ВЫПОЛНЕНИЕ
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ
РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ

Министерство образования и науки РФ
Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова

Выполнение расчетно-графических работ по математике

Учебно-методическая разработка

Архангельск
ИПЦ САФУ
2013

Рассмотрены и рекомендованы к изданию методической комиссией института теоретической и прикладной химии
Северного (Арктического) государственного университета
имени М.В. Ломоносова

Составитель
А.В. Фарков, доцент кафедры математики института математики, информационных и космических технологий САФУ имени М.В. Ломоносова, кандидат педагогических наук

Рецензент
В.Н.Попов, профессор кафедры математики института математики, информационных и космических технологий САФУ имени М.В. Ломоносова, доктор физико-математических наук

УДК 519.876.3.

Выполнение расчетно-графических работ по математике. Учебно-методическая разработка. Составитель А.В. Фарков. – Архангельск: ИПЦ САФУ, 2013. 117 с.

Методические указания подготовлены кафедрой математики института математики информационных и космических технологий САФУ. Приведены краткие теоретические сведения, примерные задания для составления расчетно-графических работ, а также образцы выполнения заданий по каждой теме курса математики.

Предназначены в качестве рекомендаций для выполнения расчетно-графических работ студентами института теоретической и прикладной химии, обучающимся по направлениям бакалавриата: 221700.62 "Стандартизация и метрология", 240100.62 "Химическая технология", 240700.62 "Биотехнология", 241000.62 "Энерго - и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии".

Указания могут быть полезны и для студентов других направлений бакалавриата.

Содержание

Введение

Данное пособие предназначено для студентов Института теоретической и прикладной химии САФУ, обучающимся по направлениям бакалавриата: 221700.62 "Стандартизация и метрология", 240100.62 "Химическая технология", 240700.62 "Биотехнология", 241000.62 "Энерго - и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии".

По данным направлениям курс математики в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта и рабочими программами изучается в течение одного семестра. Это накладывает свой отпечаток на изучение материала по курсу «Математика». В соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта студенты разных направлений должны изучать практически большинство одинаковых разделов. Но есть и отличия. Тем не менее, так как студенты обучаются в одном потоке, то программа составлена для всех направлений единая.

Структура данного пособия следующая: по каждой теме курса «Математика» предложены задания, а затем рассматриваются образцы выполнения заданий по данной теме. Также в каждой теме приведены краткие теоретические сведения, используемые при решении предложенных заданий. Затем рассматривается другая тема, в которой приведены краткие теоретические сведения и образцы выполнения заданий по ней.

Рассмотрим темы расчетно-графических работ:

РГР № 1. «Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Введение в математический анализ».

РГР № 2. «Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальные уравнения».

РГР № 3. «Ряды. Дискретная математика. Теория вероятностей и математическая статистика».

Номер варианта расчетно-графической работы (РГР), которую необходимо выполнить студенту, определяется по последней цифре номера его зачетной книжки, при этом цифре 0 соответствует вариант № 10.

При оформлении расчетно-графической работы необходимо придерживаться следующих правил:

1. Работа выполняется в школьной тетради (12 или 18 листов).
2. Обложка тетради оформляется согласно образцу:

Министерство образования и науки РФ
Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова
Кафедра математики
Институт теоретической и прикладной химии, курс I, группа ______
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА
ПО МАТЕМАТИКЕ
на тему: ____

студента ____

Отметка о зачете Дата

Проверил Фамилия, и.,о.

Архангельск
2013

3. Перед решением каждого из заданий, само задание переписывается.
4. Все решения заданий должны сопровождаться развернутыми пояснениями, необходимо приводить также в общем виде все применяемые формулы, окончательный ответ следует выделить.

Если работа выполнена без замечаний, то студент получает зачет по данной работе, ему выставляется определенное число баллов.

Если в каком-то задании работы есть ошибки, то это задание решается вновь после всех остальных заданий. Работа будет зачтена, когда все ошибки будут устранены.

Если студент выполнил не тот вариант РГР, то РГР не проверяется.

К экзамену студент допускается только при условии зачета всех выполненных расчетно-графических работ.

Тема 1. Линейная алгебра

Краткие теоретические сведения

Матрицей размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Записывается: $Am\times n$.

Матрица записывается в виде $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{mn} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ или, сокращенно,

$A=(a_{ij})$, где i = 1, 2, 3, … , m – номер строки, j = 1, 2, 3, … , n – номер столбца.

Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее *элементами.*

Матрица называется *квадратной* n- *го порядка*, если число ее строк равно числу столбцов и равно n.

Элементы $a_{11}, a_{22},..., a_{ii},..., a_{nn}$ называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* квадратной матрицы *A*.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной.*

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной.* Единичная матрица обозначается буквой *E*.

Матрица, полученная из данной матрицы заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, *транспонированной к данной матрице.* Обозначается A^T.

Суммой двух матриц $Am\times n=(a_{ij})$ и $Bm\times n=(b_{ij})$ называется матрица $Cm\times n=(c_{ij})$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (i = 1, 2, … , m; j = 1, 2, … , n).

Разностью двух матриц $Am\times n=(a_{ij})$ и $Bm\times n=(b_{ij})$ называется матрица $Cm\times n=(c_{ij})$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ (i = 1, 2, … , m; j = 1, 2, … , n).

Произведением матрицы $Am\times n=(a_{ij})$ на число k называется матрица $Bm\times n=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$ (i = 1, 2, … , m; j = 1, 2, … , n).

Произведением матрицы $Am\times n=(a_{ij})$ на матрицу $Bn\times p=(b_{jk})$ называется матрица $Cm\times p=(c_{ik})$ такая, что $c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+...+a_{in}\cdot b_{nk}$ (i = 1, 2, … , m; k = 1, 2, … , p).

Определителем квадратной матрицы второго порядка A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{pmatrix}$

называется число $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$.

Определителем квадратной матрицы третьего порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

называется число $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$$=(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31})-(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}+a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}+a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}).$$

Минором элемента a_{ij} *определителя n-го порядка* называется определитель n-1-го порядка, полученный из исходного определителя вычеркиванием i – той строки и *j-го* столбца. Минор элемента a_{ij} обозначается: M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется число $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Матрицей, союзной к матрице A, называется матрица

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1j} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2j} & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ A_{i1} & A_{i2} & \ldots & A_{ij} & \ldots & A_{in} \\ \ldots & .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nj} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя матрицы *A*.

Матрица A^{-1} называется *обратной к матрице A,* если выполняется условие: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, где *E* – единичная матрица того же порядка, что и матрица *A*.

Обратная матрица к матрице *A*, находится по формуле: $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot A^{*}$, где A^{*} - матрица, союзная к транспонированной матрице A^{T}.

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_n, \end{cases} \quad (1)$$

где $x_1, x_2, \ldots x_n$ - неизвестные, числа $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2n}, \ldots a_{m1}, a_{m2}, \ldots a_{mn}$ - коэффициенты системы, $b_1, b_2, \ldots b_n$ - свободные члены.

Матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{mn} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется *основной матрицей системы линейных уравнений (1)*.

Матрица $\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{mn} & \dots & a_{mn}b_m \end{pmatrix}$ называется *расширенной матрицей системы линейных уравнений* (1).

Решением системы (1) называется n значений неизвестных $x_1=c_1, x_2=c_2,..., x_n=c_n$, при подстановке которых в систему (1) каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется *совместной,* если она имеет хотя бы одно решение.

Система уравнений называется *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система уравнений называется *определенной,* если она имеет единственное решение.

Совместная система уравнений называется *неопределенной,* если она имеет более одного решения.

Решить систему уравнений – это значит выяснить, совместна она или несовместна и в случае, если система совместна, то найти все ее решения.

Две системы уравнений называются *равносильными,* если они имеют одно и то же множество решений.

Равносильные системы линейных уравнений получаются при элементарных преобразованиях системы.

К *элементарным преобразованиям* системы линейных уравнений относятся:
- перестановка местами двух уравнений системы;
- умножение уравнения системы на ненулевое число;
- замена какого-то уравнения системы на сумму этого уравнения и другого уравнения системы, умноженного на какое-либо число;
- удаление из системы линейных уравнений уравнения вида $0\cdot x_1+0\cdot x_2+...+0\cdot x_n=0$.

К основным методам решения систем линейных уравнений относятся:
- Метод Крамера;
- Матричный способ (метод обратной матрицы);
- Метод Гаусса.

Метод Крамера применяется в случае, когда число уравнений в системе (1) и число неизвестных равны, то есть $m = n,$ при этом $\Delta = \det A \neq 0$. Тогда для нахождения решения системы линейных уравнений применяются формулы Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \text{ где j = 1; 2; 3.}$$

Здесь: $\Delta = \det A$, а Δ_j– определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца *j* столбцом свободных членов.

Метод обратной матрицы применяется также для случая, когда число уравнений в системе (1) и число неизвестных равны, то есть $m = n$, при этом $\Delta = \det A \neq 0$.

Тогда для нахождения решения системы линейных уравнений применяется формула

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

В данной формуле: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов, а

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*.$$

Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных) применяется для любых систем линейных уравнений. Он состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к *ступенчатому* (в частности, *треугольному*) виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы. При этом на практике все преобразования на первом этапе совершаются над расширенной матрицей системы линейных уравнений (1).

Задания к расчетно-графической работе

Задание 1.1. Выполнить действия над матрицами.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$2(A+B)(2B-A)$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	6	$(2A-B)(3A+B)-2AB$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
2	$3A - (A+2B)B$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	7	$(A+B)A - B(2A+3B)$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

3	$(A\text{-}B)2A+2B$, где $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 7 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$	8	$A(2A+B)\text{ - }B(A\text{-}B)$, где $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}9 & 8 & 7\\ 2 & 7 & 3\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}$
4	$2(A\text{-}0{,}5B)+AB$, где $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 16\\ -3 & -2 & 0\\ 5 & 7 & 2\end{pmatrix}$	9	$(A-B)(A+B)+2A$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$
5	$(A\text{-}B)A+3B$, где $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -5\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & -3 & 4\end{pmatrix}$	10	$2AB\text{-}(A+B)(A\text{-}B)$, где $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 6\\ 2 & 4 & 3\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}$

Задание 1.2. Дана система линейных уравнений.

1. Решить систему по формулам Крамера;
2. Решить систему с помощью обратной матрицы.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4,\\ 3x_1-5x_2+3x_3=1,\\ 2x_1+7x_2-x_3=8\end{cases}$	6	$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1,\\ 2x_1-x_2+2x_3=-4,\\ 4x_1+x_2+4x_3=-2\end{cases}$
2	$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5,\\ 2x_1+3x_2+x_3=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3=11\end{cases}$	7	$\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=4,\\ 2x_1-5x_2-3x_3=-17,\\ x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$
3	$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=31,\\ 5x_1+x_2+2x_3=29,\\ 3x_1-x_2+x_3=10\end{cases}$	8	$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1,\\ x_1+x_2+x_3=6,\\ 3x_1-x_2+x_3=4\end{cases}$
4	$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=9,\\ 2x_1+5x_2-3x_3=4,\\ 5x_1+6x_2-2x_3=18\end{cases}$	9	$\begin{cases}x_1+5x_2+x_3=-7,\\ 2x_1-x_2-x_3=0,\\ x_1-2x_2-x_3=2\end{cases}$
5	$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4,\\ 3x_1+4x_2-2x_3=11,\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$	10	$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=6,\\ 2x_1+3x_2-4x_3=16,\\ 3x_1-2x_2-5x_3=12\end{cases}$

Задание 1.3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4 \end{cases}$	6	$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4=12, \\ 2x_1-6x_2+2x_3+2x_4=12, \\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5 \end{cases}$	7	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3+2x_4=2, \\ 3x_1+2x_2-4x_3+x_4=3, \\ -x_1+x_2+x_3+5x_4=2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4=12, \\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4, \\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4=16 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=12, \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=13, \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=14 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=8, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=-1, \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=10 \end{cases}$	9	$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=6, \\ 2x_1+5x_2+4x_3+3x_4=-19, \\ x_1+x_2+2x_3-3x_4=10, \\ 4x_1+6x_2+x_3-2x_4=-12 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=8, \\ 2x_1+x_3+4x_4=9, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=-1 \end{cases}$	10	$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4=1, \\ 4x_1+3x_2+x_3-3x_4=-7, \\ -2x_1+4x_2+3x_3-4x_4=3, \\ 2x_1+2x_2-3x_3-x_4=-11 \end{cases}$

Пример выполнения заданий по теме 1

Задание 1.1. Выполнить действия над матрицами: $B\cdot(A+3B)-A\cdot(A-B)$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1). $3B=3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot1 & 3\cdot3 & 3\cdot4 \\ 3\cdot5 & 3\cdot7 & 3\cdot8 \\ 3\cdot1 & 3\cdot2 & 3\cdot4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 15 & 21 & 24 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$

2). $A+3B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 15 & 21 & 24 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3 & 2+9 & 3+12 \\ 2+15 & 1+21 & 4+24 \\ 3+3 & 2+6 & 3+12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 11 & 15 \\ 17 & 22 & 28 \\ 6 & 8 & 15 \end{pmatrix}.$

3). $B\cdot(A+3B)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 11 & 15 \\ 17 & 22 & 28 \\ 6 & 8 & 15 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot4+3\cdot17+4\cdot6 & 1\cdot11+3\cdot22+4\cdot8 & 1\cdot15+3\cdot28+4\cdot15 \\ 5\cdot4+7\cdot17+8\cdot6 & 5\cdot11+7\cdot22+8\cdot8 & 5\cdot15+7\cdot28+8\cdot15 \\ 1\cdot4+2\cdot17+4\cdot6 & 1\cdot11+2\cdot22+4\cdot8 & 1\cdot15+2\cdot28+4\cdot15 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4+51+24 & 11+66+32 & 15+84+60 \\ 20+119+48 & 55+154+64 & 75+196+120 \\ 4+34+24 & 11+44+32 & 15+56+60 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 79 & 109 & 159 \\ 187 & 273 & 391 \\ 62 & 87 & 131 \end{pmatrix}.$$

4). $A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-1 & 2-3 & 3-4 \\ 2-5 & 1-7 & 4-8 \\ 3-1 & 2-2 & 3-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -6 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

5). $A\cdot(A-B)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -6 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot0+2\cdot(-3)+3\cdot2 & 1\cdot(-1)+2\cdot(-6)+3\cdot0 & 1\cdot(-1)+2\cdot(-4)+3\cdot(-1) \\ 2\cdot0+1\cdot(-3)+4\cdot2 & 2\cdot(-1)+1\cdot(-6)+4\cdot0 & 2\cdot(-1)+1\cdot(-4)+4\cdot(-1) \\ 3\cdot0+2\cdot(-3)+3\cdot2 & 3\cdot(-1)+2\cdot(-6)+3\cdot0 & 3\cdot(-1)+2\cdot(-4)+3\cdot(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0-6+6 & -1-12+0 & -1-8-3 \\ 0-3+8 & -2-6+0 & -2-4-4 \\ 0-6+6 & -3-12+0 & -3-8-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -13 & -12 \\ 5 & -8 & -10 \\ 0 & -15 & -14 \end{pmatrix}.$$

6). $B\cdot(A+3B)-A\cdot(A-B)=\begin{pmatrix} 79 & 109 & 159 \\ 187 & 273 & 391 \\ 62 & 87 & 131 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -13 & -12 \\ 5 & -8 & -10 \\ 0 & -15 & -14 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 79-0 & 109-(-13) & 159-(-12) \\ 187-5 & 273-(-8) & 391-(-10) \\ 62-0 & 87-(-15) & 131-(-14) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 79 & 122 & 171 \\ 182 & 281 & 401 \\ 62 & 102 & 145 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $B\cdot(A+3B)-A\cdot(A-B)=\begin{pmatrix} 79 & 122 & 171 \\ 182 & 281 & 401 \\ 62 & 102 & 145 \end{pmatrix}$

Задание 1.2. Дана система линейных уравнений: $\begin{cases} 5x_1-x_2-x_3=0, \\ x_1+2x_2+3x_3=14, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=16. \end{cases}$

1. Решить систему по формулам Крамера;
2. Решить систему с помощью обратной матрицы.

Решение.

1. Воспользуемся формулами Крамера: $x_j=\dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, где j = 1; 2; 3.

$\Delta=\det A$, а Δ_j– определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца *j* столбцом свободных членов. Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (5\cdot2\cdot2 + 1\cdot3\cdot(-1) + (-1)\cdot3\cdot4) - (4\cdot2\cdot(-1) + 3\cdot3\cdot5 + 1\cdot(-1)\cdot2) =$$

$= (20 - 3 - 12) - (-8 + 45 - 2) = 5 - 35 = -30;$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (0\cdot2\cdot2 + 14\cdot3\cdot(-1) + (-1)\cdot3\cdot16) - (16\cdot2\cdot(-1) + 0\cdot3\cdot3 + 14 \times$$

$\times (-1)\cdot2) = (0 - 42 - 48) - (-32 + 0 - 28) = -90 - (-60) = -30;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = (5\cdot14\cdot2 + 1\cdot16\cdot(-1) + 0\cdot3\cdot4) - (4\cdot14\cdot(-1) + 5\cdot16\cdot3 + 1\cdot0\cdot2) =$$

$= (140 - 16 + 0) - (-56 + 240 + 0) = 124 - 184 = -60;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = (5\cdot2\cdot16 + 1\cdot3\cdot0 + (-1)\cdot14\cdot4) - (0\cdot2\cdot4 + 5\cdot3\cdot14 + 1\cdot(-1)\cdot16) =$$

$= (160 + 0 - 56) - (0 + 210 - 16) = 104 - 194 = -90.$

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-30}{-30} = 1, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-60}{-30} = 2, \quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-90}{-30} = 3.$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

2. Запишем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, столбец неизвестных

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$. Определитель матрицы A равен $|A| = -30 \neq 0$. Тогда решение системы линейных уравнений определяется по формуле $X = A^{-1}\cdot B$. Для нахождения A^{-1} воспользуемся формулой: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot A^*$.

Для нахождения A^* составим для матрицы A транспонированную матрицу $A^{\grave{o}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и найдем элементы союзной матрицы A^*, как алгебраические дополнения элементов матрицы $A^{\grave{o}}$.

$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Тогда: $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -5,$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(-1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3) = -(-2 + 3) = -1,$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = -3 + 2 = -1,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - 3 \cdot 4) = -(2 - 12) = -(-10) = 10,$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) = 10 + 4 = 14,$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 3 - 1 \cdot (-1)) = -(15 + 1) = -16,$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 3 - 8 = -5,$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 3 - 4 \cdot (-1)) = -(15 + 4) = -19,$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 10 + 1 = 11.$

Тогда $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* = \frac{1}{-30} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Найдем матрицу X.

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{30}&\frac{1}{30}\\-\frac{1}{3}&-\frac{7}{15}&\frac{8}{15}\\\frac{1}{6}&\frac{19}{30}&-\frac{11}{30}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\14\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30}\\-\frac{1}{3}\cdot 0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15}\\\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Итак, решением системы будет $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Задание 1.3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -4,\\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1,\\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5,\\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение.

I. Составим расширенную матрицу системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&1&-4\\2&1&-1&-1&1\\1&-1&2&3&5\\5&2&-4&2&-3\end{pmatrix}$$

Первую строку матрицы умножим на -2 и прибавим ко второй строке матрицы, также первую строку умножим на -1 и прибавим к третьей строке и умножив первую строку на -5 прибавим ее к четвертой строке. После этого все элементы первого столбца, кроме первого, окажутся равными нулю.

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&1&-4\\2&1&-1&-1&1\\1&-1&2&3&5\\5&2&-4&2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-3&1&-4\\0&-3&5&-3&9\\0&-3&5&2&9\\0&-8&11&-3&17\end{pmatrix}.$$

Четвертую строку умножим на -2 и сложим со второй строкой, умноженной на 5 (таким образом, мы получим на месте элемента a_{22} единицу).

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&1&-4\\0&-3&5&-3&9\\0&-3&5&2&9\\0&-8&11&-3&17\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-3&1&-4\\0&1&3&-9&11\\0&-3&5&2&9\\0&-8&11&-3&17\end{pmatrix}.$$

Теперь умножим вторую строку сначала на 3 и сложим с третьей, а затем на 8 и сложим с четвертой.

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&1&-4\\0&1&3&-9&11\\0&-3&5&2&9\\0&-8&11&-3&17\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-3&1&-4\\0&1&3&-9&11\\0&0&14&-25&42\\0&0&35&-75&105\end{pmatrix}.$$

Разделим все элементы четвертой строки на 5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 14 & -25 & 42 \\ 0 & 0 & 35 & -75 & 105 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 14 & -25 & 42 \\ 0 & 0 & 7 & -15 & 21 \end{pmatrix}.$$

Переставим четвертую и третью строки местами.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 14 & -25 & 42 \\ 0 & 0 & 7 & -15 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 7 & -15 & 21 \\ 0 & 0 & 14 & -25 & 42 \end{pmatrix}$$

Умножим третью строку на -2 и сложим с четвертой.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 7 & -15 & 21 \\ 0 & 0 & 14 & -25 & 42 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 7 & -15 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате мы получили треугольную основную матрицу системы линейных уравнений. Запишем соответствующую данной расширенной матрице систему линейных уравнений и решим ее.

II.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -4, \\ \qquad x_2 + 3x_3 - 9x_4 = 11, \\ \qquad\qquad 7x_3 - 15x_4 = 21, \\ \qquad\qquad\qquad 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы находим $x_4 = 0$. Подставим $x_4 = 0$ в третье уравнение и найдем $x_3 = 3$. Подставим $x_4 = 0$ и $x_3 = 3$ во второе уравнение системы, получим: $x_2 + 3\cdot 3 - 9\cdot 0 = 11$, из которого находим $x_2 = 2$. Подставим $x_4 = 0$, $x_3 = 3$, $x_2 = 2$ в первое уравнение системы, получим: $x_1 + 2\cdot 2 - 3\cdot 3 + 0 = -4$, из которого получаем: $x_1 = 1$.

<u>Проверка.</u> Подставим найденные значения x_1, x_2, x_3, x_4 в исходную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1 + 2\cdot 2 - 3\cdot 3 + 0 = -4, \\ 2\cdot 1 + 2 - 3 - 0 = 1, \\ 1 - 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 0 = 5, \\ 5\cdot 1 + 2\cdot 2 - 4\cdot 3 + 2\cdot 0 = -3. \end{cases} \qquad \begin{cases} -4 = -4 \text{ – верно,} \\ 1 = 1 \text{ – верно,} \\ 5 = 5 \text{ – верно,} \\ -3 = -3 \text{ – верно.} \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$, $x_4 = 0$.

Тема 2. Аналитическая геометрия

Краткие теоретические сведения

Уравнения прямой на плоскости:
$y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом,
$Ax + By + D = 0$ – общее уравнение прямой,
$y - y_0 = k(x - x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении,
$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки,
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках,
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0\ (x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B)$.

Вектор $\vec{n} = (A, B)$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным* вектором этой прямой.

Условие перпендикулярности двух прямых: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Условие параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$.

Расстояние d *от точки* $M_0(x_0, y_0)$ *до прямой, заданной уравнением* $Ax + By + C = 0$ находится по формуле: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Окружностью называется множество точек плоскости, находящим на одном и том же расстоянии от некоторой точки этой же плоскости.

Каноническое уравнение окружности: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. $M_0(x_0, y_0)$ – центр окружности, R – радиус окружности.

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой же плоскости, называемых *фокусами,* есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Эксцентриситетом эллипса ε называется отношение расстояния между фокусами к длине большой оси. Если $a > b$, то $\varepsilon = \frac{c}{a}$ (фокусы лежат на оси абсцисс, их координаты $F_{1,2}(\pm c;0), c^2 = a^2 - b^2$); если $b > a$, то $\varepsilon = \frac{c}{b}$ (фокусы лежат на оси ординат, их координаты $F_{1,2}(0;\pm c), c^2 = b^2 - a^2$).

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых *фокусами,* есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

Канонические уравнения гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (фокусы гиперболы лежат на оси абсцисс, их координаты $F_{1,2}(\pm c;0), c^2=a^2+b^2$) и $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ (фокусы гиперболы лежат на оси ординат, их координаты $F_{1,2}(0,\pm c)$, $c^2=a^2+b^2$).

Эксцентриситетом гиперболы ε называется отношение расстояния между фокусами к длине действительной оси. Если фокусы гиперболы лежат на оси абсцисс, то $\varepsilon=\frac{c}{a}$; если фокусы гиперболы лежат на оси ординат то $\varepsilon=\frac{c}{b}$.

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой *фокусом*, и от данной прямой, называемой *директрисой* и не проходящей через фокус.

Расстояние от фокуса F до директрисы параболы называется *параметром* параболы, обозначается p, $p > 0$.

Канонические уравнения параболы:

$y^2 = 2px$ (фокус имеет координаты $F(\frac{p}{2};0)$);

$y^2 = -2px$ (фокус имеет координаты $F(-\frac{p}{2};0)$);

$x^2 = 2py$ (фокус имеет координаты $F(0;\frac{p}{2})$);

$x^2 = -2py$ (фокус имеет координаты $F(0;-\frac{p}{2})$).

Уравнения плоскости в пространстве:

1. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A,\ B,\ C)$, который называется *нормальным* вектором плоскости.
2. $Ax+By+Cz+D=0$ – общее уравнение плоскости,
3. $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ – уравнение плоскости, проходящей через три данные точки,
4. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – уравнение плоскости в отрезках.

Уравнения прямой в пространстве:

1. $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ - канонические уравнения прямой. Здесь M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ – точка, лежащая на данной прямой, $\vec{a}=(m,\ n,\ p)$ – *направляющий* вектор прямой.

2. $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две точки,

3. $\begin{cases} A_1x+B_1y+Cz_1+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ – общие уравнения прямой.

Угол между прямой, заданной в пространстве уравнением $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ *и плоскостью,* заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, находится по формуле: $sin\ \varphi=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

Расстояние d *от точки* $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ *до плоскости,* заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+d|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Задания к расчетно-графической работе

Задание 2.1. Найти длину высоты AD в треугольнике с вершинами A, B, C и написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB.

Вариант	*A*	*B*	*C*	Вариант	*A*	*B*	*C*
1	(-3; 4)	(-2; -1)	(-1; -7)	6	(3; 2)	(2;-5)	(-6; -1)
2	(4; -5)	(-3; 3)	(-5; -2)	7	(6; -4)	(-3; -7)	(-1; 2)
3	(3; 5)	(-4; -3)	(2; -4)	8	(-2; -1)	(7; 3)	(4; -3)
4	(-3; -2)	(5; -4)	(1; 6)	9	(3; 4)	(6; 7)	(1; 1)
5	(-2; 5)	(3; 4)	(4; -2)	10	(-4; -5)	(3; -3)	(5; 2)

Задание 2.2. Определить тип кривых и построить их. Для эллипса, гиперболы найти полуоси, эксцентриситет, координаты фокусов; для параболы – параметр *p* и координаты фокуса, для окружности – координаты центра окружности и радиус окружности.

1	$\grave{a})(x-2)^2+(y-3)^2=9;$ $\acute{a})\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1;$ $\hat{a})\dfrac{x^2}{49}-\dfrac{y^2}{25}=1;$ $\tilde{a})x^2=9y.$	6	$\grave{a})(x+3)^2+(y-5)^2=4;$ $\acute{a})\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{4}=1;$ $\hat{a})\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=-1;$ $\tilde{a})y^2=7x.$

2	à) $(x+1)^2+(y-2)^2=16;$ á) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1;$ â) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1;$ ã) $y^2=5x.$	7	à) $(x-3)^2+(y+4)^2=25;$ á) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1;$ â) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1;$ ã) $y^2=16x.$
3	à) $(x+3)^2+(y+3)^2=4;$ á) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1;$ â) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1;$ ã) $y^2=3x.$	8	à) $(x-1)^2+(y+4)^2=25;$ á) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1;$ â) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1;$ ã) $y^2=4x.$
4	à) $(x-3)^2+(y-2)^2=9;$ á) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1;$ â) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}=-1;$ ã) $y^2=-4x.$	9	à) $(x+1)^2+(y+1)^2=16;$ á) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1;$ â) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1;$ ã) $x^2=-6y.$
5	à) $(x-5)^2+(y+3)^2=4;$ á) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}=1;$ â) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=-1;$ ã) $y^2=-2x.$	10	à) $(x+4)^2+(y-3)^2=25;$ á) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1;$ â) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}=1;$ ã) $y^2=-x.$

Задание 2.3. Написать канонические уравнения прямой.

Вариант		Вариант	
1	$\begin{cases}2x+y+z-2=0\\2x-y-3z+6=0\end{cases}$	6	$\begin{cases}3x+y-z-6=0\\3x-y+2z=0\end{cases}$
2	$\begin{cases}x-3y+2z=0\\x+3y+z+14=0\end{cases}$	7	$\begin{cases}x+5y+2z+11=0\\x-y-z-1=0\end{cases}$
3	$\begin{cases}x-2y+z-4=0\\2x+2y-z-8=0\end{cases}$	8	$\begin{cases}3x+4y-2z+1=0\\2x-4y+3z+4=0\end{cases}$
4	$\begin{cases}x+y+z-2=0\\x-y-2z+2=0\end{cases}$	9	$\begin{cases}5x+y-3z+4=0\\x-y+2z+2=0\end{cases}$
5	$\begin{cases}2x+3y+z+6=0\\x-3y-2z+3=0\end{cases}$	10	$\begin{cases}x-y-z-2=0\\x-2y+z+4=0\end{cases}$

Задание 2.4. Найти угол между плоскостью α и прямой, проходящей через начало координат и точку M. Вычислить расстояние от точки M до плоскости α.

Вариант	M	α	Вариант	M	α
1	(-1;3;2)	$-x+2y+3z-4=0$	6	(-2;4;-3)	$x+5y+7z-2=0$
2	(2;1;-3)	$-x+y+2z+5=0$	7	(5;-3;2)	$-x+3y+2z+14=0$
3	(-2;4;2)	$-3x+5y+z-10=0$	8	(-3;-2;4)	$x-5y+3z+1=0$
4	(5;-1;-4)	$x-2y+4z+5=0$	9	(1;3;4)	$2x+3y+z-6=0$
5	(3;1;2)	$2x-y+5z-3=0$	10	(3;2;-1)	$2x+3y-z-4=0$

Пример выполнения заданий по теме 2

Задание 2.1. Найти длину высоты AD в треугольнике с вершинами A (2; 1), B (-1; -1), C (3; 4) и написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB.

Решение.

1. Найдем длину высоты AD в треугольнике, как расстояние от точки A до прямой BC. Для нахождения уравнения прямой BC воспользуемся уравнением прямой проходящей через две точки: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Так как $x_1 = -1$, $y_1 = -1$, $x_2 = 3$, $y_2 = 4$, то получим $\frac{y+1}{4+1}=\frac{x+1}{3+1}$, которое равносильно уравнению $4y + 4 = 5x + 5$, из которого получаем общее уравнение прямой: $5x - 4y + 1 = 0$. Так как расстояние от точки M (x_0, y_0) до прямой, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$ находится по формуле $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, то $AD = d=\frac{|5\cdot 2 -4\cdot 1 +1|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}}=\frac{7}{\sqrt{41}}$.

2. Для нахождения уравнения перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB, воспользуемся условием перпендикулярности прямых на плоскости: $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Для нахождения составим уравнение прямой проходящей через две точки и преобразуем полученное уравнение к уравнению с угловым коэффициентом.

Так как уравнение прямой, проходящей через две точки имеет вид: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, а A (2; 1), B (-1; -1), то имеем: $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, $x_2 = -1$, $y_2 = -1$.

Тогда уравнение прямой AB будет: $\frac{y-1}{-1-1}=\frac{x-2}{-1-2}$. Данное уравнение равносильно уравнению: $-3(y-1) = -2(x-2)$, которое преобразуем к виду

$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Найдем из данного уравнения $k_1 = \frac{2}{3}$. Тогда угловой коэффициент прямой *CK*, перпендикулярной прямой *AB* будет равен $k_2 = -\frac{3}{2}$.

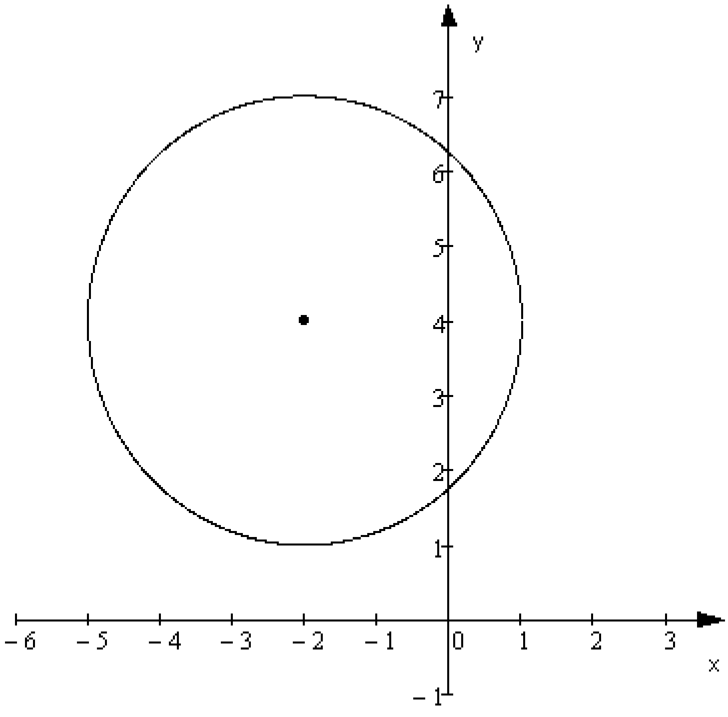
Для составления уравнения прямой *CK* воспользуемся уравнением прямой: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Тогда уравнение прямой *CK* будет $y - 4 = -\frac{3}{2}(x - 3)$, которое будет равносильно уравнению $3x + 2y - 17 = 0$.

Ответ: Длина высоты *AD* равна $\frac{7}{\sqrt{41}}$, уравнение перпендикуляра, опущенного из точки *C* на прямую *AB* - прямой *CK*, будет иметь вид $3x + 2y - 17 = 0$.

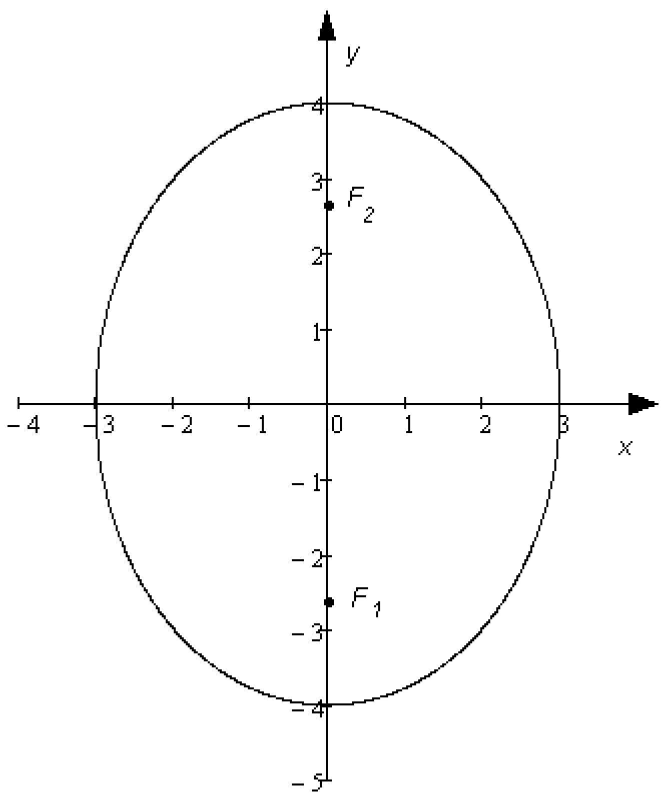
Задание 2.2. Определить тип кривых и построить их. Для эллипса, гиперболы найти полуоси, эксцентриситет, координаты фокусов; для параболы – параметр *p* и координаты фокуса, для окружности – координаты центра окружности и радиус окружности.

Решение.

1. $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$. Так как каноническое уравнение окружности имеет вид: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, то уравнение $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$, которое сводится к уравнению $(x - (-2))^2 + (y - 4)^2 = 3^2$, определяет окружность с центром в точке $O'(-2; 4)$ и $R = 3$. Изобразим ее.



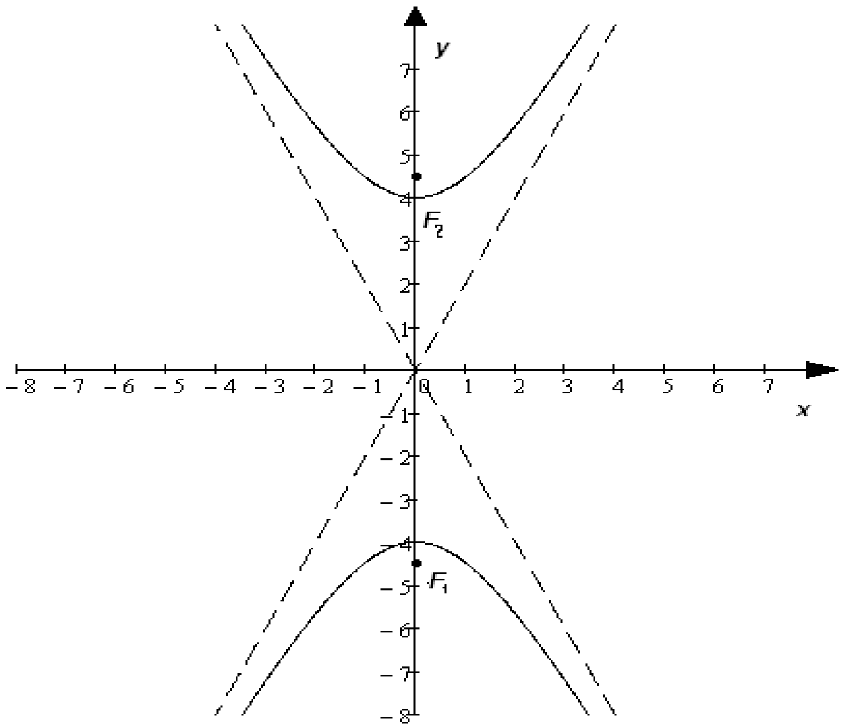
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. Так как каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то преобразовав исходное уравнение к виду: $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, мы получим уравнение эллипса с полуосями: a = 3, b = 4. Так как $b > a$, то фокусы данного эллипса находятся на оси OY. Изобразим данный эллипс.



Так как эксцентриситет эллипса с фокусами на оси ординат находится по формуле $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, то $c = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ и $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \approx 0{,}66$.

Координаты фокусов эллипса для случая $b > a$ имеют вид $F_1(0;\,-c)$, $F_2(0;\,c)$, поэтому будут: $F_1(0; -\sqrt{7}\,)$, $F_2(0;\,\sqrt{7}\,)$.

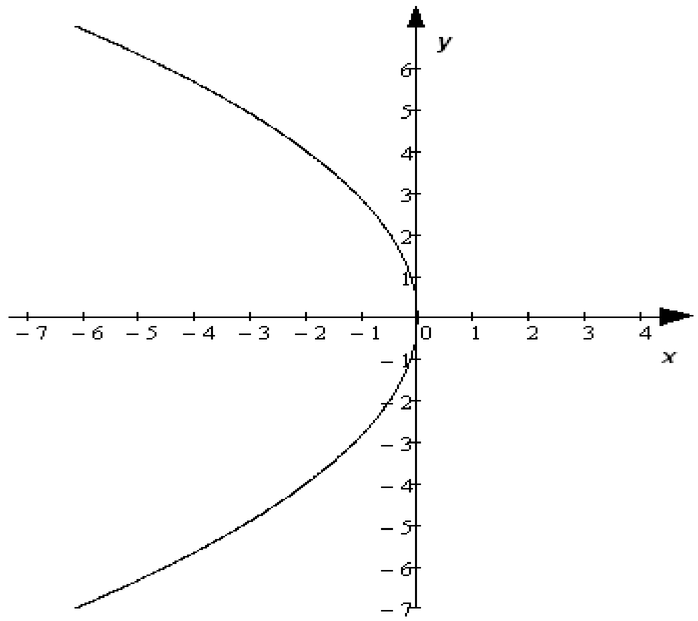
3. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = -1$. Так как каноническое уравнение гиперболы имеет вид: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (для случая, когда фокусы гиперболы расположены на оси абсцисс) и $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ (для случая, когда фокусы гиперболы расположены на оси ординат), то преобразовав исходное уравнение к виду: $\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = -1$, мы получим уравнение гиперболы с полуосями: a = 2, b = 4 и фокусами, расположенными на оси ординат. Изобразим данную гиперболу.



Так как эксцентриситет гиперболы с фокусами на оси ординат находится по формуле $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$, где c = $\sqrt{a^2 + b^2}$, то c = $\sqrt{2^2 + 4^2}$ = $\sqrt{20}$ и $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{20}}{4} \approx 1{,}12$.

Координаты фокусов гиперболы для случая $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ имеют вид $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$, поэтому будут: $F_1(0; -\sqrt{20})$, $F_2(0; \sqrt{20})$.

4. $y^2 = -8x$. Это уравнение параболы, каноническое уравнение которой имеет вид $y^2 = -2px$. Парабола имеет вершину в точке O (0; 0) и располагается во второй и третьей четверти. Параметр параболы p = 4. Для уточнения вида параболы найдем координаты хотя бы одной точки. Если x = - 2, то $y = \pm 4$.
Тогда график параболы будет следующий:



Так как координаты фокуса для параболы, заданной уравнением $y^2 = -2px$, имеют вид $F\,(-\frac{p}{2};\,0)$, то для данной параболы координаты фокуса будут F (-2; 0).

Задание 2.3. Написать канонические уравнения прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

Решение.
Для нахождения канонического уравнения прямой, найдем координаты любых двух точек этой прямой.
1. Примем координату первой точки $x = 0$, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений, тогда получим:

$$\begin{cases} y = 3z - 1, \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3z - 1, \\ 12z - 4 - z - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3z - 1, \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2, \\ z = 1 \end{cases}$$, т.е. $A(0,\ 2,\ 1)$.

2. Примем координату второй точки прямой $z = 0$, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений, тогда получим:

$$\begin{cases} y = 2x - 1, \\ 5x + 4y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1, \\ 5x + 8x - 4 - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1, \\ 13x = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{9}{13}, \\ x = \frac{11}{13} \end{cases}$$, т.е. $B(\frac{11}{13}, \frac{9}{13}, 0)$.

3. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$. Подставим координаты точек A и B в данное уравнение: $\frac{x - 0}{\frac{11}{13} - 0} = \frac{y - 2}{\frac{9}{13} - 2} = \frac{z - 1}{0 - 1} \Rightarrow \frac{x}{\frac{11}{13}} = \frac{y - 2}{\frac{-17}{13}} = \frac{z - 1}{-1} \Rightarrow \frac{x}{11} = \frac{y - 2}{-17} = \frac{z - 1}{-13}$.

Ответ: $\frac{x - 0}{11} = \frac{y - 2}{-17} = \frac{z - 1}{-13}$.

Задание 2.4. Найти угол между плоскостью α: $x + 2y - z + 1 = 0$ и прямой, проходящей через начало координат и точку M (2; 1; -2). Вычислить расстояние от точки M до плоскости α.
Решение.
1. Воспользуемся формулой для вычисления угла между прямой и плоскостью: $\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$, где $\vec{n} = (A; B; C)$– нормальный вектор плоскости α, $\vec{a} = (m; n; p)$- направляющий вектор прямой. Для нахождения уравнения прямой воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$. Так как M (2; 1; -2), O (0; 0; 0), то уравнение

прямой MO будет иметь вид: $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$. Тогда $\vec{a}=(2;1;-2)$. Так как уравнение плоскости α: $x + 2y - z + 1 = 0$, то $\vec{n}=(1;2;-1)$, поэтому

$$sin\ \varphi = = \frac{|1\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot(-2)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{6}{3\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Значит, $\varphi = arcsin\ \frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. Расстояние от точки $M\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $x + 2y - z + 1 = 0$ находится по формуле $d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Тогда

$$d = \frac{|1\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot(-2)+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{6}}=\frac{7\sqrt{6}}{6}\approx 2{,}86.$$

Ответ: $\varphi = arcsin\ \frac{\sqrt{6}}{3}$, $d \approx 2{,}86$.

Тема 3. Введение в математический анализ

Краткие теоретические сведения

Число A называется *пределом функции f(x) при $x\to\infty$*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x, таких что $|x|>M$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

В этом случае записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Число A называется *пределом функции f(x) в точке a* (*при $x\to a$*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \delta$ верно неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

В этом случае записывают: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Первый замечательный предел математического анализа: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел математического анализа: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Важнейшие эквивалентности, используемые при вычислении пределов при $x\to 0$: $\sin x \sim x$, $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, $tg\, x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $arctg\, x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$,

$e^x - 1 \sim x$, $a^x - 1 \sim x\cdot\ln x$, $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$, $(1+x)^k - 1 \sim k\cdot x$, $k > 0$.

Задания к расчетно-графической работе

Задание 3.1. Найти пределы функций, не пользуясь правилами Лопиталя.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3-3x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctg\, x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.	6	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-4}{x+x^3+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{tg\, 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

2	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x^3-1}{2x^4-x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\arcsin 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{x}$.	7	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x+1}{2+14x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x+3}\right)^{2x}$.
3	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-3}{5x^2-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{6+x}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{\sin 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{5x}$.	8	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^3}{x^3-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+8}{8x+1}\right)^{-3x}$.
4	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+6x^2-x-6}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-7}{5x+5}\right)^{-3x}$.	9	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+2}{6x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-4}{4x+4}\right)^{-5x}$.
5	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-3x^2+2x}{2+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+2}{9x+16}\right)^{2x}$.	10	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-3x+4}{x+4x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\arcsin 7x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$.

Пример выполнения заданий по теме 3

Задание 3.1. Найти пределы функций, не пользуясь правилами Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+2x-4x^2}{3x^2-12}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x\cdot tg\,2x}{1-\cos x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-5}\right)^{-2x}$.

Решение.

а). Разделим числитель и знаменатель дроби на наибольшую степень: x^2. Тогда получим: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+2x-4x^2}{3x^2-12}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}-4}{3-\frac{12}{x^2}}$. Так как при $x\to\infty$ $\dfrac{3}{x^2}\to 0, \dfrac{2}{x}\to 0, \dfrac{12}{x^2}\to 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}-4}{3-\frac{12}{x^2}}=\dfrac{0+0-4}{3-0}=-\dfrac{4}{3}=-1\dfrac{1}{3}$.

б) Разложим числитель и знаменатель дроби на множители.
Найдем корни многочлена $2x^2-5x-3$. Так как $D=(-5)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=49$, то $x_1=\dfrac{5+7}{2\cdot 2}=3$, $x_2=\dfrac{5-7}{2\cdot 2}=-\dfrac{1}{2}$. Тогда применив формулу:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, получим $2x^2-5x-3=2(x-3)\cdot(x-\frac{1}{2})$.

Так как $x^2-9=(x-3)(x+3)$,

то $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2(x-3)(x+\frac{1}{2})}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+1}{x+3}=\dfrac{2\cdot 3+1}{3+3}=\dfrac{7}{6}=1\dfrac{1}{6}$.

в) Домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$$

$$=\frac{2}{(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1.$$

г) Так как 1 – *cosx* = $2\sin^2\frac{x}{2}\sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$, *arcsin x* ~ *x*, *tg*2*x* ~ 2*x* при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x\cdot tg\,2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 2x}{\frac{x^2}{2}}=4.$$

д) Преобразуем выражение под знаком предела таким образом, чтобы применить формулу второго замечательного предела: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-5}\right)^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-5}\right)^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-5}\right)^{\frac{3x-5}{7}\cdot\frac{7}{3x-5}\cdot(-2x)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{7}{3x-5}\right)^{\frac{3x-5}{7}}\right)^{\frac{-14x}{3x-5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-14x}{3x-5}}=e^{\frac{-14}{3}}=\frac{1}{e^4\cdot\sqrt[3]{e^2}}.$$

Ответ:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+2x-4x^2}{3x^2-12}=-1\frac{1}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-9}=1\frac{1}{6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}=-1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x\cdot tg\,2x}{1-\cos x}=4$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-5}\right)^{-2x}=\frac{1}{e^4\cdot\sqrt[3]{e^2}}$.

Тема 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Краткие теоретические сведения

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Теорема о производной сложной функции. Если функция u = $\varphi(x)$ имеет производную в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке u = $\varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x, которая находится по формуле: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Теорема (правило Лопиталя). Предел отношения двух бесконечно больших (или бесконечно малых функций) при $x \to a$ равен пределу отношения их производных, при условии, что этот предел (конечный или бесконечный) существует:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема (достаточные условия возрастания и убывания функции).

1. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ для любого $x \in (a, b)$, то функция возрастает на интервале (a, b).

2. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) < 0$ для любого $x \in (a, b)$, то функция убывает на интервале (a, b).

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если существует такая δ - окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $y = f(x)$, если существует такая δ - окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума функции*.

Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции.*

Значение функции в точке минимума называется *минимумом функции.*

Максимумы и минимумы функции называются *экстремумами функции.*

Теорема (*необходимое условие существования экстремума)*. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и точка x_0 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Теорема (*достаточные условия существования экстремума*) .
1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_0, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_0). Если при переходе через точку x_0 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с минуса на плюс, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум.

2. Пусть в точке x_0 $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0. Тогда, если $f''(x_0) < 0$, то функция имеет в точке x_0 максимум, а если $f''(x_0) > 0$, то функция имеет в точке x_0 минимум.

Функция называется *выпуклой вниз* на интервале (a,b), если для любых двух значений x_1 и x_2 из интервала (a,b), выполняется неравенство:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Функция называется *выпуклой вверх* на интервале (a,b), если для любых двух значений x_1 и x_2 из интервала (a,b), выполняется неравенство:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Для дифференцируемой функции график будет расположен под касательной, если функция выпукла вверх, и над касательной, если вниз.

Теорема (достаточные условия выпуклости (вогнутости) графика функции). Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, то функция $y = f(x)$ выпукла вверх. Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ положительна, то функция $y = f(x)$ выпукла вниз.

Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, ы которых функция выпукла вниз и вверх.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика функции с абсциссой x_0 является точкой перегиба.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая таким свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$.

Прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой графика функции* $y=f(x)$, если:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Задания к расчетно-графической работе

Задание 4.1. Найти производные y' данных функций.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	а) $y=\frac{\ln x}{tgx}-\frac{x}{\cos x}$; б) $y = sin^4\frac{x}{4}$	6	а) $y=\frac{\cos x}{1+2\sin x}$; б) $y = cos^3\frac{4x}{3}$
2	а) $y=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$; б) $y = \cos\ln(1 - x^2)$	7	а) $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$; б) $y = ln^5\frac{x}{5}$
3	а) $y=\frac{xarctgx}{1+x^2}$; б) $y = e^{\arcsin(2x-4)}$	8	а) $y=\frac{x}{1+x^2}-arctgx$; б) $y = \ln(x - \cos 3x)$
4	а) $y=3x\,arctg\frac{x}{3}-\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}$; б) $y = \ln(2 - \cos^2 x)$	9	а) $y=\frac{\ln x}{ctgx}-\frac{x}{\sin x}$ б) $y=\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$;
5	а) $y=\frac{3\cos x}{1+\cos x}$ б) $y=\ln\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.	10	а) $y=\frac{1-e^x}{1+e^x}$ б) $y=\ln tg\frac{2x+1}{4}$;

Задание 4.2. Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.	6	$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.
2	$y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.	7	$y=\dfrac{x^2}{x-1}$.
3	$y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.	8	$y=\dfrac{4x^3+5}{x}$.
4	$y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$.	9	$y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.
5	$y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$.	10	$y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

Пример выполнения заданий по теме 4

Задание 4.1. Найти производные y' данных функций.

а) $y=\dfrac{x^2e^{x^2}}{x^2+1}$; б) $y=\ln tg\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{\sin x}$

Решение.

а) Для нахождения производной воспользуемся правилом нахождения производной частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ и производной сложной функции:

$$y'=\left(\frac{x^2e^{x^2}}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2\cdot e^{x^2}\right)'\cdot(x^2+1)-(x^2\cdot e^{x^2})\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{(2x\cdot e^{x^2}+x^2\cdot e^{x^2}\cdot 2x)\cdot(x^2+1)-x^2\cdot e^{x^2}\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^3e^{x^2}+2x^5e^{x^2}+2xe^{x^2}+2x^3e^{x^2}-2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}=\frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

б) Для нахождения производной функции применим правила нахождения производной разности и производной частного, а также дважды применим правило нахождения производной сложной функции:

$$y'=(\ln tg\frac{x}{2}-\frac{x}{\sin x})'=(\ln tg\frac{x}{2})'-\left(\frac{x}{\sin x}\right)'=\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\left(tg\frac{x}{2}\right)'-\frac{x'\cdot\sin x-x(\sin x)'}{\sin^2 x}=$$

$$= \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} \cdot \cos^2\frac{x}{2} \cdot 2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{\sin x + x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

Задание 4.2. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Решение.

При исследовании функции будем придерживаться следующей схемы:

1. Найдем область определения функции.
2. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Исследуем функцию на четность и нечетность.
4. Найдем асимптоты графика функции.
5. Найдем y' и с помощью ее определим промежутки возрастания и убывания функции, экстремумы функции.
6. Найдем y'' и с помощью ее определим промежутки выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.
7. Используя пункты 1 – 6 данной схемы строим график функции, в случае затруднения берем несколько дополнительных точек.

1. Так как дробь $\frac{x^3}{x^2 - 1}$ определена при всех значениях $x \neq \pm 1$, то областью определения функции будет $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. а) Найдем точки пересечения с осью абсцисс: $y = 0$, поэтому $\frac{x^3}{x^2 - 1} = 0$, откуда $x = 0$. Таким образом, получаем точку пересечения с осью OX: точку $O\ (0; 0)$.

б) Найдем точки пересечения с осью ординат: $x = 0$, тогда $y = \frac{0^3}{0^2 - 1} = 0$. В итоге получаем ту же точку $O\ (0; 0)$.

3. Найдем $y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -y(x)$, то есть функция $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ является нечетной.

4. а) Найдем вертикальные асимптоты графика функции. Найдем $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty$. Значит, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Найдем $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty$. Значит, прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

б) Найдем горизонтальные асимптоты графика функции. Для этого найдем $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3}{2}x = +\infty$. (При вычислении предела применили правило Лопиталя). Аналогично, $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1} = -\infty$.

Таким образом, горизонтальных асимптот график функции не имеет.

в) Найдем наклонные асимптоты графика функции. Так как наклонная асимптота имеет вид $y = kx + b$, то найдем k и b. $k = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} =$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{2x} = 1$. Аналогично, $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{y}{x} = 1$. Таким образом, $k = 1$. $b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-1\cdot x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-x\cdot(x^2-1)}{x^2-1}\right) =$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right) = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x)'}{(x^2-1)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x} = 0$.

Значит, график функции имеет наклонную асимптоту $y = x$.

5. Найдем производную функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$:

$$y'=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Решая уравнение $\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0$, находим критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Найдем промежутки возрастания и убывания функции.

Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает

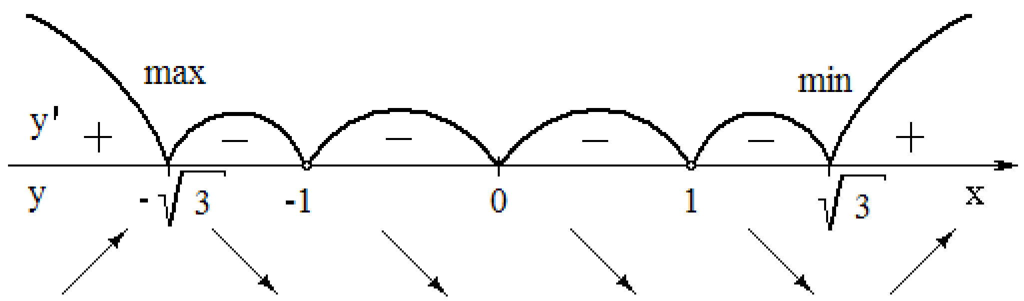
$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает

$\sqrt{3} < x$, $y' > 0$, функция возрастает

Так как при переходе через точку $x = -\sqrt{3}$ знак производной функции меняется с «плюса» на «минус», то точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой *максимума*. А так как при переходе через точку $x = \sqrt{3}$ знак производной функции меняется с «минуса» на «плюс», то точка $x = \sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны: $y_{max} = y(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2{,}6$, $y_{min} = y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2{,}6$.

Данные проведенного исследования можно кратко изобразить на следующей схеме:



6. Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1)-(x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7-8x^5+4x^3-6x^5+12x^3-6x-4x^7+4x^5+12x^5-12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5+4x^3-6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость графика функции на промежутках:

$x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

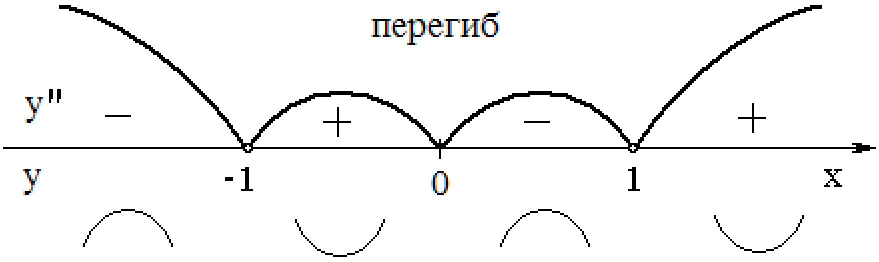
$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$1 < x$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

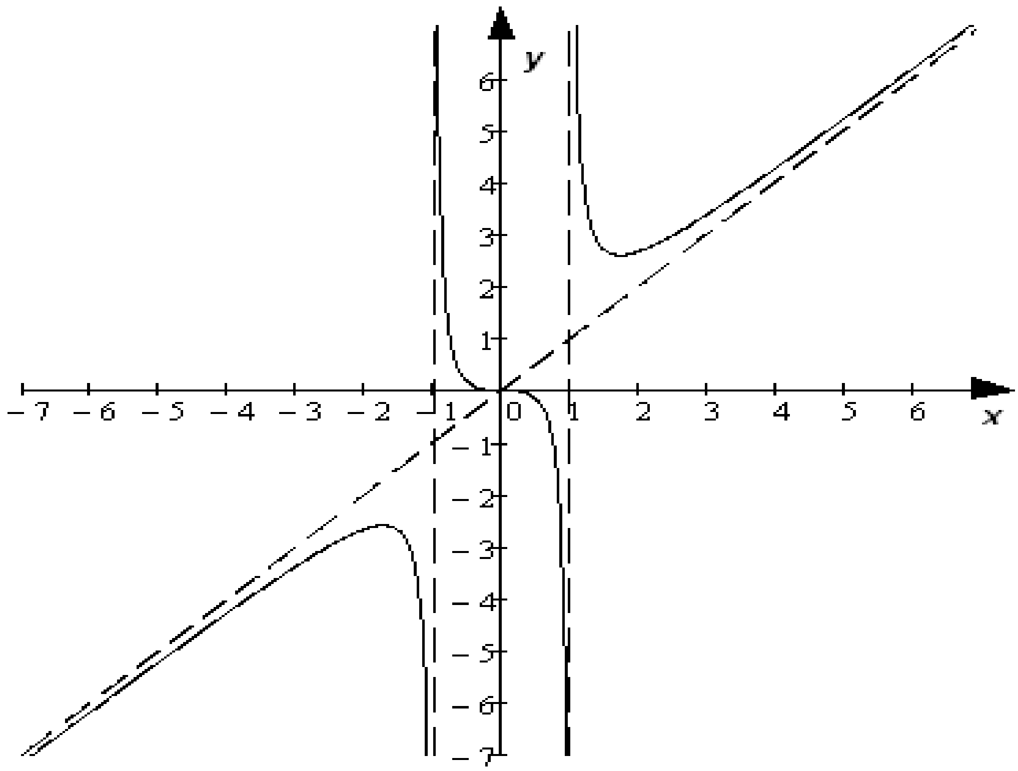
Таким образом, точка O (0; 0) – точка перегиба графика функции.

Данные проведенного исследования можно изобразить схематически:



7. Используя данные проведенного исследования, построим *график* функции. Для уточнения графика найдем несколько точек графика функции:

x	0,5	2	3
y	≈-0,2	≈2,7	≈3,4



Тема 5. Интегральное исчисление функции одной переменной

Краткие теоретические сведения

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* функции $f(x)$ на промежутке X, если для любого x из данного промежутка X верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для функции $f(x)$.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$
5. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, где $k \in R,\ k \neq 0$.

Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной):
$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Метод интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu$;

Если существует конечный предел суммы $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ при $n \to \infty$, не зависящей ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек c_i, то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначается: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} f(c_i)\Delta x_i$, a – нижний предел, b – верхний предел интегрирования, x – переменная интегрирования, $[a, b]$ – отрезок интегрирования.

Основные свойства определенного интеграла:

1) Для любых a, b, c верно $\int_a^b (f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx;$

3) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

4) Если $f(x) \leq \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$;

6) *Теорема о среднем.* Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка c такая, что $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$.

Формула Ньютона – Лейбница: Если функция $F(x)$ – какая - либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt, \text{ здесь } \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

Метод интегрирования по частям: $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$

Геометрический смысл определенного интеграла: Определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.

Задания к расчетно-графической работе

Задание 5.1. Найдите неопределенные интегралы.

Вариант		Вариант	
1	а) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$; б) $\int x\ln(x-1)dx$; в) $\int \frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$; г) $\int \frac{\sqrt{x+2}dx}{x}$; д) $\int \sin^4 x \cos x dx$.	6	а) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$; б) $\int 4x\cos x dx$; в) $\int \frac{(x+4)dx}{x^2-2x-8}$; г) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{4-x}$; д) $\int \sin x \cos^4 x dx$.
2	а) $\int \frac{e^x dx}{e^x-1}$; б) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; в) $\int \frac{(x+23)dx}{x^2+x-20}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$; д) $\int \sin x \cos 3x dx$.	7	а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $\int x^2 e^x dx$; в) $\int \frac{(x+12)dx}{x^2-x-6}$; г) $\int \frac{dx}{2-\sqrt{x+1}}$; д) $\int \sin 5x \cos 3x dx$.

3	а) $\int \frac{x^3dx}{1+x^8}$; б) $\int 2xe^x dx$; в) $\int \frac{(x+19)dx}{x^2-2x-15}$; г) $\int \frac{\sqrt{x-2}dx}{1+\sqrt{x-2}}$; д) $\int \sin^3 x\cos xdx$.	8	а) $\int \frac{xdx}{2x^2+3}$; б) $\int \frac{arctgx}{x^2}dx$; в) $\int \frac{5xdx}{x^2+x-6}$; г) $\int \frac{\sqrt{x-3}dx}{x}$; д) $\int \sin x\cos^5 xdx$.
4	а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$; б) $\int xarctgxdx$; в) $\int \frac{(5x+2)dx}{x^2+2x-8}$; г) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-6}$; д) $\int \sin 7x\cos xdx$.	9	а) $\int e^{-\left(x^2+1\right)}xdx$; б) $\int 4x\sin xdx$; в) $\int \frac{(2x+9)dx}{x^2+5x+6}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$; д) $\int \sin x\cos 7xdx$.
5	а) $\int x\sin\left(1-x^2\right)dx$; б) $\int 5x\cos xdx$; в) $\int \frac{(11x-2)dx}{x^2+x-2}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$; д) $\int \sin x\sin 3xdx$.	10	а) $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$; б) $\int (2x-3)\sin xdx$; в) $\int \frac{(x-13)dx}{x^2-2x-8}$; г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+4}}$; д) $\int \cos x\cos 7xdx$.

Задание 5.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$y=e^x, \quad y=e^{-x}, \quad x=1$	6	$y=x^2+3x, \quad y=-x^2-3x$
2	$3x^2-4y=0, \; 2x-4y+1=0$	7	$y=e^x, \quad y=e^{-x}, \quad x=-2$
3	$y=x^2+1, \quad y=x+1$	8	$y=x-1, \quad y=x^2-2x+1$
4	$y=x^2+4x, \quad y=x+4$	9	$y=e^x, \quad y=e^{-x}, \quad x=2$
5	$y^2=x+1, \quad y=x^2+2x+1$	10	$y=x^2-3, \quad y=-2x$

Пример выполнения заданий по теме 5

Задание 5.1. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int \sqrt{\sin x}\cos xdx$;

б) $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$;

в) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$;

г) $\int x^2 \sin xdx$;

д) $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+2x-3}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$;

ж) $\int \sin 7x \sin 2xdx$;

Решение.

а) Сделаем замену $t = sinx$. Тогда $dt = cosxdt$ и:

$$\int \sqrt{\sin x}\cos xdx = \int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

б) Выполним замену: $t = x^2+1;\quad dt = 2xdx;\quad xdx = \frac{dt}{2};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

в) Воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = \frac{1}{x^3}dx; \\ du = \frac{1}{x}dx; & v = -\frac{1}{2x^2}; \end{matrix}\right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int (-\frac{1}{2x^2})\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right) + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

г) Применим метод интегрирования по частям дважды:

$$\int x^2 \sin xdx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin xdx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x - \int(-\cos x)\cdot 2xdx =$$

$$= -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = 2x; & dv = \cos xdx; \\ du = 2dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin xdx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

д) Представим дробь $\frac{2x+5}{x^2+2x-3}$ в виде суммы простейших дробей.

Так как $x^2+2x-3=(x+3)\cdot(x-1)$, то $\dfrac{2x+5}{x^2+2x-3} = \dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{x-1}$.

Тогда $\dfrac{2x+5}{x^2+2x-3} = \dfrac{A(x-1)+B(x+3)}{x^2+2x-3}$. Откуда следует, что $2x + 5 = A(x - 1) +$ $+ B(x + 3)$. Положим $x = -3$, тогда $-1 = -4A$, то есть $A = \dfrac{1}{4}$; Положим $x = 1$, тогда $7 = 4B$, то есть $B = \dfrac{7}{4}$. Следовательно, $\dfrac{2x+5}{x^2+2x-3}=\dfrac{\frac{1}{4}}{x+3}+\dfrac{\frac{7}{4}}{x-1}$. Тогда

$$\int\frac{(2x+5)dx}{x^2+2x-3}=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x+3}+\frac{\frac{7}{4}}{x-1}\right)dx=\int\frac{\frac{1}{4}}{x+3}dx+\int\frac{\frac{7}{4}}{x-1}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x+3|+\frac{7}{4}\ln|x-1|+C$$

е) Для нахождения данного интеграла воспользуемся подстановкой $t=\sqrt{x+1}$. Тогда $t^2=x+1$, откуда $x=t^2-1$ и $dx=2tdt$. Таким образом, $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}=\int\frac{2tdt}{t+1}$.

Так как под знаком интеграла получилась неправильная дробь $\dfrac{2t}{t+1}$, то разложим неправильную дробь на сумму правильной дроби и многочлена. Выполнив деление числителя на знаменатель, получим: $\dfrac{2t}{t+1} = 2 - \dfrac{2}{t+1}$. Тогда

$$\int\frac{2t}{t+1}dt=\int\left(2-\frac{2}{t+1}\right)dt=\int 2dt-\int\frac{2}{t+1}dt=2\int dt-2\int\frac{1}{t+1}dt=2t-2\ln|t+1|+C.$$

Сделав обратную замену $t=\sqrt{x+1}$, получим, что

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}=\int\frac{2tdt}{t+1}=2\sqrt{x+1}-2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+C=2\sqrt{x+1}-2\ln(\sqrt{x+1}+1)+C.$$

ж) Для нахождения данного интеграла воспользуемся формулой:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)).$$

Тогда:

$$\int\sin 7x\sin 2xdx == \int\frac{1}{2}(\cos 5x-\cos 9x)dx = \frac{1}{2}\int\cos 5xdx-\frac{1}{2}\int\cos 9xdx =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\sin 9x+C=\frac{1}{10}\sin 5x-\frac{1}{18}\sin 9x+C.$$

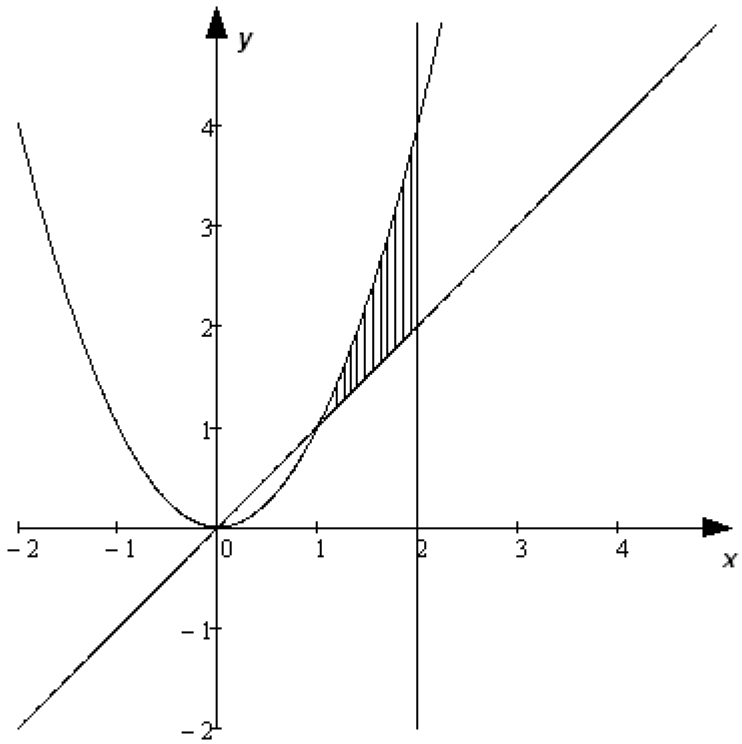
Задание 5.2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.

Решение.

График функции $y = x$ – прямая, являющаяся осью симметрии первого и третьего координатных углов; график функции $y = x^2$ - парабола с вершиной в точке (0;0), а графиком линии $x = 2$ является прямая, перпендикулярная оси абсцисс и проходящая через точку (2; 0).

Построим графики функций: $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.

Искомая фигура заштрихована на рисунке:



Тогда

$$S_{\delta} = \int_1^2 (x^2 - x)dx = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx = \left(\frac{x^3}{3} \Big|_1^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 \right) =$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - (2 - \frac{1}{2}) = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \text{ (ед}^2\text{)}$$

Тема 6. Дифференциальные уравнения.

Краткие теоретические сведения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных, эти переменные и производные (или дифференциалы) различных порядков этой функции.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным.*

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество.

Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка называется такое его решение $y = f(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, которое является функцией переменной x и n произвольных независимых постоянных $c_1, c_2, ..., c_n$.

Частным решением обыкновенного дифференциального уравнения называется решение, которое получается из общего решения при некоторых конкретных значениях постоянных $c_1, c_2, ..., c_n$.

Задачей Коши называется нахождение частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $F(x, y, y') = 0$.

Дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно преобразовать к виду $P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0$, называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется *однородным уравнением первого порядка*, если функцию $f(x, y)$ можно представить как функцию отношения своих аргументов, то есть $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если его можно преобразовать к виду: $y' + p(x) \cdot y = g(x)$.

Дифференциальное уравнение вида $y'' + p \cdot y' + qy = f(x)$ называется *линейным дифференциальным* уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Здесь $p, q \in R$, $f(x)$ – функция.

Если $f(x) = 0$, то уравнение $y'' + p \cdot y' + qy = 0$ называется *однородным,* если $f(x) \neq 0$, то уравнение $y'' + p \cdot y' + qy = f(x)$ называется *неоднородным.*

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется *характеристическим уравнением* уравнения $y'' + p \cdot y' + qy = 0$.

Теорема 1. 1. Если характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ уравнения $y'' + p \cdot y' + qy = 0$ имеет два действительных различных корня k_1 и k_2, то общее решение уравнения $y'' + p \cdot y' + qy = 0$ имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, где C_1 и C_2 – некоторые числа.

2. Если характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ уравнения $y'' + p \cdot y' + qy = 0$ имеет один корень k (кратности 2), то общее решение

уравнения $y'' + p\cdot y' + qy = 0$ имеет вид $y = C_1e^{kx} + xC_2e^{kx}$ где C_1 и C_2 – некоторые числа.

3. Если характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ уравнения $y'' + p\cdot y' + qy = 0$ имеет комплексные корни $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, где α и β - действительные числа, то общее решение уравнения $y'' + p\cdot y' + qy = 0$ имеет вид $y = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)$, где C_1 и C_2 – некоторые числа.

Теорема 2. Общим решением уравнения $y'' + p\cdot y' + qy = f(x)$ является сумма общего решения уравнения $y'' + p\cdot y' + qy = 0$ и частного решения уравнения $y'' + p\cdot y' + qy = f(x)$: $y_{\hat{i}\acute{i}} = y_{\hat{i}\hat{i}} + y_{\div\acute{i}}$.

При этом, если $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x)$ то частное решение находится по формуле $y_{\div\acute{i}} = e^{\alpha x}(P_l(x)\cos \beta x + Q_l(x)\sin \beta x)\cdot x^t$, где $P_n(x), Q_m(x)$ - многочлены степени n и m соответственно; α и β - действительные числа, $P_l(x), Q_l(x)$ - многочлены степени *l*, при этом *l* – максимальное из чисел *m* и *n*; *t* определяется в зависимости от того, является ли $\alpha + \beta i$ корнем уравнения $k^2 + pk + q = 0$ и какого порядка:

t = 0, если $\alpha + \beta i$ – не корень уравнения $k^2 + pk + q = 0$,

t = 1, если $\alpha + \beta i$ – корень уравнения $k^2 + pk + q = 0$ кратности 1,

t = 2, если $\alpha + \beta i$ – корень уравнения $k^2 + pk + q = 0$ кратности 2.

Задания к расчетно-графической работе

Задание 6.1. Решить дифференциальное уравнение первого порядка.

1.	а) $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$; б) $y' - \frac{y}{x} = x^2$; в) $(x+2y)dx - xdy = 0$.	6.	а) $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$; б) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$; в) $xdy + (2y - x)dx = 0$.
2.	а) $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$; б) $y' + \frac{y}{2x} = x^2$; в) $(x^2+y^2)dx - 2xydy = 0$.	7.	а) $y(4+e^x)dy - e^xdx = 0$; б) $y' + 2xy = -2x^3$; в) $y' = -\frac{x+y}{x}$.
3.	а) $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$; б) $y' + \frac{2}{x}y = x^3$; в) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$.	8.	а) $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$; б) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$; в) $(x+y)dx + xdy = 0$.

4.	а) $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$; б) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$; в) $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$.	9.	а) $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$; б) $y' - 2\frac{y}{x} = 2x^3$; в) $(y-x)dx + (y+x)dy = 0$.
5.	а) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$; б) $y' + \frac{y}{x} = 3x$; в) $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$.	10.	а) $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$; б) $y' + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$; в) $xdy = (x+2y)dx$.

Задание 6.2. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.

1.	$y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$	6.	$y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x) \cdot e^{-x}$
2.	$y'' + y' - 6y = (6x+1) \cdot e^{3x}$	7.	$y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$
3.	$y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x$	8.	$y'' + y = 2\cos x - (4x+4) \cdot \sin x$
4.	$y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$	9.	$y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$
5.	$y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$	10.	$y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x$

Пример выполнения заданий по теме 6

Задание 6.1. Решить дифференциальное уравнение первого порядка.

а) $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$;

б) $xy' + y = x + 1$;

в) $xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

Решение.

а) Уравнение $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$ является уравнением с разделяющимися переменными.

1. Разделим переменные. Перенесем слагаемые с dx в левую часть, а слагаемые с dy в правую: $20xdx + 5xy^2dx = 3x^2ydy + 3ydy$. Вынесем за скобки общие множители: $5x(4+y^2)dx = 3y(x^2+1)dy$. Разделим обе части на $(4 + y^2)\cdot(x^2 + 1)$: $\frac{5x}{x^2+1}dx = \frac{3y}{y^2+4}dy$.

2. Возьмем интегралы от правой и левой частей уравнения, применив метод подстановки:

$$\int \frac{5x}{x^2+1}dx = \int \frac{3y}{y^2+4}dy,$$

$$\int \frac{5x}{x^2+1}dx = \left\langle t = x^2+1, dt = 2xdx, 5xdx = \frac{5}{2}dt \right\rangle = \int \frac{\frac{5}{2}}{t}dt = \frac{5}{2}\ln|t| + \frac{1}{2}\ln|C_1| =$$

$= \frac{5}{2}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\ln|C_1|$. Аналогично $\int \frac{3y}{y^2+4}dy = \frac{3}{2}\ln|y^2+4|$.

Тогда: $\frac{3}{2}\ln|y^2+4| = \frac{5}{2}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\ln|C_1|$, здесь $C_1 = C_2^2$.

3. Выразим y из данного равенства. Для этого умножим данное равенство на 2 и применив свойства логарифмов, получим: $\ln(y^2+4)^3 = \ln C_2(x^2+1)^5$.

Откуда $(y^2+4)^3 = C_2 \cdot (x^2+1)^5$; $y^2+4 = C\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^5}$; $y^2 = C(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - 4$.

Здесь $C = \sqrt[3]{C_1}$. Таким образом, $y = \pm\sqrt{C(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - 4}$.

б) Уравнение $xy' + y = x+1$ является линейным уравнением. Разделим обе части на x. Тогда получим: $y' + \frac{y}{x} = 1 + \frac{1}{x}$.

Решим данное уравнение методом Бернулли. Решение уравнения ищем в виде $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим y' и y в уравнение $y' + \frac{y}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ $y' + \frac{y}{x} = 1 + \frac{1}{x}$. Тогда получим:

$u'v + uv' + \frac{vu}{x} = 1 + \frac{1}{x}$. Сгруппируем второе и третье слагаемое левой части уравнения и вынесем за скобки u, тогда получим $u'v + u(v' + \frac{v}{x}) = 1 + \frac{1}{x}$.

1. Найдем частное решение уравнения $v' + \frac{v}{x} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Заменим v' на $\frac{dv}{dx}$ и разделим переменные v и x: $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$. Тогда $\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}$ и $\ln|v| = -\ln|x| + \ln|C_1|$. Откуда по свойствам логарифмов получаем $v = \frac{C_1}{x}$. Возьмем $C_1 = 1$ и получим искомое частное решение: $v = \frac{1}{x}$.

2. Подставим данное частное решение в уравнение $u'v + u(v' + \frac{v}{x}) = 1 + \frac{1}{x}$. Тогда получим $u'\cdot\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Найдем общее решение данного уравнения. Так как $u' = \frac{du}{dx}$ то

имеем $\dfrac{du}{dx\cdot x}=\dfrac{x+1}{x}$. Умножим обе части данного уравнения на $dx\cdot x$, получим $du = (x + 1)dx$. Взяв интегралы от обеих частей уравнения: $\int du=\int (x+1)dx$, получим $u = \dfrac{x^2}{2} + x + C$.

3. Тогда $y = uv = (\dfrac{x^2}{2} + x + C)\cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{2}+1+\dfrac{C}{x}$.

в) Разделим обе части уравнения $xy' = y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$ на y, тогда получим $y'=\dfrac{y}{x}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$, которое является однородным дифференциальным уравнением первого порядка, так как $\dfrac{y}{x}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Введем новую переменную $u = \dfrac{y}{x}$ и найдем $y' = u'x + u$. Подставим y' и y в уравнение $y'=\dfrac{y}{x}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$, которое будет уравнением с разделяющимися переменными: $u'x + u = u\cdot lnu$. Разделим переменные u и x. Так как $u' = \dfrac{du}{dx}$ то имеем $\dfrac{du\cdot x}{dx}=u\cdot\ln u-u$. Умножим обе части уравнения на $\dfrac{dx}{x\cdot u(\ln u-1)}$. В итоге получим $\dfrac{du}{u\cdot(\ln u-1)}=\dfrac{dx}{x}$.

Возьмем интегралы от обеих частей уравнения. Так как $\int\dfrac{du}{u(\ln u-1)}=\left\langle t=\ln u-1, dt=\dfrac{du}{u}\right\rangle=\int\dfrac{dt}{t}=\ln|t|=\ln|\ln u-1|-\ln|C|$, то имеем: $\ln|\ln u-1|-\ln|C|=\ln|x|$. Перенесем $-\ln|C|$ в правую часть уравнения и применив свойства логарифмов (учитывая, что C – константа), получим $lnu - 1 = Cx$, откуда $lnu = Cx + 1$. Тогда $u = e^{Cx+1}$. Так как $y = ux$, то получаем: $y = x\cdot e^{Cx+1}$.

Ответ: а) $y = \pm\sqrt{C(x^2+1)^{\frac{5}{3}}-4}$; б) $y = \dfrac{x}{2}+1+\dfrac{C}{x}$; в) $y = x\cdot e^{Cx+1}$.

Задание 6.2. Решить уравнения:

а) $y''-2y'+y=3e^x$;

б) $y''+y=\sin 2x$;

в) $y''-y'=x+2$;

г) $y''-7y'+6y=(x-2)e^x$.

Решение.

а) Общее решение данного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами найдем, как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения исходного неоднородного уравнения: $y_{îí}=y_{îî}+y_{÷í}$.

1. Найдем общее решение однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0.$ Для этого составим характеристическое уравнение для данного линейного однородного дифференциального уравнения: $k^2 - 2k + 1 = 0.$ Найдем корни этого квадратного уравнения: $k_1 = k_2 = k = 1.$ Так как в случае D = 0 общее решение линейного однородного дифференциального второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y_{\text{îî}} = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$, то общее решение исходного уравнения будет иметь вид: $y_{\text{îî}} = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x}$.

2. Теперь найдем частное решение исходного дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 3e^x$. Так как $f(x)$ = $3e^x$, то частное решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{\text{÷í}} = y = Ae^x x^2 \quad (\alpha = 1, \beta = 0, t = 2, l = 0).$$

Для нахождения A воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$y' = 2Axe^x + Ax^2 e^x$; $\quad y'' = 2Ae^x + 2Axe^x + 2Axe^x + Ax^2 e^x = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2 e^x.$

Подставляя в исходное уравнение $y, y^{/}, y^{//}$, получаем:

$2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2 e^x - 4Axe^x - 2Ax^2 e^x + Ax^2 e^x = 3e^x.$ Откуда $2A = 3;$ $\quad A = \frac{3}{2}.$

Частное решение имеет вид: $y_{\text{÷í}} = y = \frac{3}{2} x^2 e^x.$

3. Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения будет иметь вид: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{3}{2} x^2 e^x.$

б) Общее решение данного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами найдем, как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения исходного неоднородного уравнения: $y_{\text{íî}} = y_{\text{îî}} + y_{\text{÷í}}$.

1. Найдем общее решение однородного уравнения $y'' + y = 0.$ Для этого составим характеристическое уравнение для данного линейного однородного дифференциального уравнения: $k^2 + 1 = 0.$ Найдем корни этого квадратного уравнения: $k = \pm i.$ Так как в случае D < 0 общее решение линейного однородного дифференциального второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y_{\text{îî}} = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)$, то общее решение исходного уравнения будет иметь вид: $y_{\text{îî}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x \quad (\alpha = 0, \beta = 1)$.

2. Теперь найдем частное решение исходного дифференциального уравнения $y'' + y = \sin 2x$. Так как $f(x)$ = $\sin 2x$, то частное решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{\text{÷í}} = y = A \sin 2x + B \cos 2x \quad (\alpha = 0, \beta = 2, t = 0, l = 0).$$

Для нахождения A и B воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$y' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x; y'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x;$$
$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x + A\sin 2x + B\cos 2x = \sin 2x;$$

Приведя подобные слагаемые в левой части уравнения, получим:

$$-3A\sin 2x - 3B\cos 2x = \sin 2x\,.$$

Откуда $B = 0; \quad A = -\frac{1}{3}.$

Тогда $y_{\div í} = y = -\frac{1}{3}\sin 2x$.

3. Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{3}\sin 2x.$$

в) Общее решение данного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами найдем, как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения исходного неоднородного уравнения: $y_{îí} = y_{îî} + y_{\div í}$.

1. Найдем общее решение однородного уравнения $y'' - y' = 0.$ Для этого составим характеристическое уравнение для данного линейного однородного дифференциального уравнения: $k^2 - k = 0.$ Найдем корни этого квадратного уравнения: $k_1 = 0, k_2 = 1.$ Так как в случае D > 0 общее решение линейного однородного дифференциального второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y_{îî} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, то общее решение исходного уравнения будет иметь вид: $y_{îî} = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 e^{1\cdot x} = C_1 + C_2 e^x$.

2. Теперь найдем частное решение исходного дифференциального уравнения $y'' - y' = x + 2$. Так как $f(x)$ = $x + 2$, то частное решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{\div í} = y = (Ax + B)x^1 = Ax^2 + Bx \ \ (\alpha = 0, \beta = 0, t = 1, l = 1)\,.$$

Для нахождения A и B воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$y' = 2Ax + B; \qquad y'' = 2A.$ Подставляя в исходное уравнение y', y'', получаем:

$2A - 2Ax - B = x + 2$. Приравнивая коэффициенты при x^1 и x^0, получим:

x^1: $-2Ax = 1;$

x^0: $2A - B = 2$. Откуда находим: $A = -\frac{1}{2}$, $B = -3$.

Тогда частное решение имеет вид: $y_{\div í} = y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x.$

3. Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y_{îí} = y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - 3x.$$

г) Общее решение данного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами найдем, как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения исходного неоднородного уравнения: $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$.

1. Найдем общее решение однородного уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0.$ Для этого составим характеристическое уравнение для данного линейного однородного дифференциального уравнения: $k^2 - 7k + 6 = 0.$ Найдем корни этого квадратного уравнения: $k_1 = 1, k_2 = 6.$ Так как в случае D > 0 общее решение линейного однородного дифференциального второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y_{оо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, то общее решение исходного уравнения будет иметь вид: $y_{оо} = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x}$.

2. Теперь найдем частное решение исходного дифференциального уравнения $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x.$ Так как $f(x)$ = $(x-2)e^x$, то частное решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{чн} = y = e^x(Ax + B)x^1 = e^x(Ax^2 + Bx) \quad (\alpha = 1, \beta = 0, t = 1, l = 1).$$

Для нахождения A и B воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$y' = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B); y'' = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B) + e^x(2Ax + B) + 2Ae^x =$

$= e^x(Ax^2 + Bx + 4Ax + 2A + 2B)$. Подставляя в исходное уравнение y, y', y'',

получаем: $e^x(Ax^2 + Bx + 4Ax + 2A + 2B)$ - 7 $(e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B))$ +

+ 6 $e^x(Ax^2 + Bx)$ = $(x-2)e^x$. Вынесем e^x в левой части уравнения за скобки, разделим обе части уравнения на e^x и уравняем коэффициенты при x^2, x^1 и x^0. Тогда получим:

x^2: A - 7A + 6A = 0,

x^1: B + 4A – 7B – 14A + 6B = 1,

x^0: 2A + 2B – 7B = – 2.

После упрощений получаем:

x^2: 0 = 0,

x^1: – 10A = 1, откуда A = - 0,1.

x^0: 2A – 5B = – 2. Подставляя вместо A = - 0,1, получим B = 0,36.

Таким образом, частное решение имеет вид: $y_{чн} = y = e^x(-0{,}1x^2 + 0{,}36x).$

3. Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + e^x(-0{,}1x^2 + 0{,}36x).$$

Тема 7. Ряды.

Краткие теоретические сведения

Выражение $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ называется *рядом*.

Слагаемые $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n \ldots$ называются *членами ряда*, u_n - *общий член ряда*.

Ряд называется *числовым*, если все его члены являются числами.

Ряд называется *функциональным*, если все его члены – функции.

Сумма конечного числа первых n членов ряда называется *n–й частичной суммой ряда:* $S_n = u_1 + u_2 + \ldots u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

Если существует конечный предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся,* а число S называется *суммой ряда*.

Если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *расходящимся*.

Необходимый признак сходимости числового ряда: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Следствие (достаточный признак расходимости числового ряда): Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или не существует, то числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется *гармоническим*.

Теорема: Гармонический ряд расходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *знакоположительным* (*неотрицательным*), если для любого натурального n $u_n \geq 0$.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов:

Первый признак сравнения: Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, и пусть для любого натурального n выполняется условие: $u_n \leq v_n$. Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится; а если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится.

Второй признак сравнения (предельный): Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, и пусть существует $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A$, $A \neq 0, A \neq \infty$, тогда оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ одновременно сходятся или расходятся.

Признак Даламбера: Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ будет сходиться при $l < 1$ и расходиться при $l > 1$.

Радикальный признак Коши: Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt{u_n} = l$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ будет сходиться при $l < 1$ и расходиться при $l > 1$.

Интегральный признак Коши: Если $\varphi(x)$ - непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке [1; $+\infty$), то ряд $\varphi(1)+\varphi(2)+...+\varphi(n)+... = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + ...$, где $a_0, a_1, ...a_n, ...$ и x_0 - действительные числа.

Множество значений переменной *x*, при которых соответствующий числовой ряд сходится, называется *областью сходимости степенного ряда*.

Область сходимости степенного ряда находится по следующему плану:

1. Находится радиус сходимости степенного ряда по формулам: $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.
2. Записывается интервал сходимости степенного ряда: (x_0 - *R*; x_0 + *R*).
3. Исследуется сходимость соответствующего числового ряда при значениях $x = x_0 - R$; $x = x_0 + R$.
4. С учетом проведенного исследования записывается область сходимости исходного степенного ряда.

Задания к расчетно-графической работе

Задание 7.1. Исследовать сходимость ряда.

1.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n}{n^2+1}$.	6.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n^2}$.
2.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\ln n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+n}{4n^2+1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^4+1}$.	7.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n+1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^2-1}$.
3.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^2+5}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$.	8.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^2+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{4^n}$.
4.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-1}{n^2+4}$; г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^6 n}$.	9.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{6n+4}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+3}\right)^n$.
5.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^4+2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{3n^2-1}$.	10.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3n\cdot 5^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^4 n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n+2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.

Задание 7.2. Найти область сходимости степенного ряда.

1.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n!(x-9)^n$.	6.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-10)^n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n!(x+4)^n$.
2.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-9)^n}{7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n!(x+2)^n$.	7.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n!(x+9)^n$.
3.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n!}$;	8.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{7^n}$;

	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-4)^n$.		б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-6)^n$.
4.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x+6)^n$.	9.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-10)^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-7)^n$.
5.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-10)^n$.	10.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x+10)^n$.

Пример выполнения заданий по теме 7

Задание 7.1. Исследовать сходимость ряда.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{n} \frac{1}{\ln n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; ж) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^3 n}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3}$.

Решение.

а) Так как $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$ для любого натурального n, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится, как ряд геометрической прогрессии с $q = \frac{1}{2} < 1$, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится по первому признаку сходимости знакоположительных рядов.

б) При $n > 1$ $\ln n < n$, поэтому $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$. Гармонический ряд $\sum\limits_{1}^{n} \frac{1}{n}$ расходится, поэтому по свойствам числовых рядов расходится и ряд $\sum\limits_{2}^{n} \frac{1}{n}$. Тогда по первому признаку сравнения знакоположительных рядов расходится и ряд $\sum\limits_{2}^{n} \frac{1}{\ln n}$.

в) У данного ряда общий член $u_n = \frac{n}{2^n}$; $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$. Тогда по признаку Даламбера ряд сходится.

г) Воспользуемся признаком Даламбера.

$u_n = \frac{n^n}{n!}$, $\quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{n!(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n!}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^n}{n!}}{\frac{n^n}{n!}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$, то есть по признаку Даламбера ряд расходится.

д) У данного ряда $u_n = \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$. Применим радикальный признак Коши и

найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1$. Значит, исходный ряд сходится.

е) Применим необходимый признак сходимости:

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$, поэтому данный ряд расходится.

ж) Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$ с помощью интегрального признака Коши. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{x\ln^3 x}$, при $x \geq 2$ она является непрерывной, положительной и убывающей.

Исследуем сходимость несобственного интеграла $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_2^b\frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Найдем сначала

$$\int\limits_2^b\frac{dx}{x\ln^3 x} = \left\langle t=\ln x, dt=\frac{dx}{x}, t_1=\ln 2, t_2=\ln b\right\rangle = \int\limits_{\ln 2}^{\ln b}\frac{dt}{t^3} = \int\limits_{\ln 2}^{\ln b}t^{-3}dt = \frac{t^{-2}}{-2}\Big|_{\ln 2}^{\ln b} =$$

$$= \frac{(\ln b)^{-2}}{-2} - \frac{(\ln 2)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2\ln^2 b} + \frac{1}{2\ln^2 2}.$$

Вычислим $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_2^b\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim\limits_{b\to\infty}(-\frac{1}{2\ln^2 b} + \frac{1}{2\ln^2 2}) = 0 + \frac{1}{2\ln^2 2} = \frac{1}{2\ln^2 2}$.

Таким образом, несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$ сходится, значит и ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$ сходится.

з) У данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^5+3}$ общий член ряда $u_n=\frac{n^2+1}{n^5+3}$. Составим вспомогательный ряд с $v_n=\frac{n^2}{n^5}=\frac{1}{n^3}$. Ряд $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ является рядом Дирихле $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, который при $\alpha=3>1$ сходится. Найдем $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^5+3}:\frac{1}{n^3}\right)=$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+n^3}{n^5+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^5+n^3}{n^5}}{\frac{n^5+3}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^5}}=1$. Так как $1\neq 0$ и $1\neq\infty$, то по второму (предельному) признаку сходимости рядов ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^5+3}$ и $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ ведут себя одинаково, а так как ряд $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^5+3}$ также сходится.

Задание 7.2. Найти область сходимости степенного ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}n!(x+3)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-8)^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{3^n}$.

Решение.

а) Радиус сходимости данного степенного ряда R найдем по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Так как $a_n=n!$, $a_{n+1}=(n+1)!$, то $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$.

Поэтому область сходимости данного степенного ряда будет состоять из одного числа: $x\in\{-3\}$.

б) Так как $a_n=\frac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$, то $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right|=$ $=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. Поэтому область сходимости степенного ряда будет множество всех действительных чисел: $x\in(-\infty:+\infty)$.

в) 1. У данного степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{3^n}$ $a_n=\frac{1}{3^n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3^n\cdot 3}$. Найдем радиус сходимости данного степенного ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{3^n}:\frac{1}{3^n\cdot 3}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3}{3^n}=3.$$

2. Найдем интервал сходимости данного степенного ряда: $|x-5|<3 \Leftrightarrow -3<x-5<3 \Leftrightarrow -3+5<x<3+5 \Leftrightarrow 2<x<8$. Таким образом, интервал сходимости данного ряда (2; 8).

3. Исследуем сходимость степенного ряда на концах интервала.

а) При x = 8 получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8-5)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}1$. Так как $\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}1$ = 1 $\neq 0$, то по необходимому признаку сходимости числовых рядов получившийся числовой ряд расходится, поэтому число x = 8 не входит в область сходимости степенного ряда.

б) При x = 2 получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-5)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

Так как $\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq 0$ (данный передел не существует), то по необходимому признаку сходимости числовых рядов получившийся числовой ряд расходится, поэтому число x = 2 не входит в область сходимости степенного ряда.

4. Таким образом, область сходимости данного степенного ряда $x \in$(2: 8).

Тема 8. Дискретная математика

Краткие теоретические сведения

Дискретная математика – раздел математики, в котором изучаются свойства структур конечного характера.

Высказывание – повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

Отрицанием высказывания A называется такое высказывание $\overline{A}$, которое будет истинно тогда и только тогда, когда высказывание A – ложно.

Таблица истинности:

A	$\overline{A}$
и	л
л	и

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется новое высказывание $A \wedge B$, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B – истинны.

Таблица истинности:

A	B	$A \wedge B$
л	л	л
л	и	л
и	л	л
и	и	и

Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется новое высказывание $A \vee B$, которое истинно тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний A или B – истинно .

Таблица истинности:

A	B	$A \vee B$
л	л	л
л	и	и
и	л	и
и	и	и

Импликацией двух высказываний A и B называется новое высказывание $A \to B$, которое ложно тогда и только тогда, когда A – истинно, а B – ложно.

Таблица истинности:

A	B	$A \to B$
л	л	и
л	и	и
и	л	л
и	и	и

Эквивалентностью двух высказываний A и B называется новое высказывание $A \leftrightarrow B$, которое истинно тогда и только тогда, когда A и B одновременно истинны или одновременно ложны.

Таблица истинности:

A	B	$A \leftrightarrow B$
л	л	и
л	и	л
и	л	л
и	и	и

Порядок выполнения логических операций:
- отрицание,
- конъюнкция,
- дизъюнкция,
- импликация,
- эквивалентность.

Если есть скобки, то сначала выполняются операции в скобках.

Правило суммы: Если объект A можно выбрать m способами, а объект B - n способами, то объект A или B можно выбрать $m+n$ способами.

Правило произведения: Если объект A можно выбрать m способами, а после каждого выбора другой объект B можно выбрать n способами, то пару объектов A и B можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Пусть имеется множество, содержащее n элементов. *Размещением* из n элементов по m элементов называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее m элементов.

Число всевозможных размещений из n элементов по m обозначается: A_n^m.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Перестановки - это размещения из n элементов по n.

Число перестановок обозначается: P_n. Находится число перестановок из n элементов по формуле: $P_n = n!$.

Пусть имеется множество, содержащее n элементов. *Сочетанием* из n элементов по m элементов называется любое подмножество данного множества, содержащее m элементов.

Число всевозможных сочетаний из n элементов по m обозначается: C_n^m.

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Задания к расчетно-графической работе

Задание 8.1. Составить таблицу истинности для следующего высказывания.

1	$(A \to \overline{B}) \vee B \leftrightarrow A \wedge B$	6	$(A \leftrightarrow \overline{B}) \vee \overline{A} \wedge B \to A$

2	$(A \leftrightarrow B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) \rightarrow A$	7	$(A \rightarrow B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}) \leftrightarrow A$
3	$B \vee \overline{A \wedge B} \rightarrow (A \leftrightarrow B)$	8	$B \wedge \overline{A \vee B} \leftrightarrow (A \rightarrow B)$
4	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \vee \overline{B}) \wedge A$	9	$(A \leftrightarrow B) \wedge (A \vee \overline{B}) \rightarrow B$
5	$\overline{B} \vee \overline{A \rightarrow B} \wedge (A \leftrightarrow B)$	10	$A \vee \overline{A \leftrightarrow B} \vee (A \rightarrow B)$

Задание 8.2. Решить задачи:

B1. Сколькими способами можно распределить 3 награды (за I, II, III места) между 15 участниками соревнований?

B2. Сколько имеется шестизначных чисел, все цифры которых различны?

B3. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «МАТЕМАТИКА»?

B4. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «ДРАМТЕАТР»?

B5. Сколькими способами можно разложить 30 различных предметов по 5 ящикам, так, чтобы в каждом ящике оказалось по 6 предметов?

B6. В вазе находится 12 розовых и 8 красных роз. Сколькими способами можно составить букет, содержащий 7 розовых и 6 красных роз?

B7. Студенты в сессию сдают 5 экзаменов, в том числе два экзамена по химии. Сколькими способами можно распределить экзамены, но так, чтобы экзамены по химии следовали один за другим?

B8. В ящике находится 20 деталей, из которых 4 бракованные. Наудачу выбирается комплект из 5 деталей. Сколько всего комплектов, в каждом из которых будет 2 детали бракованные?

B9. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если цифры могут повторяться?

B10. В группе имеется 15 студентов, из них 8 девушек. Сколькими способами можно выбрать из группы 6 человек так, чтобы среди них была ровно одна девушка?

Пример выполнения заданий по теме 8

Задание 8.1. Составить таблицу истинности для следующего высказывания $(B \vee \overline{A \leftrightarrow B}) \wedge B \rightarrow A$.

Решение.

Учитывая порядок выполнения операций и определения операций, составим таблицу истинности для данного высказывания:

A	B	$A \leftrightarrow B$	$\overline{A \leftrightarrow B}$	$B \vee \overline{A \leftrightarrow B}$	$B \vee \overline{A \leftrightarrow B} \wedge B$	$B \vee \overline{A \leftrightarrow B} \wedge B \rightarrow A$
л	л	и	л	и	л	и
л	и	л	и	и	л	и
и	л	л	и	и	л	и
и	и	и	л	и	и	и

Задание 8.2.

а) Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «ХИМИЯ»?

б) Бригада состоит из 18 рабочих, из которых 13 мужчин и 5 женщин. Для выполнения задания в командировке необходимо отобрать из них 5 мужчин и 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать?

в) На день рождения пригласили 6 гостей. Сколькими способами их можно рассадить за столом, за которым стоят 9 стульев?

Решение.

а) Так как здесь порядок букв играет роль, то это будут размещения из 5 элементов по 5, то есть перестановки. Число всех перестановок из 5 элементов по 5 будет определяться как $P_5 = 5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$. Но так как в слове «ХИМИЯ» встречается две одинаковые буквы «И», то различных слов будет меньше в $P_2 = 2\cdot1 = 2$ раз. Таким образом, всего различных слов будет 120:2 = = 60.

б) Так как порядок рабочих не важен, то применяются сочетания. Число всех способов выбора 5 мужчин из 13 и 2 женщин из 5 можно найти по формуле: $C_{13}^5 \cdot C_5^2 = \frac{13!}{(13-5)!\cdot5!}\cdot\frac{5!}{(5-2)!\cdot2!} = \frac{13!\cdot5!}{8!\cdot5!\cdot3!\cdot2!} = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8!}{8!\cdot3\cdot2\cdot2} = 12870$.

в) Так как порядок размещения гостей играет роль, то число всех возможных комбинаций можно найти как $A_9^6 = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!} = \frac{3!\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{3!} = 60480$.

Тема 9. Теория вероятностей и математическая статистика

Краткие теоретические сведения

Случайной величиной называется переменная, которая в результате эксперимента принимает одно из возможного множества своих значений, заранее неизвестного.

Дискретной случайной величиной называется величина, для которой множество ее значений конечное или бесконечное, но счетное.

Непрерывной случайной величиной называется величина, бесконечное множество значений которой есть некоторый интервал (конечный или бесконечный) числовой оси.

Законом распределения дискретной случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующим этим значениям вероятностями.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \ .$$

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X)) \cdot p_i \ .$$

На практике для нахождения дисперсии случайной величины применяют формулу: $D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2$.

Средним квадратическим отклонением или стандартным отклонением случайной величины называется корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} \ .$$

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(X)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X<x).$$

Интегральной функцией распределения непрерывной случайной величины называется функция $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

Дифференциальной функцией распределения непрерывной случайной величины (плотностью распределения вероятности) называется производная функции распределения непрерывной случайной величины: $f(x) = F^{/}(x)$.

Вероятность того, что случайная величина X попадет в интервал $(\alpha;\beta)$, находится по формулам: $P(\alpha < x < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ или $P(\alpha < x < \beta) = F(\alpha) - F(\beta)$.

Нормальное распределение – распределение непрерывной случайной величины, у которой плотность вероятностей задана формулой

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}} \ .$$

Генеральная совокупность – совокупность всех объектов, которая подлежит исследованию.

Выборочная совокупность (*выборка*) – часть объектов генеральной совокупности, отобранная для исследования.

Вариационный ряд – выборка, представленная в виде неубывающей последовательности чисел.

Статистический ряд – последовательность пар $(x_1;m_1)$, $(x_2;m_2)$ … $(x_k;m_k)$. Обычно статистический ряд записывается в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	…	x_i	…	x_k
m_i	m_1	m_2	…	m_i	…	m_k

Полигон - ломаная, соединяющая точки плоскости с координатам $(x_i;m_i)$ или $(x_i;\omega_i)$.

Гистограмма – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основаниями, равными длинам интервалов и высотами, равным частотам (относительным частотам) интервалов, деленных на длину интервала.

Выборочное среднее $\overline{x_{\hat{a}}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i}{n}$.

Медиана – среднее значение в вариационном ряду.

Мода – наиболее часто встречающееся значение в вариационном ряду.

Выборочная дисперсия: $D_{\hat{a}} = \overline{X_{\hat{a}}^{2}} - \left(\overline{X_{\hat{a}}}\right)^2$.

Исправленная выборочная *дисперсия* - $S^2 = \dfrac{n}{n-1} D_{\hat{a}}$.

Исправленное среднее квадратическое отклонение: S.

Гипотеза – любое предложение о генеральной совокупности, которое проверяется по выборке.

Нулевая гипотеза – гипотеза, которая подлежит проверке.

Альтернативная гипотеза – гипотеза, являющаяся логическим отрицанием нулевой гипотезы.

Статистический критерий – правило, по которому нулевая гипотеза принимается или отклоняется.

Задания к расчетно-графической работе

Задание 9.1. Решить задачу:

В.1. В коллекции из 20 дисков имеется 5 дисков с песнями Трофима. Наугад выбирают 4 диска. Какова вероятность того, что 2 из них с произведениями Трофима?
В.2. На столе лежат 36 экзаменационных билетов с номерами 1, 2, 3,…,36. Преподаватель берет 3 любых билета. Какова вероятность того, что только один билет окажется из четырех первых номеров?
В.3. Из 15 мальчиков и 10 девочек составляется наудачу группа, в которой 5 человек. Какова вероятность того, что в неё попадут 3 мальчика и 2 девочки?
В.4. Из букв разрезной азбуки составлено слово «ремонт». Перемешаем карточки, затем, вытаскивая их наудачу, разложим в порядке вытаскивания. Какова вероятность того, что при этом получится слово «море»?
В.5. В ящике находятся 90 годных и 10 бракованных деталей. Найти вероятность того, что среди 10 вынутых из ящика деталей нет бракованных.
В.6. Контролер из партии 1000 деталей производит безвозвратную выборку 5 из них. Найти вероятность того, что в выборке не окажется дефектных деталей, если во всей партии их 4.
В.7. В урне 10 белых и 6 черных шаров. Из урны сразу вынимают 5 шаров. Найти вероятность того, что 2 из них будут белыми, а 3 черными.
В.8. В лотерее 100 билетов, из них 40 выигрышных. Какова вероятность того, что ровно один из трех взятых билетов окажется выигрышным?
В.9. Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков: а) кратна 3; б) равна 7, а разность равна 3; в) равна 7, если известно, что разность их равна 3; г) не менее 7, если известно, что разность их равна 3.
В.10. На пяти карточках написано по одной цифре из набора 1, 2, 3, 4, 5. Наугад выбирают одну за другой две карточки. Какова вероятность того. Что число на первой карточке будет больше, чем на второй?

Задание 9.2. Решить задачу:
В.1. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,9, третий – 0,8. Вычислить вероятность того, что хотя бы два экзамена будут сданы.
В.2. Три спортсмена участвуют в отборочных соревнованиях. Вероятности зачисления в сборную команду первого, второго и третьего спортсменов соответственно равны 0,8; 0,7; 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из этих спортсменов попадет в сборную.
В.3. На каждые 100 электрических ламп завода «А» в среднем приходится 83 стандартных, завода «В» - 63 стандартных. В магазин поступает 70% лампочек с завода «А» и 30% - с завода «В». Купленная лампочка оказалась стандартной. Определить вероятность того, что лампочка изготовлена на заводе «А».

В.4. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,3% брака, второй – 0,2%, третий –0,4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000 деталей, со второго – 2000, а с третьего – 2500.

В.5. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,7, для третьего-0,9. Каждый из стрелков делает по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишени 3 пробоины?

В.6. На склад поступили электрические лампы трех партий. Известно, что в первой партии, состоящей из 400 штук, содержится 1% нестандартных, во второй, состоящей из 500 штук - 2%, в третьей, состоящей из 100 штук - 4% нестандартных деталей. Со склада лампы поступили в магазин и здесь оказались расположенными случайным образом. Определить вероятность того, что покупатель, взявший одну лампу, купит нестандартную. **В.7**. Партия состоит из вентиляторов рижского и московского заводов. В партии 70% вентиляторов рижского завода. Для вентилятора московского завода вероятность безотказной работы в течение времени t равна 0,95, рижского – 0,92. Прибор испытывался в течение времени t и работал безотказно. Найти вероятность того, что это вентилятор московского завода.

В.8. Имеется две колоды по 36 карт. Из каждой колоды наудачу выбрали по карте. Найти вероятность того, что это были два туза.

В.9. Телевизор может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями 0,25; 0,5; 0,25. Вероятности того, что телевизор проработает больше 10 лет, равны для этих партий соответственно 0,1; 0,2; 0,4. Определить вероятность того, что телевизор проработает больше 10 лет.

В.10. Вероятность поражения мишени при одном выстреле первым стрелком равна 0,8, вторым – 0,9. Найти вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы стрелком.

Задание 9.3. Решить задачи:

В.1. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу поступит ровно три негодных изделия.

В.2. При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность брака при формовке равна 0,1. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых диодов 50 будет бракованных?

В.3. Всхожесть партии ржи равна 90%. Чему равна вероятность того, что из семи посеянных семян взойдут пять?

В.4. Игральная кость подброшена 10 раз. Найти вероятность выпадения единицы 7 раз.

В. 5. Стрелок сделал 30 выстрелов с вероятностью попадания при отдельном выстреле 0,3. Найти вероятность того, что при этом будет 8 попаданий.

В.6. В магазин вошли 8 покупателей. Найти вероятность того, что трое из них совершат покупки, если для каждого вошедшего вероятность совершить покупку равна 0,3.

В.7. В магазин вошли 12 покупателей. Найти вероятность того, что 4 из них сделают покупку, если вероятность совершить покупку для каждого одна и та же и равна 0,2.

В.8. Вероятность брака при изготовлении часов равна 0,0002. С конвейера сошло 5000 часов. Найти вероятность того, что среди всех часов, сошедших с конвейера, не более трёх бракованных.

В.9. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень: а) не менее 71 и не более 80 раз; б) ровно 75 раз.

В.10. На некотором предприятии произведено 400 изделий в смену. Вероятность того, что изделие будет первого сорта, равна 0,75. Какова вероятность того, что 280 изделий будет первого сорта?

Задание 9.4. Решить задачи:

В.1. Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), среднее квадратическое отклонение σ(X), функцию распределения дискретной случайной величины X:

X	1,4	1,8	2,3	3,2
P	0,3	0,4	0,2	0,1

В.2. Написать закон распределения вероятностей и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при двух бросках, если вероятность попаданий p =0,4.

В.3. У нормально распределенной случайной величины X известны M(X) = 10 и D(X) = 4. Найти вероятность P (12 < X < 14).

В.4. Найти M(X), D(X), σ(X), функцию распределения случайной величины X, если она задана законом распределения:

X	1	3	4	6	7
P	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

В.5. Найти M(X), D(X), σ(X), функцию распределения дискретной случайной величины X, если она задана законом распределения:

X	5	7	10	15
P	0,2	0,5	0,2	0,1

В.6. Найти вероятность того, что нормальная случайная величина с M(X) = 1, D(X) = 4 примет значение из интервала (0, 2).

В.7. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 2, \\ (x-2)^2 \quad \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 1 \quad \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервалы (1; 2,5) и (2,5; 3,5).

В.8. Случайная величина X имеет функцию плотности

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{50}}.$$

По какому закону распределена случайная величина? Найти M(X), D(X), σ(X) и её функцию распределения.

В.9. Функция плотности некоторой случайной величины имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 0, \\ 1 \quad \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0 \quad \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти M(X); D(X); σ(X); F(x).

В.10. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le -1, \\ \dfrac{x+1}{3} \quad \text{при} \quad -1 < x \le 2, \\ 1 \quad \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (0; 2). Найти $f(x)$. Построить графики $f(x)$; $F(x)$.

Задание 9.5.

Вариант 1. Для нахождения средней цены продовольственной корзины из 1000 городов России было отобрано случайным образом 100 городов. Полученные данные представлены в таблице:

Стоимость продовольственной корзины, тыс. руб	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10	Итого
Число городов	6	22	37	26	9	100

1. Постройте полигон и гистограмму относительных частот (частностей);
2. Найдите выборочную среднюю, дисперсию, «исправленную» выборочную дисперсию;
3. Найдите доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной средней.

4. Используя χ^2 - критерий Пирсона, на уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – стоимость продовольственной корзины – распределена по нормальному закону.

Вариант 2. Данные о продолжительности телефонных переговоров, отобранные по схеме собственно-случайной бесповторной выборки, приведены в таблице:

Время, мин	Менее 1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	Более 8	Итого
Число разговоров	3	4	9	14	37	12	8	7	4	100

1. Постройте полигон и гистограмму относительных частот (частностей);
2. Найдите выборочную среднюю, дисперсию, «исправленную» выборочную дисперсию;
3. Найдите доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной средней.
4. Используя χ^2 - критерий Пирсона, на уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – продолжительность телефонных разговоров – распределена по нормальному закону.

Вариант 3. В результате выборочного обследования российских автомобилей, обслуживаемых в автосервисе по гарантии, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки были проверены 100 автомобилей. Полученные данные о пробеге автомобилей с момента покупки до первого гарантийного ремонта приведены в таблице:

Пробег, тыс. км	Менее 1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	Более 7	Итого
Число автомобилей	4	8	14	25	19	15	9	6	100

1. Постройте полигон и гистограмму относительных частот (частностей);
2. Найдите выборочную среднюю, дисперсию, «исправленную» выборочную дисперсию;
3. Найдите доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной средней.
4. Используя χ^2 - критерий Пирсона, на уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – пробег автомобиля с момента покупки до первого гарантийного ремонта – распределена по нормальному закону.

Вариант 4. Для изучения стажа работы студентов по специальности было отобрано 100 студентов. Полученные данные о стаже работы студентов по специальности представлены в таблице:

Стаж работы по специальности, лет	Менее 2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12-	Более 12	Итого
Количество студентов	9	18	23	28	16	5	1	100

1. Постройте полигон и гистограмму относительных частот (частностей);
2. Найдите выборочную среднюю, дисперсию, «исправленную» выборочную дисперсию;
3. Найдите доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной средней.
4. Используя χ^2 - критерий Пирсона, на уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – стаж работы студента по специальности – распределена по нормальному закону.

Вариант 5. Для изучения средней продолжительности обслуживания клиентов в Пенсионном фонде было проведено обследование 100 клиентов. Результаты обследования представлены в таблице:

Время обслуживания, мин	Менее 4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24-	Более 24	Итого
Количество клиентов	3	10	20	38	15	9	5	100

1. Постройте полигон и гистограмму относительных частот (частностей);
2. Найдите выборочную среднюю, дисперсию, «исправленную» выборочную дисперсию;
3. Найдите доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной средней.
4. Используя χ^2 - критерий Пирсона, на уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – стаж работы студента по специальности – распределена по нормальному закону.

Вариант 6. Для получения статистических данных о пребывании на больничном листе в течение года было отобрано 100 работников предприятия. Полученные данные представлены в таблице:

Количество дней пребывания на больничном листе	Менее 3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13	Более 13	Итого
Количество работников	6	12	21	30	15	9	7	100

1. Постройте полигон и гистограмму относительных частот (частностей);
2. Найдите выборочную среднюю, дисперсию, «исправленную» выборочную дисперсию;
3. Найдите доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной средней.
4. Используя χ^2 - критерий Пирсона, на уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – количество дней пребывания работника предприятия на больничном листе – распределена по нормальному закону.

Вариант 7. Имеются выборочные данные о распределении вкладчиков по размеру вклада в Сбербанке города:

Размер вклада, тыс.руб	До 50	50-100	100-150	150-200	200-250	Более 250	Итого
Количество вкладчиков	31	43	56	40	22	8	200

1. Постройте полигон и гистограмму относительных частот (частностей);
2. Найдите выборочную среднюю, дисперсию, «исправленную» выборочную дисперсию;
3. Найдите доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной средней.
4. Используя χ^2 - критерий Пирсона, на уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – размер вклада в Сбербанке города – распределена по нормальному закону.

Вариант 8. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки было проведено обследование 50 строительных организаций региона по объему выполненных работ. Результаты представлены в таблице:

Объем работ, млн.руб	До 30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	Более 180	Итого
Количество организаций	5	8	11	14	6	4	2	50

1. Постройте полигон и гистограмму относительных частот (частностей);
2. Найдите выборочную среднюю, дисперсию, «исправленную» выборочную дисперсию;
3. Найдите доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной средней.
4. Используя χ^2 - критерий Пирсона, на уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – объем выполненных работ – распределена по нормальному закону.

Вариант 9. В результате выборочного обследования стажа работы профессорско-преподавательского состава вуза получены следующие данные:

Стаж работы (лет)	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32
Число преподавателей	2	3	13	24	29	16	8	5

1. Постройте полигон и гистограмму относительных частот (частностей);
2. Найдите выборочную среднюю, дисперсию, «исправленную» выборочную дисперсию;
3. Найдите доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной средней.
4. Используя χ^2 - критерий Пирсона, на уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – стаж работы студента по специальности – распределена по нормальному закону.

Вариант 10.

Во время медосбора были получены следующие выборочные данные о суточной прибавке меда на пасеках области:

Суточная прибавка (кг)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	Более 10	Итого
Количество пчелосемей	3	4	19	12	7	5	50

1. Постройте полигон и гистограмму относительных частот (частностей);
2. Найдите выборочную среднюю, дисперсию, «исправленную» выборочную дисперсию;
3. Найдите доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной средней.
4. Используя χ^2 - критерий Пирсона, на уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – суточная прибавка меда на пасеках области – распределена по нормальному закону.

Пример выполнения заданий по теме 9

Задание 9.1. Решить задачу: В лотерее разыгрывается 100 билетов. Выигрыши выпали на 25 билетов. Некто приобрел 6 билетов. Найти вероятность того, что выигрыш выпадет на 2 билета.

Решение.

Пусть событие A - выигрыш выпал на 2 билета из 6. Тогда вероятность того, что выигрыш выпал на 2 из 6 билетов будет определяться по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Число всех возможных исходов n найдем по формуле $n= C_{100}^{6} = \dfrac{100!}{6!\cdot(100-6)!}$ = = $\dfrac{100!}{6!\cdot 94!} = \dfrac{94!\cdot 95\cdot 96\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 94!}$ = 4768209600. Число исходов m, благоприятствующих появлению события A, найдем по формуле

$m = C_{25}^{2}\cdot C_{75}^{4} = \dfrac{25!}{2!\cdot 23!}\cdot\dfrac{75!}{4!\cdot 71!} = \dfrac{25\cdot 24\cdot 23!}{2\cdot 23!}\cdot\dfrac{75\cdot 74\cdot 73\cdot 72\cdot 71!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 71!} = 300\cdot 1215450 =$

= 364635000. Тогда $P(A) = \dfrac{364635000}{4768209600} \approx 0,0765$.

Задание 9.2. Решить задачу:

а) Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

б) Имеется пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит цель при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95, для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наугад выбранной винтовки.

в) Трое охотников одновременно выстрелили по медведю, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что медведь был убит первым стрелком, если вероятности попадания для этих стрелков равны соответственно 0,3; 0,4; 0,5.

Решение.

а) Обозначим попадание в цель первым стрелком – событие A, вторым – событие B, промах первого стрелка – событие $\overline{A}$, промах второго – событие $\overline{B}$. Тогда в соответствии с условием задачи:

$P(A) = 0,7; \quad P(\overline{A}) = 0,3; \quad P(B) = 0,8; \quad P(\overline{B}) = 0,2.$

Обозначим за событие C то, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков. Так как $C = A\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot B$, то

$P(C) = P(A\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot B) = P(A\cdot\overline{B}) + P(\overline{A}\cdot B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0,7\cdot 0,2 +$ + $0,3\cdot 0,8 = 0,14 + 0,24 = 0,38$ (События $A\cdot\overline{B}$ и $\overline{A}\cdot B$ являются несовместными, а события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B – независимыми).

б) Введем событие A - цель будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наугад выбранной винтовки.

Так как винтовки есть с оптическим прицелом и без оптического прицела, то введем две гипотезы:

H_1 - выстрел произведен из винтовки с оптическим прицелом,

H_2 - выстрел произведен из винтовки без оптического прицела.

Искомую вероятность определим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2).$$

Вероятность того, что выбрана винтовка с оптическим прицелом $P(H_1)$ = $\frac{3}{5}$=0,6, а вероятность того, что выбрана винтовка без оптического прицела, $P(H_2)=\frac{2}{5}$. По условию задачи, вероятность того, что стрелок поразит цель при выстреле из винтовки с оптическим прицелом $P(A|H_1)$ = 0,95, а для винтовки без оптического прицела эта вероятность $P(A|H_2)$ = 0,7.
Тогда $P(A)$ = 0,95·0,6 + 0,7·0,4 = 0,57 + 0,28 = 0,85.
в) В этой задаче требуется определить вероятность гипотезы уже после того, как событие уже совершилось. Для определения искомой вероятности надо воспользоваться формулой Бейеса. В нашем случае она имеет вид:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)}$$

В этой формуле H_1, H_2, H_3 – гипотезы, что медведя убьет первый, второй и третий стрелок соответственно. До произведения выстрелов эти гипотезы равновероятны и их вероятность равна $\frac{1}{3}$.
A – медведь убит одной пулей.
$P(H_1/A)$ – вероятность того, что медведя убил первый стрелок при условии, что выстрелы уже произведены.
$P(H_2/A)$ – вероятность того, что медведя убил второй стрелок при условии, что выстрелы уже произведены.
$P(H_3/A)$ – вероятность того, что медведя убил третий стрелок при условии, что выстрелы уже произведены.

Вероятности того, что медведя убьет первый, второй или третий стрелок, вычисленные до выстрелов, равны соответственно:

$$P(A/H_1)=p_1q_2q_3=0{,}3\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}09$$
$$P(A/H_2)=q_1p_2q_3=0{,}7\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}14$$
$$P(A/H_3)=q_1q_2p_3=0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}21$$

Здесь q_1 = 0,7; q_2 = 0,6; q_3 = 0,5 – вероятности промаха для каждого из стрелков, рассчитаны как $q = 1 – p$, где p – вероятности попадания для каждого из стрелков.

Подставим эти значения в формулу Бейеса:

$$P(H_1/A)=\frac{0{,}09}{0{,}44}=\frac{9}{44}.$$

Задание 9.3. Решить задачу:

а) Вероятность того, что взятая наугад деталь из некоторой партии деталей, будет не бракованной равна 0,8. Найти вероятность того, что из 5 взятых деталей 2 окажутся не бракованными.

б) Найти вероятность того, что при 600 выстрелах мишень будет поражена ровно 250 раз, если вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,4.

в) Вероятность совершить ошибку при наборе текста, содержащего 1500 знаков, равна 0,004. Какова вероятность того, при наборе было допущено ровно 5 ошибок?

Решение.

а) Так как p= 0,8 – не мало, а n = 5 - мало, то для вычисления искомой вероятности применим формулу Бернулли: $P_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$. В нашем случае: p= 0,8, q = 1 – 0,8 = 0,2, n = 5, m = 2. Тогда $P_{2,5} = C_5^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3$ =

$$= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}008 = 0{,}08.$$

б) Так как число выстрелов n = 600 – велико, то воспользуемся приближенными формулами для вычисления искомой вероятности. Так как p = 0,4 > 0,1 и m = 250 – не мало, то в качестве приближенной формулы применим локальную теорему Муавра-Лапласа:

$P_{m,n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, x = $\frac{m - np}{\sqrt{npq}}$. Значения $\varphi(x)$ - функции Гаусса находятся по таблице. Находим $\tilde{o} = \frac{250 - 600 \cdot 0{,}4}{\sqrt{600 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} = \frac{10}{12} \approx 0{,}83$. По таблице определяем $\varphi(0{,}83) \approx 0{,}2827$. Тогда по локальной теореме Муавра-Лапласа находим $Ð_{250{,}600} \approx \frac{1}{12} \cdot 0{,}2827 \approx 0{,}0236.$

в) Так как n = 1500 – велико, то для нахождения требуемой вероятности воспользуемся приближенными формулами в схеме Бернулли. В нашей задаче m = 5 – мало, p = 0,004 < 0,1. Значит, более точный результат даст формула Пуассона: $P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$, где λ = np. В нашем случае

λ = 1500·0,004 = 6. Тогда $P_{5,1500} \approx \frac{6^5 \cdot 2{,}7^{-6}}{5!} \approx \frac{6^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2{,}7^6} \approx \frac{7776}{120 \cdot 387{,}42} \approx 0{,}167$.

Задание 9.4. Решить задачу:

а) Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа каждого из приборов равны соответственно p_1 = 0,3; p_2 = 0,4; p_3 = 0,5; p_4 = 0,6. Найти закон распределения случайной величины X – числа отказавших приборов, а также математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и функцию распределения данной случайной величины.

б) Задана непрерывная случайная величина x своей функцией распределения плотностей вероятностей *f(x)*:

$$f(x)=\begin{cases} a\cos 2x, & \text{ïðè} \quad -\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4} \\ 0, & \text{ïðè} \quad |x|>\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Определить коэффициент a, найти функцию распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина x попадет в интервал $\left(\frac{\pi}{6};2\right)$. Найти математическое ожидание и дисперсию заданной случайной величины.

Решение.

а) Принимая за случайную величину X - число отказавших приборов, видим что эта случайная величина может принимать значения 0, 1, 2, 3 или 4.

Для составления закона распределения этой случайной величины необходимо определить соответствующие вероятности. Примем $q_i=1-p_i$.

1) Не отказал ни один прибор.

$$p(0)=q_1q_2q_3q_4=0{,}7\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}084.$$

2) Отказал один из приборов.

$$p(1)=p_1q_2q_3q_4+q_1p_2q_3q_4+q_1q_2p_3q_4+q_1q_2q_3p_4=0{,}302.$$

3) Отказали два прибора.

$$p(2)=p_1p_2q_3q_4+p_1q_2p_3q_4+p_1q_2q_3p_4+q_1p_2p_3q_4+q_1p_2q_3p_4+q_1q_2p_3p_4=0{,}38.$$

4) Отказали три прибора.

$$p(3)=p_1p_2p_3q_4+p_1p_2q_3p_4+p_1q_2p_3p_4+q_1p_2p_3p_4=0{,}198.$$

5) Отказали все приборы.

$$p(4)=p_1p_2p_3p_4=0{,}036.$$

В итоге получаем закон распределения:

x	0	1	2	3	4
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Математическое ожидание случайной величины X найдем по формуле: $M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i$. Тогда $M(X)=0\cdot 0{,}084+1\cdot 0{,}302+2\cdot 0{,}38+3\cdot 0{,}198+4\cdot 0{,}036=1{,}8.$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой: $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$.

Дополним закон распределения еще одной строчкой:

x^2	0	1	4	9	16
x	0	1	2	3	4
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Тогда $M(X^2) = 0{,}302 + 4 \cdot 0{,}38 + 9 \cdot 0{,}198 + 16 \cdot 0{,}036 = 4{,}18.$

Соответственно $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4{,}18 - 3{,}24 = 0{,}94.$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0{,}94} \approx 0{,}97$.

Функцию распределения $F(x)$ найдем, используя определение: $F(x) = P(X<x)$.
Если $x \le 0$, то $F(x) = P(X<x) = 0$;
если $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X<x) = P(X = 0) = 0{,}084$;
если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X<x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}084 + 0{,}302 = 0{,}386$;
если $2 < x \le 3$, то $F(x) = P(X<x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}084 +$
$+ 0{,}302 + 0{,}38 = 0{,}766$;
если $3 < x \le 4$, то $F(x) = P(X<x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$
$= 0{,}084 + 0{,}302 + 0{,}38 + 0{,}198 = 0{,}964$;
если $x > 4$, то $F(x) = P(X<x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) +$
$+ P(X = 4) = 0{,}084 + 0{,}302 + 0{,}38 + 0{,}198 + 0{,}036 = 1.$

$$\text{Итак, } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 0{,}084, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 0{,}386, & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 0{,}766, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 0{,}964, & \text{если } 3 < x \le 4, \\ 1, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

б) Найдем коэффициент a. Для этого воспользуемся формулой: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} a\cos 2xdx + \int\limits_{\pi/4}^{+\infty} 0dx = \frac{a\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right) = a.$$

Поэтому $a = 1$.

Найдем функцию распределения $F(x)$:

1) На промежутке $x < -\frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$

2) На промежутке $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$:

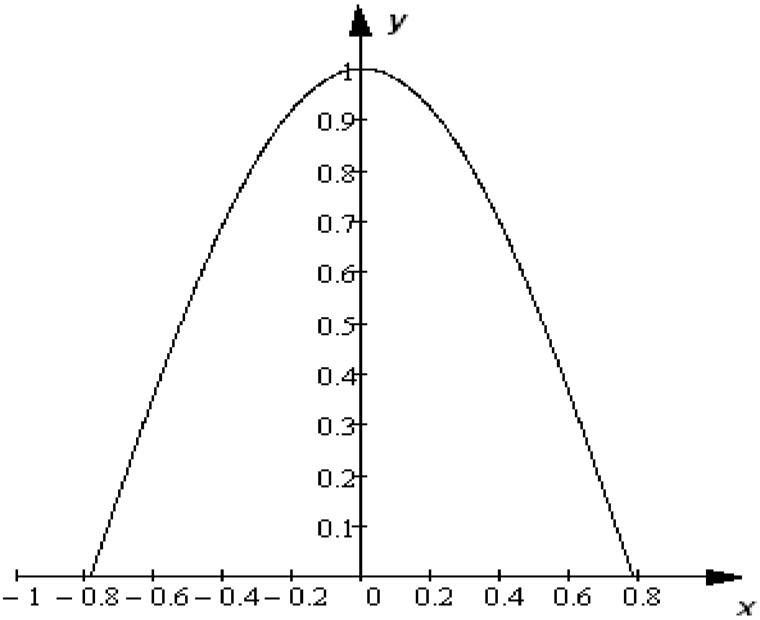
$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{x} \cos 2xdx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}.$$

3) На промежутке $x > \frac{\pi}{4}$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int\limits_{\pi/4}^{x} 0dx = \frac{\sin 2x}{2} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$

Таким образом: $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ïðè} \quad x < -\frac{\pi}{4}; \\ \frac{\sin 2x + 1}{2}, & \text{ïðè} \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}; \\ 1, & \text{ïðè} \quad x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Построим график плотности распределения:

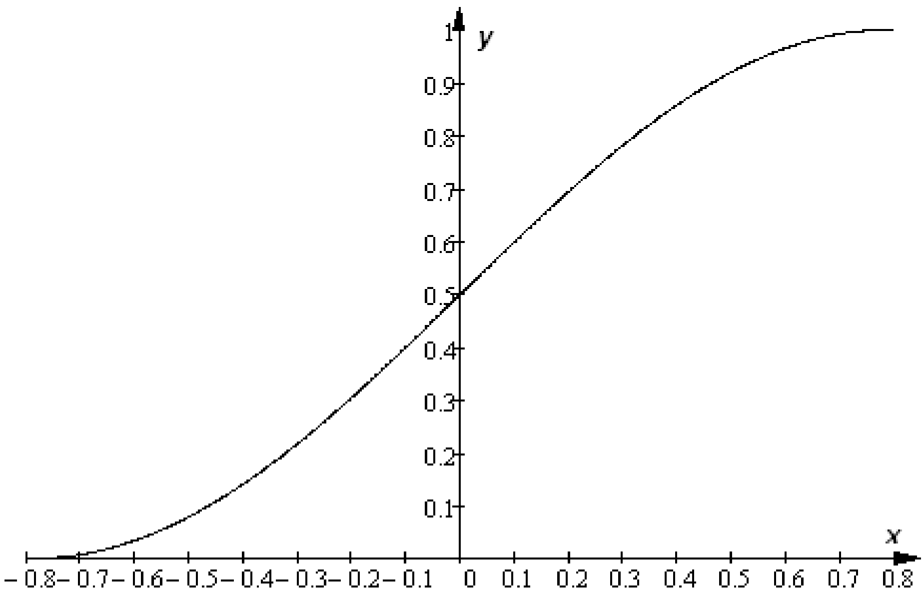
$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & \text{при} \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{при} \quad |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases};$$



(На рисунке $y = f(x)$).

Построим график функции распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ïðè} \quad x<-\dfrac{\pi}{4}; \\ \dfrac{\sin 2x+1}{2}, & \text{ïðè} \quad -\dfrac{\pi}{4}\le x\le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1, & \text{ïðè} \quad x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$



(На рисунке y = $F(x)$).

Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{\pi}{6};2\right)$. Для этого воспользуемся формулами:

$$P(\alpha<x<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \quad \text{или} \quad P(\alpha<x<\beta)=F(\alpha)-F(\beta).$$

Тогда

$$P\left(\frac{\pi}{6}<x<2\right)=\int_{\pi/6}^{2} f(x)dx=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos 2xdx+\int_{\pi/4}^{2}0dx=\frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0{,}067.$$

(Соответственно, по другой формуле:

$$P\left(\frac{\pi}{6}<x<2\right)=F(2)-F(\pi/6)=1-\frac{\sin(\pi/3)+1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0{,}067.)$$

Определим математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx+\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\cos 2xdx+\int_{\pi/4}^{\infty} 0dx=\int_{-\pi/4}^{+\pi/4} x\cos 2xdx=\begin{Bmatrix} u=x; & dv=\cos 2xdx; \\ du=dx; & v=\dfrac{\sin 2x}{2}; \end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{x\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{2}dx=\frac{\cos 2x}{4}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=0.$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx+\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2\cos 2xdx+\int_{\pi/4}^{+\infty} 0dx=\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2\cos 2xdx=$$

$$=\begin{Bmatrix} u=x^2; & dv=\cos 2xdx; \\ du=2xdx; & v=\dfrac{\sin 2x}{2}; \end{Bmatrix}=\frac{x^2\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\sin 2xdx=\begin{Bmatrix} u=x; & \sin 2xdx=dv; \\ du=dx; & v=-\dfrac{\cos 2x}{2}; \end{Bmatrix}=\frac{\pi^2}{16}+$$

$$+\frac{x\cos 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\sin 2x}{4}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}=0{,}1163.$$

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2=0{,}1163-0=0{,}1163.$$

9.5. Для нахождения средней цены продовольственной корзины жителей сельской местности России было отобрано случайным образом 50 населенных пунктов. Полученные данные представлены в таблице:

Стоимость продовольст-венной корзины, тыс. руб.	Менее 2	2 – 3	3 – 4	4 – 5	5 – 6	6 – 7	7 – 8	Больше 8	Итого
Число городов	2	5	6	11	13	7	5	1	50

1. Постройте полигон и гистограмму относительных частот (частностей);
2. Найдите выборочную среднюю, дисперсию, «исправленную» выборочную дисперсию;
3. Найдите доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвест-ного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной средней.
4. Используя χ^2 - критерий Пирсона, на уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – стоимость продовольственной корзины – распределена по нормальному закону.

Решение.

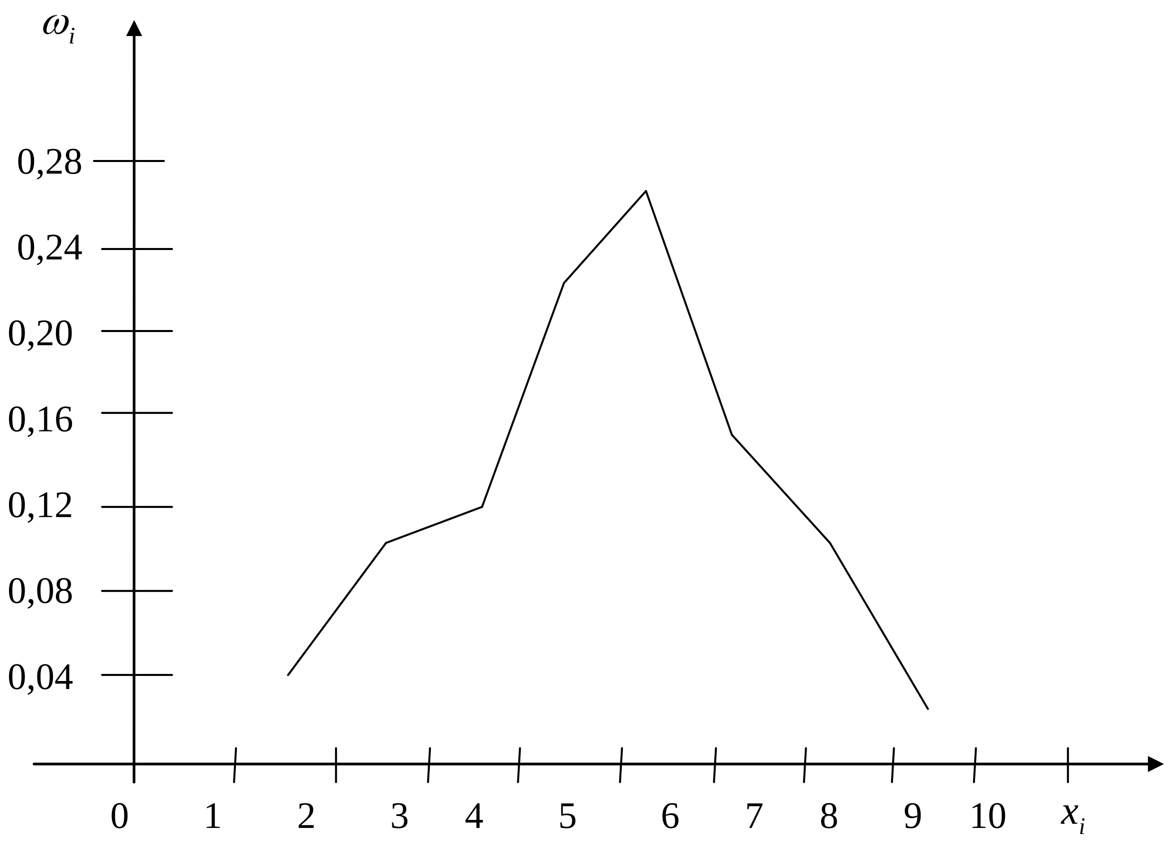
1. Для удобства вычислений построим следующую таблицу 1.

Таблица 1.

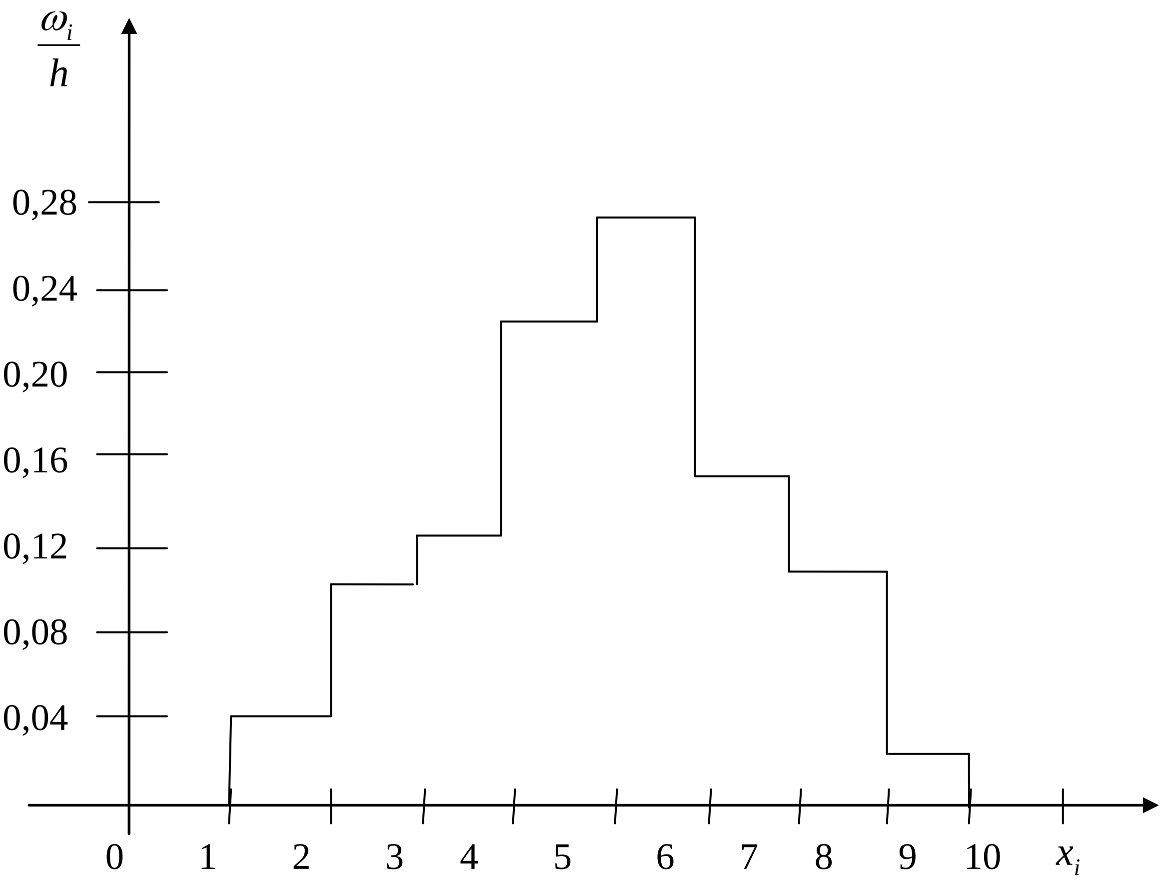
x_i	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
m_i	2	5	6	11	13	7	5	1
ω_i	0,04	0,10	0,12	0,22	0,26	0,14	0,10	0,02
$\frac{\omega_i}{h}$	0,04	0,10	0,12	0,22	0,26	0,14	0,10	0,02

В качестве значений x_i берем средние значения из каждого интервала, при этом крайние интервалы (-∞; 2) и (8; +∞) заменяем на интервалы (1; 2) и (8; 9).

Тогда полигон относительных частот будет следующий:



Гистограмма же относительных частот будет:



2. Для нахождения выборочного среднего воспользуемся формулой:

$$\overline{x_{\hat{a}}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i}{n},$$

$$\overline{x_{\hat{a}}} = \frac{1{,}5 \cdot 2 + 2{,}5 \cdot 5 + 3{,}5 \cdot 6 + 4{,}5 \cdot 11 + 5{,}5 \cdot 13 + 6{,}5 \cdot 7 + 7{,}5 \cdot 5 + 8{,}5 \cdot 1}{50} = 4{,}92.$$

Для вычисления выборочной дисперсии воспользуемся формулой

$$D_{\hat{a}} = \overline{X_{\hat{a}}^2} - \left(\overline{X_{\hat{a}}}\right)^2.$$

Найдем $\overline{x_{\hat{a}}^2} = \frac{1{,}5^2 \cdot 2 + 2{,}5^2 \cdot 5 + 3{,}5^2 \cdot 6 + 4{,}5^2 \cdot 11 + 5{,}5^2 \cdot 13 + 6{,}5^2 \cdot 7 + 7{,}5^2 \cdot 5 + 8{,}5^2 \cdot 1}{50} =$

$$= \frac{4{,}5 + 31{,}25 + 73{,}5 + 222{,}75 + 393{,}25 + 295{,}75 + 281{,}25 + 72{,}25}{50} = 27{,}49.$$

Тогда $D_{\hat{a}} = 27{,}49 - (4{,}92)^2 = 3{,}2836.$

Так как исправленная выборочная дисперсия находится по формуле

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\hat{a}}, \text{ то } S^2 = \frac{50}{49} \cdot 3{,}2836 \approx 3{,}35.$$

Тогда исправленное среднее квадратическое отклонение $S \approx 1{,}83$.

Для нахождения доверительного интервала для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной средней воспользуемся тем, что $a \in (\overline{x_{в}} - \Delta x; \overline{x_{в}} + \Delta x)$, $\Delta x = t_{\gamma}(f) \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$.

Тогда $\Delta x = t_{0,95}(48) \cdot \dfrac{1{,}83}{\sqrt{50}} \approx 2{,}01 \cdot 0{,}26 \approx 0{,}52$. Поэтому $a \in (4{,}40; 5{,}44)$.

4. Для проверки гипотезы о том, что случайная величина X – стоимость продовольственной корзины жителей сельской местности распределена по нормальному закону, составим таблицу 2.

Таблица 2.

N	$x_i - x_{i+1}$	m_i	u_i	u_{i+1}	$\Phi(u_i)$	$\Phi(u_{i+1})$	p_i	np_i	$\dfrac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	1 – 2	2							
2	2 – 3	5 7	- ∞	- 1,05	-0,5	-0,3531	0,1469	7,345	≈0,02
3	3 – 4	6	- 1,05	- 0,50	-0,3531	-0,1915	0,1616	8,08	≈0,54
4	4 – 5	11	- 0,50	0,04	-0,1915	0,0160	0,2075	10,375	≈0,04
5	5 – 6	13	0,04	0,59	0,0160	0,2224	0,2064	10,32	≈0,70
6	6 – 7	7	0,59	1,14	0,2224	0,3729	0,1505	7,525	≈0,04
7	7 – 8	5 6	1,14	+∞	0,3729	0,5	0,1271	6,355	≈0,02
8	8 – 9	1							
Итого							1,0000	50	1,36

Для нахождения вероятности попадания значения случайной величины в нужный интервал, воспользуемся формулой $p_i = \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i)$, где

$u_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - a}{\delta}$, а $u_i = \dfrac{x_i - a}{\delta}$. В качестве математического ожидания a возьмем $\overline{x_{в}} = 4{,}92$, а в качестве $\delta = S = 1{,}83$. Найдем все значения u_i, затем используя Приложение 7 найдем $\Phi(u_i)$, затем p_i, $n\,p_i$.

Далее находим $\chi^2_{набл.} = \dfrac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 1{,}36$ $\chi^2_{крит.} = \chi^2_{0,05;3} = 7{,}8$. $k = m - 3 = 3$.

Так как $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$, то гипотезу H_0 не отвергаем.

Приложение 1. Основные тождества

АЛГЕБРА

$$a^2 - b^2 = (a - b)\cdot(a + b)$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a - b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$$
$$a^n \cdot b^n = \left(ab\right)^n$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$$
$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$$

Приложение 2. Таблица значений основных тригонометрических функций

α	Градусы	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
	Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-
$\mathrm{ctg}\,\alpha$		-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Приложение 3. Основные правила дифференцирования

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$(cu)' = c \cdot u'$, где c - константа

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Приложение 4. Производные основных элементарных функций

1) $C' = 0$;

2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7) $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$

8) $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

9) $\left(\sin x\right)' = \cos x$

10) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

11) $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12) $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13) $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$

16) $\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Приложение 5. Таблица основных неопределенных интегралов

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \text{ при } m \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$$

$$\int tgx dx = -ln\,|\,cosx\,| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$

$$\int ctgx dx = ln\,|\,sinx\,| + C$$

Приложение 6. Значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

4,1 0,0001338
4,5 0,0000160
5,0 0,0000015

Приложение 7. Значения функции $\hat{O}\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{0}^{\tilde{o}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

x	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)
0,00	0,0000	0,52	0,1985	1,04	0,3508	1,56	0,4406	2,16	0,4846
0,01	0,0040	0,53	0,2019	1,05	0,3531	1,57	0,4418	2,18	0,4854
0,02	0,0080	0,54	0,2054	1,06	0,3554	1,58	0,4429	2,20	0,4861
0,03	0,0120	0,55	0,2088	1,07	0,3577	1,59	0,4441	2,22	0,4868
0,04	0,0160	0,56	0,2123	1,08	0,3599	1,60	0,4452	2,24	0,4875
0,05	0,0199	0,57	0,2157	1,09	0,3621	1,61	0,4463	2,26	0,4881
0,06	0,0239	0,58	0,2190	1,10	0,3643	1,62	0,4474	2,28	0,4887
0,07	0,0279	0,59	0,2224	1,11	0,3665	1,63	0,4484	2,30	0,4893
0,08	0,0319	0,60	0,2257	1,12	0,3686	1,64	0,4495	2,32	0,4898
0,09	0,0359	0,61	0,2291	1,13	0,3708	1,65	0,4505	2,34	0,4904
0,10	0,0398	0,62	0,2324	1,14	0,3729	1,66	0,4515	2,36	0,4909
0,11	0,0438	0,63	0,2357	1,15	0,37490	1,67	0,4525	2,38	0,4913
0,12	0,0478	0,64	0,2389	1,16	0,3770	1,68	0,4535	2,40	0,4918
0,13	0,05170	0,65	0,2422	1,17	0,3790	1,69	0,4545	2,42	0,4922
0,14	0,0557	0,66	0,2454	1,18	0,3810	1,70	0,4554	2,44	0,4927
0,15	0,0596	0,67	0,2486	1,19	0,3830	1,71	0,4564	2,46	0,4931
0,16	0,0636	0,68	0,2516	1,20	0,3849	1,72	0,4573	2,48	0,4934
0,17	0,0675	0,69	0,2549	1,21	0,3869	1,73	0,4582	2,50	0,4938
0,18	0,0714	0,70	0,2580	1,22	0,3883	1,74	0,4591	2,52	0,4941
0,19	0,0753	0,71	0,2611	1,23	0,3907	1,75	0,4599	2,54	0,4945
0,20	0,0793	0,72	0,2642	1,24	0,3925	1,76	0,4608	2,56	0,4948
0,21	0,0832	0,73	0,2673	1,25	0,3944	1,77	0,4616	2,58	0,4951
0,22	0,0871	0,74	0,2704	1,26	0,3962	1,78	0,4625	2,60	0,4953
0,23	0,0910	0,75	0,2734	1,27	0,3980	1,79	0,4633	2,62	0,4956
0,24	0,0948	0,76	0,2764	1,28	0,3997	1,80	0,4641	2,64	0,4959
0,25	0,0987	0,77	0,2794	1,29	0,4015	1,81	0,4649	2,66	0,4961
0,26	0,1026	0,78	0,2823	1,30	0,4032	1,82	0,4656	2,68	0,4963
0,27	0,1064	0,79	0,2852	1,31	0,4049	1,83	0,4664	2,70	0,4965
0,28	0,1103	0,80	0,2881	1,32	0,4066	1,84	0,4671	2,72	0,4967
0,29	0,1141	0,81	0,2910	1,33	0,4082	1,85	0,4678	2,74	0,4969
0,30	0,1179	0,82	0,2939	1,34	0,4099	1,86	0,4686	2,76	0,4971
0,31	0,1217	0,83	0,2967	1,35	0,4115	1,87	0,4693	2,78	0,4973
0,32	0,1255	0,84	0,2995	1,36	0,4131	1,88	0,4699	2,80	0,4974
0,33	0,1293	0,85	0,3023	1,37	0,4147	1,89	0,4706	2,82	0,4976
0,34	0,1331	0,86	0,3051	1,38	0,41620	1,90	0,4713	2,84	0,4977
0,35	0,1368	0,87	0,3078	1,39	0,4177	1,91	0,4719	2,86	0,4979
0,36	0,1406	0,88	0,3106	1,40	0,4192	1,92	0,4726	2,88	0,4980
0,37	0,1443	0,89	0,3133	1,41	0,4207	1,93	0,4732	2,90	0,4981
0,38	0,1480	0,90	0,3159	1,42	0,4222	1,94	0,4738	2,92	0,4982
0,39	0,1517	0,91	0,3186	1,43	0,4236	1,95	0,4744	2,94	0,4984
0,40	0,1554	0,92	0,3212	1,44	0,4251	1,96	0,4750	2,96	0,4985
0,41	0,1591	0,93	0,3238	1,45	0,4265	1,97	0,4756	2,98	0,4986
0,42	0,1628	0,94	0,3264	1,46	0,4279	1,98	0,4761	3,00	0,49865
0,43	0,1664	0,95	0,3289	1,47	0,4292	1,99	0,4767	3,20	0,49931
0,44	0,1700	0,96	0,3315	1,48	0,4306	2,00	0,4772	3,40	0,49966
0,45	0,1736	0,97	0,3340	1,49	0,4319	2,02	0,4783	3,60	0,499841

0,46	0,1772	0,98	0,3365	1,50	0,4332	2,04	0,4793	3,80	0,499928
0,47	0,1808	0,99	0,3389	1,51	0,4345	2,06	0,4803	4,00	0,499968
0,48	0,1844	1,00	0,3413	1,52	0,4357	2,08	0,4812	4,50	0,499997
0,49	0,1879	1,01	0,3438	1,53	0,4370	2,10	0,4821	5,00	0,499997
0,50	0,1915	1,02	0,3461	1,54	0,4382	2,12	0,4830		
0,51	0,1950	1,03	0,3485	1,55	0,4394	2,14	0,4838		

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие. - СПб.: Профессия, 2006. - 432 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие. - М.: Высш. шк., 2007. - 479 с.
3. Данко П. Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х ч, Ч.1 - 6-е изд. - М.: ОНИКС: Мир и Образование, 2003. - 304 с.
4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. - М.: Айрис-пресс, 2010. - 288 с.
5. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. - М.: Айрис-пресс, 2010. - 256 с
6. Сборник задач по аналитической геометрии. / под ред. Н.В. Ефимова. - 17-е изд. - СПб. : Профессия, 2002. - 199 с.
7. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х ч: учебное пособие для втузов, Ч.1-4. / Ред. А.В. Ефимов, Ред. А.С. Поспелов. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 2003.
8. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб.пособие. В 3 ч. Ч. 1 – 3. / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; Под общ. Ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Академ. Книга, 2005.
9. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие. - 3-е изд., стереотип. - М.: Высш. шк., 2002. - 304 с.

Дополнительные источники:

1. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике: справочное издание. - М.: Астрель: АСТ, 2004. - 991 с.
2. Дифференцирование функций одной переменной: метод. указания к выполнению контр. И самост. работ заочной формы обучения / сост. Т.А. Бородкина. – Архангельск: Арханг. гос. ун-т, 2010. – 34 с.
3. Определенный интеграл: метод. указания к выполнению расчетно-графической (контрольной) работы / сост. Е.Н. Ерилова. – Архангельск: Арханг. гос. техн. ун-т, 2010. – 55 с.
4. Ряды: метод. указания к выполнению расчет.-графич. (контр.) работы / сост. О.А. Хотенова. – Архангельск: Арханг. гос. техн. ун-т, 2010. – 54 с.
5. Самодова Л.Б. Теория вероятностей. Случайные величины: Ч.1: метод. Указания к решению задач. – Архангельск: Арханг. гос. техн. ун-т, 2008. – 56 с.
6. Случайные события: метод. указания к выполнению самостоят. работы / сост. Е.А. Кримнус, Н.А. Шиловская. Архангельск: Арханг. гос. техн. ун-т, 2010. – 67 с.

Фарков Александр Викторович

МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению
расчетно-графических работ