

# Некоторые задачи

Резюме 17  
11/III-76.

## ЭОРО-и-аэроупругости. и динам. уги.

---

Лит-ра Я.И. Фолч "Введение в теорию  
"аэроупругости" 1959

Р.А. Биешинг Хордф "р" "Аэроупругость"  
С.Н. Кан 1958 г.

И.А. Свердлов "Расчет самолета на  
"прочность" 1966

Е.Н. Мнев "Аэроупругость" 1970.

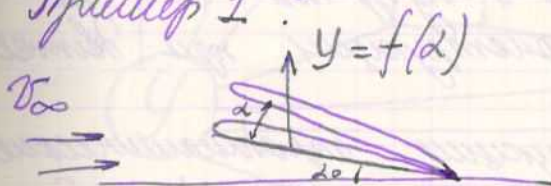
Обычно постановка задач в теории аэроупругости механики состоит в том, что в одних задачах внешняя нагрузка задана. При этом учитывается, что все упругие деформации (перемещения, напряжения, деформации) зависят от нагрузки, но сами на нагрузку не влияют. Такого типа задачи сейчас решаются конечноэлементными.

Существуют обширные классы задач, где хотя бы частично заданы внешние нагрузки и перемещения, т.е. задачи, в которых нагрузки зависят от деформаций конструкции. Такие нагрузки как бы следуют за изменением формы и

напомне-е шведешог. Я много рода задачки  
маз-еи немасеи-ми задачки.

Аэро-гидроупругость - это  
наука, изучающая внешние аэродинамич.  
и гидродинамич. сил на упругие - деформиру-  
емые тела упрочных конструкций.

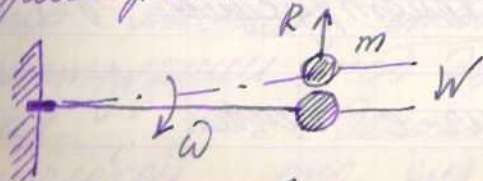
Пример 1.



Аэро-  
гидроупругость

Я.к. крыло имеет конечную жесткость на  
кручение, то под действием сил возмущения закру-  
чивание  $\Delta \alpha$  крыла приводит к увеличению  
 $\bar{y}$  на  $\Delta \bar{y}$ . Это в свою очередь приводит  
еще к большому увеличению угла атаки и т.д.  
Т.е. возможно падение скорости движения  
крыла, при кот. произойдет разрушение крыла  
либо введение чрезмерных деформаций,  
либо введение потерь устойчивости  
крыла при закручивании.

Пример 2.



вал вращ-ся вокруг  
оси с грузом на конце

центр ос-я сила  $R = m \omega^2 W$

Условья  $\sigma_{ij}$  и  $\epsilon_{ij}$  надо знать  $R$

$$- \text{---} - R - \text{---} - W'$$

В этих задачах величина  $\epsilon_{ij}$  известна до тех пор, пока не определена упругая деформация, т.е. величина  $\epsilon_{ij}$  зависит от решения задачи.

Одной из таких задач в а.-гидроупр. т.т. является задача устойчивости конструкции при движении ее в потоке.

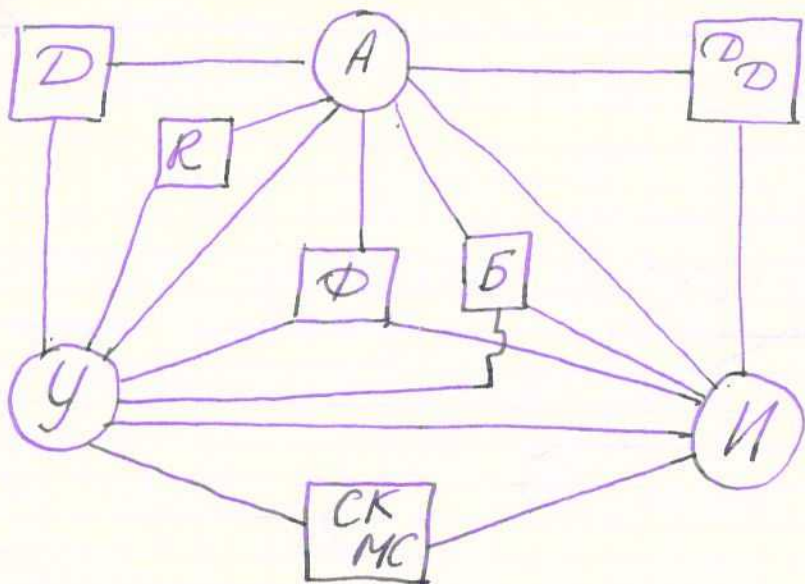
Т.к. все задачи конструкции аэродинамические  $\epsilon_{ij}$  быстро увеличив-ся с ростом скорости потока, а жесткость конструкции не зависит (от ее геометрии) то может возникнуть-ся нек-б.  $\sigma = \sigma_{cr}$  при кот. конструкция становится неустойчивой. Такая неустойчивость может привести к разрушению конструкции.

### Типы задач а.-гидроупругости

Все задачи а.-гидроупр. можно связать при помощи след. схемат. (схемат. Келлера).

В общем случае на конструкцию  $\sigma$ - $\epsilon$  3 типа  $\epsilon_{ij}$ :

- 1) А - аэродинамическ-е  $\epsilon_{ij}$
- 2) У - упругие  $\epsilon_{ij}$
- 3) Ускоренные  $\epsilon_{ij}$  И



D - задана дивергенция

D<sub>0</sub> - динамическое <sup>ка</sup> взаимодействие

R - резерв системы орг-в управл.

СКМС - свободные колебания мех-х систем

D и R - являются заданными статическими

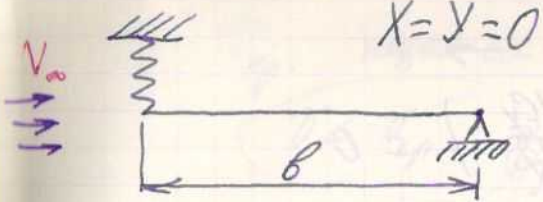
Ф - задана флаттера

Б - задана бафферинга

Явление дивергенции (D)

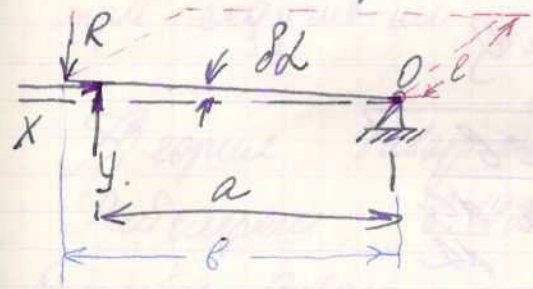
Это явление статической неустойчивости конструкции под действием а-г динамич-х сил. т.к. данная задана является статической, то она допускает исследование — как нет-тн по Зигеру.





Однако это состояние равновесия является неустойчивым при достаточно большой скорости потока.

Вспомогательным, при каких условиях возможно равновесие пластины в каком-то положении на некоторой малой угол.



R - реакция пружины.

Заменим условие равновесия пластины в отклонённом положении

$\Sigma M_0 = 0$ . Учитывая, что  $\delta L$  - сила малой отклонения, моменты от силы X можно не учитывать, как величину бесконечно малую по сравнению к силе от силы Y.

$$R = c \cdot \delta L \cdot l ; Y = \gamma \rho \frac{V_{\infty}^2}{2} S = \frac{b \cdot l}{2}$$

$c \text{ Н/м}$

$$\text{где } \gamma = \frac{d\gamma}{d\delta L} \delta L$$

$$\sum M_0 = Rb - Ya = 0 \rightarrow$$

$$\rho L b^2 c \left( c - \frac{a}{b} \rho \frac{v_{\infty}^2}{2} \frac{dc}{dx} \right) = 0$$

Условие откл. свет-е  
 авт.  $\rho L \neq 0$

След-но, тогда оно удовлетворяемо,  
 когда, ' тогда кон. условие

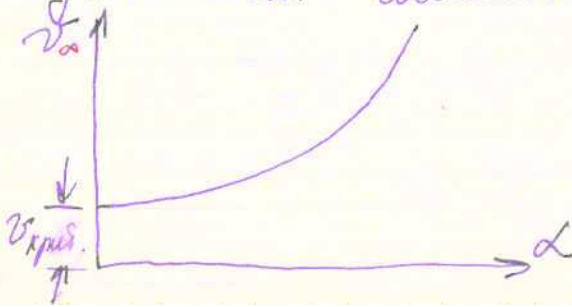
$$c - \frac{a}{b} \rho \frac{v_{\infty}^2}{2} \frac{dc}{dx} = 0$$

откуда  $v_{кр.} = \sqrt{\frac{2cb}{\rho a \frac{dc}{dx}}}$

критическая эк-ва потока

при  $v > v_{кр.}$  гориз. течение-е  
 тлаемки авт-е (неустойчиво)

и при (доинте.) поперек, его  
 некоторого отклонение  $\delta L$  система  
 уходит от состояния равновесия.



$v_{кр.}$  критическая скорость дивергенции

$v < v_{кр.}$  условие дивергенции

В подобной ситуации поперек устьев при круговом ш.б.) возникают при оттекании кроша самота, шленка. некоторую конюг. неслеткость при скручивании

$$C = \sigma \cdot T_{кр}$$

Теория дивергенции развита Реймером в 1929 г.

Скорость диверт. практически недовешивается в реальных условиях, т.к. устье при достаточно больших, но  $v < v_{кр.}$  скоростях неизбежна небольшая конюг. ш-за конечн. но все-же больших деформации, или введение явления Флаттера т.к.

$$v_{кр.} < v_{кр. див.}$$

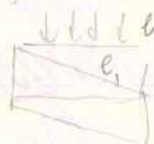


*Чистая страница*

# Лекция 18

12/III-72.

$$\frac{p d \cos \psi}{d a} d p b^2 \cos \psi$$



где

$$\nu \ll \nu_{звук}$$

$$\nu_{зверз.} = \frac{\pi}{S} \sqrt{\frac{2 G J_{кр.}}{\rho \frac{d \cos \psi}{d L} \left[ \bar{d} - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \lambda \frac{G J_{кр.} \tan \psi}{E J} \right] \cos \psi}}$$

$\psi$  - угол срезовидности

$\bar{d} = \frac{d}{b}$  - минимальное расстояние между ос. д. и ос. ж.

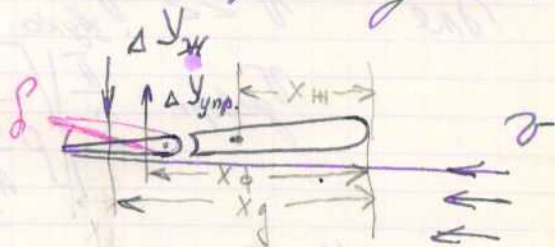
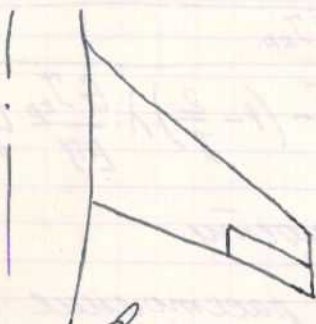
$S$  - площадь обеих конусов кривизны

$$\lambda = \frac{L}{b \cos \psi}$$

Влияние деформации элементов конструкции скоростного аппарата на эффективность элеронов и оперения.

При отклонении той или иной рулевой поверхности происходит изменение аэродинамической нагрузки и деформация опорной пов-ти рулей. В результате этого изменяется эффективный угол атаки крома или оперения.

Пусть руль отклонён на некоторый угол  $\delta$



В результате этого отклонения созд-ся приращение подъемной силы  $\Delta C_L$ , кот. в предполож. абсолютной жесткости элерона, можно записать.

$$m.0. \quad \Delta C_L = \frac{dC_L}{d\delta} \delta \int \frac{\sigma^2}{2} S$$

$S$  - площадь опорения

Отклонение зеркала вызывает кручение крана на  $\Delta \alpha_{\text{упр.}}$  и угол  $\Delta \gamma$

В результате этого возникает приращение подвижной шипа на  $\Delta Y_{\text{упр.}}$

$$\Delta Y_{\text{упр.}} = \frac{dC_{\gamma}}{d\alpha} \Delta \alpha_{\text{упр.}} \cdot \rho \frac{\sigma^2}{2} S$$

В резуль. этого суммарное приращение подвижной шипа будет равно

$$\Delta Y = \Delta Y_{\text{ж}} - \Delta Y_{\text{упр.}} < \Delta Y_{\text{ж}}$$

Токагане  $\Delta Y_{\text{упр.}} = 0$  найдём критическую скорость реверса

$V_{\text{реверса}}$

Приращение угла атаки, обусловл. упругостью конструкции от-ся вращением

$$\Delta \alpha_{\text{упр.}} = \Delta M \cdot \Delta \alpha_{\Delta M=1} + \Delta Y \Delta \alpha_{\Delta Y=1}$$

Угол  $\Delta \alpha_{\Delta M=1}$  и  $\Delta \alpha_{\Delta Y=1}$  - угол атаки за счет деформации от действия единичного момента и единичной шипа

тут же или до оси нессиметрич

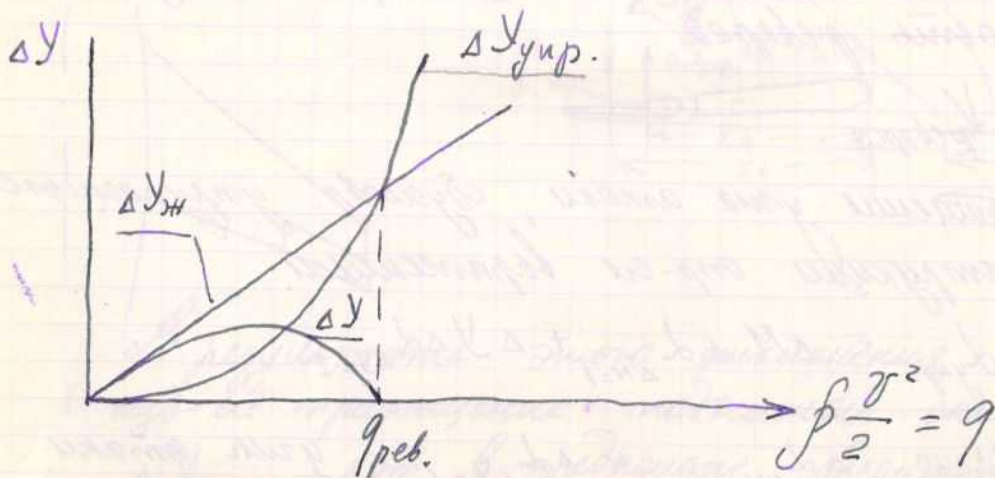
$$\Delta M = \Delta Y_{\text{ж}} (x_g - x_{\text{ж}}) + \Delta Y_{\text{упр.}} (x_{\text{ж}} - x_{\text{ф}})$$

У. Давл. прибавит. прилив на оси  
 зависима руи. пов-ти

$\Delta Y_{\text{упр.}}$  прилож. в некот. ( $\cdot$ ), называемой  
 градусом

Подставим  $\Delta Y$  и  $\Delta M$  в  $\Delta \delta_{\text{упр.}}$ ,  
 а зная  $\Delta \delta_{\text{упр.}}$  найдем  $\Delta Y$ .

$\Delta Y$  - Эта величина характериз. эффективность  
 рулевых поверхностей.



$$r_{\text{рев.}} = \sqrt{\frac{2q_{\text{рев.}}}{\beta}}$$

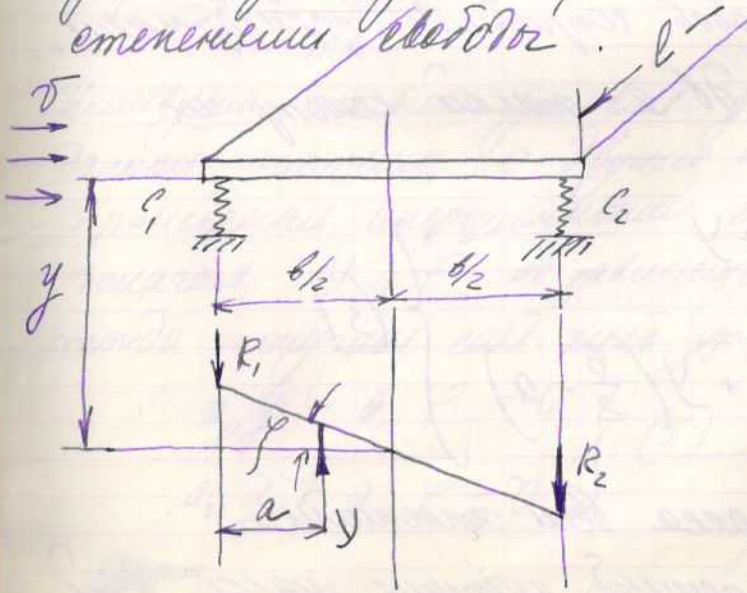
# Явление Флаттера

Это особая форма колебательной неустойчивости конструкции.

При возникновении этого явления амплитуда колеб. констр. стремительно увеличивается, приводя к недопустимой деформации.

Если ~~дифференциал~~ представл. явление статической аэроупр. в неустойчивости то флаттер предст. собой явление потери устойчивости путем перехода от стационар. колеб. дв-я к неубавившемуся.

Рассмотрим явление изгибно-крутильного флаттера крыла, как существ. с двумя степенями свободы.



$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \right\} (1)$$

Отр. вид пр. (1) и оценить возможность появления квадрупля.

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= c_1 \left( y + \varphi \frac{b}{2} \right) \ell \\ R_2 &= c_2 \left( y - \varphi \frac{b}{2} \right) \ell \\ Y &= c_y \rho \frac{y^2}{2} b \ell \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{систему сг} \\ \text{приведем} \\ \text{к равновесию} \\ \text{в } y, \text{т. и} \\ \text{систему} \end{array}$$

$$(2) \left\{ \begin{aligned} R &= R_1 + R_2 = -(c_1 + c_2) \ell y - \frac{b}{2} (c_1 - c_2) \ell \varphi \\ M &= -\left( y + \frac{b\varphi}{2} \right) c_1 \ell \frac{b}{2} + \left( y - \frac{b\varphi}{2} \right) c_2 \ell \frac{b}{2} \end{aligned} \right.$$

В эту предположение о малости  $\varphi$  величина  $X$  - лобов. сопротивл. пренебрегаем.

Система ур-ий дв-е такой координатной системы.

$$\left. \begin{aligned} m b \ell \frac{d^2 y}{dt^2} &= R + Y \\ \frac{m b^3 \ell}{12} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= M + Y \left( \frac{b}{2} - a \right) \end{aligned} \right\} (3)$$

$m b \ell$  - масса всей пластины

$\frac{m b^3 \ell}{12}$  - момент инерции массы всей пластины

Подстановка (2) в (3)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} + a_{11} y + a_{12} \varphi &= 0 \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + a_{21} y + a_{22} \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

где к-матр  $a_{ij}$  выражены через параметры

$$a_{11} = \frac{c_1 + c_2}{mb}$$

$$a_{22} = \frac{3(c_1 + c_2)}{mb} - \frac{d c_2}{d d} \frac{b - 2a}{mb^2} \beta \frac{\sigma^2}{2}$$

$$a_{12} = \frac{c_1 - c_2}{2m} - \frac{d c_2}{d d} \frac{1}{m} \beta \frac{\sigma^2}{2}$$

$$a_{21} = \frac{6(c_1 - c_2)}{mb^2}$$

Исследуем условия устойчивости дифференциальной системы в форме ст. след., пренебрегая инерционными силами, покажем  $y$  и  $\varphi$  не зависят от времени, тогда получим след. след. ур-ий

$$\left. \begin{aligned} a_{11} y + a_{12} \varphi &= 0 \\ a_{21} y + a_{22} \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

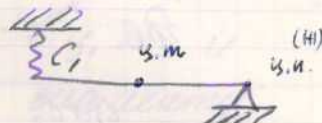
устойчиве зав.  
 $\beta \neq 0$   $\varphi \neq 0$   
сост. в нем  
тоже определит.

$$(6) \quad a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0$$



Из этого уравнения находим  $v_{кр.}$

$$v_{кр.} = \sqrt{\frac{2c_1 v}{\rho \frac{dC_D}{dL} \left[ 1 - \frac{c_1}{c_2} \right] a}} \quad (7)$$

$c_2 \rightarrow \infty$  получим  $v_{кр.}$   (41)

пусть  $c_1 \geq c_2$  в этом случае диверг. имеет место - это неустойчивость;

отсюда след. для траекторий - концентр.

правило: центр <sup>и инерции</sup> тяжести конструкции должен находиться впереди ц.т. конструкции, тогда лев. див. будет отсутствовать.

16/III-77.

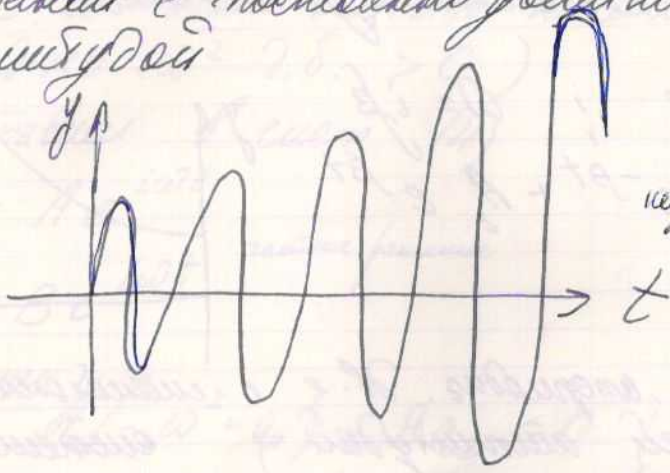
## Лекция 19

Рассмотрим возможные жесткие крыла, анализируя разн-е след. (4).

Разн-е след. (4) можно найти при помощи метода и Ньютона.

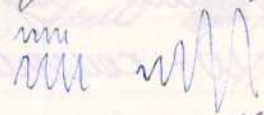
В газовой среде, используя метод Рунге-Кутты, для различных скоростей набегающего потока  $v_1, v_2, \dots, v_n$

можно найти ту скорость, при  
 кот. решение системы будет иметь вид  
 колебаний с постоянной увеличивающейся  
 амплитудой



нейтральное состояние  
 решение системы

эта скорость и будет критич. скор. Фраттера  
 2<sup>ой</sup> метод совет. —



решение на аналоговой машине МН-7  
 или МН-14

3<sup>е</sup> решение - аналитическое

Решение системы (4) имеет в след. виде

у<sub>1</sub> линейн  
 система  
 2 корни  
 отриц. (ω - ω)

$$y = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

$$\varphi = B_1 e^{i\omega t} + B_2 e^{-i\omega t}$$

} y и φ постоянны (8)  
 по условию задачи

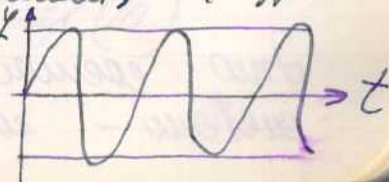
Рассмотрим 3 возможных решения.

1) Пусть ω совп. с собственными частотами, то (8) имеет

предст. зап.  
 убавление

$$y = A_1' \cos \omega t + A_2' \sin \omega t$$

в этом случае решение системы  
 устойчиво

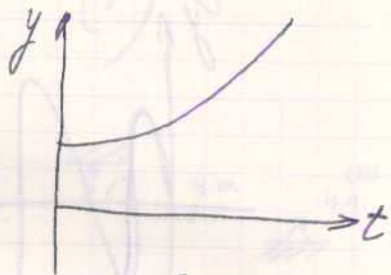


В этом случае свобод. мед. можно  
рассм-ть, как динамическую установку.

2)  $\omega$  - мнимое

$$\omega = i\beta$$

$$y = A_1 e^{-\beta t} + A_2 e^{\beta t}$$

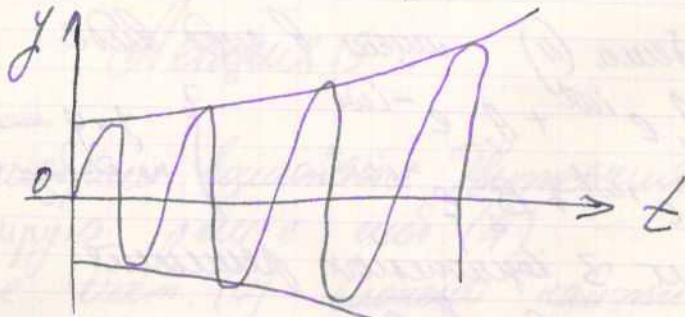


еще. имеет аperiodичес. дв. е с монотонно  
возрастающей амплитудой; система  
отриц-ел. у-ти от соет. равновесия.  
Имеет случай дивергенции.

3)  $\omega$  - комплексное число

$$\omega = \alpha + i\beta$$

$$y = A_1 e^{i\alpha t} e^{-\beta t} + A_2 e^{-i\alpha t} e^{\beta t}$$



Это свободные колебательный процесс  
еще есть - соет-е затухающ.

Т.о. для существования системы необходимо,  
чтобы  $\omega$  было вещественным  
(след-но  $\omega^2$  д.б.  $> 0$ ).

Подставим в сист. (4)

$$y = A e^{i\omega t}$$

$$y = B e^{i\omega t} \quad \text{равные переменные}$$

Получим

$$\left. \begin{aligned} A(-\omega^2 + a_{11}) + B a_{12} &= 0 \\ A a_{21} + B(-\omega^2 + a_{22}) &= 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

Система будет найд-ся в  $\mathbb{R}$ -ии, если  ~~$B \neq 0$~~   
 $A \neq 0$

это будет верно верно, если

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -\omega^2 + a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{или} \quad \omega^4 - \omega^2(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \quad (10)$$

Условие существования  $\omega^2$  из (10)

$$\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 \geq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2) условие  $\omega^2 > 0$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \geq 0$$

Т.о. эти условия являются расширяющимися  
смет. необходимыми

$$\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 \geq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \geq 0 \dots (11)$$

Критическим состоянием крыла  
соответствует граница этого интервала.

Случай  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \dots (12)$  соответ-т  
условию дивергенции. (см (6))

Условие  $\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  соответ-т  
сугару диваттера.

У этого вращения получаем крит. скор. диваттера

$$v_{\text{ф}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{dC_y}{dd} \rho \left[ (c_1 - c_2) + \frac{m^2 v^2 (a_{11} - a_{22})^2}{3 (c_1 - c_2)} \right]}}$$

$v = v_{\text{ф}} \quad \sqrt{\quad} = 0$

При  $v > v_{\text{ф}}$   $\sqrt{\quad}$  в вып. (10) будет мнимым,  
а  $\omega^2$  - комплексным числом.

Пусть  $c_1 < c_2$ , тогда при любых скоростях  
внешнего условия

$$\left( \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \right)^2 \geq a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

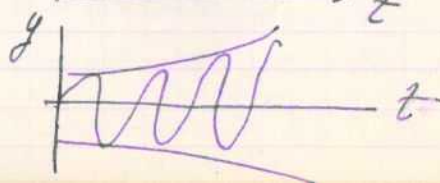
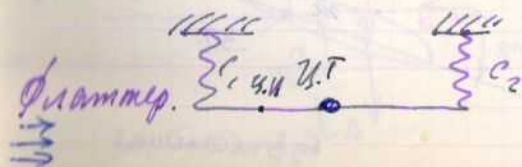
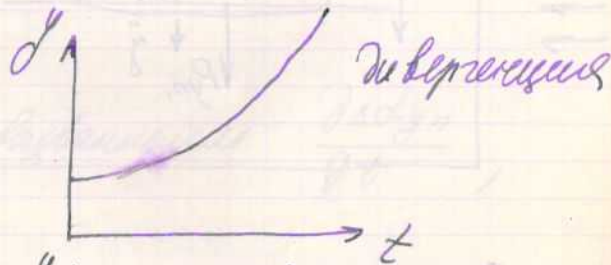
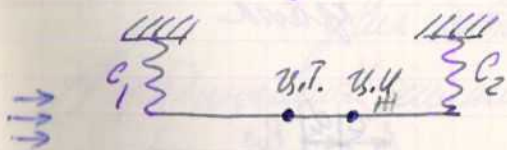
и критич. скорость, определенная из условия  
(12), представляет собой критич. скорость дивергенции

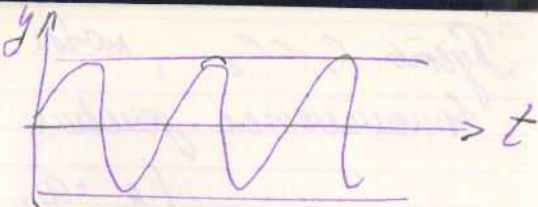
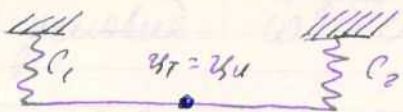
Пусть  $c_1 > c_2$ , то при любых  $\sigma$  и  $\omega$ -а  
условие  $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \geq 0$

и критическая скорость, определенная,  
будет предель. критич. скоростью дивергенции.

П.О. потери устойчивости в форме дивергенции  
или флаттера зависят от расположения  $\omega$  и  $\sigma$  узла.

Влияние положения узла на  
устойчивость крива можно проиллюстрир.  
след. рисунками.



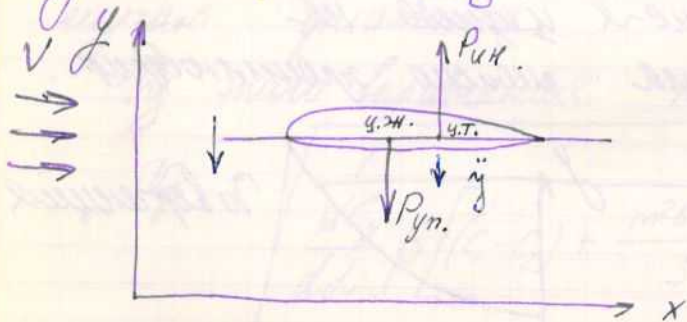


Т.о., отступившие фронттера обдем-се,  
 когда ц.и. <sup>отт вх. кр. кролля</sup> нах-ел дальше чем ц.т.

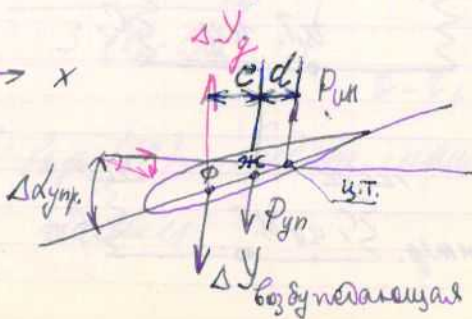
Рассмотрим задачу крутильно-углового фронттера вте резонансных кривых.

(еашмет, экромонтан...)

Рассмотрим сист, действ. на кролю при ео <sup>колеб.</sup> вращении вверх. Дешинув так ожио- нелишь вверх под действием упругих сил оно будет дв-ея вниз.



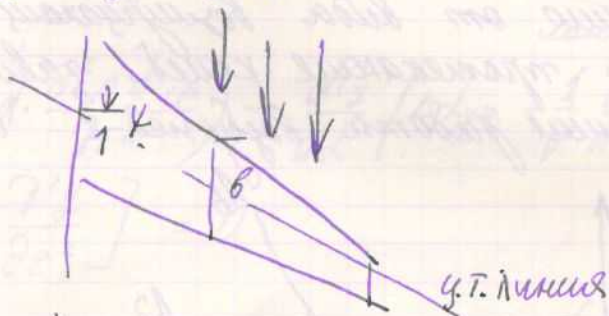
При этом вернкет загруживаем края



$\Delta d_{dyn}$  возмущает потенциал. аэродинамическую возмущающую силу

$$\Delta Y_f = \frac{dY_f}{d\alpha} \Delta d_{dyn} \approx \rho \frac{\sigma^2}{2} \cos \varphi$$

погонная



$b$  - хорда профиля в среднем по погонку  
 Соотносимо вершинок.  $\sigma = \frac{dY}{d\alpha}$  погонная

возмущает. аэродинамическую возмущающую силу

$$\Delta Y_g = \frac{dY_g}{d\alpha} \frac{dY}{d\alpha} \frac{1}{V} \approx \rho \frac{\sigma^2}{2} \cos \varphi$$

текущее значение отади

Аэродинамический эффект, вызванный пренебрегаем

$$\frac{\partial \Delta d_{dyn}}{\partial t}$$

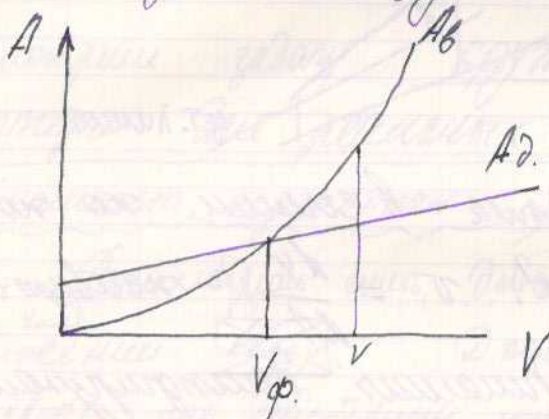


# Лекция 20

18/11-7/2

Из рис. следует, что изгибно-крутильное колебание системы с несовпадением ц.т. с ц. тяжести и возник.

независимо от вида возмущающ. деформ. Характер протекания колеб. зависит от соотношения работы возбужд-х и демпфир-х сил.



если  $A_d > A_b$ , то колебания затухают

если  $A_b > A_d$ , то кол. протекают с непрерывно

возрастающей амплитудой

при  $A_b = A_d$  колеб-я протекают с постоянной амплитудой, отсюда можно определить  $V_\phi$

Составим уравнение изгибно-крутиль-  
ных колебаний крана.

Проектируем все силы на ось  $y$  и составим условие  $= 0$  моментов относительно ц.т.



$$y(z, t) = y_0 f(z) e^{i\omega t} \quad (14)$$

$$\Delta \text{дкр.}(z, t) = \Delta \text{дкр.}_0 \varphi(z) e^{i\omega t}$$

↑  
учит круг.  
для криво кр.



Подставляем (14) в (13),  
получим систему  
однородных дифференциальных

уравнений относительно  $\left[ y_0 f(z) \right] \left[ \varphi(z) \right] \dots (15)$

Эти будут решения.

Задаваясь выражениями (15) в виде  
алгебраических рядов

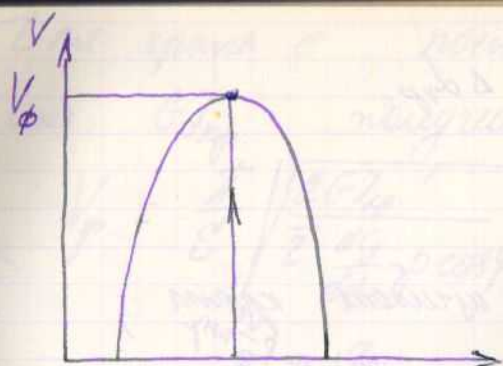
$$y_0 f(z) = F(z) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(z)$$

$$\Delta \text{дкр.}_0 \varphi(z) = \Phi(z) = \sum_{i=1}^m b_i \varphi_i(z)$$

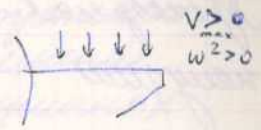
Цепочку вариаций метод Бубнова-Галёркина  
получим вместо (13) систему однородных  
алгебраических уравнений относительно  $a_i$  и  $b_i$ .

Из условия  $a_i \neq 0$   $b_i \neq 0$  получим  
условие рав-ва нулю определителя этой  
системы. Решая этот определитель,  
находим выражение для  $V = f(\omega)$  (16).

Из условия  $\frac{\partial V}{\partial \omega} = 0$ , найдем  $\omega$  соответв.  
критич. скорости.



в кал-ве  
 $f_i(z)$  и  $\varphi_i(z)$   
 берется др-ии  
 Дункана



$\omega$  - действит. значение, положительное

2ой вариант решения - используем сеточно-шаговый метод

Расширяем проводники по коорд.  $z$  в конечных рамках. В результате получили систему обыкновенных дифф-х ур-ий по времени  $t$  (задача Коши).

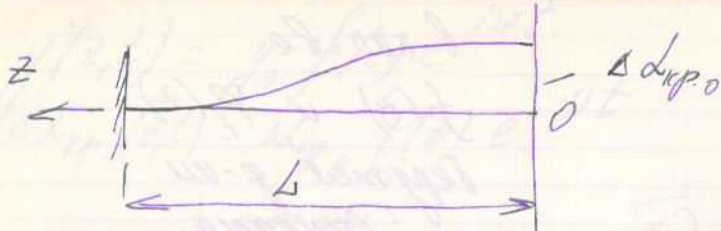
Реальную задачу Коши по одной из стандартных преобразим две различные скорости движения фронта, определим эту скорость  $V = V_{gr}$ , при которой др-ии  $\varphi_i(t)$  и  $\Delta \varphi_i(t)$  будут иметь колебательный нестационарный вид.

3ий метод - приближенный.

При флаттере преобладающей формой колебания является крутильный. Неудобно из этого пренебрегаем приближаем кривая (др-ии  $\varphi$ ) можно  $\approx$  оценить критич. скорость флаттера.

Зададимся др-ей кругления

$$\Delta \varphi_{gr} = \Delta \varphi_{gr,0} \cos \frac{\pi \bar{z}}{2} ; \quad \bar{z} = \frac{z}{L}$$

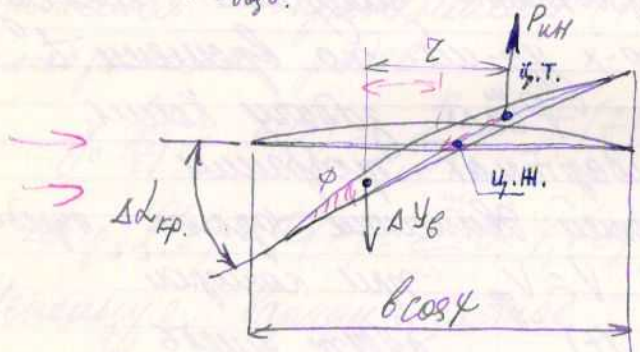


Пренебрегаем при  $v = v_{кр}$  изгибом кривая



$$\Delta Y_{всозд.} = P_{кр.} \quad v$$

(чтобы не было изгиба) при  $y = 0$



$$P_{кр.} = 0$$

Свойств-ней эише еише наибольший при закручивании от крутящего момента

$$M = L \int_0^z z \Delta Y_{\phi} dz$$

Э. быть равен заданному  $\Delta d_{кр.0}$  (17)

Учитывая, что  $\Delta d_{кр.} = \Delta d_{кр.0} \cos \psi$

из (17) определим  $v_{кр.}$

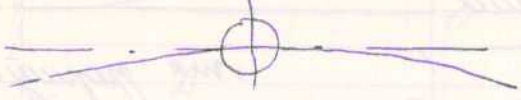
$\Delta d_{кр.0}, \text{ м.е.}$

$$\Delta d_{кр.0} = L \int_0^1 \frac{m}{GJ_{кр.}} dz$$

крутящий момент



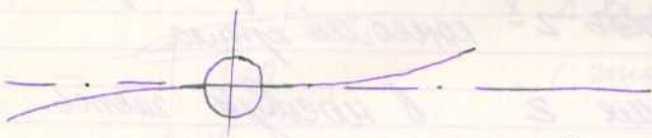
Узко-мер. даттер и.б. симметричной



зеркало отклоняется в одну сторону

вследствие упругости элементов упругости проводки

и обратно симметричной



Зеркало отклоняется в другую сторону

за счет упругости проводки и за счет того, что рука управляет зеркалом.

1. Пусть край после действия на него возмущающего импульса под действием сил упругости возвращается с ускорением к своему первоначальному положению равновесия

тогда зеркало под действием шарнирного момента

$M_{ш.} = P_{ш.} \cdot a$  отклоняется в сторону противоположную  $\delta$ -ю края.

В результате отклонения зеркала возникнет дооптимизация возбуждающей волны

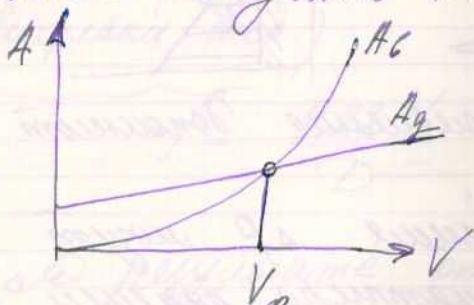
$$\Delta y_{взд.} = \frac{dy}{dx} \Delta x_{зр.} \cdot f \cdot \frac{v^2}{z} \cdot b$$

Введение  $\frac{\partial Y}{\partial t}$  вызывает деформацию сдвига

$\Delta Y$  (см. выше) от края

$\Delta \alpha_{зр.}$  - эрривный угол от края, обусловленный (с учетом отклонения зерна)

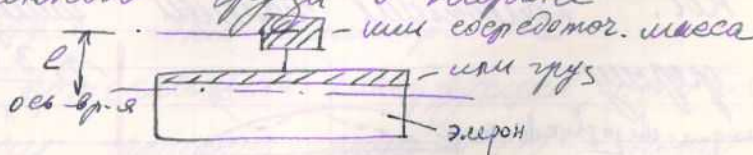
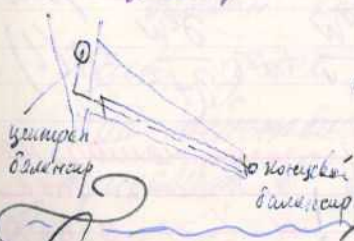
Критич. скорость изгибно-зернового флаттера можно получить на основе зависимости



Чтобы предотвратить появление изгибно-зернового флаттера необходимо сделать

$$M_{из} = 0, \text{ т.е. } a = 0.$$

Это обеспечивается введением сосредоточенного или распределенного груза в зерне



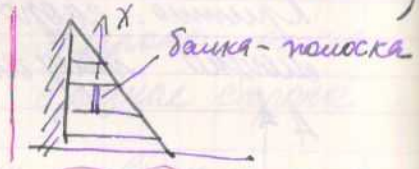
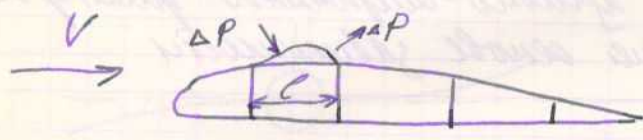
$$P_{зр.} \cdot e = P_{ин.} \cdot a$$

Панельный флаттер.



Кроме диаметра крошечек и времени  
выполнения диаметр отдельных элементов в  
конструкции летит. аппарата, а именно —  
панелей (пластин) кроша, фюзеляжа...

При вынужденной вибрации панелей или  
трещин кроша трещин. искривление пов-ти



что влечет за собой появление дополнительных -  
аэродинамическ-х давлений.

Эти дополнительные давления  $\Delta P$  могут  
вызвать явление диаметра панелей —  
колебаний с быстровращив-ся амплитудами.  
Демонстрирование колебаний трещин. за счет  
конструктивного внутр. трения (взасиожаж...)  
и за счет внутр. трения в швах пласти-  
нок. Колебания панелей имеют немалый эффект.

дрозсу

то же сверхзвуков. старт



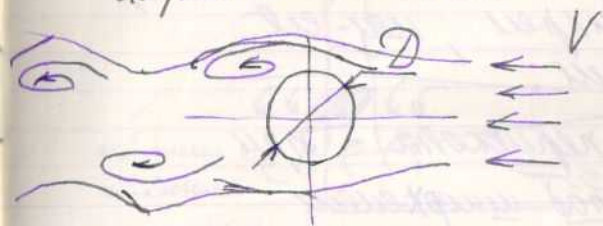
$$\mathcal{D} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = p(t)$$

$p(t)$  - аэродинамическ. нагр.  
это сила Маха  
 $M = \frac{V}{a} > 1$ ;  $p = \rho a^2 M \frac{\partial W}{\partial x}$   
сверхзвуков. старт

## Срывной диаметр

Если в панели находится какое-либо  
препятствие; то за ним образ-ся вихр. след

привеш вихри еделают е опредешенной периодичностью, зависящей от скорости и размеров конструкции, а также от скорости потока



вortexка Кармана  
(вихревой след)

Направленные еделают е цилиндра вихрей попеременно сменяются.

Число вихрей еделают за 1 сек е цилиндра

$$f = \frac{0,22 V}{D} ; V \text{ м/сек}$$

$D$  м - диаметр

В результате отделившиеся вихри попеременно с двух сторон цилиндра на прошедший  $\Gamma$ - $\gamma$  гармонич. измен. сила  $\perp$  направлению потока

$$F(t) = C_F \rho \frac{V^2}{2} S \sin 2\pi f t$$

$C_F$  - коэффициент для цилиндра  $\approx 1$

Чем хуже обтекаемость конструкции, тем  $> C_F$ .  
ход действит. гармонич. сила  $F(t)$  констр. приходит в состояние вынужд-х колебаний

При густоте схода е конструкции вихрей = гармонич. вынужд-х колебаний конструкции возбуждает явление резонанса, кот. может

вызвать разрушение конструкции или нарушение её работоспособности.

Это явление зигит-х колебаний, вызванных срывом вихрей, наз-ел срывными флаттерами.

Пример - флаттер перегона при ходе ПП под шкворнем (на большую мощность...)

Флаттер воздушных винтов, шпатель турбин, работающих при больших углах атаки.



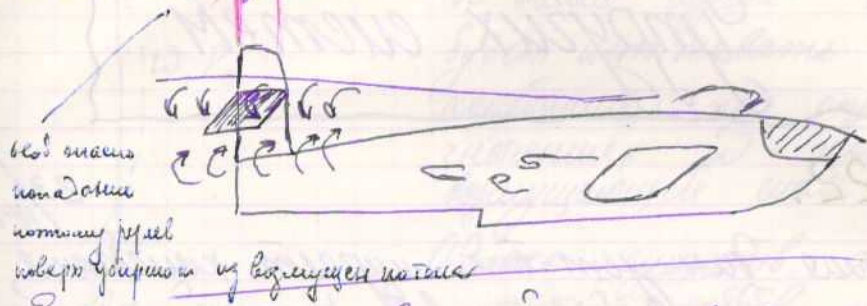
$$d = 20 \text{ см} \quad EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = F(t)$$

( W - в виде гзда  
g - е дужана... )

## Явление Бартинга (трески)

При обтекании крыла или плоскостя с отрывом струй (срывом обтекания) за ними конструируется обрывает турбулентная струя, соединяясь с определенной последовательности вихрей. Эта струя, попадая на другую часть аппарата (хвостовое оперение)

заставляет её вибрировать.  
 Спектр густоты срывающихся вихрей в обтекании  
 округлой очень широк и зависит от размеров  
 тела и скорости его движения.



Если густота вихрей не совпадает с  
 резонансной густотой след-х колеб. хвост. опер.  
 то колеб-е происходит с небольшими амплитудами.  
 При густоте срыва вихрей = резонанс. густ. колеб.  
 возникает резонанс хвостового оперения,  
 это явление называют бафтингом (треска).  
 Амплитуда колебаний хвостового оперения  
 зависит от энергии вихрей, кот. пропорц-на  
 площади, с кот. срывае вихри и скорости.  
 Поэтому наиб. опасными явл. вихри,  
 срывающиеся с крыла.

Внешние бафтинг проявляется как ряд  
 последовательных ударов по оперению  
 и явл-ся реакцией конструкции на сильно  
 турбулентный поток.  
 Необходимо так размещать  
 хвостовое оперение, чтобы оно на дальних  
 расстояниях не попадало в срывной поток.

# Динамическая устойчивость упругих систем.

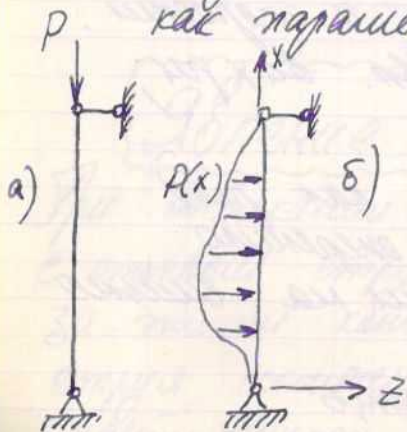
Лекция 22.

23/11/12.

Теория дин. уст-ти изучает колебание, возник. под действ-ем вибрационной параллельной нагрузки.

Каждый раз, когда под д-м стат. нагрузкой стр-ого вида возможна потеря уст-ти под д-м вибрационной нагрузки того же вида возможна потеря динамич. уст-ти.

Нагрузка, кот. входит в левую часть ур-я возмущенного равновесия, т.е. вытесним, как параллель, наз-т параллельн. нагрузкой.



$$a) \quad EJW'' + PW = 0$$

$$EJW'''' + PW'' = 0$$

задача однородная  
(продольн. напр.)

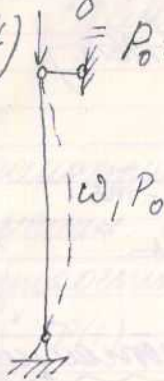
$$b) \quad EJW'''' = P(x)$$

неоднор. задача

(поперечная нагрузка)

Пусть задана параметрич. вибрационная нагрузка.

$$P(t) = P_0 \sin \omega t$$



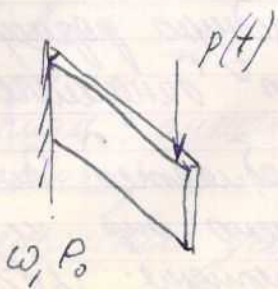
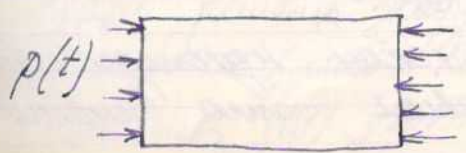
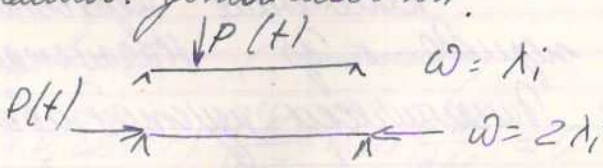
где  $P_0 < P_{\text{критич.}}$ .

В этом случае энергия будет вызывать продольные колебания при определенных значениях  $\omega$  - частоты возмущающей силы.

Однако существ. опред. соотн-е между  $\omega$  и  $\lambda$  - частотой собств. поперечн. колебаний, при кот-х применим. форма стержня становится динамически неустойчивой -

возникают поперечн. колебания, амплитуда кот-х быстро возрастает до больших значений.

Такое явление называют параметрическим резонансом или потерей динамич. устойчивости.



потери устойчивости возникают из-за крутильных колебаний большой амплитуды



Уст-ть деформи-х штемм "  
"Вальмир (1967г.)

Болотин В.В.

"Динамиг. уст-ть  
упругих штемм" 1957г.

### Условия потери динамич. устойчивости

Если при действии вибрационной параметрической нагрузки отклонитсь стержень от прямолинейной формы, то могут иметь место 3 случая поперечных колебаний:

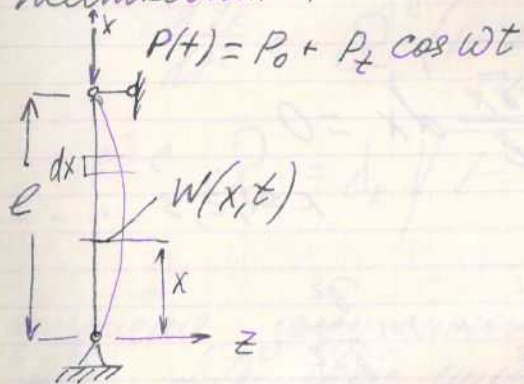
1. Поперечн. колебания затухают. Штемма наход-ся в динамически устойчивом состоянии. Прямая форма стержня динам. устойчива.
2. Колебания нарастают от одного периода к др. Начальная форма стержня динамически неустойчивой.
3. Поперечные колебания стержня периодические с постоянной амплитудой. В этом случ. неходную форму при данной нагрузке называют динамически буразимой.

Границы областей динамической неустойчивости можно показать сур. и условия, что динамич. форма стержня стержня стержня буразимой, т.е.

и. шло гармонич. колебания.

## Элементарные задачи Балансировочной устойчивости.

Рассмотрим вопрос динам. устойчивости для случая  
применим. стержня свобод. опорного поперечной  
нагрузки.



$$EJ = \text{const}$$

(1ая предпосылка)

- 2) пренебрегаем инерцией вращения
- 3) пренебр. продольными силами инерции (считаем, что система находится вне резонанса продольных колебаний)

Поскольку динам. уравн. поперечн. колебаний под действием  $P(t)$  можно записать в виде

$$EJ W'''' + P W'' = 0 \quad (\text{статика})$$

$$EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + (P_0 + P_1 \cos \omega t) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

Ищем реш.-е задачи в след. форме

$$W(x,t) = \sum_{k=1}^m f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \text{т.е.} \quad (19)$$

будем решать задачу вариацион.-аналитическим методом (метод Канторовича).

Решение (19) удовл. граничным условиям задачи.



$$W(0,t) = W(l,t) = W''(0,t) = W''(l,t) = 0$$

В кар-ве ф-ии  $\sin$

примет, т.к. удовл. всем гр. условиям и  
в силу того что она (ф-я) явл.  
функцией собств. колебаний и гр. условия  
удовлетворяются.

$$\int_0^l \left[ \sum_{k=1}^m f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \right] \sin \frac{k\pi x}{l} dx = 0$$

$k=1, 2, 3, \dots$

$$\Delta = EJ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \left( \quad \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Если интегрирование поузким

$$m \frac{d^2 f_k}{dt^2} + EJ \frac{k^4 \pi^4}{l^4} f_k - (P_0 + P_t \cos \omega t) \frac{k^2 \pi^2}{l^2} f_k = 0 \quad (20)$$

гр.е (20) приведем к след. виду

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \lambda_k^2 \left( 1 - \frac{P_0 + P_t \cos \omega t}{P_k^*} \right) f_k = 0, \quad (21)$$

где  $\lambda_k \Rightarrow k$  частота собств. колебаний  
незагруженного продольной стержней  
стержня

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

$P_k^*$  - "к" критич. сила свободно опертой стержня

$$P_k^* = \frac{\kappa^2 \pi^2 EJ}{l^2}$$

(21) преобразуем к ед. виду:

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \Omega_k^2 (1 - 2\mu_k \cos \omega t) f_k = 0, \quad (22)$$

где  $\Omega_k = \Lambda_k \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_k^*}}$  - частота свободных колебаний стержня, нагруженного постоянной силой продольной силой

$\mu_k = \frac{P_t}{2(P_k^* - P_0)}$  - коэффициент возбуждения (его величина хар-т интенсивности возб.)

Ур-е (22) идентично для всех форм колебаний, т.е. для всех "к", поэтому его будем заменять

$$f'' + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \omega t) f = 0 \quad \cdot \left(\frac{4}{\omega^2}\right) \quad (23)$$

выпр-е ур-е Матве

В более общем случае, когда прод. сила изм-ся по закону  $P(t) = P_0 + P_t \Phi(t)$ , где

$\Phi(t)$  - периодическая ф-я с периодом  $T$

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)$$

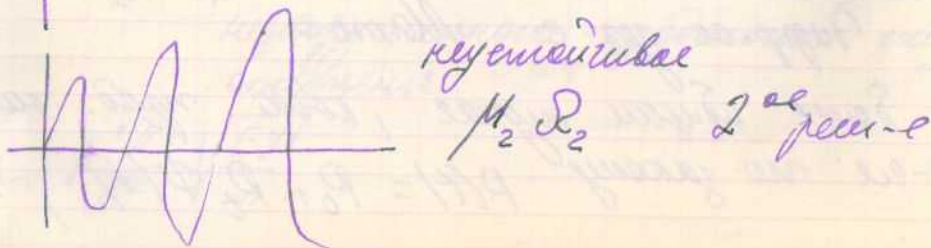
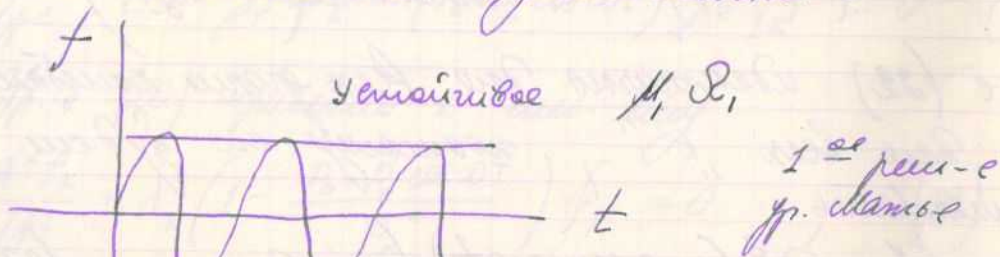
Получим след. дифф-е ур-е:

$$f'' + \Omega^2 [1 - 2\mu \Phi(t)] f = 0$$

дифф. ур-е Хилла.

### Лекция 23.

Одно из наиб. интересных св-в ур-е Матвея заключено в том, что при некоторых соотношениях между его коэфф-ми оно имеет неограниченно возрастающее решение. Эти реш-я замкнутой областью целого обл-ти на плоскости параметров т.е. обл. А кот-н в реш-ях задаче соит-т обл-ти 'динамической неустойчивости'.



Обозначим:  $\omega t = 2\tau$

$$\frac{4R^2}{\omega^2} = a$$

$$\frac{4M R^2}{\omega^2} = g$$

Тогда (23) запишем в след. стандартн. форме

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + (a - 2g \cos 2\tau) f = 0 \quad (24)$$

Реш-е ур-е (24) носит колебатель-  
ный характер и  
зависит от конкретных значений параметров  
 $a$  и  $g$ .

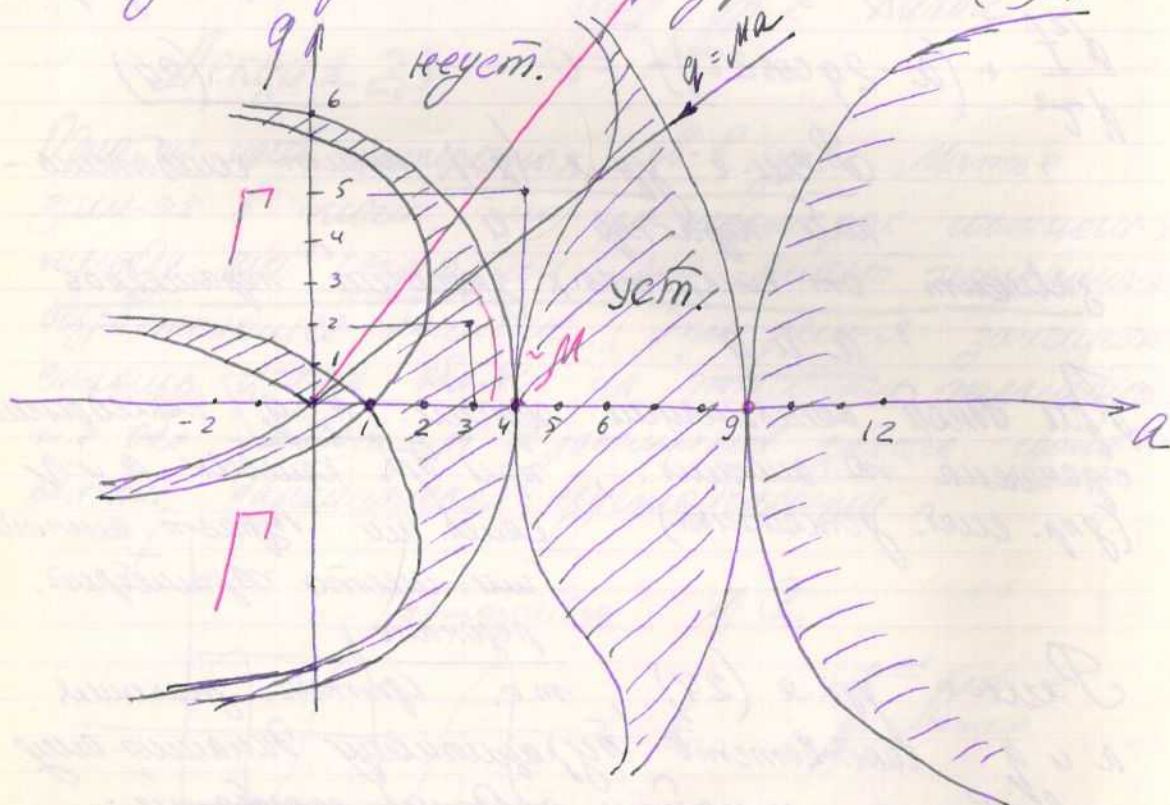
При одной комбинации парам.  $[a; g]$  колебания  
ограничены по амплит., при др. комбинац.  $a$  и  $g$   
(упр. след. устоячива) колеб. им. возраст. амплит.,  
(им. место параметров.  
резонанс)

Реш-е ур-е (24), т.е. критич. значения  
 $a$  и  $g$  соответств. бурацильному динамическому  
равновесию, и найти след-щие способы:

1. На основе математич. моделирования,  
т.е. АВМ (МН-7, МН-84)  
аналог. вопр. и.

2. Стат. решение задачи Коши на ЭЦВМ.

3. вар. Определим границы между областями устойчивых и неустойч. решений в плоскости диаграммы Айнса - Втретта. Эта диаграмма на плоскости параметров  $a$  и  $q$  определяет обл. устойчивых и неустойч. решений динам. ур. Матюс (24).



Если подобраны  $(\cdot)$   $a, q$  находятся в пределах заштрихован. диагр., то система устойчива. Неустойч. сист. соответствует  $(\cdot)$ , расположен. на белых полях.  
 Диагр. Айнса - Втретта напомним о себе.

от выполнения каких-либо операций по решению уравнения Матвея.

Достаточно составить это уравнение, т.е. найти значения  $a$  и  $q$ , после этого диаграмм. Дает ответ на вопрос об устойчивости или неустойчивости.

Данная диаграмм. справедлива для применима для тех систем без (внутр.) трения приведенных к одной степени свободы. (при разделимости ур-н)  
С возрастанием частоты  $\omega$  возмущающей силы параметра  $a$  и  $q$  уменьшаются, при этом отношение  $q/a$  есть величина постоянная

$$q/a = \text{const} + \frac{\text{штрихи}}{M} = \frac{P_+}{2(P^* - P_0)}$$

т.е. последоват. увеличение частоты уравнения последоват. (.) на окружности  $q = M \cdot a$

При данной  $P_+$  величина  $M$  зависит от  $P^* - P_0$ . Чем ближе  $P_0$  к  $P^*$ ,

тем ближе проходит путь.

При  $P_{02} > P_{01}$   $M_2 > M_1$

и тем шире пересекаются углы областей неустойчивости т.е. система имеет очень ограниченную обл. устойчивости. Потере устойчивости соответствует при этом удобно найти оптимальных режимов  $P_0$  и далее при разменивающих режимах.

т.к.  $\mu$  будет хоние и будет очень маленьким,  
но он будет пересекать обл. нулей-ти

$$P^* + P_0$$

различив.

$$M = \frac{P_T}{2(P^* + P_0)} \text{ при } \mu$$

Определение областей динамики. чет-ти  
составл. форму из центральных задач теории.  
При этом необходимо определить <sup>значит</sup> соотношения

$$\frac{\Omega}{\omega}, \text{ при кот. система динамически}$$

нейтральна.

Эти соотношения получим, если примем

$$\left[ \begin{array}{l} M=0 \\ \text{или} \\ q=0 \end{array} \right. \text{ Тогда из сист. } \frac{4\Omega^2}{\omega^2} = a \text{ и}$$

дискр. Стрелка найдены

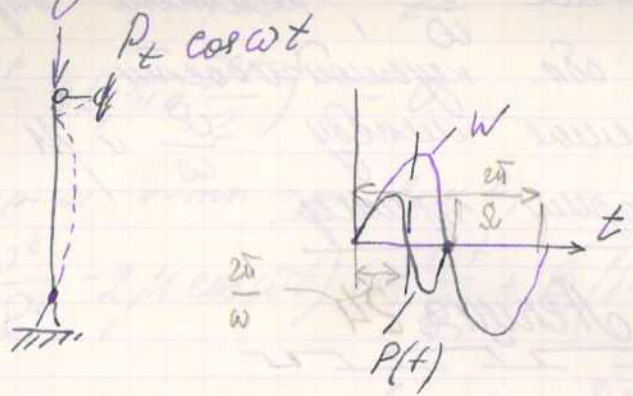
$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{1}{2} \sqrt{a}, \text{ где } a = 1, 4, 9, 16, \dots$$

т.е. соотношения частот, вблизи кот-х  
возможно возникновение неуст. возрастающих  
колебаний (соотнош.-е, само кот-х равенств  
обл. динамич. нейтральности)

равно  $\frac{\Omega}{\omega} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$

Обл. нулей-ти, лежащая выше  $\omega = 2\Omega$   
явл. наиболее опасной (наиболее широкая  
и имеет наибольшее практическое значение).

Эту обл. называют главной обл. динамической неустойчивости.



Т.о. параметр. резонанс имеет след. особенности:

1. Если обмен резон. возбужд-х колеб. им. место при совпадении частот и вн. частот, то парам. резон. наступает при совпадении вн. частоты с удвоенной част. возб. кол.
2. Если обычный резонанс имеет место только в некоторых ( $\cdot$ ) при ( $\omega = \lambda_i$ ), то параметр. резонанс имеет целую область возбуждения, т.е. динамической неустойчивости. Это связано с тем, что парам. резон. стр-ем 2-ух параметрами  $a$  и  $\varphi$  (обл.).
3. Возможно возбуждение комбинации (резонанс) при частотах  $\omega$ , где частота главного резонанса. ( $\omega = \frac{P}{2} \dots$ )



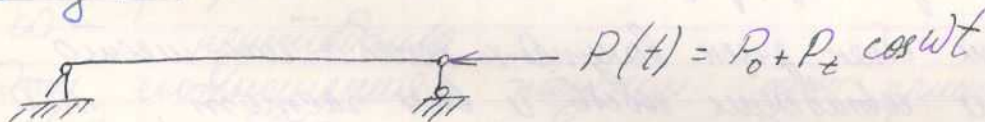
4. В том случае, когда определено соотношение  $\frac{P}{\omega}$ , невозможно определить и саму абн. неустойчивости, т.е. соотношение между  $\frac{P}{\omega}$  и  $\mu$ .

Рассмотрим пример.

## Лекция 24

26/III-7/2.

Метод Рунге



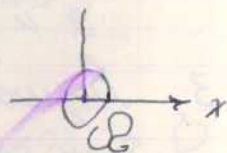
$$\frac{\omega}{\Omega} = 2$$

имеем границу абн. неустойчивости

Учитывая, что для динамического безразличного соотношения системы  $\Omega$ -е несл-д абн. периодическими можно быть в кол-ве  $1^{mo}$  приближения в ур-е Матвея в след. виде

$$f = A_1 \cos \frac{\omega t}{2} + B_1 \sin \frac{\omega t}{2}$$

в абн.  $1^{mo}$  резонансе



Подставим данное реш-е в ур-е

$$f'' + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \omega t) f = 0$$

$$-A_1 \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \cos \frac{\omega t}{2} - B_1 \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \sin \frac{\omega t}{2} + \mathcal{L}^2 (1 - 2\mu \cos \omega t)$$

$$\cdot \left( A_1 \cos \frac{\omega t}{2} + B_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right) = 0$$

Рассмотрим в к-мн р-н  $A_1$  и  $B_1$ ,

$$A_1 \left( 1 - \frac{\omega^2}{4\mathcal{L}^2} - 2\mu \cos \omega t \right) \cos \frac{\omega t}{2} + B_1 \left( 1 - \frac{\omega^2}{4\mathcal{L}^2} - 2\mu \cos \omega t \right) \sin \frac{\omega t}{2} = 0$$

$$A_1 \left( 1 - \frac{\omega^2}{4\mathcal{L}^2} \right) \cos \frac{\omega t}{2} - 2\mu A_1 \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\omega t}{2} + \cos \frac{3\omega t}{2} \right) +$$

$$+ B_1 \left( 1 - \frac{\omega^2}{4\mathcal{L}^2} \right) \sin \frac{\omega t}{2} - 2\mu B_1 \frac{1}{2} \left( -\sin \frac{\omega t}{2} + \sin \frac{3\omega t}{2} \right) = 0$$

$$A_1 \left[ 1 - \frac{\omega^2}{4\mathcal{L}^2} - \mu \right] \cos \frac{\omega t}{2} + B_1 \left[ 1 - \frac{\omega^2}{4\mathcal{L}^2} + \mu \right] \sin \frac{\omega t}{2} -$$

$$- \mu A_1 \cos \frac{3\omega t}{2} - \mu B_1 \sin \frac{3\omega t}{2} = 0 \quad (**)$$

Умножаем, что при  $\omega$ -м условие

$$\text{но при } f = A_1 \cos \frac{\omega t}{2} + B_1 \sin \frac{\omega t}{2}$$

для любого момента времени  $A_1$  и  $B_1 \neq 0$  и углы  $\omega t$  и  $\frac{\omega t}{2}$  не кратны  $\pi$ .

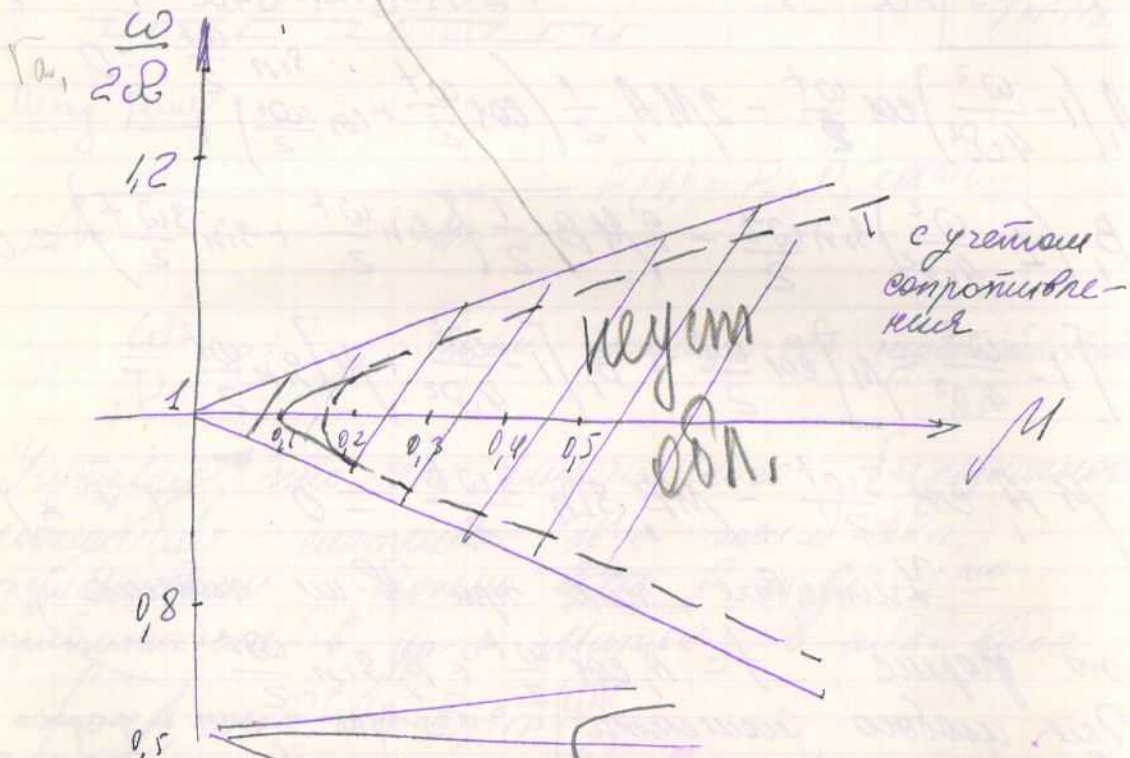
поэтому след. ур-я св-ны  $\mu$  и  $\frac{\omega}{2\mathcal{L}}$ .

$$1 - \frac{\omega^2}{4\mathcal{L}^2} - \mu = 0 \quad ; \quad 1 - \frac{\omega^2}{4\mathcal{L}^2} + \mu = 0$$

Эти 2 ур. определяют границы области неустойчивости

$$\frac{\omega}{2R} = \sqrt{1-M}$$

$$\frac{\omega}{2R} = \sqrt{1+M}$$



на рис. изображены нижняя и верхн. границы 1 об. неустойчивости

Вплоть до  $M = 0,5$  ошибка  $< 1\%$ .  
Решение задачи можно упростить,

если принять для  $f = \sum_n \left( A_n \cos \frac{n\omega t}{2} + B_n \sin \frac{n\omega t}{2} \right)$

Такая постановка задачи позволяет получить более точные зн-я гранич и краев этого канти др. обн. динамической неустойчивости. При выводе формул для гранич неустойчивости выше не учитывалось еще сопротивление. Если предположить, что есть сопр. пропорц. н-ы скорости колебаний конструкции ур-е др-я запишут-ся в след. форме:

$$f'' + 2\zeta f' + \Omega^2 (1 - 2M \cos \omega t) f = 0$$

(опредн. к-т)

Определим аналогичные образам гранич областей неустойчивости для малых величин  $\zeta/\Omega$  получим

$$\frac{\omega}{2\Omega} = \sqrt{1 - \sqrt{M^2 - \frac{4\zeta^2}{\Omega^2}}}$$

$$\frac{\omega}{2\Omega} = \sqrt{1 + \sqrt{M^2 - \frac{4\zeta^2}{\Omega^2}}}$$

Сопротивление наиб. влияние оказывает на  $\Omega \gg 10$  и выше области неустойчивости.

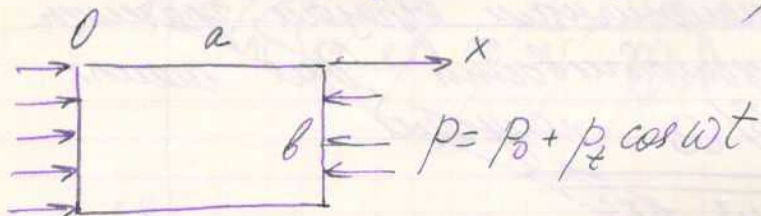
Замечание: ~~Наибольшее~~

Эти обаятия сильно отодвинуты  
от оси  $\frac{\omega}{2\Omega}$ , так что неустойчи-  
вость может появиться только  
при больших зн-х  $\mu$  ( $\approx 0,5$ )

Поэтому практич. зн-е для разг. реал. контр.  
швел  $I$  обл. неуст-ти.

Динамич. уст-ть пластин.

Динамически вибрационные нагрузки, кот.  
явл. параметрическим для широк. колебаний  
пластин, представляют большой интерес  
(для самолетостроения и судостр.)



$$y \quad (***) \quad D \nabla^4 W + p h \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + p h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

для одн-я  
табл. обл. неуст-ти  $f'' - \Omega^2 ( \dots )$

прим. метод Бесселя

$$W = W(x, y) f(t)$$

$$W(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

или 
$$W = \sum_{i=1}^m f_{i,i}(t) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{i\pi y}{b}$$

более вкратце обл. нулевых

Применим метод Галеркина ур-е (\*\*\*)  
 приводим к ур-ю типа Лапласа (23),  
 решимая с об. степенями и известными  
 условиями.