Федеральное агентство по образованию Российской Федерации
Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова

Кафедра регионоведения и туризма

Математика

Методические указания и контрольные задания
по высшей математике для студентов специальности 230500
«Социально-культурный сервис и туризм»

Ярославль, 2009

А.О. Толбей
Математика: Методические указания и контрольные задания по высшей математике /Сост. А.О. Толбей; Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2009. 35 с.

Методические указания составлены в соответствии с Государственным образовательным стандартом и предназначены для студентов 1-го курса специальности 230500 «Социально-культурный сервис и туризм» дневной формы обучения в качестве руководства для выполнения контрольных заданий.

Данные методические указания содержат индивидуальные задания, состоящие из 25 вариантов. Студент выполняет одну задачу из каждого задания с номером, соответствующим его варианту. По своему усмотрению преподаватель может использовать задания для проведения контрольных работ, самостоятельных работ, для домашних заданий.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения. Теоретические вопросы могут быть использованы студентами для подготовки к зачету и экзамену.

Рекомендовано Редакционно-издательским Советом Ярославского государственного университета.

Введение

Изучение курса «Математика» начинается с освоения темы «Линейная алгебра», как одной из основополагающих тем современной математики. Студент знакомится с понятиями линейной алгебры; осваивает основные приемы решения практических задач, что способствует развитию четкого логического мышления.

За время изучения курса студент должен приобрести:

– умение использовать математический аппарат дисциплины при решении стандартных задач;

– умение оперировать понятиями и методами дисциплины, используемыми в дальнейшей учебной и профессиональной деятельности.

Методические указания предназначены для студентов 1 курса исторического факультета ЯрГУ им. П.Г. Демидова, изучающих в рамках курса высшей математики тему «Линейная алгебра».

I. Матрицы и операции над ними

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначения: A – матрица, a_{ij} - элемент матрицы, i – номер строки, в которой стоит данный элемент, j – номер соответствующего столбца; m – число строк матрицы, n – число ее столбцов.

Матрица называется **квадратной**, если $m = n$. Число n в этом случае называют **порядком** квадратной матрицы. Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратной матрицы порядка n образуют ее **главную диагональ**.

Например, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица третьего порядка. Главная диагональ матрицы $a_{11}=2, a_{22}=5, a_{33}=7$.

Матрицы одинаковой размерности называются **равными**, если у них соответственно равны элементы, стоящие на одинаковых местах.

Матрица называется **нулевой**, если все ее элементы равны 0.

Квадратная матрица называется **единичной**, если элементы, стоящие на ее главной диагонали, равны 1, а остальные равны 0.

Например, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нулевая матрица второго порядка, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица четвертого порядка.

Транспонированием матрицы называется операция, в результате которой меняются местами строки и столбцы с сохранением порядка их следования. В результате получается матрица A^{T} (может обозначаться A'), называемая **транспонированной** по отношению к матрице A, элементы которой связаны с элементами A соотношением $a'_{ij}=a_{ji}$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, $A=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A^{T}=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Линейные операции над матрицами

Суммой матриц A и B одинаковой размерности $m\times n$ называется матрица C той же размерности, каждый элемент которой равен сумме элементов матриц A и B, стоящих на тех же местах: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,\dots, m,\ j = 1,\dots, n.$

Пример 1.1. Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим элементы матрицы $C = A + B$, складывая элементы исходных матриц, стоящие на одинаковых местах:

$$c_{11} = a_{11} + b_{11} = 1 + (-1) = 0; \quad c_{12} = a_{12} + b_{12} = -2 + 4 = 2; \quad c_{13} = a_{13} + b_{13} = 4 + 0 = 4;$$
$$c_{21} = a_{21} + b_{21} = 0 + 5 = 5; \quad c_{22} = a_{22} + b_{22} = 2 + (-3) = -1; \quad c_{23} = a_{23} + b_{23} = 7 + (-1) = 6.$$

Следовательно, $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Произведением матрицы на число называется матрица той же размерности, что и исходная, все элементы которой равны элементам исходной матрицы, умноженным на данное число: $B = \lambda A$, $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n.$

Разность матриц $A - B$ можно определить так: $A - B = A + (-B)$.

Пример 1.2. Найти матрицу $2A - 3B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & 10 & 0 \end{pmatrix}, 3B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 6 & 3 & -12 \end{pmatrix},\ 2A - 3B = \begin{pmatrix} 6-3 & -2-9 & 8-6 \\ 4-6 & 10-3 & 0+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -11 & 2 \\ -2 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

Итак, $2A - 3B = \begin{pmatrix} 3 & -11 & 2 \\ -2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими **свойствами**:

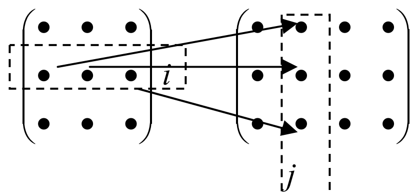
1. $A+B=B+A;$
2. $A+(B+C)=(A+B)+C;$
3. $A+O=A;$
4. $A - A=O;$
5. $1 \cdot A=A;$
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B;$
7. $(\alpha + \beta)\cdot A = \alpha A + \beta A;$
8. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta)\cdot A,$

где A, B, C – матрицы, α, β – числа.

2. Перемножение матриц

Произведением матрицы A размерности $m\times p$ и матрицы B размерности $p\times n$ называется матрица C размерности $m\times n$, каждый элемент которой c_{ij} определяется формулой: $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$. Таким образом, элемент c_{ij} представляет собой сумму произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Схема получения элемента c_{ij}:



Операция перемножения матриц некоммутативна, т.е. $AB\neq BA$. Действительно, если существует произведение AB, то BA может вообще не существовать из-за несовпадения размерностей. Если существуют и AB, и BA, то они могут иметь разные размерности (если $m\neq n$).

Для квадратных матриц одного порядка произведения AB и BA существуют и имеют одинаковую размерность, но их соответствующие элементы в общем случае не равны.

Пример 1.3. Выяснить, можно ли умножить друг на друга матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & -1\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 3 & -4\end{pmatrix}.$$

Если произведение существует, вычислить его.

Решение.

Сравним размерности матриц A и B: $A[3\times 2]$, $B[2\times 2]$. Произведение $AB[3\times 2]$ существует, а произведение BA – нет.

Найдем элементы AB:

$(ab)_{11} = 5\cdot(-2)+4\cdot 3=2$; $(ab)_{12}=5\cdot 5+4\cdot(-4)=9$; $(ab)_{21}=2\cdot(-2)+5\cdot 3=11$;
$(ab)_{22}=2\cdot 5-5\cdot 4=-10$; $(ab)_{31}=3\cdot(-2)-3\cdot 1=-9$; $(ab)_{32}=3\cdot 5-1\cdot(-4)=19$.

Таким образом, $AB=\begin{pmatrix}2 & 9\\ 11 & -10\\ -9 & 19\end{pmatrix}$, BA не существует.

Пример 1.4. Найти AB и BA, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Решение.
Проверим возможность перемножения матриц, определив их размерность. Имеем $A[2\times4]$, $B[4\times2]$. Следовательно, $n = l = 4$, $m = k = 2$, поэтому матрицы AB и BA существуют, причем $AB[2\times2]$, $BA[4\times4]$.
Для вычисления элементов матрицы $C = AB$ элементы строк матрицы A умножаются на соответствующие элементы столбцов матрицы B:

$$c_{11} = 2 \cdot 2 + (-2)(-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 9$$

(сумма произведений элементов первой строки А на элементы первого столбца В; первый индекс вычисляемого элемента задает номер строки А, второй индекс – номер столбца В);

$$c_{12} = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5;$$
$$c_{21} = -3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -9;$$
$$c_{22} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -3.$$

Следовательно,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

При вычислении элементов матрицы $D = BA$ элементы строк B умножаются на элементы столбцов A:

$d_{11} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0$; $d_{12} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -4$; $d_{13} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1$;
$d_{14} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$; $d_{21} = -1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = -2$; $d_{22} = -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 2$;
$d_{23} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -1$; $d_{24} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$; $d_{31} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1$;
$d_{32} = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -1$; $d_{33} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$; $d_{34} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$;
$d_{41} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -8$; $d_{42} = 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 0$; $d_{43} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -2$;
$d_{44} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4$.

Таким образом,

$$D = BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Определители

Определитель – число, характеризующее квадратную матрицу A. Определитель матрицы обозначается $det\, A$, $|A|$ или ΔA.

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$, или **определителем первого порядка,** называется элемент a_{11}: $\Delta_1 = |A| = a_{11}$.

Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол) вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.

Пример 1.5.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 5\cdot(-3) = 8 + 15 = 23.$$

Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для запоминания формулы можно использовать так называемое правило треугольников или правило Саррюса. Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «–», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пример 1.6.

Вычислить определитель

a) $A=(3)$, $\Delta_1 = 3$.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 3\cdot(-1) = 11.$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

Решение.

Вычислим определитель 3-го порядка, используя его определение:

$\Delta_3 = 2\cdot 0\cdot(-1) + (-3)\cdot(-4)\cdot 2 + 5\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 5 - 1\cdot(-4)\cdot 2 - (-1)\cdot 1\cdot(-3) =$

$= 0 + 24 + 5 - 0 + 8 - 3 = 34.$

Основные свойства определителей

1. Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. При умножении элементов строки определителя на некоторое число весь определитель умножается на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

4. Определитель, имеющий нулевую строку, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Определитель, имеющий две равные строки, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Определитель, две строки которого пропорциональны, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

7. При перестановке двух строк определитель меняет знак:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. «Элементарные преобразования определителя».
Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Разложение определителя по строке

Пусть дана квадратная матрица A n–го порядка.
Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n–го порядка называется определитель (n–1)-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит выбранный элемент.

Пример 1.7.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}, \quad a_{21} = -5, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8+3 = 11.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента определителя a_{ij} называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

При этом справедливо следующее утверждение: определитель равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{ij,} \text{ где } i=1,2,3.$$

Определитель матрицы n–го порядка равен сумме произведений всех элементов какой–нибудь фиксированной строки или столбца на их алгебраические дополнения, т.е.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Таким образом, для вычисления определителя достаточно найти алгебраические дополнения к элементам какой-либо строки или столбца и вычислить сумму их произведений на соответствующие элементы определителя.

Пример 1.8.

Вычислим определитель из примера 1.6.(с) с помощью разложения по строке. Для удобства вычисления выберем 2-ю строку, содержащую нулевой элемент ($a_{22} = 0$), поскольку при этом нет необходимости находить A_{22}, так как произведение $a_{22} \cdot A_{22} = 0$. Итак,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1) = 2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) = -8$$

(напомним, что определитель второго порядка, входящий в алгебраическое дополнение A_{ij}, получается вычеркиванием из исходного определителя i-й строки и j-го столбца).

Тогда $\Delta = a_{21} \cdot A_{21} + a_{23} \cdot A_{23} = 1 \cdot 2 + (-4)(-8) = 34$.

Определитель n-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

есть сумма $n!$ членов $(-1)^r a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}$, каждый из которых соответствует одному из $n!$ упорядоченных множеств $k_1, k_2, \ldots, k_n$, полученных r попарными перестановками элементов из множества $1, 2, \ldots, n$.

Свойства определителей 3-го порядка справедливы и для определителей n-го порядка.

На практике определители высоких порядков вычисляют с помощью разложения по строке или столбцу. Это позволяет понизить порядок вычисляемых определителей и в конечном счете свести задачу к нахождению определителей 3-го порядка.

Пример 1.9.

Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Преобразуем определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Для этого воспользуемся свойством 8. Его особенно удобно применять, если в определителе существует элемент равный ±1. Выберем в качестве такого элемента $a_{13} = 1$ и с его помощью обратим все остальные элементы 3-го столбца в нуль. С этой целью:

а) к элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки;

б) к элементам 3-й строки прибавим элементы 1-й строки, умноженные на (–2);

в) из элементов 4-й строки вычтем элементы 1-й строки

(напомним, что при этом величина определителя не изменится). Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по 3-му столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Прибавим к элементам 1-й строки нового определителя соответствующие элементы 2-й строки, умноженные на (–2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

и разложим этот определитель по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot (0 - 3 \cdot (-1)) = -9.$$

4. Обратная матрица

Квадратная матрица A называется **вырожденной**, если $\Delta_A = 0$, и **невырожденной**, если $\Delta_A \neq 0$.

Квадратная матрица B называется **обратной** к квадратной матрице A того же порядка, если $A \cdot B = B \cdot A = E$. При этом B обозначается A^{-1}.

Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы исходная матрица была невырожденной. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A}\widetilde{A}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

то есть ее элементами являются алгебраические дополнения к элементам транспонированной матрицы A, деленные на ее определитель.

Свойства обратной матрицы:

1) $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$;

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

3) $\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$;

4) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$

Пример 1.10.

Найти обратную матрицу для матрицы

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим определитель матрицы A: $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 2 \neq 0$, обратная матрица существует. Алгебраические дополнения: $A_{11} = 2,\ A_{12} = -4,\ A_{21} = -3,\ A_{22} = 7.$ Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -2 & 7/2 \end{pmatrix}..$$

Сделаем проверку и убедимся, что $A \cdot A^{-1} = E$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -2 & 7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-6 & -21/2 + 21/2 \\ 4-4 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим определитель матрицы A разложением по первому столбцу:

$$\Delta_A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Следовательно, обратная матрица для матрицы A существует. Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}3&-5\\0&1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}3&-5\\1&2\end{vmatrix}=11,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}0&2\\0&1\end{vmatrix}=0,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&-5\\0&1\end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&-5\\0&2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}=0,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&3\\0&0\end{vmatrix}=0,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}=1.$$

Значит,

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1&-3&11\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&11\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Проверка: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-3&11\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$

Алгоритм построения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк матрицы:

1. К данной матрице A приписать справа единичную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}a_{11}&\ldots&a_{1n}&1&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&\ldots&a_{nn}&0&\ldots&1\end{array}\right).$$

2. С помощью элементарных преобразований объединенной матрицы привести матрицу A к единичной матрице

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\ldots&0&b_{11}&\ldots&b_{1n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&\ldots&1&b_{n1}&\ldots&b_{nn}\end{array}\right).$$

3. Матрица A^{-1} имеет вид

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}b_{11}&\ldots&b_{1n}\\\ldots&\ldots&\ldots\\b_{n1}&\ldots&b_{nn}\end{pmatrix}.$$

Пример 1.11.
Найти матрицу, обратную к матрице

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}.$$

Решение.
Припишем к матрице A справа единичную матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3&1&1&0\\5&2&0&1\end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу A к единичной матрице

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3&1&1&0\\5&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{1\cdot(-2)+2}\left(\begin{array}{cc|cc}3&1&1&0\\-1&0&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{2\cdot(-1)}\left(\begin{array}{cc|cc}3&1&1&0\\1&0&2&-1\end{array}\right)\xrightarrow{1\leftrightarrow2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-1\\3&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{1\cdot(-3)+2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-1\\0&1&-5&3\end{array}\right)$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Ранг матрицы

Минором порядка *k* матрицы A называется определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых k строк и k столбцов данной матрицы. Таким образом, каждый элемент матрицы является ее минором 1-го порядка.
Ранг матрицы – это порядок ее наибольшего ненулевого минора. Обозначения: r(A), R(A), Rang (A), Rg(A).

Пример 1.12.

Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение.
Единственным минором максимального 3-го порядка для матрицы A является ее определитель. Если $\Delta_A \neq 0$, $r(A) = 3$; если $\Delta_A = 0$, $r(A) < 3$.
Найдем Δ_A разложением по первой строке:

$$\Delta_A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 5 - 15 = 0.$$

Следовательно, $r(A) < 3$. Поскольку матрица A содержит ненулевые элементы, $r(A) > 0$. Значит, $r(A) = 1$ или $r(A) = 2$. Если найдется минор 2-го порядка, не равный нулю, то $r(A) = 2$.
Вычислим минор из элементов, стоящих на пересечении двух первых строк и двух первых столбцов:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

Для матриц большой размерности непосредственное вычисление всех миноров затруднительно. Поэтому в этом случае можно преобразовать матрицу к так называемому треугольному виду (когда элементы, стоящие ниже a_{ii}, равны 0), воспользовавшись операциями, не изменяющими ранг матрицы –
эквивалентными преобразованиями:

1) транспонирование;
2) умножение строки на ненулевое число;
3) перестановка строк;
4) прибавление к элементам данной строки элементов любой другой строки, умноженных на ненулевое число;
5) вычеркивание нулевой строки.

Действительно, любая из этих операций переводит нулевые миноры в нулевые, а ненулевые – в ненулевые. Матрица, полученная в результате, не равна исходной, но имеет тот же ранг.

Пример 1.13.
Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение.
У матрицы A существуют миноры до 4-го порядка включительно, поэтому $r(A) \leq 4$. Разумеется, непосредственное вычисление всех миноров 4-го, 3-го и т.д. порядка потребовало бы слишком много времени. Поэтому, используя элементарные преобразования, приведем матрицу A к треугольному виду. Поменяем местами 1-ю и 2-ю строки, чтобы элемент a_{11} стал равным 1:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке первую, ко второй – удвоенную первую, к четвертой – первую, умноженную на 3. Тогда все элементы 1-го столбца, кроме a_{11}, окажутся равными нулю:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вычтем вторую строку полученной матрицы из третьей и четвертой строк:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и вычеркнем нулевые строки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы A равен рангу полученной матрицы размера $2{\times}6$, т.е. $r(A) \leq 2$. Минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

следовательно, $r(A) = 2$.

II. Системы линейных уравнений

Линейным уравнением называется уравнение вида

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b,$$

где x_i - неизвестные, a_i и b – числа. Таким образом, в левой части линейного уравнения стоит линейная комбинация неизвестных, а в правой – число.

Линейное уравнение называется **однородным**, если $b = 0$. В противном случае уравнение называется **неоднородным.**

Системой линейных уравнений (линейной системой) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где числа a_{ij} $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ называются **коэффициентами** системы, числа b_i – **свободными членами**, x_j - неизвестные, n – число неизвестных, m – число уравнений.

Решением линейной системы называется набор чисел $x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}$, которые при подстановке вместо неизвестных обращают каждое уравнение системы в верное равенство.

Линейная система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений.

Совместная линейная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Систему (1) можно записать в **матричной форме**

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}.$$

Здесь A – матрица коэффициентов, X – вектор–столбец из неизвестных x_j, B – вектор–столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Система линейных уравнений называется однородной, если все свободные члены равны нулю, т.е. $\mathrm{B} = 0\ (b_i = 0,\ i = \overline{1,m})$**.** Однородная система всегда совместна, т.к. $X = 0\ (x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0)$ является решением системы. Это решение называется **нулевым** или **тривиальным**.

1. Формулы Крамера

Рассмотрим линейную систему, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2)$$

Назовем **главным определителем** такой системы определитель Δ, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

а определителем Δ_{j} - определитель, полученный из (3) заменой столбца коэффициентов при x_j на столбец свободных членов. Тогда:

1) Если $\Delta \neq 0,$ система (2) имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \dfrac{\Delta_{\mathrm{n}}}{\Delta}.$
2) Если $\Delta = \Delta_{x_j} = 0$, система имеет бесконечно много решений.
3) Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из $\Delta_{x_j} \neq 0,$ система не имеет решений.

Пример 2.1.

Решить систему по правилу Крамера: $\begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \end{cases}.$

Решение.

Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

Найдем Δ_x, Δ_y и Δ_z:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

Отсюда $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{9}{9} = 1, \quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{36}{9} = 4, \quad \Delta_z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{18}{9} = 2.$

2. Метод Гаусса

Пусть в системе (1) $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться, поменяв уравнения местами). Исключим неизвестное x_1 из всех уравнений системы, кроме первого. Для этого используем элементарные преобразования системы: умножим обе части первого уравнения на $\frac{-a_{21}}{a_{11}}$ и прибавим это уравнение ко второму уравнению системы (1). Затем умножим обе части первого уравнения на $\frac{-a_{31}}{a_{11}}$ и сложим почленно с третьим уравнением системы. Аналогичными преобразованиями (умножая первое уравнение на $\frac{-a_{i1}}{a_{11}}$ и прибавляя его к уравнению с номером *i*) сведем исходную систему к равносильной системе. Коэффициенты при x_1 во всех уравнениях этой системы, начиная со второго, будут равны 0, т.е. система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad \tilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \tilde{a}_{m2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_m. \end{cases}$$

Если новые коэффициенты при x_2 не все равны нулю, можно таким же образом исключить x_2 из третьего и последующих уравнений. Продолжая эту операцию для следующих неизвестных, приведем систему к так называемому треугольному виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad \tilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \tilde{\tilde{a}}_{mn}x_n = \tilde{\tilde{b}}_n. \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь символами $\tilde{a}_{ij}, \tilde{\tilde{a}}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{\tilde{b}}_i$ обозначены изменившиеся в результате преобразований числовые коэффициенты и свободные члены.

Из последнего уравнения системы (4) единственным образом определяется $x_n = \frac{\tilde{\tilde{b}}_n}{\tilde{\tilde{a}}_{mn}}$, а затем последовательной подстановкой – остальные неизвестные.

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования с матрицей коэффициентов, а не с самими уравнениями. Матрица, соответствующая системе уравнений (1), имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

и называется **расширенной матрицей системы** (1), т.к. в нее дополнительно включен столбец свободных членов.

Пример 2.2.

Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} 3x - y + 2z = 9, \\ x + 4y + z = 4, \\ 2x - 3y + 3z = 11. \end{cases}$

Решение.
Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для удобства его применения поменяем местами 1-е и 2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при x равнялся единице, т.е. меняем первую и вторую строки матрицы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

Теперь исключим x из второго и третьего уравнений. Для этого вычтем умножим первую строку матрицы на (–3) и прибавим ее почленно ко второй строке; затем умножим первую строку на (–2) и прибавим ее к третьей строке матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[1\cdot(-2)+3]{1\cdot(-3)+2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -13 & -1 & -3 \\ 0 & -11 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Полученная матрица соответствует системе уравнений вида

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4, \\ -13y - z = -3, \\ -11y + z = 3. \end{cases}$$

Далее можно легко исключить z из первого и третьего уравнения

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -13 & -1 & -3 \\ 0 & -11 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[2+3]{2+1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & 0 & 1 \\ 0 & -13 & -1 & -3 \\ 0 & -24 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

что соответствует системе $\begin{cases} x - 9y = 1, \\ -13y - z = -3, \\ -24y = 0. \end{cases}$

Из последнего уравнения получаем, что $y = 0$. Подставляя это значение в первое и второе уравнения, находим остальные неизвестные: $x = 1$, $z = 3$.
Или

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & 0 & 1 \\ 0 & -13 & -1 & -3 \\ 0 & -24 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3\cdot\left(\frac{-1}{24}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & 0 & 1 \\ 0 & -13 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3\cdot(13)+2]{3\cdot(9)+1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2\leftrightarrow 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Итак, $x = 1, y = 0, z = 3$.

3. Решение линейной системы с помощью обратной матрицы

Рассмотрим линейную систему (1), запишем ее в виде матричного уравнения:

$$AX = B. \tag{5}$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$

Пусть матрица A – невырожденная, тогда существует обратная к ней матрица A^{-1}.
Умножим обе части равенства (5) слева на A^{-1}. Получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Но $A^{-1}A = E,$ тогда $EX = A^{-1}B$, а поскольку $EX = X$, $X = A^{-1}B.$

Итак**,** решением матричного уравнения (5) является произведение матрицы, обратной к A, на столбец свободных членов системы (1).

Решениями уравнений

$$\mathrm{AX = C}, \quad \mathrm{XB = C}, \quad \mathrm{AXB = C}$$

являются соответственно матрицы

$$X = A^{-1}C, \quad X = CB^{-1}, \quad X = A^{-1}CB^{-1},$$

если A и B имеют обратные матрицы.

Пример 2.3.

Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 2x + y - z = 6, \\ 5x - 4y - 7z = 4. \end{cases}$$

Решение.

Составим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Δ_A = -51 ≠ 0, следовательно, система имеет единственное решение. Найдем матрицу A^{-1}:

$$A_{11} = -11, \quad A_{21} = -25, \quad A_{31} = 2,$$
$$A_{12} = 9, \quad A_{22} = -12, \quad A_{32} = 3,$$
$$A_{13} = -13, \quad A_{23} = -11, \quad A_{33} = 7.$$

Тогда $A^{-1} = -\dfrac{1}{51}\begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$

Если $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, то исходная система превращается в матричное уравнение $AX=B$, решение которого $X = A^{-1}B$. Следовательно,

$$X = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11-150+8 \\ 9-72+12 \\ -13-66+28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -153 \\ -51 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$.

4. Решение системы линейных однородных уравнений

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Очевидно, что такая система всегда совместна, поскольку имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$ называемое тривиальным. Матрицей системы (6) называется матрица вида

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Пусть ранг матрицы системы $r < n$. Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ коэффициенты, которые входят в базисный минор матрицы системы, называются **базисными неизвестными**, а остальные ($x_{r+1}, \ldots, x_n$) – **свободными неизвестными.** Число линейно независимых решений системы (6) равно $n - r$. При этом любые $n - r$ линейно независимых решений системы (6) называются ее **фундаментальной системой** решений, а любое решение однородной линейной системы (6) является линейной комбинацией фундаментальной системы ее решений, то есть $X = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_{n-r}X_{n-r}$, где $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ - фундаментальная система решений.

Пример 2.4.
Найти фундаментальную систему решений однородной линейной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Найдем $r(A)$: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Выберем в качестве базисного минора $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$.

Значит, $r(A) = 2$. Пусть x_4, x_5 – базисные неизвестные, x_1, x_2, x_3 – свободные неизвестные. Запишем для них новую систему:

$$\begin{cases} 4x_4 - x_5 = -2x_1 + x_2 - 3x_3, \\ 5x_4 = -x_1 + 6x_2 - 4x_3, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} x_4 = \dfrac{-x_1 + 6x_2 - 4x_3}{5}, \\ x_5 = \dfrac{6x_1 + 19x_2 - x_3}{5}. \end{cases}$

Фундаментальная система решений состоит из трех столбцов. Рассмотрим три набора значений свободных неизвестных:

1) $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$.

Тогда $x_4 = -0{,}2$, $x_5 = 1{,}2$, и решение можно записать в виде столбца $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}2 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$.

2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

При этом $x_4 = 1{,}2$, $x_5 = 3{,}8$, и следующее решение системы имеет вид $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1{,}2 \\ 3{,}8 \end{pmatrix}$.

3) $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Отсюда $x_4 = -0{,}8$, $x_5 = -0{,}2$, и последний столбец $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0{,}8 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$.

Фундаментальная система решений, построенная при таком выборе свободных неизвестных, называется **нормальной**. Поскольку столбцы свободных неизвестных

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ линейно независимы, это гарантирует линейную независимость решений X_1, X_2, X_3. Итак, в качестве фундаментальной системы решений можно выбрать

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-0{,}2\\1{,}2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1{,}2\\3{,}8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-0{,}8\\-0{,}2\end{pmatrix}.$$

При этом любое решение данной системы имеет вид: $X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$, где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные. Эта формула задает общее решение системы.

5. Структура общего решения неоднородной линейной системы

Рассмотрим неоднородную линейную систему (1). Такая система будет совместной, если ранг матрицы системы (7) равен рангу расширенной матрицы, то есть матрицы системы, к которой добавлен столбец свободных членов:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ее общее решение можно получить, выражая базисные неизвестные через свободные, т.е. решая систему относительно базисных неизвестных (такая система всегда определена, что следует из правила Крамера).

Пример 2.5.

Найти общее решение и одно из частных решений линейной системы

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 5, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 4. \end{cases}$$

Решение.

Найдем $r(A)$ и $r(A_1)$:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 8 & -1 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 15 & -21 & 33 & -39 & -36 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \end{array}\right).$$

Итак, $r = r(A) = r(A_1) = 2$, а число неизвестных $n = 5$. Следовательно, $r < n$, и система имеет бесконечно много решений (совместна, но не определена).

Число базисных неизвестных равно r, то есть двум. Выберем в качестве базисных неизвестных x_1 и x_2, коэффициенты при которых входят в базисный минор преобразованной матрицы A: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$. Соответственно x_3, x_4, x_5 – свободные неизвестные. Запишем систему, равносильную исходной, коэффициентами в которой являются элементы полученной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 5, \\ 5x_2 - 7x_3 + 11x_4 - 13x_5 = -12 \end{cases}$$

и выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 1}{5}, \\ x_2 = \dfrac{7x_3 - 11x_4 + 13x_5 - 12}{5}. \end{cases}$$

Получено общее решение системы. Одно из частных решений можно найти, положив все свободные неизвестные равными нулю: $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Тогда

$$x_1 = -\frac{1}{5},\ \ x_2 = -\frac{12}{5}.$$

Таким образом, общее решение – $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 1}{5}, \\ x_2 = \dfrac{7x_3 - 11x_4 + 13x_5 - 12}{5}; \end{cases}$

частное решение – $x_1 = -\dfrac{1}{5},\ x_2 = -\dfrac{12}{5},\ x_3 = x_4 = x_5 = 0.$

Другая возможность получить общее решение неоднородной системы заключается в предварительном нахождении общего решения соответствующей однородной системы. При этом искомое общее решение представляет собой сумму общего решения соответствующей однородной системы (6) и частного решения системы (2).

Пример 2.6.

Найти общее решение неоднородной линейной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5, \end{cases}$$

с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Решение. Убедимся в том, что система совместна:

$$A_1=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&2\\2&-1&3&-4&5&3\\3&0&4&-3&6&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&2\\3&0&4&-3&6&5\\3&0&4&-3&6&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&2\\3&0&4&-3&6&5\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&2\\3&0&4&-3&6&5\end{array}\right).$$

Итак, $r(A)=r(A_1)=2$ – система совместна.

Составим по преобразованной матрице однородную систему:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0,\\3x_1+4x_3-3x_4+6x_5=0\end{cases}$$

и найдем для нее фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-x_3-x_4-x_5\\3x_1=-4x_3+3x_4-6x_5\end{cases},\quad\begin{cases}x_1=\dfrac{-4x_3+3x_4-6x_5}{3}\\x_2=\dfrac{x_3-6x_4+3x_5}{3}\end{cases}.$$

Фундаментальная система решений может быть выбрана так:

$$X_1=\begin{pmatrix}-4\\1\\3\\0\\0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Теперь найдем какое-нибудь частное решение неоднородной системы

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2,\\3x_1+4x_3-3x_4+6x_5=5.\end{cases}$$

Положим $x_3=x_4=x_5=0$, тогда $x_1=\dfrac{5}{3},\ x_2=\dfrac{1}{3}$. Следовательно, $X_{частн}=\begin{pmatrix}5/3\\1/3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$,

и общее решение системы имеет вид: $X=c_1\begin{pmatrix}-4\\1\\3\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5/3\\1/3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$,

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин, В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1999.
2. Бутузов, В.Ф. Линейная алгебра в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, А.А. Шишкин. – М.: Физматлит, 2001.
3. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. – М.: Наука, 1984.
4. Ермаков, В.И. Сборник задач по высшей математике / В.И. Ермаков, Р.К. Бобрик и др. – М.: ИНФРА–М, 2004.
5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова – М.: Высшая школа, 1996. – Т.1.
6. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов. Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – М.: ЮНИТИ, 2000.
7. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. – М.: Наука. 1978.
8. Фадеев Д.К. Сборник задач по линейной алгебре / Д.К. Фадеев, И.С. Соминский. – Лань, 2004.

Варианты заданий

Задание 1

Вычислить определитель

$$1.\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&7&10\\3&5&11&0\\2&-7&7&7\end{pmatrix}\quad 2.\begin{pmatrix}3&6&5&0\\5&9&7&6\\6&12&13&7\\4&6&6&4\end{pmatrix}\quad 3.\begin{pmatrix}2&1&1&2\\0&1&-2&1\\2&3&1&2\\1&5&1&-1\end{pmatrix}\quad 4.\begin{pmatrix}1&3&5&4\\5&2&1&8\\4&0&-1&5\\5&3&0&7\end{pmatrix}$$

$$5.\begin{pmatrix}-2&3&0&-1\\1&1&3&10\\3&2&0&5\\2&8&-4&-3\end{pmatrix}\quad 6.\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&2&3\\3&2&1&2\\4&3&0&1\end{pmatrix}\quad 7.\begin{pmatrix}-4&1&0&-2\\-4&4&2&-11\\2&-3&1&-3\\-1&-1&2&-1\end{pmatrix}\quad 8.\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&0\end{pmatrix}$$

$$9.\begin{pmatrix}5&5&4&8\\3&4&5&2\\1&5&2&0\\5&11&2&11\end{pmatrix}\quad 10.\begin{pmatrix}7&2&0&3\\8&2&3&3\\10&2&5&3\\6&3&2&4\end{pmatrix}\quad 11.\begin{pmatrix}8&3&4&0\\4&3&8&6\\3&1&3&5\\8&5&2&6\end{pmatrix}\quad 12.\begin{pmatrix}2&0&3&-5\\4&-2&7&-7\\-6&4&-9&3\\3&-2&4&-2\end{pmatrix}$$

$$13.\begin{pmatrix}5&-5&-3&0\\-4&4&3&4\\3&-1&5&1\\0&7&5&63\end{pmatrix}\quad 14.\begin{pmatrix}2&3&2&2\\7&5&-1&1\\-5&-3&0&3\\4&2&-4&5\end{pmatrix}\quad 15.\begin{pmatrix}1&0&-3&2\\-3&-4&2&3\\-3&2&3&-2\\-1&-8&4&6\end{pmatrix}$$

$$16.\begin{pmatrix}5&-4&6&1\\2&0&8&2\\-5&-3&-2&5\\4&4&5&1\end{pmatrix}\quad 17.\begin{pmatrix}3&-3&2&2\\-5&5&7&3\\-1&-3&1&-5\\7&0&2&-2\end{pmatrix}\quad 18.\begin{pmatrix}4&1&0&1\\10&2&1&1\\13&1&2&1\\7&2&3&1\end{pmatrix}$$

19. $\begin{pmatrix} 13 & 1 & -1 & 2 \\ 13 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 21. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 11 \\ 1 & 4 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 3 & 12 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 22. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 25. $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 0 \\ 6 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Задание 2

Для заданных матриц A и B вычислить матричный многочлен $A^2 - BA + \mathrm{N}A$, где N – номер варианта (задания).

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. 4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. 6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. 10. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти произведение матриц A и B: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k_1 & 2 & -1 \\ -1 & k_2 & 3 \\ -2 & 4 & k_3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

11. $k_1 = -5,\ k_2 = 7,\ k_3 = 1$. 12. $k_1 = 2,\ k_2 = 5,\ k_3 = -3$. 13. $k_1 = -2,\ k_2 = 3,\ k_3 = 1$.

14. $k_1 = 4,\ k_2 = 3,\ k_3 = -3$. 15. $k_1 = 2,\ k_2 = 3,\ k_3 = -2$. 16. $k_1 = 4,\ k_2 = -4,\ k_3 = -3$.

17. $k_1 = -1,\ k_2 = -2,\ k_3 = 3$. 18. $k_1 = 2,\ k_2 = -4,\ k_3 = 1$. 19. $k_1 = 3,\ k_2 = -5,\ k_3 = 2$.

20. $k_1 = 5,\ k_2 = 2,\ k_3 = -3$. 21. $k_1 = 1,\ k_2 = 3,\ k_3 = -1$. 22. $k_1 = 2,\ k_2 = 2,\ k_3 = -1$.

23. $k_1 = 3,\ k_2 = -4,\ k_3 = 5$. 24. $k_1 = 2,\ k_2 = -3,\ k_3 = 1$. 25. $k_1 = 3,\ k_2 = 4,\ k_3 = 1$.

Задание 3
Дана матрица A. Найти матрицу A^{-1} и установить, что $AA^{-1}=E$.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 17 & 10 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ 13. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ 16. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 21. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 22. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 25. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Задание 4
Найти ранг матрицы

1. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -9 & 8 \\ 5 & 18 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -3 & 10 \\ 17 & 1 & -7 & 22 \\ 3 & 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 16 & 4 & 52 & 9 \\ 8 & -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. 7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 10. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -6 & 1 \\ -3 & -1 & -8 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$. 13. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 16. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 5 & -20 \\ -4 & -2 & 1 & -18 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 9 & 3 & -9 & -24 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. 19. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. 22. $\begin{pmatrix} 8 & -7 & 10 & 18 & 17 \\ 3 & 4 & 9 & -10 & 7 \\ 2 & -5 & 7 & -10 & 11 \\ 9 & 8 & 4 & -7 & 2 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. 25. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Задание 5

Решить систему уравнений

1. $\begin{cases} x+2y-2z=5 \\ 4x-y+10z=11 \\ 5x+3y-5z=9 \end{cases}$. 2. $\begin{cases} x-3z+4t=-4 \\ 2x+y+10z-15t=10 \\ 2y+3z-6t=7 \\ 3x+4y-z+2t=4 \end{cases}$. 3. $\begin{cases} 2x-y+5t=6 \\ 3x+2y-z=3 \\ -x+2y+4z+t=10 \\ -y-z+3t=0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 4x+4y-5z=-2 \\ 3x+2y+z=7 \\ x-y+10z=20 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} 2x+3y-4z+5t=3 \\ -y-t=-1 \\ x-3z+8t=-1 \\ x+2y-4z+3t=0 \end{cases}$. 6. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-3x_4=4 \\ -x_1+2x_2-x_3+4x_4=1 \\ 2x_1+x_2-2x_3+4x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=7 \end{cases}$. 7. $\begin{cases} 7x-2y+4z=13 \\ 2x+2y-z=2 \\ 3x-y+z=0 \end{cases}$. 8. $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-2z=-1 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} 2x+3y-4z+5t=3 \\ -y-t=-1 \\ x-3z+8t=-1 \\ x+2y-4z+3t=0 \end{cases}$. 10. $\begin{cases} x-2y+z+3t=-6 \\ -10z+2t=-2 \\ 2x+2y-5z-2t=8 \\ x+y-z=3 \end{cases}$. 11. $\begin{cases} x-z=-2 \\ 2x-y-z=4 \\ y-z=-6 \end{cases}$. 12. $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=4 \\ x+z=6 \end{cases}$.

13. $\begin{cases} 2x-y+5t=6 \\ 3x+2y-z=3 \\ -x+2y+4z+t=10 \\ -y-z+3t=0 \end{cases}$. 14. $\begin{cases} x-y-z=1 \\ 2x+2y-z=2 \\ -y+4z=0 \end{cases}$. 15. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-2y+3z=3 \\ 4x-y=0 \end{cases}$. 16. $\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ 4x+y+5z=10 \\ -x+10y-z=8 \end{cases}$.

17. $\begin{cases} 12x_1+13x_2-10x_3-11x_4=6 \\ 10x_1-5x_2+7x_3-3x_4=1 \\ 11x_1-5x_2+10x_3-5x_4=1 \\ 7x_1+x_2-6x_3+2x_4=7 \end{cases}$. 18. $\begin{cases} x-2y+5z=20 \\ 3x+4y+4z=-13 \\ x+2y+z=-8 \end{cases}$. 19. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-2y+3z=3 \\ 4x-y=0 \end{cases}$.

20. $\begin{cases} 8x-7y+10z-18t=17 \\ 3x+4y+9z-10t=7 \\ 2x-5y+7z-10t=11 \\ 9x+8y+4z-7t=2 \end{cases}$. 21. $\begin{cases} x-3z+4t=-4 \\ 2x+y+10z-15t=10 \\ 2y+3z-6t=7 \\ 3x+4y-z+2t=4 \end{cases}$. 22. $\begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ 2x+3y-4z=3 \\ -x+2y-2z=1 \end{cases}$.

23. $\begin{cases} x+2y-4z=-9 \\ -x-3y+6z=13 \\ 2x+5y-z=-4 \end{cases}$. 24. $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+2y-z=2 \\ 2x+z=0 \end{cases}$. 25. $\begin{cases} x-2y+3z=-2 \\ -4x+5y+6z=-10 \\ x-y+z=0 \end{cases}$.

Задание 6

Решить систему уравнений

1. $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+2y-3z=1 \\ 5x+y-6z=5 \end{cases}$. 2. $\begin{cases} 3x+2y-z=4 \\ 6x+2y-3z=5 \\ 9x+4y-4z=9 \end{cases}$. 3. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3-2x_4-x_5=2 \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4-2x_5=-1 \\ x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1 \\ 2x_1-3x_2+x_3-2x_4-3x_5=2 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y-3z=3 \\ -x-2y+3z=0 \end{cases}$. 5. $\begin{cases} x+3y-z=4 \\ x+2y+z=1 \\ x+4y-3z=7 \end{cases}$. 6. $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+2y-3z=1 \\ 5x+y-6z=5 \\ 3x-y-2z=3 \end{cases}$. 7. $\begin{cases} x-3y+2z=2 \\ x+y-5z=7 \\ 3x-y-8z=16 \end{cases}$.

8. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3-2x_4-x_5=2 \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4-2x_5=-1 \\ x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1 \\ 2x_1-3x_2+x_3-2x_4-3x_5=2 \end{cases}$. 9. $\begin{cases} 2x+y-3z=5 \\ x-y+2z-2t=-4 \\ 2y-z-t=3 \end{cases}$. 10. $\begin{cases} x-2y-z=2 \\ -2x+4y+2z=-4 \end{cases}$.

11. $\begin{cases} 2x+y-5z-t=2 \\ x-2y+2t=1 \\ -x+3y-z-3t=-1 \\ x-y-z+t=1 \end{cases}$. 12. $\begin{cases} 4x-y+z=1 \\ -3x+2y+5z=-20 \\ -4x-2y+z=-18 \end{cases}$. 13. $\begin{cases} 12x_1+14x_2-15x_3+24x_4+27x_5=5 \\ 16x_1+18x_2-22x_3+29x_4+37x_5=8 \\ 18x_1+20x_2-21x_3+32x_4+41x_5=9 \\ 10x_1+12x_2-16x_3+20x_4+23x_5=4 \end{cases}$.

14. $\begin{cases} 5x+y-4z=2 \\ x+2y-z=1 \\ 3x-3y-2z=0 \end{cases}$. 15. $\begin{cases} 2x+y-5z-t=2 \\ x-2y+2t=1 \\ -x+3y-z-3t=-1 \\ z-y-z+t=1 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x+2y-z-2t=5 \\ -2x-y+2z+t=-4 \\ -x+y+z-t=1 \\ x-y-z+t=-1 \end{cases}$.

17. $\begin{cases} 2x+y-5z-t=2 \\ x-2y+2t=1 \\ -x+3y-z-3t=-1 \\ x-y-z+t=1 \end{cases}$. 18. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1 \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2 \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1 \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=2 \end{cases}$. 19. $\begin{cases} 2x+y-5z-t=2 \\ x-2y+2t=1 \\ -x+3y-z-3t=-1 \\ x-y-z+t=1 \end{cases}$.

20. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-2x_4=5 \\ -2x_1-x_2+2x_3+x_4=-4 \\ -x_1+x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=-1 \end{cases}$ 21. $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3-x_4=2 \\ x_1-2x_2+2x_4=1 \\ -x_1+3x_2-x_3-3x_4=-1 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=1 \end{cases}$ 22. $\begin{cases} 5x_1+x_2-8x_3+10x_4=-5 \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=1 \\ -3x_1-2x_2+2x_3+x_4=-4 \\ x_1+2x_2+2x_3-7x_4=8 \end{cases}$.

23. $\begin{cases} 2x+y-5z-t=2 \\ x-2y+2t=1 \\ -x+3y-z-3t=-1 \\ x-y-z+t=1 \end{cases}$. 24. $\begin{cases} -3x+y+z+8t=14 \\ 2x+7y+30z-36t=29 \\ -5x-2y-13z+28t=5 \end{cases}$. 25. $\begin{cases} x+2y-z-2t=5 \\ -2x-y+2z+t=-4 \\ -x+y+z-t=1 \\ x-y-z+t=-1 \end{cases}$.

Задание 7

Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы однородных уравнений

1. $\begin{cases} 5x_1+2x_2+2x_3+12x_4-43x_5=0 \\ x_1-x_2+x_3-4x_4-4x_5=0 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+30x_4-22x_5=0 \\ 6x_1+x_2+x_3+20x_4-39x_5=0 \end{cases}$. 2. $\begin{cases} -3x_1+2x_2+2x_3+5x_4=0 \\ -4x_1-x_2-x_3+3x_4=0 \\ x_1+5x_2+x_3-12x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+7x_3+20x_4=0 \end{cases}$. 3. $\begin{cases} 3x_1-x_2-15x_3+4x_4=0 \\ x_1+2x_2+2x_3+13x_4=0 \\ 3x_2+2x_2-6x_3+19x_4=0 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} 9x_1+3x_2-9x_3-24x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3=0 \\ 2x_1+2x_2-2x_3-8x_4=0 \\ -x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases}$. 5. $\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3+3x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+4x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-17x_3-13x_4=0 \end{cases}$. 6. $\begin{cases} x+2y-3z+t=0 \\ 2x-y-z-3t=0 \\ 4x+y-5z-3t=0 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} 4x_1+x_2-24x_3-15x_4=0 \\ 2x_1-x_2-6x_3-3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-14x_3-9x_4=0 \\ x_1+6x_2-29x_3-21x_4=0 \end{cases}$. 8. $\begin{cases} 5x_1+x_2-8x_3-10x_4=0 \\ x_1+3x_2+4x_3+12x_4=0 \\ 3x_1+x_2-4x_3-4x_4=0 \end{cases}$. 9. $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+x_4-6x_5=0 \\ 2x_1+2x_2-3x_3+2x_4+25x_5=0 \\ -5x_1-x_2-x_3-x_4+16x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+3x_4+12x_5=0 \end{cases}$.

10. $\begin{cases} x_1+6x_2+x_3+x_4+25x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1+x_2+x_3+x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+3x_4-6x_5=0 \end{cases}$. 11. $\begin{cases} x_1+6x_2+x_3+x_4+25x_5=0 \\ 2x_1+2x_2-3x_3+2x_4+5x_5=0 \\ x_1-x_2-x_3-x_4+10x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3-3x_4-7x_5=0 \\ x_1+4x_2+x_3+12x_4+2x_5=0 \\ 3x_1+3x_2+x_3+6x_4-10x_5=0 \\ 3x_1+x_2+x_3-2x_4-14x_5=0 \end{cases}$. 13. $\begin{cases} x+2y-3z+t=0 \\ 2x-y-z-3t=0 \\ 4x+y-5z-3t=0 \end{cases}$. 14. $\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3-3x_4-7x_5=0 \\ x_1+4x_2+x_3+12x_4+2x_5=0 \\ 3x_1+3x_2+x_3+6x_4-10x_5=0 \\ 3x_1+x_2+x_3-2x_4-14x_5=0 \end{cases}$.

15. $\begin{cases} -x_1+2x_2+2x_3+12x_4+7x_5=0 \\ x_1-3x_2+x_3+12x_4+4x_5=0 \\ 3x_1+3x_2+2x_3-7x_4+20x_5=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-4x_4+11x_5=0 \end{cases}$. 16. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-10x_4+7x_5=0 \\ x_1-3x_2+x_3+16x_4-11x_5=0 \\ 3x_1+3x_2+7x_3+36x_4+47x_5=0 \\ 3x_1-x_2-x_3-20x_4-13x_5=0 \end{cases}$.

17. $\begin{cases} 4x+y+17z+t=0 \\ x+3y+7z-8t=0 \\ x-2y+2z+7t=0 \end{cases}$. 18. $\begin{cases} 2x-y+z-t=0 \\ x-y-z+2t=0 \\ x-2y-4z+7t=0 \end{cases}$. 19. $\begin{cases} 2x-y+13z+11t=0 \\ x-y+9z+8t=0 \\ 2x+y+3z+t=0 \end{cases}$.

20. $\begin{cases} 3x+y-17z-8t=0 \\ 2x+y-12z-5t=0 \\ 3x+2y-19z-7t=0 \end{cases}$. 21. $\begin{cases} 4x+3y-7z-t=0 \\ -2x-y+3z+t=0 \\ 3x+y-4z-2t=0 \end{cases}$. 22. $\begin{cases} 6x+y+34z+32t=0 \\ 2x+5y+30z+20t=0 \\ x-2y-3z+t=0 \end{cases}$.

23. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0 \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0 \end{cases}$. 24. $\begin{cases} 5x_1+x_2-23x_3+16x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3+2x_4=0 \\ 6x_1-24x_3+18x_4=0 \end{cases}$. 25. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1+3x_2+x_3-x_4=0 \\ -x_1+x_2+3x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$.

Задание 8

1. Как изменится определитель n–го порядка, если его подвергнуть следующему преобразованию: у каждого элемента изменить знак на противоположный.
2. Как изменится определитель n–го порядка, если его подвергнуть следующему преобразованию: первый столбец переставить на последнее место.
3. Как изменится определитель n–го порядка, если его подвергнуть следующему преобразованию: строки определителя записать в обратном порядке.
4. Как изменится определитель n–го порядка, если его подвергнуть следующему преобразованию: к каждой строке, кроме последней, прибавить последующую строку.
5. Доказать, что определитель, у которого какая–либо строка состоит из нулей, равен нулю.
6. Доказать, что определитель с двумя пропорциональными строками равен нулю.
7. Доказать, что при перестановке двух строк определитель умножается на –1.
8. Используя только свойства определителя, показать, что данный определитель равен нулю $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2x+3y+4 \\ 5 & 6 & 7 & 5x+6y+7 \\ 8 & 9 & 10 & 8x+9y+10 \\ 11 & 12 & 13 & 11x+12y+13 \end{vmatrix}$.
9. Используя только свойства определителя, показать, что данный определитель равен

нулю $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x & 2 & 4 \\ 1+x & 1-x & 3 & 9 \\ 1+x & 1-x & 4 & 16 \\ 1+x & 1-x & 5 & 25 \end{vmatrix}$.

10. Как изменится произведение AB матриц A и B, если переставит i–ю и j–ю строки матрицы A.

11. Как изменится произведение AB матриц A и B, если к i–й строке матрицы A прибавить j–ю строку, умноженную на число k.

12. Как изменится произведение AB матриц A и B, если переставить i-й и j–й столбцы матрицы B.

13. Как изменится произведение AB матриц A и B, если к i-му столбцу матрицы B прибавить j-q столбец, умноженный на число k.

14. Доказать, что если A – невырожденная матрица, то из $A^2=A$ следует $A=E$.

15. Доказать, что если A – невырожденная матрица, то из $A^2=E$ следует $A=A^{-1}$.

16. Найти решение системы уравнений в зависимости от параметра a

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1. \end{cases}$$

17. Найти решение системы уравнений в зависимости от параметра a

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = a^2. \end{cases}$$

18. Найти решение системы уравнений в зависимости от параметра a

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \end{cases}$$

19. При каких значениях λ матрица A не имеет обратной $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

20. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

21. Решить матричное уравнение $\mathrm{X} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

22. Решить матричное уравнение $\mathrm{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

23. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

24. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

25. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Содержание