

$$\psi(s) - \alpha \int S(s, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma = 0. \quad (18.17)$$

Неизвестным в уравнении (18.17) является величина $\frac{du}{ds} + \frac{v}{r}$ (угол поворота касательной к оси арки), а ядро имеет вид

$$S(s, \sigma) = N_0(\sigma) \left[\frac{\partial^2 K_{rr}(s, \sigma)}{\partial s \partial \sigma} + \frac{1}{r(s)} \frac{\partial K_{\varphi r}(s, \sigma)}{\partial \sigma} \right].$$

Ядро $S(s, \sigma)$ симметричным, вообще говоря, не является. Этот результат легко объяснить, если вспомнить, что

рассматривается случай поворачивающейся нагрузки. Вообще говоря, ядра интегральных уравнений для таких задач не будут симметричными, а операторы дифференциальных уравнений не будут самосопряженными. Как мы видели уже ранее (§ 72), задача о статической устойчивости может иметь в подобных случаях комплексные собственные значения.

Для фактического решения удобнее все же исходить не из интегрального уравнения (18.17), а из интегро-дифференциальных уравнений (18.16).

Допустим, что задача собственных колебаний арки решена, т. е. известна система фундаментальных функций $u_k(s)$, $v_k(s)$ и соответствующих фундаментальных чисел ω_k^2 . На основании формул (18.15) решение задачи статической устойчивости можно искать в виде рядов

$$u(s) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(s),$$

$$v(s) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k(s).$$

Принято, что фундаментальные функции составляют ортонормированную систему

$$\int m u_k^2 ds + \int m v_k^2 ds = 1.$$

Подставив эти ряды в одно из уравнений (18.16) и воспользовавшись разложениями (18.15), получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i u_i(s) - \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\omega_i^2} u_i(s) \int N_0(\sigma) \frac{du_i}{d\sigma} \left(\frac{du_k}{d\sigma} + \frac{v_k}{r} \right) d\sigma = 0.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых $u_i(s)$; в результате приходим к следующей системе однородных алгебраических уравнений:

$$f_i - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где

$$a_{ik} = \frac{1}{\omega_i^2} \int N_0(\sigma) \frac{du_i}{d\sigma} \left(\frac{du_k}{d\sigma} + \frac{v_k}{r} \right) d\sigma, \quad (18.18)$$

Уравнение критических параметров имеет вид

$$|E - \alpha A| = 0,$$

где A — матрица, составленная из коэффициентов (18.18).

4. Аналогичным путем ищется решение интегро-дифференциальных уравнений динамической устойчивости. Полагая

$$N(s, t) = \alpha N_0(s) + \beta \Phi(t) N_t(s),$$

ищем решения уравнений (18.12) в виде

$$u(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) u_k(s),$$

$$v(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) v_k(s).$$

Подстановка приводит к следующим системам обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f_k(t)$:

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \omega_i^2 \left[f_i - \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_{ik} + \beta \Phi(t) b_{ik}) f_k \right] = 0 \quad (18.19)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots),$$

где в дополнение к (18.18) введено обозначение

$$b_{ik} = \frac{1}{\omega_i^2} \int N_t(\sigma) \frac{du_i}{d\sigma} \left(\frac{du_k}{d\sigma} + \frac{v_k}{r} \right) d\sigma.$$

Легко видеть, что полученные уравнения отличаются от уравнений динамической устойчивости прямолинейных стержней (13.8) только способом вычисления коэффициентов.

Аналогия с прямолинейными стержнями станет еще более явной, если рассмотреть случай достаточно пологих арок, для которых можно пренебречь влиянием тангенциальной составляющей нагрузки. В этом случае интегральные уравнения собственных колебаний и статической устойчивости принимают вид

$$u(s) - \omega^2 \int m(\sigma) K_{rr}(s, \sigma) u(\sigma) d\sigma = 0,$$

$$\frac{du(s)}{ds} - \alpha \int N_0(\sigma) \frac{\partial^2 K_{rr}(s, \sigma)}{\partial s \partial \sigma} \frac{du(\sigma)}{d\sigma} d\sigma = 0.$$

Соответственно формула (18.18) примет вид

$$a_{ik} = \frac{1}{\omega_i^2} \int N_0(\tau) \frac{du_i}{d\tau} \frac{du_k}{d\tau} d\tau.$$

Полученные уравнения отличаются от соответствующих уравнений в теории прямолинейных стержней только тем, что роль поперечных прогибов в них играют радиальные перемещения. Но для пологих арок радиальное перемещение без большой погрешности может быть заменено вертикальным перемещением. Мы приходим, таким образом, к формулировке «принципа спрямления»¹⁾.

5. Выше был рассмотрен случай следящей нагрузки; в случае нагрузки неизменного направления имеем:

$$\Delta q_r = - \frac{\partial}{\partial s} \left[N(s, t) \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{v}{r} \right) \right],$$

$$\Delta q_\varphi = - \frac{N(s, t)}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{v}{r} \right).$$

Не останавливаясь на деталях вывода, который в основном аналогичен предыдущему, укажем, что ядро уравнения статической устойчивости в этом случае

$$S(s, \sigma) = N_0(\sigma) \left[\frac{\partial^2 K_{rr}(s, \sigma)}{\partial s \partial \sigma} + \frac{1}{r(s)} \frac{\partial K_{r\varphi}(s, \sigma)}{\partial \sigma} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r(\sigma)} \frac{\partial K_{r\varphi}(s, \sigma)}{\partial s} + \frac{1}{r(s)r(\sigma)} K_{\varphi\varphi}(s, \sigma) \right],$$

а матричные элементы a_{ik} определяются по формуле

$$a_{ik} = \frac{1}{\omega_i^2} \int N_0(\tau) \left(\frac{du_i}{d\tau} + \frac{v_i}{r} \right) \left(\frac{du_k}{d\tau} + \frac{v_k}{r} \right) d\tau. \quad (18.20)$$

Легко заметить, что ядро $S(s, \sigma)$ с точностью до «веса» $N_0(\tau)$ — симметричное.

Выведенные выше уравнения решают задачу о динамической устойчивости центрально сжатых арок с любыми опорными закреплениями и любым законом изменения жесткости по длине. Они могут быть получены также из общих уравнений главы XII. Для этого нужно арифметизировать

¹⁾ См., например, Штаерман И. Я., Сборн. «Стойкость арок», Киев, 1936 (укр.).

плоскость, введя сетку ортогональных координат, включающих ось арки. Ковариантное дифференцирование вдоль оси арки определяется следующим образом:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{v}{r},$$

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial \sigma} - \frac{u}{r}$$

(радиальное перемещение считается положительным, когда направлено к центру кривизны). Тогда, например, формула (18.20) получается из формулы (13.37), если учесть, что заданное напряженное состояние — одномерное, а потеря устойчивости описывается двумя функциями u и v , правило дифференцирования которых дано выше.

§ 79. Динамическая устойчивость сжато-изогнутых арок. Постановка задачи

При действии на арку симметричной вибрационной нагрузки возникают симметричные вынужденные колебания (фиг. 114, а), которые происходят с частотой возмущающей нагрузки. Резонанс наступает при совпадении возмущающей частоты с одной из собственных частот, соответствующих симметричным формам колебаний. Наряду с обычным резонансом может иметь место также и параметрический резонанс; он принимает особенно опасный характер, когда связан с возникновением нового вида деформации — кососимметричной деформации (фиг. 114, б). Задача о динамической устойчивости симметричной формы колебаний арок была поставлена в работах автора ¹⁾.



Фиг. 114.

Исследование динамической устойчивости сжато-изогнутых арок сильно осложняется из-за того, что исходным состоянием арки является симметричная форма движения. Для

¹⁾ Болотин В. В., Докл. АН СССР 84, № 4 (1952); Инж. сборн. 14 (1953).

того чтобы упростить задачу, будем считать, что потеря устойчивости происходит из недеформированного состояния. Это допущение вносит в конечные результаты некоторую погрешность. При исследовании соответствующей статической задачи подобное допущение нельзя считать обоснованным ввиду больших симметричных деформаций, предшествующих потере устойчивости. Напротив, потеря динамической устойчивости может произойти при значениях нагрузки, весьма малых по сравнению с критическими, и соответственно при малых симметричных деформациях. Достаточно предположить, что симметричные колебания происходят вдалеке от резонанса.

Уравнения колебаний сжато-изогнутых арок

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + \omega_i^2 \left[f_i - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k - \beta \Phi(t) \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} f_k \right] = F_i(t) \quad (18.21)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots)$$

отличаются от уравнений (18.19) наличием дополнительных членов в правых частях и способом вычисления коэффициентов a_{ik} , b_{ik} . Члены в правых частях определяются по формулам

$$F_i(t) = \int u_i(s) p_r(s, t) ds + \int v_i(s) p_\varphi(s, t) ds$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots).$$

Коэффициенты a_{ik} , b_{ik} зависят от очертания оси арки и кривой давления, общие выражения для них получить затруднительно.

Если арка симметрична, то фундаментальные функции задачи собственных колебаний распадаются на две группы. Первая группа

$$u_1, u_3, u_5, \dots, u_{2j-1}, \dots,$$

$$v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2j-1}, \dots$$

соответствует кососимметричным колебаниям

$$u_{2j-1}(-s) = -u_{2j-1}(s),$$

$$v_{2j-1}(-s) = v_{2j-1}(s)$$

(начало отсчета дуги s взято на оси симметрии), вторая группа фундаментальных функций

$$u_2, u_4, u_6, \dots, u_{2j}, \dots,$$

$$v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2j}, \dots$$

— симметричным колебаниям

$$u_{2j}(-s) = u_{2j}(s),$$

$$v_{2j}(-s) = -v_{2j}(s).$$

Если теперь в соответствии со сделанным допущением пренебречь взаимным влиянием симметричных и кососимметричных колебаний, то система (18.21) распадается на две независимые системы уравнений.

Пусть действующая на арку нагрузка симметрична

$$q_r(-s, t) = q_r(s, t),$$

$$q_\varphi(-s, t) = -q_\varphi(s, t).$$

Тогда, очевидно, одна из этих систем (соответствующая кососимметричным колебаниям) оказывается однородной

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + \omega_i^2 \left[f_i - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k - \beta \Phi(t) \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} f_k \right] = 0 \quad (18.22)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots).$$

Это — обычные уравнения динамической устойчивости, рассмотренные ранее. Они описывают поведение кососимметричных возмущений во времени. Если решения системы затухают, то симметричная форма колебаний устойчива. Неограниченно возрастающие решения системы (18.22) соответствуют потере динамической устойчивости симметричной формы арки.

§ 80. Круговая двухшарнирная арка ¹⁾

1. В качестве примера рассмотрим задачу о динамической устойчивости симметричной формы колебаний двухшарнирной круговой арки (фиг. 115). Будем исходить из

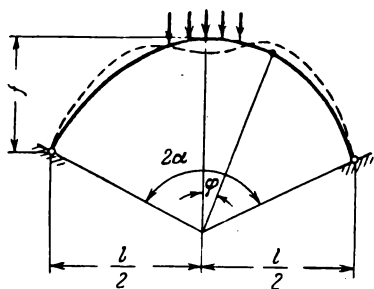
¹⁾ Задача решена в работах автора (цит. на стр. 441).

дифференциального уравнения

$$\frac{EJ}{R^4} \left(\frac{d^5 u}{d\tau^5} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3} + \frac{du}{d\varphi} \right) = \frac{dq_r}{d\varphi} - q_\varphi, \quad (18.23)$$

где сохранены обозначения § 76.

Для получения уравнений возмущенного движения следует ввести в уравнение (18.23) силы инерции и дополнительные силы, возникающие при отклонении оси арки от начального положения.



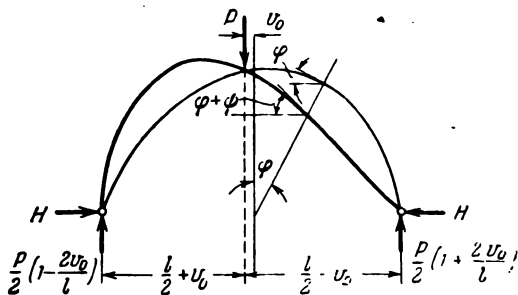
Фиг. 115.

Начнем с вычисления последних, принимая, как и в § 79, что потеря динамической устойчивости происходит из недеформированного состояния арки. Оценку возникающей при этом погрешности мы дадим несколько позднее.

Допустим, что арка загружена приложенной в замке сосредоточенной силой

$$P(t) = P_0 + P_t \cos \Omega t.$$

Дополнительную нагрузку Δq_r и Δq_φ можно определить в этом случае на основании следующих соображений. Обо-



Фиг. 116.

значив приращение угла поворота сечений арки вследствие изгиба через ψ (фиг. 116), а касательное перемещение зам-

кового сечения — через v_0 (на чертеже $v_0 < 0$), получим выражение для поперечной силы

$$Q = H \sin(\varphi + \psi) \mp \frac{1}{2} P \left(1 \pm \frac{2v_0}{l} \right) \cos(\varphi + \psi).$$

Здесь, как и ниже, верхний знак берется при $\varphi > 0$, нижний — при $\varphi < 0$. Изменение распора является величиной второго порядка малости и потому не учитывается.

Приращение поперечной силы с точностью до малых величин первого порядка составляет:

$$\Delta Q = \frac{1}{2} \psi P (\lambda \cos \varphi \pm \sin \varphi) - \frac{Pv_0}{l} \cos \varphi, \quad (18.24)$$

где обозначено:

$$\lambda = \frac{2H}{P}.$$

Но из уравнений Кирхгофа

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{ds} + \frac{N}{R} + q_r &= 0, \\ \frac{dN}{ds} - \frac{Q}{R} + q_\varphi &= 0 \end{aligned}$$

следует, что

$$\frac{\partial \Delta q_r}{\partial \varphi} - \Delta q_\varphi = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \Delta Q}{\partial \varphi^2} + \Delta Q \right).$$

Подстановка дает (при $\varphi > 0$):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta q_r}{\partial \varphi} - \Delta q_\varphi = \\ & = -\frac{P}{2R} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} (\sin \varphi + \lambda \cos \varphi) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} (\cos \varphi - \lambda \sin \varphi) \right]. \quad (18.25) \end{aligned}$$

Заметим, что член, учитывающий изменение опорных реакций, после подстановки дал тождественный нуль. Для левой половины арки ($\varphi < 0$) соответственно получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta q_r}{\partial \varphi} - \Delta q_\varphi = \\ & = -\frac{P}{2R} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} (\lambda \cos \varphi - \sin \varphi) - 2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} (\cos \varphi + \lambda \sin \varphi) \right]. \quad (18.26) \end{aligned}$$

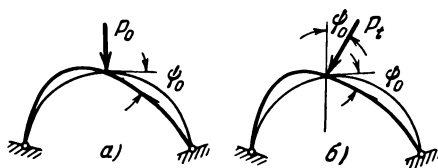
Выражения (18.25) и (18.26) остаются справедливыми всюду, за исключением точки приложения сосредоточенной силы. Действительно,

$$\left. \frac{\partial \Delta Q}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=+0} = \frac{1}{2} \psi_0 P, \quad \left. \frac{\partial \Delta Q}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=-0} = -\frac{1}{2} \psi_0 P,$$

где ψ_0 — угол поворота замкового сечения. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left(\frac{\partial \Delta q_r}{\partial \varphi} - \Delta q_r \right) d\varphi = -\frac{\psi_0 P}{R}. \quad (18.27)$$

Происхождение разрыва в точке $\varphi = 0$ очевидно: он происходит вследствие того, что сила P дает проекцию на направление касательной к оси арки (фиг. 117, а). Если же



Фиг. 117.

сила P поворачивается вместе с замковым сечением, оставаясь перпендикулярной к оси арки (фиг. 117, б), то выражения (18.25) и (18.26) справедливы на протяжении всей длины арки.

Приращение поперечной силы для этого случая отличается от (18.24) дополнительными членами

$$\Delta Q^* = \frac{1}{2} \psi_0 P \left(\frac{2f}{l} \cos \varphi \mp \sin \varphi \right),$$

но выражение

$$\frac{\partial \Delta q_r^*}{\partial \varphi} - \Delta q_r^* = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \Delta Q^*}{\partial \varphi^2} + \Delta Q^* \right)$$

обращается тождественно в нуль во всех точках, кроме $\varphi = 0$, где имеет место разрыв, противоположный (18.27).

В практических задачах постоянная составляющая P_0 обычно не меняет своего направления (сила веса), а периодическая составляющая P_t поворачивается вместе с соответ-

ствующим сечением. В дальнейшем мы рассмотрим именно этот случай. Тогда при $\varphi > 0$ имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta q_r}{\partial \varphi} - \Delta q_\varphi = \\ = & - \frac{P_0 + P_t \cos \theta t}{2R} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} (\sin \varphi + \lambda \cos \varphi) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} (\cos \varphi - \lambda \sin \varphi) \right]. \end{aligned}$$

При $\varphi < 0$ получаем соответственно:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta q_r}{\partial \varphi} - \Delta q_\varphi = \\ = & - \frac{P_0 + P_t \cos \theta t}{2R} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} (\lambda \cos \varphi - \sin \varphi) - 2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} (\cos \varphi + \lambda \sin \varphi) \right]. \end{aligned}$$

При этом

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \left(\frac{\partial \Delta q_r}{\partial \varphi} - \Delta q_\varphi \right) d\varphi = - \frac{\psi_0 P_0}{R}.$$

2. Введя в уравнение (18.23) нагрузку и силы инерции, получим:

$$\frac{EJ}{R^4} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial \varphi^5} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \Delta q_r}{\partial \varphi} - \Delta q_\varphi. \quad (18.28)$$

Здесь $m(\varphi)$ — отнесенная к единице длины масса арки, которая, вообще говоря, является величиной переменной.

Точное решение уравнения (18.28) затруднительно, поэтому будем искать приближенное решение, пользуясь методом Галеркина. Считая ось арки несжимаемой, положим:

$$\begin{aligned} u(\varphi, t) &= f(t) \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha}, \\ v(\varphi, t) &= - \frac{\alpha}{\pi} f(t) \left(1 + \cos \frac{\pi \varphi}{\alpha} \right), \end{aligned}$$

где $f(t)$ — не известная пока функция времени. Подстановка дает:

$$\frac{EJ}{R^4} \frac{\pi}{\alpha} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right)^2 f(t) I_1(\alpha) + \frac{\alpha}{\pi} \frac{d^2 f}{dt^2} I_2(\alpha) = I_3(\alpha). \quad (18.29)$$

Здесь в левой части

$$I_1(\alpha) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \frac{\pi\varphi}{\alpha} \left(1 + \cos \frac{\pi\varphi}{\alpha}\right) d\varphi = \alpha,$$

$$I_2(\alpha) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} m(\varphi) \left[\frac{\pi^2}{\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi\varphi}{\alpha} + \left(1 + \cos \frac{\pi\varphi}{\alpha}\right)^2 \right] d\varphi = \\ = \alpha \left[\frac{4M}{R\alpha} + m \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} + 3 \right) \right].$$

При вычислении второго интеграла принято, что, кроме равномерно распределенной массы m , арка несет еще сосредоточенную в замке массу M . Подставив вместо угла ψ его выражение через u и v и произведя вычисления, найдем:

$$I_3(\alpha) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(\frac{\partial \Delta q_r}{\partial \varphi} - \Delta q_\varphi \right) \left(1 + \cos \frac{\pi\varphi}{\alpha}\right) d\varphi = \\ = \frac{\pi f(t)}{R^2 \alpha} (P_0 + P_t \cos t) \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) F(\alpha) - \frac{2\pi P_0 f(t)}{R^2 \alpha} \left(1 - \frac{2\alpha^2}{\pi^2} \right),$$

где обозначено:

$$F(\alpha) = \frac{(1 - \cos \alpha + \lambda \sin \alpha) \left(\frac{2\pi^2}{\alpha^2} + 1 \right)}{\frac{4\pi^2}{\alpha^2} - 1} + \frac{1 - \cos \alpha - \lambda \sin \alpha}{\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1}. \quad (18.30)$$

В формулу (18.30) входит величина

$$\lambda = \left(\int_0^\alpha x y d\varphi \right) : \left(\int_0^\alpha y^2 d\varphi \right),$$

где x и y — декартовы координаты оси арки. Вычисления дают:

$$\lambda = \frac{4 \cos \alpha - 3 \cos 2\alpha - 2\alpha \sin 2\alpha - 1}{4\alpha + 2\alpha \cos 2\alpha - 3 \sin 2\alpha}.$$

Для достаточно пологих арок ($\alpha < \frac{1}{6} \pi$) можно пользоваться приближенной формулой

$$\lambda = \frac{15}{8} \frac{\sin \alpha}{\alpha^2}.$$

Эти выводы остаются справедливыми также в случае трехшарнирной арки, для которой следует положить $\lambda = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \alpha$. Введем обозначения

$$\frac{\pi}{R^2 \alpha} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \sqrt{\frac{EJ}{\frac{4M}{R\alpha} + m \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} + 3 \right)}} = \omega, \quad (18.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{EJ}{R^2} \frac{\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \alpha}{2 \left(1 - \frac{2\alpha^2}{\pi^2} \right)} &= P_*, \\ F(\alpha) - \frac{\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1}{\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1} & \\ \frac{EJ}{R^2} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \frac{\alpha}{F(\alpha)} &= P_{t*}. \end{aligned} \right\} \quad (18.32)$$

Формула (18.31) дает выражение для низшей частоты собственных кососимметричных колебаний арки, формулы (18.32) — выражения для критических сил, вычисленных в предположении, что потеря статической устойчивости происходит при весьма малых симметричных деформациях. Случай «следящей» нагрузки дает более низкое значение критического параметра, что можно было предугадать из механических соображений (фиг. 117).

Используя введенные обозначения, перепишем выражение (18.29) в виде

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_*} - \frac{P_t}{P_{t*}} \cos \theta t \right) f = 0. \quad (18.33)$$

Это — обычное уравнение первого приближения (уравнение Матье), которое подробно было рассмотрено ранее.

3. Для того чтобы оценить влияние симметричных колебаний на динамическую устойчивость, поступим следующим образом. Приближенное уравнение симметричных вынужденных колебаний получим, аппроксимируя форму колебаний какой-либо подходящей функцией и применяя вариационный метод. Пусть M_s — приведенная к замку масса арки, $u_0(t)$ — вертикальное перемещение замка и ω_s — частота основного тона симметричных колебаний. Тогда симметрич-

ные колебания описываются в первом приближении уравнением

$$u_0'' + \omega_s^2 u_0 = \frac{1}{M_s} (P_0 + P_t \cos \theta t),$$

установившееся решение которого, очевидно,

$$u_0 = \frac{1}{M_s \omega_s^2} \left(P_0 + \frac{P_t \cos \theta t}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_s^2}} \right).$$

Влияние симметричных колебаний учтем, введя вместо статической нагрузки $P_0 + P_t \cos \theta t$ динамическую нагрузку

$$P_0 + P_t \cos \theta t - M_s w'' = P_0 + \frac{P_t \cos \theta t}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_s^2}}.$$

Уравнение (18.33) примет вид

$$f'' + \omega^2 \left[1 - \frac{P_0}{P_*} - \frac{P_t \cos \theta t}{P_{t*} \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_s^2} \right)} \right] f = 0. \quad (18.34)$$

Такой способ рассмотрения тесно связан с содержанием главы VIII, где учитывалось влияние продольных колебаний на динамическую устойчивость сжатых стержней. Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_*} \right) &= \Omega^2, \\ \frac{P_t}{P_{t*} \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_s^2} \right)} &= 2\mu, \\ \frac{\theta}{2\Omega} = n, \quad \frac{4\Omega^2}{\omega_s^2} &= \beta. \end{aligned} \right\} \quad (18.35)$$

Тогда в полном соответствии с § 30 получим уравнение

$$f'' + \Omega^2 \left(1 - \frac{2\mu}{1 - \beta n^2} \cos \theta t \right) f = 0.$$

Границы главных областей неустойчивости согласно (8.13) определяются по формуле

$$n_*^2 = \frac{1 + \beta \pm \sqrt{(1 - \beta)^2 \mp 4\mu\beta}}{2\beta}. \quad (18.36)$$

Мы получили, таким образом, две главные области неустойчивости: одну, которая лежит вблизи частоты 2Ω , вторую — лежащую вблизи резонанса симметричных вынужденных колебаний.

В отличие от задачи, рассмотренной в главе VIII, здесь нельзя принять $\beta \ll 1$, так как собственные частоты Ω и ω_s могут быть величинами одного порядка. Числовой пример будет дан несколько ниже в связи с обсуждением экспериментальных результатов.

§ 81. Нелинейная задача динамической устойчивости арок

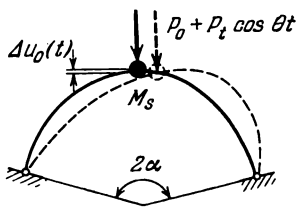
1. Только что рассмотренную задачу мы решим теперь в нелинейной постановке. Кососимметричная деформация арки сопровождается симметричной деформацией, измеряемой величинами второго порядка малости. Силы инерции и силы упругости, возникающие на этих перемещениях, зависят нелинейно от кососимметричной компоненты. Эти нелинейные силы являются основным фактором, ограничивающим нарастание амплитуд кососимметричных колебаний.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда вся масса арки сосредоточена в замке (фиг. 118).

Нам нужно вычислить сейчас вертикальное перемещение замка, связанное с кососимметричной деформацией. Вместо того, чтобы определять величину симметричной составляющей из геометрических соображений, поступим следующим образом.

Как известно, критическую величину статической нагрузки можно определить, приравняв ее работу на перемещениях при потере устойчивости приращению энергии деформации. Обозначив через Δu_0 вертикальную составляющую перемещения замкового сечения, а через ΔU — приращение энергии деформации при потере устойчивости, можно написать:

$$\Delta u_0 = \frac{\Delta U}{P_*}.$$



Фиг. 118.

Приращение потенциальной энергии может быть подсчитано по формуле

$$\Delta U = \frac{EJ}{2R^3} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u \right)^2 d\varphi.$$

Положив

$$u(\varphi, t) = f(t) \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha},$$

найдем, что

$$\Delta U = \frac{EJ\alpha f^2(t)}{2R^3} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right)^2.$$

Критическая статическая сила была вычислена нами ранее (18.32):

$$P_* = \frac{EJ}{R^2} \frac{\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \alpha}{2 \left(1 - \frac{2\alpha^2}{\pi^2} \right) F(\alpha) - \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1}.$$

Подставляя, находим:

$$\Delta u_0 = \frac{f^2}{2R} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) F_1(\alpha), \quad (18.37)$$

где

$$F_1(\alpha) = F(\alpha) - \frac{2 \left(1 - \frac{2\alpha^2}{\pi^2} \right)}{\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1}.$$

Итак, как и следовало ожидать, вертикальное перемещение замкового сечения Δu_0 является величиной второго порядка малости по сравнению с f .

Влияние нелинейных факторов можно приближенно учесть, если ввести сосредоточенную вертикальную силу

$$\Delta P = -M_s \Delta u_0''.$$

Здесь M_s — масса арки, приведенная к замковому сечению. Добавляя силу ΔP в уравнение (18.33), получаем:

$$f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{P_0 - M_s \Delta u_0''}{P_*} - \frac{P_t}{P_{t*}} \cos \theta t \right) f = 0.$$

Но согласно (18.37)

$$\Delta u_0'' = \frac{(f')^2 + f''f}{R} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) F_1(\alpha),$$

поэтому уравнение принимает вид

$$f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_*} - \frac{P_t}{P_{t*}} \cos^2 t \right) f + 2\chi f [(f')^2 + f''f] = 0. \quad (18.38)$$

Коэффициент нелинейной инерционности будет:

$$\chi = \frac{M_g \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) F_1(\alpha) \omega^2}{2P_* R}. \quad (18.39)$$

Уравнение (18.38) совпадает с обстоятельно изученным уравнением (§ 19).

2. Попробуем вычислить теперь приведенную массу M_g . Для трехшарнирной арки симметричную компоненту перемещений можно аппроксимировать при помощи выражений

$$\Delta u(\varphi, t) = \Delta u_0(t) \left(1 - \frac{\varphi}{\alpha} - \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi\varphi}{\alpha} \right), \quad (\varphi > 0)$$

$$\Delta v(\varphi, t) = \Delta u_0(t) \left(\varphi - \frac{\varphi^2}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\pi\varphi}{2\alpha} \right).$$

Вторая формула получена из первой при использовании условия несжимаемости $u - \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0$. Легко убедиться, что эти выражения удовлетворяют геометрическим граничным условиям

$$\Delta u(0, t) = \Delta u_0(t),$$

$$\Delta u(\alpha, t) = \Delta v(0, t) = \Delta v(\alpha, t) = 0.$$

На перемещениях Δu и Δv возникает инерционная нагрузка

$$\left. \begin{aligned} \Delta q_r &= q \left(1 - \frac{\varphi}{\alpha} - \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi\varphi}{\alpha} \right), \\ \Delta q_\varphi &= q \left(\varphi - \frac{\varphi^2}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\pi\varphi}{2\alpha} \right), \end{aligned} \right\} \quad (18.40)$$

определенная с точностью до параметра

$$q = -m \Delta u_0''. \quad (18.41)$$

Здесь m — равномерно распределенная по длине масса арки. Подстановка выражений (18.40) в правую часть уравнения (18.28) дает после применения метода Галеркина тождественный нуль (работа симметричной нагрузки на кососимметричных перемещениях). Но нагрузка (18.40) должна войти также и в левую часть уравнения как параметр при неизвестном. Вычисление соответствующих членов составляет значительно более трудную задачу, чем та, которая описана в § 80. Окончательный результат, тем не менее, можно записать сразу. Пусть q_* — приближенное (в смысле первого приближения по методу Галеркина) критическое значение параметра q . Учет параметрической нагрузки (18.40) приводит тогда к уравнению

$$f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_*} - \frac{P_t}{P_{t*}} \cos \eta t - \frac{q}{q_*} \right) f = 0$$

или после подстановки (18.41) и (18.37)

$$f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_*} - \frac{P_t}{P_{t*}} \cos \eta t \right) f + 2\gamma_m f [(f')^2 + ff''] = 0.$$

В отличие от (18.38) здесь

$$\gamma_m = \frac{m \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) F_1(\alpha) \omega^2}{2q_* R}. \quad (18.42)$$

Однако трудности еще не преодолены, так как не известно критическое значение q_* . Для его определения поступим следующим образом.

Известно, что для одной и той же арки величина распора, при которой наступает потеря статической устойчивости симметричного изгиба, мало зависит от вида нагрузки. Это постоянство критического распора соблюдается тем точнее, чем положе арка. Можно принять:

$$q_* \bar{H}_q \approx P_* \bar{H}_p,$$

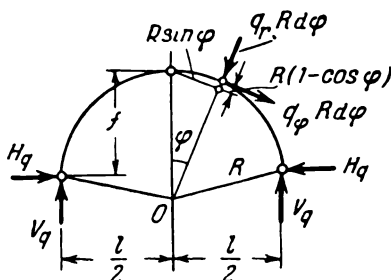
где \bar{H}_q и \bar{H}_p — распоры от соответствующих единичных воздействий. Тогда формула (18.42) принимает вид

$$\gamma_m = 2cmR\alpha \frac{\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) F_1(\alpha) \omega^2}{2P_* R}, \quad (18.43)$$

где

$$c = \frac{\overline{H}_q}{2R\alpha\overline{H}_p}. \quad (18.44)$$

Очевидно, что c — коэффициент приведения распределенной массы к замковому сечению.



Фиг. 119.

Переходим к вычислению распора (фиг. 119). Легко установить, что

$$fH_q = \frac{1}{2} V_q l - R^3 \int_0^{\alpha} [\Delta q_r \sin \varphi + \Delta q_\varphi (1 - \cos \varphi)] d\varphi,$$

где V_q — вертикальная составляющая опорной реакции. Учитывая далее, что для несжимаемой арки $\frac{\partial \Delta q_r}{\partial \varphi} - \Delta q_\varphi = 0$ и, следовательно,

$$\int_0^{\alpha} (\Delta q_r \cos \varphi + \Delta q_\varphi \sin \varphi) d\varphi = 2 \int_0^{\alpha} \Delta q_r \cos \varphi d\varphi,$$

$$\int_0^{\alpha} (\Delta q_r \sin \varphi - \Delta q_\varphi \cos \varphi) d\varphi = 2 \int_0^{\alpha} \Delta q_r \sin \varphi d\varphi,$$

находим:

$$H_q = 2R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \left[\int_0^{\alpha} \Delta q_r \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \right) d\varphi + \frac{1}{2 \sin \alpha} \int_0^{\alpha} \Delta q_\varphi d\varphi \right].$$

После вычисления квадратур получаем:

$$Hq = 2q R\alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \left[2 - \frac{\cos \alpha}{4} \left(4 + \frac{\pi^2}{\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1} \right) - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \left(1 - \frac{\alpha^2}{24} \right) \right].$$

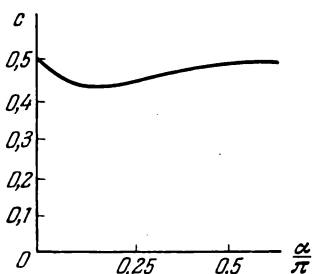
С другой стороны, распор от сосредоточенного груза P , приложенного в замке,

$$H_p = \frac{1}{2} P \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Подставив найденные выражения при $P = q = 1$ в формулу (18.44), получаем:

$$c = \frac{2}{\alpha^2} \left[2 - \frac{\cos \alpha}{4} \left(4 + \frac{\pi^2}{\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1} \right) - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \left(1 - \frac{\alpha^2}{24} \right) \right]. \quad (18.45)$$

Зависимость (18.45) изображена на фиг. 120. Как видно из графика, коэффициент c при изменении центрального угла в весьма широких пределах мало отличается от $c = 1/2$. Другими словами, влияние распределенной массы можно учесть, если ввести сосредоточенную в замке массу $M_0 = mR\alpha$.



Фиг. 120.

Этот результат на первый взгляд может показаться тривиальным. Но напомним, что принцип приведения здесь весьма сложен (влияние нелинейных сил инерции на кососимметричные колебания), и было бы рискованно априори делать какие-либо предположения.

3. Переходим к определению установившихся амплитуд. Как известно, для двухшарнирных не слишком пологих арок основная форма колебаний — кососимметричная. Собственные частоты этих двух форм обычно достаточно близки друг к другу; поэтому амплитуды кососимметричных колебаний следует определять с учетом влияния симметричной формы.

Основные уравнения и вытекающие из них результаты в общем аналогичны приведенным в § 31. Пусть $u(t)$ — вер-

тикальное перемещение замка вследствие симметричных колебаний. Тогда полное вертикальное перемещение

$$w = u + \frac{f^2}{2R} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) F_1(\alpha).$$

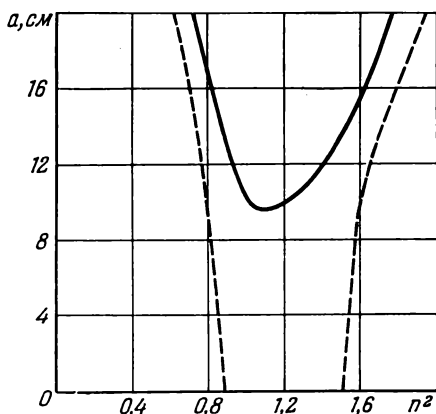
Уравнение вертикальных колебаний имеет вид

$$M_s w'' = P_c + P_t \cos \theta t - N,$$

где N — сила, передающаяся на арку. Очевидно, что $N = ku$ (k — некоторая постоянная). Второе уравнение будет:

$$f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{N}{P_*} \right) f = 0.$$

Здесь мы для простоты полагаем, что сила P_t своего напра-



Фиг. 121.

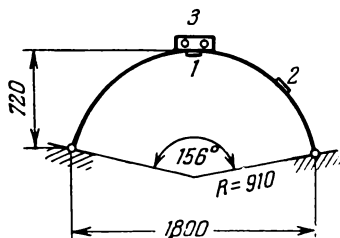
вления при колебаниях не меняет. Дальнейшие выкладки приводят к формуле (8.18)

$$a^2 = \frac{(1 - \beta n^2)(1 - n^2) \pm \mu}{\alpha n^2}, \quad (18.46)$$

где использованы обозначения (18.35) и (18.39). Резонансный график представлен на фиг. 121. Обсуждение результатов отложим до следующего параграфа.

§ 82. Экспериментальные результаты ¹⁾

1. Опыты по параметрическому возбуждению кососимметричных колебаний арок представляют особый интерес. Действительно, возможность возникновения таких колебаний под действием симметричной нагрузки отнюдь не является самоочевидной. Это делает результаты опытов особенно убедительным доказательством справедливости теории.



Фиг. 122.

Двухшарнирная круговая арка загружалась сосредоточенной периодической силой от вибратора 3, установленного в замке (фиг. 122). Запись колебаний производилась на шлейфовом осциллографе при помощи проволочных датчиков,

из которых 1 был наклеен в замке и позволял определить амплитуды симметричных колебаний; датчик 2 был наклеен вблизи четверти пролета.

Обработка осциллограмм свободных затухающих колебаний дала следующие результаты. Основная (кососимметричная) форма колебаний $\Omega = 24 \text{ сек}^{-1}$, $\Delta = 0,031$. Вторая (симметричная) форма колебаний $\omega_s = 55 \text{ сек}^{-1}$, $\Delta_s = 0,055$.

Ярко выраженных инерционных и прочих нелинейностей не обнаружено: собственные частоты и декременты затухания при изменении амплитуд в довольно широких пределах могут считаться постоянными.

При частоте 2Ω вибрационная машина развивала усилие с амплитудой $\bar{P}_t = 16,1 \text{ кг}$, постоянная составляющая $P_0 = 26 \text{ кг}$. Коэффициент возбуждения при частоте 2Ω

$$\bar{\mu} = \frac{\bar{P}_t}{2P_{t*} \left(1 - \frac{P_0}{P_*}\right)} = 0,053.$$

Критический коэффициент возбуждения согласно (2.14)

$$\mu_* = \frac{\Delta}{\pi} = 0,0099.$$

¹⁾ См. сноску на стр. 441.

Отношение

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_*} = 5,35 \gg 1,$$

поэтому влиянием затухания на границы главной области неустойчивости можно в первом приближении пренебречь. Вычислим сначала границы области неустойчивости без учета симметричных вынужденных колебаний

$$\theta_* \approx \frac{2\Omega}{\sqrt{1 \pm \bar{\mu}}}.$$

Подстановка дает:

$$46,7 \leq \theta \leq 49,3 \text{ (сек}^{-1}\text{)}.$$

На эти результаты следует смотреть как на самое грубое приближение. Действительно, для данной арки отношение

$$\beta = \frac{4\Omega^2}{\omega_g^2} = 0,762,$$

т. е. близко к единице. Формулу (18.36) непосредственно использовать нельзя, так как в экспериментальной установке амплитуда вибрационной нагрузки и, следовательно, коэффициенты возбуждения растут пропорционально квадрату возбуждающей частоты ($\mu = \bar{\mu}n^2$). Задача описывается уравнением (ср. § 80)

$$f'' + \Omega^2 \left(1 - \frac{2\bar{\mu}n^2}{1 - \beta n^2} \cos \theta t \right) f = 0,$$

главные области неустойчивости которого определяются из условия

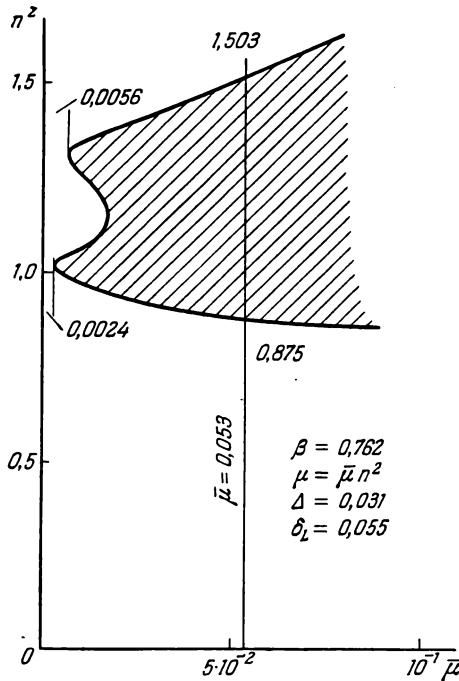
$$n^2 = 1 \pm \frac{\bar{\mu}n^2}{1 - \beta n^2}.$$

Таким образом, вместо формулы (18.36) получаем:

$$n_*^2 = \frac{1 + \beta \pm \bar{\mu} \pm \sqrt{(1 + \beta \pm \bar{\mu})^2 - 4\beta}}{2\beta}. \quad (18.47)$$

Верхний знак перед радикалом соответствует области неустойчивости, лежащей вблизи $n_*^2 = 1/\beta$, т. е. $\theta_* = \omega_g$, нижний — области, которая расположена около $n_*^2 = 1$ ($\theta_* = 2\Omega$).

Распределение областей неустойчивости на плоскости $(\bar{\mu}, n^2)$ изображено на фиг. 123¹⁾. Как видно из графика, обе области сливаются в одну уже при весьма малых значе-



Фиг. 123.

ниях $\bar{\mu}$. Это значение легко найдем, приравнявая нулю подкоренное выражение в (18.47):

$$(1 + \beta \pm \bar{\mu})^2 - 4\beta = 0,$$

откуда

$$\bar{\mu}_{**} = 1 + \beta - 2\sqrt{\beta}.$$

Вычисления дают $\bar{\mu}_{**} = 0,018$, что значительно меньше значения, принятого в экспериментальной установке.

1) Здесь учтено также затухание по формулам § 29.

По формуле (18.47) легко найдем границы области неустойчивости

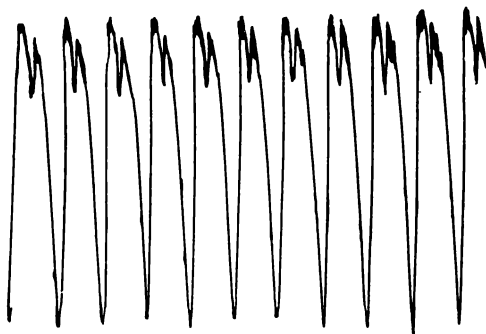
$$0,875 \leq n^2 \leq 1,503$$

или в пересчете на частоты ($\vartheta = 2n\Omega$)

$$45,0 \leq \vartheta \leq 59,2 \text{ сек}^{-1}.$$

Нижняя критическая частота довольно близка к вычисленной ранее, верхняя, естественно, оказывается значительно выше.

2. Переходим к описанию самого эксперимента. Опыт дал хорошее подтверждение теоретических результатов.



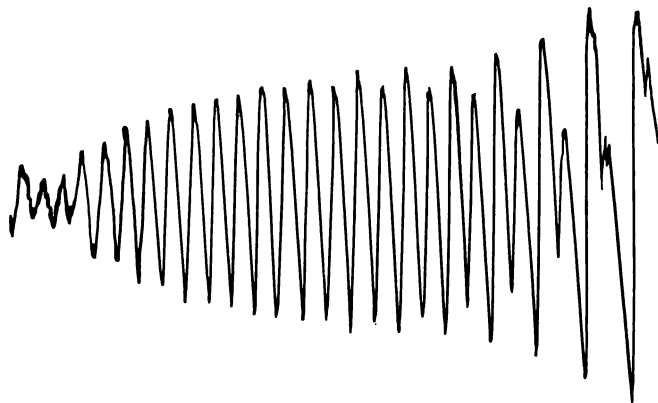
Фиг. 124.

Вблизи частот $\vartheta = 2\Omega$ были получены интенсивные кососимметричные колебания, происходящие с половинной частотой.

Типичная осциллограмма, записанная при помощи датчика 2, изображена на фиг. 124. Основные колебания большой амплитуды — это параметрически возбуждаемые колебания. Наряду с параметрическими колебаниями заметны также вынужденные симметричные колебания, частота которых совпадает с частотой нагрузки.

Нижняя граница области динамической неустойчивости обнаружена, как и предсказывает теория, вблизи частоты $\vartheta = 45 \text{ сек}^{-1}$. Верхнюю границу установить не удалось вследствие приближения к резонансу симметричных колебаний ($\vartheta = 55 \text{ сек}^{-1}$). Вообще с приближением к резонансу картина колебаний приобретает все более сложный, запутанный характер. Нарастание кососимметричных колебаний сменяется срывом, вслед за которым начинается нарастание колебаний симметричной формы.

Одна из осциллограмм приведена на фиг. 125. Левая часть осциллограммы представляет типичную картину установления обычных вынужденных колебаний: это — гармониче-



Фиг. 125.

ские колебания, модулированные функцией $1 - e^{-\alpha t}$. В дальнейшем вынужденные колебания вытесняются параметрическими колебаниями, период которых вдвое больше.

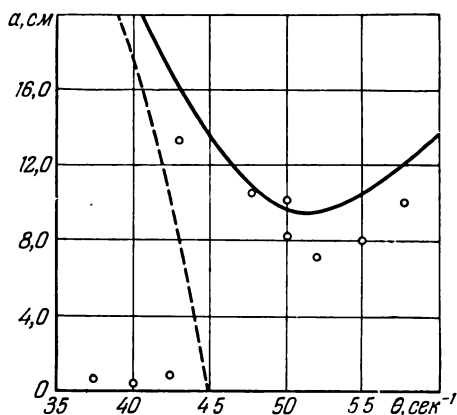
Зависимость амплитуды колебаний от возбуждающей частоты, полученная из нескольких опытов, дана на фиг. 126. Значительный разброс точек объясняется сложным, неустановившимся характером колебаний. Однако на графике отчетливо видно снижение амплитуд примерно на полпути между двумя резонансами и возрастание амплитуд при «затягивании» колебаний в сторону меньших частот. Вид резонансной кривой находится в полном согласии с теорией (§ 31).

3. Попробуем подсчитать величину установившихся амплитуд, пользуясь формулой (18.46). Полагая в ней $\mu = \bar{\nu} n^2$, получим:

$$a = \sqrt{\frac{(1 - \xi n^2)(1 - n^2) \pm \bar{\mu} n^2}{\chi n^2}}. \quad (18.48)$$

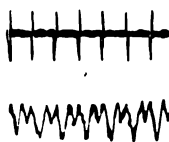
Коэффициент нелинейной инерционности по формуле (18.43) $\chi = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-2}$, откуда при $n^2 = 0,875$ (нижняя граница области возбуждения) получаем $a = 13,7 \text{ см}$. По порядку величины это близко к экспериментальному значению (фиг. 126).

Более строгая теория может быть построена, если рассматривать совместно симметричные и кососимметричные

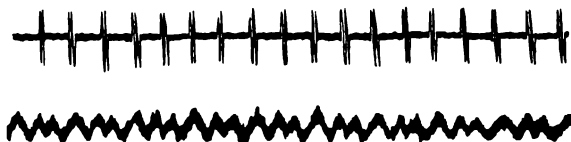


Фиг. 126.

колебания на основе нелинейных уравнений. Эта теория позволит обнаружить более тонкие эффекты, чем те, которые были описаны выше. На некоторые из них указывают данные опыта.



Фиг. 127.



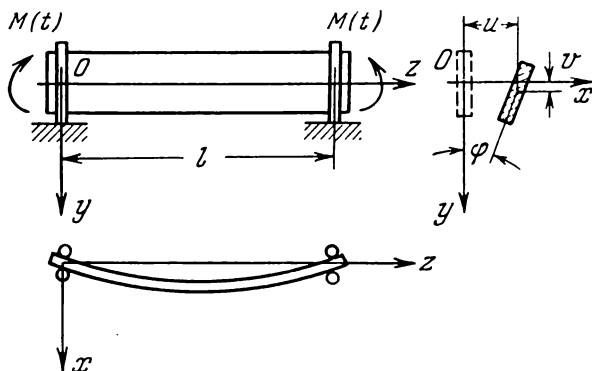
Фиг. 128.

На фиг. 127 представлена осциллограмма симметричных колебаний, полученная при чисто гармоническом возбуждении (верхняя осциллограмма получена при помощи отметчика времени, описанного в § 6). На осциллограмме ясно видны колебания, происходящие с удвоенной частотой. Их происхождение можно объяснить влиянием нелинейных (квадратичных) членов. Взаимодействие нелинейных членов второго и третьего порядка объясняет осциллограмму, приведенную на фиг. 128.

ГЛАВА ДЕВЯТНАДЦАТАЯ
ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ
ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА

§ 83. Постановка задачи.
Чистый изгиб узкой прямоугольной полосы ¹⁾

1. Периодическая нагрузка, действующая в плоскости наибольшей жесткости балки, возбуждает колебания, происходящие, вообще говоря, в той же плоскости. Эта нагрузка, являет-



Фиг. 129.

ся, однако, параметрической нагрузкой по отношению к изгибно-крутильным деформациям из плоскости ее действия. В статическом случае рассмотрение малых отклонений из главной плоскости балки приводит к задаче о статической устойчивости

¹⁾ Болотин В. В., Инж. сборн. 14 (1953).

плоской формы изгиба. В случае вибрационной нагрузки будем говорить о динамической устойчивости плоской формы изгиба. А именно, плоская форма изгиба динамически устойчива, если малые боковые возмущения затухают со временем. Напротив, если при наличии малых боковых возмущений возникают интенсивные изгибно-крутильные колебания из плоскости наибольшей жесткости, — плоская форма изгиба динамически неустойчива.

Рассмотрим задачу о динамической устойчивости узкой прямоугольной полосы, нагруженной приложенными в плоскости наибольшей жесткости периодическими парами (фиг. 129).

Соответствующая статическая задача описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \frac{d^4 v}{dz^4} &= 0, \\ EJ_y \frac{d^4 u}{dz^4} + M \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= 0, \\ M \frac{d^2 u}{dz^2} - GJ_d \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19.1)$$

где u и v — прогибы полосы в плоскостях Oxz и Oyz соответственно, φ — угол закручивания, EJ_y и EJ_x — жесткости сечения при изгибе в плоскостях Oxz и Oyz соответственно, GJ_d — крутильная жесткость.

Полагая, что

$$M = M_0 + M_1 \cos \theta t,$$

введем в правые части уравнений (19.1) дополнительные члены, учитывающие силы инерции:

$$-m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad -m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -m \rho^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Через m обозначена погонная масса полосы, через ρ — полярный радиус инерции.

Считается, что силы инерции, возникающие при вращении сечений полосы относительно своих главных осей, пренебрежимо малы.

В результате приходим к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ EJ_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + (M_0 + M_t \cos \theta t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ (M_0 + M_t \cos \theta t) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - GJ_d \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^2} + m \rho^2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.2)$$

Первое из уравнений (19.2) содержит только одно неизвестное — вертикальное перемещение $v(z, t)$ и совместно с неоднородными граничными условиями

$$EJ_x \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial z^2} = EJ_x \frac{\partial^2 v(l, t)}{\partial z^2} = -(M_0 + M_t \cos \theta t)$$

описывает обычные вынужденные колебания полосы в плоскости ее наибольшей жесткости. Оставшиеся два уравнения образуют систему двух дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим случай шарнирного опирания по обоим концам (фиг. 129). Граничным условиям

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(l, t) = \varphi(0, t) = \varphi(l, t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi(0, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi(l, t)}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}$$

можно удовлетворить, приняв для $u(z, t)$ и $\varphi(z, t)$ выражения в виде

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin \frac{n\pi z}{l}, \\ \varphi(z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \sin \frac{n\pi z}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (19.3)$$

Подстановка в (19.2) приводит к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 U_n}{dt^2} + \omega_{nx}^2 \left[U_n - \frac{l^2 \Phi_n}{n^2 \pi^2 EJ_y} (M_0 + M_t \cos \theta t) \right] &= 0, \\ \frac{d^2 \Phi_n}{dt^2} + \omega_{n\varphi}^2 \left[\Phi_n - \frac{U_n}{GJ_d} (M_0 + M_t \cos \theta t) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19.4)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$).

Здесь ω_{nx} и $\omega_{n\varphi}$ — частоты изгибных и крутильных колебаний незагруженной балки

$$\omega_{nx} = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_y}{m}}, \quad \omega_{n\varphi} = \frac{n\pi}{\rho l} \sqrt{\frac{GJ_d}{m}}. \quad (19.5)$$

В дальнейшем будем записывать уравнения (19.4) в матричной форме, для чего введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} f_n(t) &= \begin{vmatrix} U_n(t) \\ \Phi_n(t) \end{vmatrix}, & A_n &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{l^2}{n^2\pi^2 EJ_y} \\ \frac{1}{GJ_d} & 0 \end{vmatrix}, \\ C_n &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_{nx}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_{n\varphi}^2} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (19.6)$$

Индекс n в дальнейшем опускаем. Система (19.4) принимает вид

$$Cf'' + [E - (M_0 + M_t \cos \theta t) A]f = 0, \quad (19.7)$$

где через E обозначена единичная матрица.

2. Задача динамической устойчивости плоской формы изгиба сводится, таким образом, к исследованию матричного уравнения типа (14.1). Сформулируем основные результаты.

Области динамической неустойчивости лежат вблизи частот, определяемых по формуле

$$\theta = \frac{2\Omega_p}{k} \quad \left(\begin{array}{l} p = 1, 2, \\ k = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right), \quad (19.8)$$

где Ω_1 и Ω_2 — корни уравнения

$$|E - M_0 A - \Omega^2 C| = 0. \quad (19.9)$$

Ω_1 и Ω_2 представляют собой, очевидно, частоты собственных изгибно-крутильных колебаний полосы, которая загружена постоянной составляющей момента M_0 . При M_0 , стремящемся к нулю, одна из этих частот обращается в ω_x , вторая — в ω_φ . Парциальные частоты ω_x и ω_φ , как правило,

не являются кратными. Напротив, из (19.5) следует, что при $n = 1$ и $G \approx 0,4E$

$$\gamma = \frac{\omega_x^2}{\omega_\varphi^2} \approx 0,55 \frac{h^2}{l^2}. \quad (19.10)$$

В случае достаточно длинной полосы $\omega_x \ll \omega_\varphi$; тогда меньшая из частот связанной системы будет соответствовать изгибно-крутильным колебаниям, в которых преобладают деформации изгиба, большая частота — колебаниям преимущественно крутильной формы.

Таким образом, формула (19.8) указывает на две серии областей динамической неустойчивости, соответствующих изгибу и кручению полосы. Кроме того, общая теория (§ 60) указывает на возможность комбинационного резонанса. Условие его возникновения имеет вид

$$\Omega_p \pm \Omega_q = k\theta \quad \left(\begin{array}{l} p, q = 1, 2, \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{array} \right).$$

Потеря статической устойчивости может рассматриваться как частный случай потери динамической устойчивости при $\theta = 0$. Тогда критическое значение нагрузки может быть найдено из уравнения

$$|E - MA| = 0,$$

или в развернутой форме:

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & -\frac{Ml^2}{n^2\pi^2 EJ_y} \\ -\frac{M}{GJ_d} & 1 \end{array} \right| = 0.$$

Решение этого уравнения дает известный результат

$$M_* = \frac{n\pi}{l} \sqrt{EI_y GJ_d}.$$

Переходя к детальному расчету областей неустойчивости, воспользуемся результатами § 58. Там был рассмотрен пример, в котором матрицы A и C по структуре аналогичны матрицам (19.6). Для полного совпадения нужно положить:

$$\alpha = M_0, \quad \beta = M_l, \quad a_{12} = \frac{l^2}{n^2\pi^2 EJ_y}, \quad a_{21} = \frac{1}{GJ_d},$$

$$\omega_1 = \omega_{nx}, \quad \omega_2 = \omega_{n\varphi}.$$

Тогда, используя формулы (14.35), пригодные при $\gamma \ll 1$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \theta_* &\approx 2\omega_{nx} \sqrt{1 - \frac{(M_0 \pm \frac{1}{2} M_t)^2}{(1-\gamma) M_*^2}}, \\ \theta_* &\approx 2\omega_{n\varphi} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{(M_0 \pm \frac{1}{2} M_t)^2}{M_*^2}}. \end{aligned} \right\} (19.11)$$

Первая из формул (19.11) соответствует преимущественно изгибным колебаниям, вторая — преимущественно крутильным колебаниям. Более точно границы главных областей неустойчивости могут быть определены из уравнения

$$\left| E - \left(M_0 \pm \frac{1}{2} M_t \right) A - \frac{1}{4} \theta^2 C \right| = 0,$$

или, если развернуть:

$$\left| \begin{array}{cc} 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_{nx}^2} & - \frac{(M_0 \pm \frac{1}{2} M_t)^2 I^2}{n^2 \pi^2 E J_y} \\ - \frac{M_0 \pm \frac{1}{2} M_t}{G J_d} & 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_{n\varphi}^2} \end{array} \right| = 0. \quad (19.12)$$

Границы вторых областей неустойчивости определяются по формулам (14.37) и (14.38), третьих — по формулам (14.40) и т. д. Соображения о ширине областей, приведенные в § 58, остаются, разумеется, справедливыми и в рассматриваемом случае. Ширина первой, второй, третьей областей неустойчивости составляет величины порядка

$$\frac{\Delta\theta}{\omega_{nx}} \sim \frac{M_0 M_t}{M_*^2}, \quad \frac{M_t^2}{M_*^2}, \quad \frac{M_0^2 M_t^2}{M_*^4}$$

соответственно. Распределение областей неустойчивости на плоскости параметров M_t/M_* и $\theta/2\Omega$ видно из фиг. 90—91,

§ 84. Обобщение результатов. Случай произвольной вертикальной нагрузки

1. Результаты, полученные выше для полосы узкого прямоугольного сечения, остаются справедливыми для стержней любого поперечного сечения, если только последнее имеет две оси симметрии.

Полученные результаты легко распространяются также и на случай ненулевой секториальной жесткости. Рассматривая задачу о колебаниях тонкостенного стержня, имеющего две оси симметрии и нагруженного периодическими парами, приходим к системе двух дифференциальных уравнений относительно бокового перемещения $u(z, t)$ и угла закручивания $\varphi(z, t)$:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + (M_0 + M_t \cos \theta t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ (M_0 + M_t \cos \theta t) \frac{\partial^4 u}{\partial z^2} + EJ_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - \\ - GJ_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + m\rho^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.13)$$

Первое из уравнений (19.13) совпадает с соответствующим уравнением системы (19.2), второе отличается от соответствующего уравнения (19.2) наличием дополнительного члена, исчезающего при $EJ_\omega \rightarrow 0$.

Сохранив граничные условия предыдущей задачи, ищем решение в виде рядов (19.3). После подстановки получаем систему обыкновенных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} U_n'' + \omega_{nx}^2 \left[U_n - \frac{l^2 \Phi_n}{n^2 \pi^2 EJ_y} (M_0 + M_t \cos \theta t) \right] &= 0, \\ \Phi_n'' + \omega_{n\varphi}^2 \left[\Phi_n - \frac{U_n l^2 (M_0 + M_t \cos \theta t)}{GJ_d l^2 + n^2 \pi^2 EJ_\omega} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.14)$$

В уравнениях (19.14) обозначено:

$$\omega_{nx} = \frac{n\pi}{\rho l} \sqrt{\frac{GJ_d l^2 + n^2 \pi^2 EJ_\omega}{m l^2}}. \quad (19.15)$$

Дальнейшие выводы § 83 распространяются, очевидно, и на уравнения (19.14). Для этого достаточно в соответствующих формулах произвести замену

$$GJ_d \rightarrow GJ_d + \frac{n^2\pi^2}{l^2} EJ_\omega.$$

Остается, в частности, справедливым уравнение критических частот

$$\left(1 - \frac{\theta^2}{4\omega_{nx}^2}\right) \left(1 - \frac{\theta^2}{4\omega_{n\varphi}^2}\right) - \frac{\left(M_0 \pm \frac{1}{2} M_t\right)^2}{M_*^2} = 0,$$

где

$$M_* = \frac{n\pi}{l\rho} \sqrt{EJ_y \left(GJ_d + \frac{n^2\pi^2}{l^2} EJ_\omega\right)}.$$

2. Переходим к рассмотрению более общего случая. Общие уравнения статической устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержней получены впервые В. З. Власовым¹⁾. Для случая, когда поперечное сечение стержня имеет одну ось симметрии и внешняя нагрузка приложена в плоскости симметрии, эти уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{d^4 u}{dz^4} + \frac{d^2}{dz^2} (M\varphi) &= 0, \\ EJ_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left[(2\beta_y M + GJ_d) \frac{d\varphi}{dz} \right] + \\ &+ q(e_y - a_y)\varphi + M \frac{d^2 u}{dz^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.16)$$

В уравнениях (19.16) обозначено: $q(z)$ — отнесенная к единице длины внешняя поперечная нагрузка, $M(z)$ — изгибающий момент от внешней нагрузки, e_y — расстояние от линии приложения поперечной нагрузки до линии центров тяжести поперечного сечения (фиг. 130), a_y — координата центра изгиба, β_y — геометрическая характеристика сечения, вычисляемая по формуле

$$\beta_y = \frac{1}{2J_x} \int y^2 (y^2 + x^2) dF - a_y.$$

¹⁾ Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни. Стройиздат, 1940.

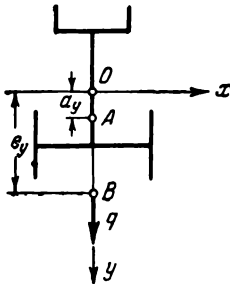
Дифференциальные уравнения колебаний тонкостенного стержня, находящегося под действием периодической нагрузки

$$q(z, t) = \lambda_0 q_0(z) + \lambda_t q_t(z) \cos \theta t$$

и соответственно

$$M(z, t) = \lambda_0 M_0(z) + \lambda_t M_t(z) \cos \theta t,$$

могут быть получены из (19.16) путем добавления сил инерции. Пренебрегая влиянием инерционных сил, обусловленных



Фиг. 130.

вращением сечений балки относительно главных осей и их деформацией, найдем, что инерционные силы, действующие на балку, сводятся к распределенной поперечной нагрузке

$-m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)$ и распределенному

моменту $-m \left(\rho^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$. Здесь

α_y — расстояние от центра инерции в каждом сечении до центра изгиба, которое, вообще говоря, не совпадает с координатой центра изгиба a_y .

Вводя в уравнения (19.16) силы инерции, получим:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M\varphi) + m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ EJ_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left[(2I_y M + GJ_d) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] + q(e_y - a_y) \varphi + \\ &+ M \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \left(\rho^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.17)$$

Здесь коэффициенты зависят от z , вследствие чего не удастся добиться полного разделения переменных z и t даже для простейших граничных условий. В этом отношении рассмотренная в предыдущем параграфе задача представляет исключение: формы собственных колебаний и формы потери статической устойчивости для этой задачи совпадают.

3. Для отыскания решений системы (19.17) воспользуемся вариационным методом, аппроксимируя формы колебаний с помощью подходящей системы фундаментальных функций. Например, в случае балки, шарнирно опертой по концам и нагруженной произвольной периодической нагрузкой, реше-

ние уравнений (19.17) можно искать в виде (19.3). Можно рассматривать задачу и в более общей постановке, положив

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \chi_n(z), \quad \varphi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \psi_n(z). \quad (19.18)$$

Здесь введены две различные системы фундаментальных функций с расчетом, что граничные условия для $u(z, t)$ и $\varphi(z, t)$ могут быть неодинаковы. В качестве этих функций могут быть взяты решения дифференциальных уравнений типа

$$EJ_y \frac{d^4 \chi}{dz^4} - x_y \chi = 0, \quad EJ_\omega \frac{d^2 \psi}{dz^2} - x_\omega \psi = 0,$$

удовлетворяющие граничным условиям задачи. Это по существу — формы собственных колебаний стержня, имеющего соответствующие опорные закрепления («балочные» функции).

Применяя метод Галеркина, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$Ff' + (R - \lambda_0 S_0 - \lambda_t \cos \theta t S_t) f = 0. \quad (19.19)$$

Коэффициенты этой системы с точностью до матриц второго порядка будут:

$$F = \begin{vmatrix} \int m \chi^2 dz & \int m a_y \chi \psi dz \\ \int m a_y \psi \chi dz & \int m \rho^2 \psi^2 dz \end{vmatrix},$$

$$R = \begin{vmatrix} x_y \int \chi^2 dz & 0 \\ 0 & x_\omega \int \psi^2 dz - GJ_a \int \psi \frac{d^2 \psi}{dz^2} dz \end{vmatrix},$$

$$S_0 = \begin{vmatrix} 0 & - \int \dot{\chi} \frac{d^2}{dz^2} (M_0 \psi) dz \\ - \int \psi M_0 \frac{d^2 \chi}{dz^2} dz & 2\beta_y \int \psi \frac{d}{dz} \left(M_0 \frac{d\psi}{dz} \right) dz - (e_y - a_y) \int q_0 \psi^2 dz \end{vmatrix},$$

$$S_t = \begin{vmatrix} 0 & - \int \chi \frac{d^2}{dz^2} (M_t \psi) dz \\ - \int \psi M_t \frac{d^2 \chi}{dz^2} dz & 2\beta_y \int \psi \frac{d}{dz} \left(M_t \frac{d\psi}{dz} \right) dz - (e_y - a_y) \int q_t \psi^2 dz \end{vmatrix}. \quad (19.20)$$

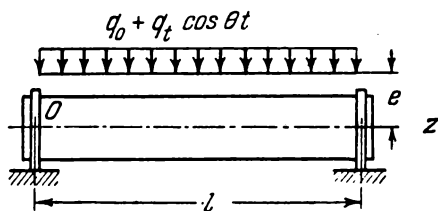
Примеры применения уравнения (19.19) будут даны ниже.

§ 85. Пример

1. Рассмотрим задачу о динамической устойчивости балки постоянного сечения, шарнирно опертой по концам и нагруженной равномерно распределенной периодической нагрузкой

$$q(t) = q_0 + q_t \cos \theta t.$$

Пусть сечение балки симметрично относительно обеих осей; тогда $a_y = \beta_y = \alpha_y = 0$. Пусть, кроме того, нагрузка



Фиг. 131.

приложена на высоте $e_y = -e$ (фиг. 131). Тогда, полагая

$$\chi(z) = \psi(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi z}{l},$$

легко получаем:

$$F = m \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{vmatrix},$$

$$R = \begin{vmatrix} EJ_y \frac{\pi^4}{l^4} & 0 \\ 0 & EJ_\omega \frac{\pi^4}{l^4} + GJ_d \frac{\pi^2}{l^2} \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) \\ \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) & e \end{vmatrix}$$

Границы главных областей неустойчивости в первом приближении могут быть определены из условия

$$\left| R - \left(q_0 \pm \frac{1}{2} q_t \right) S - \frac{1}{4} \theta^2 F \right| = 0$$

или в развернутой форме

$$\left| \begin{array}{cc} 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_x^2} & - \frac{\left(\frac{1}{3}\pi^2 + 1\right)\left(q_0 \pm \frac{1}{2}qt\right)}{4EJ_y \frac{\pi^4}{l^4}} \\ - \frac{\left(\frac{1}{3}\pi^2 + 1\right)\left(q_0 \pm \frac{1}{2}qt\right)}{4\left(EJ_\omega \frac{\pi^4}{l^4} + GJ_d \frac{\pi^2}{l^2}\right)} & 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_\varphi^2} - \frac{\left(q_0 \pm \frac{1}{2}qt\right)e}{EJ_\omega \frac{\pi^4}{l^4} + GJ_d \frac{\pi^2}{l^2}} \end{array} \right| = 0.$$

Пусть $\gamma = \frac{\omega_x^2}{\omega_\varphi^2}$ достаточно мало (или велико) по сравнению с единицей. Тогда получаем следующие приближенные формулы:

$$\left. \begin{array}{l} \theta_* = 2\omega_x \sqrt{1 - \frac{\left(q_0 \pm \frac{1}{2}qt\right)^2}{q_*^2 \left(1 - \gamma - 2,93\varepsilon \frac{q_0 \pm \frac{1}{2}qt}{q_*}\right)}} \\ \theta_* = 2\omega_\varphi \sqrt{1 - 2,93\varepsilon \frac{q_0 \pm \frac{1}{2}qt}{q_*} + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{\left(q_0 \pm \frac{1}{2}qt\right)^2}{q_*^2}} \end{array} \right\} \quad (19.21)$$

где $\varepsilon = \frac{e\sqrt{\gamma}}{\pi\rho}$ — относительное превышение, q_* — корень уравнения

$$|E - qS| = 0,$$

определенный при $e = 0$ (нагрузка приложена в центре тяжести сечения). Вычисления дают:

$$q_* = \frac{28,3}{l^3} \sqrt{EJ_y \left(EJ_\omega \frac{\pi^2}{l^2} + GJ_d\right)},$$

что практически совпадает с точным значением¹⁾.

Из формул (19.21) видно, что при $\gamma \ll 1$ даже сравнительно большое превышение нагрузки над центром

¹⁾ Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1955.

тяжести сечения незначительно влияет на величину критических частот.

2. Применим полученные результаты к задаче о динамической устойчивости балок жесткости висячих мостов.

После известной катастрофы с мостом Такома-Нэроус (1940 г.) появилось большое количество работ, посвященных исследованию этого вопроса. Спустя две недели после катастрофы была опубликована статья¹⁾, в которой содержится попытка объяснить разрушение балки жесткости потерей ею статической устойчивости под действием аэродинамического момента. В большинстве дальнейших работ задача аэродинамической устойчивости балок жесткости трактуется на основе теории флаттера; последняя применяется примерно в том же виде, что и к расчету крыла самолета. Во многих зарубежных работах балка жесткости рассматривается как тонкая пластинка бесконечного размаха. При этом полностью игнорируется то обстоятельство, что аэродинамические характеристики балок жесткости существенно отличаются от характеристик плоской пластинки.

Опубликованные в последующие годы результаты лабораторных исследований²⁾ проливают новый свет на проблему аэродинамической устойчивости балок жесткости. Опыты по продувке в аэродинамических трубах показывают, что возбуждение колебаний балок жесткости мало напоминает явление флаттера, по крайней мере в том виде, как это имеет место с крылом самолета. Напротив, имеются основания предполагать, что это явление близко по характеру к параметрическому резонансу. Так, замечено, что возбуждение колебаний, наблюдаемое при определенной «резонансной» скорости потока, возобновляется при скорости, примерно вдвое меньшей (фиг. 132).

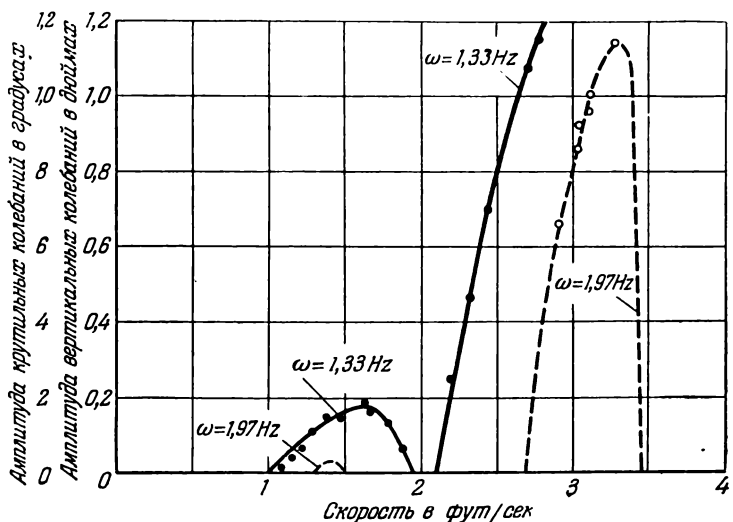
Конечно, для возникновения параметрического резонанса необходимо наличие внешнего периодического возбуждения. В рассматриваемой задаче периодические силы имеются (периодические изменения подъемной силы, аэродинамического момента и лобового сопротивления), однако они носят автоколебательный характер. Вводя в уравнения задачи силы, явно зависящие от времени, мы должны помнить, что

¹⁾ Karman T., Eng. News Rec., 21 Nov. 1940.

²⁾ Farquharson F., Proc. of ASCE, 1944, № 6.

эти силы представляют собой лишь некоторый эквивалент аэродинамических сил, явно от времени не зависящих.

Первая попытка рассмотреть задачу о параметрических колебаниях балки жесткости висячего моста принадлежит



Фиг. 132.

И. И. Гольденблату¹⁾. Внешние силы, действующие на балку, сводятся к вертикальной распределенной нагрузке (фиг. 133)

$$q = q_0 + q_t \cos \theta t.$$

Пренебрегая динамическим изменением распора, получаем приближенное уравнение вертикальных колебаний

$$EJ_{\omega} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + H \left(1 + \frac{q_t}{q_0} \cos \theta t \right) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = F(z, t),$$

где H — распор от постоянной нагрузки, $F(z, t)$ — некоторая функция времени. Полагая, далее,

$$v(z, t) = f_k(t) \sin \frac{k\pi z}{l} \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

¹⁾ Гольденблат И. И., Современные проблемы устойчивости и колебаний инженерных конструкций. Стройиздат, 1947.

и отбрасывая члены в правой части, приходим к уравнению Матье

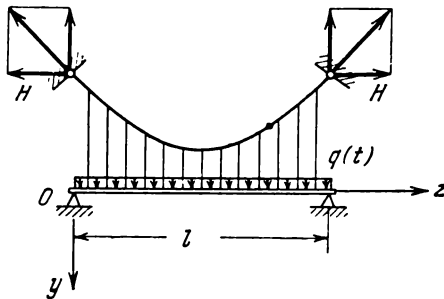
$$f_k'' + \omega_{ky}^2 (1 - 2\psi_k \cos \theta t) f_k = 0 \quad (k = 2, 3, 4, \dots). \quad (19.22)$$

Здесь

$$\omega_{ky} = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{m} \left(1 + \frac{Hl^2}{k^2 \pi^2 EJ_x} \right)},$$

$$\psi_k = \frac{q_0}{2q_0} \frac{1}{1 + \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \frac{EJ_x}{H}}.$$

Из уравнения (19.22) следует, что при частотах внешней нагрузки, лежащих в окрестности $\theta = \frac{2\omega_{ky}}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$, должны возникнуть интенсивные вертикальные колебания.

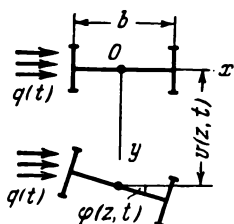


Фиг. 133.

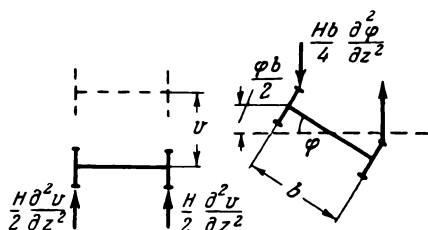
3. Известно, однако, что мост Такома-Нэрроус погиб вследствие изгибно-крутильных колебаний, которые перед разрушением носили преимущественно крутильный характер. Чтобы объяснить происхождение изгибно-крутильных колебаний, достаточно предположить наличие горизонтальных периодических сил.

Рассмотрим задачу о колебаниях балки жесткости под действием боковой периодической нагрузки (фиг. 134). Для упрощения выкладок примем, что сечение балки имеет две оси симметрии, а точки прикрепления подвесок лежат на оси симметрии. Дифференциальные уравнения задачи могут быть получены из уравнений типа (19.17), если ввести в них

члены, учитывающие распор H . Влияние распора при изгибно-крутильной деформации равносильно действию боковой рас-



Фиг. 134.



Фиг. 135.

- предельной нагрузки и распределенного момента¹⁾

$$q_y = H \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

$$u = \frac{1}{4} H b^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

которые определяются из элементарных соображений (фиг. 135). В результате получаем систему уравнений:

$$E J_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M \varphi) - H \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$E J_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - \left(G J_a + \frac{1}{4} H b^3 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + M \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{q b}{2} \varphi + m \rho^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

где

$$q = q_0 + q_t \cos \theta t,$$

$$M(z, t) = \frac{z(l-z)}{2} (q_0 + q_t \cos \theta t).$$

Рассмотрим основную (кососимметричную) форму колебаний. Полагая

$$v(z, t) = V(t) \sin \frac{2\pi z}{l},$$

$$\varphi(z, t) = \Phi(t) \sin \frac{2\pi z}{l}$$

и применяя метод Галеркина, получим систему уравнений типа (19.19). Для определения критических частот можно

¹⁾ При условии достаточно частого расположения подвесок.

воспользоваться формулами этого параграфа, в которых следует положить:

$$\omega_x = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{m} \left(1 + \frac{Hl^2}{4\pi^2 EJ_x}\right)},$$

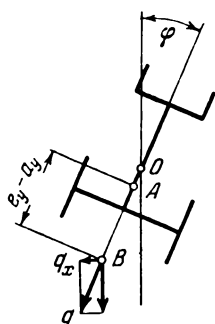
$$\omega_\varphi = \frac{2\pi}{l\rho} \sqrt{\frac{m}{m}} \sqrt{GJ_d + \frac{1}{4} Hb^2 + \frac{4\pi^2 EJ_\omega}{l^2}},$$

$$q_* = \frac{96\pi^3}{l^3(3 + \pi^2)} \sqrt{EJ_x \left(1 + \frac{Hl^2}{4\pi^2 EJ_x}\right) \left(GJ_d + \frac{1}{4} Hb^2 + \frac{4\pi^2 EJ_\omega}{l^2}\right)}.$$

Приведенные соображения предсказывают, таким образом, две серии критических частот, одна из которых соответствует преимущественно изгибным, вторая — преимущественно крутильным колебаниям. Кроме того, возможно комбинационное возбуждение.

§ 86. Влияние поведения нагрузки¹⁾

1. До сих пор мы полагали, что периодическая составляющая нагрузки $\lambda_t q_t$ при колебаниях не изменяет своего направления. Однако в практических задачах возбудитель колебаний поворачивается вместе с балкой, так что векторы $\lambda_t q_t$ все время остаются в одной из главных плоскостей (фиг. 136).



Фиг. 136.

Дополнительная поперечная нагрузка и крутящий момент, возникающие вследствие поворота нагрузки, составляют:

$$q_x = -\lambda_t q_t(z) \varphi(z, t) \cos \theta t,$$

$$\mu = \lambda_t q_t(z) (e_y - a_y) \varphi(z, t) \cos \theta t.$$

Введя эти члены в правые части уравнений (19.17), получаем:

$$EJ_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M\varphi) + m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = q_x(z, t),$$

$$EJ_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left[(2\beta_y M + GJ_d) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] + q(e_y + a_y) \varphi + M \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \left(\rho^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \mu(z, t).$$

¹⁾ См. работу автора, цит. на стр. 464.

Вновь полагая

$$u(z, t) = U(t) \gamma(z),$$

$$\varphi(z, t) = \Phi(t) \psi(z)$$

и применяя метод Галеркина, приходим к уравнениям типа (19.19). Матрицы F , R и S_0 , очевидно, попережнему определяются согласно (19.20). Матрица S_t принимает вид

$$S_t = \begin{vmatrix} 0 & - \int \gamma \frac{d^2}{dz^2} (M_t \psi) dz - \int q_t \gamma \psi dz \\ - \int \psi M_t \frac{d^2 \gamma}{dz^2} dz & 2P_t \int \psi \frac{d}{dz} \left(M_t \frac{d\psi}{dz} \right) dz \end{vmatrix}. \quad (19.23)$$

2. Допустим, что балка постоянного сечения, шарнирно опертая по обоим концам, загружена посредине пролета сосредоточенной силой $P_0 + P_t \cos \theta t$. Вместо (19.19) получаем:

$$Ff'' + (R - P_0 S_0 - P_t S_t \cos \theta t) f = 0,$$

где F и R определяются, как и в § 85, а

$$S_0 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2l} \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \right) \\ \frac{1}{2l} \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \right) & 0 \end{vmatrix}.$$

Если сила P_t при колебаниях не меняет своего направления, то $S_t = S_0$. В случае «следящей» силы согласно (19.23)

$$S_t = \begin{vmatrix} 0 & - \frac{1}{2l} \left(3 - \frac{\pi^2}{4} \right) \\ \frac{1}{2l} \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \right) & 0 \end{vmatrix}.$$

Границы главных областей неустойчивости в первом приближении определяются из уравнения

$$\left| R - P_0 S_0 \pm \frac{1}{2} P_t S_t - \frac{1}{4} \theta^2 F \right| = 0.$$

При $S_t = S_0$ уравнение принимает вид

$$\left| \begin{array}{cc} 1 - \frac{\theta_x^2}{4\omega_x^2} & - \frac{l^3 \left(1 + \frac{1}{4} \pi^2\right) \left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t\right)}{2\pi^4 E J_y} \\ - \frac{\left(1 + \frac{1}{4} \pi^2\right) \left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t\right)}{2 \left(E J_\omega \frac{\pi^4}{l^3} + G J_d \frac{\pi^2}{l}\right)} & 1 - \frac{\theta_\varphi^2}{4\omega_\varphi^2} \end{array} \right| = 0.$$

Для случая «следящей» силы получим соответственно:

$$\left| \begin{array}{cc} 1 - \frac{\theta_x^2}{4\omega_x^2} & - \frac{l^3 \left(1 + \frac{1}{4} \pi^2\right) \left(P_0 \mp 0,075 P_t\right)}{2\pi^4 E J_y} \\ - \frac{\left(1 + \frac{1}{4} \pi^2\right) \left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t\right)}{2 \left(E J_\omega \frac{\pi^4}{l^3} + G J_d \frac{\pi^2}{l}\right)} & 1 - \frac{\theta_\varphi^2}{4\omega_\varphi^2} \end{array} \right| = 0.$$

Пусть $\gamma = \omega_x^2 / \omega_\varphi^2$ достаточно мало (или велико) по сравнению с единицей. В этом случае границы главных областей неустойчивости определяются по приближенным формулам

$$\left. \begin{array}{l} \theta_* = 2\omega_x \sqrt{1 - \frac{\left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t\right)^2}{(1-\gamma) P_*^2}}, \\ \theta_* = 2\omega_\varphi \sqrt{1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t\right)^2}{P_*^2}}. \end{array} \right\} \quad (19.24)$$

Формулы (19.24) соответствуют случаю нагрузки неизменного направления. Через P_* обозначено приближенное значение критической силы, найденное из уравнения

$$|R - P S_0| = 0$$

и составляющее

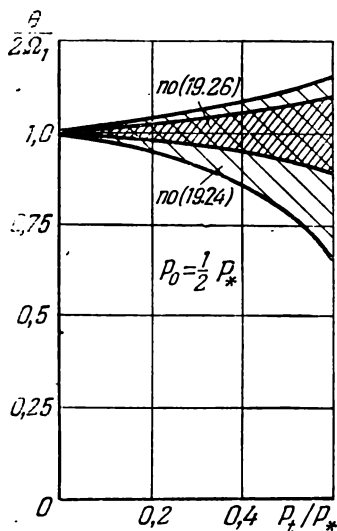
$$P_* = \frac{17,8}{l^2} \sqrt{E J_y \left(G J_d + \frac{\pi^2}{l^2} E J_\omega\right)}. \quad (19.25)$$

Для случая следящей нагрузки получаем:

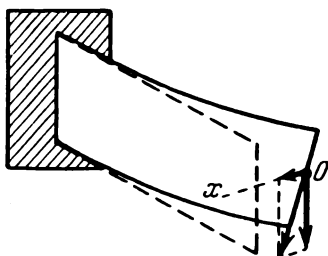
$$\left. \begin{aligned} \theta_* &= 2\omega_x \sqrt{1 - \frac{(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t)(P_0 \mp 0,075 P_t)}{(1-\gamma) P_*^2}}, \\ \theta_* &= 2\omega_\varphi \sqrt{1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t)(P_0 \mp 0,075 P_t)}{P_*^2}}, \end{aligned} \right\} (19.26)$$

где оставлено обозначение (19.25). Сравнение результатов вычислений по формулам (19.24) и (19.26) приведено на фиг. 137. Из графика видно, что вследствие поворота нагрузки ширина областей неустойчивости уменьшается примерно в два раза.

Вопрос о влиянии поведения нагрузки разбирался здесь уже дважды — в связи с колебаниями сжатых стоек и косо-



Фиг. 137.



Фиг. 138.

симметричными колебаниями сжато-изогнутых арок. В рассматриваемой задаче природа этого влияния поясняется следующими соображениями. Внешнюю силу, поворачивающуюся вместе с сечением балки, можно разложить на две составляющие, одна из которых вертикальна, вторая направлена вдоль оси Ox (фиг. 138). Горизонтальная составляющая, будучи всегда направлена против перемещения, повышает статическую устойчивость балки.

Рассмотрим также соответствующую статическую задачу. Уравнение статической устойчивости будет:

$$|R - PS_t| = 0 \quad (19.27)$$

или в развернутой форме

$$\begin{vmatrix} EJ_y \frac{\pi^4}{l^4} & \frac{P}{2l} \left(3 - \frac{\pi^2}{4}\right) \\ -\frac{1}{2l} \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) & EJ_\omega \frac{\pi^4}{l^4} + GJ_d \frac{\pi^2}{l^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Легко видеть, что это уравнение не имеет вещественных корней, т. е. потеря устойчивости в смысле Эйлера под действием «следящей» силы невозможна.

3. Развитый здесь аппарат позволяет отыскать приближенное решение задачи об устойчивости плоской формы изгиба балки, которая загружена постоянной во времени, но «следящей» силой, по отношению к возмущениям, зависящим от времени. Уравнения в вариациях для этой задачи будут:

$$Ff'' + (R - PS_t)f = 0,$$

откуда после подстановки

$$f = ae^{ipt}$$

получаем характеристическое уравнение

$$|R - PS_t - \rho^2 F| = 0.$$

Задача сводится к отысканию тех условий, при которых это уравнение не будет иметь комплексных корней с отрицательными мнимыми частями.

В применении к задаче, рассмотренной в п. 2, получаем:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\rho^2}{\omega_x^2} & \frac{Pl^3 \left(3 - \frac{1}{4} \pi^2\right)}{2\pi^4 EJ_y} \\ \frac{P \left(1 + \frac{1}{4} \pi^2\right)}{2 \left(EJ_\omega \frac{\pi^4}{l^4} + GJ_d \frac{\pi^2}{l^2}\right)} & 1 - \frac{\rho^2}{\omega_\varphi^2} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\left(1 - \frac{\rho^2}{\omega_x^2}\right) \left(1 - \frac{\rho^2}{\omega_\varphi^2}\right) + \frac{P^2}{P^{**2}} = 0,$$

где для сокращения обозначено:

$$P_{**} = \frac{45,61}{l^2} \sqrt{EJ_y \left(GJ_d + \frac{\pi^2}{l^2} EJ_\omega \right)}.$$

Если обозначить, кроме того,

$$\frac{\rho^2}{\omega_x^2} = \lambda, \quad \frac{\omega_x^2}{\omega_\varphi^2} = \gamma,$$

то приходим к уравнению

$$\lambda^2 \gamma - (1 + \gamma) \lambda + 1 + \frac{P^2}{P_{**}^2} = 0,$$

корни которого

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2\gamma} \left[1 + \gamma \pm \sqrt{(1 - \gamma)^2 - 4\gamma \frac{P^2}{P_{**}^2}} \right].$$

Пока подкоренное выражение положительно, оба корня $\lambda_{1,2}$ вещественны и положительны. Приравнявая это выражение нулю, найдем критическое значение силы P :

$$P_* = \frac{1 - \gamma}{2 \sqrt{\gamma}} P_{**}.$$

С приближением парциальных частот друг к другу критическая сила убывает, а в случае кратных частот ($\gamma = 1$) достаточно сколь угодно малой силы, чтобы вызвать раскочку изгибно-крутильных колебаний. К приведенному здесь решению, однако, применимы все замечания, сделанные в § 72, п. 6. Если рассмотреть ту же задачу с учетом затухания, то критическая сила окажется меньше, хотя качественный характер зависимости сохранится. Подробное исследование этого вопроса выходит за рамки книги.

§ 87. Учет нелинейных факторов

1. Определение нелинейных факторов для пространственной деформации прямолинейного тонкостенного стержня было изложено в § 75. Очевидно, что все высказанные там соображения сохраняют силу в рассматриваемом случае. Здесь, как и в § 75, ограничимся учетом нелинейной инерционности. С точностью до величин третьего порядка

нелинейные инерционные силы сводятся к распределенной нагрузке (17.31)

$$\Delta q(z, t) = -(U''\Phi + 2U'\Phi' + U\Phi'')f(z),$$

изгибающему моменту (17.32)

$$\Delta M(z, t) = -(U''\Phi + 2U'\Phi' + U\Phi'')F(z)$$

и продольной силе (17.35)

$$\Delta N(z, t) = -[(U')^2 + UU'']G(z).$$

Здесь $U(t)$ и $\Phi(t)$ — коэффициенты в выражениях

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &= U(t)\chi(z), \\ \varphi(z, t) &= \Phi(t)\psi(z), \end{aligned} \right\} \quad (19.28)$$

где $f(z)$, $F(z)$ и $G(z)$ — некоторые функции, зависящие от формы колебаний балки и распределения массы по ее длине.

С учетом дополнительных нелинейных сил уравнения (19.17) принимают вид

$$\begin{aligned} EJ_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [(M + \Delta M)\varphi] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\Delta N \left(\frac{\partial u}{\partial z} + a_y \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] + \\ + m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = 0, \\ EJ_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ [2\beta_y (M + \Delta M) + GJ_d] \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} + (M + \Delta M) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ + (q + \Delta q)(e_y - a_y)\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \left[\Delta N \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + a_y \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \\ + m \left(\rho^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Приближенное решение этих уравнений на основе (19.28) может быть получено методом Галеркина. Рассмотрим частный случай — задачу о чистом изгибе прямоугольной полосы. Для этого положим $M = M_0 + M_t \cos \theta t$, $a_y = a_y = \beta_y = e_y = EJ_\omega = 0$; $\rho = r$. Уравнения задачи будут:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + (M_0 + M_t \cos \theta t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Delta M \varphi) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta N \frac{\partial u}{\partial z} \right) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ (M_0 + M_t \cos \theta t) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - GJ_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \Delta M \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ + r^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta N \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + mr^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.29)$$

Пусть полоса шарнирно оперта по концам, тогда

$$\begin{aligned} u(z, t) &= U(t) \sin \frac{\pi z}{l}, \\ \varphi(z, t) &= \Phi(t) \sin \frac{\pi z}{l} \end{aligned}$$

является приближенным решением задачи (точным при линейной постановке). Применяя метод Галеркина, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 U}{dt^2} + \omega_x^2 \left[U - \frac{l^2 \Phi}{\pi^2 EJ_y} (M_0 + M_t \cos \theta t) \right] + \psi_x &= 0, \\ \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \omega_\varphi^2 \left[\Phi - \frac{U}{GJ_d} (M_0 + M_t \cos \theta t) \right] + \psi_\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.30)$$

Здесь через ψ_x и ψ_φ обозначены нелинейные функции от U , Φ и их производных:

$$\left. \begin{aligned} \psi_x &= I_1 \Phi (U'' \Phi + 2U' \Phi' + U \Phi'') + 2\alpha U [(U')^2 + U U''], \\ \psi_\varphi &= \frac{I_1 U}{r^2} (U'' \Phi + 2U' \Phi' + U \Phi'') + 2\alpha \Phi [(U')^2 + U U'']. \end{aligned} \right\} \quad (19.31)$$

Если предположить, что один из концов полосы не имеет смещений в продольном направлении, а сосредоточенная масса на другом конце отсутствует, получим (ср. § 75):

$$I_1 = 0,7360, \quad \alpha l^2 = 6,57.$$

2. Ищем установившиеся решения нелинейной системы (19.30) в виде

$$\left. \begin{aligned} U(t) &= U_0 \sin \frac{\theta t}{2} + \dots, \\ \Phi(t) &= \Phi_0 \sin \frac{\theta t}{2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (19.32)$$

Точками обозначены невыписанные гармоники. Другое решение с периодом $4\pi/\theta$

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \cos \frac{\theta t}{2} + \dots, \\ \Phi(t) &= \Phi_0 \cos \frac{\theta t}{2} + \dots \end{aligned}$$

в случае нелинейной инерционности оказывается неустойчивым, и мы им не занимаемся. Подставляя (19.32) в выражения

для нелинейных функций (19.31), после преобразований получаем:

$$\left. \begin{aligned} \psi_x &= -\frac{\theta^2}{4} U_0 (I_1 \Phi_0^2 + \kappa U_0^2) \sin \frac{\theta t}{2} + \dots, \\ \psi_\varphi &= -\frac{\theta^2}{4} \Phi_0 U_0^2 \left(\frac{I_1}{r^2} + \kappa \right) \sin \frac{\theta t}{2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (19.33)$$

Подставим теперь (19.32) и (19.33) в уравнения (19.30). Приравнявая коэффициенты при $\sin \frac{\theta t}{2}$, получаем систему алгебраических уравнений для определения амплитуд:

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{\theta^2}{4\omega_x^2}\right) U_0 - \frac{\left(M_0 - \frac{1}{2} M_t\right) I^2}{\pi^2 E J_y} \Phi_0 - \\ - \frac{\theta^2}{4\omega_\varphi^2} U_0 (I_1 \Phi_0^2 + \kappa U_0^2) = 0, \\ - \frac{M_0 - \frac{1}{2} M_t}{G J_d} U_0 + \left(1 - \frac{\theta^2}{4\omega_\varphi^2}\right) \Phi_0 - \\ - \frac{\theta^2}{4\omega_\varphi^2} \Phi_0 U_0^2 \left(\frac{I_1}{r^2} + \kappa\right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.34)$$

Уравнения (19.34) удовлетворяются, очевидно, при $U_0 = \Phi_0 = 0$. Переходя к определению ненулевых решений, рассмотрим область возбуждения, лежащую вблизи частоты $2\omega_x$. Если парциальные частоты ω_x и ω_φ достаточно отличаются друг от друга, то эта область будет областью преимущественно изгибных колебаний. Полагая $U_0 \gg \Phi_0 r$, отбросим в уравнениях (19.34) нелинейные члены с $U_0 \Phi_0^2$ и $\Phi_0 U_0^2$. Из полученной системы

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{\theta^2}{4\omega_x^2} (1 + \kappa U_0^2)\right] U_0 - \frac{M_0 - \frac{1}{2} M_t}{\pi^2 E J_y} I^2 \Phi_0 = 0, \\ - \frac{M_0 - \frac{1}{2} M_t}{G J_d} U_0 + \left[1 - \frac{\theta^2}{4\omega_\varphi^2} (1 + \kappa U_0^2)\right] \Phi_0 = 0 \end{aligned}$$

легко определить амплитуду U_0 ¹⁾. Действительно, будем рассматривать эту систему как систему линейных алгебраических уравнений относительно U_0 и Φ_0 . Условием ее разрешимости будет равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_x^2} (1 + \chi U_0^2) & - \frac{M_0 - \frac{1}{2} M_t}{\pi^2 E J_y} l^2 \\ - \frac{M_0 - \frac{1}{2} M_t}{G J_d} & 1 - \frac{\theta^2}{4\omega_\varphi^2} (1 + \chi U_0^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (19.35)$$

Сопоставляя уравнение (19.35) и уравнение (19.12), находим, что

$$\theta^2 (1 + \chi U_0^2) = \theta_*^2,$$

где θ_* — критическая частота, соответствующая верхней границе области динамической неустойчивости. Отсюда следует формула

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{\chi}} \sqrt{\left(\frac{\theta_*}{\theta}\right)^2 - 1}, \quad (19.36)$$

совпадающая по виду с (17.44). Для уточнения этой формулы воспользуемся приемом, примененным в § 75. Установим зависимость между U_0 и Φ_0 . Второе из уравнений (19.34) дает:

$$\Phi_0 = \frac{M_0 - \frac{1}{2} M_t}{1 - \frac{\theta^2}{4\omega_\varphi^2} \left[1 + \left(\frac{l_1}{r^2} + \chi \right) U_0^2 \right]} \cdot \frac{U_0}{G J_d}.$$

Упростим эту формулу, полагая $\theta = 2\omega_x$ и отбрасывая нелинейный член, который, как видно из (19.36), имеет порядок $\left(\frac{\theta_*}{\theta}\right)^2 - 1$. Тогда

$$\Phi_0 \approx \frac{M_0 - \frac{1}{2} M_t}{G J_d (1 - \gamma)} U_0. \quad (19.37)$$

1) См. также пример из § 70.

Подставим (19.37) в первое из уравнений (19.34):

$$\left[1 - \frac{\theta^2}{4\omega_x^2} - \frac{\left(M_0 - \frac{1}{2}M_t\right)^2}{M_*^2} \right] U_0 - \frac{\theta^2}{4\omega_x^2} \left[x + \frac{\left(M_0 - \frac{1}{2}M_t\right)^2 I_1}{(GJ_d)^2 (1-\gamma)^2} \right] U_0^3 = 0.$$

Отсюда наряду с тривиальным решением $U_0 = 0$ получаем:

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{x_1}} \sqrt{\left(\frac{\theta_\infty}{\theta}\right)^2 - 1}. \quad (19.38)$$

В отличие от формулы (19.36) здесь

$$x_1 = x + \frac{\left(M_0 - \frac{1}{2}M_t\right)^2 I_1}{(GJ_d)^2 (1-\gamma)^2}. \quad (19.39)$$

Преобразуем второе слагаемое в (19.39). Вспоминая, что

$$\gamma = \frac{\omega_x^2}{\omega_\varphi^2} = \frac{\pi^2 r^2 GJ_d}{l^2 EJ_y}, \quad M_* = \frac{\pi}{l} \sqrt{EJ_y GJ_d},$$

и комбинируя эти формулы, найдем:

$$(GJ_d)^2 = \frac{M_*^2}{\gamma} r^2.$$

Тогда

$$x_1 = x + \frac{\left(M_0 - \frac{1}{2}M_t\right)^2}{M_*^2} \frac{\gamma I_1}{(1-\gamma)^2 r^2}. \quad (19.40)$$

Для прямоугольной полосы $I_1 = 0,736$, $x = 6,57/l^2$, $\gamma = 0,55 h^2/l^2 \ll 1$, $r = 0,29h$. Подстановка в формулу (19.40) дает:

$$x_1 \approx x \left[1 + \frac{\left(M_0 - \frac{1}{2}M_t\right)^2}{M_*^2} \right].$$

Таким образом, при $M/M_* = 0,3$ влияние вертикальной инерционной нагрузки на амплитуды колебаний едва превышает 4⁰/₀.

§ 88. Взаимодействие вынужденных и параметрически возбуждаемых колебаний

1. Приведенное выше приближенное решение не учитывало взаимодействия вынужденных вертикальных и параметрических (изгибно-крутильных) колебаний. Совместное рассмотрение двух типов колебаний приводит для сечения с двумя осями симметрии к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z} \left(N_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M_y \varphi) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= q(z, t), \\ EJ_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z} \left(N_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M_x \varphi) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ EJ_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} + M_x \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + M_y \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \\ &+ r^2 \left(N_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + qe\varphi + mr^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.41)$$

Здесь

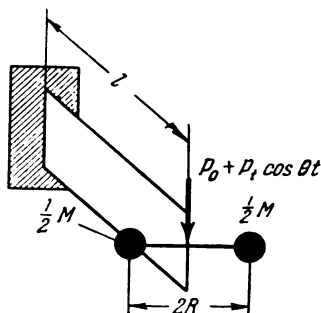
$$\left. \begin{aligned} M_x &= EJ_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ M_y &= EJ_y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \varphi \right) \end{aligned} \right\} \quad (19.42)$$

и, если мы не будем учитывать продольных колебаний системы,

$$N_z = -\frac{m}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_z^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} \right)^2 \right] d\zeta. \quad (19.43)$$

Для того чтобы выяснить принципиальные особенности задачи, максимально упростим ее постановку. Допустим, что невесомая балка с жесткостями при изгибе $EJ_x \gg EJ_y$ и жесткостью при кручении GJ_d несет на конце сосредоточенную массу M с моментом инерции MR^2 (фиг. 139).

Обозначим через v вертикальное, через u — горизонтальное перемещение конца балки, через φ — угол поворота торцевого



Фиг. 139.

сечения. Введем парциальные частоты

$$\omega_x^2 = \frac{3EJ_y}{Ml^3}, \quad \omega_y^2 = \frac{3EJ_x}{Ml^3}, \quad \omega_\varphi^2 = \frac{GJ_d}{MR^2l}$$

и парциальные критические силы

$$N_x = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}, \quad N_\varphi = \frac{GJ_d}{r^2}.$$

Уравнения изгибно-крутильных колебаний принимают вид

$$\left. \begin{aligned} u'' + \omega_x^2 \left(1 - \frac{N}{N_x}\right) u - \omega_x^2 \frac{Q}{a_{12}} \varphi &= 0, \\ \varphi'' + \omega_\varphi^2 \left(1 - \frac{N}{N_\varphi}\right) \varphi - \omega_\varphi^2 \frac{Q}{a_{21}} u &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19.44)$$

где N — продольная, Q — поперечная сила в сечениях балки, а произведение матричных элементов $a_{12}a_{21} = P_*^2$ (P_* — критическое значение параметра Q). Очевидно, что для данной задачи

$$Q = \frac{3EJ_x}{l^3} v, \quad N = -Mw'', \quad (19.45)$$

где $w = k(u^2 + v^2)$ — продольное перемещение конца балки, k — некоторый коэффициент.

Третье уравнение, связывающее u , v и φ , получим, рассматривая вертикальные колебания груза:

$$Q = P_0 + P_t \cos \theta t - Mv_1''. \quad (19.46)$$

Здесь v_1 — полное, т. е. определенное с учетом изгибно-крутильных деформаций, вертикальное перемещение

$$v_1 = v + k_1 u \varphi. \quad (19.47)$$

Коэффициент k_1 вычисляется по формуле (17.27)

$$k_1 = \int_0^l \int_0^z u''(\zeta) \varphi(\zeta) dz d\zeta,$$

где $u(z)$ и $\varphi(z)$ — формы изгиба балки, удовлетворяющие условию $u(l) = \varphi(l) = 1$. Подставляя (19.45) и (19.47)

в (19.44) и (19.46), получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} v'' + \omega_y^2 v + k_1 (u'' \varphi + 2u' \varphi' + u \varphi'') &= \frac{1}{M} (P_0 + P_t \cos \theta t), \\ u'' + \omega_x^2 \left\{ 1 - \frac{2kM}{N_x} [(u')^2 + (v')^2 + uu'' + vv''] \right\} u - \\ &\quad - \frac{\omega_x^2 \omega_y^2 M}{a_{12}} v \varphi = 0, \\ \varphi'' + \omega_\varphi^2 \left\{ 1 - \frac{2kM}{N_\varphi} [(u')^2 + (v')^2 + uu'' + vv''] \right\} \varphi - \\ &\quad - \frac{\omega_\varphi^2 \omega_y^2 M}{a_{21}} uv = 0. \end{aligned} \right\} (19.48)$$

Эта система полностью соответствует системе в частных производных (19.41) и соотношениям (19.42) и (19.43). Разница остается, разумеется, лишь в том, что уравнения (19.48) не учитывают распределенной массы балки. Опуская в первом уравнении v'' , во втором и третьем — члены с v' и v'' и исключая из двух последних уравнений v , получим систему, с точностью до постоянных коэффициентов совпадающую с (19.30). Совпадение станет еще более очевидным, если вернуться к прежним обозначениям

$$\frac{kM\omega_x^2}{N_x} = \frac{R^3}{r^2} \frac{kM\omega_\varphi^2}{N_\varphi} = \chi,$$

$$\frac{k_1 M \omega_x^2}{a_{12}} = \frac{R^2 k_1 M \omega_\varphi^2}{a_{21}} = I_1.$$

2. Будем искать следующее периодическое решение:

$$\left. \begin{aligned} v &= V_0 + V_t \cos \theta t + \dots, \\ u &= U \sin \frac{\theta t}{2} + \dots, \quad \varphi = \Phi \sin \frac{\theta t}{2} + \dots \end{aligned} \right\} (19.49)$$

члены, содержащие гармоники, опущены). Подставим выражения (19.49) в (19.48). Приравнявая в первом уравнении коэффициенты при 1 и $\cos \theta t$, в двух других — при $\sin \theta t/2$,

получим алгебраическую систему:

$$\omega_y^2 V_0 = \frac{P_0}{M},$$

$$(\omega_y^2 - \theta^2) V_t + \frac{I_1 \theta^2}{2} U \Phi = \frac{P_t}{M},$$

$$\begin{aligned} (\omega_x^2 - \frac{1}{4} \theta^2) U - \frac{1}{4} \chi \theta^2 U^3 - \chi \theta^2 V_0 V_t U - \\ - \frac{M \omega_y^2}{a_{12}} \omega_x^2 \Phi \left(V_0 - \frac{1}{2} V_t \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\omega_\varphi^2 - \frac{1}{4} \theta^2) \Phi - \frac{1}{4} \chi \theta^2 U^2 \Phi - \chi \theta^2 \frac{r^2}{R^2} V_0 V_t \Phi - \\ - \frac{M \omega_y^2 \omega_\varphi^2 U}{a_{21}} \left(V_0 - \frac{1}{2} V_t \right) = 0. \end{aligned}$$

При помощи первых двух уравнений легко исключим из последних V_0 и V_t . Пренебрегая малым значением V_0 , получим:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\theta^2}{4\omega_x^2} \right) U - \frac{1}{a_{12}} \left[P_0 - \frac{P_t}{2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_y^2} \right)} \right] \Phi - \\ - \frac{\chi \theta^2}{4\omega_x^2} U^3 - \frac{I_1 \frac{\theta^2}{\omega_x^2}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_y^2}} U \Phi^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\theta^2}{4\omega_\varphi^2} \right) \Phi - \frac{1}{a_{21}} \left[P_0 - \frac{P_t}{2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_y^2} \right)} \right] U - \\ - \frac{\chi \theta^2 r^2}{4\omega_\varphi^2 R^2} U^2 \Phi - \frac{I_1 \frac{\theta^2}{\omega_\varphi^2}}{R^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_y^2} \right)} U^2 \Phi = 0. \end{aligned}$$

Обозначим далее:

$$\frac{\theta^2}{4\omega_x^2} = n^2, \quad \frac{\theta^2}{4\omega_\varphi^2} = \frac{\omega_x^2}{\omega_\varphi^2} n^2 = \gamma n^2, \quad \frac{\theta^2}{\omega_y^2} = \frac{4\omega_x^2}{\omega_y^2} n^2 = \beta n^2. \quad (19.50)$$

Полученная система принимает вид

$$\left. \begin{aligned} (1-n^2)U + \frac{P_0 - \frac{1}{1-\beta n^2} P_t}{a_{12}} \Phi - \gamma n^2 U^3 - \frac{I_1 n^2 U \Phi^2}{1-\beta n^2} &= 0, \\ (1-\gamma n^2)\Phi + \frac{P_0 - \frac{1}{1-\beta n^2} P_t}{a_{21}} U - \alpha \gamma n^2 \frac{r^2 U^2}{R^2} \Phi - \\ &- \frac{I_1 \gamma n^2}{R^2} \frac{U^2 \Phi}{1-\beta n^2} = 0. \end{aligned} \right\} (19.51)$$

Если искать решение в виде

$$\begin{aligned} v &= V_0 + V_t \cos \theta t + \dots, \\ u &= U \cos \frac{\theta t}{2} + \dots, \quad \varphi = \Phi \sin \frac{\theta t}{2} + \dots, \end{aligned}$$

то придем к системе уравнений, отличающейся от (19.51) только знаками перед $\frac{1}{2} P_t$. Обе системы объединим, выписав их со знаками \pm перед $\frac{1}{2} P_t$. В случае $\beta = 0$, $r = R$ система (19.51) переходит в (19.34).

3. Рассмотрим сначала линейное приближение:

$$\begin{aligned} (1-n^2)U + \frac{P_0(1-\beta n^2) \pm \frac{1}{2} P_t}{a_{12}(1-\beta n^2)} \Phi &= 0, \\ (1-\gamma n^2)\Phi + \frac{P_0(1-\beta n^2) \pm \frac{1}{2} P_t}{a_{21}(1-\beta n^2)} U &= 0. \end{aligned}$$

Приравнявая определитель системы нулю, получим уравнение критических частот

$$\left| \begin{array}{cc} 1-n^2 & -\frac{P_0(1-\beta n^2) \pm \frac{1}{2} P_t}{a_{12}(1-\beta n^2)} \\ -\frac{P_0(1-\beta n^2) \pm \frac{1}{2} P_t}{a_{21}(1-\beta n^2)} & 1-\gamma n^2 \end{array} \right| = 0$$

или, раскрывая,

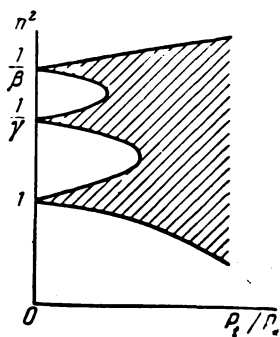
$$(1 - n^2)(1 - \beta n^2)^2(1 - \gamma n^2) + \frac{\left[P_0(1 - \beta n^2) \pm \frac{1}{2} P_t \right]^2}{P_*^2} = 0, \quad (19.52)$$

где $P_*^2 = a_{12}a_{21}$.

Уравнение (19.52) дает три области динамической неустойчивости (вблизи $n = 1$, $n = 1/\beta$, $n = 1/\gamma$, т. е. если вспомнить обозначения (19.50), вблизи $\theta = 2\omega_x$, $\theta = 2\omega_\varphi$, $\theta = \omega_y$).

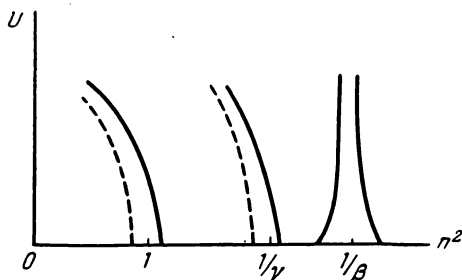
Характер распределения областей показан на фиг. 140. Если $\beta \ll 1$, то влияние вынужденных колебаний на границы главной области ($n = 1$) будет весьма невелико. Легко получаем приближенную формулу

$$n_*^2 \approx 1 - \frac{\left[P_0(1 - \beta) \pm \frac{1}{2} P_t \right]^2}{P_*^2(1 - \beta)^2(1 - \gamma)}.$$



Фиг. 140.

Возвратимся к нелинейным уравнениям (19.51). В предыдущем § 87 было показано, что влияние добавочных вертикальных инерционных сил на амплитуды колебаний при достаточно широких условиях остается незначительным. Это влияние учитывается в уравнениях (19.51) последними сла-



Фиг. 141.

гаемыми. Но значение указанных слагаемых возрастает с приближением к $n^2 = 1/\beta$, следовательно, допущение об их малости справедливо лишь для частот, отдаленных от

резонанса вынужденных колебаний. Предполагая, что $n^2 \ll 1/\beta$, получаем из (19.51) приближенное уравнение

$$\left| \begin{array}{cc} 1 - n^2(1 + xU^2) & - \frac{P_0(1 - \beta n^2) \pm \frac{1}{2} P_t}{a_{12}(1 - \beta n^2)} \\ - \frac{P_0(1 - \beta n^2) \pm \frac{1}{2} P_t}{a_{21}(1 - \beta n^2)} & 1 - \gamma n^2 \left(1 + \frac{x r^2}{R^2} U^2 \right) \end{array} \right| = 0.$$

Отсюда при $r = R$

$$(1 - n^2 x)(1 - \gamma n^2 x) = \frac{\left[P_0(1 - \beta n^2) \pm \frac{1}{2} P_t \right]^2}{P_*^2(1 - \beta n^2)^2},$$

где

$$x = 1 + xU^2.$$

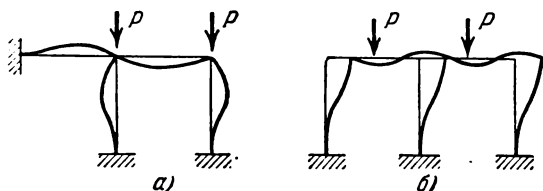
Примерный график изменения U показан на фиг. 141.

Заметим, что конечные амплитуды при $n^2 = 1/\beta$ могут быть получены при учете вертикальной нелинейной силы инерции. Если ее учесть, то резонансная кривая при $n^2 = 1/\beta$ приобретает наклон в сторону больших частот (ср. фиг. 68).

ГЛАВА ДВАДЦАТАЯ
ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТАТИЧЕСКИ
НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ

§ 89. Постановка задачи. «Точный» метод расчета

1. Различают два типа задач статической устойчивости рам. Первый тип — это задачи об устойчивости рам, нагруженных узловой нагрузкой, точнее, об устойчивости безизгибной формы равновесия таких рам (фиг. 142, а). В этом



Фиг. 142.

случае силы, приложенные в узлах, играют роль параметрической нагрузки по отношению к изгибным деформациям рамы. Ко второму типу относятся задачи об устойчивости симметричной формы изгиба симметричных и симметрично нагруженных рам (фиг. 142, б). Здесь внешняя нагрузка является параметрической по отношению к кососимметричным деформациям.

Задача о динамической устойчивости возникает каждый раз, когда действующая на раму нагрузка является, кроме того, вибрационной. Следует и здесь различать два типа задач — о динамической устойчивости безизгибной формы и о динамической устойчивости симметричной формы рамы.

2. Пусть рама находится под действием узловых периодических сил. Частоты всех сил будем считать одинаковыми. Дифференциальные уравнения движения, составленные для каждого стержня, имеют вид

$$EJ_i \frac{\partial^4 v_i}{\partial s^4} + (\alpha N_{0i} + \beta N_{ti} \cos \theta t) \frac{\partial^2 v_i}{\partial s^2} + m_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = 0 \quad (20.1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, p),$$

где обозначено: $v_i(s, t)$ — поперечный прогиб i -го стержня, EJ_i и m_i — его жесткость и погонная масса соответственно, $\alpha N_{0i} + \beta N_{ti} \cos \theta t$ — возникающая в стержне динамическая продольная сила, α и β — параметры, с точностью до которых заданы постоянная и периодическая составляющие внешней нагрузки. Общее число уравнений p равно числу элементов рамы. Решения уравнений (20.1) должны удовлетворять геометрическим и динамическим граничным условиям.

Существенным является то, что задача сведена к дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами. Как известно, границам областей неустойчивости для этих уравнений соответствуют периодические решения с периодом $2\pi/\theta$ и $4\pi/\theta$. Рассмотрим одно из уравнений (20.1), опустив при этом индекс:

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} + (\alpha N_0 + \beta N_t \cos \theta t) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (20.2)$$

Периодические решения с периодом $4\pi/\theta$ ищем в форме рядов

$$v(s, t) = \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} X_k(s) \sin \frac{k\theta t}{2} \quad (20.3)$$

или

$$v(s, t) = \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \Xi_k(s) \cos \frac{k\theta t}{2}. \quad (20.4)$$

В разложениях (20.3) и (20.4) $X_k(s)$ и $\Xi_k(s)$ — неизвестные пока функции. Если подставить ряд (20.3) в уравнение

(20.2), получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} EJ \frac{d^4 X_1}{ds^4} + \left(\alpha N_0 - \frac{1}{2} \beta N_t \right) \frac{d^2 X_1}{ds^2} - \frac{1}{4} m \theta^2 X_1 + \\ + \frac{1}{2} \beta N_t \frac{d^2 X_3}{ds^2} = 0, \\ EJ \frac{d^4 X_k}{ds^4} + \alpha N_0 \frac{d^2 X_k}{ds^2} - \frac{1}{4} m k^2 \theta^2 X_k + \\ + \frac{1}{2} \beta N_t \left(\frac{d^2 X_{k-2}}{ds^2} + \frac{d^2 X_{k+2}}{ds^2} \right) = 0 \\ (k = 3, 5, \dots). \end{aligned} \right\} (20.5)$$

Подставив ряд (20.4), получим аналогично:

$$\left. \begin{aligned} EJ \frac{d^4 \Xi_1}{ds^4} + \left(\alpha N_0 + \frac{1}{2} \beta N_t \right) \frac{d^2 \Xi_1}{ds^2} - \frac{1}{4} m \theta^2 \Xi_1 + \\ + \frac{1}{2} \beta N_t \frac{d^2 \Xi_3}{ds^2} = 0, \\ EJ \frac{d^4 \Xi_k}{ds^4} + \alpha N_0 \frac{d^2 \Xi_k}{ds^2} - \frac{1}{4} m k^2 \theta^2 \Xi_k + \\ + \frac{1}{2} \beta N_t \left(\frac{d^2 \Xi_{k-2}}{ds^2} + \frac{d^2 \Xi_{k+2}}{ds^2} \right) = 0 \\ (k = 3, 5, \dots). \end{aligned} \right\} (20.6)$$

Будем считать в дальнейшем, что число членов в рядах (20.3) и (20.4) ограничено и равно n . Общее решение системы (20.5) имеет вид

$$X_i(s) = \sum_{k=1}^{4n} C_{ik} e^{\rho_k s} \quad (i = 1, 3, \dots, 2n - 1),$$

где C_{ik} — постоянные интегрирования, а ρ_k — корни характеристического уравнения

$$\left| \begin{array}{ccc} EJ\rho^4 + \left(\alpha N_0 - \frac{1}{2} \beta N_t \right) \rho^2 - \frac{1}{4} m \theta^2 & \frac{1}{2} \beta N_t \rho^2 & 0 \dots \\ \frac{1}{2} \beta N_t \rho^2 & EJ\rho^4 + \alpha N_0 \rho^2 - \frac{9}{4} m \theta^2 & \frac{1}{2} \beta N_t \rho^2 \dots \\ 0 & \frac{1}{2} \beta N_t \rho^2 & EJ\rho^4 + \alpha N_0 - \frac{25}{4} m \theta^2 \dots \end{array} \right| = 0 \quad (20.7)$$

Общее решение системы (20.6) будет иметь вид

$$\Xi_i(s) = \sum_{k=1}^{4n} D_{ik} e^{\sigma_i s} \quad (i = 1, 3, \dots, 2n - 1),$$

а соответствующее характеристическое уравнение отличается от (20.7) знаком перед $\frac{1}{2} \beta$ в верхнем диагональном элементе.

Если уравнение (20.7) решено, остается выбрать постоянные C_{ik} и D_{ik} так, чтобы были удовлетворены граничные условия. Для определения постоянных будем иметь системы однородных алгебраических уравнений. Приравняв нулю определители этих систем, получим искомые уравнения критических частот. При этом предполагается, что все выкладки могут быть проделаны в общем виде относительно возбуждающей частоты θ .

Расчеты несколько упрощаются, если придерживаться известного из строительной механики метода перемещений. Вычисления аналогичны в этом случае расчету рам на колебания и статическую устойчивость по методу перемещений, хотя значительно сложнее.

Если нас интересуют главные области динамической неустойчивости, то в рядах (20.3) и (20.4) можно оставить первые члены:

$$v(s, t) = X(s) \sin \frac{\theta t}{2} \quad \text{или} \quad v(s, t) = \Xi(s) \cos \frac{\theta t}{2}.$$

Тогда характеристическое уравнение принимает вид

$$EJ\rho^4 + \left(\alpha N_0 \pm \frac{1}{2} \beta N_t \right) \rho^2 - \frac{1}{4} m \theta^2 = 0,$$

а определение критических частот сведется к отысканию собственных частот для рамы, нагруженной внешней статической нагрузкой с параметрами α , $\frac{1}{2} \beta$ и α , $-\frac{1}{2} \beta$.

3. Описанный метод может быть назван «точным», поскольку дифференциальные уравнения (20.1) здесь удовлетворяются для каждой гармоники. Метод же, основанный на разложении форм колебаний в ряды по «подходящим» фундаментальным функциям, будем называть в отличие от первого приближенным. Применительно к рамам, однако, эффективность второго метода невелика. В ряде случаев

можно получить первые две-три аппроксимирующие функции, загружая раму некоторой наперед выбранной нагрузкой и строя полную картину деформации. На таком способе задания аппроксимирующих функций основан, в частности, энергетический метод определения собственных частот. Вычисления, однако, весьма трудоемки, особенно в многократно статически неопределимых рамах, и недостаточно надежны вследствие произвола в выборе силового воздействия.

Ниже излагается приближенный метод расчета рам на колебания и устойчивость, который, будучи основан на аппроксимации форм колебаний рамы при помощи некоторых функций, позволяет миновать определение перемещений в статически неопределимой системе. Остановимся сначала на расчете рам на колебания; этот расчет может представить самостоятельный интерес ¹⁾.

§ 90. Приближенный метод расчета рам на колебания

1. Условившись относительно способа отсчета координат точек рамы s , введем функцию $v(s)$, дающую смещение каждой точки в направлении, перпендикулярном к оси данного элемента (поперечный прогиб элементов рамы). Деформированное состояние рамы будет определено, если кроме функции $v(s)$ мы будем знать продольное перемещение каждого элемента рамы u_j ²⁾.

Выбрав некоторую подходящую систему аппроксимирующих функций $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ..., $\varphi_n(s)$, будем искать выражение для динамических прогибов рамы в виде

$$v(s, t) = \sum_{k=1}^n z_k(t) \varphi_k(s), \quad (20.8)$$

где $z_k(t)$ — «обобщенные координаты». Соответственно продольное перемещение j -го стержня рамы может быть представлено в виде

$$u_j(t) = \sum_{k=1}^n z_k(t) \gamma_{jk}. \quad (20.9)$$

Здесь γ_{jk} — смещение j -го стержня от $z_k = 1$.

¹⁾ Болотин В. В., Приближенный метод расчета рам на колебания. Труды МЭИ, вып. 17 (Механика). Госэнергоиздат, 1955.

²⁾ Мы придерживаемся обычного допущения о том, что продольные деформации стержней пренебрежимо малы.

Составим для рассматриваемой задачи уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial z_i} (U - T) = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (20.10)$$

где T и U — соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы, Q_i — обобщенные силы.

Кинетическая энергия рамы определяется следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \int m(s) \left(\sum_{k=1}^n \frac{dz_k}{dt} \varphi_k \right)^2 ds + \frac{1}{2} \sum_j M_j \left(\sum_{k=1}^n \frac{dz_k}{dt} \gamma_{jk} \right)^2.$$

Через $m(s)$ обозначена отнесенная к единице длины масса элементов рамы, через M_j — суммарная масса j -го элемента. Интегрирование и суммирование распространяется по всем стержням рамы.

Потенциальная энергия изгиба составляет:

$$U = \frac{1}{2} \int EJ(s) \left(\sum_{k=1}^n z_k \frac{d^2 \varphi_k}{ds^2} \right)^2 ds,$$

где EJ — изгибная жесткость.

Наконец, работа внешней нагрузки

$$V = \int q(s, t) \sum_{k=1}^n z_k \varphi_k(s) ds + \sum_j P_j \sum_{k=1}^n z_k \gamma_{jk}.$$

Здесь $q(s, t)$ — погонная поперечная нагрузка, P_j — проекция равнодействующей всех сил, приложенных к j -му элементу, на направление длины этого элемента.

Составляя производную $\partial V / \partial z_i$, получим выражение для обобщенной силы

$$Q_i = \int q(s, t) \varphi_i(s) ds + \sum_j P_j \gamma_{ji}. \quad (20.11)$$

Внеся найденные выражения в уравнения (20.10), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{d^2 z_k}{dt^2} \left[\int m(s) \varphi_i \varphi_k ds + \sum_j M_j \gamma_{ji} \gamma_{jk} \right] + \\ + \sum_{k=1}^n z_k \int EJ(s) \frac{d^2 \varphi_i}{ds^2} \frac{d^2 \varphi_k}{ds^2} ds = Q_i \\ (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

В дальнейшем записываем эти уравнения в виде

$$\sum_{k=1}^n f_{ik} z_k'' + \sum_{k=1}^n r_{ik} z_k = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (20.12)$$

где для сокращения введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} f_{ik} &= \int m(s) \varphi_i \varphi_k ds + \sum_j M_{j'l} j_i' j_k', \\ r_{ik} &= \int EJ(s) \frac{d^2 \varphi_i}{ds^2} \frac{d^2 \varphi_k}{ds^2} ds. \end{aligned} \right\} \quad (20.13)$$

Штрихами обозначено дифференцирование по времени.

Хотя при выводе уравнений (20.12) масса $m(s)$ и нагрузка $q(s, t)$ считались распределенными по длине, эти уравнения будут справедливы и в случае сосредоточенных масс (сил). Тогда интегралы в формулах (20.11) и (20.13) следует толковать в смысле Стильтьеса.

В задаче о собственных колебаниях ($Q_i \equiv 0$) подстановка

$$z_k = Z_k \sin(\omega t + \lambda)$$

приводит к уравнению собственных частот

$$|F - \omega^2 R| = 0. \quad (20.14)$$

Здесь F и R — матрицы с элементами f_{ik} и r_{ik} соответственно.

В случае вынужденных колебаний без ограничения общности результатов можно считать частоты всех сил одинаковыми. Решение неоднородной системы

$$\sum_{k=1}^n f_{ik} z_k'' + \sum_{k=1}^n r_{ik} z_k = \bar{Q}_i \cos \theta t \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

имеет вид

$$z_k = Z_k \cos \theta t.$$

В результате приходим к системе уравнений

$$\sum_{k=1}^n (f_{ik} - \theta^2 r_{ik}) z_k = \bar{Q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (20.15)$$

решив которую, найдем амплитуды вынужденных колебаний Z_k .

2. Перейдем к основному вопросу — о выборе фундаментальных (аппроксимирующих) функций в выражениях (20.8) и (20.9).

Как уже упоминалось, в качестве фундаментальных функций обычно принимают формы статического изгиба рамы от некоторых силовых воздействий. Последние назначаются таким образом, чтобы формы изгиба достаточно походили на формы собственных (или вынужденных) колебаний рамы. Однако при таком выборе фундаментальных функций составлению основных уравнений предшествуют большие вычисления, связанные с построением полной картины деформаций в статически неопределимой системе. Объем вычислений быстро возрастает с увеличением степени статической (или кинематической) неопределимости рамы, поэтому сфера применения такого метода практически ограничивается простейшими задачами.

Трудности, связанные с определением перемещений в статически неопределимой системе, можно обойти, если в качестве фундаментальных функций принять формы изгиба элементов рамы в основной системе метода перемещений.

Пусть n_0 — число неизвестных при расчете рамы по методу перемещений (степень кинематической неопределимости). Тогда в качестве первых n_0 фундаментальных функций можно взять формы статического изгиба стержней рамы от соответствующих единичных воздействий (фиг. 143). Остальные фундаментальные функции выбираются при $z_1 = z_2 = \dots = z_{n_0} = 0$; их число определяется необходимой точностью вычислений (фиг. 144).

Рассмотрим первые n_0 уравнений системы (20.12), отбросив в них члены при $k > n_0$:

$$\sum_{k=1}^{n_0} f_{ik} z_k'' + \sum_{k=1}^{n_0} r_{ik} z_k = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n_0). \quad (20.16)$$

Учитывая, что

$$\frac{d^2 \varphi_i}{ds^2} = \frac{\bar{M}_i}{EJ(s)},$$

где \bar{M}_i — изгибающий момент от i -го единичного воздействия, можем представить коэффициенты r_{ik} в виде

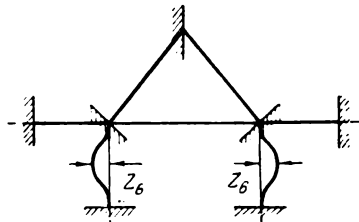
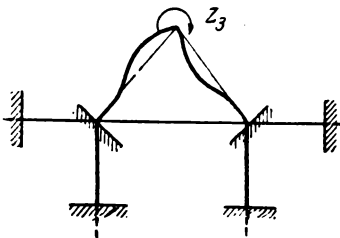
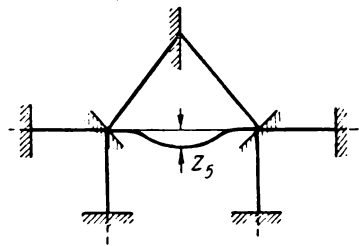
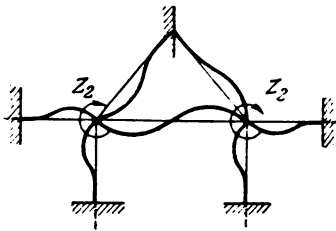
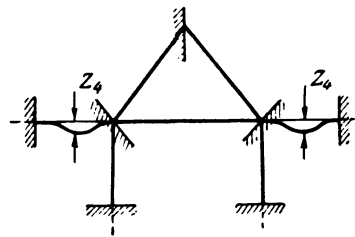
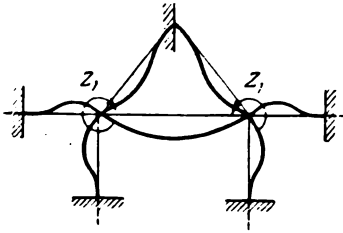
$$r_{ik} = \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EJ(s)} ds.$$

Таким образом, коэффициенты r_{ik} при $i, k \leq n_0$ представляют собой обычные единичные реакции в методе перемещений.

Далее, на основании теоремы о взаимности работ имеет место соотношение

$$\varphi_i(s) = -R_i(s) \quad (i = 1, 2, \dots, n_0),$$

где $R_i(s)$ — реакция по направлению перемещения z_i от



Фиг. 143.

Фиг. 144.

действия единичной сосредоточенной силы, приложенной перпендикулярно к оси стержня в точке с координатой s . Аналогично

$$\gamma_{ji} = -R_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n_0),$$

где R_{ij} — соответствующая реакция от единичной продольной силы, приложенной к j -му стержню.

Используя эти соотношения, преобразуем формулу (20.13) для коэффициентов f_{ik} к виду

$$f_{ik} = - \int R_i(s) m(s) \varphi_k ds - \sum_j R_{ij} M_{j\ell} J_{jk}.$$

Таким образом, выражения типа $f_{ik} z_k''$ ($i \leq n_0$) представляют собой реакции по направлению соответствующих неизвестных от инерционных сил, возникающих на перемещении z_k .

Наконец, обобщенная сила (20.11) может быть представлена в виде

$$Q_i = - \int R_i(s) q(s, t) ds - \sum_j R_{ij} P_j \quad (i \leq n_0)$$

и, следовательно, может быть истолкована как обычная грузовая реакция (с обратным знаком).

Итак, уравнения (20.16) — это по существу уравнения метода перемещений, при составлении которых принято, что формы динамического изгиба стержней рамы совпадают с формами статического изгиба от соответствующих воздействий. Поэтому при $n = n_0$ уравнение собственных частот (20.14) и уравнение вынужденных колебаний (20.15) совершенно аналогичны уравнениям «точного» метода, в основе которого также лежит метод перемещений. В отличие от уравнений «точного» метода они не содержат трансцендентных функций¹⁾.

При $n > n_0$ уравнения (20.12), (20.14) и (20.15) уже не находят аналогии с «точным» методом.

Несколько слов о сходимости метода. Деформированное состояние рамы будет полностью определено, если, помимо всех неизвестных метода перемещений z_1, z_2, \dots, z_n , задана деформация каждого стержня в основной системе метода перемещений. Таким образом, ряд (20.8) может быть представлен в виде

$$v(s, t) = \sum_{k=1}^{n_0} z_k(t) \varphi_k(s) + v_1(s, t).$$

¹⁾ Здесь $v_1(s, t)$ — динамический прогиб каждого стержня в основной системе (т. е. стержня, заделанного обоими кон-

1) Эти уравнения можно получить и непосредственно из уравнений «точного» метода, разлагая трансцендентные функции в ряды и удерживая первые члены (ср. Корноухов Н. В., Прочность и устойчивость стержневых систем, 1949).

цами или заделанного одним концом и опертого на другом.) Возьмем систему форм собственных колебаний такого стержня $\psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_i(s), \dots$. Такая система, как известно, является полной, поэтому любая форма изгиба $v_1(s, t)$ может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд

$$v_1(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} z_{n_0+i}(t) \psi_i(s).$$

Следовательно, беря в разложении (20.8) в качестве $\varphi_k(s)$ при $k \leq n_0$ статические формы изгиба от единичных перемещений z_k , а при $k > n_0$ — формы собственных колебаний стержней основной системы, каждый раз будем получать равномерно и абсолютно сходящиеся ряды.

При решении практических задач, если речь идет об определении низших собственных частот или расчете на низкочастотную вибрационную нагрузку, можно ограничиться «главной частью» ряда (20.8) при $n = n_0$. Особенности применения метода будут видны из дальнейших примеров.

3. При составлении уравнения собственных частот целесообразно рассматривать каждый элемент определителя (20.14) как единичную реакцию, вычисленную с учетом инерционных сил

$$\tilde{r}_{ik} = r_{ik} - \omega^2 f_{ik}.$$

Аналогичные величины можно ввести и при расчете на вынужденные колебания

$$\tilde{r}_{ik} = r_{ik} - \theta^2 f_{ik}.$$

Будем называть эти величины *динамическими реакциями*. Как видно из (20.13), они сохраняют свойство взаимности $\tilde{r}_{ik} = \tilde{r}_{ki}$.

Для вычисления динамических реакций нет, однако, необходимости каждый раз прибегать к вычислению квадратур типа (20.13). Достаточно определить эти реакции для простейших элементов основной системы (т. е. стержня, заделанного обоими концами или заделанного одним концом и опертого на другом). Дальнейшие вычисления сводятся к простому суммированию реакций согласно обычной процедуре метода перемещений.

Необходимые данные содержатся в таблице I. В качестве фундаментальных функций $\varphi_i(s)$ при $i \leq n_0$ взяты формы

изгиба стержней от единичных перемещений, а при $l > n_0$ — формы изгиба от поперечной равномерно распределенной нагрузки. Масса и жесткость по длине каждого стержня приняты постоянными.

Таблица I

Картина деформации						
Эпюра изгибающих моментов						
M_A	$\frac{4EJ}{l} - \frac{m\omega^2 l^3}{105}$	$\frac{6EJ}{l^3} - \frac{11m\omega^2 l^3}{210}$	$-\frac{2}{35} m\omega^2 l^3$	$\frac{3EJ}{l} - \frac{2m\omega^2 l^3}{105}$	$\frac{3EJ}{l^3} - \frac{3m\omega^2 l^3}{35}$	$-\frac{19}{210} m\omega^2 l^3$
M_B	$\frac{2EJ}{l} + \frac{m\omega^2 l^3}{140}$	$\frac{6EJ}{l^3} + \frac{13m\omega^2 l^3}{420}$	$-\frac{2}{35} m\omega^2 l^3$	0	0	0
Q_A	$\frac{6EJ}{l^2} - \frac{11m\omega^2 l^3}{210}$	$\frac{12EJ}{l^3} - \frac{13m\omega^2 l^3}{35}$	$-\frac{4}{15} m\omega^2 l^3$	$\frac{3EJ}{l^2} - \frac{3m\omega^2 l^3}{35}$	$\frac{3EJ}{l^3} - \frac{17m\omega^2 l^3}{35}$	$-\frac{5}{14} m\omega^2 l^3$
Q_B	$\frac{6EJ}{l^2} + \frac{13m\omega^2 l^3}{420}$	$\frac{12EJ}{l^3} + \frac{9m\omega^2 l^3}{70}$	$-\frac{4}{15} m\omega^2 l^3$	$\frac{3EJ}{l^2} + \frac{11m\omega^2 l^3}{280}$	$\frac{3EJ}{l^3} + \frac{39m\omega^2 l^3}{280}$	$-\frac{27}{70} m\omega^2 l^3$
\tilde{r}_{ik}	$-\frac{2}{35} m\omega^2 l^3$	$-\frac{4}{15} m\omega^2 l^3$	$\frac{1024EJ}{5l^4} - \frac{128m\omega^2 l^3}{315}$	$-\frac{19}{210} m\omega^2 l^3$	$-\frac{5}{14} m\omega^2 l^3$	$\frac{576EJ}{5l^4} - \frac{152m\omega^2 l^3}{315}$

Покажем способ составления таблицы на примере стержня, заделанного обоими концами. Давая одной из заделок единичный поворот и единичное смещение, определим статический прогиб в каждом случае:

$$\varphi(x) = x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \quad \psi(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}. \quad (20.17)$$

Согласно формуле (20.13) изгибающий момент в верхней заделке с учетом инерционной нагрузки будет:

$$M_A = EJ \int_0^l \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 dx - m \omega^2 \int_0^l \varphi^2 dx.$$

В нижней заделке соответственно:

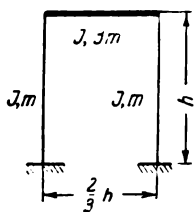
$$M_B = EJ \int_0^l \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \frac{d^2 \varphi(l-x)}{dx^2} dx - m \omega^2 \int_0^l \varphi(x) \varphi(l-x) dx.$$

Поперечная сила в верхней заделке от единичного поворота

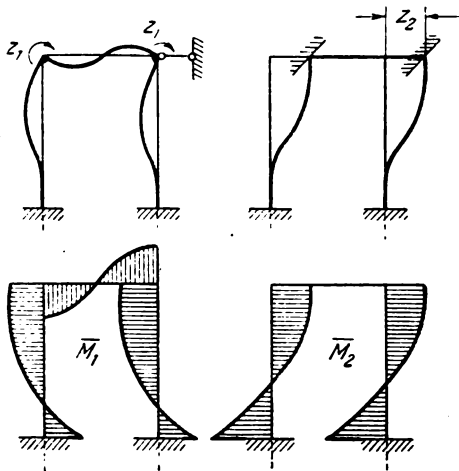
$$Q_A = EJ \int_0^l \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \frac{d^2 \psi}{dx^2} dx - m \omega^2 \int_0^l \varphi \psi dx$$

и т. д. Подставляя сюда (20.17), определим реакции \tilde{r}_{ik} , которые содержатся в таблице I. Между прочим, нужно вычислить лишь вторые интегралы; первые слагаемые — это известные единичные реакции r_{ik} .

4. Рассмотрим числовой пример. Определим низшую частоту



Фиг. 145.



Фиг. 146.

собственных колебаний рамы, изображенной на фиг. 145.

Так как низшей частоте соответствует кососимметричная форма колебаний, выберем фундаментальные функции, как показано на фиг. 146. Для облегчения вычислений построены

единичные эпюры. При помощи таблицы I находим:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{11} &= \frac{26EJ}{h} - \frac{4}{189} m\omega^2 h^3, \\ \tilde{r}_{12} = \tilde{r}_{21} &= -\frac{12EJ}{h^2} + \frac{11}{105} m\omega^2 h^2, \quad \tilde{r}_{22} = \frac{24EJ}{h^3} - \frac{96}{35} m\omega^2 h. \end{aligned}$$

Уравнение собственной частоты (20.14) принимает вид

$$\begin{vmatrix} 26 - 0,021\lambda & -12 + 0,105\lambda \\ -12 + 0,105\lambda & 24 - 2,750\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{где } \lambda = \frac{m\omega^2 h^4}{EJ}.$$

Раскрывая определитель, приходим к уравнению

$$0,051\lambda^2 + 17,73\lambda - 120 = 0,$$

наименьший корень которого $\lambda = 6,90$. Следовательно, низшая собственная частота составляет:

$$\omega = \frac{2,63}{h^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}},$$

что практически совпадает с точным значением ¹⁾.

Вывод о высокой точности приближенного метода при $n = n_0$ был бы, однако, преждевременным. Напротив, если рама не имеет линейных смещений (или рассматривается форма колебаний без линейных смещений), то n_0 фундаментальных функций недостаточно для удовлетворительного описания деформаций. Это будет видно из следующего примера.

Определим вторую собственную частоту для рамы, рассмотренной выше (фиг. 145). Второй частоте соответствует симметричная форма колебаний. Ограничимся сначала обобщенной координатой — групповым симметричным поворотом (фиг. 147). Динамическая реакция составляет:

$$r_{33} = \frac{14EJ}{h} - \frac{46}{945} m\omega^2 h^3.$$

Приравнявая ее нулю, находим $\lambda = 288$, откуда

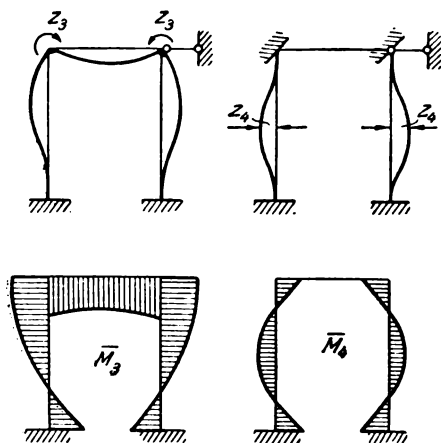
$$\omega = \frac{17,00}{h^2} \sqrt{\frac{EJ}{h}};$$

это значение ω на 19% отличается от точного (см. сноску):

$$\omega = \frac{14,29}{h^2} \sqrt{\frac{EJ}{h}}.$$

¹⁾ См. Гогенемзер К. и Прагер В., Динамика сооружений, ОНТИ, 1936, стр. 179, откуда взяты данные для примера.

Такое большое расхождение объясняется тем, что форма статического изгиба мало подходит для изображения симметричной формы колебаний рамы.



Фиг. 147.

Учтем дополнительный изгиб стоек, введя функцию ψ_4 (фиг. 147). При помощи таблицы I находим:

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{44} &= \frac{2048 EJ}{5 h^3} - \frac{256}{315} m\omega^2 h, \\ \tilde{r}_{34} &= \tilde{r}_{43} = -\frac{4}{35} m\omega^2 h^2.\end{aligned}$$

Решение уравнения

$$\begin{vmatrix} 14 - 0,049\lambda & -0,114\lambda \\ -0,114\lambda & 409,6 - 0,82\lambda \end{vmatrix} = 0$$

дает $\lambda = 222$, т. е.

$$\omega = \frac{14,95}{h^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Расхождение здесь уже доведено до 5%. Если, кроме того, учесть деформацию ригеля, погрешность уменьшится до 0,8%.

Б. Итак, приближенный метод более эффективен в случае рам со смещающимися узлами, т. е. как раз там,

где применение обычных методов требует значительных вычислений.

Приведенный выше пример был разобран для иллюстрации метода, основная же сфера его применения — сложные рамы с переменной по длине элементов массой и жесткостью и т. д. Разумеется, в последнем случае таблица I должна быть расширена ¹⁾.

§ 91. Расчет рам на статическую устойчивость

1. Рассмотрим раму, находящуюся под действием статической узловой нагрузки, заданной с точностью до параметра α (фиг. 148). Продольную силу, возникающую в элементах рамы, обозначим через $\alpha N(s)$. Попреемному будем искать решение задачи в виде ряда

$$v(s) = \sum_{k=1}^n z_k \varphi_k(s), \quad (20.18)$$

где $\varphi_k(s)$ при $k \leq n_0$ — формы изгиба рамы от единичных воздействий в методе перемещений, при $k > n_0$ — формы изгиба в основной системе метода перемещений от некоторой поперечной нагрузки; z_k — числа, подлежащие определению. Для статического случая уравнения Лагранжа (20.10) принимают вид

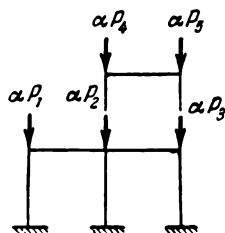
$$\frac{\partial U}{\partial z_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

или, иначе,

$$\sum_{k=1}^n z_k r_{ik} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (20.19)$$

где Q_i — обобщенные силы. Отбрасывая в формуле (20.11) второе слагаемое (в задачах устойчивости оно, за немногим исключением, не понадобится), получим:

$$Q_i = \int_L q(s) \varphi_i(s) ds, \quad (20.20)$$



Фиг. 148.

¹⁾ См. работу автора, цит. на стр. 502.

где $q(s)$ — погонная поперечная нагрузка. При помощи поперечной силы $Q(s)$ представим (20.20) в виде интеграла Стильтьеса

$$Q_i = \int_L \varphi_i(s) dQ(s).$$

Отсюда, интегрируя по частям, получим:

$$Q_i = - \int_L Q(s) \frac{d\varphi_i}{ds} ds. \quad (20.21)$$

Влияние продольных сил на изгибную деформацию учтем, введя в формулу (18.21) поперечную силу

$$Q(s) = - \alpha N(s) \frac{dv}{ds}.$$

Следовательно,

$$Q_i = \alpha \int_L N(s) \frac{d\varphi_i}{ds} \frac{dv}{ds} ds = \alpha \sum_{k=1}^n z_k \int_L N(s) \frac{d\varphi_i}{ds} \frac{d\varphi_k}{ds} ds. \quad (20.22)$$

Введем обозначение

$$\int_L N(s) \frac{d\varphi_i}{ds} \frac{d\varphi_k}{ds} ds = s_{ik}. \quad (20.23)$$

С учетом (20.22) и (20.23) система уравнений (20.19) принимает вид

$$\sum_{k=1}^n (r_{ik} - \alpha s_{ik}) z_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (20.24)$$

Как и при расчете на колебания, первые n_0 уравнений могут быть истолкованы как уравнения метода перемещений, для остальных уравнений эта аналогия утрачивается. Как видно из (20.23), единичные «реакции», найденные с учетом продольной силы

$$\tilde{r}_{ik} = r_{ik} - \alpha s_{ik},$$

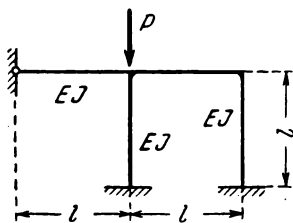
обладают свойством симметрии. Приравнивая нулю определитель системы (20.24), получим уравнение критических параметров

$$|R - \alpha S| = 0,$$

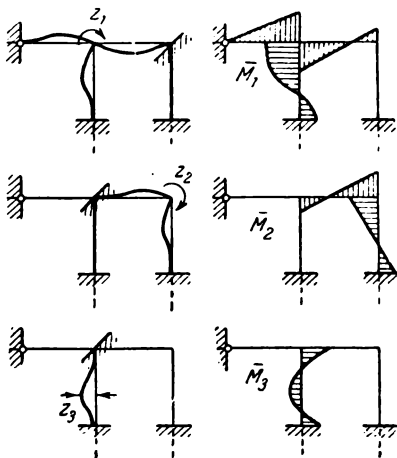
где S — матрица с элементами s_{ik} . Оно дает в общем случае n корней α_k , которые все оказываются вещественными. Последнее вытекает из симметрии матриц R и S .

При решении практических задач первых n_0 фундаментальных функций достаточно для изображения деформации элементов, не нагруженных продольной силой, и лишь для сжатых стержней приходится вводить дополнительные обобщенные координаты.

В приводимой ниже таблице II содержатся необходимые данные для вычисления единичных



Фиг. 149.



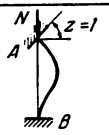
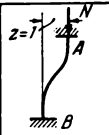
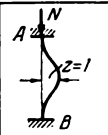
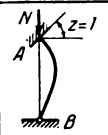
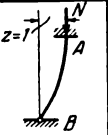
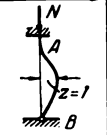
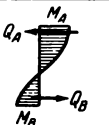
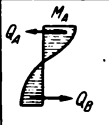
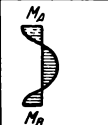
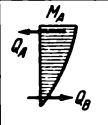
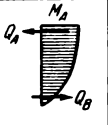
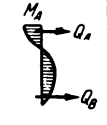
Фиг. 150.

реакций. Продольная сила принята постоянной по длине каждого стержня. Пользование таблицей такое же, как в расчете на колебания. Особенности будут выяснены на численных примерах.

2. Определим минимальную критическую силу для рамы, изображенной на фиг. 149.

Фундаментальные функции и соответствующие единичные эпюры даны на фиг. 150. Функции $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ соответствуют единичным поворотам узлов рамы, функция $\psi_3(s)$, введенная только для нагруженного стержня, представляет форму изгиба под действием распределенной поперечной нагрузки. Итак, для удовлетворительного описания деформаций рамы достаточно трех обобщенных координат.

Таблица II

Картина деформации						
Эпюры изгибающих моментов						

M_A	$\frac{4EJ}{l} - \frac{2}{15} NI$	$\frac{6EJ}{P} - \frac{1}{10} N$	$-\frac{8}{15} N$	$\frac{3EJ}{l} - \frac{1}{5} NI$	$\frac{3EJ}{P} - \frac{1}{5} N$	$-\frac{4}{5} N$
M_B	$\frac{2EJ}{l} + \frac{1}{15} NI$	$\frac{6EJ}{P} - \frac{1}{10} N$	$-\frac{8}{15} N$	0	0	0
Q_A	$\frac{6EJ}{P} - \frac{1}{10} N$	$\frac{12EJ}{P} - \frac{6}{5} N$	0	$\frac{3EJ}{P} - \frac{1}{5} N$	$\frac{3EJ}{P} - \frac{6}{5} N$	$-\frac{4}{5} \frac{N}{l}$
Q_B	$\frac{6EJ}{P} - \frac{1}{10} N$	$\frac{12EJ}{P} - \frac{6}{5} N$	0	$\frac{3EJ}{P} - \frac{1}{5} N$	$\frac{3EJ}{P} - \frac{6}{5} N$	$-\frac{4}{5} \frac{N}{l}$
\tilde{r}_{ik}	$-\frac{8}{15} N$	0	$\frac{1024EJ}{5P^2} - \frac{512}{105} \frac{N}{l}$	$-\frac{4}{5} N$	$-\frac{4}{5} \frac{N}{l}$	$\frac{576EJ}{5P^2} - \frac{192}{35} \frac{N}{l}$

При помощи таблицы определяем единичные реакции:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r}_{11} &= 11 \frac{EJ}{l} - \frac{2}{15} Pl, & \tilde{r}_{22} &= 8 \frac{EJ}{l}, \\ \tilde{r}_{33} &= \frac{1024 EJ}{5 P^2} - \frac{512 P}{105 l}, & \tilde{r}_{12} &= \tilde{r}_{21} = \frac{2EJ}{l}, \\ \tilde{r}_{13} &= \tilde{r}_{31} = \frac{8 P}{15 l}, & \tilde{r}_{23} &= \tilde{r}_{32} = 0. \end{aligned} \right\} (20.25)$$

Уравнение статической устойчивости имеет вид

$$\begin{vmatrix} 11 - 0,133\alpha & 2 & 0,53\alpha \\ 2 & 8 & 0 \\ 0,53\alpha & 0 & 204,8 - 4,85\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

где обозначено:

$$\alpha = \frac{Pl^3}{EJ}.$$

Для определения α_* имеем уравнение

$$2,909\alpha^2 - 627,2\alpha + 17\,220 = 0,$$

минимальный корень которого $\alpha_* = 32,29$. Следовательно,

$$P_* = 32,29 \frac{EJ}{l^2},$$

что отличается от точного значения¹⁾ на $4^0/0$.

3. Если узлы рамы имеют линейные смещения, то необходимость во введении дополнительных координат, как правило, отпадает. Это значит, что при помощи данного метода наиболее просто рассчитываются именно те типы рам, расчет которых обычными методами наиболее трудоемок. Проиллюстрируем это на примере рамы, показанной на фиг. 151.

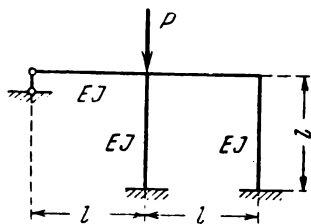
В дополнение к единичным реакциям (20.25) линейное смещение дает (фиг. 152):

$$\tilde{r}_{44} = \frac{24EJ}{l^3} - \frac{6}{5} \frac{P}{l},$$

$$\tilde{r}'_{14} = \tilde{r}_{41} = \frac{6EJ}{l^2} - \frac{1}{10} P,$$

$$\tilde{r}_{24} = \tilde{r}_{42} = \frac{6EJ}{l^2},$$

$$\tilde{r}_{34} = \tilde{r}_{43} = 0.$$



Фиг. 151.

Составим уравнение статической устойчивости:

$$\begin{vmatrix} 11 - 0,133\alpha & 2 & 0,533\alpha & 6 - 0,1\alpha \\ 2 & 8 & 0 & 6 \\ 0,533\alpha & 0 & 204,8 - 4,87\alpha & 0 \\ 6 - 0,1\alpha & 6 & 0 & 24 - 1,2\alpha \end{vmatrix} = 0, \quad (20.26)$$

где оставлено прежнее обозначение для α .

Ограничимся координатами z_1 , z_2 и z_4 , учет которых, как мы сейчас увидим, дает необходимую точность. Уравнение

1) См. Смирнов А. Ф., Статическая и динамическая устойчивость сооружений. Трансжелдориздат, 1947, стр. 197, откуда взяты данные для примера.

(20.26) принимает вид

$$\begin{vmatrix} 11 - 0,133\alpha & 2 & 6 - 0,1\alpha \\ 2 & 8 & 6 \\ 6 - 0,1\alpha & 6 & 24 - 1,2\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрытие определителя дает:

$$1,20\alpha^2 - 114,3\alpha + 1476 = 0,$$

откуда $\alpha_* = 15,41$ и, следовательно,

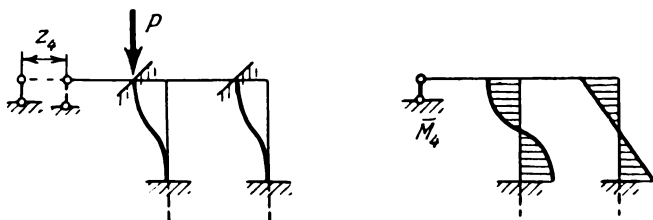
$$P_* = 15,41 \frac{EJ}{l^2}.$$

Рассчитывая раму «точным» методом, мы получили бы значение

$$P_* = 15,1 \frac{EJ}{l^2}.$$

Разница, таким образом, немногим превышает $2^0/0$.

4. Описанный аппарат целиком пригоден к расчету на устойчивость симметричной формы изгиба рамы (фиг. 142, б).



Фиг. 152.

Уравнения (20.24) распадаются в этом случае на две группы, одна из которых содержит симметричные, вторая — кососимметричные неизвестные.

Если рама нагружена узловой нагрузкой, то обе системы будут однородными. Это означает, что возможна постановка задачи как о симметричных, так и о кососимметричных формах потери устойчивости. Другое дело, если нагрузка внеузловая и, следовательно, уже заданная исходная форма равновесия — изгибаемая. В этом случае система уравнений, соответствующая симметричной форме изгиба, будет неоднородной:

$$\sum_{k=1}^{n_1} (r_{ik} - \alpha s_{ik}) z_k = Q_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n_1), \quad (20.27)$$

где n_1 — число симметричных неизвестных, а Q_i вычисляется только от поперечного изгиба:

$$Q_i = \int \varphi_i(s) dQ(s) + \sum_j P_{j/i} j_i. \quad (20.28)$$

Система (20.27) с правой частью (20.28) решает вопрос о продольно-поперечном изгибе симметричной сжато-изогнутой рамы.

Рассмотрим теперь кососимметричную группу уравнений. Вследствие симметрии внешняя нагрузка ортогональна к кососимметричным формам изгиба, поэтому все $Q_i \equiv 0$ ($n_1 < i \leq n$). Мы получаем, таким образом, однородную систему

$$\sum_{k=n_1+1}^n (r_{ik} - \alpha s_{ik}) z_k = 0 \quad (i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n),$$

решающую вопрос об устойчивости симметричной формы равновесия.

Здесь необходима существенная оговорка. При составлении уравнений (20.24) молчаливо предполагалось, что потеря устойчивости происходит из первоначального, неискривленного состояния рамы. Как и при анализе устойчивости арок, здесь варьировалась безизгибная форма равновесия. Между тем, потере устойчивости сжато-изогнутой рамы предшествуют обычно большие изгибные деформации.

Сказанное в отношении сжато-изогнутых рам в известной степени сохраняет силу и для рам, стержни которых испытывают центральное сжатие. Дело в том, что излагаемый метод (как, впрочем, и другие методы расчета на устойчивость) не учитывает предварительных продольных деформаций, т. е. «обжатия». С их учетом рама с самого начала работает как сжато-изогнутая система. Очевидно, обычное понимание задачи устойчивости здесь должно быть заменено другим. То, что делается сейчас в этой области (имеется в виду так называемый «деформационный расчет» рам, арок и т. п.), — это пока первые подходы к решению весьма интересной проблемы.

§ 92. Расчет рам на динамическую устойчивость

1. Описанные выше приближенные методы допускают общий подход к задачам колебаний и статической устойчивости, следовательно, и к задачам динамической устойчивости.

Допустим, что рама загружена внешней узловой нагрузкой, вызывающей в ее стержнях продольную силу

$$N(s, t) = (\alpha + \beta \cos \theta t) N_t(s).$$

Полагая

$$v(s, t) = \sum_{k=1}^n z_k(t) \varphi_k(s),$$

составим уравнения Лагранжа (20.10) для этой задачи. Вычисления, подобные приведенным выше, дают:

$$\sum_{k=1}^n f_{ik} z_k'' + \sum_{k=1}^n [r_{ik} - (\alpha + \beta \cos \theta t) s_{ik}] z_k = 0$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Иначе, в матричной форме,

$$Fz'' + [R - (\alpha + \beta \cos \theta t) S] z = 0. \quad (20.29)$$

Здесь z — вектор с компонентами $z_k(t)$. Частные случаи уравнения (20.29) — уравнения собственных колебаний и статической устойчивости — следуют из него с очевидностью. Менее очевиден другой частный случай. Пусть рама загружена статической нагрузкой $\alpha N(s)$. Уравнение колебаний такой рамы имеет вид

$$Fz'' + (R - \alpha S) z = 0.$$

Подстановка

$$z = Z \sin(\Omega t + \delta),$$

где Ω — собственная частота, δ — фаза колебаний, дает:

$$(R - \alpha S - \Omega^2 F) z = 0.$$

Приравнявая нулю определитель однородной системы, получаем уравнение частот

$$|R - \alpha S - \Omega^2 F| = 0. \quad (20.30)$$

Уравнение (20.30) позволяет проследить влияние узловой нагрузки на собственные частоты рамы. Легко видеть, что учет продольных сил почти не усложняет определение собственных частот, в то время как использование известных методов привело бы к многократному увеличению счетной работы.

Умножая уравнение (20.29) слева на R^{-1} и обозначая $R^{-1}F = C$, $R^{-1}S = A$, приведем его к обычному виду

$$Cz'' + [E - (\alpha + \beta \cos \theta t) A]z = 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что выводы общей теории немедленно распространяются и на задачи динамической устойчивости рам.

Что касается практического вычисления матричных элементов r_{ik} , f_{ik} и s_{ik} , то для этого могут быть использованы таблицы I и II. Например, коэффициент f_{ik} — это инерционный член из таблицы I, разделенный на $-\omega^2$.

2. Применение уравнения (20.29) покажем на примере (фиг. 153). Вследствие симметрии прямо- и кососимметричные колебания могут быть рассмотрены отдельно. Начнем с последних.

Используя результаты примера из § 90, составим матрицу

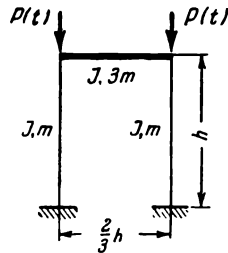
$$R = \begin{vmatrix} \frac{26EJ}{h} & -\frac{12EJ}{h^2} \\ -\frac{12EJ}{h^2} & \frac{24EJ}{h^3} \end{vmatrix}.$$

Аналогично получим:

$$F = \begin{vmatrix} \frac{4}{189} mh^3 & -\frac{11}{105} mh^2 \\ -\frac{11}{105} mh^2 & \frac{96}{35} mh \end{vmatrix}.$$

Составим, наконец, матрицу S , для чего обратимся к таблице II. Элементы s_{ik} найдем, деля вторые слагаемые на $-N$ (силу $P_0 + P_t \cos \theta t$ примем за параметр, с точностью до которого задана нагрузка). Тогда

$$S = \begin{vmatrix} \frac{4}{15} h & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{12}{5h} \end{vmatrix}.$$



Фиг. 153.

В первом приближении границы главных областей неустойчивости определим из уравнения

$$\left| R - \left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t \right) S - \frac{1}{4} \theta^2 F \right| = 0.$$

В развернутой форме оно имеет вид

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{26EJ}{h} - \left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t \right) \frac{4}{15} h - \frac{mh^6 \theta^2}{189} & -\frac{12EJ}{h^2} - \left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t \right) \frac{1}{5} + \frac{11}{420} mh^6 \theta^2 \\ -\frac{12EJ}{h^2} - \left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t \right) \frac{1}{5} + \frac{11}{420} mh^6 \theta^2 & \frac{24EJ}{h^3} - \left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t \right) \frac{12}{5h} - \frac{24}{35} mh^6 \theta^2 \end{array} \right| = 0. \quad (20.31)$$

Для сокращения введем безразмерные величины

$$\frac{mh^6 \theta^2}{4EJ} = \lambda,$$

$$\frac{P_0 h^2}{EJ} = \alpha,$$

$$\frac{P_t h^2}{EJ} = \beta.$$

Тогда уравнение (20.31) запишется в виде

$$\left| \begin{array}{cc} 26 - 0,267 \left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) - 0,213\lambda & -12 + 0,20 \left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) + 0,105\lambda \\ -12 + 0,20 \left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) + 0,105\lambda & 24 - 2,4 \left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) - 2,75\lambda \end{array} \right| = 0. \quad (20.32)$$

Минимальная критическая сила для рамы может быть определена из (20.32) при $\lambda = \beta = 0$. Решив уравнение, находим:

$$P_* = 6,92 \frac{EJ}{h^2}.$$

Пусть $P_0 = 0,5P_*$, $P_t = 0,1P_*$. Тогда $\alpha = 3,46$, $\beta = 0,069$. Решая уравнение (20.32), находим две области неустойчивости. Одна лежит в интервале $6,23 \leq \lambda \leq 6,51$, другая —

в интервале $1394 \leq \lambda \leq 1401$. В пересчете на возбуждающие частоты это дает:

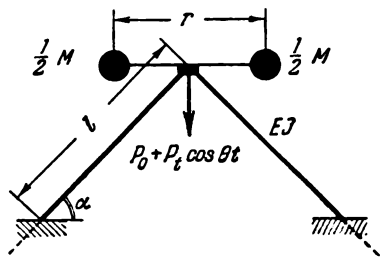
$$\frac{5,0}{h^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \leq \theta \leq \frac{5,1}{h^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad \frac{74,8}{h^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \leq \theta \leq \frac{74,9}{h^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Аналогично рассчитываются симметричные формы колебаний. Достаточно учесть две первые симметричные формы изгиба. На этом пока ограничимся. Два других примера будут рассмотрены ниже в связи с нелинейной теорией.

§ 93. Определение амплитуд в резонансном случае

1. Для того чтобы показать применение нелинейной теории, рассмотрим простейшую раму, изображенную на фиг. 154. Предположим, что в узле имеется сосредоточенная масса M с моментом инерции Mr^2 , стержни же рамы будем считать невесомыми.

Основная форма колебаний такой рамы — кососимметричная (фиг. 155, а). Если гибкость стержней достаточно велика ($\lambda > 40$), то продольными колебаниями можно пренебречь. Поставив перед собой задачу оценить порядок амплитуд в резонансном случае, ограничимся первым грубым приближением ($n = n_0 = 1$). Уравнение изгибных колебаний получим, пользуясь таблицами I и II:



Фиг. 154.

$$2 \frac{4EJ}{l} z - 2 \frac{2}{15} Nl + Mr^2 z'' = 0,$$

где N — продольная сила, действующая в каждой стойке. Иначе,

$$z'' + \omega^2 \left(1 - \frac{N}{N_*}\right) z = 0. \quad (20.33)$$

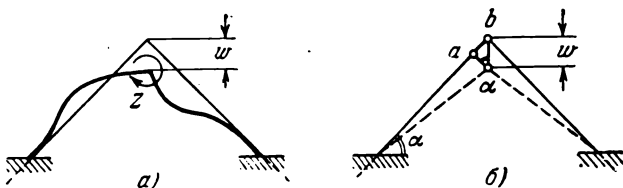
Здесь

$$\omega^2 = \frac{8EJ}{Mr^2 l}, \quad N_* = \frac{30EJ}{l^2}. \quad (20.34)$$

Для определения продольной силы N рассмотрим динамическое равновесие вырезанного узла:

$$2N \sin \alpha = P_0 + P_t \cos \theta t - M\omega'', \quad (20.35)$$

где ω — вертикальное перемещение узла, которое легко может быть найдено из геометрических соображений. Дей-



Фиг. 155.

ствительно, (фиг. 155, б) $\omega = \frac{ab}{\sin \alpha}$, где ab — разность между длиной дуги наклонной стойки и ее проекции

$$ab = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Аппроксимируя форму изгиба при помощи кривой статического прогиба от поворота узла на угол z

$$v(x) = z \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right),$$

после вычисления квадратуры получаем:

$$\omega = \frac{z^2 l}{15 \sin \alpha}.$$

Отсюда

$$2N \sin \alpha = P_0 + P_t \cos \theta t - \frac{2Ml}{15 \sin \alpha} [(z')^2 + zz''].$$

Подставляя выражение для $N(t)$ в (20.33), приходим к уравнению

$$z'' + \omega^2 \left(1 - \frac{P_0 + P_t \cos \theta t}{P_*} \right) z + \frac{2M\omega^2 l}{15P_* \sin \alpha} z [(z')^2 + zz''] = 0, \quad (20.36)$$

где

$$P_* = \frac{60EJ \sin \alpha}{l^2}.$$

Обозначив, далее,

$$\frac{M\omega^2 l}{15P_* \sin \alpha} = \kappa, \quad \omega^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_*}\right) = \Omega^2, \quad \frac{P_t}{2(P_* - P_0)} = \mu,$$

представим уравнение (20.36) в знакомом виде

$$z'' + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) z + 2\kappa z [(z')^2 + zz''] = 0.$$

Оценим порядок возможных амплитуд. При главном резонансе

$$a^2 \sim \frac{2\mu}{\kappa}.$$

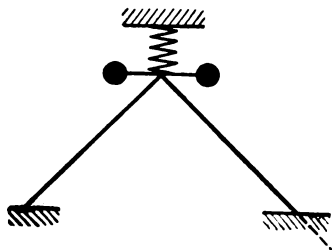
Используя (20.34), формулу для κ можно представить в виде

$$\kappa = \frac{2}{225} \frac{r^2}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Следовательно,

$$a \sim 10,6 \frac{r \sin \alpha}{l} \sqrt{\frac{P_t}{P_* - P_0}}, \quad (20.37)$$

где амплитуда a получается в радианах. Пусть, например, $P_t = 0,05P_*$, $P_0 = 0$, $r = 0,05l$, $\alpha = 45^\circ$. Тогда по формуле (20.37) $a \sim 0,083$ радиана, т. е. примерно 5° . Замечательно, что амплитуды возрастают пропорционально радиусу инерции массы.



Фиг. 156.

2. Систему с нелинейной инерционностью и нелинейной упругостью получим, вводя упругую связь, как показано на фиг. 156.

Пусть c — коэффициент связи, тогда вместо (20.35) будем иметь:

$$2N \sin \alpha = P_0 + P_t \cos \theta t - M\omega'' - c\omega,$$

где попрежнему

$$\omega = \frac{z^2 l}{15 \sin \alpha}.$$

Исключая из уравнения (20.33) продольную силу N , получим:

$$z'' + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) z + 2\kappa z [(z')^2 + zz''] + \gamma z^3 = 0.$$

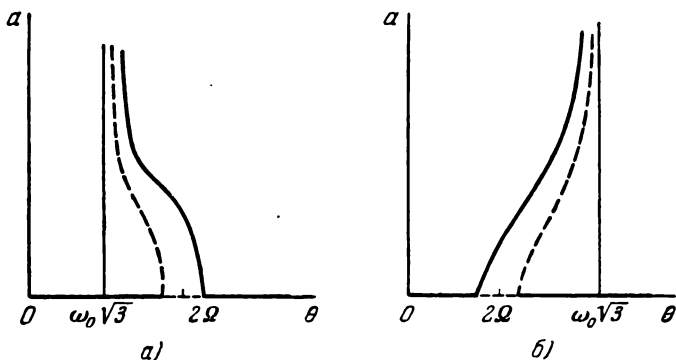
Здесь

$$\gamma = \frac{c\omega^2 l}{15P_* \sin \alpha}.$$

С учетом формул (20.34) найдем:

$$\gamma = \kappa \frac{c}{M} = \kappa \omega_0^2,$$

где ω_0 — собственная частота системы «нелинейная упругость — нелинейная инерционность». В зависимости от соотношения $\omega_0 \sqrt{3} \leq 2\Omega$, резонансные кривые будут иметь вид, показанный на фиг. 157, а и б.



Фиг. 157.

3. Следующий пример представляет рама, показанная на фиг. 158. При бесконечно жестком ригеле колебания рамы могут быть описаны при помощи одной координаты — линейного смещения z . Проектируя все силы, действующие на ригель, на горизонталь и используя таблицы I и II, получим:

$$2z \left(\frac{12EJ}{l^3} - \frac{6}{5l} N \right) + Mz'' + \frac{13}{35} mlz'' = 0.$$

Через N обозначена продольная сила в стойках, через M — масса ригеля, ml — масса стойки. Полученное уравнение можно привести к виду (20.33):

$$z'' + \omega^2 \left(1 - \frac{N}{N_*} \right) z = 0, \quad (20.38)$$

положив

$$\omega^2 = \frac{24EJ}{\left(M + \frac{13}{35}ml\right)l^3}, \quad N_* = \frac{10EJ}{l^2}.$$

Для определения динамической продольной силы рассмотрим вертикальные колебания ригеля. Легко получим (присоединенной массой стоек пренебрегаем):

$$N = P_0 + P_t \cos \theta t - M\omega'', \quad (20.39)$$

где

$$\omega = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Прогиб стоек от линейного смещения составляет:

$$v(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right)z.$$

Вычисляя интеграл, находим:

$$\omega = \frac{6z^2}{5l}. \quad (20.40)$$

Подставим (20.39) и (20.40) в (20.38). В результате получим уравнение

$$z'' + \omega^2 \left(1 - \frac{P_0 + P_t \cos \theta t}{P_*}\right)z + 2xz[(z')^2 + zz''] = 0,$$

где

$$P_* = \frac{20EJ}{l^2}, \quad x = \frac{6M\omega^2}{5P_*l}.$$

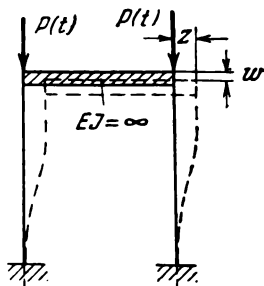
Оценим порядок амплитуд. Легко видеть, что

$$x = \frac{12}{5l^2} \frac{M}{M + \frac{13}{35}ml} \sim \frac{12}{5l^2}.$$

Отсюда амплитуды на нижней границе главной области

$$a \sim 1,55l \sqrt{\frac{P_t}{P_* - P_0}}.$$

В случае $P_t = 0,05P_*$, $P_0 = 0$ получаем $a \sim 0,347l$. Следовательно, амплитуды в резонансном случае могут быть весьма велики. Заметим, что затухание не учитывалось.



Фиг. 158.

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ПЕРВАЯ
ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНОК

**§ 94. Уравнения собственных колебаний
и статической устойчивости пластинок**

1. Пусть срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью xOy , ось Oz направлена вниз. Определение прогибов пластинки $w(x, y)$, находящейся под действием поперечной нагрузки $q(x, y)$, сводится, как известно, к интегрированию уравнения

$$\Delta\Delta w = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (21.1)$$

Здесь $\Delta\Delta$ — дифференциальный оператор

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

D — цилиндрическая жесткость

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (21.2)$$

h — толщина пластинки, ν — коэффициент Пуассона.

Введем функцию влияния прогибов $K(x, y, \xi, \eta)$ — аналитическое выражение прогиба пластинки в точке x, y от единичной силы, приложенной в точке ξ, η . Решение уравнения (21.1) может быть представлено следующим образом:

$$w(x, y) = \iint K(x, y, \xi, \eta) q(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (21.3)$$

где интегрирование, как, впрочем, и всюду в дальнейшем, распространяется на всю площадь пластинки.

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях пластинки под действием нагрузки, приложенной в ее срединной пло-

скости. Эта нагрузка является, очевидно, параметрической по отношению к прогибам $w(x, y)$. Пусть ей соответствуют напряжения плоской задачи теории упругости $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Влияние продольных сил, а также сил инерции может быть учтено с помощью приведенной нагрузки

$$q(x, y, t) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

где $N_x = h\tau_x$, $N_y = h\tau_y$, $N_{xy} = h\tau_{xy}$, m — масса пластинки, отнесенная к единице площади. Силы N_x и N_y считаются положительными, когда вызывают растяжение. Дифференциальное уравнение колебаний будет:

$$\Delta \Delta w = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \quad (21.4)$$

Сопоставляя (21.4) и (21.1) и применяя формулу (21.2), приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} w(x, y, t) + m \int \int K(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial^2 w(\xi, \eta, t)}{\partial t^2} d\xi d\eta - \\ - \int \int K(x, y, \xi, \eta) \left[N_x(\xi, \eta, t) \frac{\partial^2 w(\xi, \eta, t)}{\partial \xi^2} + \right. \\ \left. + 2N_{xy}(\xi, \eta, t) \frac{\partial^2 w(\xi, \eta, t)}{\partial \xi \partial \eta} + N_y(\xi, \eta, t) \frac{\partial^2 w(\xi, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right] d\xi d\eta = 0. \end{aligned} \quad (21.5)$$

2. Рассмотрим некоторые его частные случаи. Уравнение собственных колебаний пластинки имеет вид

$$w(x, y, t) + m \int \int K(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial^2 w(\xi, \eta, t)}{\partial t^2} d\xi d\eta = 0.$$

Полагая

$$w(x, y, t) = \varphi(x, y) \sin(\omega t + \delta),$$

где ω — частота, δ — фаза собственных колебаний, приходим после сокращения на $\sin(\omega t + \delta)$ к интегральному уравнению

$$\varphi(x, y) - \lambda \int \int K(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0. \quad (21.6)$$

Его фундаментальные числа $\lambda_k = m\omega_k^2$, а фундаментальные функции $\varphi_k(x, y)$ — формы собственных колебаний пластинки

Эти функции составляют полную ортонормированную систему в том смысле, что

$$\iint m \varphi_i \varphi_k dx = \delta_{ik} \quad (21.7)$$

(δ_{ik} — символ Кронекера) и что любая функция $f(x, y)$, представленная «истокообразно» при помощи ядра $K(x, y, \xi, \eta)$,

$$f(x, y) = \int \int K(x, y, \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по функциям $\varphi_k(x, y)$:

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x, y).$$

В частности, имеет место билинейное разложение ядра

$$K(x, y, \xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x, y) \varphi_k(\xi, \eta)}{m \omega_k^2}. \quad (21.8)$$

3. Рассмотрим другой частный случай уравнения (21.5) — уравнение статической устойчивости. Считая, что параметрическая нагрузка задана с точностью до параметра α , и опуская инерционные члены, получим:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) - \alpha \int \int K(x, y, \xi, \eta) \left[N_x(\xi, \eta) \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \right. \\ \left. + 2N_{yx}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + N_y(\xi, \eta) \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right] d\xi d\eta = 0. \quad (21.9) \end{aligned}$$

Через $\psi(x, y)$ обозначены формы изгиба пластинки при потере ею статической устойчивости.

Займемся теперь преобразованием интеграла из уравнения (21.9). Предположим, прежде всего, что на каждом участке контура соблюдается *хотя бы одно* из трех условий:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad w &= 0, \\ 2) \quad \frac{\partial w}{\partial n} &= 0, \\ 3) \quad \left\{ \begin{aligned} N_x \cos(\widehat{n}, x) + N_{xy} \cos(\widehat{n}, y) &= 0, \\ N_{yx} \cos(\widehat{n}, x) + N_y \cos(\widehat{n}, y) &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (21.10)$$

(n — нормаль к контуру). Смысл первых двух условий очевиден, последнее условие, состоящее из двух уравнений, выражает отсутствие на участке контура внешней нагрузки. В совокупности условия (21.10) сводятся к требованию, чтобы нагрузка отсутствовала на участках контура, не закрепленных от прогибов или поворотов. Подавляющее большинство практических задач условиям (21.10) удовлетворяют.

Воспользуемся формулой Грина

$$\int \int \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = \oint [u \cos(\xi, n) + v \sin(\eta, n)] ds,$$

где $u(\xi, \eta)$ и $v(\xi, \eta)$ — произвольные функции; криволинейный интеграл берется по контуру, ограничивающему область интегрирования в двойном интеграле. Допустим, что дана третья функция $f(\xi, \eta)$, непрерывная со своими первыми производными. Тогда на основании формулы Грина легко доказывается, что

$$\int \int f \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = - \int \int \left(u \frac{\partial f}{\partial \xi} + v \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta + \oint [fu \cos(\xi, n) + fv \sin(\eta, n)] ds. \quad (21.11)$$

Применим формулу (21.11) к интегралу, входящему в (21.9). Предварительно преобразуем его подинтегральное выражение, составив тождество

$$\begin{aligned} N_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + N_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \\ = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(N_x \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + N_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(N_{yx} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + N_y \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right), \end{aligned} \quad (21.12)$$

вытекающее из уравнений равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial N_{yx}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_y}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.13)$$

В рассматриваемом случае

$$f(x, y, \xi, \eta) = K(x, y, \xi, \eta), \quad u(\xi, \eta) = N_x \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + N_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial \eta},$$

$$v(\xi, \eta) = N_{yx} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + N_y \frac{\partial \psi}{\partial \eta}.$$

Формула (21.11) с учетом условий на контуре (21.10) дает:

$$\int \int K \left(N_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + N_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) d\xi d\eta = \\ = - \int \int \left[\left(N_x \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + N_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial K}{\partial \xi} + \left(N_{yx} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + N_y \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial K}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta.$$

Но на основании (21.13)

$$N_x \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + N_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} (N_x \psi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (N_{xy} \psi), \\ N_{yx} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + N_y \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} (N_{xy} \psi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (N_y \psi).$$

Вновь применяя (21.11) и используя (21.10), получаем окончательно:

$$\int \int K \left(N_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + N_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) d\xi d\eta = \\ = \int \int \left(N_x \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 K}{\partial \xi \partial \eta} + N_y \frac{\partial^2 K}{\partial \eta^2} \right) \psi d\xi d\eta.$$

Уравнение (21.9) преобразуется, таким образом, к интегральному уравнению

$$\psi(x, y) - \alpha \int \int S(x, y, \xi, \eta) \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0, \quad (21.14)$$

ядро которого имеет вид ¹⁾

$$S(x, y, \xi, \eta) = N_x(\xi, \eta) \frac{\partial^2 K(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 K(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \\ + N_y(\xi, \eta) \frac{\partial^2 K(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta^2}. \quad (21.15)$$

Интегральное уравнение статической устойчивости может быть получено и другим путем. Продифференцируем уравнение (21.9) дважды по x и умножим результат на $N_x(x, y)$, продифференцируем по x и y и умножим результат на $2N_{xy}(x, y)$, наконец, продифференцируем дважды по y и умножим на $N_y(x, y)$. Упомянутые операции законны, так как все производные существуют. Сложив полученные равенства,

¹⁾ Более общее уравнение, свободное от ограничений (21.10) было получено в § 53 непосредственно из уравнений нелинейной теории упругости. См. также Гуревич С. Г., Ученые записки ЛГУ, вып. 8, 1939.

придем к интегральному уравнению с ядром, транспонированным относительно (21.15):

$$\chi(x, y) - \alpha \iint S(\xi, \eta, x, y) \chi(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0. \quad (21.16)$$

Здесь $\chi(x, y)$ — приведенная поперечная нагрузка

$$\chi(x, y) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Фундаментальные функции уравнений (21.14) и (21.16) взаимно ортогональны:

$$\iint \psi_i \chi_k dx dy = 0 \quad (i \neq k). \quad (21.17)$$

Условие (21.17) истолковывается так же, как аналогичное условие в задаче статической устойчивости стержней.

§ 95. Вывод дифференциальных уравнений динамической устойчивости пластинок

1. Ищем решение уравнения (21.5) в виде ряда

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \varphi_k(x, y), \quad (21.18)$$

где $\varphi_k(x, y)$ — фундаментальные функции задачи собственных колебаний, $f_k(t)$ — функции времени, подлежащие определению. Сходимость ряда (21.18) следует из известных теорем теории линейных интегральных уравнений.

Подставим (21.18) в уравнение (21.5). Учитывая, что

$$\iint K(x, y, \xi, \eta) \varphi_i(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{\varphi_i(x, y)}{m\omega_i^2}$$

и используя разложение

$$\begin{aligned} \iint K(x, y, \xi, \eta) & \left[N_x(\xi, \eta, t) \frac{\partial^2 \varphi_k(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \right. \\ & \left. + 2N_{xy}(\xi, \eta, t) \frac{\partial^2 \varphi_k(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \right. \\ & \left. + N_y(\xi, \eta, t) \frac{\partial^2 \varphi_k(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right] d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{\infty} F_{ik}(t) \varphi_i(x, y), \end{aligned}$$

приходим к системе дифференциальных уравнений относительно коэффициентов ряда (21.18):

$$f_i'' + \omega_i^2 [f_i - \sum_{k=1}^{\infty} F_{ik}(t) f_k] = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (21.19)$$

Функции $F_{ik}(t)$ определены по формуле

$$F_{ik}(t) = \frac{1}{m\omega_i^2} \int \int \varphi_i \left(N_x \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

штрихами обозначено дифференцирование по времени.

Переходим к рассмотрению случая, когда действующая на пластинку нагрузка является периодической. Пренебрегая в линейном приближении продольными силами инерции, будем выражать усилия через квазистатические напряжения плоской задачи

$$\begin{aligned} N_x(x, y, t) &= \alpha N_x(x, y) + \beta \Phi(t) N_{xt}(x, y), \\ N_{xy}(x, y, t) &= \alpha N_{xy}(x, y) + \beta \Phi(t) N_{xyt}(x, y), \\ N_y(x, y, t) &= \alpha N_y(x, y) + \beta \Phi(t) N_{yt}(x, y). \end{aligned}$$

Здесь α и β — параметры, с точностью до которых заданы постоянная и периодическая составляющие нагрузки. Уравнения (21.19) принимают вид

$$f_i'' + \omega_i^2 [f_i - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k - \beta \Phi(t) \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} f_k] = 0 \quad (21.20)$$

$(i = 1, 2, 3, \dots)$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{ik} &= \frac{1}{m\omega_i^2} \int \int \varphi_i \left(N_x \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \right) dx dy, \\ b_{ik} &= \frac{1}{m\omega_i^2} \int \int \varphi_i \left(N_{xt} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + 2N_{xyt} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y} + N_{yt} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \right) dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (21.21)$$

Введем матрицы A и B с элементами a_{ik} и b_{ik} и диагональную матрицу C с элементами $c_{ik} = \delta_{ik}/\omega_i^2$. Обозначив через f матрицу-столбец, составленную из функций $f_i(t)$, запишем систему уравнений (21.20) в матричной форме

$$Cf'' + [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B]f = 0. \quad (21.22)$$

2. Покажем, что уравнения (21.20) могут быть представлены в канонической форме

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

$(i = 1, 2, 3, \dots)$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

и, следовательно, к ним применима общая теория, изложенная в главе XIV.

Переписав матричное уравнение (21.22) в виде

$$f' + C^{-1}[E - \alpha A - \beta \Phi(t)B]f = 0,$$

докажем, прежде всего, что $C^{-1}A$ и $C^{-1}B$ — симметричные матрицы. Рассмотрим, например, матрицу $C^{-1}A$. Ее элементы будут:

$$\{C^{-1}A\}_{ik} = \int \int \varphi_i \left(N_x \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

Дважды применяя к интегралу формулу (21.11) и используя граничные условия (21.10), как это сделано в § 94 в отношении аналогичного интеграла, получим:

$$\begin{aligned} \int \int \varphi_i \left(N_x \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \right) dx dy &= \\ &= \int \int \varphi_k \left(N_x \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Дальнейшее доказательство аналогично тому, которое было изложено в § 57.

§ 96. Простейшие случаи интегрирования

1. Характеристические уравнения

$$|E - \alpha A| = 0, \quad |E - \beta B| = 0 \quad (21.23)$$

дают решения задачи статической устойчивости пластинки, находящейся под действием нагрузки с параметрами α и β соответственно. Очевидно также, что частоты собственных поперечных колебаний пластинки удовлетворяют уравнению

$$|E - \omega^2 C| = 0.$$

Займемся матричным уравнением (21.22). Случай, когда все матрицы, входящие в уравнение, оказываются диагональными, назван ранее (§ 49) особым. В этом случае неизвестные функции в системе (21.20) разделяются, причем на основании

(21.23) уравнения динамической устойчивости принимают вид

$$f_k'' + \omega_k^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_k} - \frac{\beta}{\beta_k} \Phi(t) \right) f_k = 0 \quad (21.24)$$

($k = 1, 2, 3, \dots$),

где α_k и β_k — критические параметры. Установим условия, при которых задача динамической устойчивости пластинок приводит к уравнениям типа (21.24). Для того чтобы матрица A была диагональной, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int \int \varphi_i \left(N_x \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \right) dx dy = 0 \quad (21.25)$$

($k = 1, 2, 3, \dots$),

при $i \neq k$. Учитывая условие ортогональности (21.7) и полноту фундаментальных функций, приходим к выводу, что

$$N_x \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} = c_k \varphi_k \quad (21.26)$$

($k = 1, 2, 3, \dots$),

где c_k — некоторые постоянные. Введем функцию напряжений

$$N_x = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x \partial y}.$$

Соотношения (21.26) принимают вид

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} = c_k \varphi_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Полученные результаты, так же как и в задаче динамической устойчивости стержней, могут быть истолкованы как требования совпадения фундаментальных функций статической устойчивости и собственных колебаний. В самом деле, условие (21.25), выраженное через функции φ , совпадает с условием ортогональности (21.17) для фундаментальных функций статической устойчивости. Далее, подставив в интегральное уравнение (21.6) выражение для φ , найденное из формулы (21.26), получаем:

$$\varphi_k(x, y) - \frac{\lambda}{c_k} \int \int K(x, y, \xi, \eta) \left[N_x(\xi, \eta) \frac{\partial^2 \varphi_k(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \right. \\ \left. + 2N_{xy}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 \varphi_k(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + N_y(\xi, \eta) \frac{\partial^2 \varphi_k(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right] d\xi d\eta = 0.$$

Из этого следует, что фундаментальные функции задачи собственных колебаний должны удовлетворять уравнению статической устойчивости (21.9). Но обе системы являются полными; отсюда вытекает их совпадение.

2. В качестве задачи, приводящей к уравнениям типа (21.24), укажем на задачу о динамической устойчивости прямоугольной опертой по контуру пластинки, сжатой равномерно распределенными вдоль краев силами (фиг. 159):

$$\left. \begin{aligned} N_x(x, y, t) &= -(N_x + N_{xt} \cos \theta t), \\ N_y(x, y, t) &= -(N_y + N_{yt} \cos \theta t), \\ N_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.27)$$

Уравнение собственных колебаний

$$\Delta \Delta w + \frac{m}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

удовлетворяется подстановкой

$$w(x, y, t) = \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin(\omega t + \delta)$$

$$(l, k = 1, 2, 3, \dots).$$

Фундаментальные функции задачи собственных колебаний будут:

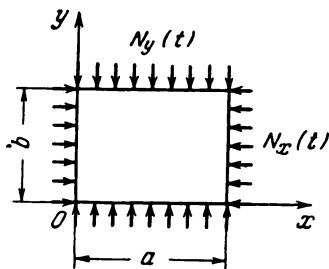
$$\varphi_{ik}(x, y) = \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}$$

или после подчинения условиям нормирования (21.7):

$$\varphi_{ik}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{abm}} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (21.28)$$

Частоты собственных колебаний незагруженной пластинки будут:

$$\omega_{ik} = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (21.29)$$



Фиг. 159.

Фундаментальным функциям и собственным частотам приписан двойной индекс в соответствии с числом полуволн в направлении осей Ox и Oy .

Уравнение статической устойчивости

$$\Delta\Delta w + \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

удовлетворяется функциями (21.28); для критических параметров нагрузки получаем соотношение

$$\frac{l^2 N_x}{a^2} + \frac{k^2 N_y}{b^2} = \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2 \pi^2 D. \quad (21.30)$$

Для случая, когда пластинка сжата в одном направлении ($N_x = 0$), получаем:

$$\left. \begin{aligned} f''_{ik} + \omega_{ik}^2 \left(1 - \frac{N_y + N_y t \cos \theta t}{N_{ik}} \right) f_{ik} = 0 \\ (i, k = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (21.31)$$

где

$$N_{ik} = \frac{k^2 \pi^2 D}{b^2} \left[1 + \left(\frac{lb}{ka} \right)^2 \right]^2. \quad (21.32)$$

Указанная задача рассматривалась в ряде работ ¹⁾. Это, однако, — не единственная задача, которая приводит к уравнениям типа (21.24). Так, аналогичные уравнения получаем для прямоугольной пластинки, лежащей на сплошном упругом основании. Дифференциальное уравнение этой задачи

$$D\Delta\Delta w + kw + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где k — коэффициент основания, также удовлетворяется функциями (21.28).

3. В некоторых других случаях приближенное решение можно получить, аппроксимируя формы колебаний при помощи какой-либо подходящей функции, удовлетворяющей граничным условиям, и применяя метод Галеркина. Покажем этот прием на примере круглой пластинки, защемленной по контуру ²⁾.

¹⁾ Боднер В. А., Прикл. матем. и мех., новая серия, т. II, вып. 1 (1938); Челомай В. Н., Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций. Аэрофлот, 1939.

²⁾ Боднер В. А., цит. выше.

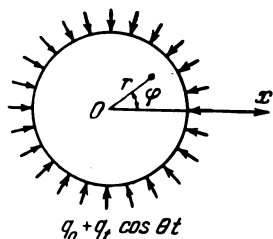
Допустим, что пластинка радиусом R сжата радиальной нагрузкой $q = q_0 + q_t \cos \theta t$ (фиг. 160). Перейдя к полярным координатам r, φ , запишем уравнение (21.4) в виде

$$D\Delta\Delta w = -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\varphi \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad (21.33)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$N_r = N_\varphi = -(q_0 + q_t \cos \theta t).$$



Фиг. 160.

Рассмотрим случай пластинки, защемленной по всему контуру:

$$w(R) = \frac{\partial w}{\partial r}(R) = 0.$$

Уравнение собственных колебаний

$$D\Delta\Delta\psi - m\omega^2\psi = 0$$

и граничные условия будут удовлетворены, если положить ¹⁾:

$$\psi(r, \varphi) = [J_n(kR)J_n(kr) - J_n(kr)J_n(kR)] \cos n\varphi.$$

Здесь $n = 1, 2, 3, \dots$, $J_n(x)$ и $I_n(x)$ — функции Бесселя n -го порядка вещественного и чисто мнимого аргументов, k — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} J_n(kR) & I_n(kR) \\ J'_n(kR) & I'_n(kR) \end{vmatrix} = 0.$$

Частоты собственных колебаний будут:

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Ищем решение задачи в форме

$$w(r, \varphi, t) = f(t)\psi(r, \varphi). \quad (21.34)$$

¹⁾ См., например, Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, ОНТИ, 1935.

Подставив (21.34) в дифференциальное уравнение (21.33), мы не получим его удовлетворения, так как формы собственных колебаний и формы потери статической устойчивости в данном случае не совпадают. Применим вариационный метод Галеркина, для чего умножим результат подстановки на $\psi(r, \varphi) r dr d\varphi$ и проинтегрируем по всей площади пластинки. Тогда для $f(t)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 \left(1 - \frac{q_0 + q_t \cos \theta t}{q_*} \right) f = 0,$$

где q_* — приближенное (в смысле метода Галеркина) критическое значение нагрузки

$$q_* = - \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} \psi^2(r, \varphi) r dr d\varphi}{\int_0^R \int_0^{2\pi} \Delta \psi(r, \varphi) \psi r dr d\varphi} m \omega^2.$$

Легко убедиться в том, что

$$\Delta [J_n(kr) \cos n\varphi] = k^2 J_n(kr) \cos n\varphi,$$

$$\Delta [I_n(kr) \cos n\varphi] = -k^2 I_n(kr) \cos n\varphi.$$

Следовательно,

$$\Delta \psi(r, \varphi) = -k^2 [I_n(kR) J_n(kr) + J_n(kR) I_n(kr)] \cos n\varphi,$$

и вычисление интегралов в формуле для q_* упрощается. Аналогичный прием может быть применен к другим видам опорного закрепления, к задаче о колебаниях кольцевой пластинки и т. п. ¹⁾

§ 97. Некоторые частные задачи ²⁾

1. Рассмотрим задачу о динамической устойчивости прямоугольной опертой по контуру пластинки, находящейся под действием периодических продольных сил:

$$N_x(y, t) = (N_0 + N_t \cos \theta t) \left(\frac{ny}{b} - 1 \right).$$

¹⁾ Боднер В. А., Прикл. мат. и мех., новая серия, т. II, вып. 1 (1938).

²⁾ Болотин В. В., Труды МЭИ им. Молотова, вып. 17 (Механика). Госэнергоиздат, 1955.

Случай $n=0$ соответствует равномерному сжатию, случай $n=2$ — чистому изгибу (фиг. 161).

Фундаментальные функции имеют вид (21.28). Согласно формулам (21.21) элементы матрицы A

$$a_{ik,pq} = \\ = -\frac{4\pi^2 p^2}{a^3 b m \omega_{ik_0}^2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{ny}{b} - 1 \right) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} dx dy.$$

Вычисления дают:

$$a_{ik,pq} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq p, \\ \frac{l^2}{\pi^2 a} \frac{1 - \frac{n}{2}}{\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2} D & \text{при } k = q, i = p, \\ -\frac{8p^2 n}{\pi^4 a^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2} D \frac{kq}{(k^2 - q^2)^2} & \text{при } i = p, \text{ если} \\ & k \pm q \text{ — нечетное} \\ & \text{число,} \\ 0 & \text{при } i = p, \text{ но если} \\ & k \pm q \text{ — четное число.} \end{cases}$$

Для определения главных областей неустойчивости воспользуемся уравнением первого приближения

$$\left| E - \left(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t \right) A - \frac{1}{4} \theta^2 C \right| = 0. \quad (21.35)$$

Приравняв нулю диагональные элементы определителя (21.35), получаем:

$$\theta_* \approx 2\omega_{ik} \sqrt{1 - \frac{\left(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t \right) \left(1 - \frac{n}{2} \right)}{\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2} \cdot \frac{l^2}{\pi a^2}} \quad (21.36)$$

Формула (21.36) дает удовлетворительные результаты при $n=0$ (чистое сжатие):

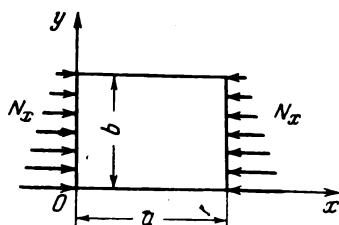
$$\theta_* \approx 2\omega_{ik} \sqrt{1 - \frac{N_0 \pm \frac{1}{2} N_t}{N_{ik}}}.$$

При увеличении n погрешность формулы (21.36) возрастает, в частности, при $n = 2$ (чистый изгиб) эта формула приводит к областям неустойчивости, вырождающимся в некоторые линии. Это означает, что при достаточно больших n следует рассмотреть дальнейшие приближения. Это видно также по той погрешности, которую дает составленное в тех же предположениях уравнение статической устойчивости

$$|E - NA| = 0.$$

А именно, если удержать в нем только диагональные члены, получим формулу

$$N_{ik} = \frac{\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)^2 \pi^2 a^2 D}{1 - \frac{n}{2} l^2},$$



Фиг. 161.

которая дает точные результаты при $n = 0$, однако при $n > 1$ точность первого приближения становится недостаточной¹⁾.

2. Легко видеть, что для рассматриваемой задачи матрица A имеет квазидиагональную структуру

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \boxed{A_n} \end{pmatrix}.$$

Каждый квазиэлемент содержит только те элементы $a_{ik, pq}$, которые имеют одинаковые индексы k, p :

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{k1, k1} & a_{k1, k2} & a_{k1, k3} & \dots \\ a_{k2, k1} & a_{k2, k2} & a_{k2, k3} & \dots \\ a_{k3, k1} & a_{k3, k2} & a_{k3, k3} & \dots \end{pmatrix}.$$

¹⁾ См., например, Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1946.

Вследствие этого дифференциальные уравнения динамической устойчивости распадаются на независимые группы, каждая из которых описывает колебания, происходящие с изгибом в направлении оси Ox по k полуволнам:

$$C_k f_k'' + [E - (N_0 + N_t \cos \theta t) A_k] f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Рассмотрим одну из таких групп, опустив для упрощения записи индекс k . В случае чистого изгиба матрица A принимает вид

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} & \dots \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & \dots \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} & \dots \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & \dots \end{vmatrix}.$$

Удерживая в уравнении (21.35) матрицы второго порядка, получим уравнение

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \frac{1}{4} \theta^2 & -\left(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t\right) a_{12} \\ -\left(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t\right) a_{21} & \omega_2^2 - \frac{1}{4} \theta^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Его решение дает следующую формулу для определения границ главных областей неустойчивости:

$$\theta_* = \frac{2\omega_1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{1 + \gamma \pm \sqrt{(1 - \gamma)^2 + 4\gamma \frac{(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t)^2}{N_*^2}}}, \quad (21.37)$$

где N_* — приближенное значение критического параметра определяемое по формуле

$$N_* = \frac{9\pi^4 a^2 D}{32k^2} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{4}{b^2}\right),$$

γ — отношение квадратов парциальных частот

$$\gamma = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \left(\frac{1 + \frac{a^2}{k^2 b^2}}{1 + \frac{4a^2}{k^2 b^2}} \right)^2.$$

Если $\gamma \ll 1$, то формуле (21.37) можно придать более обозримый вид

$$\theta_* \approx 2\omega_1 \sqrt{1 - \frac{\left(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t\right)^2}{(1-\gamma) N_*^2}},$$

$$\theta_* \approx 2\omega_2 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\left(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t\right)^2}{N_*^2}}.$$

Для дальнейшего уточнения в рамках матриц второго порядка могут быть использованы результаты § 58. Если форма пластинки мало отличается от квадрата ($a/b < 1,5$), такое приближение дает достаточную точность. В случае длинных пластинок следует вводить матрицы более высокого порядка. Так, удерживая в уравнении (21.35) матрицы третьего порядка, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{4} \frac{\theta^2}{\omega_1^2} & -\left(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t\right) a_{12} & 0 \\ -\left(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t\right) a_{21} & 1 - \frac{1}{4} \frac{\theta^2}{\omega_2^2} & -\left(N_0 \mp \frac{1}{2} N_t\right) a_{23} \\ 0 & -\left(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t\right) a_{32} & 1 - \frac{1}{4} \frac{\theta^2}{\omega_3^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Положив, что $\gamma_2 = \omega_1^2/\omega_2^2 \ll 1$, $\gamma_3 = \omega_1^2/\omega_3^2 \ll 1$, получим формулу

$$\theta_* \approx 2\omega_1 \sqrt{1 - \frac{1}{1-\gamma_2} \left(\frac{a_{23}a_{32}}{1-\gamma_3} + a_{12}a_{21} \right) \left(N_0 \pm \frac{1}{2} N_t \right)^2}.$$

3. Рассмотрим задачу о динамической устойчивости опертой прямоугольной пластинки, находящейся под действием касательных напряжений (фиг. 162). Элементы матрицы A определяются по формуле

$$a_{ik, pq} = \frac{8pq}{\pi^2 a^2 b^2 D \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2} \times$$

$$\times \int_0^a \int_0^b \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} dx dy.$$

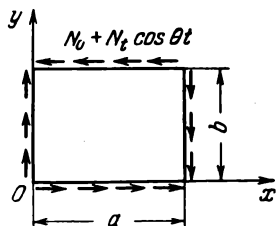
Вычисляя интеграл, найдем:

$$a_{ik, pq} = \begin{cases} \frac{32}{\pi^4 ab D} \frac{k^2}{\left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)^2} \frac{pqik}{(i^2 - p^2)(k^2 - q^2)}, & \text{если } i \neq p \text{ и} \\ & k \neq q \text{ — нечетные числа;} \\ 0, & \text{если } i \neq p \text{ или } k \neq q \text{ — четные числа.} \end{cases}$$

Структура матрицы A такова, что при надлежащей нумерации строк она становится квазидиагональной

$$A = \left\| \begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline & A_2 \end{array} \right\|.$$

Матрица A_1 содержит только те элементы $a_{ik, pq}$, для которых $i \neq k$ и $p \neq q$ — четные числа, матрица A_2 — только те, для которых $i \neq k$ и $p \neq q$ — нечетные числа. Благодаря этому основная дифференциальная система задачи распадается на две независимые системы. Рассмотрим ту из них, которая содержит минимальную собственную частоту



Фиг. 162.

$$\omega_{11} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Вектор $f(t)$ составим следующим образом:

$$f(t) = \| f_{11}(t), f_{22}(t), f_{13}(t), f_{31}(t), f_{33}(t) \|.$$

Матрица A имеет вид

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & a_{11, 22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{22, 11} & 0 & a_{22, 13} & a_{22, 31} & a_{22, 33} \\ 0 & a_{13, 22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{31, 22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{33, 22} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

С точностью до матриц второго порядка матрица A совпадает с матрицей из предыдущего примера и примера § 58.

В частности, может быть использована формула (21.37), где нужно положить:

$$N_* = \frac{9\pi^4 abD}{32} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2, \quad \gamma = \frac{1}{16}.$$

§ 98. Применение вариационных методов

1. Решение частных задач не представляет затруднений, если известны фундаментальные функции задачи собственных колебаний и напряжения плоской задачи. Если же формы собственных колебаний не известны, то за систему аппроксимирующих функций можно принять любую систему функций, удовлетворяющих условиям на контуре и достаточно подходящих для изображения форм потери динамической устойчивости пластинок:

$$w(x, y, t) \approx \sum_{k=1}^n f_k(t) \psi_k(x, y). \quad (21.38)$$

В качестве таких функций, в частности, могут быть приняты произведения соответствующих «балочных» функций.

Будем исходить из дифференциального уравнения

$$D \Delta \Delta w = -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Подставляя в него ряд (21.38) и применяя вариационный метод Галеркина, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Ff' + (R - \alpha P - \beta Q \cos \theta t)f = 0,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \{F\}_{ik} &= \int \int m \psi_i \psi_k dx dy, \\ \{R\}_{ik} &= D \int \int \psi_i \Delta \Delta \psi_k dx dy, \\ \{P\}_{ik} &= \int \int \psi_i \left(N_x \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y^2} \right) dx dy, \\ \{Q\}_{ik} &= \int \int \psi_i \left(N_{xt} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} + 2N_{xyt} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x \partial y} + N_{yt} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y^2} \right) dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (21.39)$$

Затруднения могут встретиться также при определении напряжений плоской задачи, а также при вычислении квадратур (21.39), когда эти напряжения известны, но выражаются слишком сложным образом. В качестве примера можно указать на задачу о динамической устойчивости пластинки, находящейся под действием сосредоточенных периодических сил (фиг. 163).

Трудности эти могут быть, однако, преодолены, если двойные интегралы в выражениях для $\{P\}_{ik}$ и $\{Q\}_{ik}$ преобразовать в интегралы по контуру. Впрочем, те же результаты проще получить, обратившись к уравнениям Лагранжа.

2. Покажем это на примере задачи, изображенной на фиг. 163.

В случае опертой по контуру пластинки за обобщенные координаты могут быть приняты коэффициенты ряда

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_{ik}(t) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}.$$

Потенциальная энергия деформации изгиба вычисляется по формуле

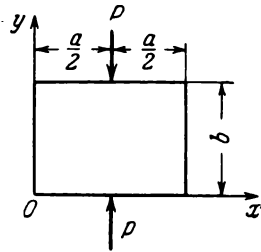
$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy.$$

Вычисления дают:

$$U = \frac{\pi^4 D}{8ab} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2 q_{ik}^2.$$

Работа внешних сил составляет:

$$V = \frac{1}{2} (P_0 + P_t \cos \theta t) \int_0^b \left(\frac{\partial w(a/2, y)}{\partial y} \right)^2 dy.$$



Фиг. 163.

После подстановки получаем:

$$V = \frac{\pi^2}{4b} (P_0 + P_t \cos \theta t) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1, 3, 5}^{\infty} (-1)^{\frac{i-1}{2}} q_{ik}(t) \right)^2.$$

Кинетическая энергия изгибных колебаний вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy.$$

Вычисления дают:

$$T = \frac{mab}{8} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{dq_{ik}}{dt} \right)^2.$$

После подстановки в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{ik}} \right) - \frac{\partial}{\partial q_{ik}} (T - U) = \frac{\partial V}{\partial q_{ik}} \quad (i, k = 1, 2, 3, \dots)$$

получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$q''_{ik} + \frac{\pi^4 D}{m} \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2 q_{ik} - \frac{2\pi^2 k (-1)^{\frac{i-1}{2}} (P_0 + P_t \cos \theta t)}{mab^2} \sum_{p=1, 3, 5}^{\infty} (-1)^{\frac{p-1}{2}} q_{ik} = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} i = 1, 3, 5, \dots, \\ k = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right),$$

$$q''_{ik} + \frac{\pi^4 D}{m} \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2 q_{ik} = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} i = 2, 4, 6, \dots, \\ k = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right).$$

В матричной форме эта система примет вид

$$Cf'' + [E - (P_0 + P_t \cos \theta t) A]f = 0,$$

где $f(t)$ — вектор с компонентами $q_{ik}(t)$, а элементы матрицы A вычисляются по формулам

$$a_{ik,pq} = \begin{cases} \frac{2k(-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{\pi^2 ab^2 D \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)^2}, & \text{если } i \text{ и } p \text{ — нечетные} \\ & \text{числа и } k = q; \\ 0, & \text{если } i \text{ или } p \text{ — четное число или } k \neq q. \end{cases}$$

Дальнейший расчет не представляет затруднений.

§ 99. Постановка нелинейной задачи. Основные уравнения ¹⁾

1. Как и в задаче о колебаниях стержней, здесь можно выделить три группы нелинейных факторов — нелинейную инерционность, нелинейное затухание и нелинейную упругость.

Первые два фактора определяются аналогично тому, как это делается при изучении динамической устойчивости стержней. Так, члены, объединенные под общим названием «нелинейная инерционность», учитывают дополнительные силы инерции, возникающие на продольных перемещениях u и v ; действительно, последние связаны с прогибом пластинки w нелинейно. Члены, характеризующие нелинейное затухание, могут быть определены, если учесть дополнительные продольные силы сопротивления, возникающие в опорных креплениях пластинки. Эти силы в первом приближении пропорциональны скоростям $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$. Впрочем, и здесь можно считать, что «нелинейное затухание» учитывает изменение коэффициента затухания в зависимости от амплитуды. При этом мы не будем связаны с каким-либо конкретным выражением нелинейной функции.

Новое по сравнению с задачей о динамической устойчивости стержней обнаруживается, если перейти к третьему нелинейному фактору — нелинейной упругости. Под общим названием «нелинейная упругость» объединяются те члены нелинейной функции, которые не содержат производных

¹⁾ Болотин В. В., Известия АН СССР (ОТН), 1954, № 10.

от перемещений по времени. В задаче о динамической устойчивости стержней к нелинейным членам такого типа приводит учет точного выражения кривизны. В задаче о динамической устойчивости пластинок необходим учет нового фактора — влияния растяжения срединной поверхности.

Как известно, элементарная теория изгиба пластинок построена на допущении, что срединная плоскость не получает при изгибе осевых деформаций. Это допущение реализуется только в частном случае, когда поверхность прогибов — развертывающаяся поверхность. В общем случае изгиб пластинки сопровождается растяжением срединной поверхности, причем возникающие при этом дополнительные напряжения будут тем значительнее, чем больше прогиб по сравнению с толщиной пластинки.

Учет растяжения срединной поверхности приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям, поскольку он связан с необходимостью введения в соответствующие уравнения компонент конечной деформации. Так, известные уравнения изгиба пластинки для случая конечных, хотя и не слишком больших прогибов, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta\Delta w &= \frac{h}{D} \left(\frac{q}{h} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \Delta\Delta \Delta &= E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (21.40)$$

где $\Delta(x, y)$ — функция напряжений. Легко видеть, что исключив из уравнений (21.40) одно из неизвестных, например $\Delta(x, y)$, мы получим уравнение, содержащее нелинейные члены третьего порядка. Эти члены и определяют нелинейную упругость системы.

В отличие от прямолинейных стержней роль нелинейной упругости в задачах динамической устойчивости пластинок весьма велика. Это можно предугадать, сопоставляя поведение центрально сжатых стержней и пластинок в после критической стадии. В то время как для стержней критическая нагрузка является практически предельной, пластинки (речь идет о пластинках, закрепленных по всему контуру) могут выдерживать нагрузку, которая в десятки раз превышает критическое значение.

Уравнения динамической задачи могут быть получены из (21.40), если ввести в них силы инерции; вибрационная нагрузка, заданная на контуре, учитывается в граничных условиях. Решение получаемой таким образом нелинейной системы связано с серьезными трудностями, которые едва ли могут быть преодолены. Ниже излагается приближенный способ решения, который позволит получить результаты в замкнутой форме.

2. В дальнейшем прогибы пластинки считаются конечными, хотя и достаточно малыми, чтобы углами поворота элементов пластинки можно было пренебречь по сравнению с единицей. В таком же предположении составлены уравнения Т. Кармана (21.40).

При изгибе пластинки в срединной поверхности возникают усилия

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}), \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}), \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (21.41)$$

где ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} — компоненты конечной деформации:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (21.42)$$

Комбинируя (21.41) и (21.42) и подставляя в уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned}$$

получим систему уравнений, связывающую u , v и w :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{m(1-\nu^2)}{Eh} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{m(1-\nu^2)}{Eh} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.43)$$

Третьим уравнением, дополняющим эту систему, будет уравнение (21.4).

Для того чтобы найти приближенное решение задачи, зададимся формой изгиба пластинки при колебаниях, положив

$$w(x, y, t) = f(t) \psi(x, y). \quad (21.44)$$

В формуле (21.44) через $\psi(x, y)$ обозначена функция, удовлетворяющая граничным условиям для w (например, форма собственных колебаний пластинки), а через $f(t)$ — неизвестная функция времени. Подстановка приводит к следующим неоднородным уравнениям¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{1+\nu}{2} - \frac{m(1-\nu^2)}{Eh} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F_x(x, y, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{1+\nu}{2} - \frac{m(1-\nu^2)}{Eh} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + F_y(x, y, t) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (21.45)$$

¹⁾ Это по существу — уравнения Ляме для плоского напряженного состояния.

где

$$\left. \begin{aligned} F_x &= f^2(t) \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right], \\ F_y &= f^2(t) \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (21.46)$$

Уравнения (21.45) могут быть решены отдельно от уравнения (21.4).

3. Рассмотрим задачу о колебаниях прямоугольной пластинки, свободно опертой по контуру, находящейся под действием периодических продольных сил (фиг. 159). Поставив целью исследовать резонанс относительно главной формы колебаний, будем искать решение в виде

$$w(x, y, t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (21.47)$$

Выражение (21.47), как было показано в § 96, дает точное решение линейной задачи для случая пластинки, находящейся под действием равномерно распределенной осевой нагрузки (при $i = k = 1$).

Подставив (21.47) в (21.46) получаем:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -\frac{\pi^3 f^2}{4a} \sin \frac{2\pi x}{a} \left[\frac{1}{a^2} - \frac{\nu}{b^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \cos \frac{2\pi y}{b} \right], \\ F_y &= -\frac{\pi^3 f^2}{4b} \sin \frac{2\pi y}{b} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{\nu}{a^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (21.48)$$

Решение уравнений (21.45) для случая (21.48) можно легко получить, если члены, учитывающие продольные силы инерции, опустить. Влияние отброшенных членов будет, очевидно, невелико, пока частота собственных поперечных колебаний пластинки мала по сравнению с частотой собственных колебаний в своей плоскости. Количественная оценка погрешности, а также способы уточненного расчета будут даны ниже. Решение системы (21.45) имеет вид

$$u(x, y, t) = A_x \sin \frac{2\pi x}{a} + C_x \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + u_0(x, y, t),$$

$$v(x, y, t) = A_y \sin \frac{2\pi y}{b} + C_y \sin \frac{2\pi y}{b} \cos \frac{2\pi x}{a} + v_0(x, y, t).$$

Здесь A_x, A_y, C_x, C_y — некоторые коэффициенты, $u_0(x, y, t), v_0(x, y, t)$ — решение однородной системы:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,$$

выбранное таким образом, чтобы удовлетворить условиям на контуре. Легко замечаем, что

$$A_x = -\frac{\pi f^2 a}{16} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{\nu}{b^2} \right),$$

$$A_y = -\frac{\pi f^2 b}{16} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{\nu}{a^2} \right).$$

Для нахождения коэффициентов C_x, C_y имеется система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_x \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1-\nu}{2b^2} \right) + C_y \frac{1+\nu}{2ab} &= \frac{\pi f^2}{16a} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right), \\ C_x \frac{1+\nu}{2ab} + C_y \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1-\nu}{2a^2} \right) &= \frac{\pi f^2}{16b} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (21.49)$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что выражения

$$C_x = \frac{\pi f^2}{16a}, \quad C_y = \frac{\pi f^2}{16b}$$

удовлетворяют системе (21.49). Итак,

$$u(x, y, t) = \frac{\pi f^2}{16a} \sin \frac{2\pi x}{a} \left(\cos \frac{2\pi y}{b} - 1 + \frac{\nu a^2}{b^2} \right) + u_0(x, y, t),$$

$$v(x, y, t) = \frac{\pi f^2}{16b} \sin \frac{2\pi y}{b} \left(\cos \frac{2\pi x}{a} - 1 + \frac{\nu b^2}{a^2} \right) + v_0(x, y, t).$$

Для определения осевых усилий получаем согласно (21.41) и (21.42):

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\pi^2 f^2}{8a^2} \left[1 + \frac{\nu a^2}{b^2} - (1-\nu^2) \cos \frac{2\pi y}{b} \right] + N_x^0, \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \left[1 + \frac{\nu b^2}{a^2} - (1-\nu^2) \cos \frac{2\pi x}{a} \right] + N_y^0, \\ N_{xy} &= N_{xy}^0, \end{aligned} \right\} \quad (21.50)$$

где обозначено:

$$N_x^0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right),$$

$$N_y^0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right),$$

$$N_{xy}^0 = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right).$$

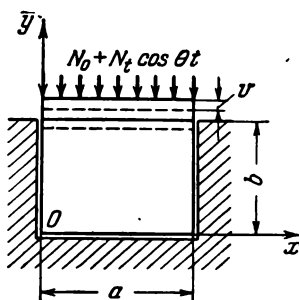
§ 100. Две нелинейные задачи ¹⁾

1. Пусть пластина сжата в направлении оси Oy нагрузкой $N(t) = N_0 + N_t \cos \theta t$, передающейся через абсолютно жесткую нагрузочную балку; иначе, край пластинки $y = b$ остается при колебаниях прямолинейным (фиг. 164). Закрепления по остальному контуру пусть устроены так, что на краях $x = 0$ и $x = a$ горизонтальные перемещения невозможны ($u = 0$); на краю $y = 0$ обращается в нуль вертикальное перемещение ($v = 0$).

Этим граничным условиям можно удовлетворить, положив

$$u_0(x, y, t) = 0,$$

$$v_0(x, y, t) = -\varphi(t) y \frac{1-\nu^2}{Eh},$$



Фиг. 164.

где $\varphi(t)$ — некоторая функция времени, подлежащая определению. А именно, $\varphi(t)$ может быть найдена из условия равновесия на краю $y = b$:

$$\int_0^a N_y dx = -(N_0 + N_t \cos \theta t) a.$$

Поскольку согласно (21.50)

$$N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \left[1 + \frac{\nu b^2}{a^2} - (1-\nu^2) \cos \frac{2\pi x}{a} \right] - \varphi(t),$$

¹⁾ См. сноску на стр. 549

получаем:

$$\varphi(t) = N_0 + N_t \cos \theta t + \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \left(1 + \frac{\nu b^2}{a^2}\right).$$

Окончательно находим усилия в срединной поверхности

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{\pi^2 f^2 Eh}{8a^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) - \nu(N_0 + N_t \cos \theta t), \\ N_y &= -\frac{\pi^2 f^2 Eh}{8b^2} \cos \frac{2\pi x}{a} - (N_0 + N_t \cos \theta t), \\ N_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\} (21.51)$$

Возвратимся к уравнению поперечных колебаний (21.4)

$$D\Delta\Delta w = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Полагая в нем

$$w(x, y, t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

и применяя вариационный метод Галеркина, получим:

$$\begin{aligned} f'' + \omega^2 f + \frac{4\pi^2 f}{abm} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{N_x}{a^2} + \frac{\nu N_y}{b^2} \right) \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} + \right. \\ \left. + \frac{N_{xy}}{2ab} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right] dx dy = 0, \end{aligned} \quad (21.52)$$

где ω — минимальная частота собственных поперечных колебаний пластинки

$$\omega = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}},$$

а штрихами попрежнему обозначено дифференцирование по времени. Подставив (21.51) в (21.52), после вычисления квадратур найдём:

$$\begin{aligned} f'' + \omega^2 f - \frac{\pi^2 f}{m} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) (N_0 + N_t \cos \theta t) + \\ + \frac{\pi^4 Eh f^3}{16m} \left(\frac{3}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) = 0. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$N_* = \frac{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 D}{\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}}.$$

Эта величина представляет собой, как видно из (21.30), критический параметр продольной статической нагрузки вида $N_x = -\nu N_0$, $N_y = -N_0$, $N_{xy} = 0$ (напомним, что края $x = 0$ и $x = a$ предположены несмещающимися, поэтому появились усилия N_x). Обозначим, далее,

$$\frac{\pi^4 E h}{16m} \left(\frac{3}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) = \frac{3(1-\nu^2)}{4h^3} \frac{3 + \frac{a^4}{b^4}}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \cdot \omega^2 = \gamma. \quad (21.53)$$

Тогда полученное уравнение запишется следующим образом:

$$f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{N_0 + N_z \cos \theta t}{N_*} \right) f + \gamma f^3 = 0. \quad (21.54)$$

Уравнение (21.54), составленное для $i = k = 1$, отличается от уравнения (21.31) наличием последнего нелинейного члена, который учитывает осевую деформацию срединной поверхности.

2. Рассмотрим частный случай уравнения (21.54) — уравнение статической устойчивости, которое получим, положив $N = \text{const}$ и отбросив инерционные члены:

$$\omega^2 \left(1 - \frac{N}{N_*} \right) f + \gamma f^3 = 0.$$

Здесь f — прогиб в центре пластинки, определяемый по формуле

$$f = \frac{\omega}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{N}{N_*} - 1} \quad (21.55)$$

или

$$f = \frac{2h \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)}{\sqrt{3(1-\nu^2) \left(3 + \frac{a^4}{b^4} \right)}} \sqrt{\frac{N}{N_*} - 1}.$$

- Формула (21.55) дает для f вещественные значения, если только $N \geq N_*$ (послекритическая стадия).

В качестве примера рассмотрим случай квадратной пластинки $a = b$, $\nu = 0,3$. Формула (21.53) дает $\gamma \approx 0,75 \frac{\omega^2}{h^2}$, откуда

$$f \approx 1,21h \sqrt{\frac{N}{N_*} - 1}.$$

С. П. Тимошенко¹⁾ решал аналогичную статическую задачу энергетическим методом и получил формулу

$$f \approx 0,845h \sqrt{\frac{N}{N_*} - 1}.$$

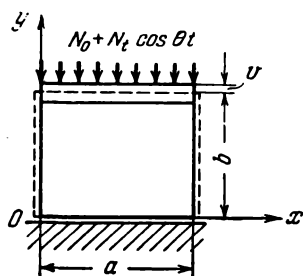
Разница в прогибах составляет около 50% и должна быть отнесена, во-первых, за счет некоторого различия в граничных условиях²⁾, во-вторых, за счет особенностей энергетического метода, дающего для деформаций заниженное значение.

Другой частный случай уравнения (21.54) — уравнение собственных колебаний

$$f'' + \omega^2 f + \gamma f^3 = 0. \quad (21.56)$$

Для нелинейной частоты $\bar{\omega}$ согласно (4.21) получаем формулу

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\omega^2} a^2}.$$



Фиг. 165.

С увеличением амплитуды собственная частота, таким образом, возрастает. Для разобранный выше примера квадратной пластинки при амплитуде колебаний $a = h$ собственная частота $\bar{\omega}$ на 25% превышает собственную частоту, подсчитанную по линейной теории.

3. Рассмотрим случай несколько отличных граничных условий. А именно, положим, что вертикальные края пластинки могут смещаться, оставаясь при этом прямолинейными (фиг. 165).

¹⁾ Цит. на стр. 542.

²⁾ В задаче, рассмотренной С. П. Тимошенко, перемещения вдоль сторон $x = 0$ и $x = a$ также равны нулю. Рассматриваемые здесь граничные условия, очевидно, мягче.

Граничным условиям можно удовлетворить с помощью выражений

$$\left. \begin{aligned} u_0(x, y, t) &= (a - 2x) \varphi_x(t) \frac{1 - \nu^2}{Eh}, \\ v_0(x, y, t) &= -y \varphi_y(t) \frac{1 - \nu^2}{Eh}, \end{aligned} \right\} \quad (21.57)$$

где $\varphi_x(t)$, $\varphi_y(t)$ — неизвестные пока функции времени. Для их определения имеем условия

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a N_y(x, b) dx &= -(N_0 + N_t \cos \theta t) a, \\ \int_0^b N_x(0, y) dy &= \int_0^b N_x(a, y) dy = 0, \end{aligned} \right\} \quad (21.58)$$

из которых второе выражает равенство нулю суммы нормальных усилий, действующих вдоль сторон $x = 0$ и $x = a$. Используя (21.50), (21.57) и (21.58), находим:

$$\begin{aligned} \varphi_x(t) &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} \frac{\pi^2 f^2}{16a^2} - \frac{\nu}{2(1 - \nu^2)} (N_0 + N_t \cos \theta t), \\ \varphi_y(t) &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} + \frac{1}{1 - \nu^2} (N_0 + N_t \cos \theta t). \end{aligned}$$

Для определения продольных усилий получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= -\frac{\pi^2 f^2 Eh}{8a^2} \cos \frac{2\pi y}{b}, \\ N_y &= -\left(\frac{\pi^2 f^2 Eh}{8b^2} \cos \frac{2\pi x}{a} + N_0 + N_t \cos \theta t \right), \end{aligned} \right\} \quad (21.59)$$

Подставив (21.59) в (21.52) и вычислив квадратуры, снова получим уравнение типа (21.54)

$$f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{N_0 + N_t \cos \theta t}{N_*} \right) f + \gamma f^3 = 0,$$

где на этот раз

$$\begin{aligned} N_* &= \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^2, \\ \gamma &= \frac{\pi^4 Eh}{16m} \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) = \frac{3\omega^2 (1 - \nu^2)}{4h^2} \cdot \frac{1 + \frac{a^4}{b^4}}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2}. \end{aligned}$$

Для квадратной пластинки при $\nu = 0,3$ находим:

$$\gamma \approx 0,341 \frac{\omega^2}{h^2},$$

откуда по формуле (21.55)

$$f \approx 1,71 \sqrt{\frac{N}{N_*} - 1}.$$

С. П. Тимошенко для аналогичной задачи получил:

$$f = 1,11h \sqrt{\frac{N}{N_*} - 1};$$

и здесь разница составляет около 50%; она может быть объяснена, как и в предыдущем случае.

Можно рассмотреть также и другие частные задачи. При сделанных выше предположениях они приводят к уравнению типа (21.54), где ω и N_* — собственная частота и критический параметр нагрузки. Если каким-либо путем решена задача о статических прогибах в послекритической стадии, то необходимость в специальном определении коэффициента γ также отпадает. Действительно, известные приближенные формулы для прогиба пластинки в послекритической стадии имеют одинаковую структуру

$$f = kh \sqrt{\frac{N}{N_*} - 1}.$$

Зная коэффициент k , легко определим коэффициент нелинейной упругости

$$\gamma = \frac{\omega^2}{k^2 h^2}.$$

Например, для круглой пластинки, защемленной по контуру и нагруженной радиальной сжимающей нагрузкой q , имеем формулу¹⁾

$$f = 2,14h \sqrt{\left(\frac{q}{q_*} - 1\right) \frac{1}{1 - \nu^2}}.$$

Отсюда

$$\gamma = \frac{\omega^2 (1 - \nu^2)}{4,58h^2}.$$

¹⁾ Григолюк Э. И., Вестн. инж. и техн., 1949, № 3.

4. Введя частоту собственных колебаний пластинки, нагруженной постоянной составляющей продольной силы

$$\Omega = \omega \sqrt{1 - \frac{N_0}{N_*}}$$

и коэффициент возбуждения

$$\mu = \frac{N_t}{2(N_* - N_0)},$$

перепишем уравнение (21.54) в виде

$$f'' + \Omega^2(1 - 2\mu \cos \theta t)f + \gamma f^3 = 0. \quad (21.60)$$

Его установившееся решение в гармоническом приближении будет:

$$f(t) = a \sin \frac{\theta t}{2} + b \cos \frac{\theta t}{2}. \quad (21.61)$$

Как было показано (§ 20), существует три решения такого типа:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } a = b = 0, \\ \text{II. } a = \frac{2\Omega}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{\frac{\theta^2}{4\Omega^2} - 1 + \mu}, \quad b = 0, \\ \text{III. } a = 0, \quad b = \frac{2\Omega}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{\frac{\theta^2}{4\Omega^2} - 1 - \mu}. \end{array} \right\} \quad (21.62)$$

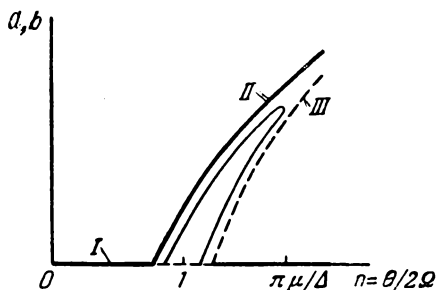
Первое из решений соответствует, очевидно, плоской форме пластинки, два других — установившимся изгибным колебаниям. Решения изображены на фиг. 166. Как видно из чертежа, решение III оказывается неустойчивым. Затягивание колебаний происходит в сторону больших частот. Добавляя в уравнение (21.60) диссипативный член, получим:

$$f'' + 2\epsilon f' + \Omega^2(1 - 2\mu \cos \theta t)f + \gamma f^3 = 0.$$

Периодические решения попрежнему ищем в виде (21.61). Ненулевые решения выражаются формулой

$$A = \frac{2\Omega}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{n^2 - 1 \pm \sqrt{\mu^2 - \frac{n^2 \Delta^2}{\pi^2}}},$$

где $A^2 = a^2 + b^2$, $n = \frac{\theta}{2\Omega}$, $\Delta = \frac{2\pi\epsilon}{\Omega}$. Как видно из полученной формулы, при наличии затухания затягивание колебаний возможно лишь для частоты, не превышающей $n = \frac{\pi\mu}{\Delta}$ (см.



Фиг. 166.

фиг. 166, где решение с учетом затухания показано тонкими линиями).

§ 101. Учет продольных сил инерции¹⁾

1. До сих пор силы инерции, возникающие на перемещениях пластинки в своей плоскости, не учитывались. Иначе говоря, варьировалась плоская форма равновесия пластинки, а не плоская форма движения. Так поступали в большинстве опубликованных ранее работ, не делая, впрочем, должных оговорок.

Для того чтобы оценить влияние колебаний пластинки в ее плоскости, поступим следующим образом. Пренебрегая силами инерции самой пластинки, будем считать, что вся «продольная» масса сосредоточена в загрузочной балке (фиг. 164). Другими словами, пусть масса балки достаточно велика по сравнению с массой пластинки. Рассмотрение условий движения балки дает:

$$\int_0^a N_y(x, b) dx = - \left(N_0 + N_t \cos \theta t + m_0 \frac{d^2 V}{dt^2} \right) a, \quad (21.63)$$

¹⁾ Болотин В. В., Изв. ОТН АН СССР, № 10, 1954.

где m_0 — погонная масса балки, а $V(t) = v(b, t)$. Балка по-прежнему считается абсолютно жесткой. Геометрическим граничным условиям первой частной задачи из § 100 удовлетворим, если примем:

$$u_0(x, y, t) = 0, \quad v_0(x, y, t) = -\varphi(t) y \frac{1-\nu^2}{Eh},$$

где $\varphi(t)$ — неизвестная функция. Тогда

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\pi^2 f^2}{8a^2} \left[1 + \frac{\nu a^2}{b^2} - (1-\nu^2) \cos \frac{2\pi y}{b} \right] - \nu \varphi(t), \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \left[1 + \frac{\nu b^2}{a^2} - (1-\nu^2) \cos \frac{2\pi x}{a} \right] - \varphi(t), \\ N_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\} (21.64)$$

Подставляя вторую из формул (21.64) в (21.63), получим уравнение, связывающее $f(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \varphi'' + \varphi = N_0 + N_t \cos \theta t + \frac{\pi^2 f^2 E h}{8(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Здесь

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Eh}{m_0 b (1-\nu^2)}}$$

— частота собственных колебаний пластинки в ее плоскости, вычисленная в предположении, что вся масса сосредоточена на краю $y = b$.

Для получения второго уравнения отправляемся от (21.51):

$$\begin{aligned} f'' + \omega^2 f + \frac{4\pi^2 f}{adm} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{N_x}{a^2} + \frac{N_y}{b^2} \right) \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} + \right. \\ \left. + \frac{N_{xy}}{2ab} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right] dx dy = 0, \end{aligned}$$

куда на этот раз подставляются выражения (21.64). Вычисляя квадратуры, найдем:

$$\begin{aligned} f'' + \omega^2 f + \frac{\pi^4 f^3 E h}{8m(1-\nu^2)} \left(\frac{3-\nu^2}{2a^4} + \frac{3-\nu^2}{2b^4} + \frac{2\nu}{a^2 b^2} \right) - \\ - \frac{\pi^2 f \varphi}{m} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

2. Итак, задача сводится к решению системы нелинейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega_0^2} \varphi'' + \varphi &= N_0 + N_t \cos \theta t + \frac{\pi^2 f^2 E h}{8(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right), \\ f'' + \omega^2 f + \lambda f^3 - \chi f \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.65)$$

Во втором уравнении для краткости обозначено:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\pi^4 E h}{8m(1-\nu^2)} \left(\frac{3-\nu^2}{2a^4} + \frac{3-\nu^2}{2b^4} + \frac{2\nu}{a^2 b^2} \right), \\ \chi &= \frac{\pi^2}{m} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right). \end{aligned}$$

Попрежнему будем искать гармоническое приближение

$$f(t) = f_0 \cos \frac{\theta t}{2}. \quad (21.66)$$

Тогда, как видно из уравнений (21.65),

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 \cos \theta t, \quad (21.67)$$

где φ_0 и φ_1 — некоторые коэффициенты. Подставляя (21.66) и (21.67) в первое из уравнений (21.65) и сравнивая постоянные слагаемые в левой и правой частях, получим:

$$\varphi_0 = N_0 + \frac{\pi^2 f_0^2 E h}{16(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right). \quad (21.68)$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos \theta t$, найдем:

$$\varphi_1 = \alpha N_t + \frac{\alpha \pi^2 f_0^2 E h}{16(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right), \quad (21.69)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}.$$

Подставим, наконец, (21.66) и (21.67) во второе из уравнений (21.65). Заменяя

$$\begin{aligned} \cos^3 \frac{\theta t}{2} &= \frac{3}{4} \cos \frac{\theta t}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta t}{2}, \\ \cos \frac{\theta t}{2} \cos \theta t &= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta t}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta t}{2}, \end{aligned}$$

получаем после сравнения коэффициентов при $\cos \frac{\theta t}{2}$:

$$\left(\omega^2 - \frac{\theta^2}{4}\right) f_0 + \frac{3}{4} \lambda f_0^3 - \chi f_0 \left(\varphi_0 + \frac{1}{2} \varphi_1\right) = 0. \quad (21.70)$$

Подстановка (21.68) и (21.69) в (21.70) дает:

$$\left[\omega^2 - \frac{\theta^2}{4} - \chi \left(N_0 + \frac{1}{2} \alpha N_t\right)\right] f_0 + \left[\frac{3}{4} \lambda - \frac{\pi^2 \chi E h}{16(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \alpha\right)\right] f_0^3 = 0.$$

Помимо нулевого решения, имеющего очевидный механический смысл, уравнение имеет корни

$$f_0^2 = \frac{\frac{\theta^2}{4} - \omega^2 + \chi \left(N_0 + \frac{1}{2} \alpha N_t\right)}{\frac{3}{4} \lambda - \frac{\pi^2 \chi E h}{16(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \alpha\right)}. \quad (21.71)$$

Вспомнив обозначения § 100, заметим, что

$$\chi = \frac{\pi^2}{m} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{\omega_*^2}{N_*}.$$

С другой стороны,

$$\omega^2 \left(1 - \frac{N_0}{N_*}\right) = \Omega^2, \quad \frac{N_t}{2N_* \left(1 - \frac{N_0}{N_*}\right)} = \nu,$$

вследствие чего числитель формулы (21.71) принимает вид

$$\frac{\theta^2}{4} - \Omega^2 (1 - \alpha \nu).$$

Займемся преобразованием знаменателя, записав его в виде

$$\frac{3}{4} \lambda - \frac{\pi^2 \chi E h}{16(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{4} \gamma(\alpha),$$

где

$$\gamma(\alpha) = \frac{\pi^4 E h}{8m(1-\nu^2)} \left(\frac{3-\nu^2}{2a^4} + \frac{3-\nu^2}{2b^4} + \frac{2\nu}{a^2 b^2}\right) - \frac{\pi^2 \chi E h}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Легко проверить, что

$$\frac{\pi^4 E h}{8m(1-\nu^2)} \left(\frac{3-\nu^2}{2a^4} + \frac{3-\nu^2}{2b^4} + \frac{2\nu}{a^2 b^2} \right) - \frac{\pi^2 \kappa E h}{8(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \gamma.$$

Следовательно,

$$\gamma(\alpha) = \gamma [1 - c(\alpha - 1)],$$

где

$$c = \frac{2}{3} \frac{\left(1 + \frac{\nu b^2}{a^2}\right)^2}{1 + \frac{3b^4}{a^4}}.$$

Окончательно

$$f_0 = \pm \frac{2\Omega}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{\frac{\frac{\theta^2}{4\Omega^2} - 1 + \alpha\mu}{1 - c(\alpha - 1)}}. \quad (21.72)$$

Выше были рассмотрены решения типа (21.66). Решение

$$f(t) = f_0 \sin \frac{\theta t}{2}$$

соответствовало неустойчивым колебаниям. Если учесть продольные силы инерции, это решение может стать осуществимым. Полагая, как и прежде,

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 \cos \theta t,$$

найдем:

$$\varphi_0 = N_0 + \frac{\pi^2 f_0^2 E h}{16(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right),$$

$$\varphi_1 = \alpha N_t - \frac{\alpha \pi^2 f_0^2 E h}{16(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Вместо уравнения (21.70) получаем:

$$\left(\omega^2 - \frac{\theta^2}{4} \right) f_0 + \frac{3}{4} \lambda f_0^3 - \kappa f_0 \left(\varphi_0 - \frac{1}{2} \varphi_1 \right) = 0.$$

Опуская дальнейшие выкладки, выпишем результат

$$f_0 = \pm \frac{2\Omega}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{\frac{\frac{\theta^2}{4\Omega^2} - 1 - \alpha\mu}{1 - c(\alpha - 1)}}.$$

3. Если масса балки стремится к нулю, то $\omega_0 \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow 1$. Формула (21.72) совпадает в этом предельном случае с соответствующей формулой (21.62). Рассмотрим теперь случай конечной частоты ω_0 . Обозначим:

$$\frac{\theta^2}{4\Omega^2} = n^2, \quad \frac{4\Omega^2}{\omega_0^2} = \beta,$$

тогда

$$\alpha = \frac{1}{1 - \beta n^2},$$

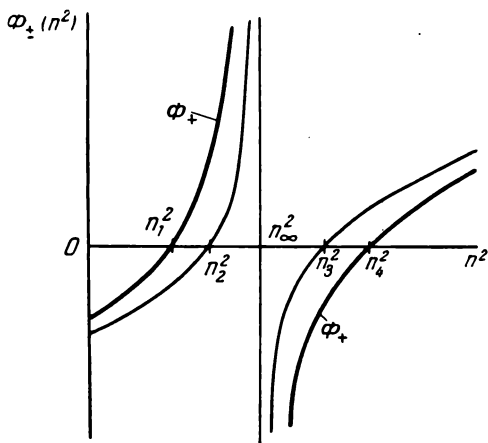
и подкоренное выражение запишется в виде

$$\Phi_+(n) = \frac{(n^2 - 1)(1 - \beta n^2) + \mu}{1 - \beta n^2(1 + c)}.$$

Введем также функцию

$$\Phi_-(n^2) = \frac{(n^2 - 1)(1 - \beta n^2) - \mu}{1 - \beta n^2(1 + c)}.$$

Примерный график функций $\Phi_+(n^2)$ и $\Phi_-(n^2)$ изображен на фиг. 167. Нули функций, которые, как увидим ниже, опре-



Фиг. 167.

деляют границы областей неустойчивости нулевого решения, найдем из условия

$$(n^2 - 1)(1 - \beta n^2) \pm \mu = 0,$$

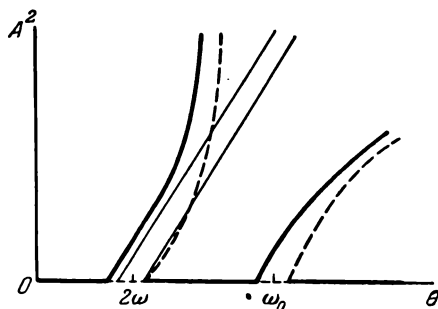
откуда

$$n^2 = \frac{1 + \beta \pm \sqrt{(1 - \beta)^2 \pm 4\beta\mu}}{2\beta}. \quad (21.73)$$

Обозначим нули в порядке возрастания n_1, n_2, n_3, n_4 . Легко видеть, что $n_1^2 < 1 < n_2^2$, т. е. первая область неустойчивости лежит вблизи $n^2 = 1$ (главный параметрический резонанс). Далее, $n_3^2 < 1/3 < n_4^2$, а это означает, что вторая область соответствует резонансу относительно «продольной» частоты ω_0 . Обе функции имеют разрыв вблизи

$$n_\infty^2 = \frac{1}{\beta(1+c)}.$$

График изменения установившихся амплитуд представлен на фиг. 168. Пунктиром, как и раньше, нанесены неустой-



Фиг. 168.

чивые решения. Тонкой сплошной линией изображены решения для случая, когда масса балки не учитывалась (21.62).

Будем следить за поведением системы, постепенно увеличивая возбуждающую частоту. Пока $n < n_1$, существует единственное решение, и оно устойчиво — это плоская форма колебаний пластинки. При $n = n_1$ наступает разветвление форм движения: нулевое решение становится неустойчивым вплоть до частоты n_2 . Далее, имеем три решения, из которых одно (среднее) неустойчиво. Оно играет роль водораздела между областями тяготения устойчивых решений. Установившиеся поперечные колебания, возникшие в интервале (n_1, n_2) , могут быть «затянуты» в сторону больших частот.

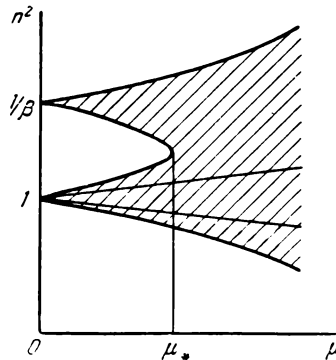
Глубина затягивания зависит от действующих на систему возмущений (флуктуаций частоты или фазы возбуждающей нагрузки и т. п.). Если возмущение достаточно велико, система может быть переброшена в сферу тяготения нулевого решения: тогда произойдет срыв затянутых поперечных колебаний. С другой стороны, достаточно сильный толчок, полученный системой в интервале (n_2, n_∞) , может перевести ее из состояния плоского движения в состояние установившихся поперечных колебаний. Вообще глубина затягивания ограничена частотой n_∞ или, если учесть затухание, — несколько меньшей частотой.

Нулевое решение устойчиво вплоть до частоты n_3 , за которой начинается второй резонанс. Этот резонанс не был обнаружен ни в рамках обычной линейной теории, ни при приближенном рассмотрении нелинейной задачи. На фиг. 169 изображено распределение областей неустойчивости нулевых решений на плоскости (n^2, μ) . Тонкие сплошные линии — это границы главной области неустойчивости, подсчитанные по обычной теории. Дополнительные области не показаны (ср. с фиг. 5). Аналогичное явление мы имели в задаче о динамической устойчивости прямолинейных стержней с учетом продольных сил инерции (глава VIII).

Как видно из формулы (21.73), влияние массы балки весьма велико при $\beta \sim 1$, т. е. при $\omega_0 \sim 2\Omega$. В этом случае оба резонанса приближаются друг к другу, а при достаточно большом μ ($\mu > \mu_*$) вообще сливаются. Легко заметить из (19.73), что

$$\mu_* = \frac{(1-\beta)^2}{4\beta}.$$

Кстати, графики на фиг. 167—168 построены в предположении, что $\mu < \mu_*$; примерные графики изменения функций $\Phi_+(n^2)$ и $\Phi_-(n^2)$ и амплитуд при $\mu > \mu_*$ даны на фиг. 170—171.



Фиг. 169.

Дадим теперь оценку для $\beta = \frac{4\Omega^2}{\omega_0^2}$. Если пластинка сжата, то

$$\Omega^2 \leq \omega^2 = \frac{\pi^4 D}{m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2.$$

С другой стороны,

$$\omega_0^2 = \frac{Eh}{m_0 b (1 - \nu^2)}.$$

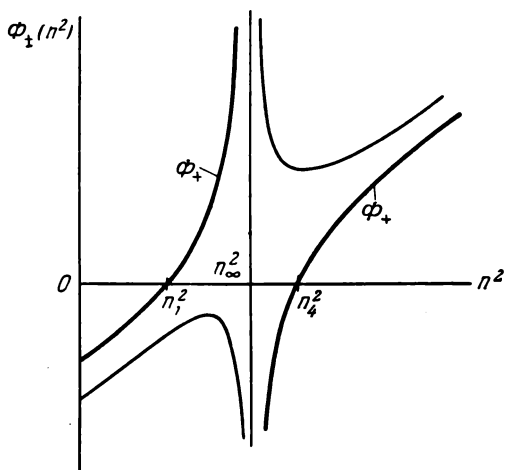
Таким образом,

$$\beta \leq \frac{\pi^4 m_0 b h^2}{3m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2$$

или, заменяя $tab = M$, $m_0 a = M_0$,

$$\beta \leq \frac{\pi^4 M_0}{3M} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2.$$

Значит, β падает с уменьшением массы окаймляющей



Фиг. 170.

балки и толщины пластинки. Пусть $a = b$, $h = 0,01a$. Тогда

$$\beta \leq \frac{M_0}{75M}.$$

Если даже $M_0 = 10M$, то $\beta \approx 0,13$, и влияние продольных сил инерции на амплитуды при $\theta = 2\Omega$ невелико. Так, на

верхней границе области неустойчивости ($n = n_2$) третья из формул (21.62) дает:

$$A = \frac{2\Omega}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2\mu}{1-\mu}}. \quad (21.74)$$

По формуле (21.72) получаем соответственно:

$$A = \frac{2\Omega}{\sqrt{3}\gamma} \sqrt{\frac{2\alpha\mu}{1-c(\alpha-1)}}. \quad (21.75)$$

Если $a = b$, $\nu = 0,25$, то $c \approx 0,261$. Далее, по формуле (21.73) при $\mu = 0,1$ находим $n_2^2 = 1,12$, следовательно,

$$\alpha = \frac{1}{1-\beta n^2} = 1,16.$$

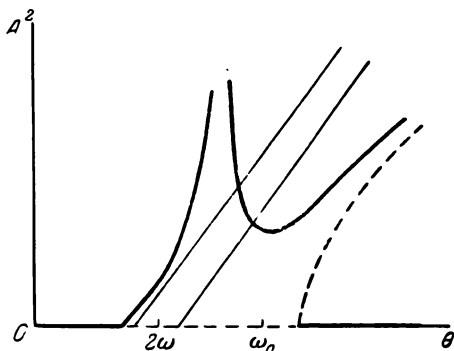
Радикал в формуле (21.74)

$$\sqrt{\frac{2\mu}{1-\mu}} = 0,472.$$

То же в формуле (21.75)

$$\sqrt{\frac{2\alpha\mu}{1-c(\alpha-1)}} = 0,491.$$

Разница в амплитудах получилась около 4%. Следовательно,



Фиг. 171.

область применения уточненной теории — относительно толстые пластины и тяжелые окаймляющие балки.

4. В заключение дадим оценку величины резонансных амплитуд. Согласно формуле (21.53)

$$\gamma = \frac{3(1-\nu^2)\omega^2}{4h^2} \frac{3 + \frac{a^4}{b^4}}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

Если пренебречь постоянной составляющей нагрузки N_0 , то $\omega^2 = \Omega^2$. Отсюда

$$\frac{4\Omega^2}{3\gamma} = \frac{16h^2}{9(1-\nu^2)} \frac{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}{3 + \frac{a^4}{b^4}} \approx 1,95h^2$$

(при $a = b$, $\nu = 0,3$). По формуле (21.74)

$$A \approx 1,40h \sqrt{\frac{2\mu}{1-\mu}}.$$

Используя данные предыдущего примера, найдем $A = 0,63h$. Вычислим теперь нормальные напряжения от изгиба:

$$\sigma_x = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

В центре пластинки

$$|\sigma_x| = \frac{\pi^2 E h A}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right).$$

Вычисления дают $\sigma_x \sim 0,7 \frac{Ah}{a^2} E$. Для $h = 0,01a$, $E = = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ получим $\sigma_x \sim 928 \text{ кг/см}^2$. Напряжения эти не очень велики, если учесть, что в рассмотренном примере амплитуда продольной силы $N_t \sim 0,2N_*$. На практике обычно встречаются значительно меньшие амплитуды, при которых влияние затухания становится ощутимым.

К полученным напряжениям нужно добавить напряжения, равномерно распределенные по толщине пластинки; они должны быть вычислены с учетом деформации срединной поверхности.

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ВТОРАЯ
ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК

§ 102. Постановка задачи

1. Деформированное состояние оболочки характеризуется перемещениями ее точек, лежащих на срединной поверхности. Пусть α, β — криволинейные ортогональные координаты срединной поверхности, выбранные таким образом, чтобы линии $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ представляли собой линии главных кривизн срединной поверхности. Деформированное состояние определено, если известны тангенциальные перемещения точек срединной поверхности вдоль линий главных кривизн $u(\alpha, \beta)$ и $v(\alpha, \beta)$ и нормальное перемещение $w(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим поведение оболочки под действием внешней поверхностной нагрузки, изменяющейся во времени по периодическому закону

$$X_0(\alpha, \beta, t), \quad Y_0(\alpha, \beta, t), \quad Z_0(\alpha, \beta, t). \quad (22.1)$$

Пусть нагрузка (22.1) такова, что вызывает в оболочке безмоментное напряженное состояние. При определенных соотношениях параметров это состояние может оказаться динамически неустойчивым. Пусть в безмоментном состоянии перемещения точек срединной поверхности равны u_0, v_0, w_0 . Переход к моментному состоянию дает перемещения

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \bar{u}, \\ v &= v_0 + \bar{v}, \\ w &= w_0 + \bar{w}. \end{aligned} \right\} \quad (22.2)$$

Перемещения u , v , w удовлетворяют уравнениям моментной теории ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) + \frac{1-\nu^2}{Eh} X &= 0, \\ L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) + \frac{1-\nu^2}{Eh} Y &= 0, \\ L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) + \frac{1-\nu^2}{Eh} Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (22.3)$$

где L_{11} , L_{12} , ..., L_{33} — линейные дифференциальные операторы, отнесенные к линиям главных кривизн, h — толщина оболочки, X , Y , Z — компоненты поверхностной нагрузки. Эта последняя складывается из заданной внешней нагрузки (22.1), сил инерции и добавочной приведенной нагрузки, возникающей при отклонении срединной поверхности от исходного безмоментного состояния:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0 + \Delta X - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ Y &= Y_0 + \Delta Y - m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ Z &= Z_0 + \Delta Z - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (22.4)$$

Здесь m — масса оболочки, отнесенная к единице площади срединной поверхности.

Подставляя (22.2) и (22.4) в уравнения (22.3) и учитывая, что невозмущенные параметры связаны уравнениями

$$\begin{aligned} L_{11}(u_0) + L_{12}(v_0) + L_{13}(w_0) + \frac{1-\nu^2}{Eh} \left(X_0 - m \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ L_{21}(u_0) + L_{22}(v_0) + L_{23}(w_0) + \frac{1-\nu^2}{Eh} \left(Y_0 - m \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ L_{31}(u_0) + L_{32}(v_0) + L_{33}(w_0) + \frac{1-\nu^2}{Eh} \left(Z_0 - m \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

¹⁾ В л а с о в В. З., Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.

получаем «уравнения в вариациях»

$$\left. \begin{aligned} L_{11}(\bar{u}) + L_{12}(\bar{v}) + L_{13}(\bar{w}) + \frac{1-\nu^2}{Eh} \left(\Delta X - m \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ L_{21}(\bar{u}) + L_{22}(\bar{v}) + L_{23}(\bar{w}) + \frac{1-\nu^2}{Eh} \left(\Delta Y - m \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ L_{31}(\bar{u}) + L_{32}(\bar{v}) + L_{33}(\bar{w}) + \frac{1-\nu^2}{Eh} \left(\Delta Z - m \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} (22.5)$$

Черточки над перемещениями \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} в дальнейшем опускаем.

2. Перейдем к определению компонент приведенной нагрузки ΔX , ΔY , ΔZ . Допустим, что безмоментное состояние характеризуется нормальными силами $N_1(\alpha, \beta, t)$ и $N_2(\alpha, \beta, t)$, которые будем считать положительными, если они вызывают сжатие. Пренебрегая силами инерции безмоментного состояния, можем вычислить внутренние силы из уравнений безмоментной теории¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_1) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} &= ABX_0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta}(AN_2) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} &= ABY_0, \\ k_1 N_1 + k_2 N_2 &= Z_0, \end{aligned} \right\} (22.6)$$

Здесь A и B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности, отнесенной к линиям главных кривизн

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2, \quad (22.7)$$

k_1 и k_2 — главные кривизны. Уравнения (22.6) выражают равновесие элемента оболочки площадью $AB d\alpha d\beta$; первые два уравнения требуют равенства нулю суммы проекций всех сил на направления касательных к линиям $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$, последнее уравнение выражает равенство нулю нормальной составляющей.

Пусть ε_1 и ε_2 — относительные продольные деформации, χ_1 и χ_2 — приращения главных кривизн вследствие моментной деформации. Первая квадратичная форма (22.7) принимает вид

$$ds^2 = A^2 (1 + \varepsilon_1)^2 d\alpha^2 + B^2 (1 + \varepsilon_2) d\alpha^2$$

¹⁾ В л а с о в В. З., цит. выше.

и, следовательно, в уравнения (22.6) вместо A и B нужно подставлять $A(1 + \varepsilon_1)$ и $B(1 + \varepsilon_2)$ соответственно. Кроме того, в последнем уравнении следует заменить k_1 и k_2 на $k_1 + x_1$ и $k_2 + x_2$. Уравнения (22.6) в этом случае тождественно не удовлетворяются; очевидно, что вместо X_0, Y_0, Z_0 здесь нужно взять $X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0 + \Delta Z$, где $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ — добавочная (приведенная) нагрузка. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} [B(1 + \varepsilon_1)N_1] - N_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} [B(1 + \varepsilon_2)] &= \\ &= AB(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(X_0 + \Delta X), \\ \frac{\partial}{\partial \beta} [A(1 + \varepsilon_1)N_2] - N_1 \frac{\partial}{\partial \beta} [A(1 + \varepsilon_1)] &= \\ &= AB(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(Y_0 + \Delta Y) \\ (k_1 + x_1)N_1 + (k_2 + x_2)N_2 &= Z_0 + \Delta Z. \end{aligned}$$

Учитывая (22.6) и пренебрегая величинами второго порядка малости (произведениями типа $\varepsilon_1 \varepsilon_2, \varepsilon_1 \Delta X$ и т. д.), приходим к следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 B N_1) - N_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 B) \right] - X_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \\ \Delta Y &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (\varepsilon_1 A N_2) - N_1 \frac{\partial}{\partial \beta} (\varepsilon_1 A) \right] - Y_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \\ \Delta Z &= N_1 x_1 + N_2 x_2. \end{aligned} \right\} \quad (22.8)$$

В формулы (22.8) вместо $\varepsilon_1, \varepsilon_2, x_1, x_2$ подставляются выражения

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w, \\ x_1 &= \frac{\partial k_1}{\partial \alpha} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_1}{\partial \beta} \frac{v}{B} - k_1^2 w - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\ x_2 &= \frac{\partial k_2}{\partial \alpha} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_2}{\partial \beta} \frac{v}{B} - k_2^2 w - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (22.9)$$

Таким образом, члены в уравнениях (22.5), содержащие $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$, линейны по отношению к внутренним

силам N_1, N_2 , а также по отношению к перемещениям u, v, w и их производным. В случае периодической внешней нагрузки силы N_1, N_2 также являются периодическими функциями времени; система (22.5) имеет в этом случае периодические коэффициенты. Полагая

$$u(\alpha, \beta, t) = \sum u_k(t) \varphi_k(\alpha, \beta),$$

$$v(\alpha, \beta, t) = \sum v_k(t) \psi_k(\alpha, \beta),$$

$$w(\alpha, \beta, t) = \sum w_k(t) \gamma_k(\alpha, \beta),$$

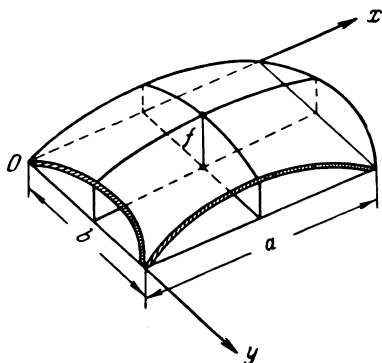
где фундаментальные функции удовлетворяют соответствующим граничным условиям, и подставляя в (22.5), приведем задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Дальнейшее исследование трудностей не представляет.

§ 103. Случай весьма пологой оболочки

1. Допустим, что оболочка имеет в плане форму прямоугольника со сторонами a и b , причем подъем оболочки f достаточно мал по сравнению со сторонами прямоугольника (фиг. 172). Последнее допущение сводится практически к требованию, чтобы $f \leq \frac{1}{5} a$, где a — наименьшая сторона.

Пусть x, y — декартовы координаты точки на горизонтальной плоскости; квадрат длины линейного элемента составляет:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (22.10)$$



Фиг. 172.

т. е. коэффициенты первой квадратичной формы на плоскости $A = B = 1$. Для весьма пологой оболочки первая квадратичная форма срединной поверхности с достаточной точностью может быть принята в виде (22.10). Далее, допустим, что

главные кривизны срединной поверхности в направлении осей Ox и Oy

$$k_1 = \text{const}, \quad k_2 = \text{const}. \quad (22.11)$$

Наконец, в случае весьма пологой оболочки тангенциальными составляющими нагрузки можно пренебречь, положив $X = Y = 0$. При сделанных допущениях общие уравнения оболочек (22.3) могут быть сведены к одному *разрешающему* уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 F + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} \nabla_k^2 \nabla_k^2 F - \frac{Z}{D} = 0. \quad (22.12)$$

Здесь ∇^2 и ∇_k^2 — дифференциальные операторы второго порядка:

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ \nabla_k^2 &= k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

D — цилиндрическая жесткость:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Функция $F(x, y)$ связана с нормальным перемещением $w(x, y)$:

$$w = \nabla^2 \nabla^2 F. \quad (22.13)$$

Приращения главных кривизн вследствие изгиба определим по формулам (22.9):

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -k_1^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \kappa_2 &= -k_2^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Отсюда приведенная нормальная нагрузка

$$\Delta Z = -\left(N_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + N_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \nabla^2 \nabla^2 F,$$

и уравнение возмущенного движения принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 F + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} \nabla_k^2 \nabla_k^2 F + \\ + \frac{1}{D} \left(N_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + N_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + m \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \nabla^2 \nabla^2 F = 0. \quad (22.14) \end{aligned}$$

Уравнение (22.14) установлено впервые В. З. Власовым¹⁾.

2. Предположим, что на всех четырех краях оболочка имеет шарнирное опирание. Функция $F(x, y, t)$ должна быть в этом случае подобрана таким образом, чтобы

$$F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = \frac{\partial^6 F}{\partial x^6} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = a,$$

$$F = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \frac{\partial^6 F}{\partial y^6} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b.$$

Граничные условия будут удовлетворены, если положить:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, t) &= f_{ik}(t) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ (i, k &= 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (22.15)$$

Здесь $f_{ik}(t)$ — неизвестные пока функции времени. Подставляя (22.15) в (22.14), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 f_{ik}}{dt^2} + \omega_{ik}^2 \left(1 - \frac{N_1}{N_{1*}} - \frac{N_2}{N_{2*}} \right) f_{ik} &= 0 \\ (i, k &= 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (22.16)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{ik}^2 &= \frac{D}{m(n_i^2 + m_k^2)^2} \left[(n_i^2 + m_k^2)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} (k_2 n_i^2 + k_1 m_k^2)^3 \right], \\ N_{1*} &= \frac{D n_i^2 (n_i^2 + m_k^2)^2}{\left[(n_i^2 + m_k^2)^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} (k_2 n_i^2 + k_1 m_k^2)^3 \right]}, \\ N_{2*} &= \frac{D m_k^2 (n_i^2 + m_k^2)^2}{\left[(n_i^2 + m_k^2)^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} (k_2 n_i^2 + k_1 m_k^2)^3 \right]}, \\ n_i &= \frac{i\pi}{a}, \quad m_k = \frac{k\pi}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (22.17)$$

¹⁾ Цит. на стр. 574.

Задача приведена, таким образом, к уравнению «особого» случая. Полагая, в частности,

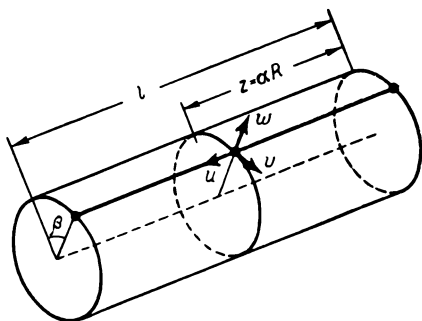
$$N_1 = N_{10} + N_{1t} \cos \theta t,$$

$$N_2 = N_{20} + N_{2t} \cos \theta t,$$

получим уравнение Матье¹⁾.

§ 104. Динамическая устойчивость круговой цилиндрической оболочки

1. Допустим, что круговая цилиндрическая оболочка с радиусом срединной поверхности R и толщиной h нагружена равномерно распределенной радиальной нагрузкой $q_0 + q_t \cos \theta t$ и, кроме того, сжата продольной силой $P_0 + P_t \cos \theta t$. Си-



Фиг. 173.

стему координат выберем, как показано на фиг. 173, введя безразмерную продольную координату $\alpha = z/R$. Перемещение в направлении образующей обозначим через u , окружное перемещение — через v и, наконец, радиальное перемещение — через w .

Для цилиндрической оболочки со степенью приближения технической моментной теории в уравнениях (22.5) следует

¹⁾ Ониашвили О. Д., Сообщ. АН Груз. ССР 11, § 3 (1950).

положить ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, & L_{22} &= \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \\ & L_{33} &= c^2 \nabla^2 \nabla^2, \\ L_{12} = L_{21} &= \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, & L_{13} = L_{31} &= \nu \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\ & L_{23} = L_{32} &= \frac{\partial}{\partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (22.18)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} c^2 &= \frac{h^2}{12R^2}, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \\ \nabla^2 \nabla^2 &= \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}. \end{aligned} \right\} \quad (22.19)$$

Переходим к вычислению компонент приведенной нагрузки ΔX , ΔY , ΔZ . Прежде всего, внутренние силы, соответствующие исходному безмоментному состоянию,

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2\pi R} (P_0 + P_t \cos \theta t), \\ N_2 &= R (q_0 + q_t \cos \theta t). \end{aligned} \right\} \quad (22.20)$$

Далее, учитывая, что в рассматриваемом случае $A = B = R$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$, при помощи формул (22.9) найдем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right), \\ \varkappa_1 &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, & \varkappa_2 &= -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right). \end{aligned}$$

Отсюда по формулам (22.8)

$$\left. \begin{aligned} \Delta X &= \frac{N_1 - N_2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right), \\ \Delta Y &= -\frac{N_1 - N_2}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}, \\ \Delta Z &= -\frac{1}{R^2} \left[N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + N_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (22.21)$$

¹⁾ Для сохранения симметрии матрицы L_{ik} знак перед последним членом в третьем уравнении должен быть заменен на противоположный (ср. В л а с о в В. З., цит. выше).

Итак, уравнения в вариациях (22.5) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \nu \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \\ & \quad + \frac{1-\nu^2}{Eh} \left[\frac{N_1 - N_2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = 0, \\ & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial w}{\partial \beta} - \\ & \quad - \frac{1-\nu^2}{Eh} \left[\frac{N_1 - N_2}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] = 0, \\ & \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + c^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1-\nu^2}{Eh} \left\{ \frac{1}{R^2} \left[N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + N_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right) \right] + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.22)$$

2. Решение системы (22.22) ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= U \cos n\alpha \cos k\beta, \\ v &= V \sin n\alpha \sin k\beta, \\ w &= W \sin n\alpha \cos k\beta, \end{aligned} \right\} \quad (22.23)$$

где U , V , W — функции времени,

$$n = \frac{i\pi R}{l}, \quad (22.24)$$

причем i и k принимают целые положительные значения. Здесь i показывает число полуволн в меридиональном направлении (l — длина оболочки), k дает число полуволн в окружном направлении. Решение в форме (22.23) соответствует тому случаю, когда на концах оболочки ($z=0$ и $z=l$) исчезают как радиальное, так и окружное перемещения. Продольное перемещение, напротив, нулю не равно.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что уравнения (22.22) тождественно удовлетворяются, если функции $U(t)$, $V(t)$, $W(t)$ определяются из системы обыкновенных

дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m(1-\nu^2)}{Eh} \frac{d^2 U}{dt^2} + \left(n^2 + \frac{1-\nu}{2} k^2 \right) U - \frac{1+\nu}{2} nkV - \nu nW - \\ - \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{N_1 - N_2}{R^2} n(kV + W) = 0, \\ \frac{m(1-\nu^2)}{Eh} \frac{d^2 V}{dt^2} - \frac{1+\nu}{2} nkU + \left(k^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) V + kW + \\ + \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{N_1 - N_2}{R^2} nkU = 0, \\ \frac{m(1-\nu^2)}{Eh} \frac{d^2 W}{dt^2} - \nu nU + kV + c^2(n^2 + k^2)^2 W - \\ - \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{W}{R^2} [N_1 n^2 + N_2 (k^2 - 1)] = 0. \end{aligned} \right\} (22.25)$$

Система (22.25) может быть представлена в матричной форме

$$m \frac{d^2 \mathbf{f}}{dt^2} + (\mathbf{R} - N_1 \mathbf{S}_1 - N_2 \mathbf{S}_2) \mathbf{f} = 0,$$

где \mathbf{f} — вектор с компонентами U, V, W ,

$$\mathbf{R} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} n^2 + \frac{1-\nu}{2} k^2 & -\frac{1+\nu}{2} nk & -\nu n \\ -\frac{1+\nu}{2} nk & k^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 & k \\ -\nu n & k & c^2(n^2 + k^2)^2 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{R^2} \begin{vmatrix} 0 & nk & n \\ -nk & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{S}_2 = \frac{1}{R^2} \begin{vmatrix} 0 & -nk & n \\ nk & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 - 1 \end{vmatrix}.$$

Частоты собственных колебаний незагруженной оболочки определяются из уравнения

$$|\mathbf{R} - \omega^2 \mathbf{E}| = 0,$$

а критические параметры продольной сжимающей и радиальной нагрузок — из уравнений

$$\left| R - \frac{P}{2\pi R} S_1 \right| = 0 \quad \text{и} \quad |R - qRS_2| = 0$$

соответственно.

Задача динамической устойчивости приводит в первом приближении к уравнению

$$\left| R - \frac{1}{2\pi R} \left(P_0 \pm \frac{1}{2} P_t \right) S_1 - \left(q_0 \pm \frac{1}{2} q_t \right) RS_2 - \frac{1}{4} \theta^2 E \right| = 0. \quad (22.26)$$

3. Если пренебречь влиянием тангенциальных сил инерции и тангенциальных составляющих приведенной нагрузки, то задача о колебаниях круговой цилиндрической оболочки может быть сведена к одному «разрешающему» уравнению. В общем случае непологий цилиндрической оболочки это уравнение имеет вид¹⁾

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + 1)^2 \nabla^2 \nabla^2 F - (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^2 F + \\ + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} - \frac{R^4}{D} Z = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\omega = \nabla^2 \nabla^2 F. \quad (22.27)$$

Используя (22.27) и последнюю из формул (22.21), получаем:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + 1)^2 \nabla^2 \nabla^2 F - (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^2 F + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} + \\ + \frac{mR^4}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \nabla^2 F + \frac{R^2}{D} \left[N_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + N_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) \right] \nabla^2 \nabla^2 F = 0. \end{aligned} \quad (22.28)$$

Пусть λ — длина полуволны в меридиональном (или окружном) направлении. Тогда первый член в уравнении (22.28) будет иметь порядок $\sim (R/\lambda)^8$, второй член $\sim (R/\lambda)^6$, третий $R^6/\lambda^4 h^3$. Если длина полуволны мала по сравнению с радиусом, то вторым слагаемым в уравнении (22.28) можно пренебречь. Опуская на основании аналогичных соображе-

1) Власов В. З., цит. выше.

ний некоторые другие малые члены, приходим к уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 F + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{K^4}{D} \left(\frac{N_1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{N_2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \nabla^2 \nabla^2 F = 0. \quad (22.29)$$

Это уравнение полностью соответствует уравнению (22.14) для весьма пологих оболочек.

Возвратимся к общему уравнению (22.28). Полагая

$$F(\alpha, \beta, t) = f(t) \sin n\alpha \cos k\beta,$$

что соответствует случаю (22.23), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{mR^4}{D} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} + g(n, k) f - \frac{R^2}{D} [N_1 n^2 + N_2 (k^2 - 1)] f = 0, \quad (22.30)$$

где

$$g(n, k) = \frac{(n^2 + k^2 + 1)^2 (n^2 + k^2)^2 + (1 - \nu) n^2 (n^4 - k^4) + \frac{1 - \nu^2}{c^2} n^4}{(n^2 + k^2)^2}.$$

Введем обозначения:

$$\frac{Dg(n, k)}{mR^4} = \omega^2, \quad \frac{Dg(n, k)}{n^2 R^2} = N_{1*}, \quad \frac{Dg(n, k)}{(k^2 - 1) R^2} = N_{2*}.$$

Уравнение (22.30) может быть теперь записано в виде

$$\frac{d^3 f}{dt^3} + \omega^2 \left(1 - \frac{P}{P_*} - \frac{q}{q_*} \right) f = 0, \quad (22.31)$$

где $P_* = 2\pi R N_{1*}$, $q_* = N_{2*}/R$. Итак, задача сведена к известному уравнению.

4. Результаты предыдущего пункта легко обобщаются на случай ортотропной цилиндрической оболочки. Пусть E_1 , E_2 и ν_1 , ν_2 — модули продольной упругости и коэффициенты Пуассона в направлениях $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$ соответственно, G — модуль сдвига. Введем следующие дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} \nabla_0^2 &= E_0 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + E_2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \\ \nabla_1^4 &= E_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + E_4 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + E_2 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \\ \nabla_2^4 &= E_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + E_3 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + E_2 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} E_0 &= 2G(1 - \nu_1\nu_2) + E_2\nu_1, \\ E_3 &= 4G(1 - \nu_1\nu_2) + E_1\nu_2 + E_2\nu_1, \\ E_4 &= \frac{E_1E_2}{G} - E_1\nu_2 - E_2\nu_1. \end{aligned}$$

Уравнение, аналогичное (22.29), для ортотропной оболочки принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla_1^4 \nabla_2^4 F + \frac{E_1 E_2 (1 - \nu_1 \nu_2)}{c^2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \\ + \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{c^2 h} \left(N_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + N_2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + m R^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \nabla_1^4 F = 0, \end{aligned}$$

где F — функция, связанная с радиальным прогибом соотношением

$$w = \nabla_0^2 \nabla_0^2 F.$$

Дальнейшие преобразования вновь приводят к уравнению (22.31), коэффициенты которого для случая опертой оболочки определяются без труда¹⁾.

§ 105. Динамическая устойчивость сферической оболочки

1. Рассмотрим колебания сферической оболочки под действием равномерно распределенной по поверхности радиальной нагрузки

$$Z_0 = -(q_0 + q_t \cos \theta t). \quad (22.32)$$

Пусть h — толщина оболочки, R — радиус ее срединной поверхности. В качестве ортогональных координат, определяющих положение точки на сфере, примем географические координаты ψ , β (ψ — угол широты, β — угол долготы; фиг. 174). Перемещения точек срединной поверхности в направлении линий $\psi = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ обозначим соответственно через u и v , радиальное перемещение (положительное в направлении внешней нормали) обозначим через w . Если внешняя нагрузка, действующая на оболочку, состоит из радиальной нагрузки Z , то, как известно²⁾, система урав-

¹⁾ Марков А. Н., Прикл. матем. и мех. 13, вып. 2 (1949).

²⁾ Власов В. З., цит. выше.

нений сферической оболочки может быть сведена к одному разрешающему уравнению

$$[c^2(\nabla^2 + 1)^2 + 1](\nabla^2 + 2)\omega = \frac{R^3 Z}{Eh}(\nabla^2 + 1 - \nu). \quad (22.33)$$

Здесь ∇^2 — оператор Лапласа на сфере

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \quad (22.34)$$

$$c^2 = \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)}.$$

В безмоментном состоянии внутренние силы оболочки сводятся к сжимающим усилиям

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{2} R(q_0 + q_t \cos \theta t).$$

Для определения дополнительных кривизн κ_1 и κ_2 воспользуемся формулами (22.9). В случае сферической оболочки

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{R},$$

$$A = R, \quad B = R \sin \psi,$$

и формулы (22.9) принимают вид

$$\kappa_1 = -\frac{1}{R^2} \left(\omega + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi^2} \right),$$

$$\kappa_2 = -\frac{1}{R^2} \left(\omega - \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} - \text{ctg } \psi \frac{\partial \omega}{\partial \psi} \right).$$

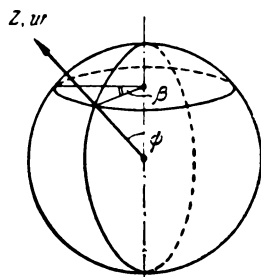
Но согласно (22.8) дополнительная приведенная нагрузка, возникающая при отклонении оболочки от безмоментного очертания,

$$\Delta Z = \frac{1}{2} R(q_0 + q_t \cos \theta t)(\kappa_1 + \kappa_2),$$

откуда

$$\Delta Z = -\frac{1}{2R} (q_0 + q_t \cos \theta t)(\nabla^2 + 2)\omega. \quad (22.35)$$

Составляющие ΔX и ΔY , очевидно, равны нулю.



Фиг. 174.

Помимо внешнего давления (22.32) и приведенной нагрузки (22.35), на оболочку действуют силы инерции

$$-m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Пренебрегая в духе технической теории оболочек тангенциальными составляющими сил инерции, найдем, что силы, действующие на оболочку, сводятся к радиальной нагрузке

$$Z = -(q_0 + q_t \cos \theta t) - \\ - \frac{q}{2R} (q_0 + q_t \cos \theta t) (\nabla^2 + 2) w - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Первое слагаемое дает равномерное сжатие оболочки и может быть отброшено, если под $w(\psi, \beta, t)$ понимать отклонение от невозмущенного безмоментного состояния. Уравнение (22.33) принимает вид

$$[c^2(\nabla^2 + 1)^2 + 1](\nabla^2 + 2)w + \\ + \frac{(q_0 + q_t \cos \theta t)R}{2Eh} (\nabla^2 + 1 - \nu)(\nabla^2 + 2)w + \\ + \frac{mR^2}{Eh} (\nabla^2 + 1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (22.36)$$

2. Отыскание общего решения уравнения (22.36) затруднительно. Поэтому ограничимся классом решений, имеющим, как увидим в дальнейшем, определенный практический интерес. Будем искать решения (22.36) в виде

$$w(\psi, \beta, t) = f(t) F(\psi, \beta), \quad (22.37)$$

где $f(t)$ — неизвестная функция времени, $F(\psi, \beta)$ — решения дифференциального уравнения

$$\nabla^2 F + \lambda F = 0, \quad (22.38)$$

удовлетворяющие граничным условиям для w (т. е. условиям непрерывности и однозначности на сфере). Подстановка в (22.36) дает после сокращения на $F(\psi, \beta)$:

$$[c^2(\lambda - 1)^2 + 1](\lambda - 2)f - \frac{(q_0 + q_t \cos \theta t)R}{2Eh} (\lambda - 1 + \nu)(\lambda - 2)f + \\ + \frac{mR^2}{Eh} (\lambda - 1 + \nu) \frac{d^2 f}{dt^2} = 0.$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \frac{Eh}{mR^2} \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1 + \nu} [c^2 (\lambda - 1)^2 + 1] &= \omega^2, \\ \frac{2Eh}{R(\lambda - 1 + \nu)} [c^2 (\lambda - 1)^2 + 1] &= q_* \end{aligned} \right\} \quad (22.39)$$

Полученное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 \left(1 - \frac{q_0 + q_t \cos \theta t}{q_*} \right) f = 0. \quad (22.40)$$

Это — известное уравнение особого случая, причем задача, если не считать сделанного выше допущения о тангенциальных силах инерции, сведена к нему точно. Формулы (22.39) дают собственные частоты и критические силы, зависящие от не известного еще параметра λ . Впрочем, один практически важный вопрос может быть решен и без его предварительного определения. Границы главных областей неустойчивости могут быть найдены по известным приближенным формулам. В частности, низшая граница

$$\theta_*^2 = 4\omega^2 \left(1 - \frac{q_0 + \frac{1}{2} q_t}{q_*} \right).$$

Для практических приложений интересно знать огибающую нижних границ областей неустойчивости. Предположим, что параметр λ может принимать любые вещественные положительные значения, иначе говоря, допустим, что уравнение (22.38) имеет сплошной спектр собственных значений. Аналогичную постановку мы встречали в главе IX при рассмотрении устойчивости бесконечной балки на сплошном упругом основании. Для ограниченной области, какой является сфера, спектр собственных значений является дискретным. Но в окрестности интересующих нас значений λ спектр уравнения (22.38) все же достаточно «густ», чтобы погрешность, следующая из сделанного допущения, была невелика. Ниже это обстоятельство будет разъяснено подробнее.

В дальнейшем обозначим

$$\theta_*^2 = \frac{4Eh}{mR^2} g(\lambda),$$

где

$$g(\lambda) = (\lambda - 2) \left[\frac{c^2(\lambda - 1)^2 + 1}{\lambda - 1 + \nu} - \frac{\left(q_0 + \frac{1}{2} q_t\right) R}{2Eh} \right]. \quad (22.41)$$

Для определения огибающей положим $dg/d\lambda = 0$; отсюда получим уравнение для λ . Рассмотрим случай достаточно больших значений $\lambda \gg 1$. Тогда

$$g(\lambda) \approx c^2 \lambda^2 + 1 - \frac{\left(q_0 + \frac{1}{2} q_t\right) R \lambda}{2Eh},$$

откуда корень уравнения $dg/d\lambda = 0$

$$\lambda_* = \frac{\left(q_0 + \frac{1}{2} q_t\right) R}{4Ehc^2} \quad (22.42)$$

и, следовательно,

$$\theta_*^2 = \frac{4Eh}{mR^2} \left[1 - \frac{\left(q_0 + \frac{1}{2} q_t\right)^2 R^2}{16E^2 h^2 c^2} \right]. \quad (22.43)$$

Введем обозначения

$$\frac{4Ehc}{R} = q_{**}; \quad \frac{Eh}{mR^2} = \omega_0^2.$$

Формула (22.43) принимает вид (фиг. 175)

$$\theta_*^2 = 4\omega_0^2 \left[1 - \frac{\left(q_0 + \frac{1}{2} q_t\right)^2}{q_{**}^2} \right]. \quad (22.44)$$

Легко видеть, что q_{**} представляет собой приближенное (в смысле сделанных допущений) значение минимального критического давления. Действительно, учтя, что

$$c^2 = \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)},$$

получим хорошо известную формулу

$$q_{**} = \frac{2Eh^2}{R^2} \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}.$$

3. Вернемся к вопросу об определении параметра λ в общем случае. Уравнение (22.38) на сфере

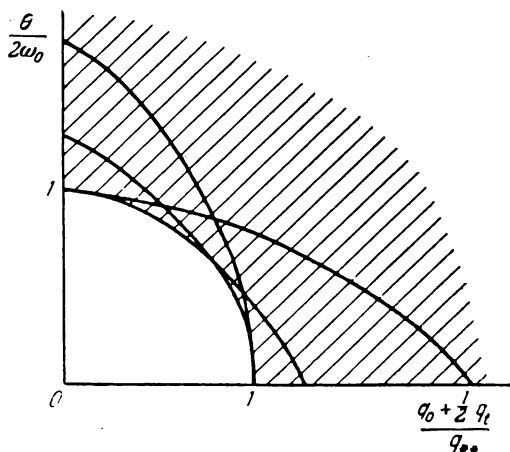
$$\frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial F}{\partial \psi} \right) \right] + \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} + \lambda F = 0 \quad (22.45)$$

приводит, как известно¹⁾, к сферическим функциям.

Решение уравнения (22.45) ищется в виде

$$F(\psi, \beta) = P(\psi) \frac{\sin k\beta}{\cos k\beta}.$$

Условие однозначности $F(\psi, \beta)$ на сфере требует, чтобы k



Фиг. 175.

было целым числом или нулем ($k = 0, 1, 2, \dots$). Подстановка в (22.45) дает:

$$\frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{d}{d\psi} \left(\sin \psi \frac{dP}{d\psi} \right) \right] + \left(\lambda - \frac{k^2}{\sin^2 \psi} \right) P = 0$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

¹⁾ Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2. Гостехиздат, 1949.

Полагая $x = \cos \psi$, приводим уравнение к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{k^2}{1-x^2} \right) P = 0 \\ (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (22.46)$$

Это — известное уравнение для присоединенных полиномов Лежандра. Уравнение (22.46) имеет собственные значения

$$\lambda_n = n(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (22.47)$$

Каждому собственному значению λ_n соответствует $n+1$ собственных функций

$$P_n^{(k)}(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

где

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n].$$

Возвращаясь к уравнению (22.45), находим систему его решений:

$$\begin{aligned} k=0 \quad F_0(\psi, \beta) &= P_n(\cos \psi), \\ k=1 \quad F_{-1}(\psi, \beta) &= P_n^{(1)}(\cos \psi) \sin \beta, \\ &F_1(\psi, \beta) = P_n^{(1)}(\cos \psi) \cos \beta \\ &\dots \dots \dots \\ k=n \quad F_{-n}(\psi, \beta) &= P_n^{(n)}(\cos \psi) \sin n\beta, \\ &F_n(\psi, \beta) = P_n^{(n)}(\cos \psi) \cos n\beta. \end{aligned}$$

Как известно, полиномы Лежандра $P_n(x)$ имеют в интервале $(-1, +1)$, т. е. в интервале изменения $\psi(0, \pi)$, ровно n нулей. Присоединенные функции $P_n^{(k)}(x)$ имеют соответственно $n-k$ нулей.

Так как $\sin k\beta$ и $\cos k\beta$ обращаются в нуль на $2k$ меридианах, а $P_n^{(k)}(x)$ ввиду только что сказанного — на $n-k$ широтах, то вся сфера разбивается на «клетки», внутри которых $F(\psi, \beta)$ сохраняет постоянный знак. Это значит, что число λ определяет вид формы колебаний и, в частности, размеры «полуволн» в меридиональном и широтном направлениях. Чем меньше размеры полуволн, тем, следовательно,

больше параметр λ . В этом случае разница между двумя соседними собственными значениями становится мала по сравнению с их величиной, чем оправдывается допущение о непрерывности изменения λ .

4. В заключение приведем числовой пример. Пусть оболочка находится под действием внешнего давления $q_0 = 10$ атм, $q_t = 1,0$ атм. Пусть, далее, $R = 4,0$ м, $h = 20$ мм, $\gamma = 0,0078$ кг/см³, $\nu = 0,3$. Критическое давление и частота ω_0

$$q_{**} = \frac{2 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \cdot 2^2}{400^2} \frac{1}{\sqrt{3(1-0,3^2)}} = 64,7 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$\omega_0 = \frac{1}{400} \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^8 \cdot 2}{0,0078 \cdot 2}} = 41,0 \text{ 1/сек.}$$

Наименьшую критическую частоту найдем по формуле (22.44):

$$0_* = 2 \cdot 41,0 \sqrt{1 - \frac{(10 + 0,5)^2}{64,7^2}} = 75,3 \text{ 1/сек.}$$

Оценим теперь размеры полуволны при потере динамической устойчивости. По формуле (22.42)

$$\lambda_* = \frac{q_0 + \frac{1}{2} q_t}{q_{**}} \cdot \frac{2R \sqrt{3(1-\nu^2)}}{h} \sim \frac{3q}{q_{**}} \frac{R}{h}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае $\lambda_* \sim 100$, откуда с учетом (22.47) $n \sim 10$. Таким образом, при колебаниях размеры одной ячейки составляют примерно одну десятую длины окружности.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Андронов А. А. 15, 56, 98
Аржаных И. С. 15
Артемов Н. К. 16, 322
- Бейлин Е. А. 13
Бек (Beck M.) 402
Беляев Н. М. 13, 19, 41, 69, 272
Бернштейн С. А. 84
Биецено К. Б. (Biezeno C. B.) 72, 198
Боголюбов Н. Н. 13, 46, 81, 98, 182
Боднер В. А. 14, 183, 538, 540
Болотин В. В. 14, 16, 17, 48, 115, 147, 158, 203, 300, 305, 311, 441, 464, 502, 540, 549
Бондаренко Г. В. 14
Бондарь Н. Г. 14
Брачковский Б. З. 15, 181
Булгаков Б. З. 205
Бурнашев И. А. 18
- Ватсон Г. Н. (Watson G.) 37
Вейденхаммер (Weidenhammer F.) 16, 17
Власов В. З. 404, 407, 410, 418, 471, 574, 575, 579, 581, 584, 586
- Гливенко В. И. 240
Гогенемзер К. (Hohenemser K.) 511
Гольденблат И. И. 16, 17, 69, 81, 407, 410, 477
Граммель Р. (Grammel R.) 42, 198
Григолюк Э. И. 560
Гуревич С. Г. 532
- Давиденков Н. Н. 86, 88
Дейнеко К. С. 402
- Ден-Гартог (Den Gartog J. P.) 31, 64
Джанелидзе Г. Ю. 13, 14, 15, 181, 183, 427
Диментберг Ф. М. 188
- Инглис (Inglic C. E.) 203
- Карман (Kármán T.) 476, 551
Клоттер (Klotter K.) 16, 180
Кольский Г. (Kolsky H.) 88
Комаров Д. М. 198
Корноухов Н. В. 507
Кочин Н. Е. 14, 201
Крейн М. Г. 241
Крылов Н. М. 13, 46, 81, 98, 182
Кузьмин Р. О. 539
Кутилин Д. И. 277
Кухарский (Kucharski W.) 16
- Лазарев В. А. 50
Леонов М. Я. 402
Леонтович М. А. 15, 64
Лунц Е. Б. 88
Любкин (Lubkin S.) 14, 15
Ляпунов А. М. 94, 303, 358, 364
- Мак-Лахлан Н. В. (Mc Lachlan N. W.) 22, 378
Макушин В. М. 15, 31
Малкин И. Г. 94, 294, 364
Малкина Р. Л. 16, 429
Мальцев А. И. 205
Мандельштам Л. И. 17, 51, 98, 364
Марков А. И. 14, 586
Мельде (Melde F.) 12
Меттлер (Mettler E.) 14, 15, 16, 152

- Митропольский Ю. А. 98
 Мурнаган (Murnaghan F.) 281
- Наумов К. А. 15
 Немыцкий В. В. 294
 Николай Е. Л. 73, 402
 Новожилов В. В. 277
 Нудельман Я. Л. 241, 248, 250
- Ониашвили О. Д. 15, 580
- Пановко Я. Г. 86, 87, 90
 Папалекси Н. Д. 17, 50, 98, 364
 Писаренко Г. С. 89
 Прагер В. (Prager W.) 511
 Пратусевич Я. А. 71
 Пфлюгер (Pflüger A.) 402
 Пуанкаре (Poincaré H.) 94, 364
- Радциг М. А. 19, 427
 Реклинг (Reckling K. A.) 16
 Ржаницы А. Р. 13
 Рисс Ф. (Riesz F.) 233
 Рэлей (Rayleigh J. W.) 12
- Салион В. Ю. 16
 Секефальви-Надь Б. (Sz.-Nagy V.) 233
 Сецава (Sezawa K.) 14
 Смирнов А. Ф. 15, 311, 517
 Смирнов В. И. 205, 214, 229, 332, 517, 591
- Соболев В. А. 18
 Сорокин Е. С. 392
 Степанов В. В. 294
 Стокер (Stoker J.) 14, 45, 108
 Стретт М. Д. (Strutt M. D.) 13, 22, 33
- Теодорчик К. Ф. 89, 95, 97
 Тимошенко С. П. 14, 34, 184, 195, 475, 542, 558
 Треффц (Treffitz E.) 248
- Уиттекер Е. Т. (Whittaker E.) 37
 Утида (Utida J.) 14
- Фаркхарсон (Farquharson F. V.) 476
 Федорков Г. В. 326, 329
 Феодосьев В. И. 398, 402
- Хайкин С. Э. 98
 Халилов З. И. 14
- Циглер (Ziegler H.) 403
- Челомей В. Н. 14, 15, 43, 183, 538
 Четаев Н. Г. 294, 358
- Штаерман И. Я. 440
- Эйнауди (Einaudi R.) 14

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амплитуды, медленно изменяющиеся 95
 — установившихся параметрических колебаний арок 457, 462
 — — — балок 489
 — — — пластинок 561, 572
 — — — прямолинейных стержней 68, 115
 — — — статически неопределимых рам 525
 — — — тонкостенных стержней 422
- Арка, взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний 456
- Арка, влияние поведения нагрузки 449
 — двухшарнирная 432
 —, колебания кососимметричные 441
 — круговая 427
 — пологая 439
 —, принцип спрямления 440
 —, тензор влияния 431
 —, уравнения собственных колебаний 435
 —, уравнения статической устойчивости 437
 —, условие несжимаемости оси 431
 —, функции влияния 430, 437

- Балка, амплитуды параметрических колебаний 489
 —, влияние поведения нагрузки 480
 —, загруженная распределенной нагрузкой 474
 —, — сосредоточенной силой 481
 —, определение нелинейных факторов 485
 — сечения произвольного 471
 — — прямоугольного 465
 —, уравнения динамической устойчивости 467, 473
 —, устойчивость плоской формы изгиба 464
 —, — при наличии «следящих» сил 484
 —, — статическая 468, 475, 482
 —, учет взаимодействия вынужденных и параметрических колебаний 491
 —, частоты изгибно-крутильных колебаний 467
 —, — парциальные 467
 —, ширина областей неустойчивости 469
 Балки жесткости висячих мостов, аэродинамическая устойчивость 476
 — — — —, колебания изгибно-крутильные 478
 — — — —, — параметрические 477
 Биение 142
 —, осциллограмма 143, 145
 Вал коленчатый 14, 198
 — — многоцилиндровой машины 201
 —, сечения которого имеют неодинаковые главные жесткости 184, 188
 Векторы ортогональные 218
 — собственные (фундаментальные) 212
 — — симметричной матрицы 218
 — — тензора Грина 285
 Взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний в арках 449
 Взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний в балках 491
 — — — — — в пластинках 562
 — — — — — в прямолинейных стержнях 161
 Возмущения 358
 Гистерезис упругий 88
 Груз, движущийся по балке 201
 Движение асимптотически устойчивое 359
 — возмущенное 358
 — невозмущенное 358
 — неустойчивое 359
 — устойчивое 359
 Декремент затухания логарифмический 86
 Делители элементарные 214, 297
 Дельта-функция 283
 Демпфирование колебаний линейное 125
 — — нелинейное 125
 Деформации конечные 276
 Дифференциалы Стильбеса 241
 Дроби цепные 39
 Затухание колебаний линейное 53
 — — нелинейное 86, 356
 — — систем со многими степенями свободы 323
 Изгиб продольный сжатого стержня 73, 247
 Индексы «немые» 277
 Инерционность нелинейная 80, 353
 — — в балках 485
 — — в пластинках 549, 562
 — — в рамах 525
 Интеграл Стильбеса 239
 — —, формула интегрирования по частям 240
 Исследование экспериментальное биений 142
 — — кососимметричных колебаний арок 458
 — — областей неустойчивости 51

- Исследование экспериментальное, описание установки 48
 — — процесса установления 141, 462
 — — установившихся амплитуд 119, 126
- Квазиматрицы 216
- Колебания вынужденные 98, 106, 161
 — изгибно-крутильные 409, 427, 465
 — кососимметричные 441
 — неустановившиеся 132, 387
 —, параметрически возбуждаемые 39
 — продольные 163
 — систем с бесконечным числом степеней свободы 243
 — — с конечным числом степеней свободы 220
 — собственные затухающие 86, 104
 — — нелинейные 100
- Кольцо круговое 426
- Координаты Лагранжа 277
 — Эйлера 277
- Коэффициент возбуждения 22, 29, 121
 — — критический 59, 63
 — — затухания 53, 329
 — — нелинейного 126
 — нелинейной инерционности 127
 — — упругости 126
- Кривая резонансная 108, 117, 157
- Кривизна стержня начальная 151
 — —, точное выражение 70, 186
- Матрица 206
 — влияния перемещений 221, 242
 — диагональная 207
 — единичная 208
 — квазидиагональная 216
 — коммутирующая 210, 333
 — неособенная 207
 —, нормальная жорданова форма 215
 — обратная 206
- Матрица ортогональная 218
 — — особенная 207
 —, правило сложения 208
 —, — умножения 209
 — рассеяния 323
 — симметричная 217
 — скалярная 208
 — транспонированная 217
- Метод Ван-дер-Поля 95, 101
 — Галеркина 71, 100, 181, 428, 538
 — графоаналитический 272
 — Крылова и Боголюбова 98
 — малого параметра 34, 46
 — медленно изменяющихся амплитуд 95, 101
 — моментов 266
 — Ритца 263, 267
 — Теодорчика 97
- Методы вариационные 263
- Мосты висячие, аэродинамическая устойчивость 476
 — —, параметрические колебания 477
- Нагрузка вибрационная 13
 — неконсервативная 289
 — параметрическая 13
 — следящая 289, 393, 401, 480, 484
 — ударная 13
- Нелинейность малая 94
- Нормирование векторов 213
 — функций 230
- Области динамической неустойчивости 23, 29
 — —, влияние затухания 335
 — — — главные 38, 310
 — — — побочные 43, 60
 — — —, сравнение с экспериментом 51
- Оболочка, безмоментное напряженное состояние 572
 — весьма пологая 577
 — ортотропная 585
 —, разрешающее уравнение 578, 584, 587
 — сферическая 586
 — цилиндрическая 580

- Определитель нормальный 37, 307
 Оси матрицы главные 212
 Осциллограмма биений 143
 — процесса установления 141, 462
 — установившихся колебаний 49, 52, 461
 Передача усилий гнутыми спицами 198
 Пластинка, амплитуды параметрических колебаний 561, 572
 — круглая 539, 560
 —, нагруженная касательными силами 544
 —, прогибы после потери устойчивости 557, 560
 — прямоугольная 537, 547, 555
 — сжатая 537
 — сжато-изогнутая 540
 —, собственные колебания с большими амплитудами 558
 —, уравнение собственных колебаний 529
 —, — статической устойчивости 530
 —, учет продольных сил инерции 562
 —, — растяжение срединной поверхности 550
 —, функция влияния прогибов 528
 Показатель характеристический 140, 299
 Полиномы Лежандра 592
 Принцип возможных перемещений 267, 428
 Продольный изгиб сжатого стержня 69
 Произведение матриц 209
 — скалярное двух функций 229
 Рама статически неопределимая, амплитуды параметрических колебаний 525
 — — —, метод перемещений 505
 — — —, нагруженная узловыми силами 429
 — — —, расчет на колебания 502
 Рама статически неопределимая, расчет на статическую устойчивость 513
 — — — симметричная 498, 518
 Распор в арках 433
 Рассеяние энергии при колебаниях 87, 330
 Растяжение срединной поверхности пластинок 550
 Резонанс главный 111
 — комбинационный 321
 параметрический 12, 39,
 — побочный 147
 Ряд Фурье 34, 56, 111, 301, 381
 — — обобщенный 231
 Сила критическая для стержня 21
 — кусочно-постоянная 29, 66
 — периодическая 20
 — «следящая» 393, 401, 480
 —, создаваемая эксцентриковым вибратором 50, 129
 Символ Кронекера 218
 Система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами 294
 — координат вращающаяся 188
 — решений фундаментальная 295
 — с бесконечным числом степеней свободы 241
 — с конечным числом степеней свободы 220
 — с периодически меняющейся жесткостью 183
 — — — — массой 198
 — функций ортонормированная 230
 — — полная 230
 Случай квазисобый 292
 — особый 180, 269, 291, 427
 — сомнительный по Ляпунову 360
 Спектр собственных частот сплошной 179
 Срыв колебаний 109, 119, 138
 Стержень криволинейный 430
 — прямолинейный, амплитуды параметрических колебаний 115

- Стержень прямолинейный, взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний 161
 — —, входящий в состав статически неопределимых систем 78
 — —, вынужденные колебания с большими амплитудами 226
 — —, нагруженный «следящими» силами 393
 — —, заделанный одним концом 395
 — —, заделанный одним концом и опертый на другом конце 390
 — —, лежащий на сплошном упругом основании 177
 — —, собственные колебания с большими амплитудами 220
 — —, шарнирно опертый по обоим концам 19
 — тонкостенный, изгибно-крутильные колебания 409
 — — с двумя осями симметрии 409
 — — с одной осью симметрии 413
 — —, учет нелинейных факторов 415
- Тело упругое, граничные условия на нагруженной поверхности 279
 — —, тензор Грина 283
 — —, — Сомильяна 283
 — —, уравнения движения 277
 — —, — динамической устойчивости 279
 — —, — собственных колебаний 284
 — —, — статической устойчивости 287
- Тензор влияния перемещений для арок 431
 — Грина 283
 — напряжений 277
- Теорема Гильберта-Шмидта 236
 — единственности Кирхгофа 275
 — Ляпунова об устойчивости по первому приближению 360
 — Мерсера 237
- Теорема Пуанкаре о периодических решениях 367
 Теоремы Фредгольма 234, 246
 Трение в опорах продольное 90
 — «сухое» 92, 364
- Упругость нелинейная 73, 79
 — — в пластинках 549, 557
 — — в рамах 525
 — — материала 78
- Уравнение в вариациях 134, 359
 — возвратное 302
 — затухающих собственных колебаний 86
 — изгиба пластинки 528
 — интегральное Фредгольма второго рода 213
 — — — первого рода 232
 — — — с вырожденным ядром 233
 — — — с интегралом Стильтеса 240
 — — — собственных колебаний 244
 — — — статической устойчивости 248
 — критических частот 35, 306
 — — — с учетом затухания 336
 — Матье-Хилла 15, 22, 54
 — характеристическое 25, 213, 296, 302, 360
- Уравнения движения упругого тела 278
 — динамической устойчивости арок 439
 — — — балок 473
 — — — оболочек 583
 — — — общие 275, 292
 — — —, особый случай 269, 293
 — — — пластинок 533
 — — — рам 520
 — — — с учетом затухания 331
 — Кармана 550
 — Лагранжа 267, 547
 — Ляме 283, 552
 — технической теории оболочек 574

- Установление параметрических колебаний 139
 — — — арок 462
 Устойчивость в большом 137
 — по Ляпунову 358
 — под действием «следящих» сил 401
 — установившихся колебаний 133
 Ферма, нелинейная инерционность 83
 — статически неопределимая 76
 Форма квадратичная 218
 — —, приведение к сумме квадратов 218
 — —, определено положительная 220
 Формула билинейная 237, 249
 — Гаусса — Остроградского 287
 — Грина 531
 — Максвелла-Мора 271
 Формы собственные колебаний системы с бесконечным числом степеней свободы 245
 — — — с конечным числом степеней свободы 244
 Функции Бесселя 539
 — ортогональные 230
 — фундаментальные 232
 — — задачи собственных колебаний 245, 253
 — — статической устойчивости 249, 235
 — сферические 591
 Функция аппроксимирующая 264
 Функция балочная 546
 — Бесселя 539
 Функция влияния прогибов 242, 271
 — Гамильтона 303
 —, медленно изменяющаяся 132
 — напряжений 550
 — нормированная 230
 —, представленная «хистоообразно» 236.
 — распределения 239, 242
 Частоты критические 35, 308
 — — системы с конечным числом степеней свободы 224
 — собственных колебаний сжатого стержня 21
 — — — системы с бесконечным числом степеней свободы 245
 Числа фундаментальные интегрального уравнения 232
 — характеристические матрицы 213
 Эксцентриситет приложения силы 151
 Электровозы, колебания ведущей системы 14, 64, 195
 Ядро интегрального уравнения 231
 — — — вырожденное 233
 — — — итерированное 232
 — — — нагруженное 238
 — — — определено положительно 237
 — — — симметричное 235