

# AEROELASTICITY

by

RAYMOND L. BISPLINGHOFF

*Professor of Aeronautical Engineering  
Massachusetts Institute of Technology*

HOLT ASHLEY

*Associate Professor of Aeronautical Engineering  
Massachusetts Institute of Technology*

ROBERT L. HALFMAN

*Associate Professor of Aeronautical Engineering  
Massachusetts Institute of Technology*

ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, Inc.

CAMBRIDGE 42, MASS.

1955

Р. Л. БИСПЛИНГХОФФ, Х. ЭШЛИ  
и Р. Л. ХАЛФМЭН

# АЭРОУПРУГОСТЬ

---

Перевод с английского  
Г. И. БАРЕНБЛАТТА, А. И. СМИРНОВА  
и  
В. П. ШИДЛОВСКОГО

Под редакцией  
Э. И. ГРИГОЛЮКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва—1958



## АННОТАЦИЯ

Резкое увеличение скоростей полетов за последнее время привело к необходимости специального исследования поведения упругих элементов конструкций, находящихся в газовых потоках. В результате появилась новая отрасль механики — аэроупругость, смежная с аэродинамикой и теорией упругости. В предлагаемой советскому читателю в русском переводе книге трех американских специалистов впервые в мировой литературе обстоятельно излагаются вопросы этой новой отрасли науки. Книга может служить учебным пособием для студентов и аспирантов авиационных вузов и аэродинамических специальностей университетов.

По замыслу авторов книга написана в двух планах: как элементарный учебник и как фундаментальный курс аэроупругости. В предисловии авторы дают по этому поводу подробные указания. Кроме того, книга может быть использована инженерами в качестве руководства по практическим вопросам.

Редакция литературы по математическим наукам.

*Заведующий редакцией Б. В. ШАБАТ.*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Под аэроупругостью понимают ту область науки, которая занимается исследованием поведения упругих элементов, главным образом элементов конструкций летательных аппаратов, находящихся в потоке газа. Эта область получила уже как у нас, так и за границей существенное развитие. Книга Бисплингхоффа, Эшли и Халфмэна „Аэроупругость“, русский перевод которой предлагается читателю, представляет собой монографию, основанную главным образом на немецких и американских исследованиях, и дает весьма полную сводку этих исследований. В ней последовательно излагаются элементарные сведения по расчёту конструкции крыла, вопросы плоской и пространственной аэродинамики и материал, относящийся непосредственно к теме монографии, в том числе результаты экспериментальных исследований и описание соответствующей аппаратуры.

В качестве приложения к книге дана статья Р. Л. Бисплингхоффа „Некоторые вопросы конструкции и аэроупругости при полете с большой скоростью“, зачитанная на девятнадцатой лекции, посвященной братьям Райт.

Книга может быть полезна студентам, аспирантам и научным работникам в области аэроупругости.

*Э. И. Григолюк.*

Декабрь, 1957

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРОВ

При написании этой книги цель авторов состояла в том, чтобы создать учебник для студентов старших курсов технических специальностей и одновременно справочную книгу для инженеров-практиков. При выборе материала для книги авторы считали, что следует рассмотреть не только практические аспекты аэроупругости, но также и те вопросы аэродинамики и прочности, на которых эти аспекты основываются. В соответствии с этим книга в основном делится на две части: в первой излагаются вопросы прочности и аэродинамики, а во второй рассматриваются их приложения к явлениям аэроупругости. Убеждение авторов в необходимости специального рассмотрения вопросов аэродинамики и прочности основывалось не на том, что в других книгах они трактуются недостаточно полно, а на том, что эти вопросы не рассматривались с точки зрения аэроупругости.

В гл. 1 подчеркивается роль аэроупругости в авиационных науках и ее влияние на современное конструирование самолетов. Гл. 2, 3 и 4 посвящены исследованию деформаций самолетных конструкций при статических и динамических нагрузках. В этих трех главах содержится подробное изложение необходимых вопросов прочности. Вопросы аэродинамики изложены в гл. 5, 6 и 7. Читатель заметит, что аэродинамика установившегося движения здесь излагается бегло и основное внимание уделено неустановившемуся движению. В гл. 8 в первый раз совместно рассматриваются вопросы аэродинамики и прочности и формулируется предмет статической аэроупругости. Задачи статической аэроупругости характеризуются отсутствием независимой переменной — времени, и изложение начинается с них вследствие их простоты. Гл. 9 касается вопросов флаттера, а гл. 10 — явлений динамической реакции, причем в первой в основном рассматривается движение, зависящее от времени по гармоническому закону, вторая же включает класс задач, в которых движение системы носит переходный характер. В гл. 11 и 12 рассматриваются соответственно важные вопросы теории аэроупругого моделирования и проектирования и конструкции моделей. Последняя глава посвящена вопросам техники эксперимента при изучении явлений аэроупругости. Хотя место, отведенное экспериментальным методам, сравнительно мало, авторы не имели в виду показать этим, что экспериментальные методы и техника эксперимента в аэроупругости играют второстепенную роль при решении практических задач. На самом деле явления аэроупругости, с которыми приходится сталкиваться на „передовой линии“ современного проектирования, часто не поддаются аналитическим методам. В подобных случаях, если решение нужно получить в приемлемый промежуток времени, применение экспериментальных методов абсолютно необходимо.

Авторы старались писать каждую главу, переходя от простого материала к сложному. Таким образом, преподаватель технического учебного заведения, который хочет пользоваться этой книгой в качестве элементарного учебника по аэроупругости, достигнет своей цели, обращаясь только к первым частям выбранных глав. Например, гл. 1 и первые части гл. 2, 3, 5, 8 и 9 могут быть использованы в качестве введения в аэроупругость студентами старших курсов или аспирантами авиационных специальностей. Математическими предпосылками для понимания этих частей книги служат математические курсы, включаемые в обычный инженерный цикл, причем в курсе дифференциальных уравнений должно быть дано понятие о теории дифференциальных уравнений в частных производных. Вводные лабораторные курсы по экспериментам в области аэроупругости могут быть основаны на гл. 11, 12 и 13. Курсы аэроупругости повышенного типа могут базироваться на последних частях гл. 2, 3, 5, 8 и 9, а также на гл. 4, 6, 7 и 10. Заметим, наконец, что математический материал, необходимый для понимания всей книги, в дополнение к вышеупомянутым курсам должен включать серьезный курс анализа в широком смысле слова.

Инженер-практик, который будет пользоваться этой книгой в качестве справочника, найдет, что авторы вместо конспективного изложения стандартных методов, находящихся в обращении, попытались изложить применение основных принципов. Хотя в книгу и включено много численных примеров, маловероятно, что инженер-практик всегда найдет здесь ту частную задачу, с которой он столкнулся в данный момент. Однако авторы надеются, что поясняющие примеры всегда принесут некоторую пользу читателю при разборе вопроса о том, как можно применить основные принципы к тому случаю, с которым он столкнулся.

Основное содержание книги и общие контуры каждой главы авторы наметали вместе. Затем каждый из авторов работал над определенными главами независимо: Р. Л. Бисплингхофф — над вопросами прочности, Х. Эшли — над вопросами аэродинамики и Р. Л. Халфмэн — над вопросами экспериментального исследования. Приложения к явлениям аэроупругости были написаны совместно и вся рукопись была снова переработана тремя авторами, чтобы обеспечить единство изложения.

Кембридж, Массачусетс  
Февраль, 1955

*Р. Л. Бисплингхофф,  
Х. Эшли,  
Р. Л. Халфмэн.*



## Глава 1

# ВВЕДЕНИЕ В АЭРОУПРУГОСТЬ

**1-1. Определения.** Термин *аэроупругость* применяется инженерами авиации к важному классу задач, возникающих при конструировании самолета. Аэроупругость часто определяется как наука, изучающая взаимодействие аэродинамических и упругих сил и влияние этого взаимодействия на конструкцию самолета. Проблем аэроупругости не существовало бы, если бы самолетные конструкции были абсолютно жесткими. Современные самолетные конструкции обладают очень большой гибкостью, и эта гибкость является основной причиной различных явлений аэроупругости. Гибкость конструкции сама по себе не нежелательна; однако, когда деформации конструкции возбуждают дополнительные аэродинамические силы, возникают явления аэроупругости. Эти дополнительные аэродинамические силы могут вызвать дополнительные деформации конструкции, которые приведут к возбуждению еще больших аэродинамических сил. В результате подобные взаимодействия деформаций могут иметь тенденцию становиться все меньше и меньше до тех пор, пока не будет достигнуто состояние устойчивого равновесия, или они могут иметь тенденцию к непрерывному увеличению и приведут к разрушению конструкции.

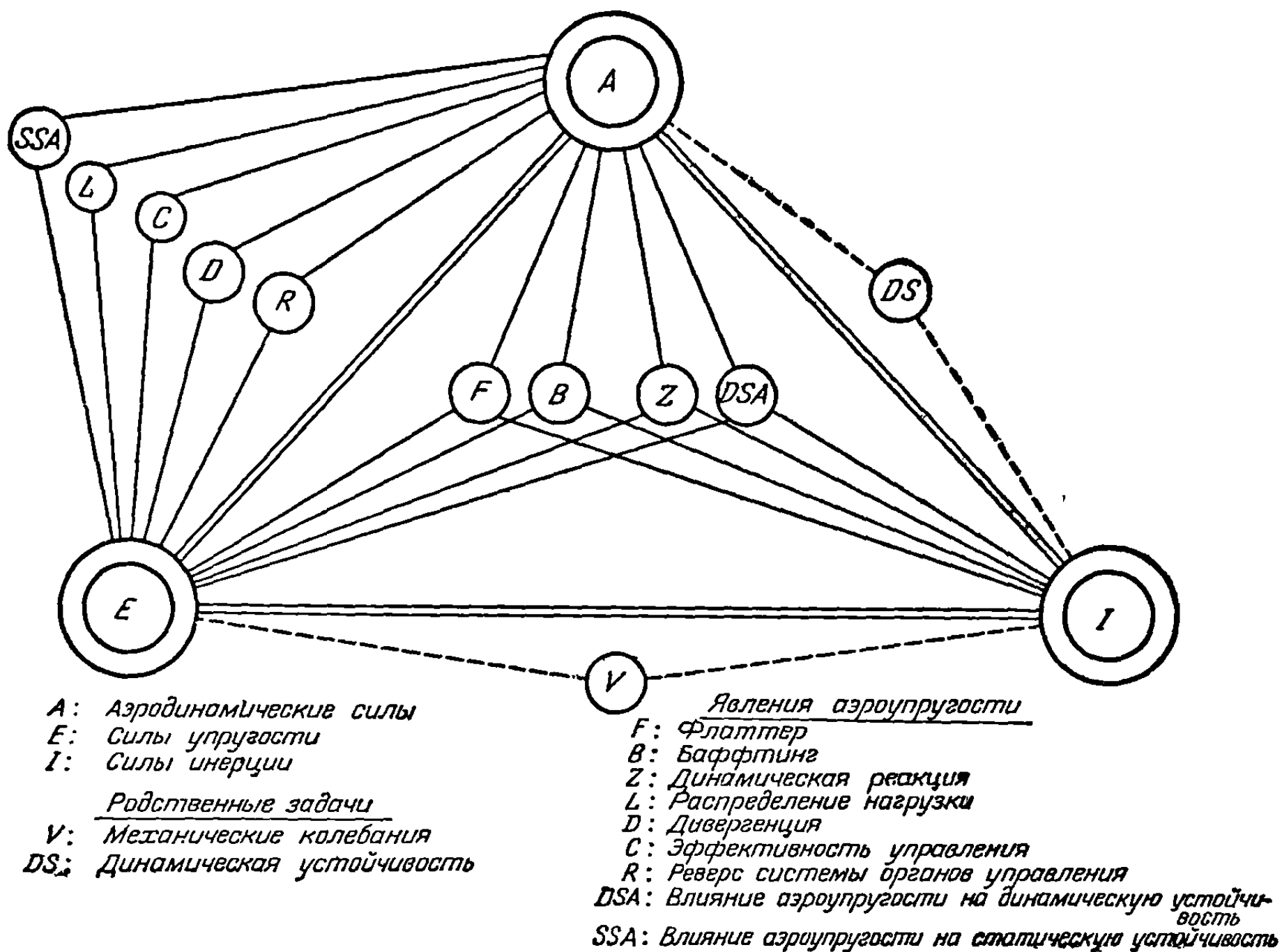
Однако термин *аэроупругость* не является исчерпывающим, так как многие важные явления аэроупругости включают наряду с аэродинамическими и упругими силами также и силы инерции. Мы будем рассматривать как явления, включающие взаимодействие между силами инерции, аэродинамическими и упругими силами, так и явления, включающие взаимодействие между аэродинамическими и упругими силами. В первом случае мы будем иметь динамические, а во втором — статические явления аэроупругости.

Коллар [1—1] остроумно классифицировал задачи аэроупругости при помощи треугольника сил. Три типа сил: аэродинамические, упругие и силы инерции, представленные соответственно символами  $A$ ,  $E$  и  $I$  (см. фиг. 1-1), помещены в вершинах треугольника. Каждое явление аэроупругости может быть нанесено на диаграмму согласно своей связи с тремя вершинами. Например, явления динамической аэроупругости, подобные флаттеру  $F$ , лежат внутри треугольника, так как они включают все три типа сил и должны быть связаны со всеми тремя вершинами. Явления статической аэроупругости, подобные дивергенции  $D$  крыла, лежат снаружи треугольника в верхнем левом углу, так как они включают только аэродинамические и упругие силы. Хотя и трудно определить точно границы вопросов аэроупругости, класс задач, соединенных сплошными линиями с вершинами треугольника на фиг. 1-1, обычно рассматривается в качестве основного класса. Конечно, на диаграмму можно нанести другие задачи, пограничные с рассматриваемыми. Например, задачи механических колебаний  $V$  и аэродинамической устойчивости жесткого тела  $DS$  соединены с вершинами треугольника пунктирными линиями. Очень вероятно, что в известных случаях динамическая устойчивость самолета зависит от упругости конструкции, и поэтому она должна передвинуться внутрь треугольника и будет соответствовать  $DSA$  и рассматриваться как задача динамической аэроупругости.

Целесообразно кратко формулировать определения каждой из задач аэроупругости, помещенных на фиг. 1-1.

*Флаттер, F.* Динамическая неустойчивость, имеющая место при полете самолета на скорости, называемой скоростью флаттера, при которой существенную роль в возникновении неустойчивости играет упругость конструкции.

*Баффтинг, B.* Неустановившиеся колебания элементов конструкции самолета, обусловленные аэродинамическими импульсами, вызванными спутной струей позади крыльев, гондол, выступов фюзеляжа или других элементов самолета.



Фиг. 1-1. Треугольник аэроупругих сил.

*Динамическая реакция, Z.* Неустановившаяся реакция элементов конструкции самолета, порождаемая за счет быстро прикладываемых нагрузок, обусловленных порывами ветра, посадкой, отдачей пушек, резкими движениями рулей или другими динамическими нагрузками.

*Влияние аэроупругости на устойчивость, SA.* Влияние упругих деформаций конструкции на динамическую и статическую устойчивость самолета.

*Распределение нагрузки, L.* Влияние упругих деформаций конструкций на распределение аэродинамических нагрузок на конструкцию.

*Дивергенция, D.* Статическая неустойчивость несущей поверхности самолета в полете на скорости, называемой скоростью дивергенции; при этой скорости упругость несущей поверхности играет существенную роль в возникновении неустойчивости.

*Эффективность управления, C.* Влияние упругих деформаций конструкции на управляемость самолета.

*Реверс системы органов управления, R.* Явление, имеющее место при полете самолета на скорости, называемой скоростью реверса органов управления, при котором ожидаемые эффекты от отклонения данного компонента системы управления целиком уничтожаются за счет упругих деформаций конструкции.

**1-2. Краткий исторический обзор.** До начала второй мировой войны вопросы аэроупругости не имели такого важного значения, какое они имеют теперь. Скорости самолетов до этого времени были сравнительно малы, и те нагрузки, которые должны нести самолетные конструкции согласно нормам прочности, обеспечивали создание конструкции, достаточно жесткой для того, чтобы предотвратить большинство явлений аэроупругости.

Однако по мере роста скоростей при почти неизменных расчетных нагрузках и отсутствии рационального критерия жесткости при проектировании авиационные конструкторы столкнулись с широким кругом задач, которые рассматриваются теперь как задачи аэроупругости.

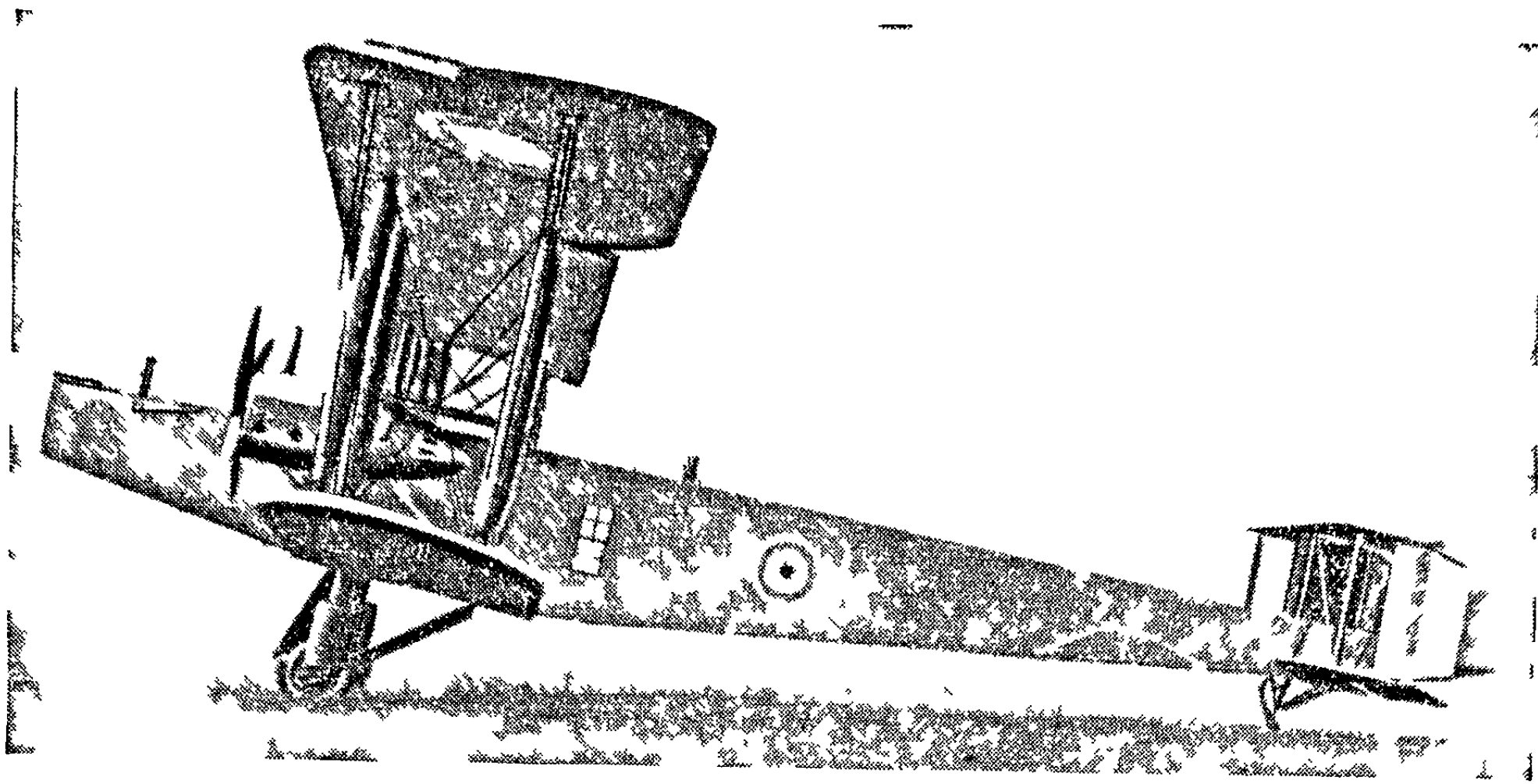
Несмотря на то, что проблемы аэроупругости играли заметную роль в течение сравнительно короткого периода, они оказали со времени начала моторного полета некоторое влияние на конструкцию самолета. Возможно, что первым конструктором, которому пришлось пострадать от столкновения с вопросами аэроупругости, был профессор Смитсонского университета Сэмюель Лангли. В свете современных знаний несчастную поломку крыла, послужившую причиной аварии самолета Лангли на реке Потомак в 1903 г., можно, по-видимому, приписать дивергенции крыла при кручении. Из доводов, выдвигавшихся в то время для объяснения этого происшествия [1—2], наилучшими являются доводы Гриффитса Бруера [1—3], бывшего одно время президентом Королевского авиационного общества (RAS). Явление, послужившее причиной аварии моноплана Лангли, Бруер описал таким же образом, как мы описываем теперь дивергенцию крыла при кручении. Авария самолета Лангли произошла незадолго до того, как братья Райт совершили первый полет на аппарате тяжелее воздуха. Быть может, успех биплана Райт и неудача моноплана Лангли явились исходной причиной приверженности к бипланам на заре самолетостроения. На технические доводы за бипланную схему против монопланной, которые господствовали в течение многих лет, безусловно оказывало влияние отсутствие рационального критерия оценки крутильной жесткости для крыльев моноплана. Хотя перед первой мировой войной французы и немцы сконструировали несколько монопланов с внешними расчалками, моноплан как военная машина перестал существовать в 1917 г. Только в середине 30-х годов конструкторы отважились построить военный моноплан с высокими летными качествами.

В те дни, когда военные самолеты были исключительно бипланами, первой, наиболее широко распространенной проблемой аэроупругости была проблема флаттера хвостового оперения. Один из многих документально зафиксированных случаев флаттера имел место на горизонтальном оперении двухмоторного бомбардировщика Хэндли Пейдж 0/400 (см. фиг. 1-2) в начале первой мировой войны. Ланчестера и Бэрстоу попросили исследовать причину очень сильных колебаний фюзеляжа и поверхностей оперения. Они обнаружили [1—4 и 1—5], что фюзеляж и хвостовое оперение имели две основные формы колебаний низкой частоты. Первая представляла собой колебания левого и правого рулей высоты около своих шарниров со сдвигом фаз в  $180^\circ$ . Такие колебания были возможны потому, что рули не были укреплены на общей оси, а соединялись с помощью сравнительно слабой пружины, снабженной длинными тросами управления, с помощью которых каждый руль присоединялся к ручке управления. Вторая форма представляла собой крутильные колебания фюзеляжа. Возможность возникновения самовозбуждающихся колебаний с наложением отдельных форм колебаний была признана причиной вибраций. Одной из возникших тогда предохранительных мер было предложение укреплять оба руля на одной оси. Второй случай флаттера хвостового оперения по той же самой причине имел место на самолете ДН-9 в 1917 г. Было потеряно несколько жизней, прежде чем нашли методы борьбы с этим явлением. Средство борьбы было то же самое, которое применялось и на самолете Хэндли Пейдж, и с тех пор жесткое



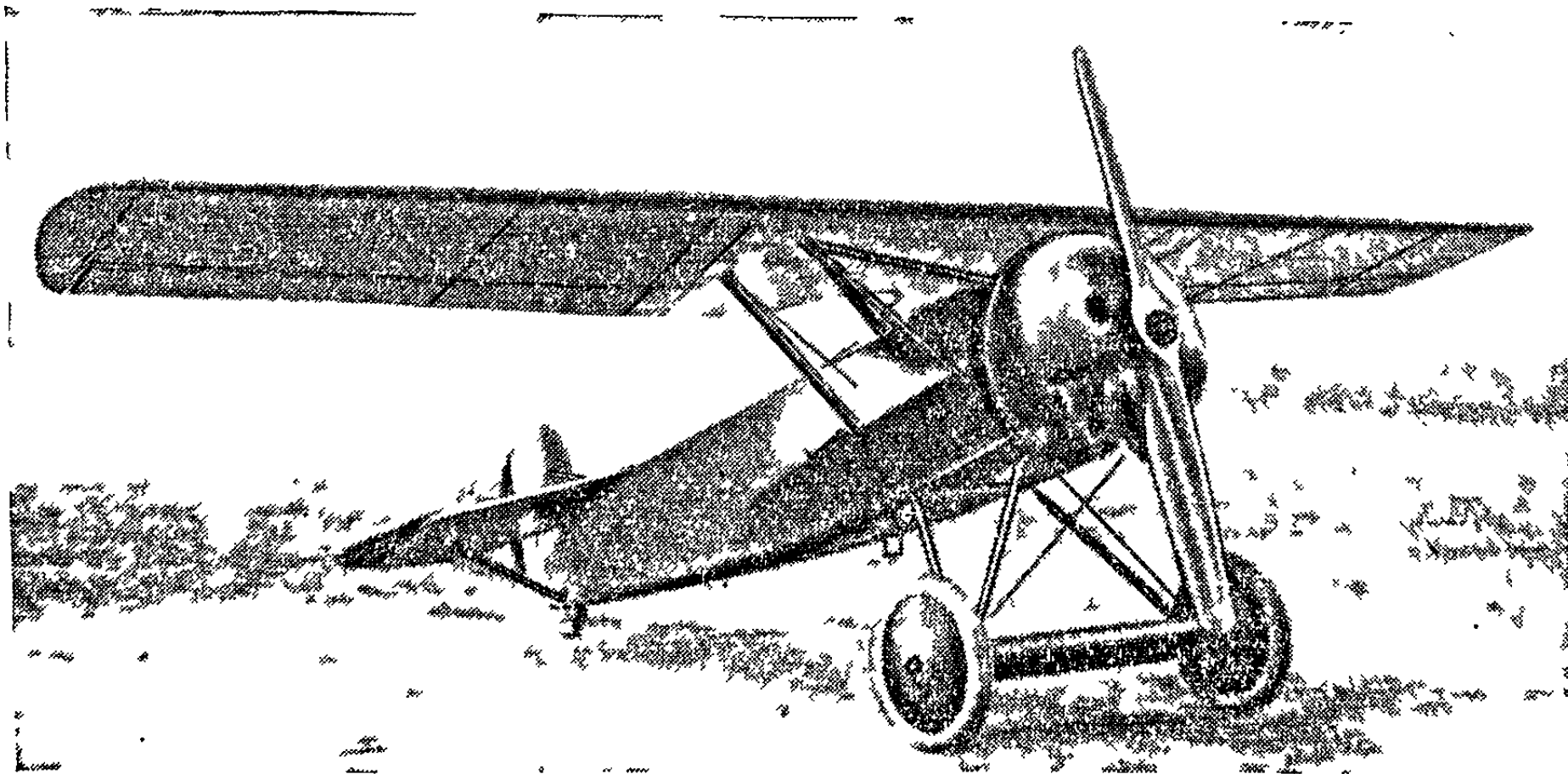
(по отношению к кручению) соединение рулей высоты стало одной из конструктивных черт самолета.

Проблемы аэроупругого крыла появились тогда, когда конструкторы оставили схему биплана с ее расчалками между крыльями и сравнительно высоким



Фиг. 1-2. Бомбардировщик Хэндли-Пейдж O/400.

сопротивлением кручению и перешли к схеме моноплана. Последняя часто имела недостаточную жесткость на кручение, что вело к возникновению флаттера, потере эффективности элеронов и изменению распределения нагрузки вследствие влияния деформаций. Первый пример подобного рода имел место с самолетом



Фиг. 1-3. Самолет Фоккер D-8.

Фоккер D-8, изображенным на фиг. 1-3. В первоначальном варианте конструкции этого самолета, представляющего собой свободно несущий моноплан с высокорасположенным крылом, жесткость на кручение оценивалась с помощью критерия, который применялся к бипланам. Самолет D-8 был пущен в производство благодаря своим превосходным характеристикам. В первые же дни воздушных боев у самолетов при пикировании на большой скорости несколько раз

имели место поломки крыльев. Так как эти самолеты в первую очередь получили самые лучшие летчики и авиационные отряды, создавалась опасность уничтожения цвета немецких воздушных сил. После того как армейские инженеры и компания «Фоккер» пытались взвалить ответственность друг на друга, в армии провели статические испытания на прочность на шести крыльях, которые показали, что прочность крыльев достаточна для того, чтобы выдержать требуемую предельную перегрузку, равную шести. Это породило серьезную дилемму, и для Антони Фоккера стало ясно, что нужно либо отыскать причину поломок, либо прекратить производство D-8. Статические испытания были предприняты компанией «Фоккер», и на этот раз прогибы были тщательно измерены от одного конца крыла до другого. Фоккер высказал свои заключения в следующих словах [1—6]: „Я обнаружил, что с увеличением нагрузки угол атаки концов крыльев заметно увеличивался. Внезапно меня осенила мысль, что это увеличение угла атаки было причиной поломки крыльев, так как логически нагрузка, обусловленная давлением при крутом пикировании, должна увеличиваться быстрее у концов крыла, нежели в середине. Проистекающее отсюда скручивание крыла являлось причиной его поломки при нагрузках во время боевых маневров“. Это, кажется, первый документально зафиксированный случай, когда благодаря влиянию статической аэроупругости при довольно высокой скорости произошло такое перераспределение воздушной нагрузки, которое повлекло за собой поломку крыла.

В более позднем эксперименте с D-8, после войны, инженеры военно-воздушных сил США в Мак-Кук Филде (Дэйтон, Огайо) заметили очень сильный, но не приводящий к разрушению случай изгибного флаттера системы крыло-элерон. Это явление было устранено с помощью статической балансировки элеронов около оси шарниров. Техника подобной балансировки была, по-видимому, впервые указана Баумхауером и Конигом [1—7] в 1922 г. Несколько гоночных монопланов в 1920 и 1930 гг. были подвержены некоторым видам флаттера системы крыло-элерон. Обычно применявшимся защитным и предупредительным средством являлась весовая балансировка.

Период развития свободнонесущих монопланов был периодом серьезных исследований в области аэроупругости. На самых ранних этапах возникновения монопланной конструкции проблемы аэроупругости решались методами попыток. Теория распределения нагрузки по крылу и теория дивергенции крыла были впервые созданы Гансом Рейсснером в 1926 г. [1—8]. Теория потери поперечной управляемости и реверса элеронов была опубликована шесть лет спустя Роксби Коксом и Пагсли в 1932 г.

Для целей проектирования механизм флаттера в потенциальном потоке к 1935 г. был достаточно хорошо разобран, главным образом благодаря ранним работам Глауэрта [1—10], Фрэзера и Дункана [1—11], Кюсснера [1—12] и Теодорсена [1—13]. Однако лишь немногие конструкторы были в состоянии понимать теории, изложенные в первых работах, а большинство конструкторов не было расположено доверять математикам при определении размеров элементов конструкций, необходимых для того, чтобы предотвратить влияние аэроупругости.

**1-3. Влияние явлений аэроупругости на конструкцию.** Явления аэроупругости оказывают большое влияние на конструкцию элементов современных высокоскоростных самолетов. Несколько меньшее, но не менее важное влияние явления аэроупругости оказывает на распределение масс, форму несущих поверхностей в плане и конструкцию органов управления.

**Флаттер.** Из всех явлений аэроупругости флаттер оказывает, может быть, наиболее далеко идущее влияние на конструкцию высокоскоростного самолета. Современный самолет подвержен многим формам флаттера. Классический тип флаттера связан с потенциальным потоком и обычно, но не обязательно, включает взаимодействие двух или более степеней свободы. Неклассический тип

флаттера, который до сих пор трудно анализировать на чисто теоретической основе, может иметь место при сорванном потоке, периодических срывах потока с прилеганием его вновь, при режимах потери скорости и при различных эффектах запаздывания между аэродинамическими силами и режимом движения самолета. Предупредительные меры и средства борьбы с флаттером обычно заключаются либо в увеличении жесткости, либо в уменьшении взаимодействия (между степенями свободы), или в комбинации того и другого. Наиболее важным параметром жесткости с точки зрения флаттера является жесткость крыла на кручение. При расчетах на флаттер нередко проверяется выбор толщины обшивки крыла. Конструктивная схема крыла определяется, конечно, либо критерием прочности, либо критерием жесткости. Например, если элементы конструкции крыла, воспринимающие скручивающую нагрузку, спроектированы в соответствии с требованием жесткости, крыло, по-видимому, будет представлять собой конструкцию, в которой нормальные напряжения в обшивке воспринимаются минимальным количеством стрингеров и лонжеронов. Для того чтобы подкрепить сильно нагруженную обшивку, этот тип крыла потребовал бы несколько нервюр по размаху. Очевидно, что для крыла, спроектированного первоначально в соответствии с требованиями прочности и предназначенного для того, чтобы нести определенную нагрузку, более высокую жесткость на кручение и, следовательно, более высокую скорость флаттера мы получим в том случае, когда отношение площади подкрепляющего элемента к площади обшивки будет минимальным. Вдобавок, использование более прочных сплавов, у которых модуль упругости соответственным образом не повышается, ведет к тому, что для крыльев, спроектированных согласно с требованиями прочности, флаттер становится более опасным. Часто тяжелые массы в крыле располагаются по соображениям оптимальных условий для предотвращения флаттера. Например, при известном распределении масс для предотвращения флаттера может потребоваться большая жесткость крыла, а следовательно, и больший вес конструкции, нежели при некотором другом распределении масс. По этой причине в стадиях проектирования, для того чтобы определить оптимальное распределение масс с точки зрения предотвращения флаттера, часто производят аналитическое исследование и исследование на моделях.

Значительное влияние на характеристики флаттера оказывают также форма крыла в плане и удлинение. Уменьшение удлинения и увеличение стреловидности увеличивают скорость флаттера, тогда как увеличение удлинения и уменьшение стреловидности (включая стреловидность вперед), уменьшает скорость флаттера. Соображения, связанные с флаттером, могут повлиять на расчет органов управления (при определении аэродинамической и весовой балансировки), на расположение шарниров и потребную степень необратимости системы привода.

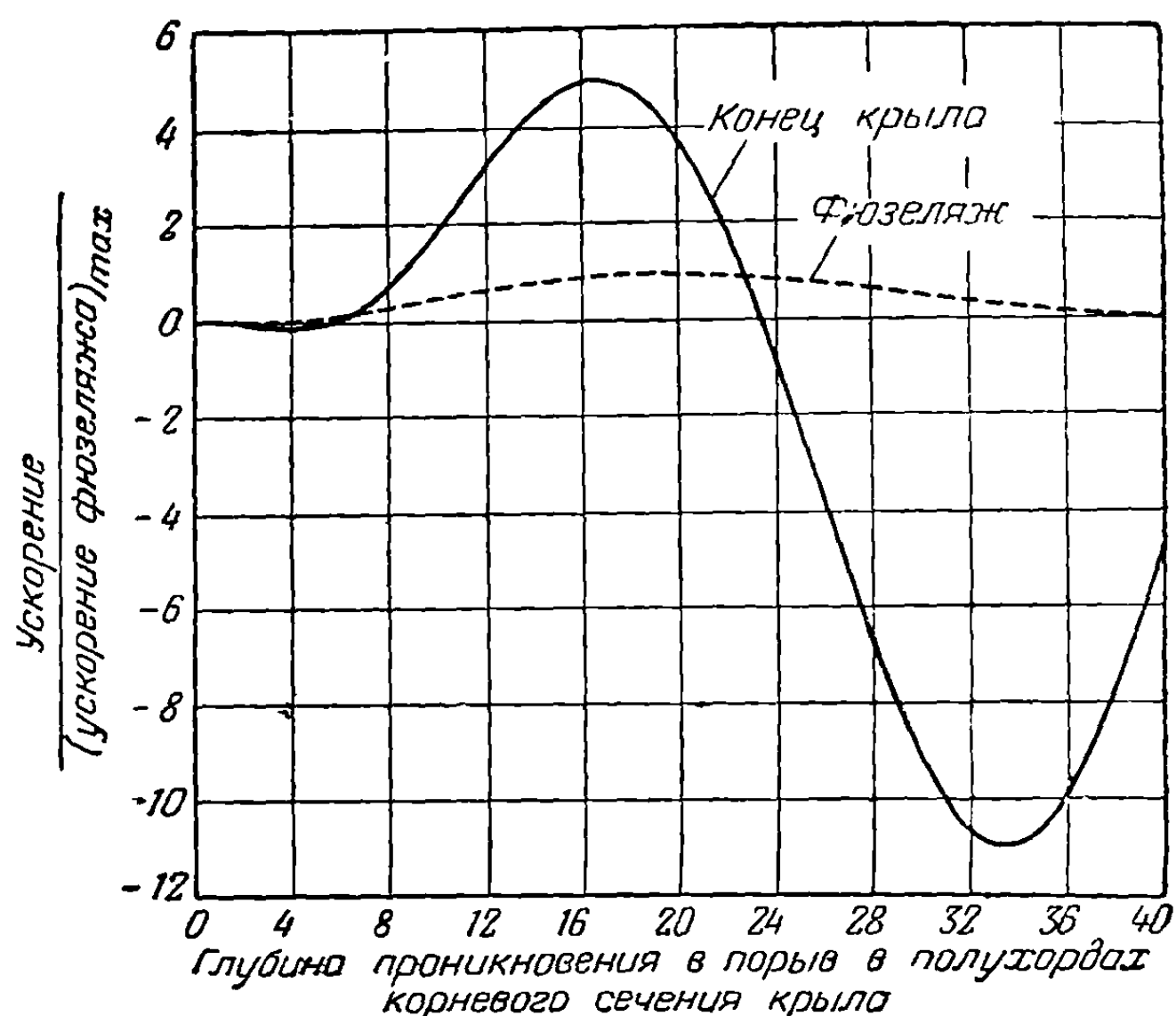
*Бафтинг.* Опасное явление бафтинга, с которым сталкиваются конструкторы, имеет место во время выхода самолета-истребителя на режим  $C_{L \max}$  на больших скоростях. Последний часто сопровождается резкими неустановившимися колебаниями хвостового оперения, обусловленными аэродинамическими импульсами от спутной струи крыла. Основные, требующие разрешения задачи состоят в уменьшении силы этих колебаний и обеспечении соответствующей прочности. Расчет на прочность очень труден. Задача об определении динамических усилий, обусловленных явлением бафтинга, аналитически пока еще не решена. Основным препятствием является недостаточное знание характера спутной струи позади крыла на режиме срыва. К настоящему времени конструкторы сильно облегчили себе проблемы бафтинга, главным образом благодаря соответствующему расположению хвостового оперения и применению самолетных конструкций обтекаемых форм.

*Проблемы динамических нагрузок.* Этот класс задач аэроупругости основное влияние оказывает на расчет элементов конструкции самолета. При

определении расчетных нагрузок на конструкцию самолета в условиях ускоренного движения обычно считается, что самолет является абсолютно жестким телом. Элементы конструкции, рассчитанные по нагрузкам, вычисленным на основании этого предположения, могут разрушиться за счет дополнительного динамического перенапряжения. Внешние, быстро прикладываемые нагрузки не только являются причиной поступательного движения и вращения самолета как твердого тела, но и стремятся возбудить колебания конструкции. Дополнительные силы инерции, связанные с этими колебаниями, обуславливают возникновение дополнительного динамического напряжения. Динамические напряжения обычно проявляются в виде увеличения изгибных и крутильных напряжений в лонжеронах крыла и фюзеляжа. При проектировании этих лонжеронов необходимо принимать во внимание динамические нагрузки и увеличивать площади сечений, воспринимающих нормальные и касательные напряжения. Двумя, может быть, наиболее важными проблемами динамической реакции являются проблемы порывов ветра и посадки. Для больших самолетов режим порыва является обычно определяющим режимом при расчете на прочность. Явления аэроупругости могут оказать серьезное влияние на расчетные условия режима порыва. Например, конструктор может ожидать, что динамическая реакция прямого крыла в условиях порыва может привести к тому, что изгибающие моменты у корневого сечения крыла будут на 15—20% больше значений,

подсчитанных в предположении жесткого крыла. Реакция тонкого упругого стреловидного крыла на порыв ветра, в особенности на больших скоростях, представляет значительный практический интерес. Упругие деформации и частотная реакция крыла играют значительную роль в распределении нагрузки по крылу. Распределения нагрузки, подсчитанные в предположении жесткого крыла, часто содержат слишком большие ошибки, чтобы ими можно было воспользоваться, и поэтому конструкторы стреловидных крыльев принуждены учитывать основные эффекты аэроупругости. В качестве иллюстрации большого влияния упругости на характеристики движения самолета рассмотрим данные, приведенные на фиг. 1-4. Здесь помещены результаты расчета, иллюстрирующие разницу между ускорениями фюзеляжа и конца крыла для типичного стреловидного крыла при входе в порыв ветра на высоте 11 000 футов при эквивалентной воздушной скорости 460 миль в час. Пунктирная кривая дает картину изменения ускорения фюзеляжа, имеющую только один пик ускорения. Сплошная кривая изображает отношение ускорения конца крыла к максимальной величине ускорения фюзеляжа. Заметная разница в ускорениях, показанная на фиг. 1-4, указывает на важную роль упругости крыла при определении истинных распределений нагрузок по стреловидным крыльям.

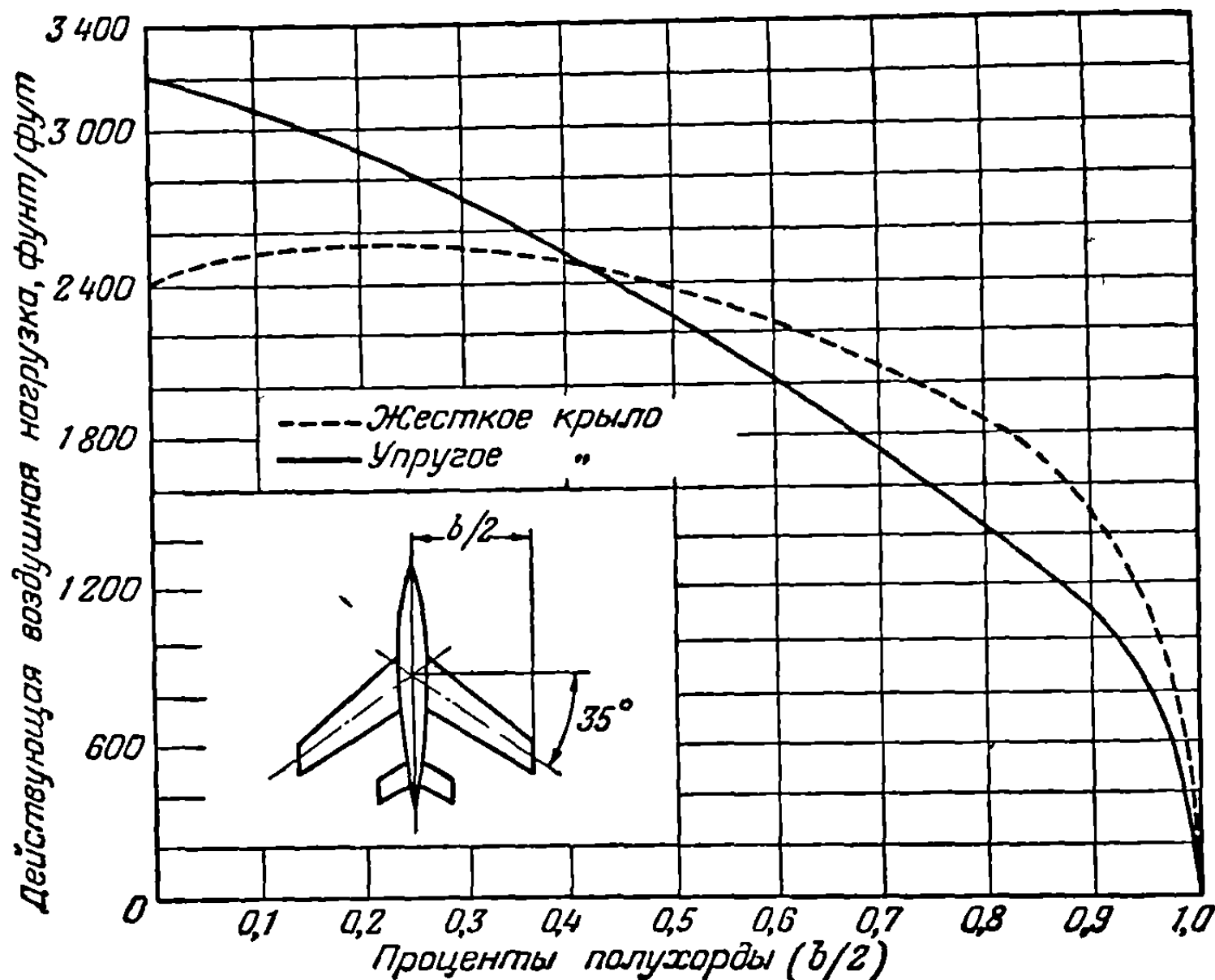
**Распределение нагрузки.** При полете с большой скоростью деформации конструкции стремятся перераспределить воздушные нагрузки. Это может явиться причиной того, что распределение воздушных нагрузок будет значительно



Фиг. 1-4. Сравнение ускорений конца крыла и фюзеляжа для самолета со стреловидным крылом при движении через порыв ветра.



отличаться от распределения, рассчитанного в предположении абсолютной жесткости конструкции. Необходимо поэтому, чтобы элементы конструкции были рассчитаны на распределение воздушной нагрузки, соответствующее деформированной конструкции. Рассмотрим кратко случай простого прямого крыла, у которого центр кручения расположен позади аэродинамического центра. Крутящий момент относительно центра кручения, обусловленный подъемной силой, приложенной в аэродинамическом центре, стремится закрутить крыло. Это приводит к увеличению угла атаки и дальнейшему увеличению подъемной силы. Возросшая подъемная сила в свою очередь является причиной нового увеличения угла закручивания. Для скоростей ниже критической, называемой



Фиг. 1-5. Распределение воздушной нагрузки по жесткому и упругому стреловидным крыльям при маневре с перегрузкой  $2g$ .

скоростью дивергенции, приращения угла закручивания и подъемной силы становятся все меньше и меньше до тех пор, пока не достигается состояние устойчивого равновесия. Задача о разыскании распределения нагрузки на крыло является задачей о разыскании распределения углов закручивания вдоль крыла, соответствующего этому состоянию устойчивого равновесия. Явление такого же типа имеет место в каждой задаче о распределении нагрузки, идет ли речь о прямых или стреловидных крыльях или других элементах конструкции. На фиг. 1-5 изображено, например, сравнительное распределение воздушной нагрузки по жесткому и упругому стреловидным крыльям. Можно видеть, что в случае стреловидного крыла влияние деформаций крыла оказывается благоприятным в том смысле, что они способствуют смещению центра давления к корневому сечению крыла, а не к концам крыла, как это происходит в случае прямого крыла. Это является следствием уменьшения угла атаки крыла в плоскости течения, сопровождающего деформации изгиба стреловидного крыла.

**Дивергенция.** Наиболее часто встречающейся проблемой дивергенции является задача о дивергенции при кручении прямого крыла. Рассмотрим случай простого прямого крыла, у которого центр кручения расположен позади аэродинамического центра. Когда скорость такого крыла достигает скорости дивергенции при кручении, то приращение аэродинамического крутящего момента, обусловленного произвольным приращением угла закручивания, оказы-

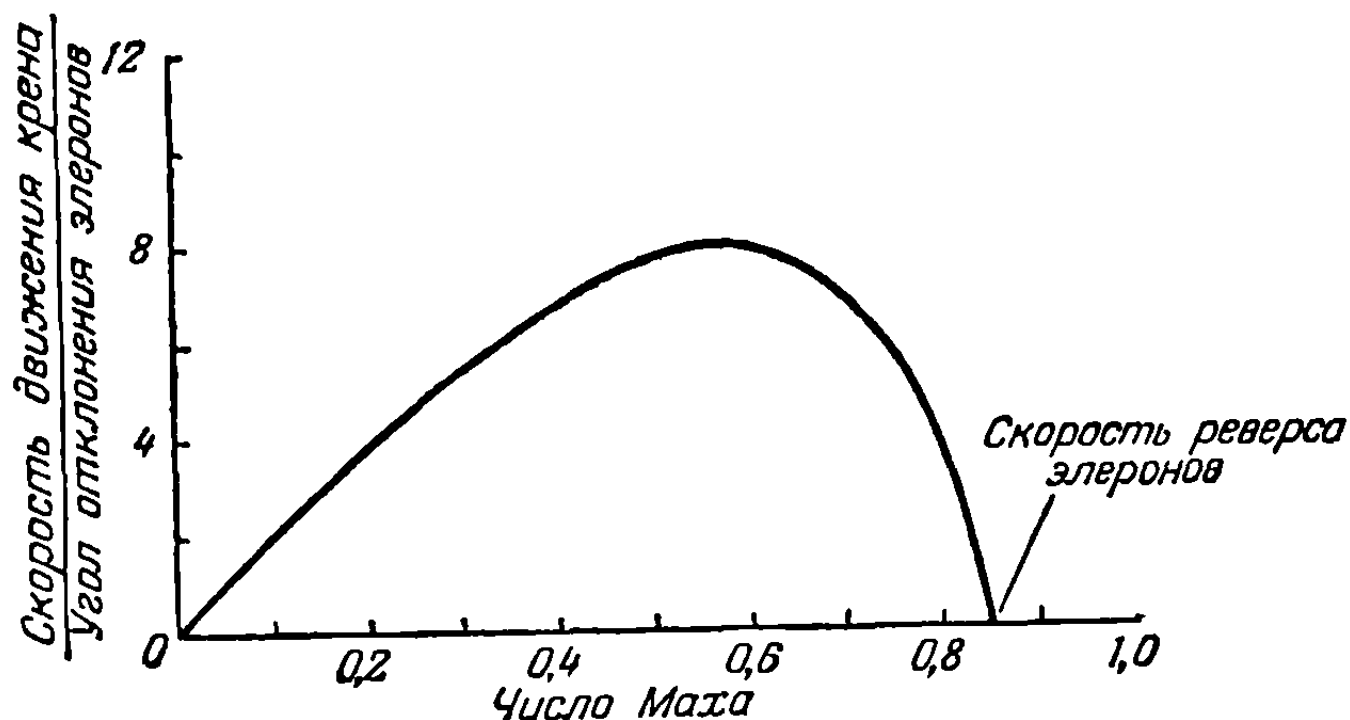
вается в точности равным приращению упругого восстанавливающего момента кручения. Когда скорость крыла превышает скорость дивергенции при кручении, то приращение аэродинамического крутящего момента превышает приращение упругого восстанавливающего момента кручения. Конструктивными параметрами, влияющими на дивергенцию прямых крыльев, являются в основном крутильная жесткость крыла и расстояние между центром кручения и аэродинамическим центром. Увеличение скорости дивергенции данного крыла за счет увеличения крутильной жесткости является дорогостоящей операцией, приводящей к значительному увеличению веса. Способом увеличения скорости дивергенции, к которому более часто прибегают конструкторы, является такой выбор конструктивных размеров крыла, который позволил бы переместить центр кручения вперед и за счет этого уменьшить расстояние между центром кручения и аэродинамическим центром. Например, прямое крыло, воспринимающее нагрузку коробчатым элементом в форме буквы D, имеет переднее расположение центра кручения и, как следствие, высокую скорость дивергенции. Скорости дивергенции стреловидных крыльев не являются для конструктора делом первостепенной важности. Однако скорости дивергенции крыльев с передней стреловидностью настолько низки, что по одной этой причине передняя стреловидность как конструктивная черта крыльев практически исключается. Когда элерон играет важную роль в процессе возникновения дивергенции, то явление называется дивергенцией системы крыло-элерон. Поверхности горизонтального и вертикального оперений имеют каждая определенную скорость дивергенции, на величину которой могут оказывать большое влияние рули высоты и направления.

*Эффективность рулей и реверс.* Вследствие упругих деформаций конструкции у самолета с обычными формами несущих поверхностей в плане может произойти значительная потеря эффективности элеронов, рулей высоты и направления. Для качественного описания этих явлений рассмотрим эффективность элерона на дозвуковых скоростях. Обычно подъемная сила на крыле с опущенным элероном увеличивается, а на крыле с поднятым элероном уменьшается. За счет этого возникает момент крена. Опущенный элерон ведет к возникновению крутящего момента, который стремится закрутить носик крыла вниз и уменьшить угол атаки, тогда как поднятый элерон ведет к возникновению крутящего момента, стремящегося увеличить угол атаки. Отсюда видно, что закручивание крыла приводит к уменьшению момента крена по сравнению с соответствующими значениями для жесткого крыла. Скручивающие крыло моменты, обусловленные отклонением элеронов, увеличиваются пропорционально квадрату скорости, тогда как упругие восстанавливающие крутящие моменты при изменении скорости остаются постоянными. Таким образом, чем выше оказываются достигнутые скорости, тем меньше становятся моменты крена, пока, наконец, не будет достигнута такая скорость, при которой отклонения элеронов не приводят к возникновению момента крена. Эта скорость называется скоростью реверса элеронов. При скорости, превосходящей скорость реверса, действие элеронов становится обратным. Для того чтобы дать некоторое представление о порядке этих величин, на фиг. 1-6 приведена зависимость эффективности элеронов от скорости полета на уровне моря для самолета типа истребителя времен второй мировой войны. Эффективность элерона измерялась при этом отношением угловой скорости крена к углу отклонения элерона.

Способ избежать реверса элеронов на прямом крыле с обычными элеронами почти всецело состоит в том, чтобы обеспечить достаточную крутильную жесткость крыла. В случае крыла со стреловидностью назад, где реверс элеронов является очень серьезной проблемой, для повышения скорости реверса элеронов должна быть увеличена изгибная жесткость. Увеличение изгибных и крутильных жесткостей часто сопровождается неприемлемо большим увеличением веса, и поэтому должны быть найдены другие средства повышения скорости

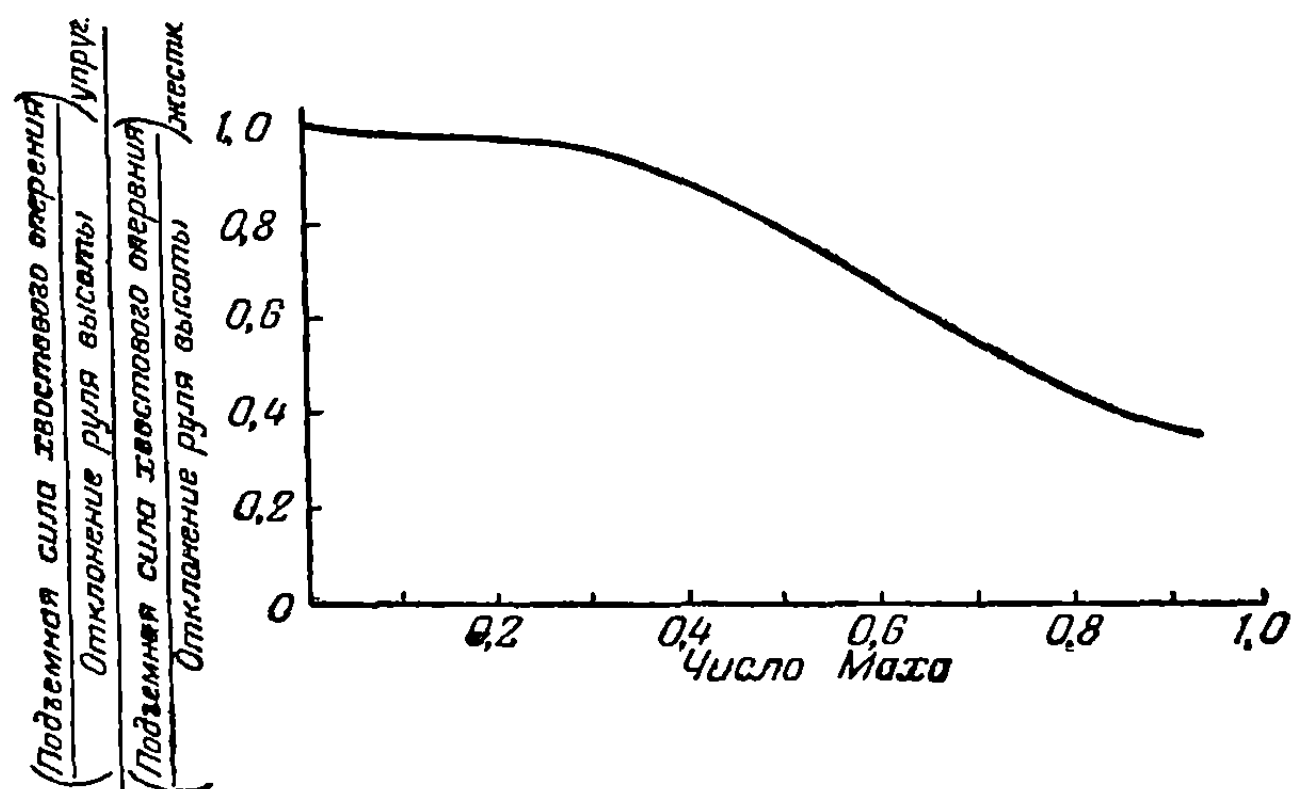
реверса. Другие методы получения моментов крена, такие, как применение спойлеров и подвижных концов крыла, доказали свою эффективность.

Эффективность и реверс рулей высоты и рулей направления представляют собой явления несколько менее критические, нежели эффективность и реверс



Фиг. 1-6. Влияние скорости на эффективность элеронов.

элеронов. Они осложняются сравнительно большим числом упругих элементов, которые дают свои составляющие к суммарной деформации поверхностей хвостового оперения. Например, деформация фюзеляжа и узлов крепления хвостового оперения к фюзеляжу часто также важны, как и деформации самого хвостового оперения. На фиг. 1-7 изображено уменьшение подъемной силы хвостового оперения, приходящееся на один градус отклонения руля высоты, за счет упругих деформаций, которые можно ожидать у самолета типа истребителя при полете на уровне моря.

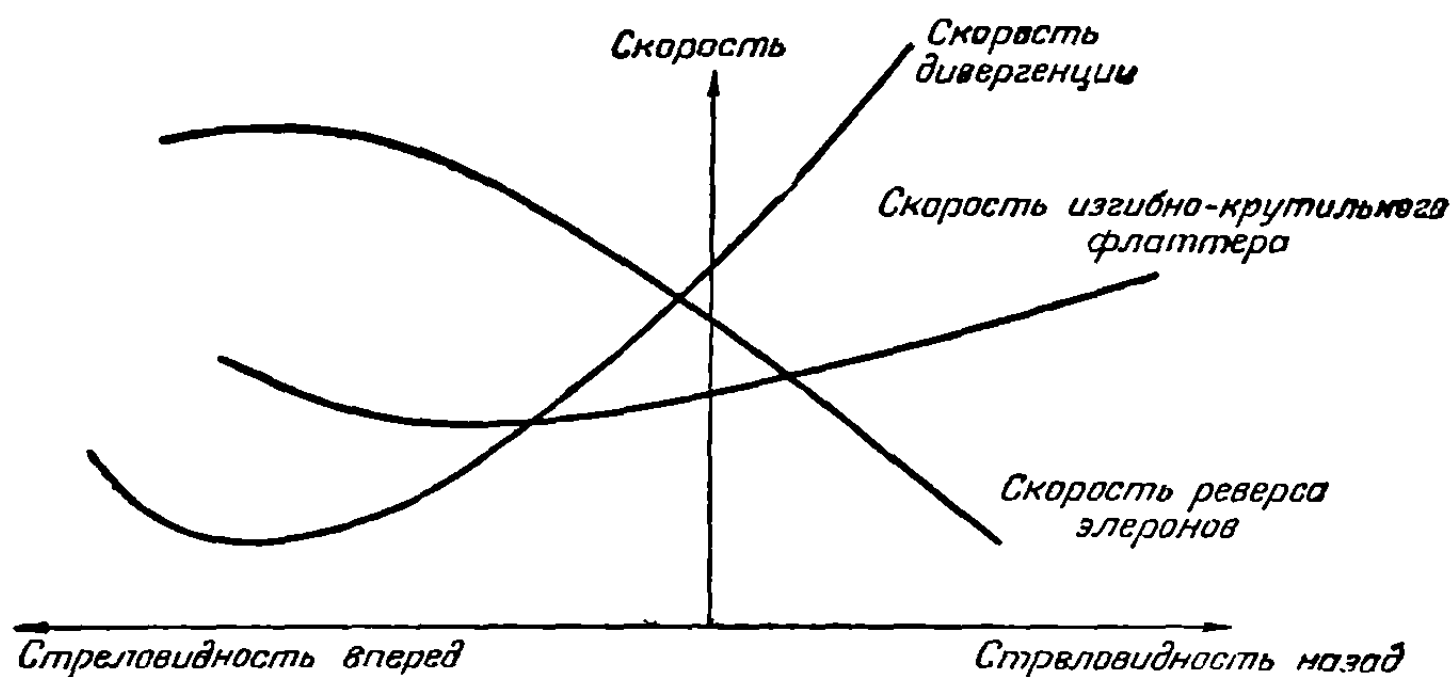


Фиг. 1-7. Влияние скорости на эффективность руля высоты.

Следует отметить, что флаттер и дивергенция соответствуют состояниям аэроупругой неустойчивости и что скорости, превосходящие критические скорости флаттера и дивергенции, приводят к действительному разрушению конструкции. Однако реверс рулей не является условием неустойчивости, и скорости, превосходящие скорость реверса рулей, приводят только к обратному действию системы управления и не обязательно ведут к разрушению конструкции. Поскольку эффективность системы управления оказывает серьезное влияние на маневренность, важно, чтобы конструктор системы управления вполне разобрался в этом явлении. Для любого самолета большая потеря эффективности рулей в диапазоне летных скоростей не может быть терпима.

Следует заметить, что, когда скорость самолета приближается к околосвуковой или сверхзвуковой скорости, в дополнение к рассмотренным здесь эффектам аэроупругости на эффективность рулей оказывают влияние и другие чисто аэроупругие явления.

1-4. Сравнение критических скоростей крыла. В предшествующих пунктах мы видели, что обычное крыло имеет три критические скорости, причем каждая из них представляет определенную важность для конструктора.



Фиг. 1-8. Сравнение критических скоростей крыла.

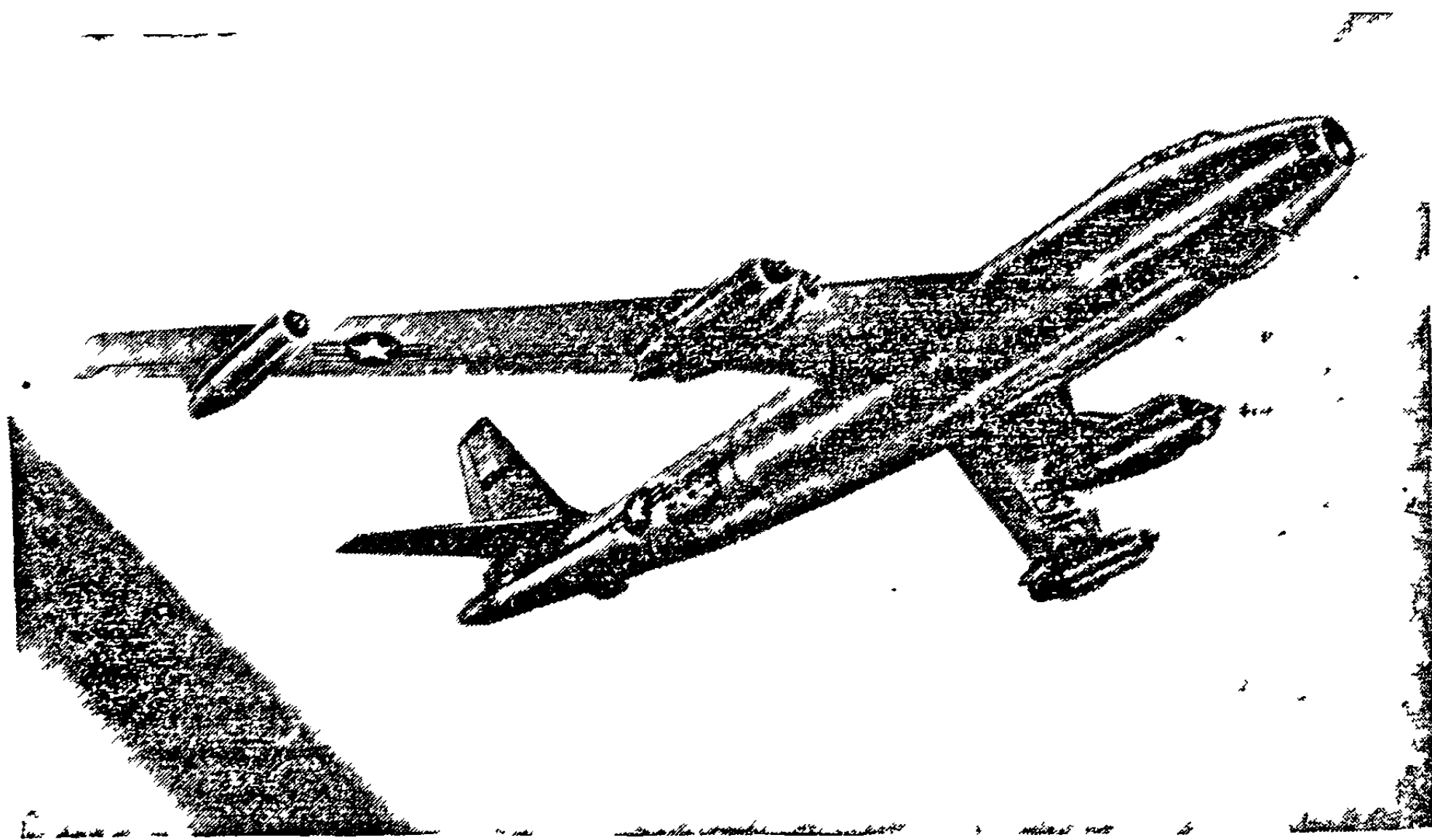
Этими скоростями являются скорости флаттера, дивергенции и реверса элеронов. Сравнение их относительной величины является необходимым процессом при проектировании крыла. В случае прямых нестреловидных крыльев обычной конструкции дивергенция крыла при кручении, как правило, имеет место при скорости, большей скорости реверса элеронов, которая в свою очередь превышает скорость изгибно-крутильного флаттера. В случае крыла со стреловидностью вперед можно ожидать, что скорость дивергенции будет меньше скорости флаттера, а последняя в свою очередь будет меньше скорости реверса элеронов. Для крыла со стреловидностью назад скорость реверса элеронов меньше скорости флаттера, которая в свою очередь меньше скорости дивергенции. На фиг. 1-8 изображено качественное соотношение между критическими скоростями для типичного крыла с переменной задней и передней стреловидностью.



## Глава 2

# ДЕФОРМАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ САМОЛЕТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СТАТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

2-1. Введение. Современные самолеты имеют самую разнообразную геометрическую форму. С одной стороны, мы встречаемся с крыльями большого удлинения, подобными тонким балкам, с другой стороны — с треугольными крыльями малого удлинения, напоминающими пластины. Самолет Боинг В-47, изображенный на фиг. 2-1, имеет крылья первого типа, в то время как самолет Конвейр XF-92А, изображенный на фиг. 2-3, представляет собой прекрасный пример самолета с крыльями второго типа. Фюзеляж может быть длинным и тонким или же его может вовсе не быть, как в случае летящего крыла.



Фиг. 2-1. Самолет Боинг В-47.

Устройство и типы несущих элементов также могут быть самыми разнообразными. Поскольку самолеты предназначаются для самых разнообразных целей, естественно ожидать большого разнообразия в их геометрической и конструктивной конфигурации.

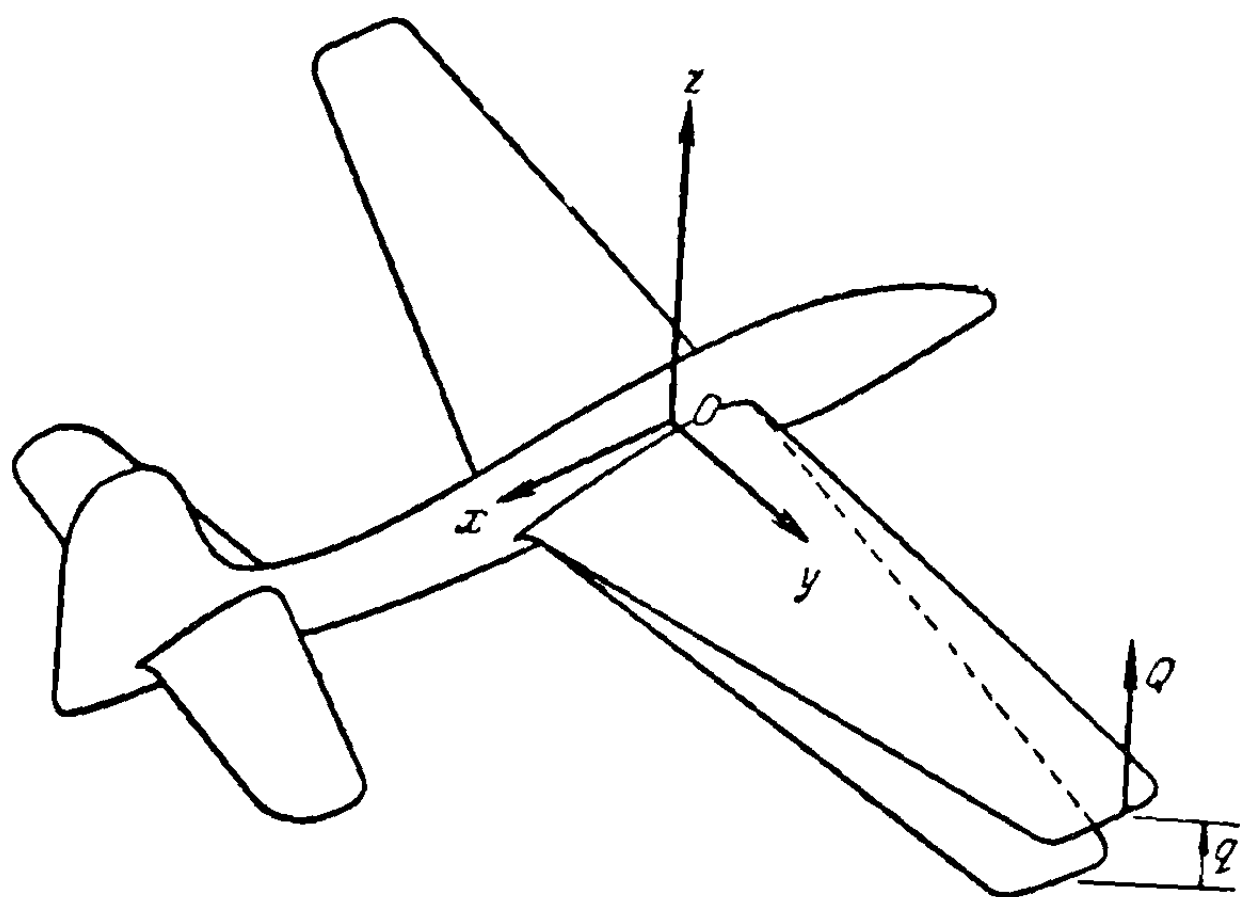
Цель настоящей главы состоит в рассмотрении методов исследования деформаций конструкций самолета под действием статических нагрузок. Рассмотрим, например, упругий самолет, схематически изображенный на фиг. 2-2. В произвольно выбранной точке  $O$  центральной оси зафиксируем ортогональную систему осей координат таким образом, чтобы оси  $x$  и  $z$  лежали в плоскости симметрии. Имея в виду рассмотрение только упругих деформаций, предположим, что конструкция закреплена в точке  $O$  так, что линейные и угловые смещения

в этой точке равны нулю, а упругие линии и поверхности, определяемые деформированным крылом, касаются в этой точке плоскости  $xu$ . Можно также предположить, не уменьшая общности рассуждений, что плоскость  $xz$  является одновременно плоскостью упругой и геометрической симметрии.

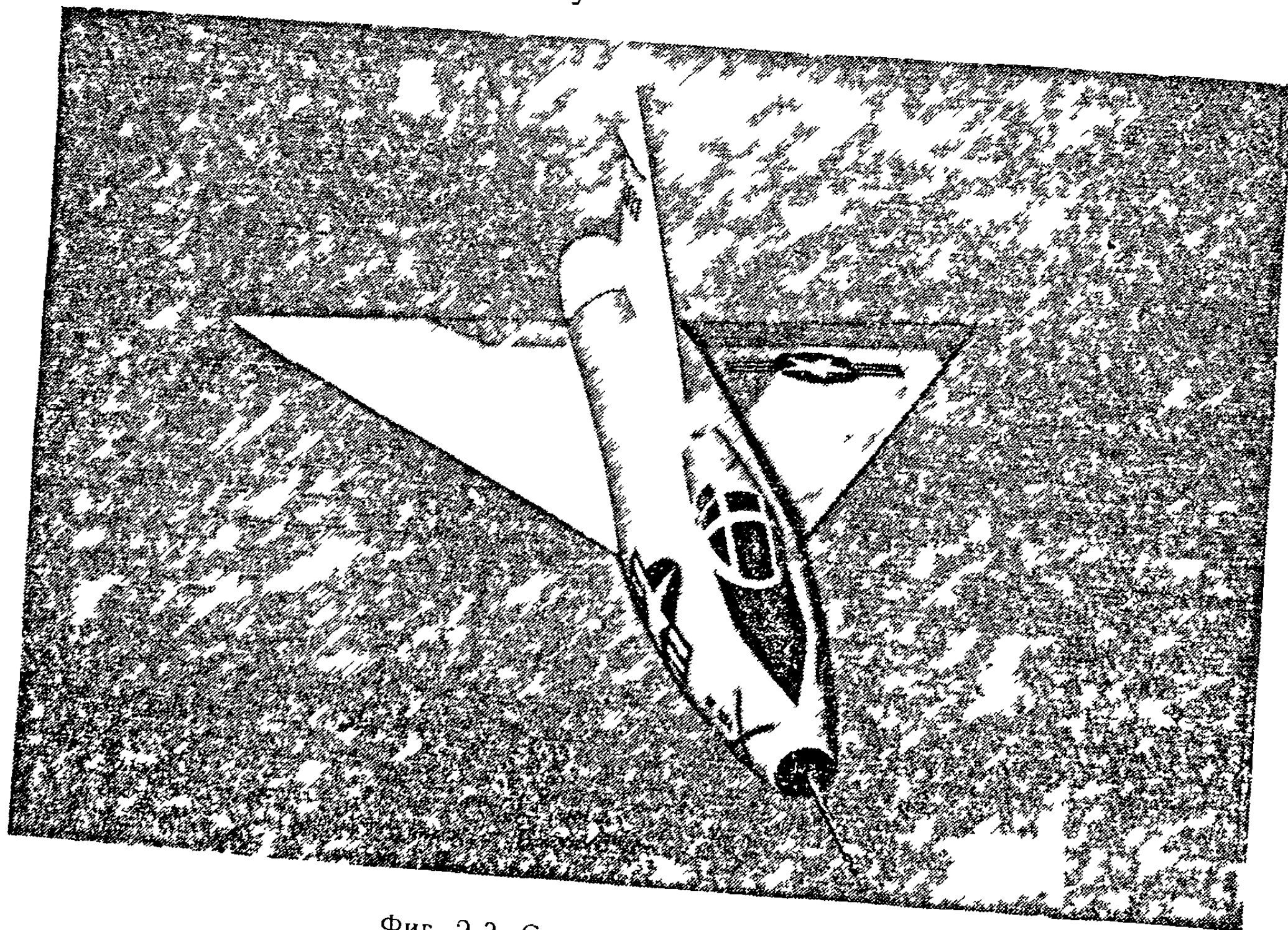
**2-2. Упругие свойства конструкций.** В этой книге мы будем предполагать, что рассматриваемые конструкции самолета являются идеально упругими. Это означает, что при удалении внешних сил конструкции принимают свою первоначальную форму. Опыты над конструкциями самолета показывают, что в известных пределах приложенная сила  $Q$  и соответствующий ей прогиб  $q$ , изображенные на фиг. 2-2, связаны соотношением

$$q = CQ, \quad (2-1)$$

где  $C$  — некоторый коэффициент пропорциональности. Таким образом, сила и прогиб линейно связаны между собой и нагруженную конструкцию можно рассматривать как линейную систему.



Фиг. 2-2. Сосредоточенная сила, приложенная к упругой конструкции



Фиг. 2-3. Самолет Конвейр XF-92A.

В тонкостенных самолетных конструкциях упругое выпучивание может вызвать разрыв непрерывности в диаграмме зависимости между силой и вызываемым ею смещением даже в тех случаях, когда напряжения, испытываемые материалами конструкции, относительно невелики. Мы будем предполагать упру-

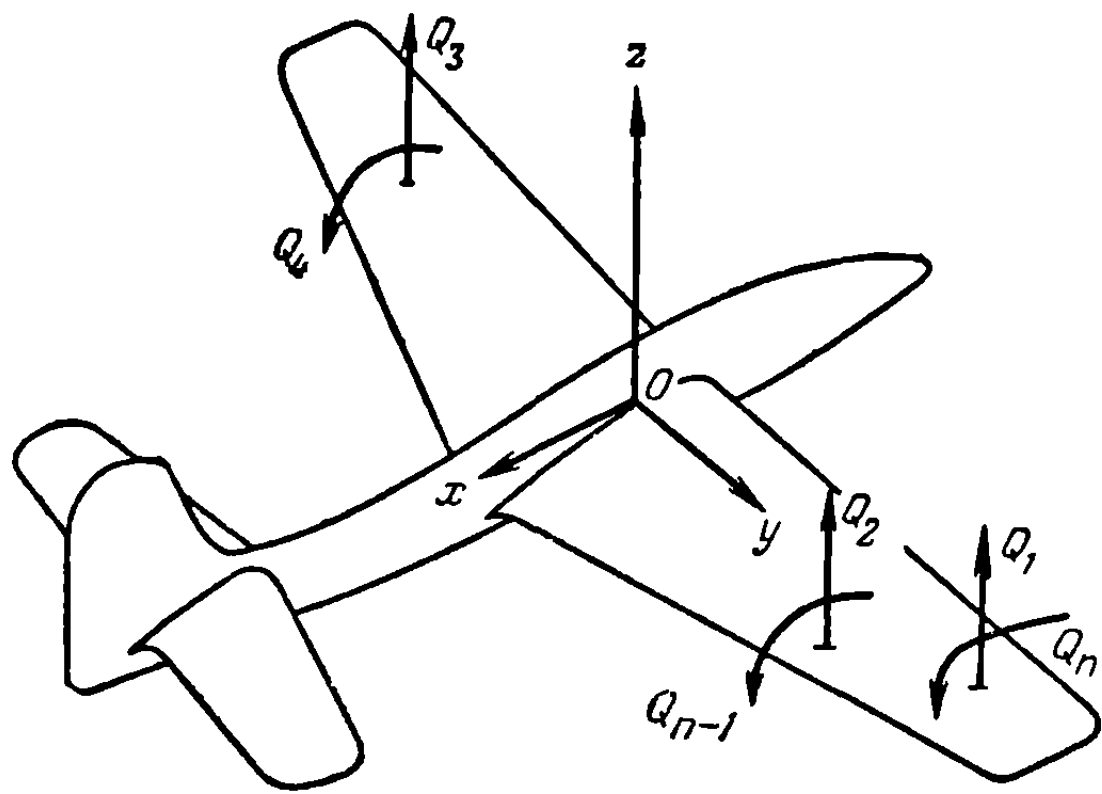
гие напряжения и деформации в рассматриваемых нами конструкциях такими, чтобы упругого выпучивания не происходило. Хотя это предположение не является ограничением для конструкций с толстой обшивкой, характерных, например, для военных самолетов, его применимость следует проверять, имея дело с задачами аэроупругости для тонкостенных конструкций.

Следствием уравнения (2-1) является то, что вся работа, совершаемая при приложении внешней силы, полностью превращается в энергию деформации конструкции, т. е.

$$U = \frac{1}{2} Qq, \quad (2-2)$$

где  $U$  означает энергию деформации.

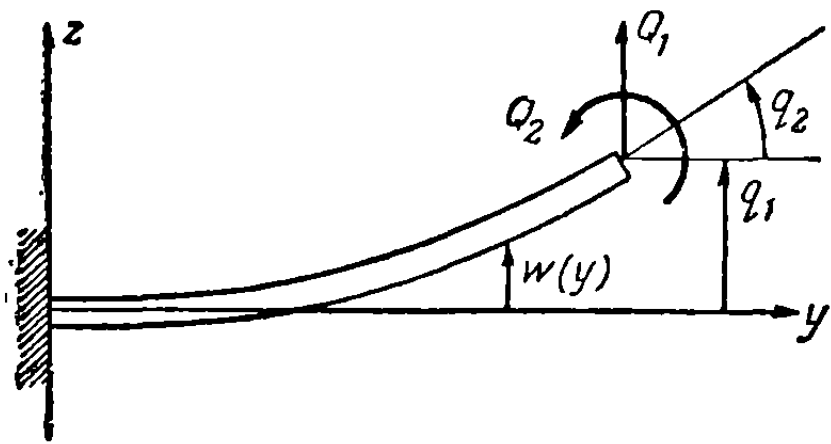
**2-3. Деформация под действием нескольких сил. Коэффициенты влияния.** Рассмотрим более общий случай, подобный изображенному на фиг. 2-4,



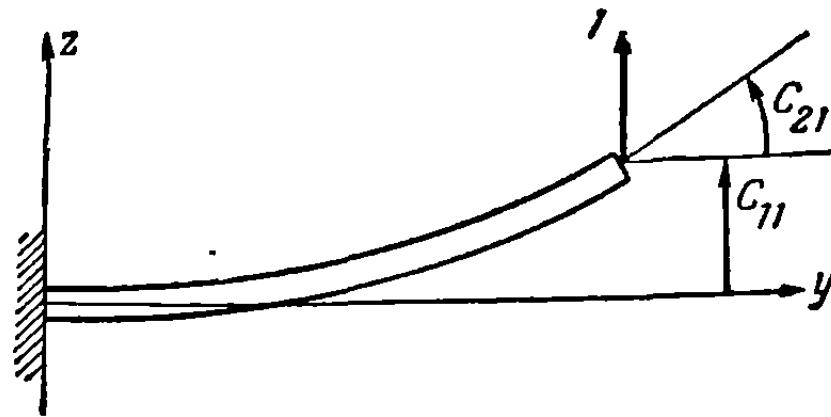
Фиг. 2-4. Несколько сосредоточенных сил и моментов, приложенных к упругой конструкции.

когда на конструкцию действуют несколько сил и моментов. Можно выразить полное линейное или угловое смещение в некоторой точке в виде суммы смещений в этой точке, обусловливаемых отдельными силами и моментами. Это утверждение носит название *принципа наложения*, который является основным принципом при исследовании линейных систем. На фиг. 2-4 символ  $Q$  относится ко всем силам и моментам, объединяемым термином „обобщенная сила“. Аналогично, символ  $q$  относится ко всем линейным или угловым смещениям в точках при-

ложения каждой обобщенной силы, объединяемым термином „обобщенная координата“. Обобщенные координаты представляют собой величины возможных независимых смещений системы. Это означает, что эти смещения не нарушают геометрических связей, наложенных на систему.



Фиг. 2-5. Сила и момент, приложенные к концу однородной консольной балки.



Фиг. 2-6. Единичная сила, приложенная к концу однородной консольной балки.

Используя принцип наложения, можно записать смещение в точке приложения  $i$ -й обобщенной силы под действием  $n$  обобщенных сил в следующем виде:

$$q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} Q_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2-3)$$

где константы  $C_{ij}$  называются коэффициентами влияния гибкости.

Наоборот, силы можно представить в виде линейных функций смещений:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2-4)$$

где константы  $k_{ij}$  называются коэффициентами влияния жесткости. В случае, когда к конструкции приложена одна единственная сила, константа  $k_{ij}$  представляет собой обычный коэффициент жесткости пружины.

Уравнения (2-3) и (2-4) в матричных обозначениях могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}, \quad (2-5)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}. \quad (2-6)$$

В сокращенных матричных обозначениях уравнения (2-5) и (2-6) принимают вид

$$\{q\} = [C] \{Q\}, \quad (2-7)$$

$$\{Q\} = [k] \{q\}. \quad (2-8)$$

Представление систем линейных уравнений в матричном обозначении часто бывает полезным при оперировании с уравнениями и для проведения расчетов. Матричные методы широко используются в аэроупругости, однако для большинства целей достаточно знать лишь несколько элементарных правил матричной алгебры. Эти правила изложены в приложении А; в книге [2-1] дается прекрасное и более полное изложение этих вопросов.

Квадратная матрица  $[C]$ , называемая матрицей коэффициентов влияния гибкости, математически связана с матрицей коэффициентов влияния жесткости  $[k]$ . Если систему линейных уравнений (2-7) разрешить относительно величин  $Q_i$  как линейных функций величин  $q_i$ , то получится система линейных уравнений (2-8). Этот процесс известен под названием обращения матриц (приложение А) и символически записывается в виде

$$[k] = [C]^{-1}; \quad (2-9)$$

при этом говорят, что матрица  $[k]$  является обратной к матрице  $[C]$ .

Для иллюстрации рассмотрим задачу о непосредственном вычислении матриц коэффициентов влияния  $[C]$  и  $[k]$  для однородной консольной балки, изображенной на фиг. 2-5. На фиг. 2-6 схематически изображена задача, которую нужно решить для вычисления элементов  $C_{11}$  и  $C_{21}$ . Вместо  $Q_1$  прикладывается единичная сила; результирующие смещения  $q_1$  и  $q_2$  равны соответственно  $C_{11}$  и  $C_{21}$ .

Предположим, что деформация изгиба балки описывается формулой Бернулли—Эйлера (см. [2-2])

$$M(y) = EI\omega''(y), \quad (2-10)$$

где  $M(y)$  — изгибающий момент (который считается положительным, когда нижние волокна растянуты),  $EI$  — изгибная жесткость балки, а  $\omega(y)$  — прогиб точек нейтральной оси балки. Штрихи обозначают дифференцирование по  $y$ .

Когда на конце балки приложена единичная поперечная сила, уравнение (2-10) принимает вид

$$l - y = EIw''(y). \quad (2-11)$$

Интегрируя это уравнение и используя граничные условия  $w(0) = w'(0) = 0$ , получаем

$$C_{21} = w'(l) = \frac{l^2}{2EI}, \quad (2-12)$$

$$C_{11} = w(l) = \frac{l^3}{3EI}. \quad (2-13)$$

Аналогичным образом на фиг. 2-7 схематически изображена задача, которую нужно решить для определения элементов  $C_{22}$  и  $C_{12}$ . При приложении единичного момента на конце балки уравнение (2-10) принимает вид

$$1 = EIw''(y), \quad (2-14)$$

а интегрирование этого уравнения дает

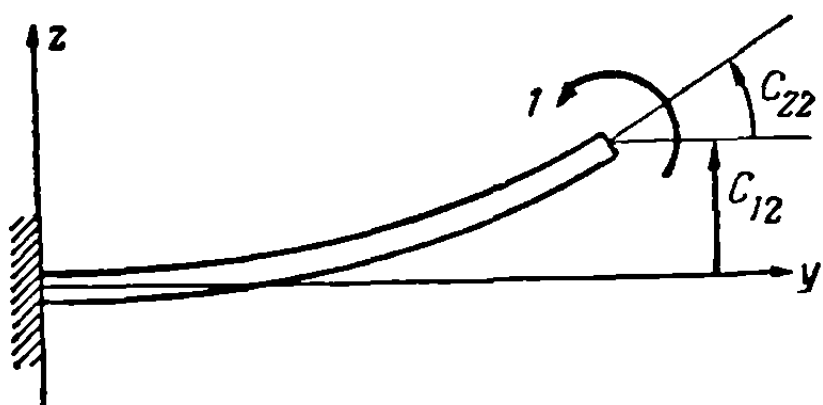
$$C_{22} = w'(l) = \frac{l}{EI}, \quad (2-15)$$

$$C_{12} = w(l) = \frac{l^2}{2EI}. \quad (2-16)$$

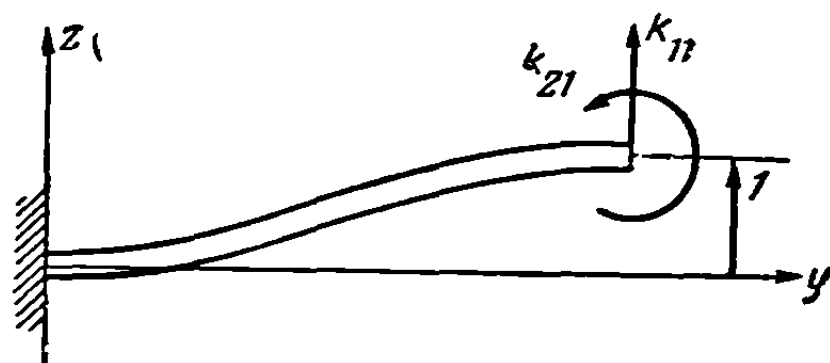
Согласно уравнениям (2-12), (2-13), (2-15), и (2-16), матрица коэффициентов влияния гибкости представляется в виде

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} l^3/3EI & l^2/2EI \\ l^2/2EI & l/EI \end{bmatrix}. \quad (2-17)$$

Непосредственное вычисление матрицы  $[k]$  несколько более сложно. Для вычисления величин  $k_{11}$  и  $k_{21}$  нужно решить задачу, схематически изображенную на фиг. 2-8. Здесь балке дается единичное смещение по координате  $q_1$



Фиг. 2-7. Единичный момент, приложенный к концу однородной консольной балки.



Фиг. 2-8. Однородная консольная балка с единичным прогибом на конце.

и нулевое смещение по координате  $q_2$ . Сила  $Q_1$  и момент  $Q_2$ , требуемые для поддержания балки в этом деформированном состоянии, соответственно равны  $k_{11}$  и  $k_{21}$ .

Полагая в уравнении (2-10)

$$M(y) = k_{11}(l - y) + k_{21},$$

имеем

$$EIw''(y) = k_{11}(l - y) + k_{21}. \quad (2-18)$$

Интегрируя это уравнение и используя граничные условия  $w(0) = w'(0) = w'(l) = 0$  и  $w(l) = 1$ , получаем систему совместных уравнений

$$k_{11} + \frac{2}{l}k_{21} = 0, \quad k_{11} + \frac{3}{2l}k_{21} = \frac{3EI}{l^3}. \quad (2-19)$$



решая которую, находим

$$k_{11} = \frac{12EI}{l^3}, \quad (2-20)$$

$$k_{21} = -\frac{6EI}{l^2}. \quad (2-21)$$

Задача, которую следует решить для вычисления элементов  $k_{22}$  и  $k_{12}$ , схематически изображена на фиг. 2-9. В этом случае уравнение (2-10) принимает вид

$$k_{12}(l-y) + k_{22} = EIw''(y). \quad (2-22)$$

Интегрируя это уравнение и используя граничные условия  $w(0) = w'(0) = w(l) = 0$  и  $w'(l) = 1$ , получаем систему совместных уравнений

$$k_{22} + \frac{l}{2} k_{12} = \frac{EI}{l}, \quad k_{22} + \frac{2l}{3} k_{12} = 0, \quad (2-23)$$

решая которую, находим

$$k_{12} = -\frac{6EI}{l^2}, \quad (2-24)$$

$$k_{22} = \frac{4EI}{l}. \quad (2-25)$$

Таким образом, матрица коэффициентов влияния жесткости представляется в виде

$$[k] = \begin{bmatrix} 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ -6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix}. \quad (2-26)$$

Легко проверить, что матрицы  $[C]$  и  $[k]$ , определяемые уравнениями (2-17) и (2-26), взаимно обратны.

**2-4. Свойства коэффициентов влияния.** Коэффициенты влияния и их матрицы обладают важным свойством симметрии. Это свойство выражается соотношениями

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad k_{ij} = k_{ji}. \quad (2-27)$$

Кроме того, каждая из матриц коэффициентов влияния равна соответствующей транспонированной матрице (приложение А)

$$[C] = [C]', \quad [k] = [k]'. \quad (2-28)$$

Эти свойства симметрии находятся в соответствии с теоремой взаимности Бетти (см. [2-3]).

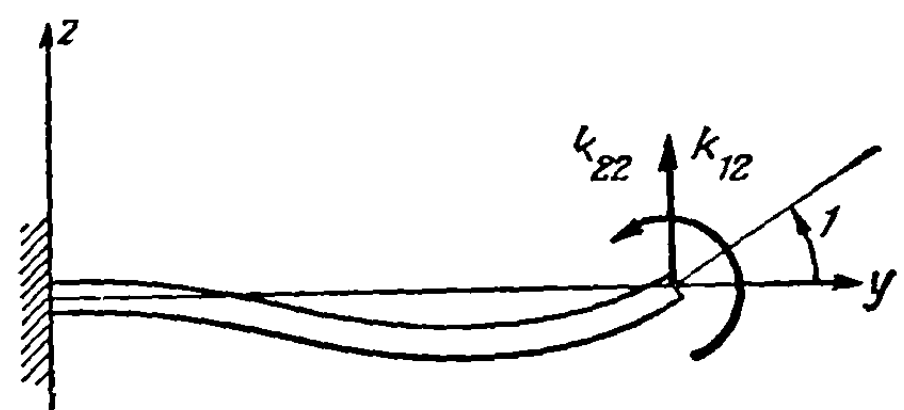
Рассмотрим подробнее свойства матрицы  $[C]$  для случая, изображенного на фиг. 2-4, когда  $n = 4$ . Эта матрица может быть расщеплена на четыре матрицы, каждая из которых содержит коэффициенты влияния различных типов, а именно:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11}^{\delta\delta} & C_{12}^{\delta\delta} & \vdots & C_{13}^{\delta\alpha} & C_{14}^{\delta\alpha} \\ C_{21}^{\delta\delta} & C_{22}^{\delta\delta} & \vdots & C_{23}^{\delta\alpha} & C_{24}^{\delta\alpha} \\ \hline C_{31}^{\alpha\delta} & C_{32}^{\alpha\delta} & \vdots & C_{33}^{\alpha\alpha} & C_{34}^{\alpha\alpha} \\ C_{41}^{\alpha\delta} & C_{42}^{\alpha\delta} & \vdots & C_{43}^{\alpha\alpha} & C_{44}^{\alpha\alpha} \end{bmatrix}. \quad (2-29)$$

Эти четыре различных типа элементов суть следующие:

$C_{ij}^{\delta\delta}$  — прогиб в  $i$ -й точке под действием единичной силы, приложенной в  $j$ -й точке;

$C_{ij}^{\alpha\alpha}$  — угол поворота в  $i$ -й точке под действием единичного момента, приложенного в  $j$ -й точке;



Фиг. 2-9. Однородная консольная балка с единичным углом поворота на конце.

$C_{ij}^{\delta\alpha}$  — прогиб в  $i$ -й точке под действием единичного момента, приложенного в  $j$ -й точке;

$C_{ij}^{\alpha\alpha}$  — угол поворота в  $i$ -й точке под действием единичной силы, приложенной в  $j$ -й точке.

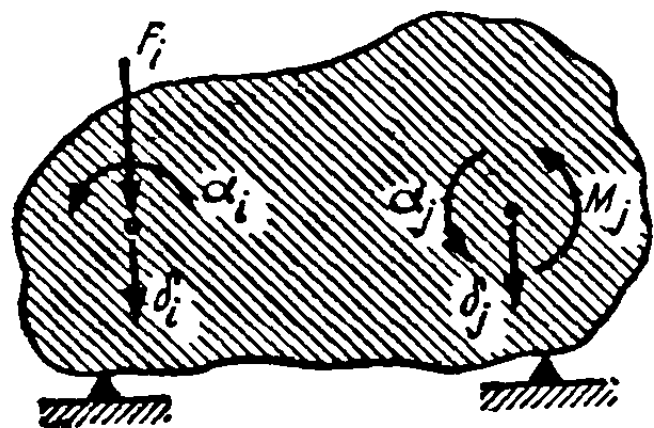
Чтобы матрица  $[C]$  была симметричной, должны иметь место следующие соотношения взаимности:

$$C_{ij}^{\delta\delta} = C_{ji}^{\delta\delta}, \quad (2-30)$$

$$C_{ij}^{\alpha\alpha} = C_{ji}^{\alpha\alpha}, \quad (2-31)$$

$$C_{ij}^{\delta\alpha} = C_{ji}^{\alpha\delta}. \quad (2-32)$$

Справедливость этих соотношений можно показать, рассматривая упругое тело, нагруженное в двух точках  $i$  и  $j$  некоторой силой  $F_i$  и некоторым моментом  $M_j$ , как это изображено на фиг. 2-10. Энергия деформации тела может быть вычислена двумя различными способами: прилагая сперва силу  $F_i$ , а затем момент  $M_j$  или наоборот. Для этих двух способов приложения нагрузки имеем соответственно:



$$U = \frac{1}{2} (C_{ii}^{\delta\delta} F_i) F_i + \frac{1}{2} (C_{jj}^{\alpha\alpha} M_j) M_j + (C_{ij}^{\delta\alpha} M_j) F_i, \quad (2-33)$$

$$U = \frac{1}{2} (C_{jj}^{\alpha\alpha} M_j) M_j + \frac{1}{2} (C_{ii}^{\delta\delta} F_i) F_i + (C_{ji}^{\alpha\delta} F_i) M_j. \quad (2-34)$$

Фиг. 2-10. Упругое тело, нагруженное в двух точках.

Поскольку порядок приложения нагрузок не существен<sup>1)</sup>, можно приравнять правые части равенств

(2-33) и (2-34), и мы получим соотношение взаимности, определяемое равенством (2-32)

$$C_{ij}^{\delta\alpha} = C_{ji}^{\alpha\delta}.$$

Остальные соотношения взаимности можно получить аналогичным образом.

**2-5. Выражение энергии деформации через коэффициенты влияния.** При применении энергетических теорем к задачам аэроупругости бывает полезно представление энергии деформации через коэффициенты влияния. Имея в виду систему, изображенную на фиг. 2-4, получим следующее выражение для энергии деформации:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i q_i. \quad (2-35)$$

Внося в выражение (2-35) величины (2-3), получаем выражение для энергии деформации через коэффициенты влияния гибкости и приложенные внешние нагрузки

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} Q_i Q_j. \quad (2-36)$$

Аналогично, внося в выражение (2-35) величины (2-4), получаем выражение энергии деформации через коэффициенты влияния жесткости и смещения

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j. \quad (2-37)$$

<sup>1)</sup> Это свойство можно рассматривать как следствие принципа сохранения энергии для консервативных систем.

В матричных обозначениях равенства (2-36) и (2-37) записываются в виде

$$U = \frac{1}{2} [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_{2n}] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{12n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{22n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{2n1} & C_{2n2} & \dots & C_{2n2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{2n} \end{bmatrix}, \quad (2-38)$$

$$U = \frac{1}{2} [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{2n}] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{12n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{22n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{2n1} & k_{2n2} & \dots & k_{2n2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{2n} \end{bmatrix}. \quad (2-39)$$

Равенства (2-38) и (2-39) в сокращенных матричных обозначениях переписываются следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \underline{Q} [C] \{Q\}, \quad (2-40)$$

$$U = \frac{1}{2} \underline{q} [k] \{q\}. \quad (2-41)$$

**2-6. Деформации под действием распределенных сил. Функции влияния.** В предыдущих разделах предполагалось, что на конструкцию действуют сосредоточенные силы и моменты. Рассмотрим теперь результаты, получающиеся в том случае, когда на конструкцию действуют непрерывно распределенные нагрузки. В качестве простейшей иллюстрации рассмотрим изображенную на фиг. 2-11 консольную балку, на которую действует распределенная поперечная нагрузка  $Z(y)$ . Бесконечно малый прогиб  $d w(y)$  в некоторой точке с координатой  $y$ , вызванный элементарной нагрузкой  $Z(\eta) d\eta$ , приложенной в точке с координатой  $\eta$ , может быть представлен в виде

$$d w(y) = C(y, \eta) Z(\eta) d\eta, \quad (2-42)$$

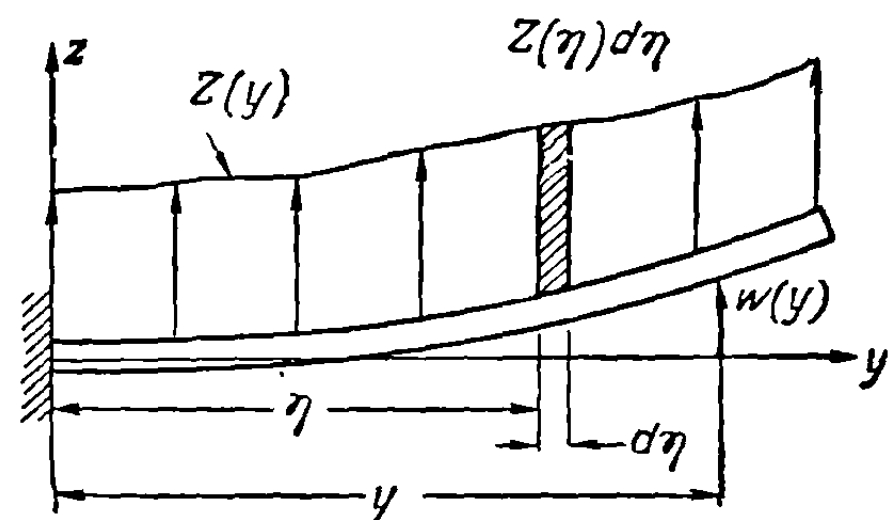
где  $C(y, \eta)$  представляет собой некоторую функцию, определяющую прогиб в точке с координатой  $y$  под действием единичной сосредоточенной силы, приложенной в точке с координатой  $\eta$ . Прогиб в точке с координатой  $y$ , обусловленный всей приложенной поперечной нагрузкой, получается путем интегрирования соотношения (2-42) по всей длине балки:

$$w(y) = \int_0^l C(y, \eta) Z(\eta) d\eta. \quad (2-43)$$

Мы будем называть функцию  $C(y, \eta)$  функцией влияния гибкости или функцией Грина<sup>1)</sup> для одномерной задачи. Поскольку она представляет собой ту же физическую величину, что и коэффициент влияния, эта функция является симметричной. Таким образом,

$$C(y, \eta) = C(\eta, y). \quad (2-44)$$

Если пренебречь деформацией сдвига, то функция влияния для задачи изгиба консольной балки может быть вычислена с помощью соотношения (2-10).



Фиг. 2-11. Однородная консольная балка под действием распределенной поперечной нагрузки.

<sup>1)</sup> По имени английского физика Джорджа Грина (1793—1841), применившего ее впервые в задачах электростатики.



Как показывает фиг. 2-12, изгибающий момент, возникающий в сечениях консольной балки под действием единичной сосредоточенной силы, приложенной в точке  $y = \eta$ , определяется следующими соотношениями:

$$M(y, \eta) = (\eta - y), \quad (y \leq \eta), \quad (2-45)$$

$$M(y, \eta) = 0, \quad (y \geq \eta). \quad (2-46)$$

Вводя в уравнение (2-10) соотношение (2-45), получаем

$$EIC''(y, \eta) = (\eta - y), \quad (y \leq \eta). \quad (2-47)$$

Интегрируя соотношение (2-47) и используя граничные условия

$$C(0, \eta) = C'(0, \eta) = 0, \quad (2-48)$$

получаем выражение функции влияния для однородной балки при  $y \leq \eta$ :

$$C(y, \eta) = \frac{y^2}{6EI}(3\eta - y) \quad (y \leq \eta). \quad (2-49)$$

Внося в уравнение (2-10) соотношение (2-46), получаем

$$EIC''(y, \eta) = 0, \quad (y \geq \eta). \quad (2-50)$$

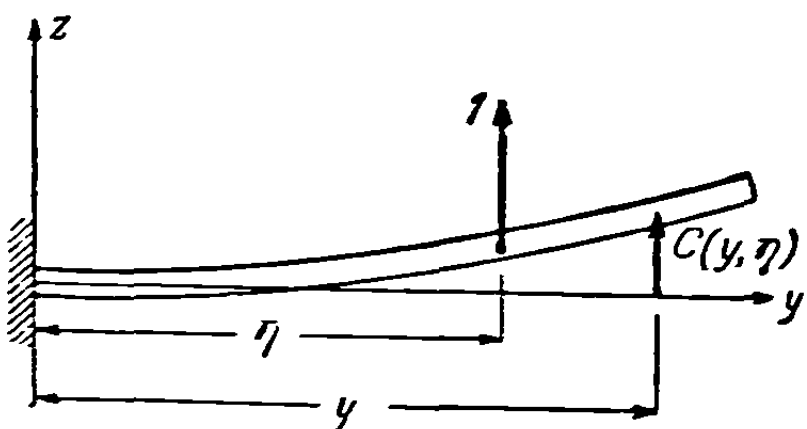
Интегрируя соотношение (2-50) и определяя константы интегрирования из условий

$$C(\eta, \eta) = \frac{\eta^3}{3EI}, \quad C'(\eta, \eta) = \frac{\eta^2}{2EI}, \quad (2-51)$$

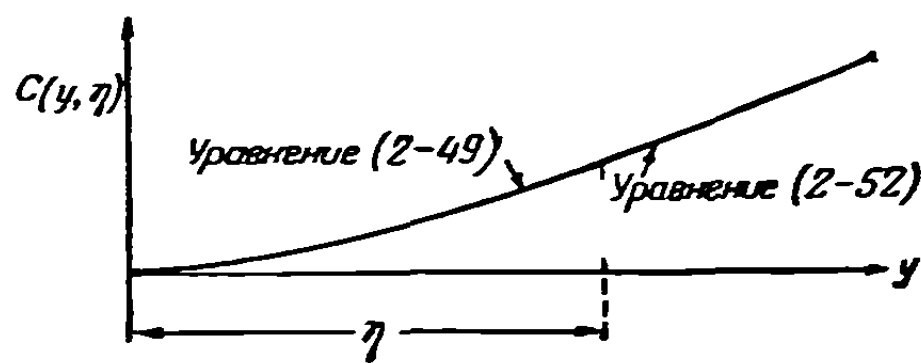
которые имеют место, если положить в соотношении (2-49) и уравнении, получающемся дифференцированием этого соотношения,  $y = \eta$ , находим

$$C(y, \eta) = \frac{\eta^2}{6EI}(3y - \eta) \quad (y \geq \eta). \quad (2-52)$$

Если поменять местами  $y$  и  $\eta$  в одном из соотношений (2-49) и (2-52), мы получим другое. Этот результат является проверкой соотношения взаимности (2-44).



Фиг. 2-12. Однородная консольная балка под действием единичной нагрузки.



Фиг. 2-13. График функции влияния  $C(y, \eta)$ .

Первые две производные от функции  $C(y, \eta)$  при  $y = \eta$  непрерывны, однако третья производная этой функции имеет в точке  $y = \eta$  разрыв. График функции  $C(y, \eta)$ , определяемой уравнениями (2-49) и (2-52), для некоторого частного значения переменной  $\eta$  представлен на фиг. 2-13.

Вводя в соотношение (2-43) величины (2-49) и (2-52), получаем

$$w(y) = \int_0^y \frac{\eta^2}{6EI}(3y - \eta) Z(\eta) d\eta + \int_y^l \frac{y^2}{6EI}(3\eta - y) Z(\eta) d\eta. \quad (2-53)$$

Если, например,  $Z(\eta)$  постоянна, то равенство (2-53) приводится к виду

$$w(y) = \frac{Zy^2}{24EI}(y^2 - 4yl + 6l^2). \quad (2-54)$$

Понятие функции влияния является полезным также и в двумерных системах, таких, например, как пластинчатые элементы конструкций, нагруженных нормально к их поверхности. Предположим, например, что крыло самолета, изображенное на фиг. 2-14, нагружено нормально к его поверхности распределенной нагрузкой  $Z(x, y)$ . Прогиб  $w(x, y)$ , вызванный нагрузкой  $Z(x, y)$ , можно выразить так:

$$w(x, y) = \int \int_S C(x, y; \xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2-55)$$

где  $C(x, y; \xi, \eta)$  является двумерной функцией влияния, представляющей прогиб в точке с координатами  $x, y$  под действием единичной силы, приложенной в точке с координатами  $\xi, \eta$ ; здесь интегрирование распространяется по всей поверхности крыла.

**2-7. Свойства функций влияния.** Свойства функций влияния аналогичны свойствам коэффициентов влияния. Свойство симметрии, установленное выше для одномерной системы [уравнение (2-44)], имеет место и в более общих случаях. Например, для двумерной системы это свойство описывается соотношением

$$C(x, y; \xi, \eta) = C(\xi, \eta; x, y). \quad (2-56)$$

Остальные свойства функций влияния будут устанавливаться для одномерных систем, однако соответствующие результаты легко могут быть обобщены на дву- и трехмерные системы. Уравнение (2-43), определяющее прогиб балки через функцию влияния, имеет вид

$$w(y) = \int_0^l C(y, \eta) Z(\eta) d\eta. \quad (2-43)$$

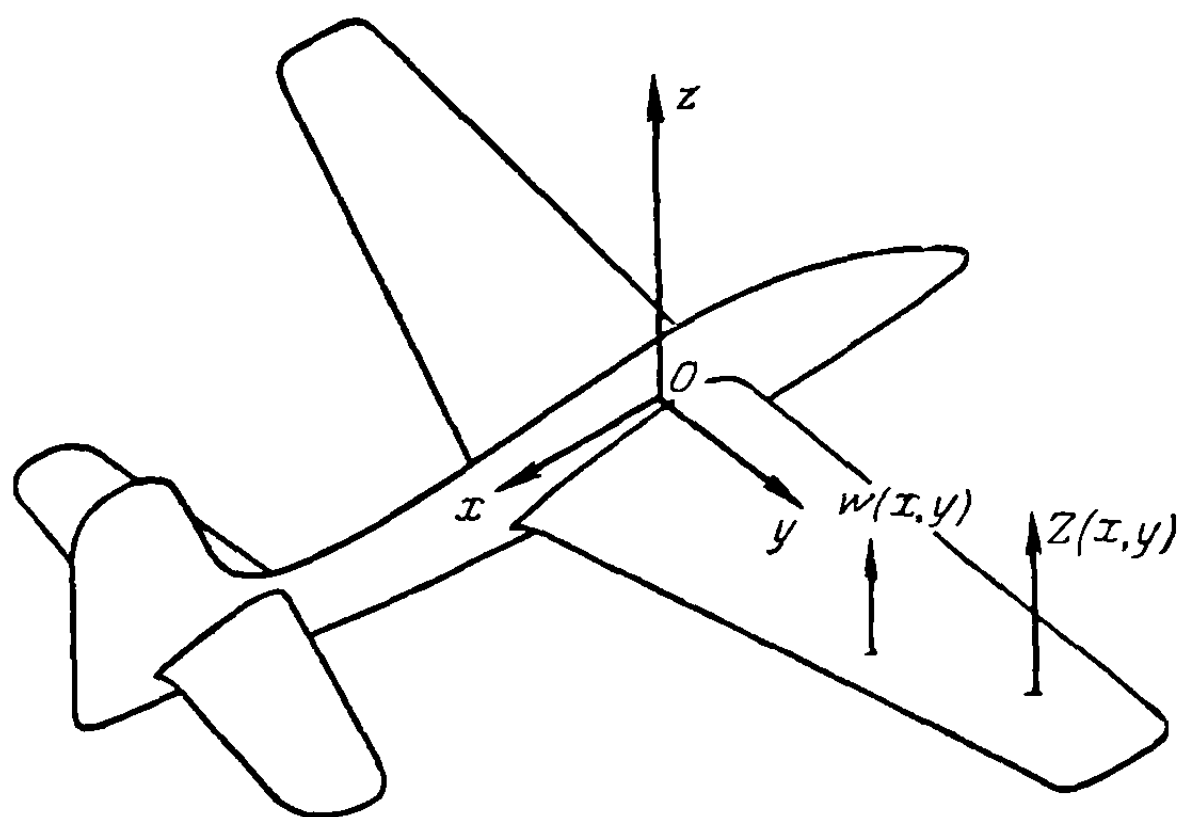
Рассматривая уравнение (2-43) как линейное интегральное уравнение первого рода (см. [2-4]), в котором функция  $w(y)$  известна, а неизвестной является функция  $Z(\eta)$ , согласно теории интегральных уравнений формально получаем

$$Z(y) = \int_0^l k(y, \eta) w(\eta) d\eta, \quad (2-57)$$

где функцию  $k(y, \eta)$  можно рассматривать как некоторую гипотетическую функцию влияния жесткости. Вообще говоря, формальный процесс обращения уравнения (2-43) и получения уравнения (2-57) является затруднительным. Однако для практических задач нет надобности выполнять этот процесс в функциональной форме, и основная задача здесь состоит в установлении двойственной связи между уравнениями (2-43) и (2-57).

Энергия деформации некоторой одномерной системы, подверженной действию распределенной нагрузки, представляется в виде

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l Z(y) w(y) dy. \quad (2-58)$$



Фиг. 2-14. Крыло самолета под действием распределенной поперечной нагрузки  $Z(x, y)$ .

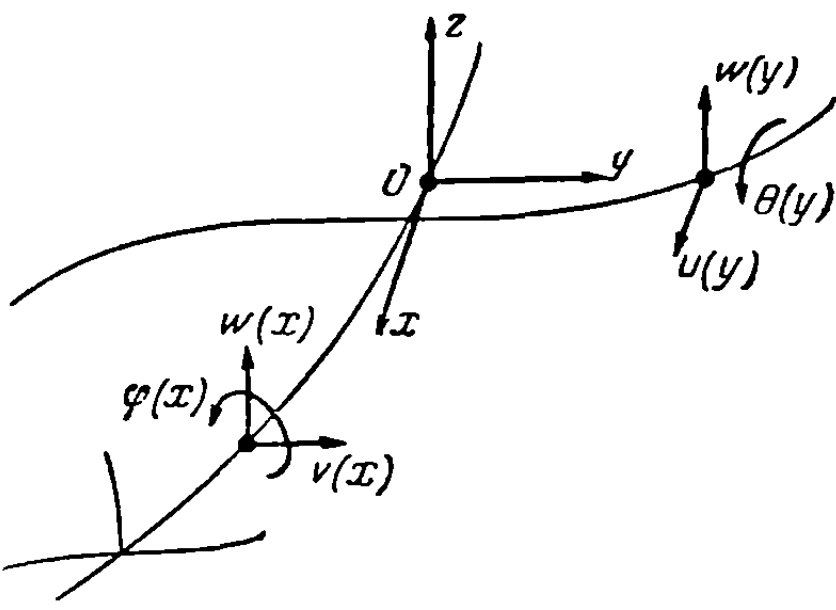
Подставляя в это равенство величину (2-43), получаем выражение энергии деформации через функцию влияния гибкости и заданную распределенную нагрузку в форме

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l Z(y) \int_0^l C(y, \eta) Z(\eta) d\eta dy. \quad (2-59)$$

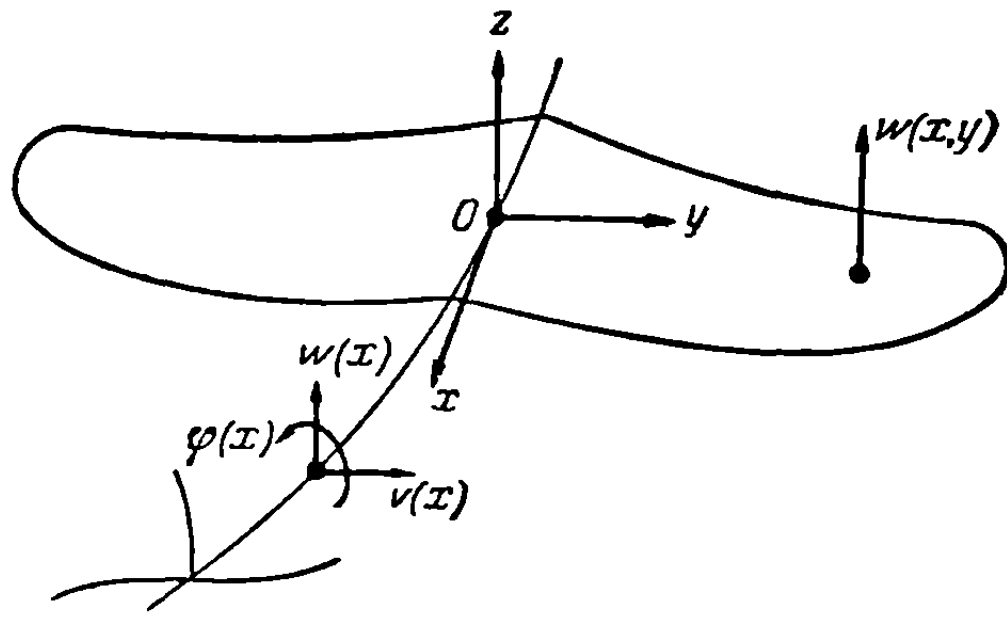
Аналогично, подставляя в равенство (2-58) величину (2-57), можно привести выражение энергии деформации к виду

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l w(y) \int_0^l k(y, \eta) w(\eta) d\eta dy. \quad (2-60)$$

**2-8. Упрощенная схема упругого самолета.** Вследствие сложности конструкций самолета для расчета их упругих характеристик обычно бывает необходимо сделать те или иные упрощающие предположения. Во многих случаях



Фиг. 2-15. Упрощенная схема упругого самолета.



Фиг. 2-16. Упрощенная схема упругого самолета.

крылья, фюзеляж, а также вертикальное и горизонтальное хвостовое оперения можно рассматривать как балки, поперечные сечения которых являются жесткими. В этих случаях самолет можно рассматривать как изображенную на фиг. 2-15 систему балок, которые можно представить в виде пересекающихся между собой упругих линий. Деформации каждой линии описываются двумя линейными и одним угловым смещением. Например, смещение некоторого жесткого сечения крыла в точке  $y$  на фиг. 2-15 описывается двумя линейными смещениями  $w(y)$  и  $u(y)$  и одним угловым смещением  $\theta(y)$ .

В случае тонких крыльев очень малого удлинения предположение о том, что поперечные сечения крыла являются жесткими, может оказаться неприемлемым, и поэтому следует учитывать изгиб в направлении хорды. В подобных случаях крыло часто можно рассматривать как тонкую плоскую пластинку, так что упрощенную схему самолета можно представить в виде совокупности некоторой упругой поверхности и упругой линии, подобно тому как это изображено на фиг. 2-16. Деформация крыла в случае системы, изображенной на фиг. 2-16, описывается функцией  $w(x, y)$ , представляющей прогибы упругой поверхности относительно плоскости  $xu$ .

**2-9. Деформации крыльев самолета.** Рассмотрим подробнее деформацию упругого крыла под действием некоторой распределенной нормальной нагрузки  $Z(x, y)$ . Деформация может быть выражена через одну-единственную функцию  $w(x, y)$ , определяемую следующим уравнением:

$$w(x, y) = \int \int_S C(x, y; \xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2-55)$$

В тех случаях, когда крыло является достаточно тонким, чтобы сечения крыла, направленные по хорде (параллельные оси  $x$ ), можно было считать жесткими, функция влияния может быть записана в виде

$$C(x, y; \xi, \eta) = C^{zz}(y, \eta) - xC^{\theta z}(y, \eta) + \xi x C^{\theta\theta}(y, \eta) - \xi C^{z\theta}(y, \eta), \quad (2-61)$$

где функции влияния  $C^{pq}(y, \eta)$  определяются следующим образом:  $C^{pq}(y, \eta)$  представляет собой линейное или угловое смещение в направлении  $p$  в точке с координатой  $y$ , обусловливаемое соответственно единичной силой или единичным моментом, параллельными  $q$  и приложенными в точке с координатой  $\eta$ . Прогиб можно выразить так:

$$w(x, y) = w(y) - x\theta(y). \quad (2-62)$$

Подставляя выражения (2-61) и (2-62) в равенство (2-55), получаем

$$w(y) = \int_0^l C^{zz}(y, \eta) Z(\eta) d\eta + \int_0^l C^{z\theta}(y, \eta) t(\eta) d\eta, \quad (2-63)$$

$$\theta(y) = \int_0^l C^{\theta z}(y, \eta) Z(\eta) d\eta + \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) t(\eta) d\eta, \quad (2-64)$$

где

$$Z(\eta) = \int_{\text{хорда}} Z(\xi, \eta) d\xi, \quad (2-65)$$

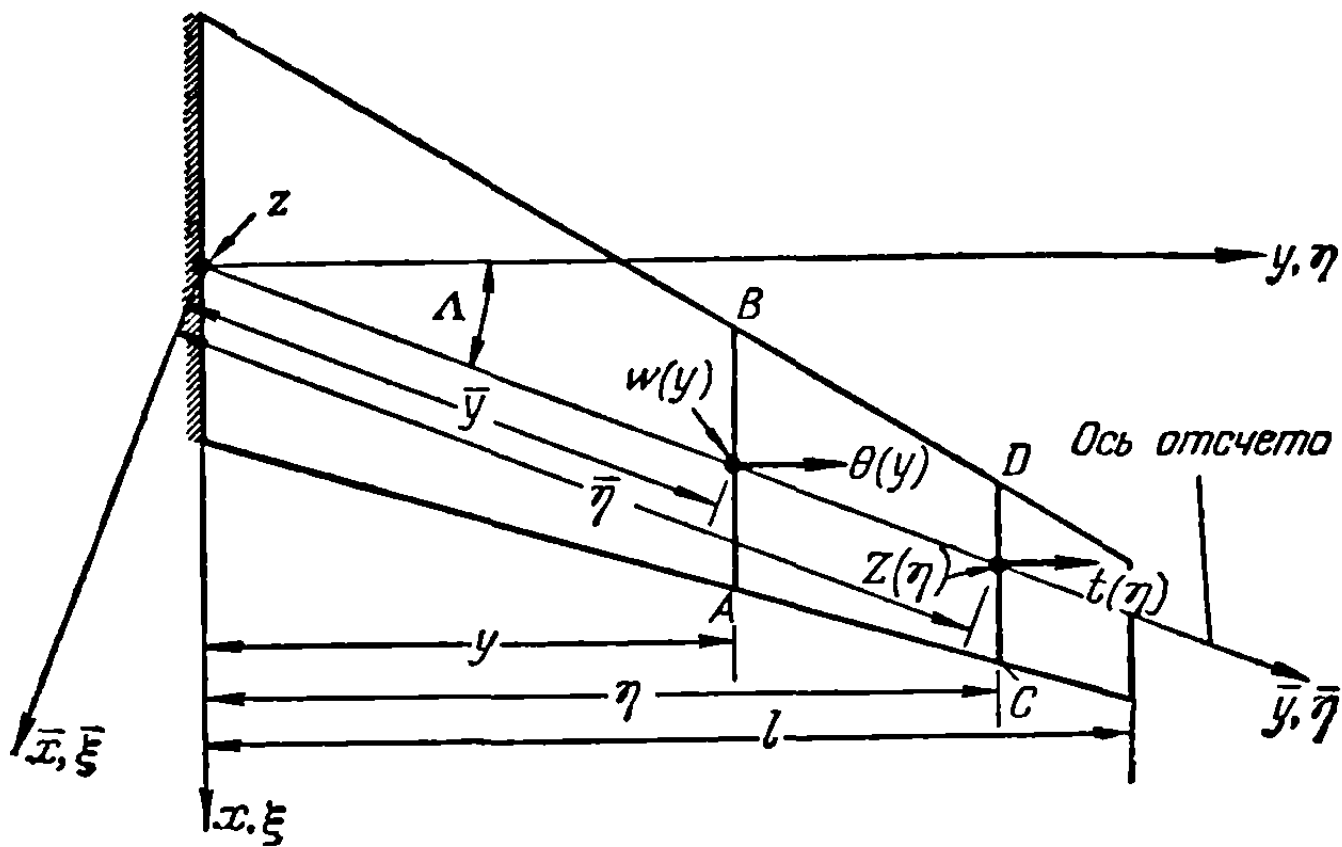
$$t(\eta) = - \int_{\text{хорда}} \xi Z(\xi, \eta) d\xi. \quad (2-66)$$

При выводе формул (2-63) и (2-64) влиянием параллельных хорде сил сопротивления, действующих на крыло, пренебрегалось. Формулы (2-63) и (2-64) применимы, вообще говоря, в случае как стреловидных, так и нестреловидных крыльев с конструктивными разрывами непрерывности. Влияние сужения крыла и конструктивных разрывов сказывается главным образом в возникновении взаимодействия изгиба и кручения. Следует заметить, что с увеличением угла стреловидности крыла предположение о жесткости сечений крыла, параллельных оси  $x$ , становится все менее и менее применимым. Получающаяся при использовании этого предположения ошибка будет, по-видимому, малой для тонких крыльев с углом стреловидности вплоть до  $45^\circ$ .

В формулах (2-63) и (2-64) текущий момент  $t(\eta)$  в сечении, направленном по потоку (параллельный оси  $y$ ), отнесен к оси  $y$ , а прогиб  $w(y)$  берется для точек оси  $y$ . При исследовании стреловидных крыльев часто бывает удобно использовать в качестве оси отсчета ось  $\bar{y}$ , изображенную на фиг. 2-17. Текущий крутящий момент  $t(\eta)$ , параллельный оси  $y$ , можно при этом относить к оси  $\bar{y}$ , а прогибы крыла брать для точек той же оси  $\bar{y}$ . Таким образом, используя ось отсчета  $\bar{y}$ , функции влияния в формулах (2-63) и (2-64) следует определять как функции, обуславливающие прогиб в точке оси  $\bar{y}$  и угол поворота в сечении, направленном по потоку, вызванные поперечными силами и параллельными оси  $y$  крутящими моментами, отнесенными к оси  $\bar{y}$ . В этом случае текущий крутящий момент в сечении, направленном по потоку (параллельный оси  $y$ ), определяется формулой

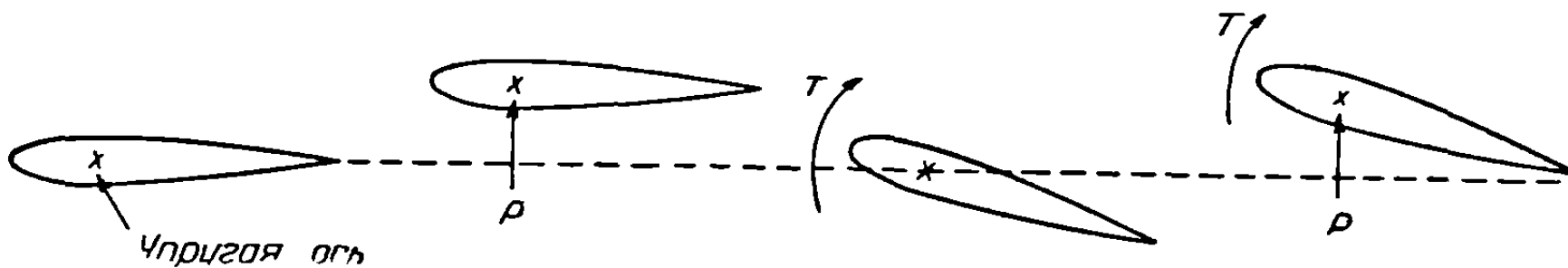
$$t(\eta) = - \int_{\text{хорда}} (\xi - \eta \operatorname{tg} \Lambda) Z(\xi, \eta) d\xi. \quad (2-67)$$

Дальнейшее упрощение формул (2-63) и (2-64) можно сделать для нестреловидных крыльев, все сечения которых являются одинаковыми или постепенно меняются в направлении размаха. Такие крылья можно исследовать при



Фиг. 2-17. Система осей для стреловидного крыла.

помощи простых инженерных теорий, позволяющих рассматривать изгиб и кручение как два отдельных действия, взаимное влияние которых отсутствует. Возможность пренебрежения взаимодействием изгиба и кручения приводит к идее об упругой оси, обладающей тем свойством, что силы, приложенные к крылу на этой оси, вызывают боковые перемещения без вращения всех сечений балки, а крутящие моменты вызывают чистое вращение этих сечений вокруг упругой оси. На фиг. 2-18 изображено действие, оказываемое силами и крутящими моментами, приложенными к упругой оси. Систему сил и моментов, действующих



Фиг. 2-18. Сила и крутящий момент, приложенные к крылу самолета.

на балку, удобно привести к силам, действующим вдоль упругой оси, и крутящим моментам относительно этой оси. В этом случае равенства (2-63) и (2-64) приводятся к виду

$$w(y) = \int_0^l C^{zz}(y, \eta) Z(\eta) d\eta, \quad (2-68)$$

$$\theta(y) = \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) t(\eta) d\eta. \quad (2-69)$$

**2-10. Интегрирование при помощи весовых матриц.** Упругие свойства большинства балок конструкций самолета выражаются через сложные функции соответствующих пространственных координат, которые не удается представить в удобной аналитической форме. Поэтому обычно бывает невозможно получить явные аналитические выражения для функций влияния. Однако численные значения коэффициентов влияния в отдельных точках можно вычислить или определить из опыта. Часто бывает необходимо поэтому применять методы, в которых деформация выражается через коэффициенты влияния даже если на крыло действуют непрерывно распределенные нагрузки.

Рассмотрим, например, смещение упругой оси под действием изгиба, определяемое формулой (2-68). Можно вычислить прогибы в некотором конечном числе  $n$  точек, как показано на фиг. 2-19. Согласно формуле (2-68), прогиб в  $i$ -м сечении определяется равенством

$$w_i = \int_0^l C^{zz}(y_i, \eta) Z(\eta) d\eta. \quad (2-70)$$

Можно провести приближенное вычисление этого определенного интеграла, которое приводит к некоторой линейной комбинации ординат кривой нагружения следующего вида:

$$w_i = \sum_{j=0}^n C_{ij}^{zz} \bar{W}_j Z_j, \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (2-71)$$

где функции  $C_{ij}^{zz} = C^{zz}(y_i, \eta_j)$  суть коэффициенты влияния, соответствующие  $n$  точкам, а  $\bar{W}_j$  представляют собой весовые числа [2—5], зависящие от применяемого метода численного интегрирования.

В матричной форме уравнения (2-71) принимают вид

$$\{w\} = [C^{zz}] [\bar{W}] \{Z\}, \quad (2-72)$$

где

$$\{w\} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ 0 & C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix},$$

$$[\bar{W}] = \begin{bmatrix} \bar{W}_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{W}_1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \bar{W}_2 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \bar{W}_n \end{bmatrix}, \quad \{Z\} = \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}.$$

Матрицы весовых чисел, соответствующие различным методам численного интегрирования, сведены в приложении В.

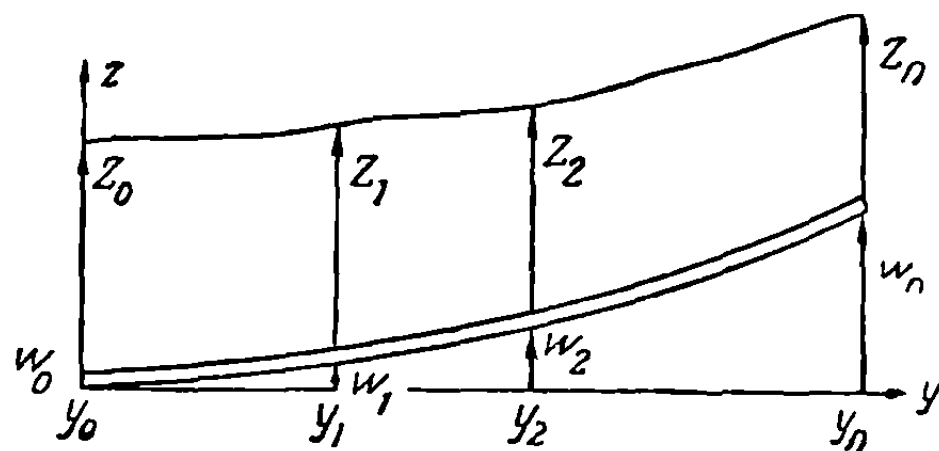
Вычисление углов закручивания [формула (2-69)] можно выполнить в точности таким же способом; в результате получим

$$\{\theta\} = [C^{\theta 0}] [\bar{W}] \{t\}. \quad (2-73)$$

Для последующего приближенного решения выражения (2-63) и (2-64) можно также привести к матричной форме, разделяя ось  $y$  на некоторое число интервалов. Прогиб и угол поворота некоторого участка крыла, соответствующего сечению  $y = y_i$ , выражаются следующим образом:

$$w_i = \sum_{j=1}^n C_{ij}^{zz} \bar{W}_j Z_j + \sum_{j=1}^n C_{ij}^{z\theta} \bar{W}_j t_j, \quad (2-74)$$

$$\theta_i = \sum_{j=1}^n C_{ij}^{\theta z} \bar{W}_j Z_j + \sum_{j=1}^n C_{ij}^{\theta\theta} \bar{W}_j t_j. \quad (2-75)$$



Фиг. 2-19. Прогибы консольной балки в  $n$  дискретных точках.

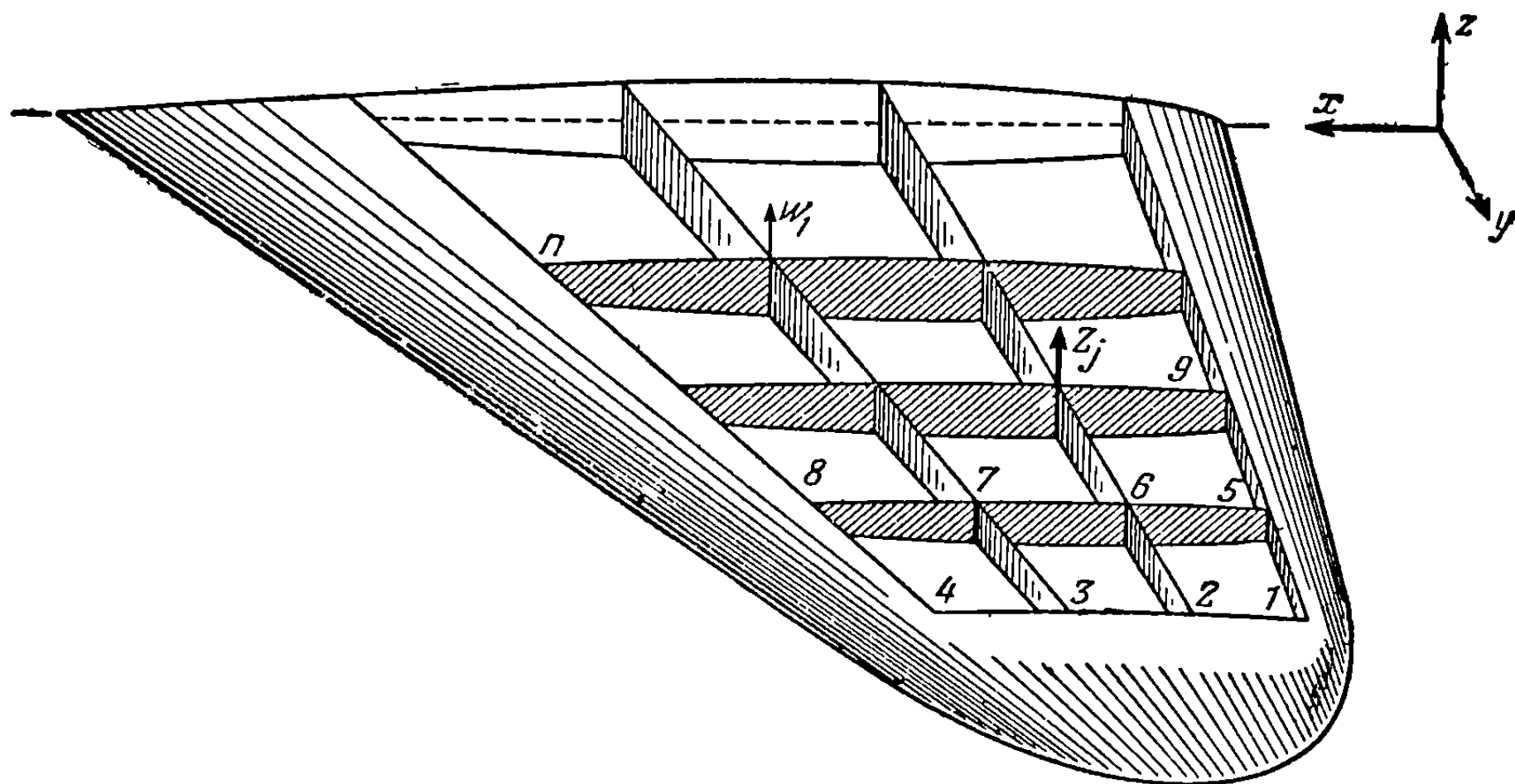
В матричных обозначениях формулы (2-74) и (2-75) принимают вид

$$\begin{bmatrix} \{w\} \\ \{\theta\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C^{zz}] & [C^{z\theta}] \\ [C^{\theta z}] & [C^{\theta\theta}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\sum \bar{W}] & [0] \\ [0] & [\sum \bar{W}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{Z\} \\ \{t\} \end{bmatrix}. \quad (2-76)$$

Весовые матрицы, входящие в равенство (2-76), те же самые, что и матрицы в формулах (2-72) и (2-73). В качестве следствия из теоремы взаимности (раздел 2-4) можно отметить следующее соотношение:

$$[C^{\theta z}] = [C^{z\theta}]'. \quad (2-77)$$

Матрицы  $[C^{z\theta}]$  и  $[C^{\theta z}]$  определяют взаимодействие изгиба и кручения, так что если принять их равными нулю, то выражение (2-76) приведет к формулам (2-72) и (2-73), соответствующим случаю прямого тонкого крыла, для которого отсутствует взаимодействие изгиба и кручения.



Фиг. 2-20. Сетка точек на поверхности крыла

Основные соотношения метода численного интегрирования при помощи весовых матриц применимы также и к случаю крыльев малого удлинения, обладающих кривизной как в направлении хорды, так и в направлении размаха крыла. Если на поверхности крыла расположить некоторую сетку из  $n$  точек (фиг. 2-20), то прогиб в  $i$ -й точке определится, согласно равенству (2-55), следующим образом:

$$w_i = \int_S \int C(x_i, y_i; \xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2-78)$$

Численное интегрирование приводит к следующему матричному соотношению:

$$\{w\} = [C] [\sum \bar{W}] \{Z\}, \quad (2-79)$$

где матрица  $[C]$  представляет собой матрицу коэффициентов влияния гибкости, соответствующую  $n$  узлам, матрица  $\{Z\}$  является матрицей ординат функции нагружения в  $n$  узлах, а матрица  $[\sum \bar{W}]$  есть матрица весовых чисел. Форма матрицы  $[\sum \bar{W}]$  зависит, разумеется, от применяемой схемы численного интегрирования.

**2-11. Энергетические методы вычисления прогибов.** Энергетические методы находят широкое применение в задачах аэроупругости при вычислении деформаций под действием статических и динамических нагрузок, а также при вычислении коэффициентов и функций влияния.



(а) *Определение прогибов при помощи принципа минимума потенциальной энергии.* Принцип минимума потенциальной энергии, являющийся полезным инструментом при вычислении смещений консервативных упругих систем, основан на принципе виртуальной работы [2—3]. Принцип виртуальной работы применительно к деформируемым телам может быть сформулирован в следующем виде.

Если под действием заданной системы внешних сил некоторое тело находится в состоянии равновесия, то работа (виртуальная) этих сил на малых дополнительных перемещениях, совместимых с наложенными геометрическими связями (виртуальных перемещениях), равна изменению энергии деформации.

Математически принцип виртуальной работы можно сформулировать следующим образом:

$$\delta W_e = \delta U, \quad (2-80)$$

где  $\delta W_e$  представляет собой виртуальную работу внешних сил, а  $\delta U$  — изменение энергии деформации, обусловленное малым виртуальным перемещением тела.

Принцип минимума потенциальной энергии, применимый только к консервативным системам, получается преобразованием уравнения (2-80) к следующему виду:

$$\delta U - \delta W_e = \delta (U - W_e) = 0. \quad (2-81)$$

Принцип минимума потенциальной энергии, выражаемый математически уравнением (2-81), можно сформулировать следующим образом.

Среди всех возможных распределений деформаций, совместимых с наложенными на тело геометрическими связями, распределение, удовлетворяющее уравнению равновесия, обращает потенциальную энергию  $U - W_e$  в минимум.

При определении прогибов принцип минимума потенциальной энергии находит два основных приложения. Первое приложение этого принципа состоит в выводе точных дифференциальных, интегральных или алгебраических уравнений равновесия, а второе — в приближенном решении задач об определении прогибов непрерывных систем, расчет которых точными способами затруднителен.

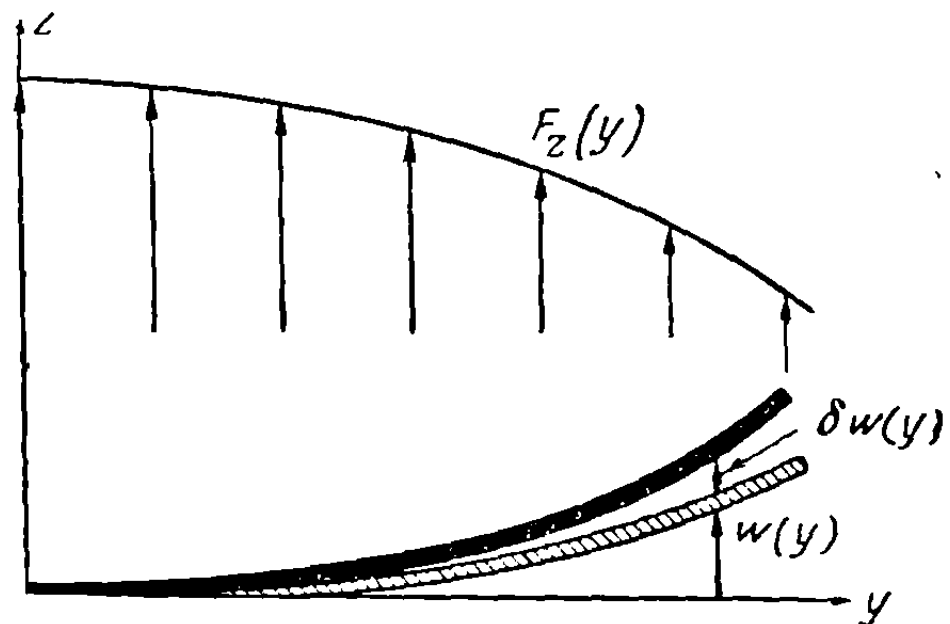
(б) *Применение принципа минимума потенциальной энергии к непрерывным системам; метод Рэлея—Ритца.* Проиллюстрируем применение принципа минимума потенциальной энергии на примере консольной балки крыла, подверженной некоторой поперечной нагрузке  $F_z(y)$  (см. фиг. 2-21).

Предположим, что прогиб балки может быть записан в виде суммы независимых функций  $\gamma_i(y)$ , каждая из которых удовлетворяет геометрическим граничным условиям:

$$w(y) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(y) q_i, \quad (2-82)$$

где  $q_i$  представляют собой обобщенные координаты, значения которых еще должны быть определены. Для случая консольной балки условия, налагаемые геометрическими связями на функции  $\gamma_i(y)$ , имеют вид

$$\gamma_i(0) = \gamma_i'(0) = 0. \quad (2-83)$$



Фиг. 2-21. Виртуальные перемещения консольной балки.



Координаты  $q_i$ , очевидно, подпадают под определение обобщенных координат, поскольку они являются независимыми координатами, представляющими возможные перемещения, причем ни при каких значениях этих координат не нарушаются условия, налагаемые геометрическими связями.

Предположим, далее, что балка получила некоторое произвольное поперечное виртуальное перемещение (см. фиг. 2-21), величина которого определяется соотношением

$$\delta w(y) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(y) \delta q_i. \quad (2-84)$$

Соответствующая этому перемещению работа внешних сил определяется выражением

$$\delta W_e = \int_0^l F_z(y) \delta w(y) dy = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^l F_z(y) \gamma_i(y) dy \right\} \delta q_i. \quad (2-85)$$

Энергию деформации, обусловленную изгибом тонкой балки, можно выразить через прогиб при помощи следующей формулы [2-2]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 dy. \quad (2-86)$$

Внося в это равенство выражение (2-82), приведем его к следующему виду:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^l EI \left( \frac{d^2 \gamma_i}{dy^2} \right) \left( \frac{d^2 \gamma_j}{dy^2} \right) dy \right\} q_i q_j. \quad (2-87)$$

Из этой формулы получим выражение для изменения энергии деформации, вызванного изменениями координат  $\delta q_i$ ,

$$\delta U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^l EI \left( \frac{d^2 \gamma_i}{dy^2} \right) \left( \frac{d^2 \gamma_j}{dy^2} \right) dy \right\} q_j \delta q_i. \quad (2-88)$$

Подставив выражения (2-85) и (2-88) в уравнение (2-81), получим

$$\sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^l EI \left( \frac{d^2 \gamma_i}{dy^2} \right) \left( \frac{d^2 \gamma_j}{dy^2} \right) dy \right\} q_j - \int_0^l F_z(y) \gamma_i(y) dy \right] \delta q_i = 0. \quad (2-89)$$

Поскольку  $\delta q_i$  представляют собой произвольные независимые величины, уравнение (2-89) будет удовлетворено только тогда, когда выполняются соотношения вида

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^l EI \left( \frac{d^2 \gamma_i}{dy^2} \right) \left( \frac{d^2 \gamma_j}{dy^2} \right) dy \right\} q_j - \int_0^l F_z(y) \gamma_i(y) dy = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2-90)$$

Соотношения (2-90) образуют систему  $n$  совместных линейных алгебраических уравнений для неизвестных обобщенных координат  $q_1, \dots, q_n$ . Окончательное выражение для прогиба получается подстановкой значений  $q_1, \dots, q_n$ , определяемых из решений уравнений (2-90), в выражение (2-82). Если число  $n$  конечно, такое решение является приближенным.

Процесс отыскания приближенных решений таким способом известен под названием метода Рэля — Ритца.

Рассмотрим теперь закрепленное трехмерное упругое тело, изображенное на фиг. 2-22. Пусть система осей координат  $x, y, z$  закреплена в пространстве и смещения в направлении этих осей соответственно равны  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  и  $w(x, y, z)$ . Пусть, далее,  $F_x(x, y, z)$ ,  $F_y(x, y, z)$  и  $F_z(x, y, z)$  представляют собой компоненты интенсивности поверхностной нагрузки. Работа поверхностных сил на некотором произвольном виртуальном перемещении представляется, таким образом, в виде

$$\delta W_e = \int_S (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) dS, \quad (2-91)$$

где интегрирование распространено по всей поверхности тела. Предположим теперь, что смещение тела можно представить в виде некоторых функций  $n$  дискретных обобщенных координат  $q_i$

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z, q_1, q_2, \dots, q_n), \\ v &= v(x, y, z, q_1, q_2, \dots, q_n), \\ w &= w(x, y, z, q_1, q_2, \dots, q_n). \end{aligned} \quad (2-92)$$

Для случая консольной балки, рассмотренного выше, вместо трех функций (2.92) имеем только одну функцию (2.82).

Внося выражения (2-92) в равенство (2-91), приведем формулу для виртуальной работы внешних сил к виду

$$\delta W_e = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_S \left( F_x \frac{\partial u}{\partial q_i} + F_y \frac{\partial v}{\partial q_i} + F_z \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) dS \right\} \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad (2-93)$$

где

$$Q_i = \int_S \left( F_x \frac{\partial u}{\partial q_i} + F_y \frac{\partial v}{\partial q_i} + F_z \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) dS \quad (2-94)$$

представляет собой обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате  $q_i$ .

Энергию деформации можно выразить также в виде некоторой функции обобщенных координат  $q_1, \dots, q_n$ , так что изменение энергии деформации, обусловливаемое произвольным виртуальным изменением обобщенных координат, будет равно

$$\delta U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (2-95)$$

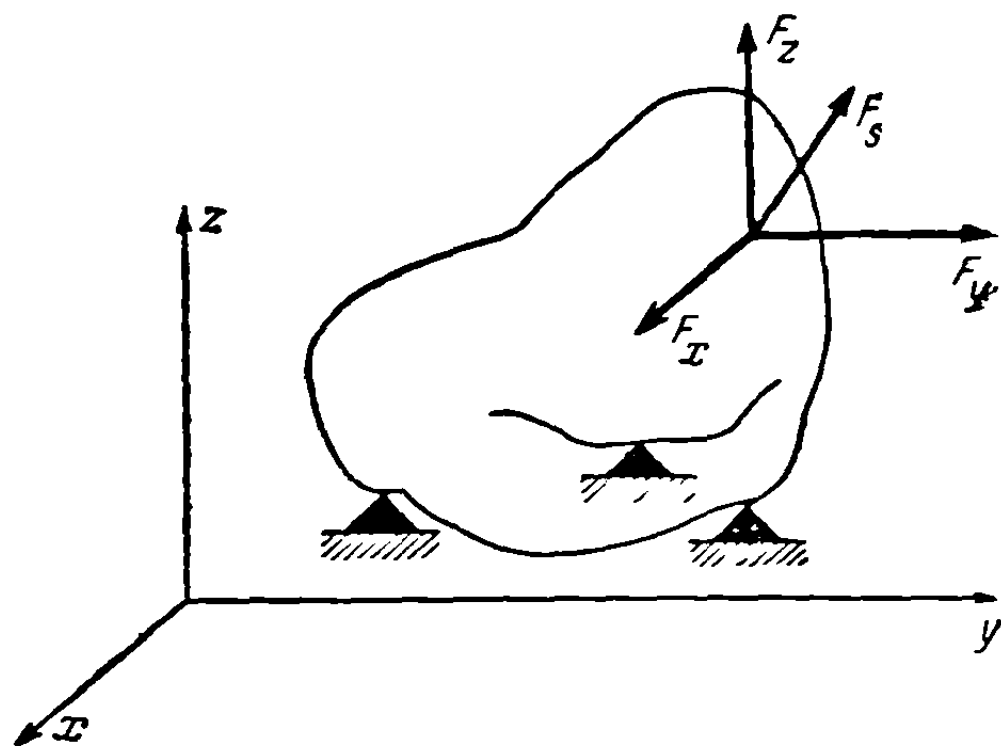
Внося выражения (2-94) и (2-95) в уравнение (2-81), найдем

$$\sum_{i=1}^n \left\{ Q_i - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right\} \delta q_i = 0. \quad (2-96)$$

Так как  $\delta q_i$  представляют собой независимые произвольные величины, то мы приходим к уравнениям

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2-97)$$

где величины  $Q_i$  определяются равенством (2-94).



Фиг. 2-22. Поверхностные нагрузки, действующие на трехмерное упругое тело.

Уравнения (2-97) представляют собой эквивалентную форму принципа минимума потенциальной энергии, применимую к системам, пространственная конфигурация которых может быть описана при помощи некоторой системы дискретных обобщенных координат. Если число  $n$  конечно, то процесс применения уравнений (2-97) к непрерывным системам, известный под названием метода Рэля—Ритца, приводит к некоторым приближенным решениям. Если  $n$  безгранично возрастает, то с помощью уравнений равновесия (2-97) оказывается возможным получить точное решение.

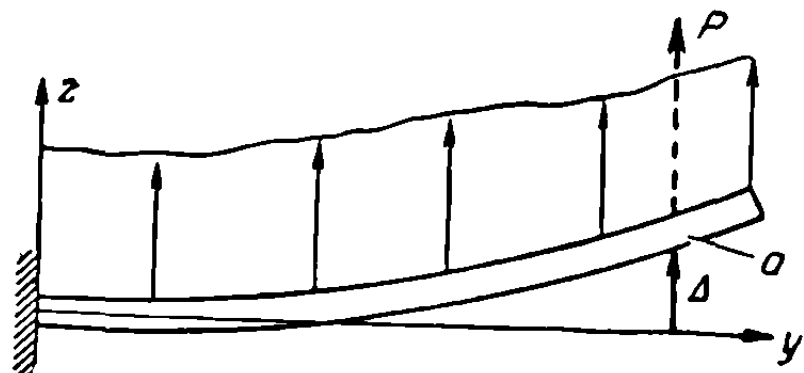
(с) *Определение прогибов при помощи теоремы Кастильяно.* Теорема Кастильяно приводит к способу вычисления прогибов, использующему выражение энергии деформации в виде функции от приложенных нагрузок. Дифференцируя равенство (2-36) по  $Q_i$ , получаем

$$\frac{\partial U}{\partial Q_i} = \frac{\partial}{\partial Q_i} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} Q_i Q_j \right) = \sum_{j=1}^n C_{ij} Q_j. \quad (2-98)$$

Комбинируя равенства (2-98) с равенством (2-3), получаем математическую формулировку теоремы Кастильяно

$$q_i = \frac{\partial U}{\partial Q_i}. \quad (2-99)$$

Теорема Кастильяно гласит, что частная производная от энергии деформации, выраженной через приложенные нагрузки, по некоторой нагрузке равна смещению конструкции в точке приложения этой нагрузки в направлении ее приложения.



Фиг. 2-23. Консольная балка под действием произвольной поперечной нагрузки.

Чтобы проиллюстрировать применение теоремы Кастильяно для вычисления прогибов балки, рассмотрим задачу об определении прогиба в некоторой точке  $a$  консольной балки, находящейся под действием произвольной поперечной нагрузки (см. фиг. 2-23). В точке  $a$ , прогиб  $\Delta$  в которой мы желаем определить, приложим некоторую дополнительную фиктивную нагрузку  $P$ . Если распределение изгибающего

момента под действием единичной нагрузки, приложенной в точке  $a$ , определяется некоторой величиной  $m$ , то в соответствии с принципом наложения распределение изгибающего момента под действием нагрузки  $P$ , приложенной в точке  $a$ , определяется величиной  $mP$ . Энергию деформации, получающуюся при изгибе тонкой балки, можно выразить через изгибающий момент  $\bar{M}$  с помощью следующей формулы:

$$U = \int_0^l \frac{\bar{M}^2}{2EI} dy. \quad (2-100)$$

Энергия деформации, обусловленная заданной системой поперечных нагрузок и фиктивной нагрузкой  $P$ , получается, если величину

$$\bar{M} = M(y) + mP \quad (2-101)$$

подставить в выражение (2-100); в результате получим

$$U = \int_0^l \frac{(M + mP)^2}{2EI} dy. \quad (2-102)$$

Прогиб в точке  $a$ , определяемый заданной системой поперечных нагрузок и фиктивной нагрузкой  $P$ , получается по теореме Кастильяно в следующем виде:

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^l \frac{(M + mP)m}{EI} dy. \quad (2-103)$$

Прогиб в точке  $a$ , вызванный только заданной системой поперечных нагрузок, получается, если положить в формуле (2-103)  $P = 0$ ; имеем

$$\Delta = \int_0^l \frac{Mm}{EI} dy. \quad (2-104)$$

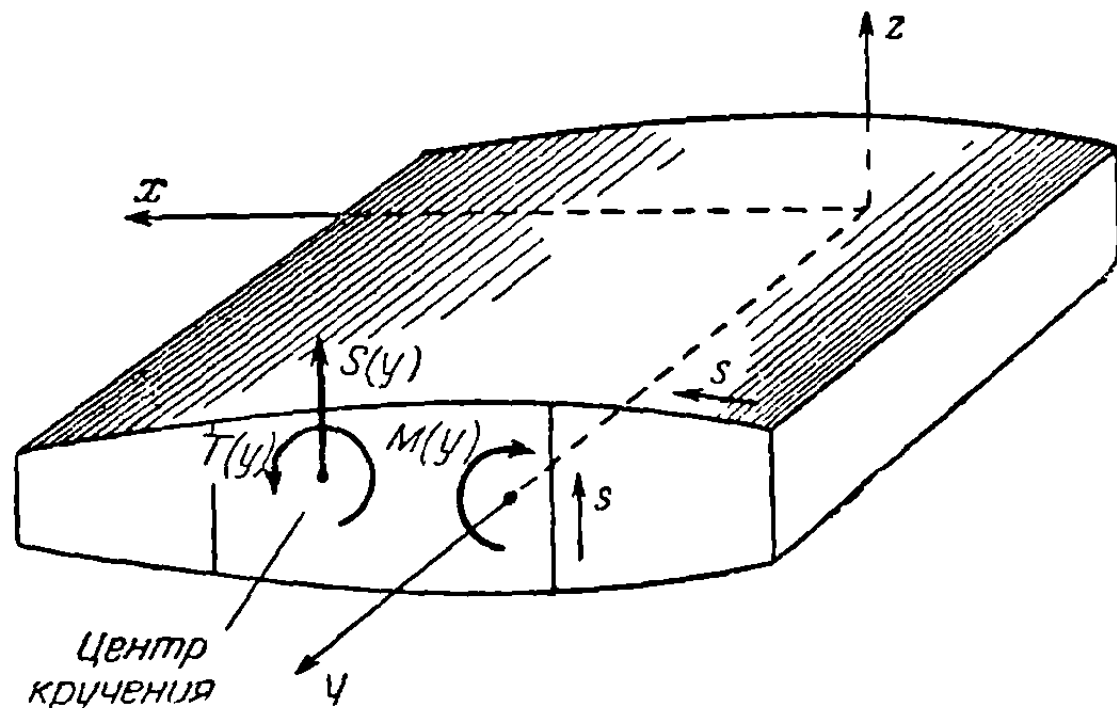
Формулу (2-104) можно, например, использовать для вычисления коэффициентов влияния, если записать их в виде

$$C_{ij} = \int_0^l \frac{m_i m_j}{EI} dy, \quad (2-105)$$

где

- $m_i$  — распределение изгибающего момента под действием единичной нагрузки, приложенной в  $i$ -й точке;
- $m_j$  — распределение изгибающего момента под действием единичной нагрузки, приложенной в  $j$ -й точке.

**2-12. Деформации тонких нестреловидных крыльев.** Рассмотрим некоторый тип коробчатых балок, для которых стенки обшивки и стенки, работающие на сдвиг, предполагаются настолько тонкими, что они не обладают жесткостью на изгиб. Форма их поперечного сечения сохраняется с помощью близко поставленных нервюр, которые характеризуются бесконечно большой жесткостью в своей собственной плоскости, но могут совершенно свободно искривляться в перпендикулярном к ней направлении. Балка может сужаться в направлении размаха; свойства ее поперечных сечений могут изменяться в зависимости от  $u$ . Оси координат изображены на фиг. 2-24. Для наших рассуждений удобно принять, что ось  $u$  проведена таким образом, что она пересекает каждое поперечное сечение в центре тяжести эффективной несущей площади, воспринимающей нормальные напряжения. Оси  $x$  и  $z$  проведены таким образом, что плоскости  $xu$  и  $uz$  проходят через главные оси изгиба. Каждому значению координаты  $u$ , отсчитываемой вдоль размаха крыла, и тангенциальной координаты  $s$  соответствует некоторая точка поперечного сечения крыла. Тангенциальная координата считается положительной в направлении против часовой стрелки для наружной обшивки балки и в положительном направлении оси  $z$  для внутренних стенок.

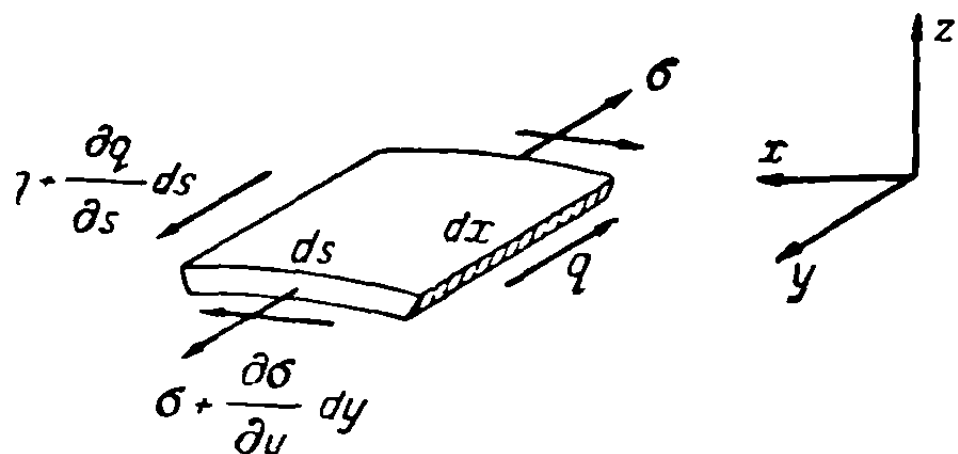


Фиг. 2-24. Нагрузки, действующие на поперечное сечение коробчатой балки.

На некоторое поперечное сечение балки, находящееся на расстоянии  $u$  от начала координат, действуют момент  $M(u)$ , поперечная сила  $S(u)$  и крутящий момент  $T(u)$ , положительные направления отсчета которых показаны на фиг. 2-24. Точкой приложения  $S(u)$  и  $T(u)$  является центр кручения или центр сдвига рассматриваемого поперечного сечения балки. Нормальные напряжения,

которые считаются положительными в направлении оси  $y$ , обозначены через  $\sigma$ , а поток касательных напряжений, предполагаемый положительным в направлении  $s$ , через  $q$ .

При рассмотрении тонких балок мы будем исходить из двух упрощающих предположений. Во-первых, будем предполагать, что при приложении крутящих нагрузок балка может свободно деформироваться. Это приводит к Сен-Венановскому решению задачи кручения и дает возможность сделать упрощающее предположение о том, что взаимодействие изгиба и кручения не имеет места.



Фиг. 2-25. Элемент обшивки крыла.

Во-вторых, будем считать, что плоские поперечные сечения остаются в процессе изгиба плоскими. Это дает возможность использовать хорошо известную техническую теорию изгиба.

(а) Деформации изгиба и сдвига.

Как показано на фиг. 2-25, крыло состоит из элементов обшивки, находящихся в равновесии под действием нормальных напряжений  $\sigma$  и потока касательных напряжений  $q$ . Поскольку нервюры предполагаются абсолютно жесткими в своей собственной плоскости и мы можем пренебречь нормальными напряжениями в направлении хорды крыла, то выражение энергии деформации крыла через напряжения принимает вид

где  $t$  — толщина обшивки; интегрирование по  $s$  распространяется по поперечному сечению крыла, а интегрирование по  $\lambda$  — по длине балки крыла. Вычислим сперва прогиб крыла  $w(y)$ , вызванный некоторым распределением изгибающего момента  $M(\lambda)$  и некоторым распределением поперечной силы  $S(\lambda)$ . Чтобы применить теорему Кастильяно, мы должны приложить в точке с координатой  $\lambda = y$  некоторую дополнительную внешнюю нагрузку  $P$ . Обозначим полное нормальное напряжение, определяемое заданным изгибающим моментом  $M(\lambda)$  и дополнительной фиктивной нагрузкой  $P$ , следующим образом:

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^l \int_{\text{поп. сеч.}} \bar{\sigma}^2 t ds d\lambda + \frac{1}{2G} \int_0^l \int_{\text{поп. сеч.}} \bar{q}^2 \frac{ds}{t} d\lambda, \quad (2-106)$$

$$\bar{\sigma}(\lambda, s) = \sigma(\lambda, s) + P \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial P}, \quad (2-107a)$$

где  $\sigma(\lambda, s)$  — нормальное напряжение, соответствующее заданному распределению изгибающего момента  $M(\lambda)$ , а  $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial P}$  — распределение нормальных напряжений, обусловливаемое единичной нагрузкой  $P = 1$ , приложенной в точке  $\lambda = y$ . Аналогично, суммарный поток касательных напряжений обозначается следующим образом:

$$\bar{q}(\lambda, s) = q(\lambda, s) + P \frac{\partial \bar{q}}{\partial P}, \quad (2-107b)$$

где  $q(\lambda, s)$  представляет собой поток касательных напряжений, соответствующий заданному распределению поперечной силы  $S(\lambda)$ , а  $\frac{\partial \bar{q}}{\partial P}$  есть поток касательных напряжений, определяемый единичной нагрузкой  $P = 1$ , приложенной в точке  $\lambda = y$ .

Подставив величины (2-107a) и (2-107b) в равенство (2-106), получим выражение для полной энергии деформации, определяемой заданными распределениями изгибающего момента и поперечной силы, а также фиктивной на-

грузкой  $P$ :

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^l \int_{\text{поп. сеч.}} \left[ \sigma(\lambda, s) + P \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial P} \right]^2 t ds d\lambda + \frac{1}{2G} \int_0^l \int_{\text{поп. сеч.}} \left[ q(\lambda, s) + P \frac{\partial \bar{q}}{\partial P} \right]^2 \frac{ds}{t} d\lambda. \quad (2-107c)$$

Дифференцируя это выражение по  $P$  и полагая  $P = 0$ , получаем выражение для прогиба  $w(y)$  в виде

$$w(y) = \frac{1}{E} \int_0^l \int_{\text{поп. сеч.}} \sigma(\lambda, s) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial P} t ds d\lambda + \frac{1}{G} \int_0^l \int_{\text{поп. сеч.}} q(\lambda, s) \frac{\partial \bar{q}}{\partial P} \frac{ds}{t} d\lambda. \quad (2-108)$$

Первый член в правой части выражения (2-108) представляет собой отклонение, обусловленное изгибом, которое мы будем обозначать через  $\alpha(y)$ :

$$\alpha(y) = \frac{1}{E} \int_0^l \int_{\text{поп. сеч.}} \sigma(\lambda, s) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial P} t ds d\lambda. \quad (2-109a)$$

Предполагая, например, что можно пользоваться технической теорией изгиба балок, найдем, что нормальные напряжения выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda, s) &= -\frac{M(\lambda) z}{I}, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial P} &= \begin{cases} -\frac{y-\lambda}{I} z, & (y > \lambda), \\ 0, & (y < \lambda), \end{cases} \end{aligned} \quad (2-109b)$$

где  $I$  представляет собой момент инерции площади поперечного сечения относительно оси  $x$ . Подставляя выражения (2-109b) в равенство (2-109a), получим

$$\alpha(y) = \int_0^y \frac{M(\lambda)(y-\lambda)}{EI} d\lambda. \quad (2-109c)$$

Продифференцировав дважды равенство (2-109c) по  $y$ , получим следующее соотношение между изгибающим моментом, действующим в данной точке балки, и кривизной:

$$\alpha'' = \frac{M}{EI}. \quad (2-110)$$

Второй член правой части выражения (2-108) представляет собой прогиб, обусловленный поперечными силами, который мы обозначим через  $\beta(y)$ :

$$\beta(y) = \frac{1}{G} \int_0^l \int_{\text{поп. сеч.}} q(\lambda, s) \frac{\partial \bar{q}}{\partial P} \frac{ds}{t} d\lambda. \quad (2-111a)$$

Обозначая распределение потока касательных напряжений, соответствующее  $S = 1$ , через  $u(\lambda, s)$ , получим

$$\begin{aligned} q(\lambda, s) &= Su(\lambda, s), \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial P} &= \begin{cases} u(\lambda, s), & (y > \lambda), \\ 0, & (y < \lambda). \end{cases} \end{aligned} \quad (2-111b)$$

Подставив величины (2-111b) в выражение (2-111a), получим

$$\beta(y) = \int_0^y \frac{S d\lambda}{GK}, \quad (2-111c)$$



где величина

$$K = \frac{1}{\int_{\text{поп. сеч.}} u^2 \frac{ds}{t}}$$

представляет собой характеризующую сдвиг поперечного сечения балки постоянную, выраженную через распределение поперечных сил, соответствующее некоторой единичной перерезывающей силе. Величина  $GK$  в формуле (2-111с) определяет жесткость балки на сдвиг. Продифференцировав выражение (2-111с) по  $y$ , получим следующее соотношение между поперечной силой и первой производной от прогиба, обусловленного поперечными силами

$$\beta' = \frac{S}{GK}. \quad (2-112)$$

(b) *Функции и коэффициенты влияния.* Функции влияния, учитывающие и деформации изгиба, и деформации сдвига, можно вычислить при помощи формулы (2-108). Например, для вычисления  $C^{zz}(y, \eta)$ , согласно технической теории изгиба балок, в выражении (2-108) полагаем

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda, s) &= -\frac{\eta - \lambda}{I} z, & (0 < \lambda < \eta), \\ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial P} &= -\frac{y - \lambda}{I} z, & (0 < \lambda < y) \end{aligned} \quad (2-113a)$$

и

$$\begin{aligned} q(\lambda, s) &= u(\lambda, s), & (0 < \lambda < \eta), \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial P} &= u(\lambda, s), & (0 < \lambda < y). \end{aligned} \quad (2-113b)$$

Для случая  $\eta \geq y$  это дает

$$C^{zz}(y, \eta) = \int_0^y \frac{(\eta - \lambda)(y - \lambda)}{EI} d\lambda + \int_0^y \frac{d\lambda}{GK}, \quad (\eta \geq y), \quad (2-114)$$

а при  $y \geq \eta$  имеем

$$C^{zz}(y, \eta) = \int_0^\eta \frac{(\eta - \lambda)(y - \lambda)}{EI} d\lambda + \int_0^\eta \frac{d\lambda}{GK}, \quad (y \geq \eta). \quad (2-115)$$

Коэффициенты влияния можно вычислить по формулам (2-114) и (2-115), внося в них численные значения  $y$  и  $\eta$ .

(c) *Функция влияния и деформация кручения.* Если при приложении крутящих моментов балка может свободно деформироваться, то энергия деформации полностью определяется касательными напряжениями и представляется в виде

$$U = \frac{1}{2G} \int_0^l \int_{\text{поп. сеч.}} \tau^2 \frac{ds}{t} d\lambda. \quad (2-116)$$

Применяя теорему Кастильяно таким же образом, как и в задаче изгиба, угол закручивания балки под действием заданного распределения крутящего момента  $T(\lambda)$  можно выразить следующим образом:

$$\theta(y) = \frac{1}{G} \int_0^l \int_{\text{поп. сеч.}} q(\lambda, s) \frac{\partial \bar{q}}{\partial T} \frac{ds}{t} d\lambda, \quad (2-117a)$$

где  $q(\lambda, s)$  представляет собой распределение потока касательных напряжений, обусловленных крутящими моментами, а  $\frac{\partial \bar{q}}{\partial T}$  представляет собой распределение потока касательных напряжений, определяемое единичным крутящим моментом  $T=1$ , приложенным в сечении с координатой  $\lambda = y$ .

Обозначая распределение потока касательных напряжений, соответствующее единичному крутящему моменту, через  $v(\lambda, s)$ , имеем

$$q(\lambda, s) = T(\lambda) v(\lambda, s),$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial T} = \begin{cases} v(\lambda, s), & (y > \lambda), \\ 0 & (y < \lambda). \end{cases} \quad (2-117b)$$

Подставив выражение (2-117b) в формулу (2-117a), получим

$$\theta(y) = \int_0^y \frac{T(\lambda) d\lambda}{GJ}, \quad (2-117c)$$

где

$$J = \frac{1}{\int_{\text{поп. сеч.}} v^2 \frac{ds}{t}}$$

представляет собой некоторую постоянную, характеризующую кручение поперечного сечения балки. Величина  $GJ$  называется жесткостью балки на кручение. Продифференцировав выражение (2-117c) по  $y$ , получим соотношение между крутящим моментом и относительным углом закручивания в следующем виде:

$$\theta' = \frac{T}{GJ}. \quad (2-118)$$

Задача, которую нужно решить для вычисления функции влияния кручения, представлена на фиг. 2-26. Единичный крутящий момент относительно упругой оси приложен в сечении, находящемся на некотором расстоянии  $\eta$  от начала; тогда результирующее угловое смещение сечения с координатой  $y$  и представляет собой  $C^{\theta\theta}(y, \eta)$ . Функцию влияния  $C^{\theta\theta}(y, \eta)$  можно получить с помощью формулы (2-117a), полагая

$$q(\lambda, s) = v(\lambda, s), \quad (0 < \lambda < \eta),$$

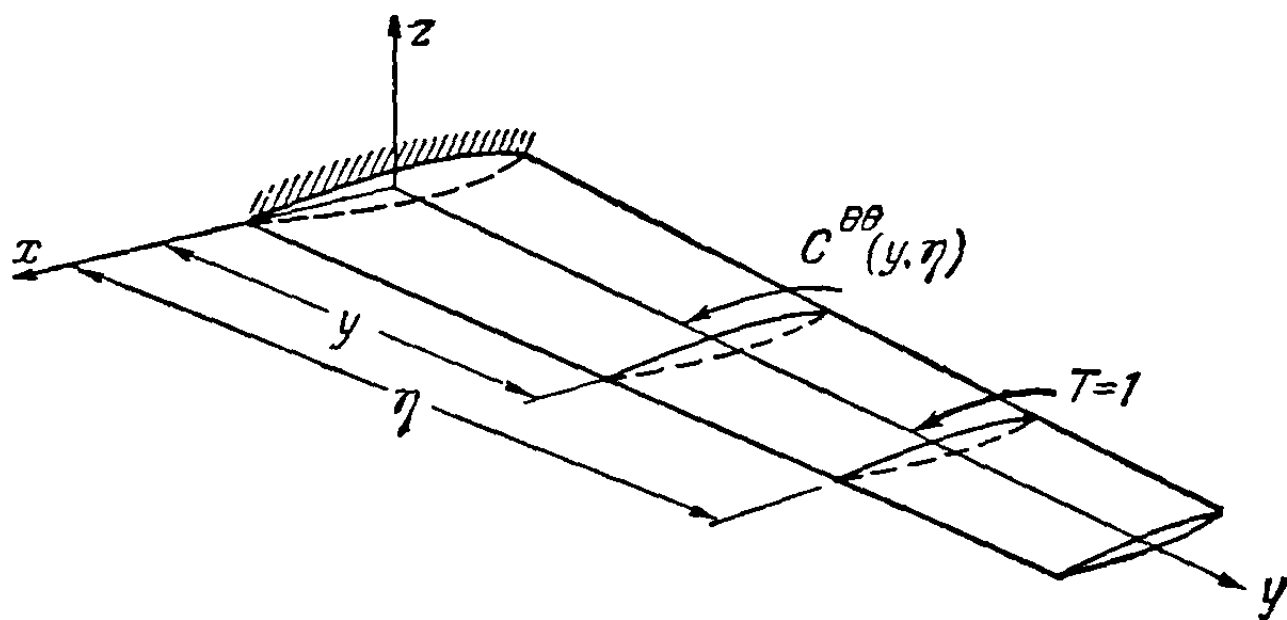
$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial T} = v(\lambda, s), \quad (0 < \lambda < y). \quad (2-119)$$

Это дает при  $\eta \geq y$

$$C^{\theta\theta}(y, \eta) = \int_0^y \frac{d\lambda}{GJ}, \quad (\eta \geq y), \quad (2-120)$$

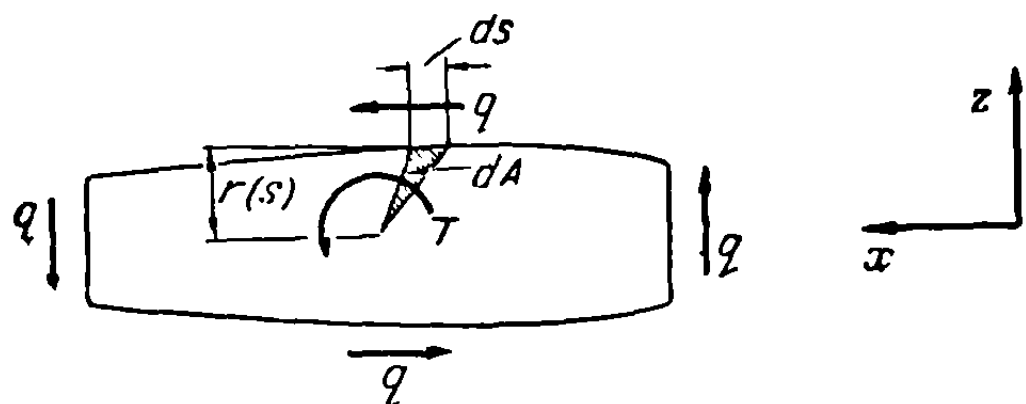
а при  $y \geq \eta$

$$C^{\theta\theta}(y, \eta) = \int_0^{\eta} \frac{d\lambda}{GJ}, \quad (y \geq \eta). \quad (2-121)$$



Фиг. 2-26. Консольное крыло под действием единичного крутящего момента.

Если известно распределение потока касательных напряжений  $v(s, \lambda)$ , вызванных единичным крутящим моментом, то постоянную кручения  $J$ , входящую в уравнение (2-120), можно легко вычислить для каждого сечения балки. В качестве примера рассмотрим коробчатую одноконтурную балку. Предположим, что крутящий момент  $T$  приложен к одноконтурному коробчатому элементу, как показано на фиг. 2-27. Поскольку мы предположили, что стенки коробчатого элемента могут свободно деформироваться, то при этом нормальных напряжений не возникнет. Как показывает фиг. 2-25, иллюстрирующая систему сил, действующих на элемент обшивки, при  $\sigma = 0$  имеем



$$\frac{\partial q}{\partial s} = 0. \quad (2-122)$$

Уравнение (2-122) показывает, что поток касательных напряжений вокруг одноконтурного коробчатого элемента постоянен.

Фиг. 2-27. Крутящий момент, приложенный к одноконтурному коробчатому сечению.

Как видно из фиг. 2-27, приравняв крутящий момент моменту

возникающих в сечении потока касательных напряжений относительно произвольной точки, получаем

$$T = \oint q r ds. \quad (2-123)$$

Так как  $q$  постоянно по всему сечению, уравнение (2-123) приводит к результату, известному под названием формулы Бредта,

$$T = 2Aq, \quad (2-124)$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения отсека.

Подставляя этот результат в выражение (2-120), получаем формулу для постоянной кручения одноконтурного коробчатого сечения:

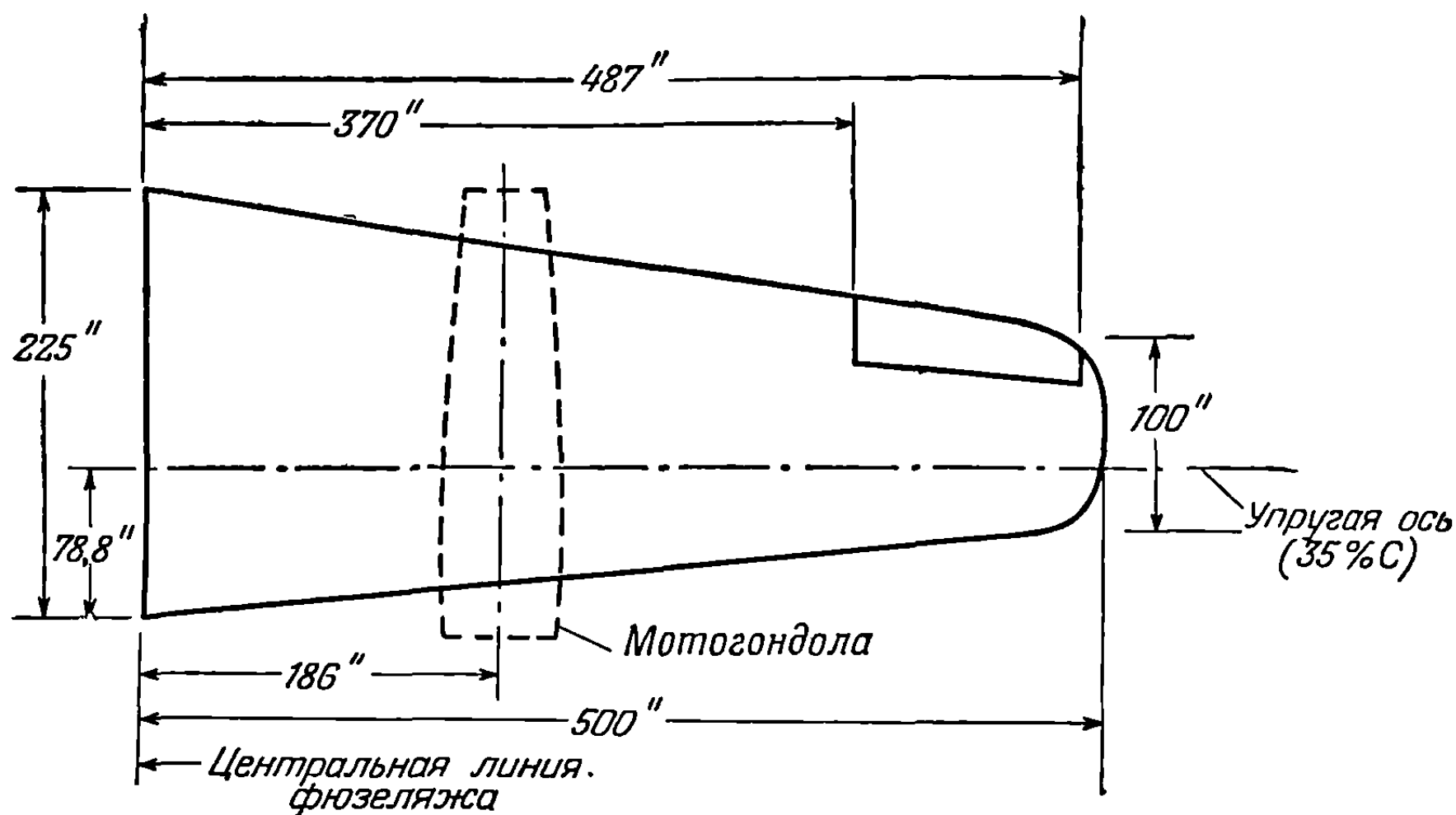
$$J = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}}. \quad (2-125)$$

При вычислении жесткости на кручение многоконтурного коробчатого сечения нужно вычислять распределение потока касательных напряжений в статически неопределимой системе, определяемого единичным крутящим моментом. Методы решения этой задачи хорошо известны; их можно найти, например, в работе [2—10].

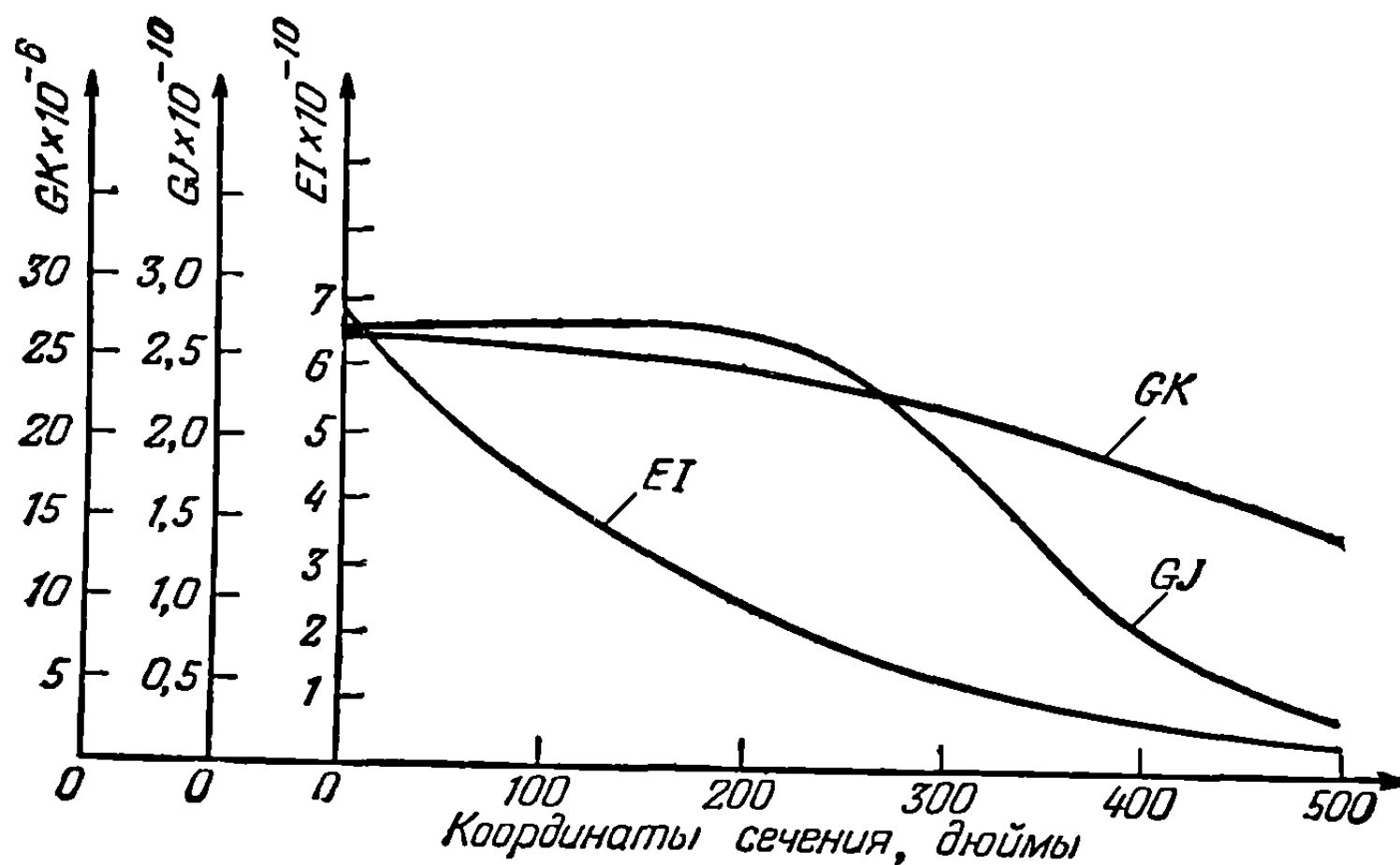
(d) Упругая ось. В п. 2—12 (a) и (b) мы вывели формулы для определения коэффициентов влияния гибкости для изгиба и кручения балок с прямолинейными упругими осями. Для использования этих результатов необходимо знать положение упругой оси. Упругая ось получается, если провести в направлении размаха крыла линию, соединяющую центры сдвига поперечных сечений балки. Центр сдвига каждого поперечного сечения определяется как точка в плоскости сечения крыла, приложение в которой поперечной силы не вызывает деформации кручения в рассматриваемом сечении. Методы вычисления положения центра сдвига для многоконтурных коробчатых балок можно найти в работах [2—2], [2—10]. Для определения положения упругой оси в исследованиях по аэроупругости часто употребляются натурные испытания крыльев и испытания моделей крыльев.

Пример 2-1. Вычислить коэффициенты влияния для крыла реактивного транспортного самолета. Форма крыла в плане изображена на фиг. 2-28. Упругая ось крыла прямолинейна и подходит перпендикулярно к корню на расстоянии  $35\%$  длины хорды. Кривые изменения жесткости на изгиб  $EI$ , жесткости на кручение  $GJ$  и жесткости на

сдвиг  $GK$  рассчитаны и построены на фиг. 2-29. Требуется вычислить матрицы коэффициентов влияния для изгиба и кручения, соответствующие пяти сечениям крыла с координатами по размаху, равными соответственно 90, 186, 268, 368 и 458 дюймам.



Фиг. 2-28. Типичная форма в плане крыла реактивного транспортного самолета.



Фиг. 2-29. Кривые жесткостей на изгиб, кручение и сдвиг.

Решение.

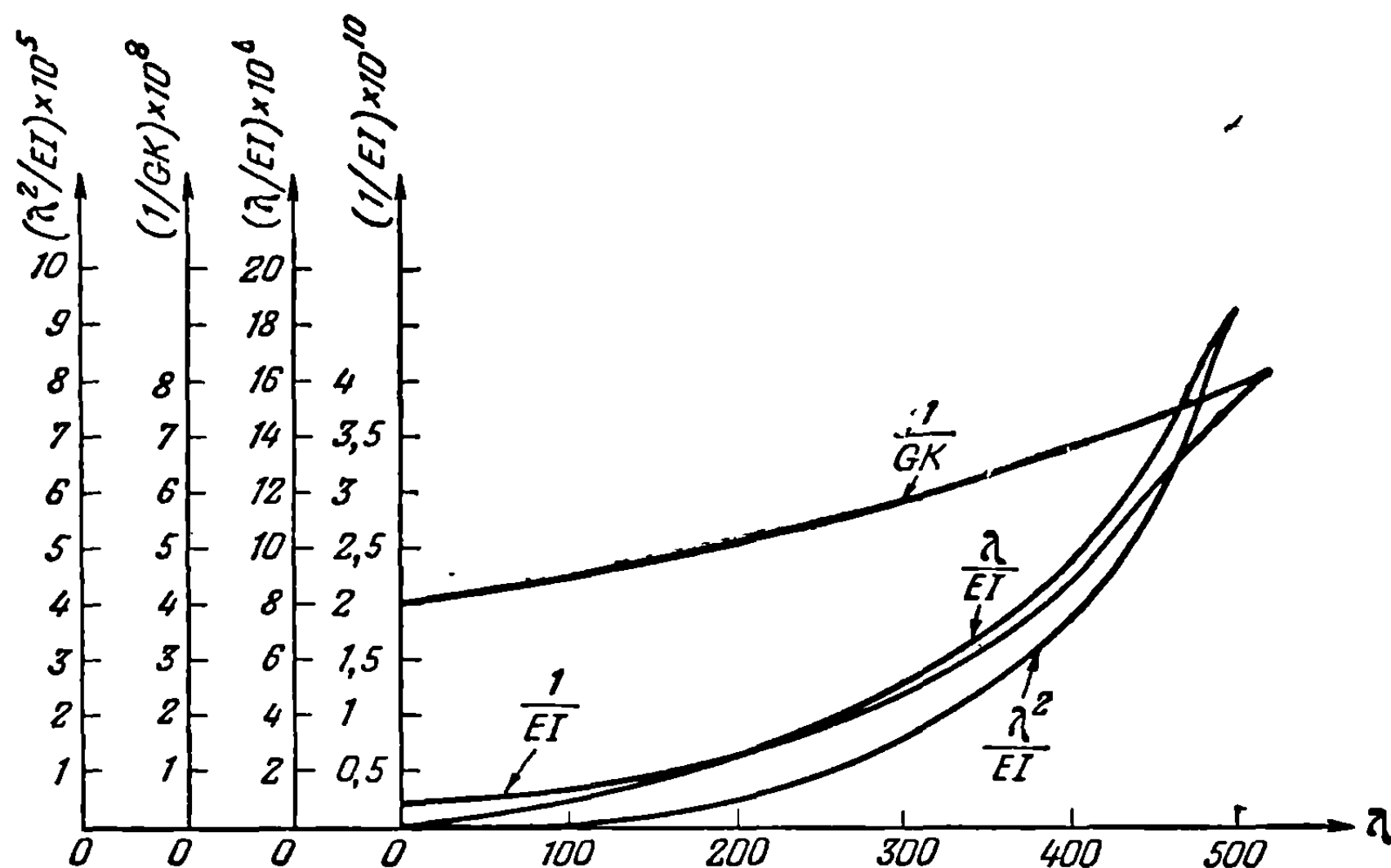
(а) Матрица коэффициентов влияния для изгиба. Коэффициенты влияния для изгиба получаются с помощью вычислений по формулам (2-114) и (2-115). Развертывая правую часть формулы (2-115) и полагая в ней  $y = y_i$  и  $\eta = y_j$ , получаем выражение коэффициента влияния для изгиба  $C_{ij}$  в следующем виде:

$$C_{ij} = y_i y_j \int_0^{y_j} \frac{d\lambda}{EI} - (y_i + y_j) \int_0^{y_j} \frac{\lambda d\lambda}{EI} + \int_0^{y_j} \frac{\lambda^2 d\lambda}{EI} + \int_0^{y_j} \frac{d\lambda}{GK}, \quad (y_i \geq y_j). \quad (a)$$

Полагая  $y_j = 90$ , мы можем, например, вычислить первый столбец матрицы коэффициентов влияния для изгиба по следующей формуле:

$$C_{i1} = 90 y_i \int_0^{90} \frac{d\lambda}{EI} - (y_i + 90) \int_0^{90} \frac{\lambda d\lambda}{EI} + \int_0^{90} \frac{\lambda^2 d\lambda}{EI} + \int_0^{90} \frac{d\lambda}{GK}, \quad (b)$$

где  $y_i = 90, 186, 268, 368$  и  $458$  дюймам. Определенные интегралы можно вычислить, построив графики функций  $1/EI, \lambda/EI, \lambda^2/EI$  и  $1/GK$  (фиг. 2-30) и взяв площади под соответствующими кривыми влево от сечения с координатой, равной 90. Можно использовать для этой цели планиметр, однако наиболее просто применить в данном случае



Фиг. 2-30. График подинтегральных выражений интегралов, появляющихся при вычислении коэффициента влияния.

формулу трапеций, дающую обычно достаточную точность. Вычисляя площади под кривыми, для коэффициента  $C_{i1}$  получим следующее значение:

$$C_{i1} = (0,44126 y_i - 4,369) \times 10^{-7} + 37,07 \times 10^{-7}, \quad (c)$$

где первый член обусловлен прогибами, а второй член — деформациями сдвига. Положив  $y_i$  равным 90, 186, 268, 368 и 458 дюймам, получим

$$\begin{aligned} C_{11} &= 35,3445 \times 10^{-7} + 37,07 \times 10^{-7} = 72,410 \times 10^{-7} \text{ дюйм/фунт,} \\ C_{21} &= 77,7054 \times 10^{-7} + 37,07 \times 10^{-7} = 114,771 \times 10^{-7}, \\ C_{31} &= 113,889 \times 10^{-7} + 37,07 \times 10^{-7} = 150,955 \times 10^{-7}, \\ C_{41} &= 158,015 \times 10^{-7} + 37,07 \times 10^{-7} = 195,081 \times 10^{-7}, \\ C_{51} &= 197,728 \times 10^{-7} + 37,07 \times 10^{-7} = 234,794 \times 10^{-7}, \end{aligned} \quad (d)$$

Деформации, определяемые сдвигом, составляют существенную часть полных деформаций для внутрибортовых сечений, в то время как для внешнебортовых сечений эти деформации составляют лишь пренебрежимо малую часть полных деформаций. В силу теоремы взаимности вычисленные выше результаты дают не только первый столбец, но также и первую строку искомой матрицы. Другие строки и столбцы можно вычислить точно таким же способом. Окончательное выражение для матрицы коэффициентов влияния при изгибе получается в виде

$$[C^{zz}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 72,410 & 114,771 & 150,995 & 195,081 & 234,794 \\ 0 & 114,771 & 253,306 & 461,299 & 714,949 & 943,234 \\ 0 & 150,995 & 461,299 & 1247,53 & 1911,22 & 2508,54 \\ 0 & 195,081 & 714,949 & 1911,22 & 2649,96 & 5237,42 \\ 0 & 234,794 & 943,234 & 2508,54 & 5237,42 & 8434,02 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \text{ дюйм/фунт.} \quad (e)$$

(в) Матрица коэффициентов влияния для кручения. Коэффициенты влияния для кручения получаются по формулам (2-120) и (2-121) путем вычисления площадей под

кривой  $1/GJ$ :

$$C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{15} = \int_0^{90} \frac{d\lambda}{GJ} = 36 \times 10^{-10} \text{ рад/дюйм} \cdot \text{фунт.}$$

$$C_{22} = C_{23} = C_{24} = C_{25} = \int_0^{186} \frac{d\lambda}{GJ} = 75,36 \times 10^{-10},$$

$$C_{33} = C_{34} = C_{35} = \int_0^{268} \frac{d\lambda}{GJ} = 113,26 \times 10^{-10},$$

$$C_{44} = C_{45} = \int_0^{368} \frac{d\lambda}{GJ} = 204,66 \times 10^{-10},$$

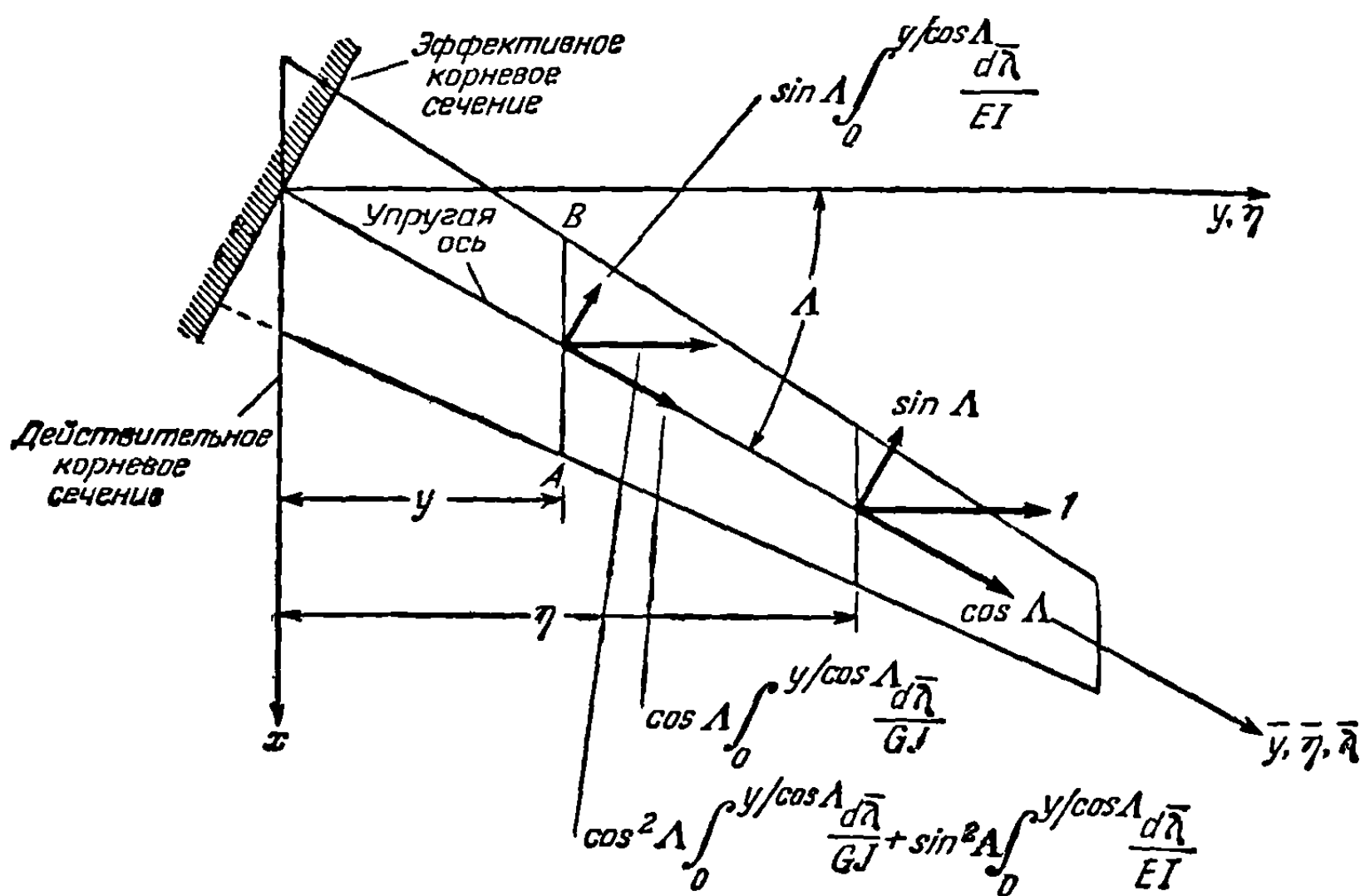
$$C_{55} = \int_0^{458} \frac{d\lambda}{GJ} = 409,49 \times 10^{-10}.$$

Эти формулы приводят к следующему выражению матрицы коэффициентов влияния для кручения:

$$[C^{66}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 36 & 36 & 36 & 36 \\ 0 & 36 & 75,36 & 75,36 & 75,36 & 75,36 \\ 0 & 36 & 75,36 & 113,26 & 113,26 & 113,26 \\ 0 & 36 & 75,36 & 113,26 & 204,66 & 204,66 \\ 0 & 36 & 75,36 & 113,26 & 204,66 & 409,49 \end{bmatrix} \times 10^{-10} \text{ рад/дюйм} \cdot \text{фунт.} \quad (g)$$

**2-13. Функции и коэффициенты влияния тонких стреловидных крыльев.**

В п. 2-9 мы описывали деформацию стреловидного крыла при помощи формул (2-63) и (2-64), определяющих линейное и угловое смещения профилей,



Фиг. 2-31. Тонкое стреловидное крыло с эффективным корневым сечением.

параллельных хорде крыла, под действием текущих сил и крутящих моментов относительно некоторой оси отсчета  $\bar{y}$ . В случае тонких стреловидных балок большого удлинения можно ввести эффективное корневое сечение балки, как показано на фиг. 2-31. Таким образом, можно постулировать существование



упругой оси, совпадающей с осью отсчета  $\bar{y}$ . Если предположить, что ось  $\bar{y}$  представляет собой истинную упругую ось, то функции влияния, входящие в формулы (2-63) и (2-64), можно вычислить согласно теории тонких балок.

Выражение для функции влияния  $C^{zz}(y, \eta)$ , представляющее собой прогиб упругой оси в точке с координатой  $y$  под действием единичной нагрузки, приложенной в точке упругой оси с координатой  $\eta$ , непосредственно получается из формул (2-114) и (2-115) в виде

$$C^{zz}(y, \eta) = \int_0^{y/\cos \Delta} \frac{\left(\frac{\eta}{\cos \Delta} - \bar{\lambda}\right) \left(\frac{y}{\cos \Delta} - \bar{\lambda}\right)}{EI} d\bar{\lambda} + \int_0^{y/\cos \Delta} \frac{d\bar{\lambda}}{GK}, \quad (\eta \geq y), \quad (2-126)$$

$$C^{zz}(y, \eta) = \int_0^{\eta/\cos \Delta} \frac{\left(\frac{\eta}{\cos \Delta} - \bar{\lambda}\right) \left(\frac{y}{\cos \Delta} - \bar{\lambda}\right)}{EI} d\bar{\lambda} + \int_0^{\eta/\cos \Delta} \frac{d\bar{\lambda}}{GK}, \quad (y \geq \eta), \quad (2-127)$$

где  $EI$  и  $GK$  представляют собой соответствующие жесткости сечений балки, нормальных к упругой оси.

Функция  $C^{\theta\theta}(y, \eta)$  представляет собой угол поворота сечения  $AB$ , параллельного направлению потока, вокруг оси  $y$  под действием единичного момента, приложенного в точке оси отсчета с координатой  $\eta$ , вектор которого параллелен этой оси. На фиг. 2-31 показан расположенный в плоскости, совпадающей с направлением потока, и приложенный в точке  $\eta$  единичный момент, разложенный на параллельную и перпендикулярную к упругой оси составляющие, а также производимые этими компонентами угловые отклонения в точке упругой оси с координатой  $y$ , когда  $y \leq \eta$ . Функция  $C^{\theta\theta}(y, \eta)$  представляет собой результирующую компоненту угла закручивания относительно оси  $y$ :

$$C^{\theta\theta}(y, \eta) = \int_0^{y/\cos \Delta} \left( \frac{\cos^2 \Delta}{GJ} + \frac{\sin^2 \Delta}{EI} \right) d\bar{\lambda}, \quad (\eta \geq y), \quad (2-128)$$

где  $EI$  и  $GJ$  представляют собой жесткости нормальных к упругой оси сечений балки. Можно также показать, что

$$C^{\theta\theta}(y, \eta) = \int_0^{\eta/\cos \Delta} \left( \frac{\cos^2 \Delta}{GJ} + \frac{\sin^2 \Delta}{EI} \right) d\bar{\lambda}, \quad (y \geq \eta). \quad (2-129)$$

Наконец,  $C^{\theta z}(y, \eta)$  представляет собой угол поворота сечения  $AB$ , параллельного направлению потока, относительно оси  $y$  под действием единичной нагрузки, приложенной к оси отсчета в точке с координатой  $\eta$ :

$$C^{\theta z}(y, \eta) = \sin \Delta \int_0^{y/\cos \Delta} \frac{\left(\frac{\eta}{\cos \Delta} - \bar{\lambda}\right)}{EI} d\bar{\lambda}, \quad (\eta \geq y), \quad (2-130)$$

$$C^{\theta z}(y, \eta) = \sin \Delta \int_0^{\eta/\cos \Delta} \frac{\left(\frac{\eta}{\cos \Delta} - \bar{\lambda}\right)}{EI} d\bar{\lambda}, \quad (y \geq \eta). \quad (2-131)$$

Используя соотношение взаимности (2-32), можно получить выражение для функции влияния  $C^{z\theta}(y, \eta)$ , меняя местами  $y$  и  $\eta$  в выражении для  $C^{\theta z}(y, \eta)$ :

$$C^{z\theta}(y, \eta) = C^{\theta z}(\eta, y). \quad (2-132)$$

**2-14. Деформации и коэффициенты влияния крыльев малого удлинения.** При рассмотрении методов явного определения деформаций конструкций мы до сих пор ограничивались случаем тонких крыльев, который может быть

исследован при помощи технической теории балок. Однако современное направление в конструировании высокоскоростных самолетов отходит от тонких крыльев и переходит к поверхностям малого удлинения типа крыла самолета XF-92A, изображенного на фиг. 2-3. Задача определения упругих характеристик поверхностей малого удлинения в исследованиях по аэроупругости представляет исключительные трудности и требует для получения полезных и точных результатов затраты значительного времени и усилий.

Исследование поверхностей малого удлинения существенно отличается от исследования длинных тонких крыльев по меньшей мере в двух важных отношениях. Во-первых, в этом случае заделка корня крыла играет в смысле влияния на деформации намного более важную роль и поэтому должна учитываться более точно. Это условие относится прежде всего к заделке корневого сечения крыла для предотвращения депланации, которая имеет большое значение для кручения крыла [2—11]. Во-вторых, существенная часть всей деформации может обуславливаться изгибом дужки поверхности крыла. В результате крыло ведет себя аналогично пластинке, обладающей заметной упругой кривизной в двух направлениях. В последние годы были затрачены значительные усилия для создания методов исследования деформаций как составных, так и сплошных крыльев малого удлинения.

Сильная потребность в сверхзвуковых несущих поверхностях с малым сопротивлением и малым относительным удлинением приводит к непрерывному уменьшению относительной толщины крыла. Это уменьшение сопровождается утолщением наружных обшивок крыла и увеличением числа стенок. Конечным пределом этого процесса является, разумеется, сплошное крыло. Стремясь уменьшить сопротивление крыла до абсолютного минимума, конструкторы сверхзвуковых снарядов часто используют сплошные несущие и управляющие поверхности.

Вообще говоря, при исследовании деформаций крыльев малого удлинения можно пользоваться тремя существенно различными методами. Первый метод, применимый главным образом к составным крыльям, был предложен в 1947 г. Леви [2—12]. Согласно этому методу, конструкция рассматривается как совокупность некоторого конечного числа упругих элементов. Каждый из этих элементов находится в состоянии равновесия; силы, действующие на различные элементы, рассматриваются как неизвестные величины. Если конструкция является статически определимой, то внутренние усилия можно вычислить из уравнений равновесия, а прогибы можно найти, применяя теорему Кастильяно. Если же конструкция является статически неопределимой, то истинное значение для системы внутренних сил можно получить, применяя принцип минимума энергии деформации. Применение этого последнего принципа равносильно требованию, чтобы деформация каждого элемента была совместна с деформациями всех других элементов. В последующих статьях Ланга и Бисплингхоффа [2—13], Лангфорса [2—14], Веле и Лансинга [2—15] было дано дальнейшее развитие метода Леви. Дополнения, сделанные в этих статьях, состояли главным образом в приведении постановки задачи к матричной форме и улучшении техники решения.

Второй метод, также применимый главным образом к составным крыльям, аналогичен первому в том отношении, что он рассматривает конструкцию как некоторую совокупность взаимно связанных упругих элементов. Однако в этом методе в качестве неизвестных величин рассматриваются деформации различных отдельных элементов, а не действующие на них силы. Требуется, чтобы деформация каждого упругого элемента была совместной с деформацией любого другого элемента. Истинную картину деформаций можно получить, применяя принцип минимума потенциальной энергии. Применение этого принципа равносильно требованию, чтобы каждый элемент конструкции находился в статическом равновесии. Этот метод иногда называется методом прямого вычисления

жесткости. Он был развит в работах Шюерха [2—16], Леви [2—17], Тёрнера, Клафа, Мартина и Топпа [2—18].

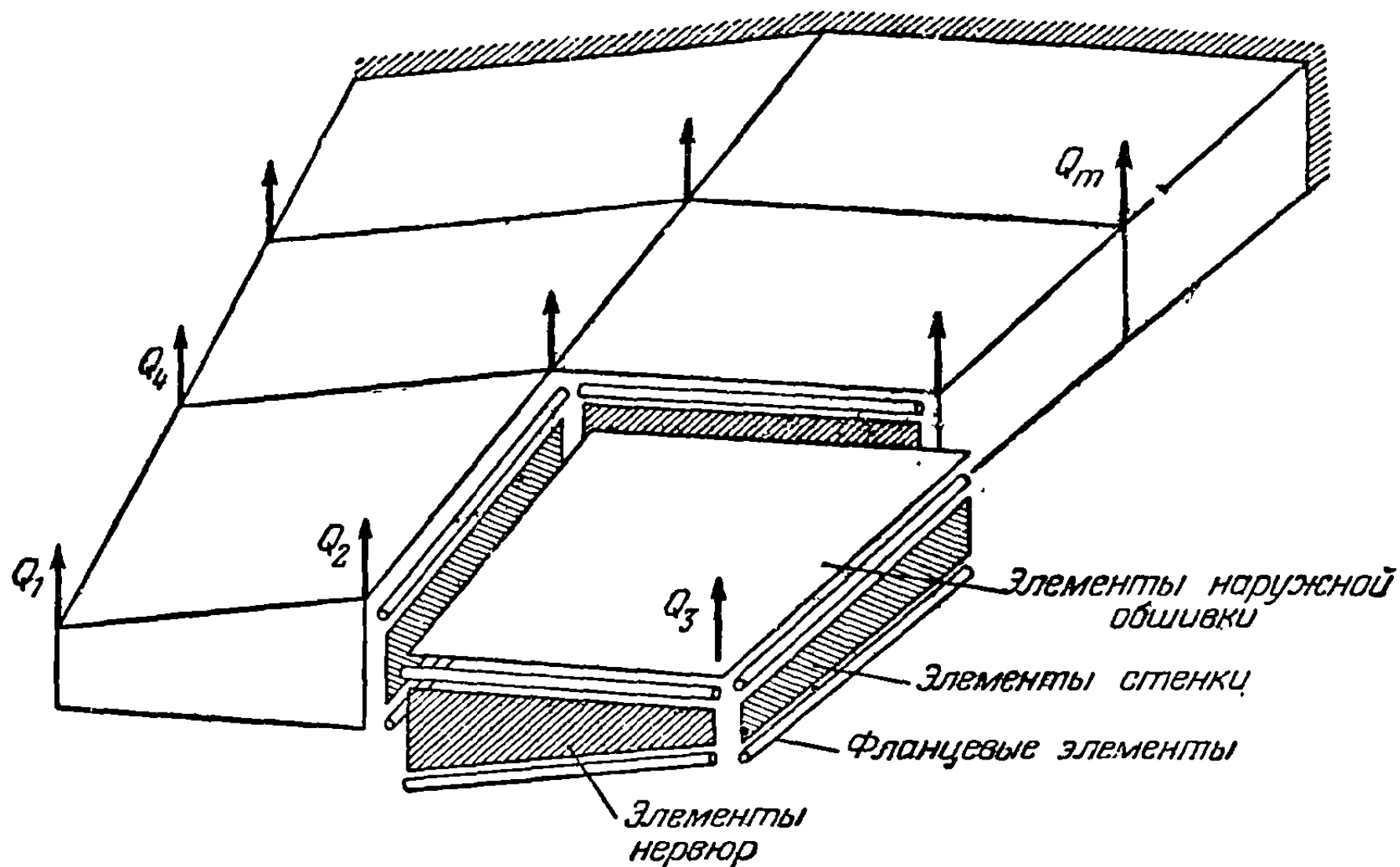
Третий метод применим как к составным, так и к сплошным крыльям. Он заключается в применении принципа минимума потенциальной энергии в форме классического или обобщенного методов Рэля—Ритца. В этих методах пространственная конфигурация деформированной упругой поверхности выбирается путем наложения некоторых заданных функций. Вклад, соответствующий каждой заданной функции, можно определить, применяя принцип минимума потенциальной энергии. Третий метод был главным образом развит в работах Рейснера и Штейна [2—19] и Фына [2—20].

Хотя настоящая глава и посвящена прежде всего аналитическому исследованию, следует отметить, что для получения коэффициентов влияния во многих случаях можно использовать модели конструкций, когда результаты аналитического исследования не представляются достаточно надежными. Ввиду большого разнообразия применяемых в настоящее время конструкций, модели, несомненно, будут использоваться в будущем более широко. Однако хорошие модели дороги и требуют для своего изготовления значительного времени. Более того, если модели изготовлены слишком рано в ходе создания самолета, они устаревают благодаря вносимым в конструкцию самолета изменениям. Эти обстоятельства, а равно и другие факторы, относящиеся к моделям конструкций, более подробно рассматриваются в главах 12 и 13.

**2-15. Определение коэффициентов влияния сложных составных крыльев при помощи принципа минимума энергии деформации.** Всякая конструкция самолета вне зависимости от того, какую форму она имеет, представляет собой, в основном, некоторую группу упругих элементов, соединенных между собой и образующих систему, которая часто бывает статически неопределимой. Конструкция обычно может быть идеализирована и представлена в виде совокупности конструктивных элементов вроде аксиально нагруженных фланцевых элементов, панелей, работающих на сдвиг, или других типов простых деталей, энергия деформации которых может быть выражена через напряжения. Такая идеализация представляет собой, по существу, замену непрерывной системы некоторой эквивалентной системой сосредоточенных параметров. Успех применения этого метода существенно зависит от умения исследователя заменить рассматриваемую конструкцию некоторой простой идеализированной конструкцией, сохраняющей основные, наиболее существенные свойства исходной. При исследовании тонких монококковых конструкций с тонкой обшивкой общепринято, например, рассматривать отдельно несущую способность обшивки на осевую нагрузку и на сдвиг. Таким образом, несущую способность на осевую нагрузку обшивки получают, складывая различные части площади поперечного сечения обшивки с площадью поперечного сечения соседних полок лонжерона и других продольных подкреплений. Этот способ основан на предположении, что напряжение в обшивке в направлении полок лонжеронов и стрингеров является пренебрежимо малым. Для крыльев большого удлинения с относительно малым сужением или стреловидностью и с переборками и нервюрами, перпендикулярными к оси балки, это неявное предположение можно приближенно считать удовлетворяющимся. В многолонжеронном дельтавидном крыле или другом крыле малого удлинения уже нельзя указать направления, в котором напряжения в обшивке будут пренебрежимо малыми [2—17]. Таким образом, для крыльев малого удлинения желательно исследовать несущую способность обшивки как в направлении, параллельном, так и в направлении, перпендикулярном к лонжеронам.

Предположим, например, что нам нужно определить коэффициенты влияния, соответствующие  $m$  точкам конструкции, изображенной на фиг. 2-32. При помощи принципа виртуальной работы можно вычислить смещение в  $i$ -й точке под действием единичной нагрузки, приложенной в  $j$ -й точке. Однако если мы хотим получить всю матрицу коэффициентов влияния, то имеется несколько

более прямой способ, дающий возможность получить эту матрицу при помощи одной операции [2—12], [2—13]. Предположим, что конструкция разделена на  $n$  отдельных элементов (см. фиг. 2-32). Если нагрузки, действующие в этих



Фиг. 2-32. Конструкция крыла, разделенная на конструктивные элементы.

элементах, можно представить  $n$  величинами  $p_1, \dots, p_n$ , то полная энергия деформации конструкции выразится следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \underline{p_1, \dots, p_n} [F] \{p_1, \dots, p_n\}, \quad (2-133)$$

где матрица  $[F]$  симметрична и обладает тем свойством, что

$$[F] = [F]'. \quad (2-134)$$

Внутренние усилия, возникающие под действием приложенных к конструкции нагрузок  $Q_1, \dots, Q_m$ , представляются линейными функциями этих нагрузок, так что

$$\{p_1, \dots, p_n\} = [G] \{Q_1, \dots, Q_m\}. \quad (2-135)$$

Подставляя выражение (2-135) в формулу (2-133), получаем

$$U = \frac{1}{2} \underline{Q_1, \dots, Q_m} [G]' [F] [G] \{Q_1, \dots, Q_m\}. \quad (2-136)$$

Сравнивая равенства (2-136) и (2-40), мы видим, что матрица коэффициентов влияния, соответствующая  $m$  точкам приложения нагрузки, представляет собой квадратную  $m \times m$  матрицу, определяемую соотношением

$$[G] = [G]' [F] [G]. \quad (2-137)$$

В большинстве случаев для крыльев, встречающихся на практике, описанный выше метод усложняется тем обстоятельством, что конструкция крыла оказывается статически неопределимой, так что матрицу  $[G]$  оказывается невозможным вычислить из одних только уравнений статики. Предположим, что, применяя основные уравнения статического равновесия к каждому элементу конструкции, мы получим только  $k$  независимых уравнений,

$$[E] \{p_1, \dots, p_n, Q_1, \dots, Q_m\} = 0. \quad (2-138)$$

Поэтому степень статической неопределимости конструкции выражается следующим образом:

$$r = n - k. \quad (2-139)$$

Если из общего числа  $n$  элементов выбрать  $r$  лишних элементов, то уравнение (2-138) можно будет разрешить относительно  $n$  неизвестных внутренних усилий, выразив их через приложенные нагрузки и  $r$  лишних неизвестных, так что будем иметь

$$\{p_1, \dots, p_n\} = [G] \{Q_1, \dots, Q_m, p_r\}, \quad (2-140)$$

где  $p_r$  представляют собой нагрузки в лишних элементах. Если рассматриваемая система является статически определимой, так что  $p_r = 0$ , то равенство (2-140) представляет собой, разумеется, полное решение задачи о распределении внутренних усилий.

Лишние неизвестные можно вычислить, используя принцип минимума энергии деформации. Подставив выражение (2-140) в равенство (2-133), получим

$$U = \frac{1}{2} \{Q_1, \dots, Q_m, p_r\} [H] \{Q_1, \dots, Q_m, p_r\}, \quad (2-141)$$

где

$$[H] = [G]' [F] [G].$$

Применив принцип минимума энергии деформации [1—3] в форме

$$\frac{\partial U}{\partial p_r} = 0, \quad (2-142)$$

получим столбцевую матрицу лишних неизвестных в следующем виде:

$$\{p_r\} = - [H_{pp}]^{-1} [H_{pQ}] \{Q_1, \dots, Q_m\}. \quad (2-143)$$

Матрицы  $[H_{pp}]$  и  $[H_{pQ}]$  получаются расчленением матрицы  $[H]$ :

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{QQ} & H_{QP} \\ H_{PQ} & H_{PP} \end{bmatrix}. \quad (2-144)$$

Из уравнения (2-143) мы видим, что

$$\{Q_1, \dots, Q_m, p_r\} = \begin{bmatrix} [I] \\ - [H_{pp}]^{-1} [H_{pQ}] \end{bmatrix} \{Q_1, \dots, Q_m\}. \quad (2-145)$$

Внося выражение (2-145) в формулу (2-141) и упрощая, получаем

$$U = \frac{1}{2} \{Q_1, \dots, Q_m\} [[H_{QQ}] - [H_{QP}] [H_{pp}]^{-1} [H_{PQ}]] \{Q_1, \dots, Q_m\}. \quad (2-146)$$

Сравнивая равенства (2-146) и (2-40), мы видим, что матрица коэффициентов влияния выражается следующим образом:

$$[C] = [[H_{QQ}] - [H_{QP}] [H_{pp}]^{-1} [H_{PQ}]]. \quad (2-147)$$

Поскольку матрицу  $[H]$  легко получить и легко расщепить, формула (2-147) дает удобный способ вычисления матрицы коэффициентов влияния гибкости статически неопределимой конструкции. Следует заметить, однако, что для получения выражения (2-147) требуется осуществить обращение матрицы  $[H_{pp}]$ . Таким образом, в том случае, когда имеется  $r$  лишних элементов, необходимо обратить матрицу с  $r$  строками и столбцами. Очевидно поэтому, что вычислительные трудности изложенного выше метода могут сделаться непреодолимыми, если конструкция является сильно неопределенной.

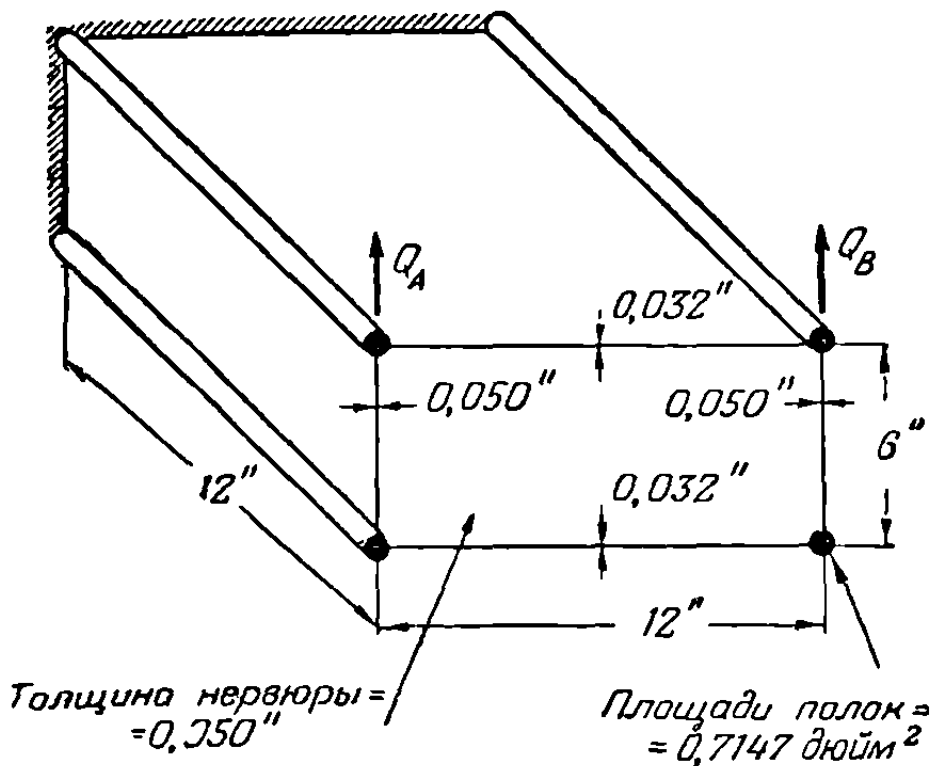
Пример 2-2. Вычислить матрицу коэффициентов влияния гибкости, соответствующую точкам  $A$  и  $B$  одноконтурного металлического коробчатого элемента, выполненного из листового алюминиевого сплава (см. фиг. 2-33). При вычислении будем исходить из следующих предположений:

(а) Листы обшивки могут воспринимать только касательные напряжения.

(б) Полки могут передавать только нормальные напряжения.

(с) Нормальные напряжения меняются вдоль полок по линейному закону.

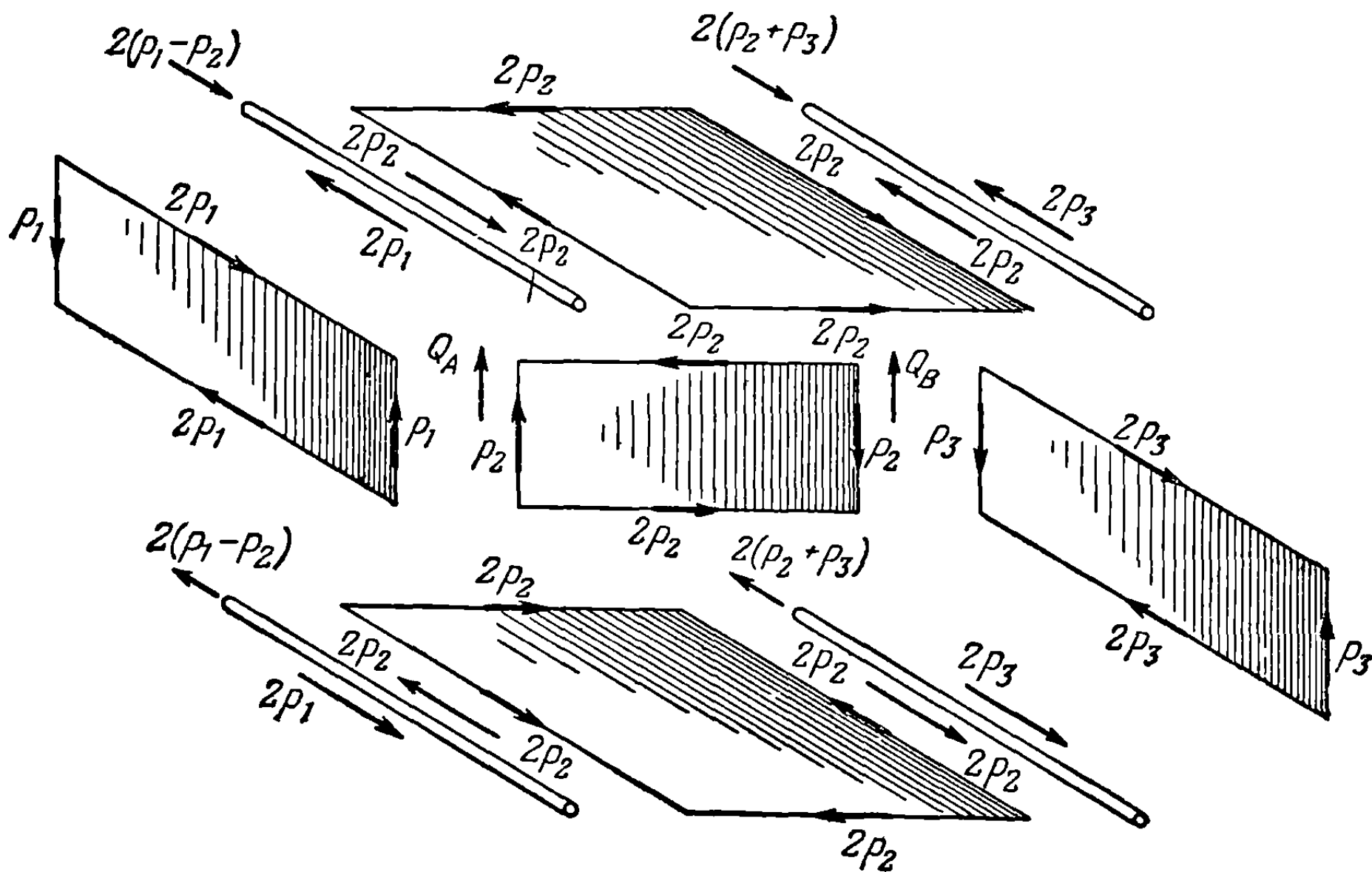
Решение. Прежде всего следует разбить конструкцию на различные составляющие части и составить систему сил, действующую на каждую часть, как это показано на фиг. 2-34. Матрица  $[G]$ , входящая в уравнение (2-140), строится по уравнениям равновесия. Независимые уравнения равновесия имеют вид (см. фиг. 2-34)



$$Q_A = p_1 + p_2, \quad Q_B = -p_2 + p_3. \quad (a)$$

Фиг. 2-33. Упрощенный коробчатый элемент из металлических листов.

Поскольку имеется три неизвестных внутренних усилия  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  и только два уравнения равновесия, то одно из внутренних усилий является лишним. В качестве лишней



Фиг. 2-34. Упрощенный коробчатый элемент, разделенный на конструктивные элементы.

неизвестной в настоящем исследовании выберем  $p_2$ . По уравнениям равновесия можно составить следующее матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_A \\ Q_B \\ p_2 \end{bmatrix}. \quad (b)$$

Матрица  $[G]$  имеет, таким образом, вид

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (c)$$

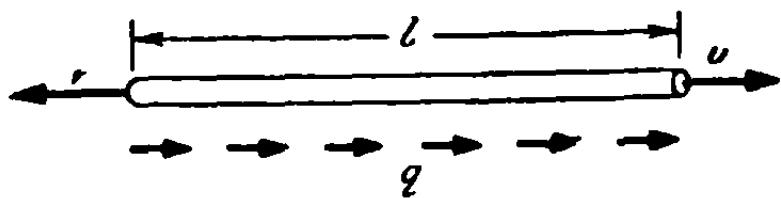
Матрицу  $[F]$ , входящую в равенство (2-133), получим, выразив энергию деформации через внутренние усилия  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ . Чтобы это сделать, нужно иметь формулу для энергии деформации в элементе, нагруженном осевой нагрузкой, которая изменяется вдоль



длины элемента по линейному закону, а также формулу для энергии деформации листа под действием чистого сдвига.

Мы предполагаем, что каждый элемент конструкции, нагруженный осевой нагрузкой, находится в состоянии равновесия, как показано на фиг. 2-35. Энергия деформации стержня под действием осевой нагрузки может быть выражена в следующем виде:

$$U = \int_0^l \frac{p^2(y) dy}{2AE}.$$



Фиг. 2-35. Стержень под действием осевой нагрузки.

Если осевая нагрузка изменяется линейно от значения  $u$  на одном конце стержня до значения  $v$  на другом его конце, как видно на фиг. 2-35, то мы будем иметь

$$p(y) = u + (v - u) \frac{y}{l}. \quad (d)$$

Подставив выражение для  $p(y)$  в интеграл, входящий в предыдущую формулу, и выполнив интегрирование, получим выражение для энергии деформаций через приложенные на концах стержня нагрузки  $u$  и  $v$ :

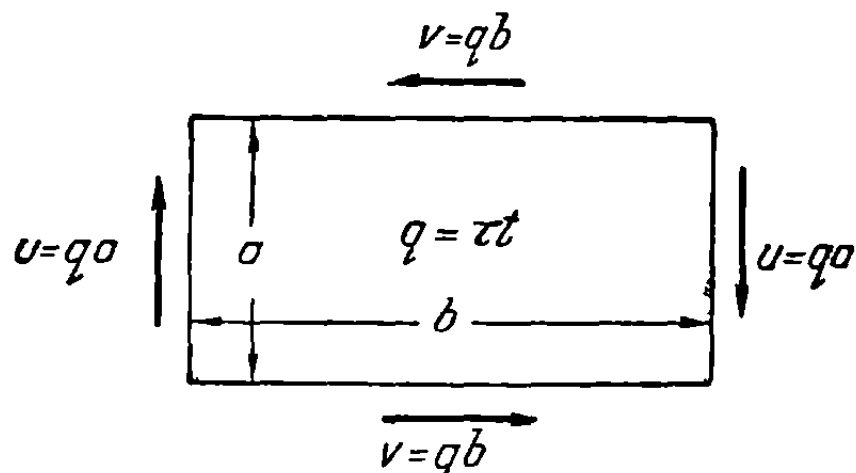
$$U = \frac{l}{6AE} (u^2 + uv + v^2). \quad (e)$$

Каждая панель, работающая на сдвиг, находится в равновесии (фиг. 2-36). Как показано в работе [2-2], для случая панели, воспринимающей сдвиг, энергия деформации тонкого прямоугольного листа шириной  $a$ , длиной  $b$  и толщиной  $t$ , в предположении, что лист находится в напряженном состоянии чистого сдвига, соответствующем касательному напряжению, равному  $\tau$ , выражается следующим образом:

$$U = \frac{\tau^2 abt}{2G}. \quad (f)$$

Если  $q = \tau t$  представляет собой постоянный поток касательных напряжений в листе, то приложенные на краях листа сдвигающие усилия, необходимые для поддержания листа в состоянии равновесия, равны  $u = qa$  и  $v = qb$ . Используя эти обозначения, можно записать выражение энергии деформации через приложенные на краях сдвигающие усилия следующим образом:

$$U = \frac{uv}{2Gt}. \quad (g)$$



Фиг. 2-36. Панели, работающие на сдвиг.

Применяя соответствующие выражения для энергии деформации, выведенные выше и определяемые формулами (e) и (g), к каждому из элементов, изображенных на фиг. 2-34, и суммируя результаты, получаем

$$U = \frac{1}{2} [p_1 p_2 p_3] [F] \{p_1 p_2 p_3\}, \quad (h)$$

где

$$[F] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 144,8 & -44,8 & 0 \\ -44,8 & 815,2 & 44,8 \\ 0 & 44,8 & 144,8 \end{bmatrix}. \quad (i)$$

Матрицы  $[G]$  и  $[F]$  должен, разумеется, составлять инженер. Последующие операции, проводимые для определения коэффициентов влияния, являются чисто механическими и могут быть выполнены опытным вычислителем.

Матрицу  $[H]$  следует строить на основании уравнения (2-141), внося в это уравнение выражения для матриц, определяемые соотношениями (c) и (i), так что

$$[H] = [G]' [F] [G] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 144,8 & -44,8 & 0 \\ -44,8 & 815,2 & 44,8 \\ 0 & 44,8 & 144,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[H] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 144,8 & 0 & -189,6 \\ 0 & 144,8 & 189,6 \\ -189,6 & 189,6 & 1284 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{qq}] & [H_{qp}] \\ [H_{pq}] & [H_{pp}] \end{bmatrix}.$$

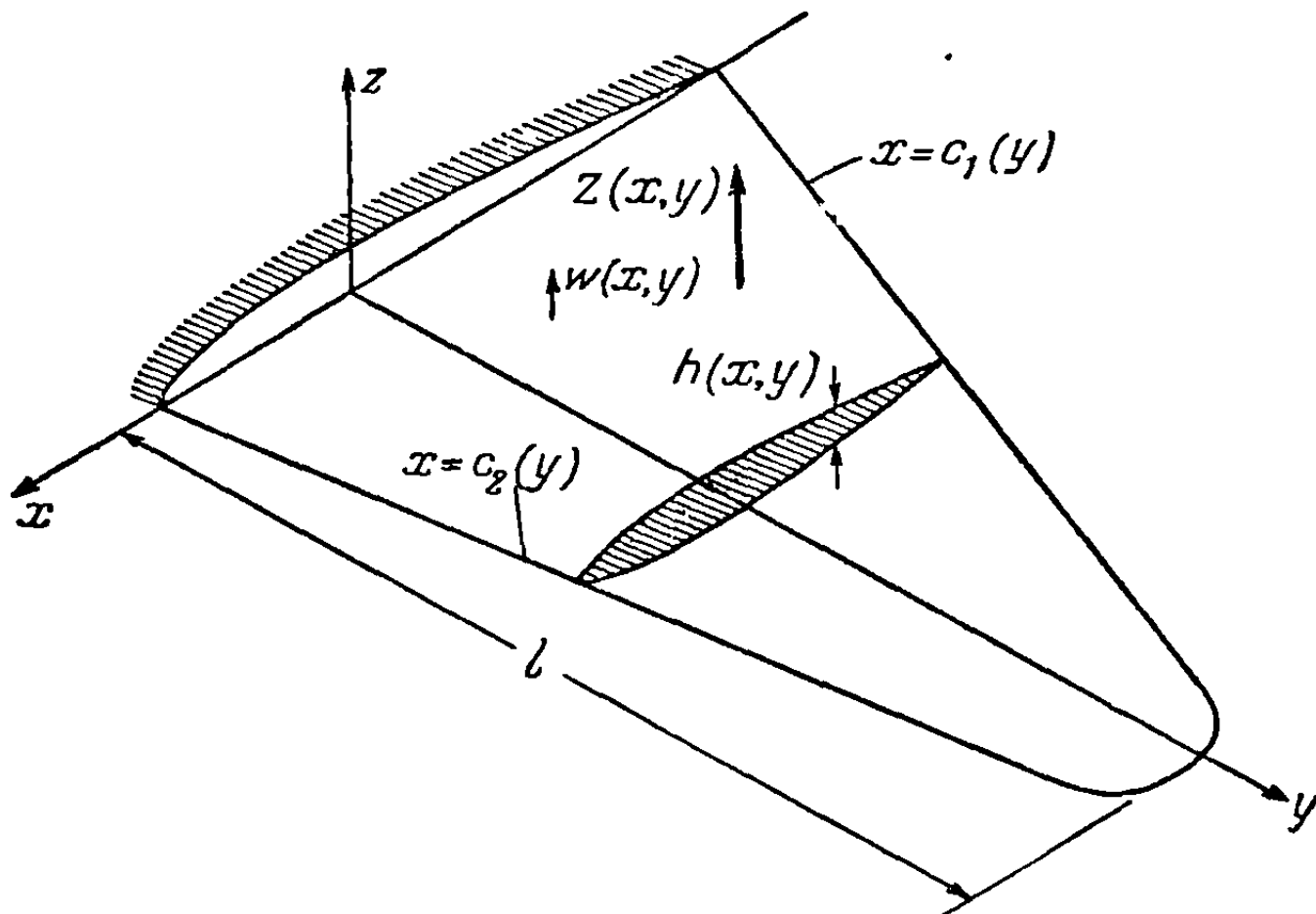
Окончательная матрица  $[C]$  получается, согласно выражению (2-147), комбинированием матриц, на которые расщепляется матрица  $[H]$ ; имеем

$$[C] = [H_{QQ}] - [H_{QP}] [H_{PP}]^{-1} [H_{PQ}],$$

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 144,8 & 0 \\ 0 & 144,8 \end{bmatrix} - \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -189,6 \\ 189,6 \end{bmatrix} \times \frac{1}{1284} \times \begin{bmatrix} -189,6 & 189,6 \end{bmatrix},$$

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 119 & 25,8 \\ 25,8 & 119 \end{bmatrix} \text{ дюйм/фунт.}$$

**2-16. Определение коэффициентов влияния сложных составных крыльев при помощи принципа минимума потенциальной энергии.** Метод, изложенный выше, часто называют методом прямого вычисления жесткостей [2-18]. Главной

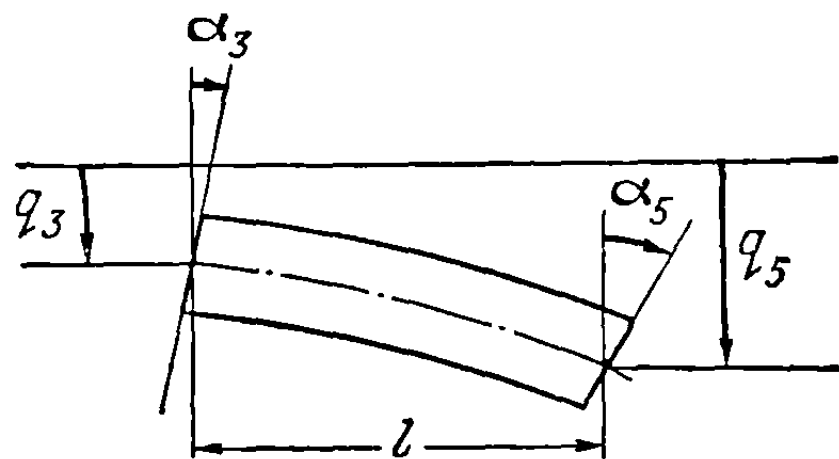


Фиг. 2-37. Двухлонжеронная балка с соединительными трубами, работающими на кручение.

особенностью этого метода является то, что деформация крыла представляется через дискретные деформации отдельных упругих элементов, на которые разбивается крыло. Так же, как и в первом методе, успешное применение этого метода зависит от умения исследователя заметить рассматриваемую конструкцию некоторой идеализированной конструкцией. Идеализированная конструкция должна быть достаточно простой, чтобы можно было избежать большого объема вычислительной работы, и достаточно хорошо продуманной, чтобы сохранить существенные характеристики упругого поведения исходной конструкции.

Рассмотрим задачу об определении коэффициентов влияния для двухлонжеронного крыла с соединительными трубами, работающими на кручение (фиг. 2-37). Такой тип конструкции повсеместно употребляется для моделей, используемых при испытаниях на флаттер. Полная картина деформаций крыла может быть описана десятью линейными смещениями и десятью наклонами лонжеронов, обозначаемыми соответственно через  $q_1, \dots, q_{10}$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$  (см. фиг. 2-38). Предположим, что деформация крыла состоит из изгиба и кручения лонжеронов и кручения соединительных труб. Соединительные трубы, работающие на кручение, предполагаются жесткими на изгиб.

Уравнения равновесия для каждого соединения лонжерона и трубы, работающей на кручение, можно составить путем прямого суммирования приложенных



Фиг. 2-38. Деформация изгиба участка лонжерона.

сил и моментов, но можно получить эти уравнения, применяя принцип минимума потенциальной энергии. Последний способ является более систематическим, и мы им здесь воспользуемся.

Энергию деформации каждого участка лонжерона и каждой трубы, работающей на кручение, можно выразить при помощи символов, обозначающих деформации изгиба и кручения.

(а) *Изгиб лонжеронов.* Имея в виду фиг. 2-38 и используя уравнения (2-26) и (2-41), можно показать, что энергия деформации при изгибе участка лонжерона, например между третьим и пятым узлами, выражается следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} q_5 & -q_3 & -l\alpha_3 & \alpha_5 & -\alpha_3 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \{q_5 - q_3 - l\alpha_3, \alpha_5 - \alpha_3\}. \quad (2-148)$$

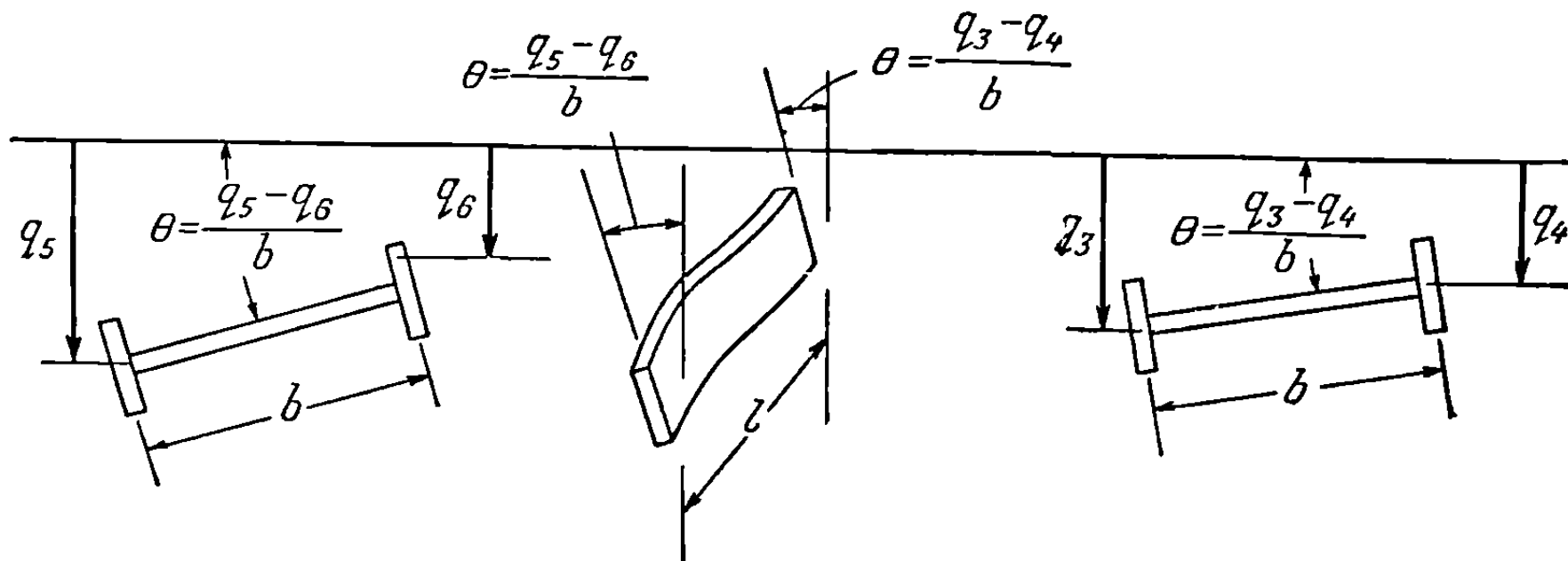
(б) *Кручение лонжеронов.* В соответствии с теорией кручения Сен-Венана энергию деформации кручения можно выразить [2-2] следующим образом:

$$U = \int_0^l \frac{GJ}{2} \left( \frac{d\theta}{dy} \right)^2 dy. \quad (2-149)$$

Имея в виду фиг. 2-39 и предполагая относительный угол закручивания постоянным, можно из формулы (2-149) получить выражение для энергии деформации кручения участков лонжерона 3-5 в следующем виде:

$$U = \frac{GJ_s}{2l} (\Delta\theta)^2 = \frac{GJ_s}{2l} \left( \frac{q_5 - q_6}{b} - \frac{q_3 - q_4}{b} \right)^2, \quad (2-150)$$

где  $GJ_s$  представляет собой жесткость на кручение участка лонжерона.



Фиг. 2-39. Деформация кручения участка лонжерона.

(с) *Кручение соединительных труб.* Энергия деформации кручения соединительной трубы, например 3—4, определяется выражением

$$U = \frac{GJ_t}{2l} (\Delta\alpha)^2 = \frac{GJ_t}{2b} (\alpha_3 - \alpha_4)^2, \quad (2-151)$$

где  $GJ_t$  представляет собой жесткость соединяющей трубы на кручение.

(д) *Полная энергия деформации.* Получив аналогично предыдущему выражения энергии деформации для каждого участка лонжерона и каждой трубы, работающей на кручение, можно алгебраически просуммировать полученные результаты; в результате получим выражение полной энергии деформации через двадцать обобщенных координат:

$$U = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} q_1, \dots, q_{10}, \alpha_1, \dots, \alpha_{10} \end{vmatrix} [k] \{q_1, \dots, q_{10}, \alpha_1, \dots, \alpha_{10}\}, \quad (2-152)$$

где  $[k]$  представляет собой матрицу коэффициентов влияния жесткости.

(e) *Уравнения равновесия.* Уравнения равновесия получаются подстановкой выражения (2-152) в соотношение (2-97); получим

$$[k] \{q_1, \dots, q_{10}, \alpha_1, \dots, \alpha_{10}\} = \{Q_1, \dots, Q_{10}, 00000 \ 00000\}. \quad (2-153)$$

(f) *Коэффициенты влияния.* Коэффициенты влияния жесткости сами по себе имеют небольшое практическое значение; для получения же применимых на практике коэффициентов влияния гибкости следует выполнить обращение матрицы этих коэффициентов. Обратив матрицу  $[k]$ , мы получим

$$\{q_1, \dots, q_{10}, \alpha_1, \dots, \alpha_{10}\} = [C] \{Q_1, \dots, Q_{10}, 00000 \ 00000\}, \quad (2-154)$$

где

$$[C] = [k]^{-1}.$$

Матрицу  $[C]$  можно расщепить следующим образом:

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{qq}] & \vdots & [C_{q\alpha}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [C_{\alpha q}] & \vdots & [C_{\alpha\alpha}] \end{bmatrix}, \quad (2-155)$$

где

$$[C_{\alpha q}] = [C_{q\alpha}].$$

Наибольший практический интерес представляет выделенная из матрицы  $[C]$  матрица  $[C_{qq}]$ . Ее можно вычислить, используя расщепление матрицы  $[k]$  и формулу обращения

$$[C_{qq}] = [ [k_{qq}] - [k_{q\alpha}] [k_{\alpha\alpha}]^{-1} [k_{\alpha q}] ]^{-1}. \quad (2-156)$$

Члены правой части формулы (2-156) получаются посредством следующего расщепления матрицы  $[k]$

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_{qq}]_{10 \times 10} & \vdots & [k_{q\alpha}]_{10 \times 10} \\ \dots & \dots & \dots \\ [k_{\alpha q}]_{10 \times 10} & \vdots & [k_{\alpha\alpha}]_{10 \times 10} \end{bmatrix}. \quad (2-157)$$

Когда матрица  $[k]$  вычислена, выполнение дальнейших матричных операций, согласно выражению (2-156), представляет собой хорошо известный вычислительный процесс. Наибольшей затраты времени, разумеется, требует обращение квадратных  $10 \times 10$  матриц.

**2-17. Вычисление деформаций сплошных крыльев переменной толщины и сложных составных крыльев методом Рэлея — Ритца.** Классический метод Рэлея — Ритца и его применение к задачам теории упругости и в особенности к задачам, связанным с пластинами, широко использовался инженерами с момента его появления [2-8] в 1908 г. Этот метод и примеры его приложения составляют сейчас неперемное содержание учебников по теории упругости и строительной механике [2-2, 2-8].

При применении метода Рэлея — Ритца к крыльям малого удлинения часто используются два класса функций прогиба. Первый класс соответствует обычному методу Рэлея — Ритца, так что выражение для прогиба выбирается в виде

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^n \gamma_j(x, y) C_j, \quad (2-158)$$

где  $\gamma_j(x, y)$  представляют собой заданные функции прогиба, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям для консольной пластины<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Хотя принцип минимума потенциальной энергии требует только удовлетворения геометрических граничных условий, но если выбрать функции, удовлетворяющие всем граничным условиям, то получится лучшее приближение.

Эти условия имеют вид

$$\gamma_j(x, 0) = \frac{\partial \gamma_j(x, 0)}{\partial y} = 0. \quad (2-159)$$

Постоянные  $C_j$  получаются решением некоторой системы совместных линейных алгебраических уравнений, получающихся в результате применения принципа минимума потенциальной энергии в предположении, что прогиб определяется соотношением (2-158).

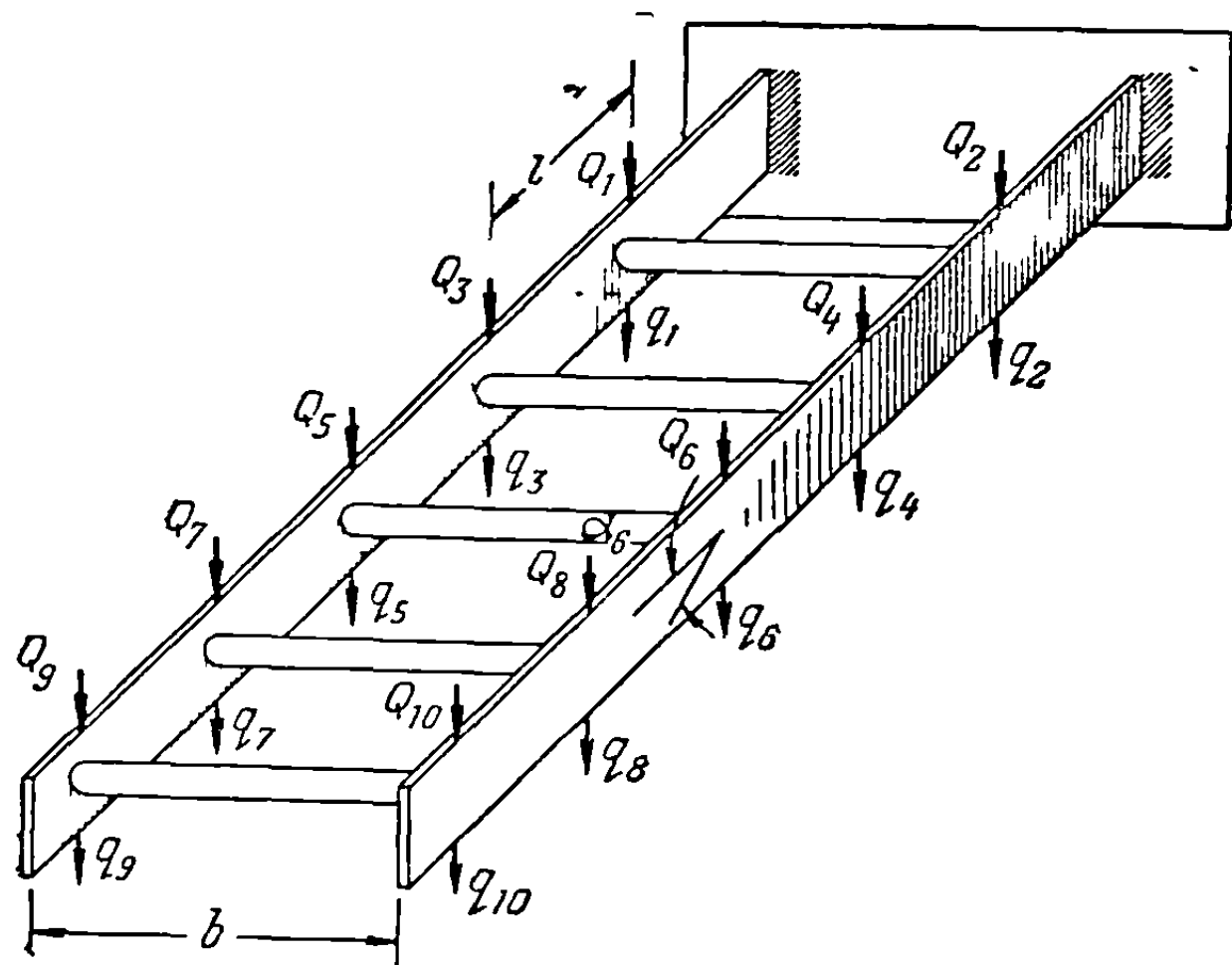
Второй и более удобный класс функций прогиба соответствует обобщенному методу Рэлея—Ритца, в котором прогиб выражается следующим образом:

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^n \gamma_j(x) q_j(y), \quad (2-160)$$

где  $\gamma_j(x)$ —заданные функции прогиба, определяющие распределение прогиба по оси  $x$ , а  $q_j(y)$ —некоторые функции от  $y$ , которые надлежит вычислить. Функции  $q_j(y)$  являются решениями некоторой системы совместных линейных дифференциальных уравнений, получающихся при применении к рассматриваемой задаче принципа минимума потенциальной энергии в предположении, что прогиб определяется соотношением (2-160). Выбор используемых функций зависит от рассматриваемого крыла. В применении к задачам рассматриваемого типа наиболее широко используются многочлены по степеням  $x$ , так что уравнение (2-160) принимает вид

$$w(x, y) = q_0(y) + q_1(y)x + q_2(y)x^2 + \dots + q_n(y)x^n. \quad (2-161)$$

Класс решений, определяемый уравнением (2-161), можно использовать для определения прогибов заданного крыла малого удлинения с любой желаемой



Фиг. 2-40. Тонкое сплошное крыло.

степенью точности в зависимости от взятого числа членов. Случай  $n=1$  соответствует предположению о линейном распределении прогибов в направлении хорды; случай  $n=2$  соответствует искривлению крыла в направлении хорды по параболе. Случай  $n=1$  является для многих практических задач достаточным; мы используем далее соответствующую аппроксимацию для иллюстрации предлагаемого метода.

(а) Сплошные крылья переменной толщины. Обобщенный метод Рэлея—

Ритца нашел широкое применение для приближенного вычисления прогибов тонких сплошных крыльев переменной толщины. Эти крылья часто имеют очень малое относительное удлинение, и потому исследование таких крыльев не может основываться на теории деформации балок, поскольку картина деформаций конструкции более близка к деформации пластины. Рассмотрим тонкое упругое изотропное крыло произвольной формы в плане, обладающее медленно меняющейся толщиной (см. фиг. 2-40). Предположим, что на крыло действует распределенная по произвольному закону поперечная нагрузка  $Z(x, y)$ ; определим результирующую деформацию  $w(x, y)$ . Ограничиваясь малыми дефор-

мациями, нормальными к плоскости пластины, получим следующее выражение для энергии деформаций пластины [2—8]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{c_1(y)}^{c_2(y)} D(x, y) \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy, \quad (2-162)$$

где  $D(x, y) = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$  представляет собой жесткость пластины на изгиб, а  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Виртуальная работа под действием заданной распределенной поперечной нагрузки выражается следующим образом:

$$\delta W_e = \int_0^l \int_{c_1(y)}^{c_2(y)} Z(x, y) \delta w(x, y) dx dy. \quad (2-163)$$

Подставив зависимость (2-162) и (2-163) в выражение принципа минимума потенциальной энергии, определяемое уравнением (2-81), получим точные дифференциальные уравнения равновесия пластины. Решение этих уравнений в замкнутой форме возможно только для простейших случаев. Однако для практических задач можно использовать приближенные решения, получаемые методами конечных разностей или релаксационными методами (см., например, [2-21]).

Попытаемся построить приближенное решение, задаваясь выражением для прогиба в форме (2-161) и ограничиваясь в этом выражении двумя первыми членами. Для того чтобы сохранить прежние обозначения, удобно записать эти первые два члена в выражении для прогиба в следующем виде:

$$w(x, y) = w(y) - x\theta(y), \quad (2-164)$$

где функция  $w(y)$  соответствует распределению прогиба крыла под действием изгиба вдоль оси  $y$ , а функция  $\theta(y)$  соответствует распределению угла закручивания вдоль оси  $y$ . Внося формулу (2-164) в равенство (2-162), получим следующее выражение для энергии деформации через неизвестные функции  $w(y)$  и  $\theta(y)$ :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{c_1(y)}^{c_2(y)} D(x, y) [ (w''(y) - x\theta''(y))^2 + 2(1-\nu)(\theta'(y))^2 ] dx dy. \quad (2-165)$$

Выражение виртуальной работы, определяемое формулой (2-163), на основании равенства (2-164) принимает вид

$$\delta W_e = \int_0^l [P_1(y) \delta w(y) + P_2(y) \delta \theta(y)] dy, \quad (2-166)$$

где

$$P_1(y) = \int_{c_1(y)}^{c_2(y)} Z(x, y) dx, \quad P_2(y) = - \int_{c_1(y)}^{c_2(y)} Z(x, y) x dx.$$

Внося выражения (2-165) и (2-166) в уравнение (2-81), получаем

$$\int_0^l \{ a_1 w'' \delta w'' + a_2 w'' \delta \theta'' + a_2 \theta'' \delta w'' + a_3 \theta'' \delta \theta'' + \\ + 2(1-\nu) a_1 \theta' \delta \theta' - P_1 \delta w - P_2 \delta \theta \} dy = 0, \quad (2-167)$$



где

$$a_1(y) = \int_{c_1(y)}^{c_2(y)} D(x, y) dx, \quad a_2(y) = - \int_{c_1(y)}^{c_2(y)} D(x, y) x dx, \\ a_3(y) = \int_{c_1(y)}^{c_2(y)} D(x, y) x^2 dx.$$

Интегрируя уравнение (2-167) по частям, получаем

$$\int_0^l \{ [(a_1 w'')'' + (a_2 \theta'')'' - P_1] \delta w + [(a_3 \theta'')'' + (a_2 w'')'' - 2(1-\nu)(a_1 \theta')' - \\ - P_2] \delta \theta \} dy - \{ [(a_1 w'')' + (a_2 \theta'')'] \delta w + [(a_3 \theta'')' + (a_2 w'')' - 2(1-\nu)a_1 \theta'] \delta \theta - \\ - [a_1 w'' + a_2 \theta''] \delta w' - [a_3 \theta'' + a_2 w''] \delta \theta' \}_0^l = 0. \quad (2-168)$$

Геометрические граничные условия при  $y=0$ , которым удовлетворяют функции  $w$  и  $\theta$ , имеют вид

$$w(0) = \theta(0) = w'(0) = \theta'(0) = 0. \quad (2-169)$$

Вариации этих функций на границе также равны нулю:

$$\delta w(0) = \delta \theta(0) = \delta w'(0) = \delta \theta'(0) = 0. \quad (2-170)$$

Повсюду на пластине, кроме границы  $y=0$ , на функции  $w$  и  $\theta$  не налагается никаких условий. Таким образом, функции  $\delta w(y)$  и  $\delta \theta(y)$  представляют собой независимые произвольные величины повсюду, кроме  $y=0$ . Вследствие этого можно сказать, что уравнение (2-168) и геометрические граничные условия будут удовлетворяться только в том случае, если удовлетворяются следующие уравнения:

$$(a_1 w'')'' + (a_2 \theta'')'' = P_1, \quad (2-171)$$

$$(a_3 \theta'')'' + (a_2 w'')'' - 2(1-\nu)(a_1 \theta')' = P_2, \quad (2-172)$$

$$[(a_1 w'')' + (a_2 \theta'')']_{y=l} = 0, \quad (2-173)$$

$$[(a_3 \theta'')' + (a_2 w'')' - 2(1-\nu)a_1 \theta']_{y=l} = 0, \quad (2-174)$$

$$[a_1 w'' + a_2 \theta'']_{y=l} = 0, \quad (2-175)$$

$$[a_3 \theta'' + a_2 w'']_{y=l} = 0, \quad (2-176)$$

$$w(0) = \theta(0) = w'(0) = \theta'(0) = 0. \quad (2-177)$$

Уравнения (2-171) и (2-172) представляют собой дифференциальные уравнения четвертого порядка относительно функций  $w(y)$  и  $\theta(y)$ , а уравнения (2-173) — (2-177) определяют восемь граничных условий, которые необходимо выполнить для получения полного решения этих дифференциальных уравнений. Удобно объединить уравнения (2-171) и (2-172) в одно дифференциальное уравнение относительно функции  $\theta(y)$ . Интегрируя уравнение (2-171) дважды и используя граничные условия (2-173) и (2-175), получаем

$$w'' = - \frac{a_2}{a_1} \theta'' + \frac{1}{a_1} \int_y^l \int_y^l P_1 dy dy. \quad (2-178)$$

Интегрируя уравнение (2-172) один раз и используя граничное условие (2-174), находим

$$(a_3 \theta'')' + (a_2 w'')' - 2(1-\nu)(a_1 \theta')' = - \int_y^l P_2 dy. \quad (2-179)$$

Неизвестную функцию  $\varpi(y)$  можно исключить из уравнения (2-179), если подставить в него выражение (2-178). Таким образом,

$$-\left[\left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1}\right)\theta''\right]' + 2(1-\nu)a_1\theta' = \int_y^l P_2 dy + \left(\frac{a_2}{a_1} \int_y^l \int_y^l P_1 dy dy\right)'. \quad (2-180)$$

Форму уравнения (2-180) можно несколько упростить, если вспомнить, что

$$\int_y^l \int_y^l P_1 dy dy = M(y), \quad (2-181)$$

где  $M(y)$  — изгибающий момент, а

$$\int_y^l P_2 dy = T(y), \quad (2-182)$$

где  $T(y)$  — крутящий момент. Таким образом, дифференциальное уравнение для угла закручивания  $\theta(y)$  имеет вид

$$-\left[\left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1}\right)\theta''\right]' + 2(1-\nu)a_1\theta' = T(y) - \left(\frac{a_2}{a_1} M(y)\right)'. \quad (2-183)$$

При выводе уравнения (2-183) мы уже использовали граничные условия (2-173), (2-174) и (2-175). Поэтому граничные условия для уравнения (2-183) могут быть получены из уравнений (2-176) и (2-177). Исключив  $\varpi''(l)$  из уравнения (2-176) при помощи уравнения (2-178), найдем, что

$$\left[\left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1}\right)\theta''\right]_{y=l} = 0. \quad (2-184)$$

Два других граничных условия для уравнения (2-183) получаются из уравнения (2-177):

$$\theta(0) = \theta'(0) = 0. \quad (2-185)$$

Таким образом, распределение угла закручивания  $\theta(y)$  представляется решением дифференциального уравнения третьего порядка (2-183), соответствующим граничным условиям (2-184) и (2-185). Получив в явном виде выражение для распределения угла закручивания  $\theta(y)$ , можно непосредственным интегрированием уравнения (2-178) вычислить распределение прогиба крыла по длине размаха. При интегрировании уравнения (2-178) нужно использовать остальные граничные условия

$$\varpi(0) = \varpi'(0) = 0.$$

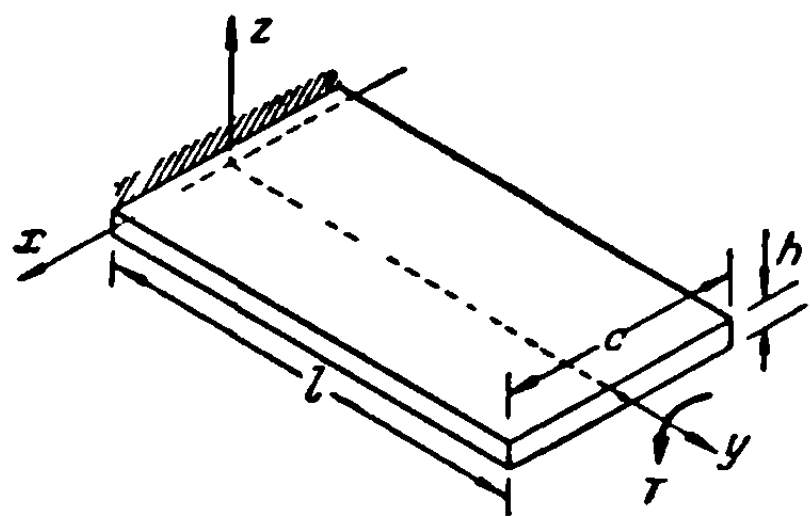
Вообще говоря, коэффициенты уравнения (2-183) представляют собой некоторые сложные функции от  $y$ , так что для практических приложений часто бывает необходимо выполнять численные расчеты. Удобным методом получения численных решений уравнения (2-183) является замена этого уравнения соответствующим уравнением в конечных разностях и решение получающейся системы уравнений матричными методами.

**Пример 2—3.** Вычислить распределение угла закручивания по размаху однородной консольной пластины, подверженной действию сосредоточенного крутящего момента, приложенного на свободном конце (см. фиг. 2—41).

**Решение.** Жесткость пластины  $D$  представляет собой некоторую постоянную, определяемую соотношением

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (a)$$

где  $h$  — постоянная толщина пластины. Величины  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ , входящие в уравнения и граничные условия, также постоянны и определяются следующими соотношениями:



$$a_1 = D \int_{-c/2}^{+c/2} dx = Dc, \quad (b)$$

$$a_2 = -D \int_{-c/2}^{+c/2} x dx = 0, \quad (c)$$

$$a_3 = D \int_{-c/2}^{+c/2} x^2 dx = \frac{Dc^3}{12}. \quad (d)$$

Фиг. 2-41. Однородная консольная пластина.

Внося эти значения величин  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  в уравнения (2-183), (2-184) и (2-185) и положив  $T(y) = T$  и  $M(y) = 0$ , получим дифференциальное уравнение и граничные условия для определения угла закручивания  $\theta(y)$ :

$$\frac{Dc^3}{12} \theta'''(y) - 2(1-\nu) Dc \theta'(y) = -T, \quad (e)$$

$$\theta(0) = \theta'(0) = \theta''(l) = 0. \quad (f)$$

Решение приведенного выше дифференциального уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\theta(y) = \frac{Tl}{2(1-\nu)Dc} \left[ \frac{y}{l} - \frac{\text{sh} \frac{4\lambda y}{l}}{4\lambda} - \frac{\text{th} 4\lambda}{4\lambda} \left( 1 - \text{ch} \frac{4\lambda y}{l} \right) \right], \quad (g)$$

где  $\lambda$  — параметр относительного удлинения, определяемый соотношением

$$\lambda = \frac{l}{c} \sqrt{\frac{3}{2} (1-\nu)}.$$

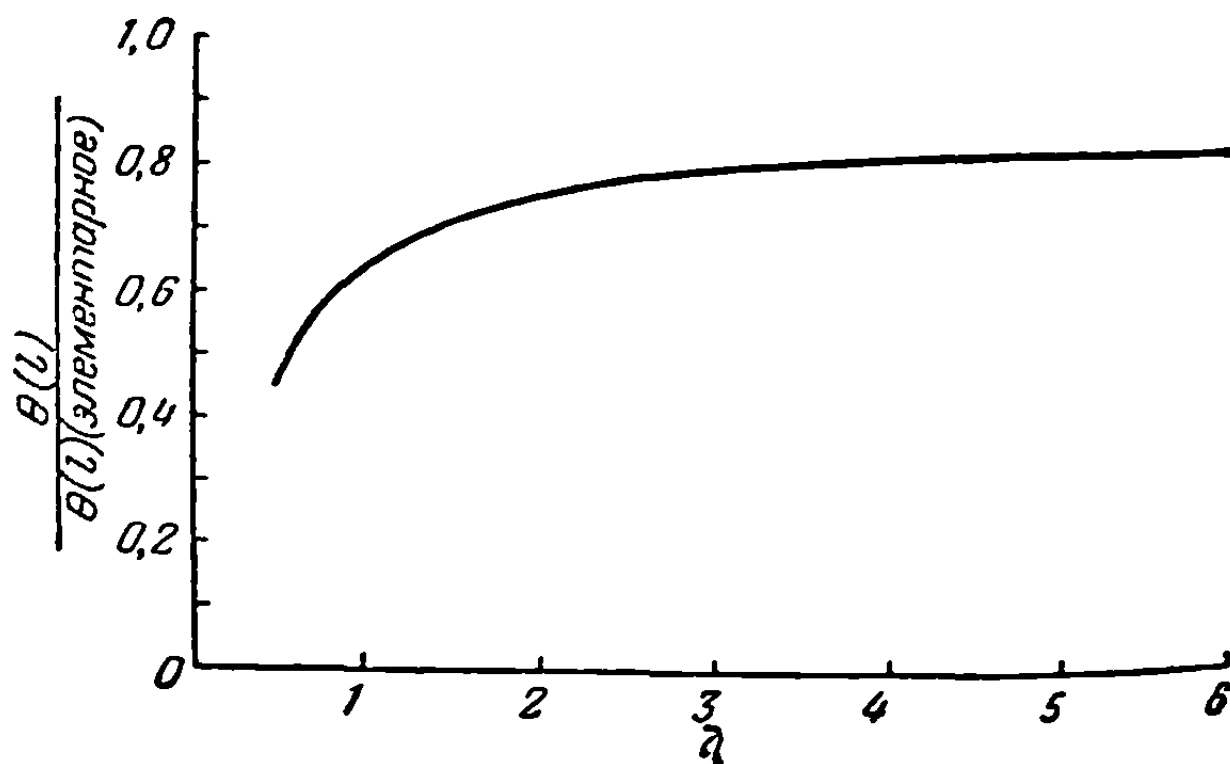
Соответствующее распределение угла закручивания, получаемое согласно элементарной теории кручения, соответствует первому члену соотношения (g), так что

$$\theta(y)_{\text{элементарное}} = \frac{T y}{2(1-\nu) D c}. \quad (h)$$

Можно показать, что результат, даваемый элементарной теорией, близок к действительности для больших значений параметра относительного удлинения  $\lambda$ . Это можно просто обнаружить, вычисляя отношение углов закручивания на конце

$$\frac{\theta(l)}{\theta(l)_{\text{элементарное}}} = 1 - \frac{\text{th} 4\lambda}{4\lambda}. \quad (i)$$

График этого отношения изображен на фиг. 2-42; мы видим, что для значений параметра относительного удлинения  $\lambda$ , меньших примерно трех, элементарная теория дает существенную ошибку в результате. Эта ошибка возникает благодаря влиянию стеснения деформации в корневом сечении, учитываемой предложенной выше теорией и не учитываемой элементарной теорией.



Фиг. 2-42. Угол закручивания конца однородной консольной пластины в зависимости от параметра  $\lambda$ .

(b) *Сложные составные крылья.* Обобщенный метод Рэлея—Ритца можно применять также к сложным составным крыльям малого относительного удлинения. В подобных применениях до сих пор ограничивались первыми двумя членами ряда (2-161). В принципе, однако, можно взять любое число членов. Применение двух первых членов к задаче о составном крыле Шюерх в работе (2-22) связывает с „теорией широкой балки“.

## ДЕФОРМАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ САМОЛЕТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

**3-1. Введение.** В первой главе мы видели, что во многих важных задачах аэроупругости встречаются внешние нагрузки, изменяющиеся со временем. Динамические нагрузки на конструкции самолета не только вызывают поступательное перемещение и вращение самолета, но также и возбуждают колебания его конструкций. Поэтому метод определения деформаций конструкции является в случае динамических нагрузок несколько более сложным, нежели в случае статических нагрузок.

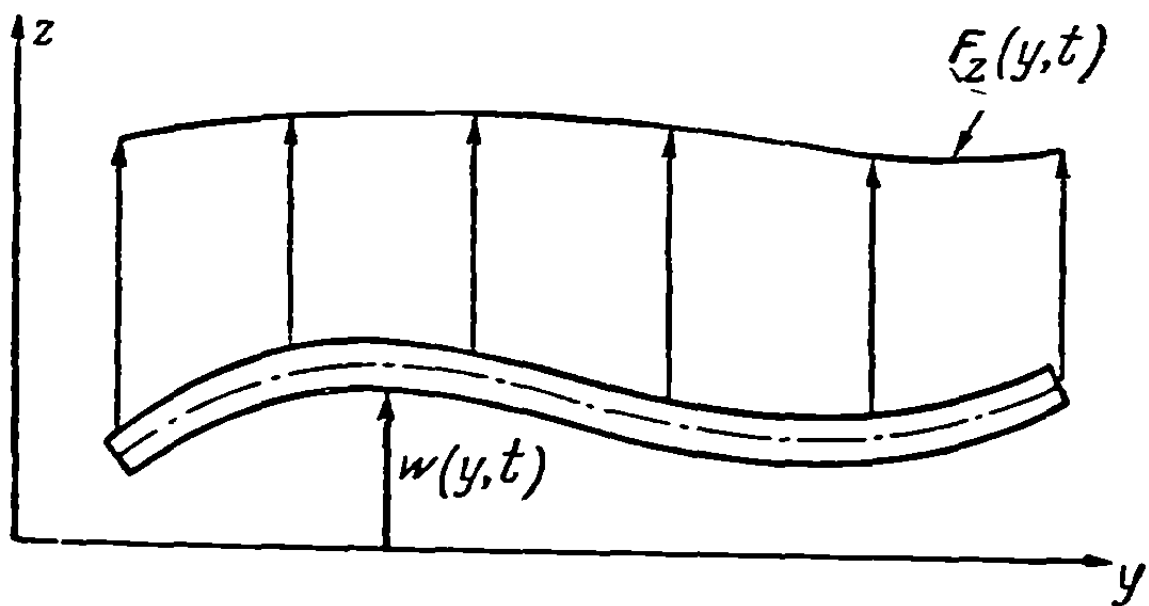
**3-2. Дифференциальные уравнения движения балки.** Рассмотрим дифференциальные уравнения движения балки под действием динамической поперечной нагрузки интенсивности  $F_z(y, t)$  (см. фиг. 3-1).

Если полный прогиб балки  $w(y, t)$  обуславливается деформацией изгиба и деформацией сдвига, то можно положить

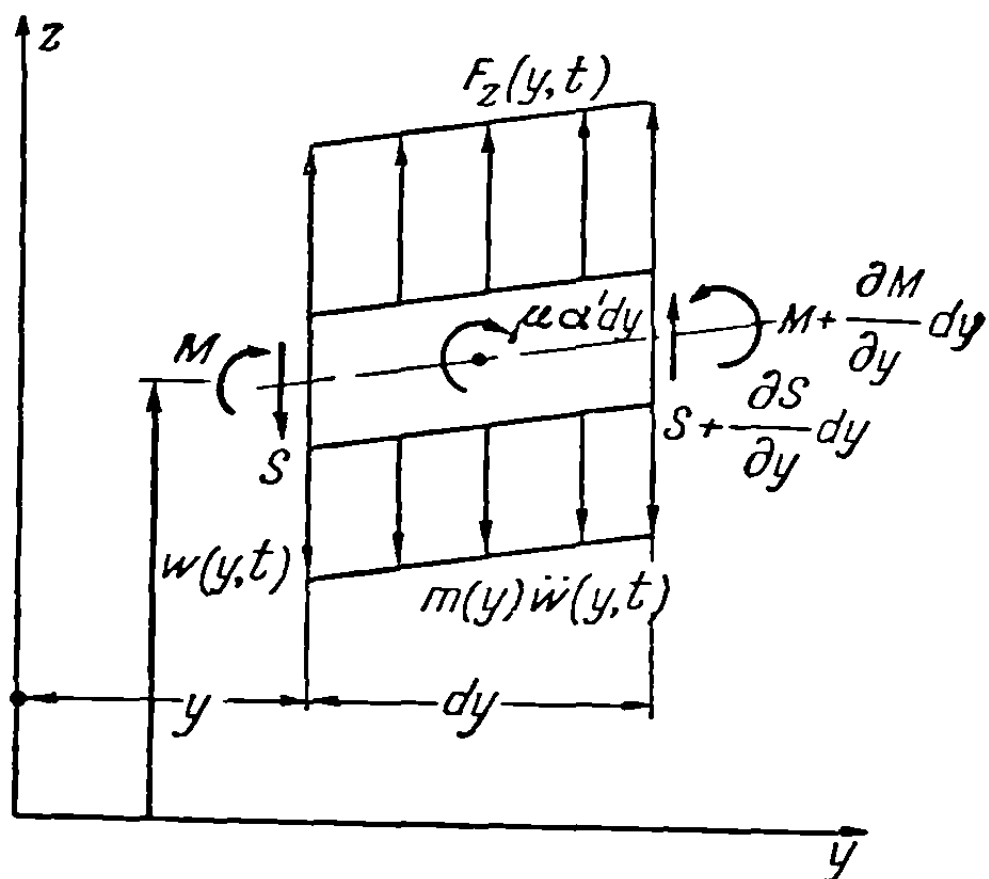
$$w(y, t) = \alpha(y, t) + \beta(y, t), \quad (3-1)$$

где величины  $\alpha(y, t)$  и  $\beta(y, t)$  представляют собой прогибы, обуславливаемые соответственно деформацией изгиба и деформацией сдвига.

На фиг. 3-2 изображена система сил, действующих на элемент балки длиной  $dy$ . В соответствии с принципом Даламбера интенсивность поперечной инерционной нагрузки и момент сил инерции вращения имеют соответственно величину  $m(y)\ddot{w}(y, t)$  и  $\mu(y)\dot{\alpha}'(y, t)dy$  и приложены к элементу балки в направ-



Фиг. 3-1. Балка под действием динамической поперечной нагрузки.



Фиг. 3-2. Усилия, действующие на элемент балки.

лениях, указанных на фиг. 3-2. Величины  $m(y)$  и  $\mu(y)$  обозначают соответственно массу, приходящуюся на единицу длины, и момент инерции массы на единицу длины; точка над обозначением какой-либо функции означает дифференцирование этой функции по времени, а штрих означает дифференцирование по координате  $y$ . Приравнивая сумму вертикальных сил, действующих на элемент балки, изображенный на фиг. 3-2, нулю, имеем

$$m\ddot{w} - \frac{\partial S}{\partial y} = F_z. \quad (3-2)$$

Аналогично, приравнивая нулю сумму моментов сил, действующих на выделенный элемент балки, относительно ее центра тяжести, получаем

$$\frac{\partial M}{\partial y} + S = \mu \ddot{\alpha}'. \quad (3-3)$$

Соотношения между изгибающим моментом и прогибом, вызываемым изгибом, и между поперечной силой и прогибом, обусловливаемым сдвигом, имеют соответственно вид

$$\alpha'' = \frac{M}{EI}, \quad (2-110)$$

$$\beta' = \frac{S}{GK}, \quad (2-112)$$

где  $EI$  представляет собой жесткость балки на изгиб, а  $GK$  — жесткость балки на сдвиг. Подставляя выражения (2-110) и (2-112) в уравнения (3-2) и (3-3), получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$m \ddot{w} + (EI \alpha'')'' - (\mu \ddot{\alpha}')' = F_z, \quad (3-4)$$

$$\beta' = \frac{1}{GK} [\mu \ddot{\alpha}' - (EI \alpha'')']. \quad (3-5)$$

Принципиально можно решить уравнения (3-4) и (3-5) совместно с уравнением (3-1) для любых законов изменения по длине балки упругих и инерционных свойств балки и любых практически встречающихся граничных условий. На практике, однако, за исключением некоторых простейших предположений, замкнутые решения получаются с большим трудом. Например, для простого случая собственных колебаний однородной балки дифференциальное уравнение, получающееся комбинированием уравнений (3-1), (3-4) и (3-5), имеет достаточно сложную форму:

$$m \ddot{w} - \left( \frac{EI m}{GK} + \mu \right) \ddot{w}'' + \frac{\mu m}{GK} \ddot{w}''' + EI w^{IV} = 0. \quad (3-6)$$

а) *Дифференциальное уравнение собственных колебаний тонкой балки.* Рассмотрим собственные колебания тонкой балки, у которой поперечные размеры малы сравнительно с ее длиной и для которой можно пренебречь влиянием инерции вращения и поперечных деформаций сдвига. Уравнение в частных производных поперечных колебаний для этого простого случая может быть получено из уравнений (3-1), (3-4) и (3-5), если в них положить  $G = \infty$  и  $\mu = F_z(y, t) = 0$ , что дает

$$(EI w''')' + m \ddot{w} = 0. \quad (3-7)$$

Уравнение (3-7) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, допускающее разделение переменных, так что можно получить решение этого уравнения вида

$$w(y, t) = W(y) T(t). \quad (3-8)$$

Подставляя выражение (3-8) в уравнение (3-7), получаем

$$-\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{(EI W''')''}{m W}. \quad (3-9)$$

Так как  $y$  и  $t$  представляют собой независимые переменные, отношения, стоящие в правой и левой частях уравнения (3-9), не зависят ни от  $y$ , ни от  $t$ . Приравняв их некоторой постоянной  $\omega^2$ , мы получим два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения следующего вида:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (3-10)$$

$$(EI W''')'' - m \omega^2 W = 0. \quad (3-11)$$

Решив эти уравнения, найдем неизвестные функции  $T(t)$  и  $W(y)$ , а также постоянную  $\omega^2$ . Однако прежде чем получать решения, мы должны иметь некоторые дополнительные сведения, относящиеся к начальным и граничным условиям. Для получения решения уравнения (3-10) требуются два начальных условия; следовательно, мы должны задать распределение смещений и скоростей по длине балки при  $t=0$ . Эти распределения имеют следующую общую форму:

$$w(y, 0) = f_1(y), \quad \dot{w}(y, 0) = f_2(y), \quad (3-12)$$

где  $f_1(y)$  и  $f_2(y)$  — произвольные функции переменной  $y$ . Для получения решения уравнения (3-11) требуются четыре граничных условия, так что нужно задать условия закрепления на обоих концах балки. Величины  $\omega^2$  и  $W(y)$ , удовлетворяющие уравнению (3-11) и граничным условиям, называются соответственно собственными значениями и собственными функциями. Существует бесконечное число пар собственных значений и собственных функций. Эти величины имеют важный физический смысл. Каждая балка может иметь бесконечное число форм колебаний, а каждой форме соответствует некоторая собственная частота. Каждая собственная функция  $W(y)$  определяет форму колебаний, отвечающих некоторому естественному типу колебаний, а соответствующее собственное значение, обозначаемое через  $\omega^2$ , представляет собой квадрат собственной частоты, отвечающей этой форме колебаний. Детальные свойства функции  $W(y)$  и величина  $\omega^2$ , очевидно, зависят от заданных частных граничных условий, налагаемых на балку, а также от распределения жесткости и массы по ее длине.

Собственные или нормальные функции имеют одно интересное и полезное свойство: они ортогональны между собой с весом  $m(y)$ , где  $m(y)$  — функция, определяющая распределение массы по длине балки. Это свойство доказывается приводимым ниже рассуждением. Предположим, что нам задано некоторое бесконечное семейство пар собственных значений и собственных функций, удовлетворяющих уравнению (3-11) и граничным условиям. Они представляются в виде

$$\begin{array}{ll} \omega_1 & W_1(y), \\ \omega_2 & W_2(y), \\ \vdots & \vdots \\ \omega_\infty & W_\infty(y). \end{array}$$

Подставляя две различные пары, отвечающие соответственно индексам  $m$  и  $n$ , в уравнение (3-11), получаем

$$(EIW_m'')'' - m\omega_m^2 W_m = 0, \quad (3-13)$$

$$(EIW_n'')'' - m\omega_n^2 W_n = 0. \quad (3-14)$$

Умножая уравнения (3-13) и (3-14) соответственно на  $W_n$  и  $W_m$  и интегрируя по  $y$  от нуля до  $l$ , получаем

$$\int_0^l (EIW_m'')'' W_n dy = \omega_m^2 \int_0^l W_m W_n m dy, \quad (3-15)$$

$$\int_0^l (EIW_n'')'' W_m dy = \omega_n^2 \int_0^l W_m W_n m dy. \quad (3-16)$$

Вычитая уравнение (3-16) из (3-15), находим

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \int_0^l W_m W_n m dy = \int_0^l [(EIW_m'')'' W_n - (EIW_n'')'' W_m] dy. \quad (3-17)$$



Интегрируя правую часть по частям, получаем

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \int_0^l W_m W_n m dy = \{ [W_n (EI W_m'')' - W_m (EI W_n'')'] - EI (W_n' W_m'' - W_m' W_n'') \}_0^l. \quad (3-18)$$

Правая часть уравнения (3-18) обращается в нуль, если на каждом из концов балки выполняется хотя бы одна из следующих пар граничных условий:

$$\begin{aligned} W &= 0 \quad \text{и} \quad W' = 0, \\ W &= 0 \quad \text{и} \quad EI W'' = 0, \\ W' &= 0 \quad \text{и} \quad (EI W'')' = 0, \\ EI W'' &= 0 \quad \text{и} \quad (EI W'')' = 0. \end{aligned} \quad (3-19)$$

Предполагая, что по крайней мере одна из пар граничных условий, определяемых равенствами (3-19), удовлетворяется на каждом конце балки, приведем уравнение (3-18) к виду

$$\int_0^l W_m W_n m dy = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n. \quad (3-20)$$

Уравнение (3-20) известно под названием условия ортогональности нормальных функций собственных колебаний балки. Таким образом, говорят, что функции  $W_n(y)$  и  $W_m(y)$  ортогональны между собой с весом  $m(y)$ . Важно отметить, что удовлетворение условия ортогональности зависит от выполнения на краях балки граничных условий типа (3-19).

Поскольку уравнение (3-11) однородно, то, если  $W_n(y)$  является собственной функцией, ею же будет и  $\alpha W_n(y)$ , где  $\alpha$  — произвольная постоянная. Поэтому каждая нормальная функция  $W_n(y)$ , определяющая форму колебаний некоторого тона, может описывать лишь относительные прогибы различных частей балки, но не абсолютные величины прогибов. Процесс назначения абсолютных величин функции  $W_n(y)$  известен под названием нормализации нормальных функций; он заключается в умножении этих функций на некоторую подходящим образом выбранную постоянную, выбор которой произволен. Мы можем, например, потребовать, чтобы значение  $W_n(a)$  нормальной функции в некоторой точке  $y = a$  было равно какой-то произвольной величине, скажем, единице. В этом случае нормированная нормальная функция  $n$ -й формы колебаний дается соотношением

$$\varphi_n(y) = A_n W_n(y), \quad (3-21)$$

где  $A_n = 1/W_n(a)$ . Другой метод нормирования, применяемый в динамических задачах аэроупругости, определяется соотношением

$$\varphi_n(y) = B_n W_n(y), \quad (3-22)$$

где  $B_n^2 = M / \int_0^l W_n^2(y) m(y) dy$ , а  $M$  — некоторое произвольным образом, выби-

раемое число, например полная масса балки. Условие ортогональности (3-20) может, разумеется, быть выражено также через нормированные нормальные функции.

Для того чтобы проиллюстрировать получение явного решения уравнения (3-7), рассмотрим частный случай однородной балки. Уравнение в частных производных в этом случае приводится к виду

$$EI \omega^{IV} + m \ddot{\omega} = 0, \quad (3-23)$$

где  $EI$  и  $m$  постоянны. Для удобства дальнейшего изложения запишем уравнение (3-23) в форме

$$\ddot{\omega} + a^2 \omega^{IV} = 0, \quad (3-24)$$

где

$$a^2 = \frac{EI}{m}.$$

В этом случае уравнение (3-9) принимает вид

$$-\frac{\ddot{T}}{T} = a^2 \frac{W^{IV}}{W}, \quad (3-25)$$

так что уравнения (3-10) и (3-11) упростятся и приведутся к форме:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (3-26)$$

$$W^{IV} - \frac{\omega^2}{a^2} W = 0. \quad (3-27)$$

Решения уравнений (3-26) и (3-27) выражаются соответственно в виде

$$T = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (3-28)$$

$$W = C \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega}{a}} y + D \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{a}} y + E \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} y + F \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} y. \quad (3-29)$$

Решение уравнения (3-23) представляется произведением правых частей уравнений (3-28) и (3-29), так что

$$\omega = WT = [A \sin \omega t + B \cos \omega t] \times \\ \times \left[ C \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega}{a}} y + D \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{a}} y + E \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} y + F \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} y \right]. \quad (3-30)$$

Величины  $A, B, C, D, E, F$  и  $\omega$  в выражении (3-30) должны быть определены из граничных и начальных условий задачи.

**Закрепленные балки.** Рассмотрим, например, граничные условия для случая свободно опертой на концах однородной балки. Эти условия можно выразить через краевые условия для функции  $W(y)$  в следующем виде:

$$W(0) = 0, \quad W(l) = 0, \quad W''(0) = 0, \quad W''(l) = 0. \quad (3-31)$$

Подставляя выражение (3-29) в граничные условия, получаем следующие четыре соотношения:

$$D + F = 0, \quad (3-32)$$

$$C \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + D \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + E \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + F \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l = 0, \quad (3-33)$$

$$D - F = 0, \quad (3-34)$$

$$C \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + D \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l - E \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} l - F \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l = 0. \quad (3-35)$$

Решив совместно уравнения (3-32) и (3-34), получим  $D = F = 0$ . Складывая и вычитая уравнения (3-33) и (3-35), находим

$$C \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l = 0, \quad (3-36)$$

$$E \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} l = 0. \quad (3-37)$$

Поскольку величина  $\operatorname{sh} \sqrt{\omega/a} l$  не может обращаться в нуль ни для какого конечного значения  $\sqrt{\omega/a} l$ , то можно заключить, что  $C = 0$ . Далее,  $\sin \sqrt{\omega/a} l$

может обращаться в нуль для конечных значений аргумента только тогда, когда

$$\sqrt{\frac{\omega}{a}} l = n\pi \quad (n — \text{целое}). \quad (3-38)$$

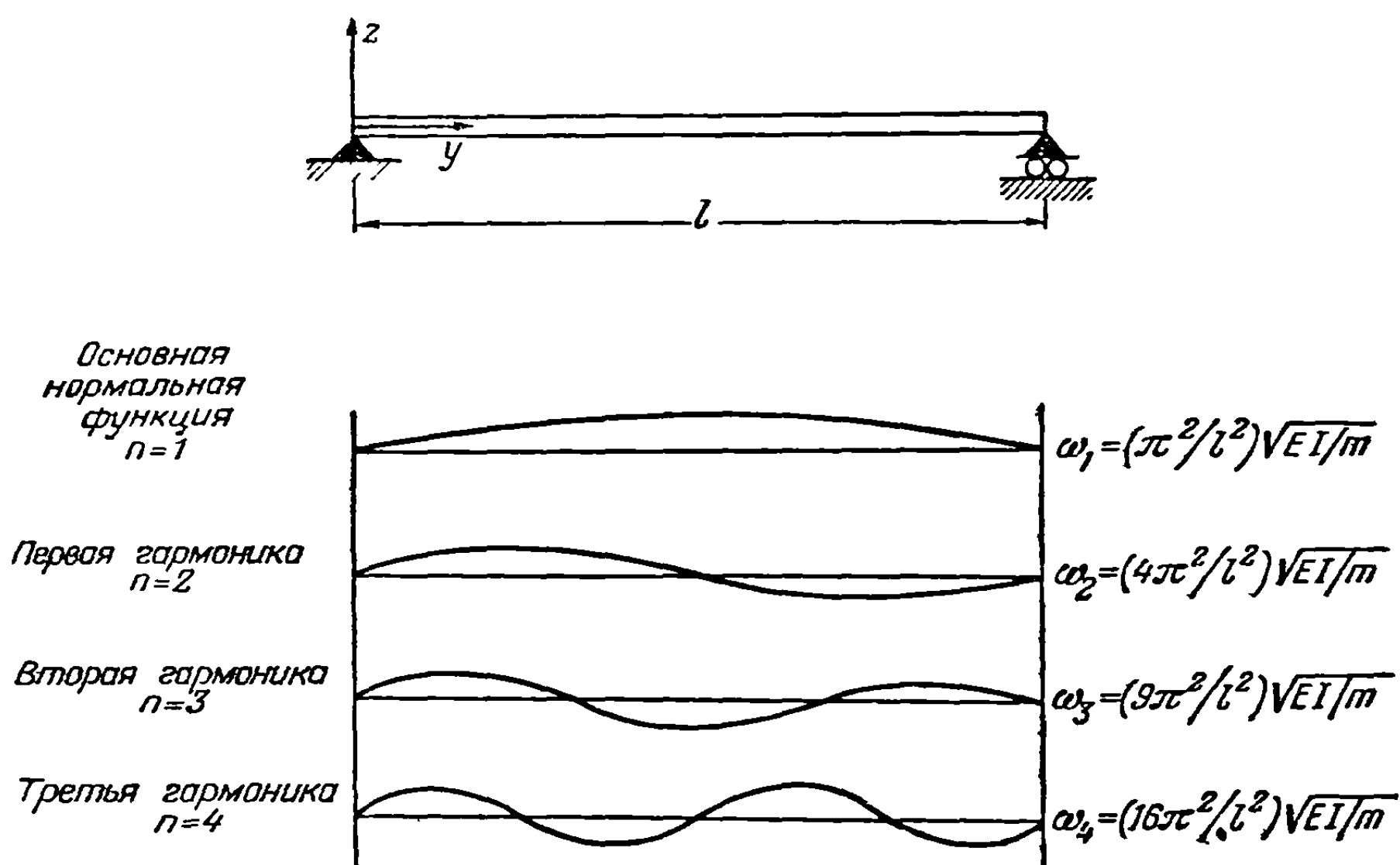
Уравнение (3-38) определяет множество возможных частот:

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (3-39)$$

Соответствующие нормальные функции получаются, если в формуле (3-29) принять  $C = D = F = 0$  и использовать равенство (3-39). Это приводит к простому результату

$$W_n = E \sin \frac{n\pi y}{l}. \quad (3-40)$$

Так как граничные условия (3-31) представляют собой частный случай граничных условий (3-19), то нормальные функции, определяемые равенством (3-40),



Фиг. 3-3. Нормальные функции и частоты свободно опертой однородной балки.

ортогональны. Доказательство ортогональности, т. е. доказательство того, что<sup>1)</sup>

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi y}{l} \sin \frac{m\pi y}{l} dy = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad (3-41)$$

в данном простом случае очевидно. Таким образом, полное решение в случае однородной свободно опертой балки приводится к виду

$$w = [A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t] \left[ E \sin \frac{n\pi y}{l} \right], \quad (3-42)$$

и если объединить постоянные  $A$  и  $B$  с  $E$ , то получим

$$w = [A' \sin \omega_n t + B' \cos \omega_n t] \sin \frac{n\pi y}{l}. \quad (3-43)$$

Наименьшая частота, соответствующая  $n = 1$ , называется основной частотой, а отвечающая ей нормальная функция — основной нормальной функцией. На фиг. 3-3

1) Символ  $\delta_{mn}$  означает 1 при  $m = n$  и 0 — при  $m \neq n$ .

изображены графики нормальных функций и соответствующие частоты для свободно опертой балки.

Так как выражение (3-43) представляет решение при любом целом  $n$ , то можно утверждать, что и сумма вида

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n \sin \omega_n t + B'_n \cos \omega_n t] \sin \frac{n\pi y}{l} \quad (3-44)$$

также представляет некоторое решение, причем постоянные  $A'_n$  и  $B'_n$  могут быть определены таким образом, чтобы это решение удовлетворяло заданной системе начальных условий. Положим, например, что при  $t = 0$  удовлетворяются начальные условия, определяемые уравнениями (3-12). Подставляя выражение (3-44) в равенства (3-12), получаем

$$f_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sin \frac{n\pi y}{l}, \quad (3-45)$$

$$f_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \omega_n \sin \frac{n\pi y}{l}. \quad (3-46)$$

Постоянные  $A'_n$  и  $B'_n$  могут быть найдены обычно применяемым методом гармонического анализа (см., например, книгу [3-1]). Именно, умножая обе части равенств (3-45) и (3-46) на  $\sin(m\pi y/l)$  и интегрируя по  $y$  от нуля до  $l$ , получаем

$$\int_0^l f_1(y) \sin \frac{m\pi y}{l} dy = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \int_0^l \sin \frac{n\pi y}{l} \sin \frac{m\pi y}{l} dy, \quad (3-47)$$

$$\int_0^l f_2(y) \sin \frac{m\pi y}{l} dy = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \omega_n \int_0^l \sin \frac{n\pi y}{l} \sin \frac{m\pi y}{l} dy. \quad (3-48)$$

Применяя условие (3-41), получаем

$$A'_n = \frac{2}{\omega_n l} \int_0^l f_2(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy, \quad (3-49)$$

$$B'_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy. \quad (3-50)$$

Мы видим, что решение задачи о собственных колебаниях свободно опертой балки может быть полностью найдено, если заданы начальные условия и физические постоянные балки. Решение, приведенное выше для случая свободно опертой балки, является типичной иллюстрацией задач о собственных колебаниях; отличия в решениях подобных задач определяются изменением граничных и начальных условий.

**Пример 3—1.** Вычислить нормальные функции и частоты собственных колебаний однородной консольной балки длиной  $l$ .

*Решение.* Граничные условия, налагаемые на нормальную функцию собственных колебаний, имеют вид

$$W(0) = 0, \quad (a)$$

$$W'(0) = 0, \quad (b)$$

$$W''(l) = 0, \quad (c)$$

$$W'''(l) = 0. \quad (p)$$

Подставляя выражение (3-29) в равенства (a) и (b), получаем

$$D + F = 0, \tag{e}$$

$$C + E = 0. \tag{f}$$

Подставляя же формулу (3-29) в равенства (c) и (d), получаем

$$C \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + D \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l - E \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + F \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} l = 0, \tag{g}$$

$$C \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + D \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l - E \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} l - F \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l = 0. \tag{h}$$

Четыре последних уравнения могут быть приведены к двум:

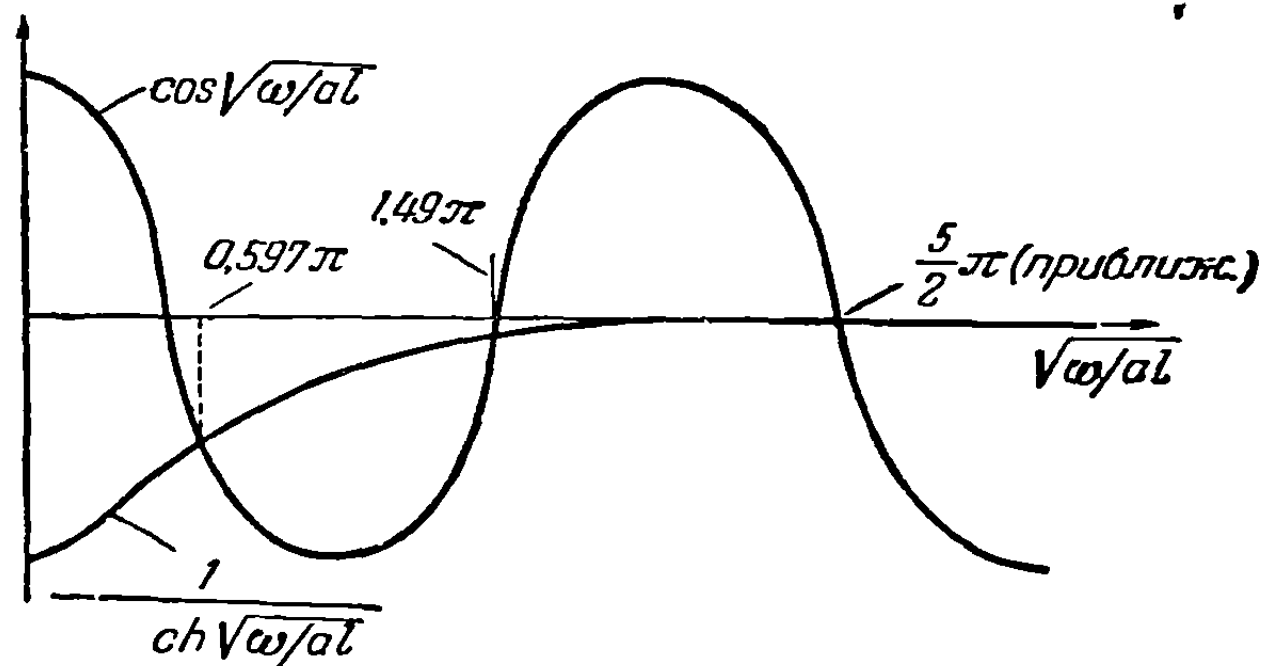
$$\left( \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l \right) C + \left( \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l - \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} l \right) D = 0, \tag{i}$$

$$\left( \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} l \right) C + \left( \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l \right) D = 0. \tag{j}$$

Нетривиальное решение этой системы однородных уравнений относительно  $C$  и  $D$  получается, если приравнять нулю ее определитель. Вычисляя определитель и упрощая, получаем для частоты  $\omega$  трансцендентное уравнение

$$\cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l = - \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l}. \tag{k}$$

Для определения частот  $\omega$ , удовлетворяющих уравнению (k), это уравнение было решено



Фиг. 3-4. Графическое решение трансцендентного частотного уравнения для случая однородной консольной балки.

графически (см. фиг. 3-4). Частоты определяются абсциссами точек пересечения кривых на фиг. 3-4 и имеют следующие величины

$$\sqrt{\frac{\omega}{a}} l = 0,597\pi, 1,49\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi \dots \tag{l}$$

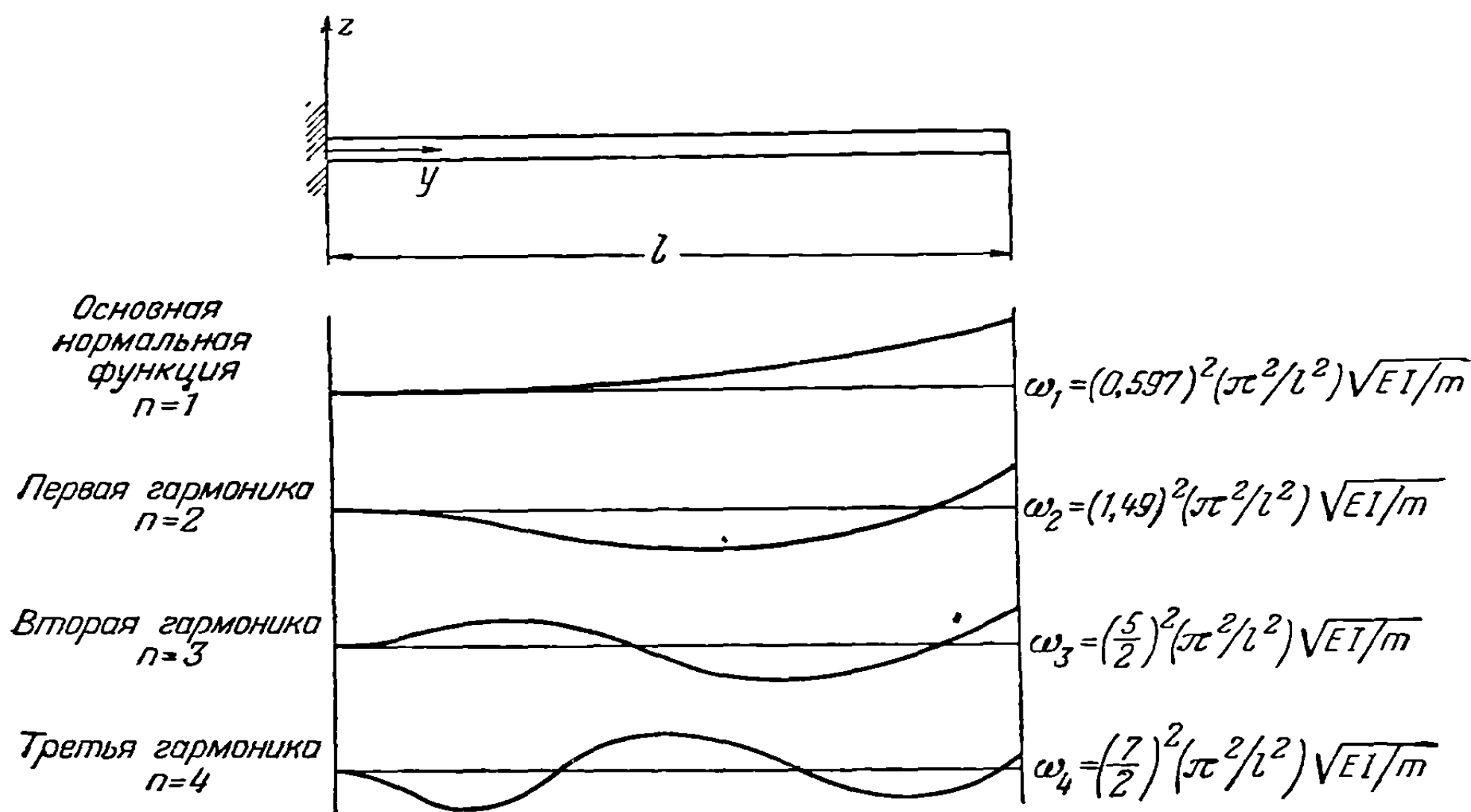
Таким образом, частоты различных форм колебаний равны

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (0,597)^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \\ \omega_2 &= (1,49)^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \\ &\dots \dots \dots \\ \omega_n &= \left( n - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (n \text{ достаточно велико}) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \tag{m}$$

Подставляя каждую собственную частоту обратно в равенство (3-29) и выражая при помощи уравнений (e) — (h) коэффициенты  $C$ ,  $E$  и  $F$  через  $D$ , мы получаем следующее выражение для нормальных форм собственных колебаний

$$W_n(y) = D \left[ \left( \frac{\sin \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} l - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} l}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} l + \cos \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} l} \right) \left( \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} y - \sin \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} y \right) + \right. \\ \left. + \left( \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} y - \cos \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} y \right) \right]. \quad (n)$$

Нормальная функция  $W_n(y)$ , соответствующая некоторой собственной частоте  $\omega_n$ , получается подстановкой этой собственной частоты в уравнение (n). Так как граничные условия в рассматриваемом случае представляют собой частный случай граничных условий



Фиг. 3-5. Нормальные функции и частоты для однородной консольной балки.

(3-19), то нормальные функции, определяемые уравнением (n), ортогональны между собой. На фиг. 3-5 изображен график функций собственных колебаний однородной консольной балки.

**Незакрепленные балки.** Метод, проиллюстрированный выше для закрепленных балок, может быть применен также и для незакрепленных балок. Рассмотрим задачу о вычислении собственных функций и частот собственных колебаний однородной балки со свободными концами. Граничные условия для этого случая имеют вид

$$W''(0) = 0, \quad (3-51a)$$

$$W'''(0) = 0, \quad (3-51b)$$

$$W''(l) = 0, \quad (3-51c)$$

$$W'''(l) = 0. \quad (3-51d)$$

Подставляя выражение (3-29) в граничные условия (3-51a) и (3-51b), получаем

$$C - E = 0, \quad D - F = 0. \quad (3-52)$$



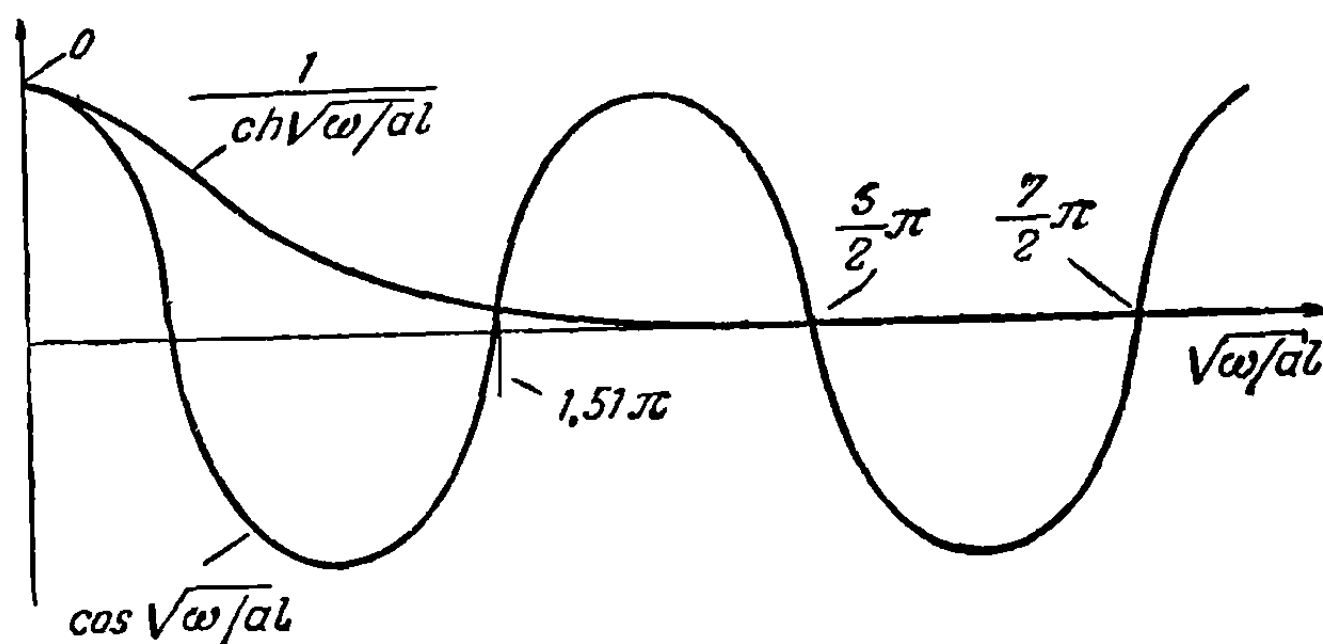
Вводя функцию (3-29) в граничные условия (3-51c) и (3-51d) и используя уравнения (3-52), получаем

$$\begin{aligned} (\operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l - \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} l) C + (\operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l - \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l) D &= 0, \\ (\operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l - \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l) C + (\operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} l) D &= 0. \end{aligned} \quad (3-53)$$

Приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов при  $C$  и  $D$ , после упрощения получаем следующее трансцендентное уравнение для  $\omega$ :

$$\cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l = \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{a}} l}. \quad (3-54)$$

Корни этого уравнения получают графически как пересечения кривых, изображенных на графике фиг. 3-5. В рассматриваемом случае одно из пересечений



Фиг. 3-6. Графическое решение трансцендентного частотного уравнения для случая однородной балки со свободными концами.

имеет место при нулевом значении аргумента; это показывает, что одна из собственных частот равна нулю. Такое положение получается вследствие того, что балка не закреплена; можно сказать, что эта нулевая частота соответствует движению всей балки как твердого тела.

Нормальная функция, соответствующая движению балки как твердого тела, получается, если положить в основном дифференциальном уравнении (3-27)  $\omega = 0$  и использовать граничные условия, определяемые уравнениями (3-51). Полагая в уравнении (3-27)  $\omega = 0$ , получаем уравнение

$$W^{IV} = 0, \quad (3-55)$$

интегрируя которое, находим

$$W(y) = C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4. \quad (3-56)$$

Используя граничные условия (3-51), получаем нормальную функцию, соответствующую движению балки как твердого тела, в виде

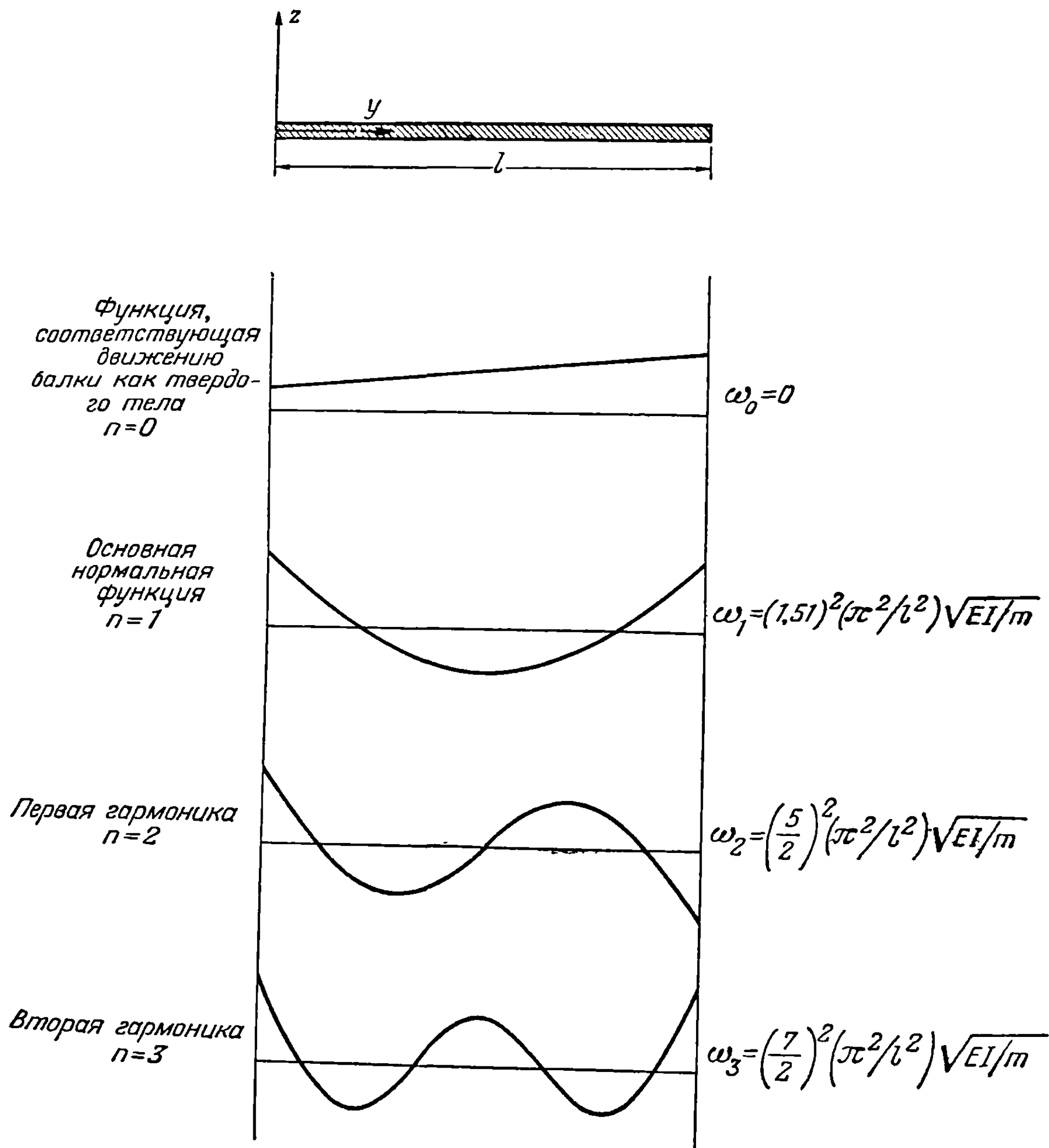
$$W_0(y) = C_3 y + C_4, \quad (3-57)$$

где  $C_3$  и  $C_4$  — произвольные постоянные. Таким образом, нормальная функция, соответствующая движению балки как твердого тела, складывается из нормальной функции, соответствующей поступательному перемещению балки как твердого тела, и нормальной функции, соответствующей вращению балки как твердого тела.

Нормальные функции, соответствующие деформациям балки, получаются, если выразить при помощи уравнений (3-52) и (3-53) коэффициенты  $C$ ,  $E$  и  $F$  через коэффициент  $D$  и подставить результат в формулу (3-29):

$$W_n(y) = D \left[ \left( \frac{\cos \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} l - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} l}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} l - \sin \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} l} \right) \left( \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} y + \sin \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} y \right) + \right. \\ \left. + \left( \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} y + \cos \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} y \right) \right]. \quad (3-58)$$

Нормальные функции  $W_1(y)$ ,  $W_2(y)$ , ...,  $W_n(y)$ ..., соответствующие деформациям балки, можно вычислить при помощи равенства (3-58), подставляя



Фиг. 3-7. Нормальные функции для однородной балки со свободными концами.

в него соответствующие величины частот  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ , получаемые как точки пересечения кривых на фиг. 3-6. Графики различных нормальных функций для балки со свободными концами, а также соответствующие частоты приведены на фиг. 3-7. Мы видим, что при больших  $n$  частоты колебаний балки со свободными концами стремятся к соответствующим частотам для консольной балки.

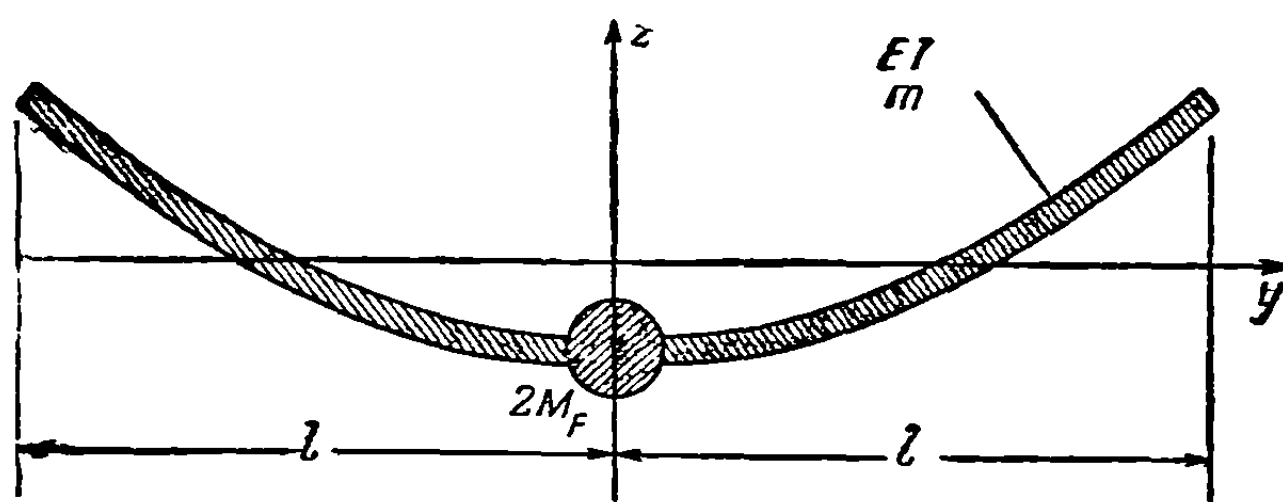
Отметим, что для свободно колеблющейся незакрепленной балки при отсутствии внешних сил сумма проекций сил инерции на направление оси  $z$ , а также сумма моментов сил инерции относительно оси  $x$  должны обращаться в нуль:

$$\int_0^l \ddot{w}(y, t) dm - T(t) \int_0^l W_n(y) m dy = 0, \quad (3-59)$$

$$\int_0^l \ddot{w}(y, t) y dm - T(t) \int_0^l W_n(y) m y dy = 0. \quad (3-60)$$

Подставляя выражение (3-58) в уравнения (3-59) и (3-60), интегрируя и используя соотношение (3-54), мы приходим к тождествам, так что эти условия полученным решением в самом деле удовлетворяются.

**Пример 3-2.** Вычислить симметричные нормальные функции и частоты собственных колебаний однородного крыла, прикрепленного к фюзеляжу (см. фиг. 3-8). Масса фюзеляжа равна  $2M_F$ . Крыло имеет равномерно распределенную жесткость  $EI$  и постоянную линейную плотность  $m$ .



Фиг. 3-8. Однородное крыло, прикрепленное к фюзеляжу.

**Решение.** Выполняя решение, мы можем в силу принятой симметрии деформации рассматривать только правую половину системы, изображенной на фиг. 3-8, и использовать общее решение, определяемое соотношением (3-29). Формулу (3-29) удобно записать, вводя безразмерную независимую переменную  $\xi$ , в следующем виде:

$$W(\xi) = C \operatorname{sh} kl\xi + D \operatorname{ch} kl\xi + E \sin kl\xi + F \cos kl\xi, \quad (a)$$

где

$$k^4 = \frac{m\omega^2}{EI}, \quad \xi = \frac{y}{l}.$$

Из фиг. 3-8 видно, что четыре граничных условия, налагаемые на крыло в случае симметричного движения, имеют вид

$$W'(0) = 0, \quad (b)$$

$$\frac{1}{l^3} W'''(0) = \frac{M_F}{m} k^4 W(0), \quad (c)$$

$$W''(l) = 0, \quad (d)$$

$$W'''(l) = 0. \quad (e)$$

Подставив граничное условие (b) в общее решение (a), получим  $C + E = 0$ , так что

$$W(\xi) = F \cos kl\xi + E (\sin kl\xi - \operatorname{sh} kl\xi) + D \operatorname{ch} kl\xi. \quad (f)$$

Подставив, далее, граничные условия (c), (d) и (e) в предыдущее соотношение, получим соответственно:

$$F \cos kl + E (\sin kl + \operatorname{sh} kl) - D \operatorname{ch} kl = 0, \quad (g)$$

$$F \frac{M_F}{m} k + 2E + D \frac{M_F}{m} k = 0, \quad (h)$$

$$F \sin kl - E (\cos kl + \operatorname{ch} kl) + D \operatorname{sh} kl = 0. \quad (i)$$

Нетривиальное решение этой системы однородных уравнений с неизвестными  $F$ ,  $E$  и  $D$  можно получить, приравняв определитель из коэффициентов системы нулю. Это приводит к детерминантному уравнению

$$\begin{vmatrix} \cos \Omega & (\sin \Omega + \operatorname{sh} \Omega) & -\operatorname{ch} \Omega \\ R\Omega & 2 & R\Omega \\ \sin \Omega & -(\cos \Omega + \operatorname{ch} \Omega) & \operatorname{sh} \Omega \end{vmatrix} = 0,$$

где  $R$  и  $\Omega$  представляют собой безразмерные параметры, определяемые соотношениями

$$R = \frac{M_f}{ml}, \quad \Omega = kl.$$

Разлагая детерминант и упрощая, получаем следующее частотное уравнение

$$R = -\frac{\operatorname{sh} \Omega \cos \Omega + \sin \Omega \operatorname{ch} \Omega}{\Omega (1 + \cos \Omega \operatorname{ch} \Omega)}.$$

Графическое решение этого трансцендентного уравнения показывает, что оно удовлетворяется нулевым значением характеристического числа  $\Omega$  и бесконечной системой конечных значений  $\Omega$ . Каждое характеристическое число определяет некоторую собственную частоту  $\omega_n$  и некоторую нормальную функцию собственных колебаний  $W_n(\xi)$ . Подставляя каждое конечное характеристическое число в уравнение (f) и выражая при помощи уравнений (g), (h) и (i) коэффициенты  $E$  и  $D$  через коэффициент  $F$ , принимаемый равным единице, получаем выражение для функций собственных колебаний, соответствующих деформациям, в виде

$$W_n(\xi) = \operatorname{ch} \Omega_n \xi + C_1^{(n)} \cos \Omega_n \xi + C_2^{(n)} (\sin \Omega_n \xi - \operatorname{sh} \Omega_n \xi), \quad (j)$$

где

$$C_1^{(n)} = -\frac{(2/R\Omega_n) \operatorname{ch} \Omega_n + (\sin \Omega_n + \operatorname{sh} \Omega_n)}{(\sin \Omega_n + \operatorname{sh} \Omega_n) (-2/R\Omega_n) \cos \Omega_n},$$

$$C_2^{(n)} = \frac{\operatorname{ch} \Omega_n + \cos \Omega_n}{(\sin \Omega_n + \operatorname{sh} \Omega_n) (-2/R\Omega_n) \cos \Omega_n}.$$

Применение равенства (j) приводит к вычислению малых разностей больших чисел. Для того, чтобы избежать это затруднение, сделаем следующее преобразование:

$$W_n(\xi) = e^{-\Omega_n \xi} + C_1^{(n)} \cos \Omega_n \xi + C_2^{(n)} \sin \Omega_n \xi + (1 - C_2^{(n)}) \operatorname{sh} \Omega_n \xi. \quad (k)$$

Величина  $(1 - C_2^{(n)})$  может быть записана в виде

$$1 - C_2^{(n)} = \frac{\sin \Omega_n - [(2/R\Omega_n) + 1] \cos \Omega_n - e^{-\Omega_n}}{\sin \Omega_n - (2/R\Omega_n) \cos \Omega_n + \operatorname{sh} \Omega_n}.$$

Полагая

$$K_1^{(n)} = C_1^{(n)}, \quad K_2^{(n)} = 1 - C_2^{(n)},$$

приведем равенство (k) к виду

$$W_n(\xi) = e^{-\Omega_n \xi} + K_1^{(n)} \cos \Omega_n \xi + K_2^{(n)} \operatorname{sh} \Omega_n \xi + (1 - K_2^{(n)}) \sin \Omega_n \xi. \quad (l)$$

Мы уже указывали, что процесс предписывания абсолютных значений функции  $W_n(\xi)$  называется нормированием. Предположим, что в рассматриваемом примере мы определили систему нормирующих множителей  $B_n$  в соответствии с уравнением (3-22) таким образом, что

$$B_n^2 = \frac{M}{l} = \frac{ml(R+1)}{\int_0^1 W_n^2(y) m(y) dy} = \frac{ml(R+1)}{ml \int_0^1 W_n^2(\xi) d\xi}, \quad (m)$$

где  $M$  равно половине полной массы системы, изображенной на фиг. 3-8. Поскольку масса фюзеляжа должна быть включена в интегрирование, множитель  $B_n$  приводится к виду

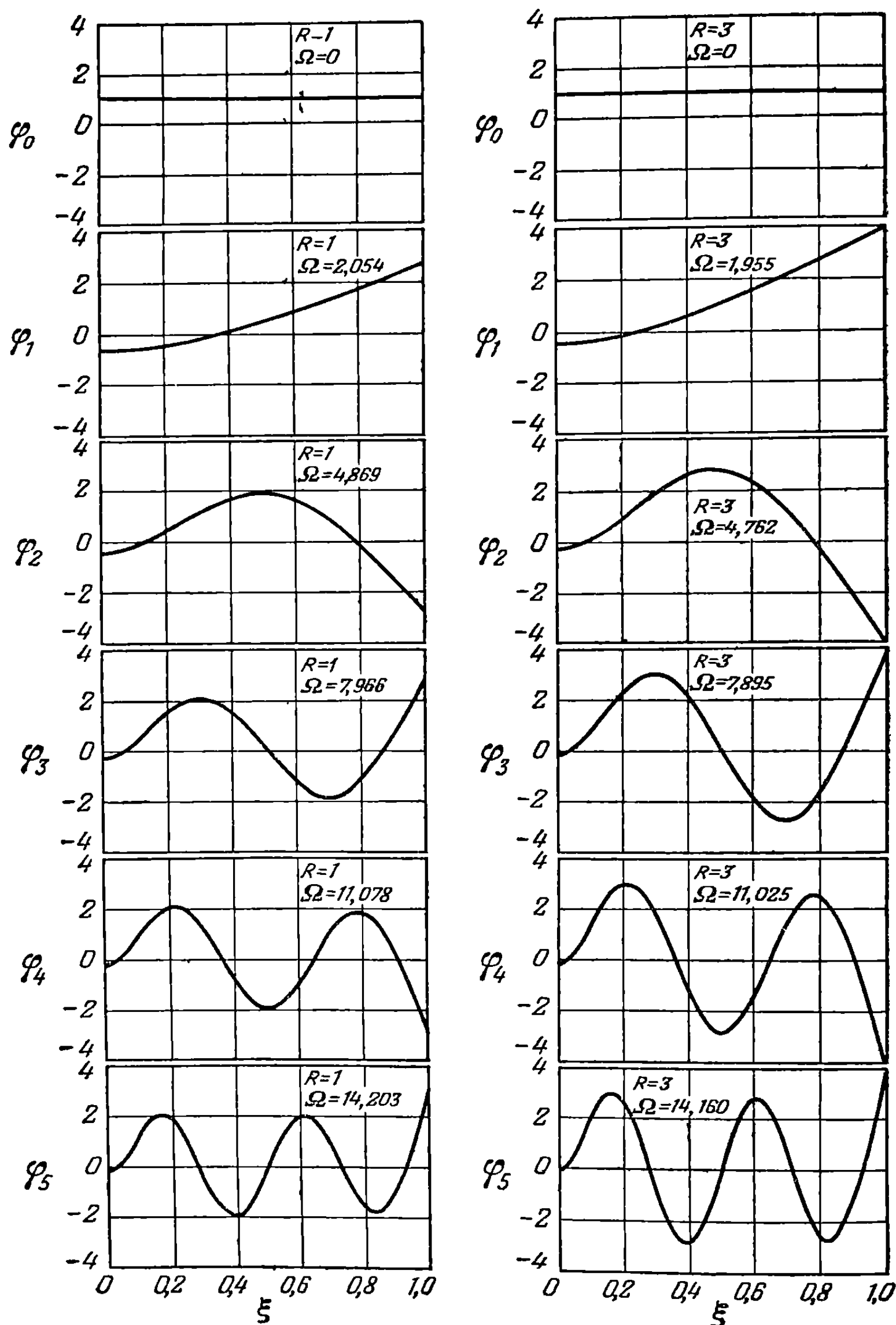
$$B_n = \left\{ \frac{R+1}{RW_n^2(0) + \int_0^1 W_n^2(\xi) d\xi} \right\}^{1/2}, \quad (n)$$

где  $W_n(\xi)$  определяется равенством (1). Таким образом, нормальные функции, нормированные по способу, устанавливаемому уравнением (п), определяются, согласно уравнению (3-22), следующим образом:

$$\varphi_n(\xi) = B_n W_n(\xi), \quad (3-22)$$

где  $W_n(\xi)$  и  $B_n$  определяются соответственно равенствами (1) и (п).

Следует, наконец, отметить, что нормальная функция, соответствующая нулевому значению  $\Omega$ , представляет только поступательное перемещение системы вдоль оси  $z$  как



Фиг. 3-9. Нормальные функции и частотные параметры для случая однородного крыла, прикрепленного к массе фюзеляжа.

твердого тела. Этот факт может быть проверен, если преобразовать уравнение (3-27) от независимой переменной  $y$  к переменной  $\xi$ , положить  $\omega = 0$  и проинтегрировать. Это дает

$$W_0(\xi) = C_1 \xi^3 + C_2 \xi^2 + C_3 \xi + C_4. \quad (o)$$

Используя граничные условия (b), (c), (d) и (e), соответствующие рассматриваемому примеру, получаем

$$W_0(\xi) = C_4. \quad (p)$$

Очевидно, что если нормальную функцию, соответствующую перемещению системы к твердого тела, нормировать в соответствии с уравнением (m) то получим в графическом виде для соответствующей нормированной нормальной функции в виде

$$\varphi_0(y) = 1. \quad (q)$$

Для случаев  $R=1$  и  $R=3$  при помощи числовых расчетов были определены пять нормальных функции, соответствующих деформациям системы, а также соответствующие частоты. Результаты изображены на фиг. 3-9. Более подробное изложение рассмотренного здесь иллюстрирующего примера читатель может найти в работе [3-5].

(b) Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний тонкой балки. Пусть тонкая балка, для которой деформации, обусловленные вращением и поперечным сдвигом, пренебрежимо малы, нагружена поперечной динамической нагрузкой интенсивности  $F_z(y, t)$ . Дифференциальное уравнение вынужденных поперечных колебаний рассматриваемой балки получается из уравнений (3-1), (3-4) и (3-5), если положить в них  $G = \infty$  и  $\mu = 0$ . Это дает

$$m(y)\ddot{w}(y, t) + [EI(y)w''(y, t)]'' = F_z(y, t). \quad (3-61)$$

Если вычислены собственные частоты и нормальные функции, соответствующие некоторым граничным условиям и уравнению (3-61), то прогиб в вынужденном движении выражается следующим равенством:

$$w(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y) \xi_i(t), \quad (3-62)$$

где функции  $\varphi_i(y)$  представляют собой нормированные нормальные функции собственных колебаний, а функции  $\xi_i(t)$ , называемые нормальными координатами, являются некоторыми функциями времени, которые подлежат определению. Термин „нормальная координата“ означает координату, выражающую прогиб, соответствующий некоторой форме собственных колебаний. Легко видеть, что на самом деле эту роль выполняют координаты  $\xi_i$  в соотношении (3-62). Подставляя решение, определяемое равенством (3-62), в уравнение (3-61), получаем

$$m \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \ddot{\xi}_i + \sum_{i=1}^{\infty} (EI \varphi_i'')'' \xi_i = F_z(y, t). \quad (3-63)$$

Можно воспользоваться свойствами собственных функций, упрощающих решение, если умножить уравнение (3-63) на  $\varphi_j(y)$  и проинтегрировать по длине балки

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\xi}_i \int_0^l \varphi_i \varphi_j m dy + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \int_0^l (EI \varphi_i'')'' \varphi_j dy = \int_0^l F_z(y, t) \varphi_j dy. \quad (3-64)$$

Преобразуя второй член при помощи уравнения (3-15), получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\xi}_i \int_0^l \varphi_i \varphi_j m dy + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \omega_i^2 \int_0^l \varphi_i \varphi_j m dy = \int_0^l F_z(y, t) \varphi_j dy. \quad (3-65)$$

Используя условие ортогональности (3-20) и полагая

$$\int_0^l \varphi_i \varphi_j m dy = M_j \delta_{ij}, \quad (3-66)$$

из уравнения (3-65) получаем

$$M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = \Xi_j, \quad (j = 1, \dots, \infty), \quad (3-67)$$



где величина

$$M_j = \int_0^l \varphi_j^2 m dy$$

называется обобщенной массой  $j$ -й формы колебаний, а величина

$$\Xi_j = \int_0^l F_z(y, t) \varphi_j dy$$

— обобщенной силой  $j$ -й формы колебаний. Уравнение (3-67) определяет реакцию  $j$ -й формы колебаний на возмущающую силу  $F_z(y, t)$ . Если  $F_z(y, t)$  не зависит от движения балки, то, как видно, дифференциальные уравнения, определяющие реакции форм колебаний, не связаны одно с другим и могут быть решены раздельно. Если некоторая компонента нагрузки  $F_z(y, t)$  зависит от движения балки (как например в случае демпфирующей силы), то дифференциальные уравнения становятся связанными друг с другом. Окончательное решение получается подстановкой решений уравнений (3-67) в равенство (3-62).

Для того чтобы проиллюстрировать проведенные выше рассуждения, рассмотрим свободно опертую однородную балку, нагруженную поперечной динамической нагрузкой, интенсивность которой определяется соотношением

$$F_z(y, t) = F_z(y) \sin \Omega t. \quad (3-68)$$

Решение определяется равенством (3-62), где  $\varphi_i(y) = \sin(i\pi y/l)$ , а  $\xi_i(t)$  представляют собой решения уравнений (3-67). Обобщенная масса равна

$$M_j = m \int_0^l \sin^2 \frac{j\pi y}{l} dy = \frac{ml}{2}, \quad (3-69)$$

а обобщенная сила равна

$$\Xi_j = \sin \Omega t \int_0^l F_z(y) \sin \frac{j\pi y}{l} dy. \quad (3-70)$$

Подставив выражения (3-69) и (3-70) в уравнение (3-67), получим

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j = \left( \frac{2}{ml} \int_0^l F_z(y) \sin \frac{j\pi y}{l} dy \right) \sin \Omega t, \quad (j = 1, 2, \dots, \infty). \quad (3-71)$$

Если мы предположим, что начальные прогибы балки тождественно равны нулю,  $w(y, 0) = 0$ , то нормальные координаты в начальный момент должны обращаться в нуль, так что  $\xi_j(0) = 0$ . Это можно проверить, полагая в равенстве (3-62)  $t = 0$  и используя начальные условия:

$$w(y, 0) = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y) \xi_i(0). \quad (3-72)$$

Величины  $\xi_i(0)$  можно вычислить, умножая равенство (3-72) на  $m\varphi_j(y)$  и интегрируя по  $y$  от нуля до  $l$ . Имеем

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(0) \int_0^l \varphi_i(y) \varphi_j(y) m(y) dy. \quad (3-73)$$

Используя условие ортогональности (3-20), из уравнения (3-73) получаем

$$\xi_j(0) = 0. \quad (3-74)$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что если  $\dot{w}(y, 0) = 0$ , то

$$\dot{\xi}_j = 0. \quad (3-75)$$

Решая уравнение (3-71) при начальных условиях  $\xi_j(0) = \dot{\xi}_j(0) = 0$ , получаем

$$\xi_j = \frac{2}{ml} \left( \int_0^l F_z(y) \sin \frac{j\pi y}{l} dy \right) \frac{\sin \Omega t - (\Omega/\omega_j) \sin \omega_j t}{\omega_j^2 [1 - (\Omega^2/\omega_j^2)]}. \quad (3-76)$$

Выражение для прогиба балки получится, если подставить в равенство (3-62) выражение (3-76) и величину  $\varphi_i(y) = \sin(i\pi y/l)$ :

$$w(y, t) = \frac{2}{ml} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi y}{l} \left( \int_0^l F_z(y) \sin \frac{i\pi y}{l} dy \right) \frac{\sin \Omega t - (\Omega/\omega_i) \sin \omega_i t}{\omega_i^2 [1 - (\Omega^2/\omega_i^2)]}. \quad (3-77)$$

В случае равномерно распределенной динамической нагрузки, когда  $F_z(y) = f = \text{const}$ , решение приводится к виду

$$w(y, t) = \frac{4f}{m\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi y}{l} [\sin \Omega t - (\Omega/\omega_i) \sin \omega_i t]}{i \omega_i^2 [1 - (\Omega^2/\omega_i^2)]}, \quad (3-78)$$

где, как можно заметить, фигурируют только симметричные нормальные функции (нечетные значения  $i$ ).

Если нагружение осуществляется сосредоточенной динамической нагрузкой  $F \sin \Omega t$ , приложенной в точке балки  $y = \eta$ , то функция  $F_z(y)$  представляется в виде

$$F_z(y) = F \delta(y - \eta), \quad (3-79)$$

где функция  $\delta(y - \eta)$  представляет собой дельта-функцию Дирака [3—6]. Эта функция равна нулю повсюду вне точки  $y = \eta$ , а в этой точке ее значение равно бесконечности. Кроме того, функция Дирака обладает следующими интегральными свойствами:

$$\int \delta(y - \eta) dy = 1, \quad \int g(y) \delta(y - \eta) dy = g(\eta), \quad (3-80)$$

где  $g(y)$  — произвольная функция  $y$ , а область интегрирования содержит точку  $\eta$ . Если же область интегрирования не содержит точки  $\eta$ , то функция Дирака обладает тем свойством, что

$$\int \delta(y - \eta) dy = 0, \quad \int g(y) \delta(y - \eta) dy = 0. \quad (3-81)$$

Подставив сперва в формулу (3-77) выражение (3-79) и воспользовавшись соотношениями (3-80), мы прежде всего получим

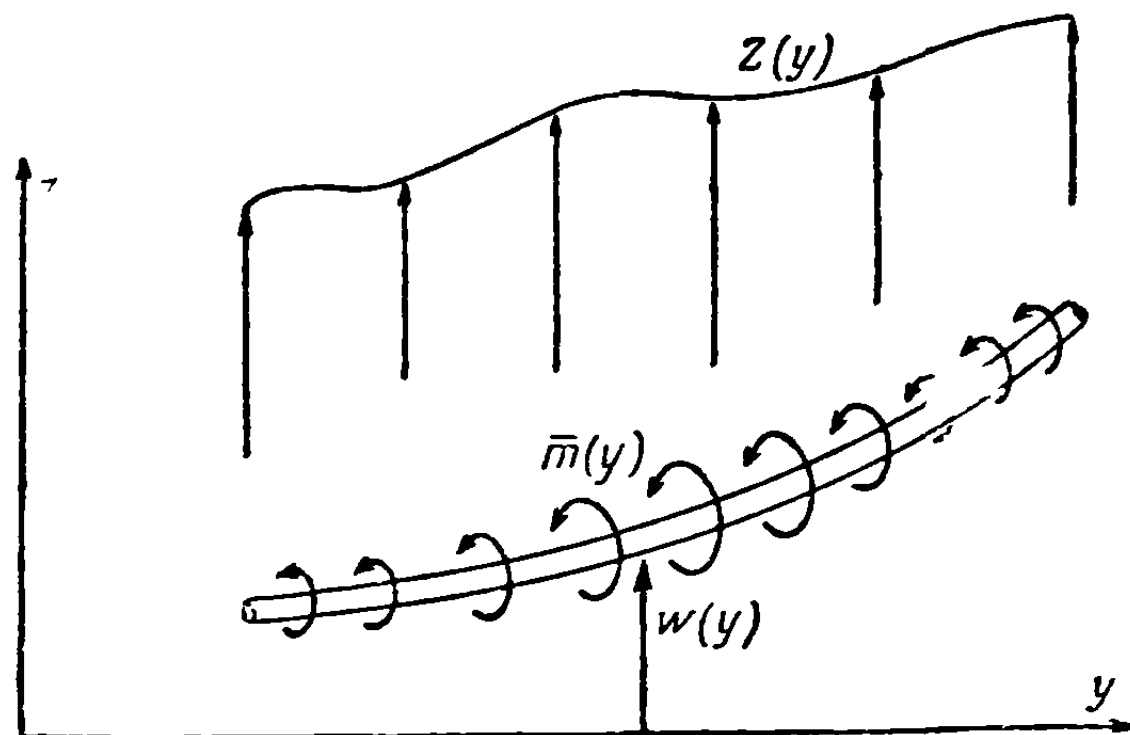
$$\int_0^l F \delta(y - \eta) \sin \frac{i\pi y}{l} dy = F \sin \frac{i\pi \eta}{l}. \quad (3-82)$$

Далее, подставляя выражение (3-79) в равенство (3-77) и используя соотношение (3-82), мы получаем выражение для прогиба балки в случае сосредоточенной динамической нагрузки  $F \sin \Omega t$ :

$$w(y, t) = \frac{2F}{ml} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi y}{l} \sin \frac{i\pi \eta}{l} \frac{[\sin \Omega t - (\Omega/\omega_i) \sin \omega_i t]}{\omega_i^2 [1 - (\Omega^2/\omega_i^2)]}. \quad (3-83)$$

Уравнения (3-78) и (3-83) дают хорошо известное условие резонанса: прогибы балки стремятся к бесконечности, когда частота возбуждения  $\Omega$  стремится к какой-либо из собственных частот  $\omega_i$ .

3-3. Интегральное уравнение колебаний тонкой балки. Если на закрепленную балку действуют некоторая поперечная нагрузка интенсивности  $Z(y)$  и



Фиг. 3-10. Балка под действием поперечной нагрузки и распределенного момента.

распределенный момент интенсивности  $\bar{m}(y)$  (см. фиг. 3-10), то прогиб и наклон балки в точке  $y$  выражаются соответственно формулами

$$w(y) = \int_0^l [C^{zz}(y, \eta) Z(\eta) + C^{z\alpha}(y, \eta) \bar{m}(\eta)] d\eta, \quad (3-84a)$$

$$w'(y) = \int_0^l [C^{\alpha z}(y, \eta) Z(\eta) + C^{\alpha\alpha}(y, \eta) \bar{m}(\eta)] d\eta, \quad (3-84b)$$

где:

$C^{zz}(y, \eta)$  — прогиб в точке  $y$  от единичной нагрузки приложенной в точке  $\eta$ ;

$C^{z\alpha}(y, \eta)$  — прогиб в точке  $y$  от единичного момента, приложенного в точке  $\eta$ ;

$C^{\alpha z}(y, \eta)$  — наклон балки в точке  $y$  от единичной нагрузки, приложенной в точке  $\eta$ ;

$C^{\alpha\alpha}(y, \eta)$  — наклон балки в точке  $y$  от единичного момента в точке  $\eta$ <sup>1)</sup>.

Функции влияния, вообще говоря, могут определять прогибы, определяемые как изгибом, так и сдвигом.

Положив в уравнениях (3-84)

$$\left. \begin{aligned} Z(\eta) &= F_z(\eta, t) - m(\eta) \ddot{w}(\eta, t), \\ \bar{m}(\eta) &= -\mu(\eta) \ddot{\alpha}'(\eta, t), \end{aligned} \right\}, \quad (3-85)$$

<sup>1)</sup> Легко видеть, что

$$C^{\alpha z}(y, \eta) = \partial C^{zz}(y, \eta) / \partial y$$

на основании соотношений взаимности (см. п. 2-4)

$$C^{z\alpha}(y, \eta) = C^{\alpha z}(\eta, y) = \partial C^{zz}(y, \eta) / \partial \eta.$$

мы получим совместные интегральные уравнения вынужденных колебаний закрепленной балки с учетом инерции вращения:

$$\omega(y, t) = \int_0^l \{C^{zz}(y, \eta) [F_z(\eta, t) - m(\eta) \ddot{\omega}(\eta, t)] - C^{z\alpha}(y, \eta) \mu(\eta) \ddot{\alpha}'(\eta, t)\} d\eta, \quad (3-86)$$

$$\omega'(y, t) = \int_0^l \{C^{zz}(y, \eta) [F_z(\eta, t) - m(\eta) \ddot{\omega}(\eta, t)] - C^{\alpha\alpha}(y, \eta) \mu(\eta) \ddot{\alpha}'(\eta, t)\} d\eta. \quad (3-87)$$

Уравнения (3-86) и (3-87) называются интегральными уравнениями, так как неизвестные функции входят в них под знаком интеграла. Предполагая, что  $\alpha' = \omega'$ , мы упростим задачу и сведем ее к решению одного интегрального уравнения, получающегося из уравнения (3-86):

$$\omega(y, t) = \int_0^l \{C^{zz}(y, \eta) [F_z(\eta, t) - m(\eta) \ddot{\omega}(\eta, t)] - C^{z\alpha}(y, \eta) \mu(\eta) \ddot{\omega}'(\eta, t)\} d\eta. \quad (3-88)$$

(а) *Интегральное уравнение собственных колебаний тонкой закрепленной балки.* Интегральное уравнение собственных колебаний тонкой закрепленной балки, для которой можно пренебречь влиянием инерции вращения, получается из уравнения (3-88), если положить в нем  $\mu = F_z(y, t) = 0$ , в следующем виде

$$\omega(y, t) = - \int_0^l C^{zz}(y, \eta) \ddot{\omega}(\eta, t) m(\eta) d\eta. \quad (3-89)$$

Как и в соответствующем дифференциальном уравнении, в интегральном уравнении (3-89) можно разделить переменные, и мы можем искать решение в виде

$$\omega(y, t) = W(y) T(t). \quad (3-90)$$

Подставив выражение (3-90) в уравнение (3-89), получим (для сокращения индексы в символе функции влияния опущены)

$$-\frac{T}{\ddot{T}} = \frac{1}{W(y)} \int_0^l C(y, \eta) W(\eta) m(\eta) d\eta. \quad (3-91)$$

Так как  $y$  и  $t$  являются независимыми переменными, отсюда следует, что

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (3-92)$$

$$W(y) = \omega^2 \int_0^l C(y, \eta) W(\eta) m(\eta) d\eta. \quad (3-93)$$

Уравнение (3-92), определяющее зависимость решения от времени, совпадает с уравнением (3-10). Уравнение (3-93), определяющее нормальные функции, т. е. зависимость решения от пространственной координаты, представляет собой теперь однородное линейное интегральное уравнение, а не дифференциальное уравнение. Граничные условия уже учитываются функцией влияния  $C(y, \eta)$ , так что к уравнению (3-93) уже не нужно добавлять граничных условий.

В соответствии с теорией интегральных уравнений Гильберта — Шмидта [3—7] уравнению (3-93) удовлетворяет бесконечная система пар собственных функций  $W_n(y)$  и собственных значений  $\omega_n$ . Это та же система собственных функций и собственных значений, которая удовлетворяет уравнению (3-11), если

только соответствующие граничные условия и граничные условия, которым удовлетворяет функция влияния  $C(y, \eta)$ , одинаковы. Выполнение соотношений ортогональности между собственными функциями интегрального уравнения можно проверить, подставляя  $W_n(y)$  и  $W_m(y)$  в уравнение (3-93):

$$W_n(y) = \omega_n^2 \int_0^l C(y, \eta) W_n(\eta) m(\eta) d\eta, \quad (3-94)$$

$$W_m(y) = \omega_m^2 \int_0^l C(y, \eta) W_m(\eta) m(\eta) d\eta. \quad (3-95)$$

Умножив равенства (3-94) и (3-95) соответственно на  $W_m(y) m(y)$  и  $W_n(y) m(y)$  и проинтегрировав по  $y$  от нуля до  $l$ , получим:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \int_0^l W_m W_n m dy = \int_0^l W_m(y) m(y) \int_0^l C(y, \eta) W_n(\eta) m(\eta) d\eta dy, \quad (3-96)$$

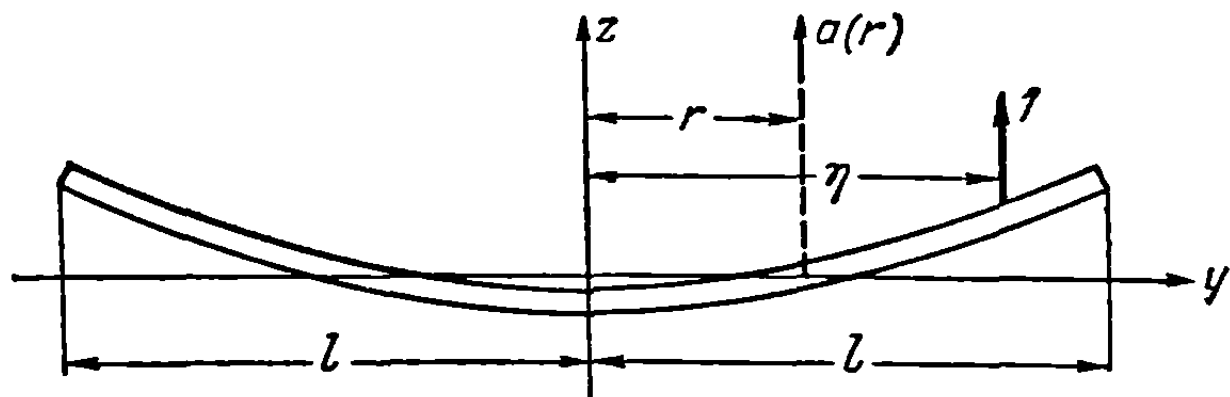
$$\frac{1}{\omega_m^2} \int_0^l W_n W_m m dy = \int_0^l W_n(y) m(y) \int_0^l C(y, \eta) W_m(\eta) m(\eta) d\eta dy. \quad (3-97)$$

Поскольку функция влияния симметрична, так что  $C(y, \eta) = C(\eta, y)$ , правые части уравнений (3-96) и (3-97) совпадают, и мы получаем соотношения

$$\left( \frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_m^2} \right) \int_0^l W_m W_n m dy = 0, \quad (m \neq n), \quad (3-98)$$

которые приводятся к ранее полученному условию ортогональности (3-20).

(b) *Интегральное уравнение собственных колебаний тонкой незакрепленной балки.* В п. 3—3(a) мы применили интегральные уравнения к решению задач о собственных колебаниях тонких свободно опертых балок. Применение интегральных уравнений в случае незакрепленных балок требует некоторых



Фиг. 3-11. Система осей балки со свободными концами.

дополнительных рассуждений. Физический смысл функции влияния применительно к случаю незакрепленной балки не является непосредственно очевидным. Задача о вычислении функций влияния в случае закрепленной балки является простой задачей статики. Если же балка не закреплена, то приложение силы приведет балку

в движение. Таким образом, нужно выяснить, каковы будут в этом случае реакции и как измерять прогибы.

Динамическая задача обычным образом может быть приведена к эквивалентной задаче статики при помощи принципа Даламбера. В данном случае это означает, что следует рассматривать равномерно ускоренное движение, вызванное приложенной к балке силой, и приводить возникающие в этом движении силы инерции в равновесие с этой силой. Функцию влияния следует вычислять для балки, на которую действует полученная таким образом система сил, так что вместо реакций опор в рассматриваемой задаче появляются силы инерции.

Среди функций собственных колебаний, соответствующих случаю незакрепленной балки, будут две, соответствующие движению главных осей инерции балки как твердого тела. С другой стороны, нормальные функции, соответ-

ствующие деформации балки, характеризуются прогибами относительно главных осей инерции. Следовательно, при вычислении функции влияния мы можем исключить нормальные функции, соответствующие перемещению системы как твердого тела, отсчитывая прогибы относительно главных осей инерции.

Пусть незакрепленная балка может беспрепятственно перемещаться в плоскости чертежа (фиг. 3-11). Система осей выбирается таким образом, что ось  $z$  оказывается направленной по полуразмаху, причем балка предполагается симметричной относительно оси  $z$ . Начало координат выбирается в центре тяжести балки, а оси  $y$  и  $z$  совпадают с главными осями инерции колеблющейся балки. Так как рассматриваются колебания незакрепленной балки, то оси  $y$  и  $z$  можно считать неподвижными в пространстве. Сумма проекций сил инерции на ось  $z$  и сумма моментов сил инерции относительно оси  $x$  равны нулю. Таким образом, имеем

$$\int_{-l}^l \ddot{w}(y, t) dm = \ddot{T}(t) \int_{-l}^l W_n(y) m dy = 0, \quad (3-99a)$$

$$\int_{-l}^l \ddot{w}(y, t) y dm = \ddot{T}(t) \int_{-l}^l W_n(y) m y dy = 0. \quad (3-99b)$$

Уравнения (3-99a) и (3-99b) показывают, что начало системы осей  $yz$  во все время движения остается в центре тяжести деформированной балки, а сами оси  $y$ ,  $z$  остаются главными осями инерции деформированной балки.

Приложив в точке  $y = \eta$  единичную силу в направлении оси  $z$ , найдем, что соответствующее ускорение жесткой балки в точке  $y = r$ , определяется соотношением

$$a(r) = \frac{1}{M} + \frac{\eta r}{I_x}, \quad (3-100)$$

где  $M$  представляет собой суммарную массу балки, а  $I_x$  — момент инерции балки относительно оси  $x$ ;  $\eta$  и  $r$  представляют собой параметры, определяющие соответственно координаты по оси  $y$  точки приложения силы и точки, в которой вычисляется ускорение.

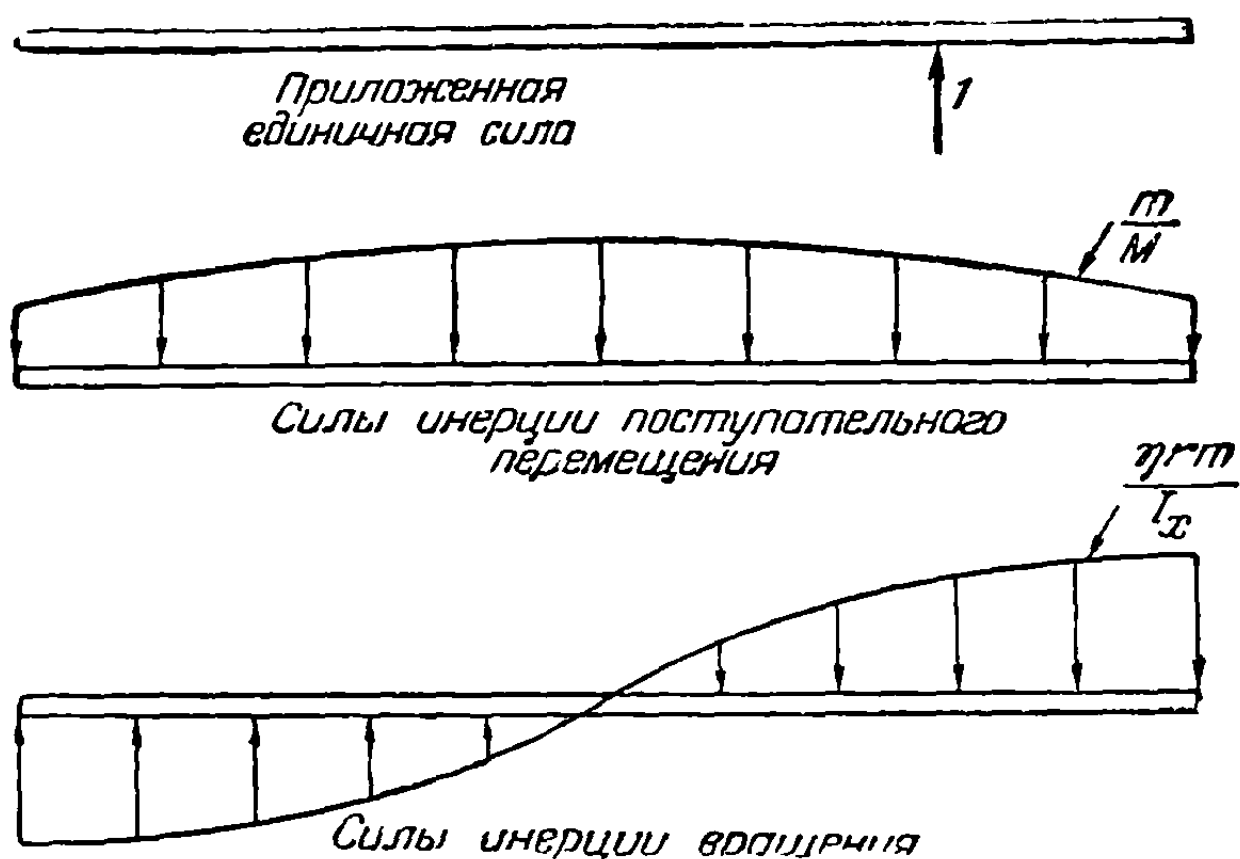
Сила инерции, действующая на элемент массы  $m dr$ , расположенный в точке  $r$ , равна

$$df(r) = - \left( \frac{1}{M} + \frac{\eta r}{I_x} \right) m dr. \quad (3-101)$$

Мы видим, таким образом, что если к незакрепленной балке приложена единичная сила, то балка находится в состоянии динамического равновесия под действием трех систем сил, изображенных на фиг. 3-12.

Перемещение балки относительно прямой линии, касающейся балки в начале координат, обусловливаемое действующей на балку единичной силой и распределенными силами инерции, представляется в виде

$$H(y, \eta) = C(y, \eta) - \int_{-l}^l C(y, r) \left( \frac{1}{M} + \frac{\eta r}{I_x} \right) m(r) dr, \quad (3-102)$$



Фиг. 3-12. Система сил, действующих на балку со свободными концами.



где  $C(y, \tau)$  представляет собой обычную функцию влияния, определяющую прогиб в направлении оси  $z$  точки с координатой  $y$ , вызванный единичной силой, приложенной в точке  $y = \tau$ , если балка заделана в точке  $y = 0$ .

Если измерять прогиб балки относительно оси  $y$ , а не относительно оси, касательной к линии центров балки, то получается

$$G(y, \eta) = H(y, \eta) + W(0) + \frac{\partial W(0)}{\partial y} y, \quad (3-103)$$

где функция  $H(y, \eta)$  определяется выражением (3-102), а  $W(0)$  и  $\partial W(0)/\partial y$  представляют собой соответственно прогиб и наклон балки на ее линии центров. Поскольку все прогибы балки должны удовлетворять условиям, определяемым уравнениями (3-99a) и (3-99b), мы имеем возможность вычислить  $W(0)$  и  $\partial W(0)/\partial y$ . Подставляя соотношение (3-103) в уравнение (3-99a), находим

$$\int_{-l}^l \left[ H(r, \tau) + W(0) + \frac{\partial W(0)}{\partial y} r \right] m(r) dr = 0. \quad (3-104)$$

Выполняя интегрирование в уравнении (3-104), используя то обстоятельство, что начало координат совпадает с центром тяжести балки, и разрешая получающееся уравнение относительно  $W(0)$ , получаем

$$W(0) = -\frac{1}{M} \int_{-l}^l H(r, \eta) m(r) dr. \quad (3-105)$$

Подставив соотношение (3-103) в уравнение (3-99b), найдем

$$\int_{-l}^l \left[ H(r, \tau) + W(0) + \frac{\partial W(0)}{\partial y} r \right] m(r) r dr = 0, \quad (3-106)$$

так что, выполняя интегрирование и пользуясь тем, что начало координат совпадает с центром тяжести, получаем

$$\frac{\partial W(0)}{\partial y} = -\frac{1}{I_x} \int_{-l}^l H(r, \eta) m(r) r dr. \quad (3-107)$$

Подставив выражения (3-102), (3-105) и (3-107) в равенство (3-103), получим выражение для функции влияния незакрепленной балки, определяющей прогибы точек балки относительно ее главных осей инерции, в виде

$$\begin{aligned} G(y, \tau) = & C(y, \tau) - \int_{-l}^l C(y, r) \left( \frac{1}{M} + \frac{\eta r}{I_x} \right) m(r) dr - \int_{-l}^l C(r, \eta) \left( \frac{1}{M} + \frac{y r}{I_x} \right) m(r) dr - \\ & - \int_{-l}^l \int_{-l}^l C(r, p) \left( \frac{1}{M^2} + \frac{\eta p + r y}{M I_x} + \frac{\eta p r y}{I_x^2} \right) m(r) m(p) dr dp. \end{aligned} \quad (3-108)$$

Интегральное уравнение собственных колебаний тонкой, незакрепленной балки принимает вид

$$W(y) = \omega^2 \int_{-l}^l G(y, \tau) W(\tau) m(\tau) d\tau, \quad (3-109)$$

где  $G(y, \eta)$  представляет собой функцию влияния, определяемую уравнением (3-108).

Заметим, что во втором и четвертом членах правой части равенства (3-108)  $\eta$  входит только в нулевой и первой степенях. Следовательно, эти члены при

подстановке в уравнение (3-109) дадут нуль, поскольку вследствие уравнений (3-99a) и (3-99b) имеет место соотношение

$$\int_{-l}^l W(\eta) m d\eta = \int_{-l}^l W(\eta) m \eta d\eta = 0. \quad (3-110)$$

Поэтому выражение для функции влияния  $G(y, \eta)$  упрощается и приводится к виду

$$G(y, \eta) = C(y, \eta) - \int_{-l}^l C(r, \eta) \left[ \frac{1}{M} + \frac{yr}{I_x} \right] m(r) dr. \quad (3-111)$$

Таким образом, интегральное уравнение (3-109) совместно с выражением для функции влияния (3-111) может быть применено для определения функций собственных колебаний и частот собственных колебаний, соответствующих деформации незакрепленной балки.

(с) *Интегральное уравнение вынужденных колебаний тонкой закрепленной балки.* Если пренебречь членами уравнения (3-88), обусловливаемыми инерцией вращения, то получим интегральное уравнение вынужденных колебаний тонкой закрепленной балки в следующем виде:

$$\omega(y, t) = \int_0^l C(y, \eta) [-m(\eta) \ddot{\omega}(\eta, t) + F_z(\eta, t)] d\eta. \quad (3-112)$$

Следуя методу решения, уже примененному выше для соответствующего дифференциального уравнения, будем искать решение в виде ряда, определяемого равенством (3-62):

$$\omega(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y) \xi_i(t), \quad (3-62)$$

где  $\varphi_i(y)$  представляют собой собственные функции соответствующего уравнению (3-112) однородного уравнения, т. е. уравнения (3-93). Подставляя (3-62) в уравнение (3-112), получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \ddot{\xi}_i = - \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\xi}_i \int_0^l C(y, \eta) \varphi_i(\eta) m(\eta) d\eta + \int_0^l C(y, \eta) F_z(\eta, t) d\eta. \quad (3-113)$$

Используя уравнение (3-93), приводим уравнение (3-113) к виду

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \left( \xi_i + \frac{\ddot{\xi}_i}{\omega_i^2} \right) = \int_0^l C(y, \eta) F_z(\eta, t) d\eta. \quad (3-114)$$

Умножая обе части уравнения (3-114) на  $\varphi_j(y) m(y)$  и интегрируя от нуля до  $l$ , получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \xi_i + \frac{\ddot{\xi}_i}{\omega_i^2} \right) \int_0^l \varphi_i \varphi_j m dy = \int_0^l \varphi_j(y) m(y) \int_0^l C(y, \eta) F_z(\eta, t) d\eta dy. \quad (3-115)$$

Используя условие ортогональности, приводим уравнение (3-115) к виду

$$M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = \omega_j^2 \int_0^l \varphi_j(y) m(y) \int_0^l C(y, \eta) F_z(\eta, t) d\eta dy, \quad (3-116)$$

где

$$M_j = \int_0^l \varphi_j^2 m dy.$$

Исп лзуя д тее св йство симетрии  $C(y, \tau) = C(\tau, y)$ , а также то обстоя-  
 тельст что ф. к ни  $\varphi_j(y)$  удовлетворяют уравнению (3-93), получаем оконча-  
 тель

$$M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = \Xi_j, \quad (3-117)$$

де

$$\Xi_j = \int_0^l F_j(y, t) \varphi_j(y) dy.$$

ы ид таким бразом что при применении интегральных уравнений задача  
 вы яден ых колебан ях приводится к той же сам й системе обыкновен ых  
 дифференциальных уравнен й что и при формулировке этой задачи с пом щью  
 дифференциальных уравнений в частных производных. Единственной практи-  
 еской разнице между эти ми двумя подходами будет то, что в одном случае  
 собствен е ф. кци определяются интегральным уравнением [уравнение 3-93],  
 а в другом дифференциальным уравнением [уравнение 3-11].

**Пример 3-3.** Вывести соотношение между функцией влияния балки и соответ-  
 ствующи и собственными функциями и собственными значениями.

*Решени* Предположи что на некоторую закрепленную балку, в начальный момент  
 находившуюся в состоянии покоя и подчиненную произвольным граничным условиям,  
 действует в точке  $y = \tau$  сосредоточенная единичная сила изменяющаяся по гармониче-  
 скскому закону

$$F(\tau, t) = \delta(y - \tau) \sin \Omega t. \quad (a)$$

В эт м слу ае уравнение (3-117) принимает вид

$$M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = \sin \Omega t \int_0^l \delta(y - \tau) \varphi_j(y) dy = \varphi_j(\tau) \sin \Omega t. \quad (b)$$

Так как балка в начальный момент находилась в покое, то решение уравнения (b)  
 принимает вид

$$\xi_j = \frac{\varphi_j(\tau)}{M_j \omega_j^2 [1 - \Omega^2 / \omega_j^2]} \sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_j} \sin \omega_j t. \quad (c)$$

Прогиб балки получится если подставить выражение (c) в равенство (3-62):

$$w(y, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(y) \varphi_j(\tau)}{M_j \omega_j^2 [1 - \Omega^2 / \omega_j^2]} \sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_j} \sin \omega_j t. \quad (d)$$

Если мы предположим что частота возбуждения  $\Omega$  стремится к нулю, то условия нагру-  
 жения удут приближаться к статическим а уравнение (d) приведет к уравнению, опре-  
 деляющему прогиб в точке  $y$  обусловленный постоянной единичной силой, приложен-  
 ной в точке  $y = \tau$

$$C(y, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(y) \varphi_j(\tau)}{M_j \omega_j^2} \quad (e)$$

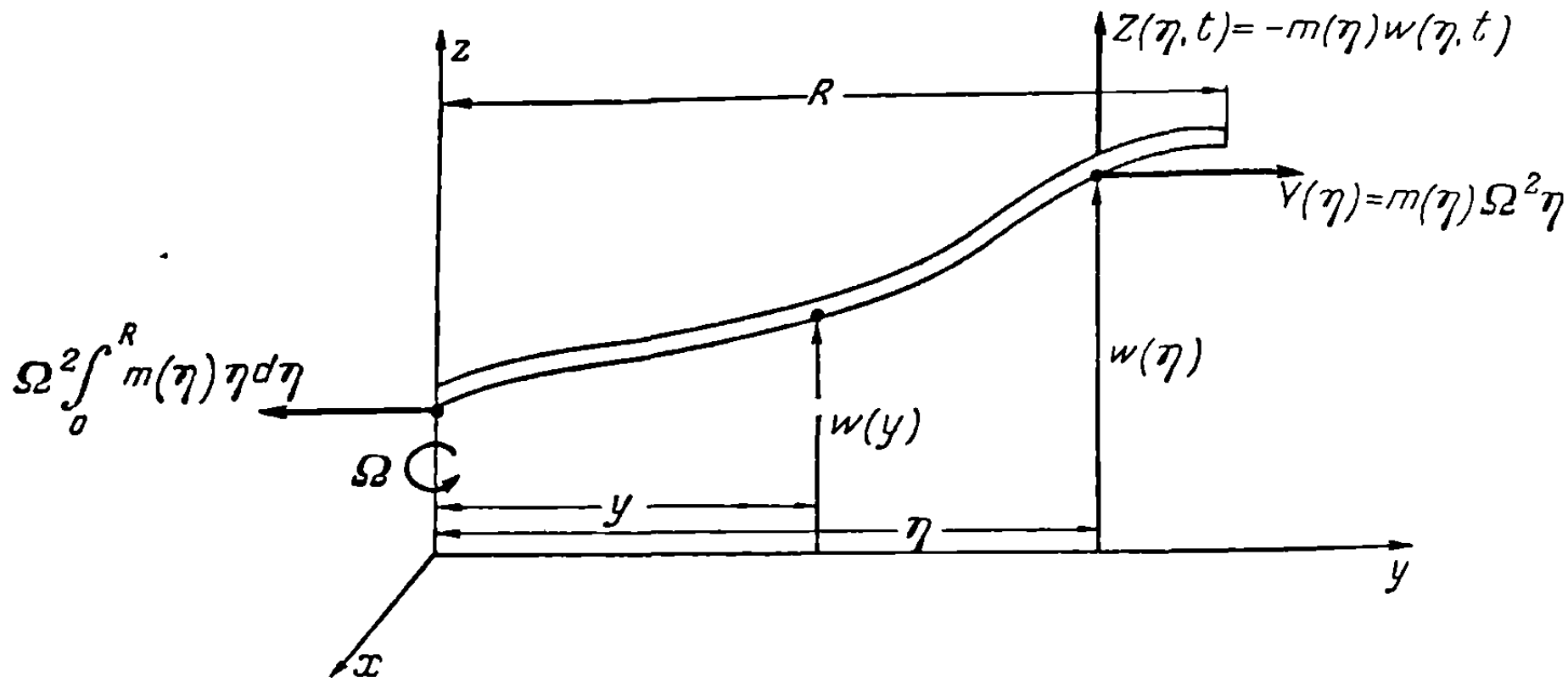
Уравнение (e) выражает интересную зависимость между функцией влияния балки  
 с одной стороны и нормальными функциями собственных колебаний и частотами ее  
 собственны колебаний с другой стороны. Например применяя равенство (e) к случаю  
 однородной свободно опертой балки, получим выражение для функции влияния в виде  
 бесконечного ряда.

$$C(y, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(i\pi y/L) \sin(i\pi \tau/L)}{m l / 2 \omega_i^2}. \quad (f)$$

**3-4. Динамическое равновесие вращающихся тонких балок при изгибе.**  
 Предыдущие пункты этой главы были посвящены формулировке и решению  
 уравнений собственных и вынужденных колебаний тонких невращающихся балок.  
 При исследовании самолетов с вращающимися крыльями возникает важный класс  
 задач для которых представляется необходимым рассмотреть вращающиеся балки.

В этих задачах центробежные силы, действующие на вращающуюся балку, оказывают существенное влияние на ее сопротивление изгибу.

(а) Дифференциальное уравнение собственных колебаний тонких вращающихся балок. На фиг. 3-13 представлена схема поперечных сил инерции и центробежных сил, действующих на тонкую балку, вращающуюся вокруг оси  $z$  с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Предполагается, что ось  $y$  вращается вместе с балкой; граничные условия, определяющие закрепление балки на оси  $z$ ,



Фиг. 3-13. Система координат для вращающейся балки.

оставим при выводе уравнений движения неопределенными. Из чертежа фиг. 3-13 мы видим, что момент в точке балки с координатой  $y$  определяется соотношением

$$M(y) = \int_y^R \{Z(\eta, t)(\eta - y) - Y(\eta)[w(\eta, t) - w(y, t)]\} d\eta, \quad (3-118)$$

где

$$Z(\eta, t) = -m(\eta)\ddot{w}(\eta, t), \quad Y(\eta) = m(\eta)\Omega^2\eta. \quad (3-119)$$

При записи уравнений (3-119) предполагалось, что смещения вращающейся балки, обусловливаемые изгибом и вращением, представляют собой пренебрежимо малые величины. Подставляя выражения (3-119) в равенство (3-118) и полагая  $M(y) = EIw''(y)$ , получаем уравнение движения в следующем виде:

$$EIw''(y, t) = \int_y^R \{-m(\eta)\ddot{w}(\eta, t)(\eta - y) - m(\eta)\Omega^2\eta[w(\eta, t) - w(y, t)]\} d\eta. \quad (3-120)$$

Чтобы привести уравнение (3-120) к виду, сравнимому с уравнением (3-7), продифференцируем его дважды по  $y$ :

$$m(y)\ddot{w}(y, t) + [EIw''(y, t)]'' + \Omega^2 \left\{ m(y)yw'(y, t) - w''(y, t) \int_y^R m(\eta)\eta d\eta \right\} = 0. \quad (3-121)$$

Уравнение (3-121) представляет собой уравнение в частных производных, допускающее разделение переменных, так что мы можем искать его решение в виде

$$w(y, t) = W(y)T(t). \quad (3-122)$$

Подставляя в уравнение (3-121) выражение (3-122), получаем

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (3-123)$$

$$(EIW''')'' - m\omega^2 W + \Omega^2 \left\{ m(y) y W' - W'' \int_y^R m(\eta) \eta d\eta \right\} = 0, \quad (3-124)$$

где  $\omega$  представляет собой частоту собственных колебаний вращающейся балки.

Функции собственных колебаний получаются из решения уравнения (3-124), удовлетворяющего четырем соответствующим рассматриваемой задаче граничным условиям. Функции собственных колебаний в случае вращающейся балки ортогональны между собой; этот факт может быть обнаружен совершенно таким же методом, как и в случае невращающейся балки. В том случае, когда на конце балки имеется шарнир, так что балка может совершать вращение в плоскости  $yz$ , можно предполагать наличие нормальных функций, соответствующих вращению балки как твердого тела. Однако в отличие от других свободных невращающихся систем этой форме колебаний соответствует конечная частота, равная частоте вращения. Этот факт можно проверить, внося в уравнение (3-124) выражение нормированной нормальной функции, соответствующей вращению балки как твердого тела,

$$W_0(y) = \frac{y}{R}. \quad (3-125)$$

Эта подстановка приводит к соотношению

$$-m\omega_0^2 \left( \frac{y}{R} \right) + \Omega^2 m y \left( \frac{1}{R} \right) = 0, \quad (3-126)$$

показывающему, что дифференциальное уравнение удовлетворяется функцией (3-125), если взять  $\omega_0$  равным  $\Omega$ .

(b) *Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний вращающихся балок.* Если тонкая вращающаяся балка подвержена распределенной поперечной нагрузке  $F_z(y, t)$ , то дифференциальное уравнение вынужденных поперечных колебаний принимает вид

$$m(y) \ddot{w}(y, t) + [EIw''(y(t))]'' + \Omega^2 \left\{ m(y) y w'(y, t) - w''(y, t) \int_y^R m(\eta) \eta d\eta \right\} = F_z(y, t). \quad (3-127)$$

Следуя методу, ранее использованному для невращающихся балок, представим прогиб в виде

$$w(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y) \xi_i(t), \quad (3-128)$$

где  $\varphi_i(y)$  представляют собой нормированные собственные функции собственных изгибных колебаний вращающейся балки, т. е. являются собственными функциями уравнения (3-124), соответствующими заданным граничным условиям. Подставляя выражение (3-128) в уравнение (3-127), находим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ m \varphi_i \ddot{\xi}_i + \left[ (EI\varphi_i''')'' + \Omega^2 \left( m y \varphi_i' - \varphi_i'' \int_y^R m \eta d\eta \right) \right] \xi_i \right\} = F_z(y, t). \quad (3-129)$$

Умножая обе части уравнения (3-129) на  $\varphi_j(y)$  и интегрируя по  $y$  от нуля до  $R$ , получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \ddot{\xi}_i \int_0^R \varphi_i \varphi_j m dy + \xi_i \int_0^R \varphi_j \left[ (EI\varphi_i'')'' + \Omega^2 \left( m y \varphi_i' - \varphi_i'' \int_y^R m \eta d\eta \right) \right] dy \right\} = \int_0^R \varphi_j F_z(y, t) dy. \quad (3-130)$$

Вследствие уравнения (3-124), если граничные условия обеспечивают в рассматриваемом случае выполнение соотношений ортогональности, уравнение (3-130) приводится к виду

$$M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega^2 \xi_j = E_j, \quad (j = 1, 2, \dots, \infty), \quad (3-131)$$

где

$$M_j = \int_0^R \varphi_j^2 m dy, \quad E_j = \int_0^R F_z(y, t) \varphi_j dy.$$

Таким образом, вынужденные колебания вращающейся балки можно рассматривать при помощи тех же самых уравнений движения, как и в случае невращающейся балки, если выразить решение через нормальные функции собственных колебаний для вращающейся балки. Применяя уравнения (3-131) к случаю вращающейся балки с шарниром на конце (машущее крыло), следует иметь в виду, что одно из уравнений будет определять вращение балки как твердого тела, так что соответствующая собственная функция и частота определяются равенствами

$$\varphi_1(y) = y/R, \quad \omega_1 = \Omega.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3-131), получаем

$$I_1 \ddot{\beta} + I_1 \Omega^2 \beta = \int_0^R F_z(y, t) y dy, \quad (3-132)$$

где  $\beta = \xi_1/R$  определяет вращение балки как твердого тела, а  $I_1$  представляет собой момент инерции балки относительно шарнира. Кроме уравнения (3-132), мы имеем еще бесконечное число уравнений движения типа уравнения (3-131), причем каждое из них определяет некоторую нормальную функцию собственных колебаний, которой соответствует деформация вращающейся балки.

**3-5. Динамическое равновесие тонкой балки при кручении.** Задачу о крутильных колебаниях тонких балок, аналогично задачам изгибных колебаний, можно решать как при помощи дифференциальных уравнений, так и при помощи интегральных уравнений. Излагаемые ниже замечания относятся к способу использующему дифференциальные уравнения. Рассуждения, необходимые для сведения задачи к интегральному уравнению, могут быть легко проведены по аналогии с приведенными выше соответствующими рассуждениями, посредством которых к интегральному уравнению была приведена задача об изгибных колебаниях балки.

(а) *Дифференциальное уравнение собственных колебаний.* Деформация кручения тонкой балки в соответствии с теорией кручения Сен-Венана определяется соотношением

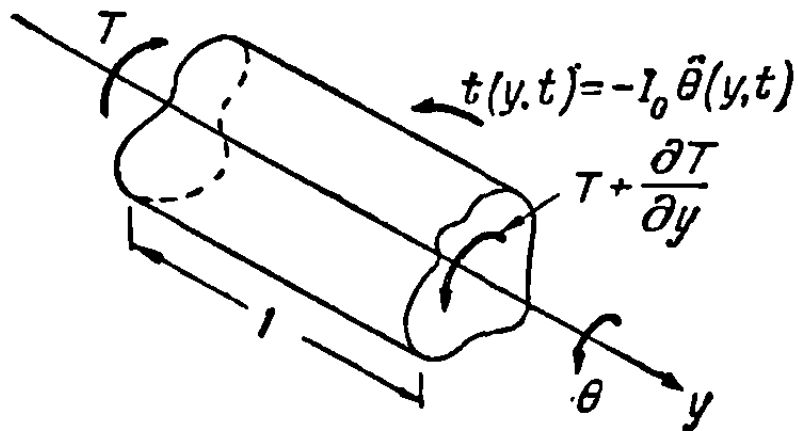
$$T(y) = GJ(y) \theta'(y), \quad (3-133)$$

где  $T(y)$ ,  $GJ(y)$  и  $\theta(y)$  представляют собой соответственно крутящий момент, жесткость балки на кручение и угол закручивания. Рассмотрим теперь систему

усилий, действующих на элемент закрученной балки, длина которого равна единице (фиг. 3-14). Мы видим, что для равновесия действующих на рассматриваемый элемент крутящих моментов относительно центра кручения должно выполняться равенство

$$T'(y) + t(y, t) = 0, \quad (3-134)$$

где  $t(y, t)$  представляет собой крутящий момент, приходящийся на единицу длины. Он считается положительным, если его направление совпадает с направлением отсчета  $\theta$ , как показано на фиг. 3-14.



При собственных колебаниях балки  $t(y, t)$  определяется соотношением

$$t(y, t) = -I_0 \ddot{\theta}(y, t), \quad (3-135)$$

где  $I_0$  представляет собой момент инерции единицы длины балки относительно центра кручения. Дифференцируя равенство (3-133) по  $y$  и используя выражения (3-134) и (3-135), получаем уравнение

$$[GJ\theta'(y, t)]' - I_0 \ddot{\theta}(y, t) = 0, \quad (3-136)$$

которое и представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее собственные крутильные колебания балки. В этом уравнении можно разделить переменные и искать решение при помощи частных решений того же типа, что и в случае уравнения изгибных колебаний. Полагая

$$\theta(y, t) = \Theta(y) T(t) \quad (3-137)$$

и разделяя переменные, получаем

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (3-138)$$

$$(GJ\Theta')' + I_0 \omega^2 \Theta = 0, \quad (3-139)$$

где  $\omega^2$  — постоянная, получающаяся при разделении переменных. Уравнение (3-138) должно быть дополнено двумя начальными условиями, а уравнение (3-139) — двумя граничными условиями. Уравнению (3-139) и соответствующим граничным условиям удовлетворяет бесконечное число пар частот и взаимно ортогональных нормальных функций.

**Пример 3-4.** Найти собственные функции и частоты собственных колебаний однородного стержня с одним заделанным и другим свободным концом, совершающего крутильные колебания.

*Решение.* Для случая однородного стержня уравнение (3-139) приводится к виду

$$\Theta'' + \frac{\omega^2}{a^2} \Theta = 0, \quad (a)$$

где

$$a^2 = \frac{GJ}{I_0}.$$

Решение имеет вид

$$\Theta = C \sin \frac{\omega}{a} y + D \cos \frac{\omega}{a} y. \quad (b)$$

Функция  $\Theta(y)$  удовлетворяет граничным условиям

$$\Theta(0) = 0, \quad \Theta'(l) = 0. \quad (c)$$

Из уравнения (b) и граничных условий получим

$$D = 0, \quad (d)$$

$$\cos \frac{\omega}{a} l = 0. \quad (e)$$



Уравнение (е) удовлетворяется, если частота  $\omega_n$  равна

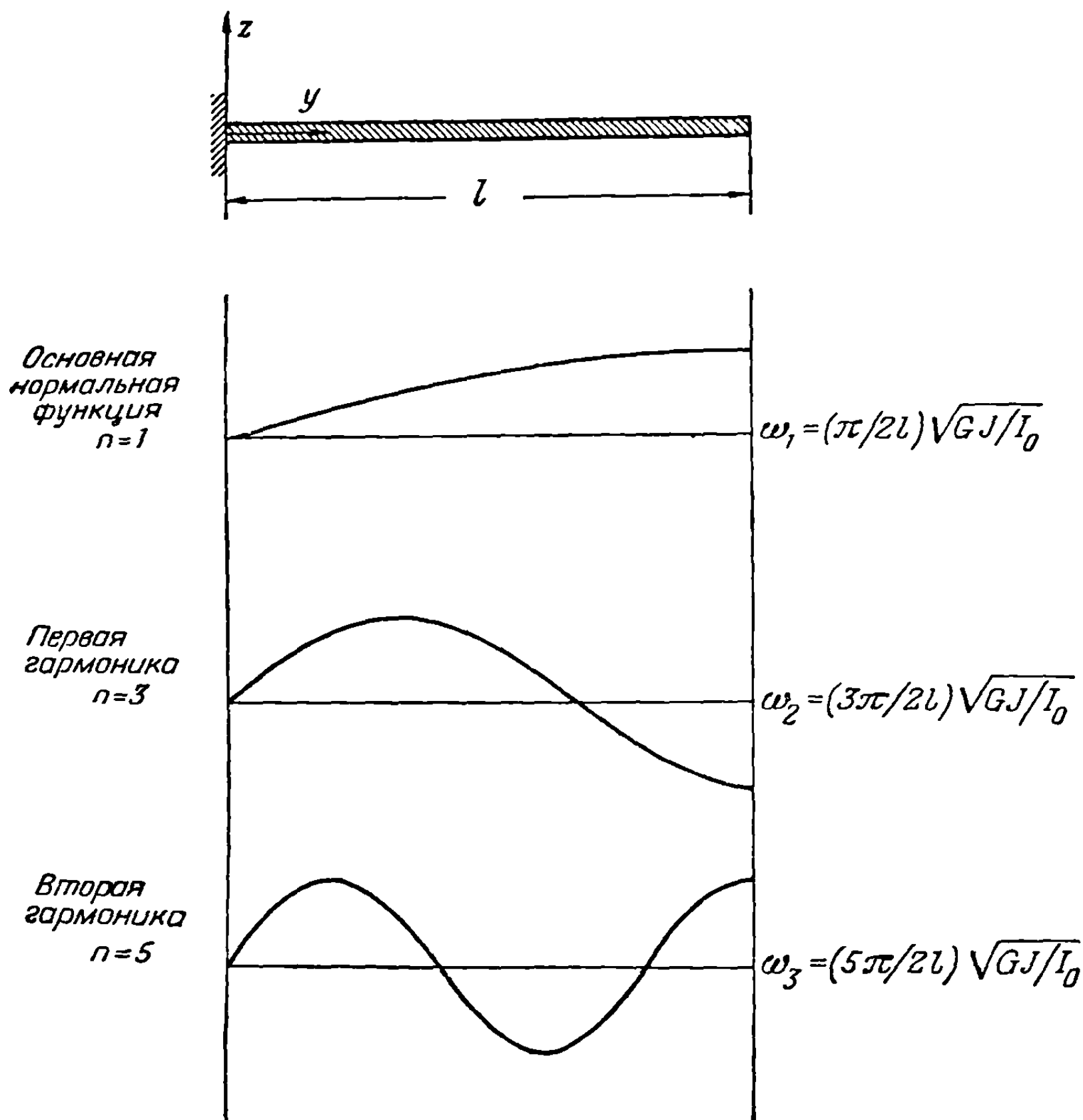
$$\omega_n = \frac{n\pi a}{2l} = \frac{n\pi}{2l} \sqrt{\frac{GJ}{I_0}}, \quad (n = 1, 3, 5, \dots, \infty), \quad (f)$$

что соответствует нормальным функциям вида

$$\theta_n(y) = C \sin \frac{n\pi y}{2l}, \quad (n = 1, 3, 5, \dots, \infty). \quad (g)$$

Эти нормальные функции изображены на фиг. 3-15.

Пример 3-5. Найти собственные функции и частоты собственных колебаний однородного консольного крыла самолета с баком на конце (см. фиг. 3-16). Предполагается, что жесткость крыла на кручение  $GJ$  и момент инерции единицы длины крыла



Фиг. 3-15. Нормальные функции и частоты для однородного консольного стержня при кручении.

относительно его упругой оси  $I_0$  постоянны. Предполагается, далее, что упругая ось крыла совпадает с осью  $y$  и что суммарный момент инерции жесткого концевого бака относительно упругой оси равен  $\bar{I}$ .

Решение. Граничные условия, накладываемые на функцию  $\theta(y)$ , имеют вид

$$\theta(0) = 0, \quad (a)$$

$$GJ\theta'(l) = \bar{I}\omega^2\theta(l). \quad (b)$$

Решение (b) примера 3—4, применимое в случае крутильных колебаний однородного стержня, при подстановке в граничные условия (a) и (b) дает

$$D = 0, \quad (c)$$

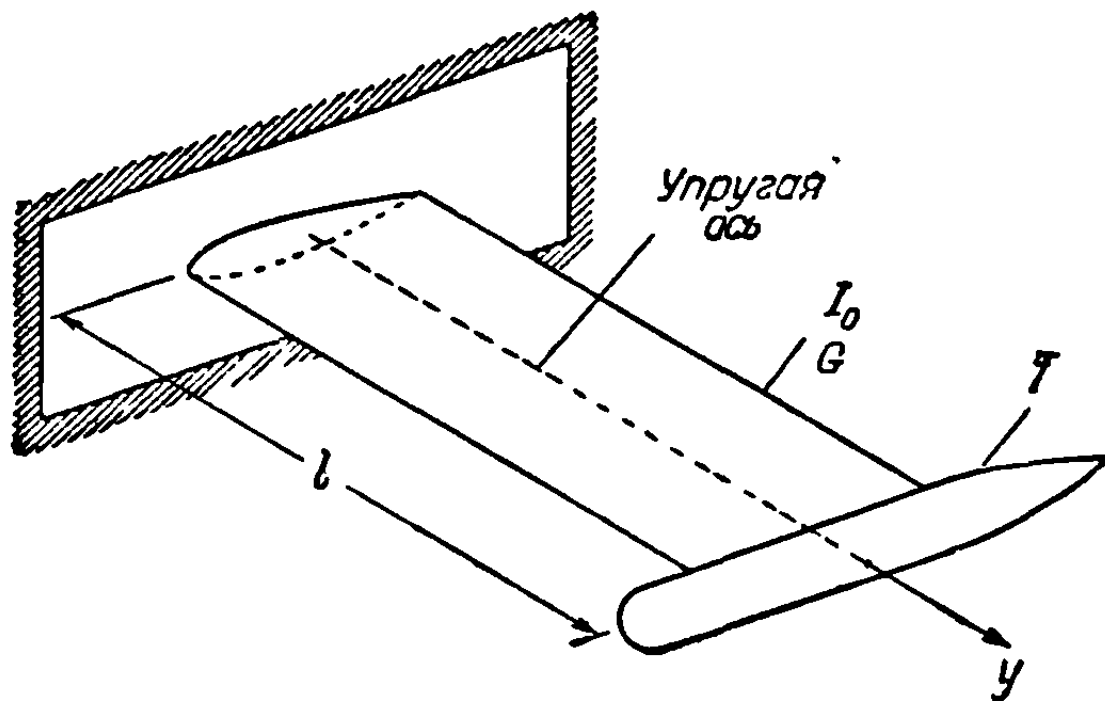
$$\frac{I_0 l}{\bar{I}} = \frac{\omega l}{a} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{a}. \quad (d)$$

Графическое решение трансцендентного частотного уравнения (d) изображено на чертеже фиг. 3-17. Этот чертеж изображает графически зависимость аргумента  $\omega l/a$  от отношения  $I_0 l/\bar{I}$ . Например, в случае консольного крыла без концевого бака следует принять  $\bar{I} = 0$ . В этом случае все различные ветви на фиг. 3-17 асимптотически приближаются к проведенным пунктиром вертикальным прямым, так что мы получаем

$$\frac{\omega l}{a} = \frac{n\pi}{2}, \quad (n = 1, 3, 5, \dots, \infty). \quad (e)$$

Этот случай уже рассмотрен в примере 3-4. Если концевой бак очень велик, так что величина  $\bar{I}$  стремится к бесконечности, то мы приближаемся к случаю однородного крыла, заделанного на обоих концах. Этот случай соответствует пересечению различных ветвей с осью абсцисс, так что

$$\frac{\omega l}{a} = n\pi, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty). \quad (f)$$

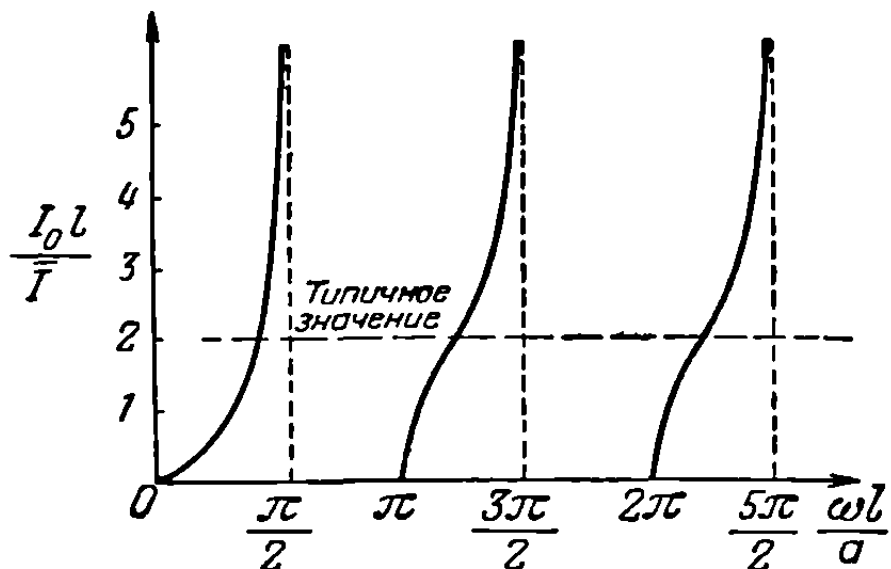


Фиг. 3-16. Однородное консольное крыло самолета с концевым баком.

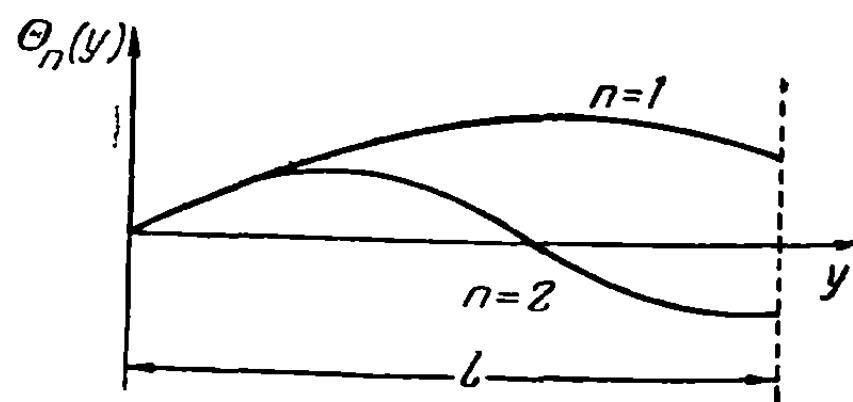
собой срезанные синусоиды, изображенные на фиг. 3-18. В общем случае нормальные функции определяются уравнением (b) примера 3-4, в котором следует положить  $D = 0$ :

$$\theta_n(y) = C \sin \frac{\omega_n}{a} y, \quad (g)$$

причем для данного частного значения параметра  $I_0 l/\bar{I}$  значения  $\omega_n$  снимаются с графика фиг. 3-18.



Фиг. 3-17. Графическое решение трансцендентного частотного уравнения для случая однородного консольного крыла с концевым баком.



Фиг. 3-18. Нормальные функции для однородного консольного крыла с концевым баком.

(b) Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Если стержень подвергается действию крутящего момента, интенсивность распределения которого зависит от времени и равна  $t(y, t)$ , то уравнение в частных производных вынужденных колебаний принимает вид

$$I_0(y) \ddot{\theta}(y, t) - [GJ(y) \theta'(y, t)]' = t(y, t). \quad (3-140)$$

Решения уравнения (3-140) получаются тем же способом, что и решения уравнения изгибных колебаний, в виде

$$\theta(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y) \xi_i(t), \quad (3-141)$$

где  $\varphi_i(y)$  представляют собой нормированные нормальные функции крутильных колебаний, удовлетворяющие заданным граничным условиям (среди которых

имеется нормальная функция, соответствующая движению балки как твердого тела, если балка не закреплена), а  $\xi_i(t)$  — нормальные координаты, определяемые решениями обыкновенных дифференциальных уравнений,

$$M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = \Xi_j, \quad (3-142)$$

где

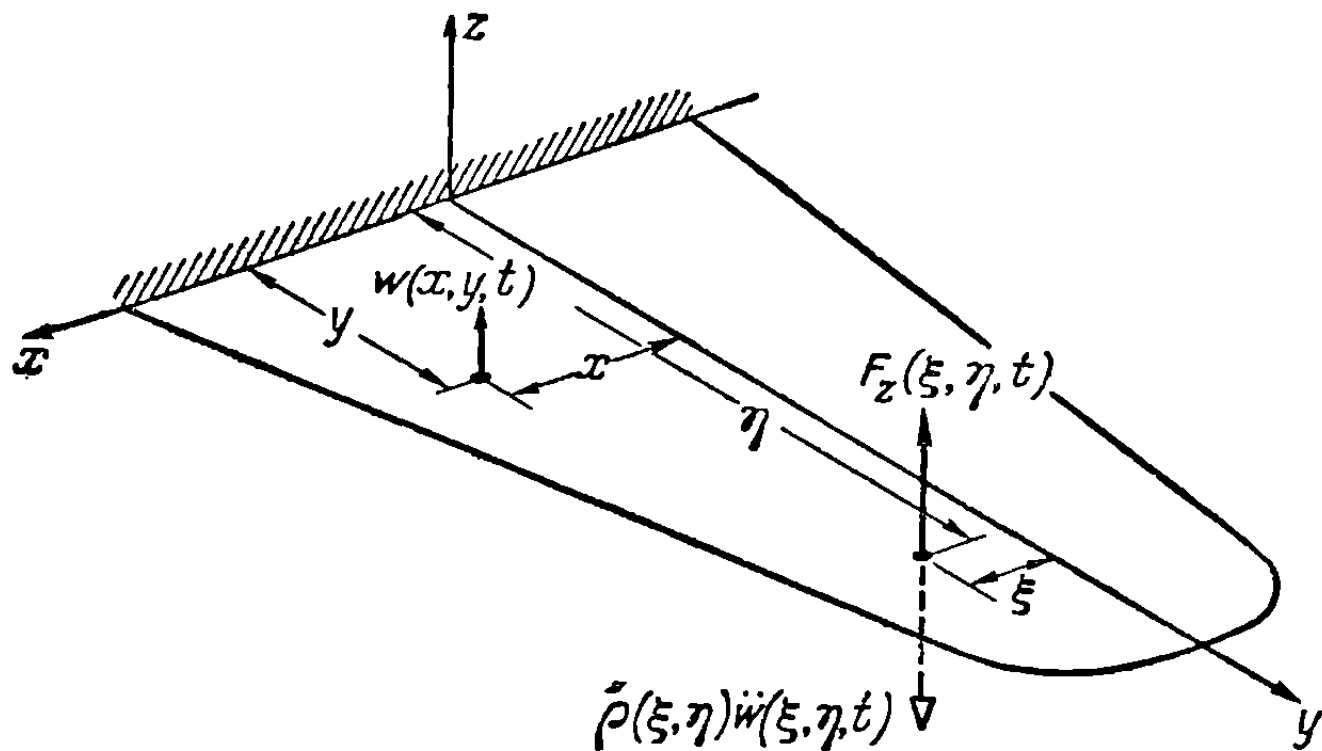
$$M_j = \int_0^l \varphi_j^2 I_0 dy$$

представляет собой обобщенную массу, а

$$\Xi_j = \int_0^l t(y, t) \varphi_j dy$$

— обобщенную силу, соответствующую  $j$ -й форме собственных крутильных колебаний.

**3-6. Динамическое равновесие закрепленного крыла самолета.** Если крыло самолета мы представим в виде некоторой упругой оболочки, толщина которой мала сравнительно с хордой и размахом (см. фиг. 3-19), то, как мы



Фиг. 3-19. Представление крыла самолета посредством упругой поверхности.

видели во второй главе, деформация крыла под действием нагрузки может быть представлена через некоторую двумерную функцию влияния. Прогиб под действием распределенной поперечной нагрузки интенсивности  $Z(x, y)$  определяется равенством (2-55), данным во второй главе,

$$w(x, y) = \iint_S C(x, y; \xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2-55)$$

где интегрирование распространяется по всей поверхности крыла. При действии поперечной динамической нагрузки  $F_z(\xi, \eta, t)$  полная поперечная нагрузка, включающая также силы инерции<sup>1)</sup>, определяется соотношением

$$Z(\xi, \eta, t) = -\rho(\xi, \eta) \ddot{w}(\xi, \eta, t) + F_z(\xi, \eta, t), \quad (3-143)$$

где  $\rho(\xi, \eta)$  представляет собой массу единицы площади крыла. Интегральное

<sup>1)</sup> Мы предполагаем крыло достаточно тонким, так что влияние инерции вращения пренебрежимо мало.

уравнение движения получится, если подставить выражение (3-143) в равенство (2-55):

$$\omega(x, y, t) = \int \int_S C(x, y; \xi, \eta) [-\rho(\xi, \eta) \ddot{w}(\xi, \eta, t) + F_z(\xi, \eta, t)] d\xi d\eta. \quad (3-144)$$

Решение уравнения (3-144) представляется через собственные функции собственных колебаний в виде

$$\omega(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x, y) \xi_i(t), \quad (3-145)$$

где  $\varphi_i(x, y)$  — нормированные нормальные функции собственных колебаний крыла, являющиеся собственными функциями однородного интегрального уравнения с двумя независимыми переменными,

$$\varphi_i(x, y) = \omega_i^2 \int \int_S C(x, y; \xi, \eta) \varphi_i(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (3-146)$$

Следуя методам, развитым выше для одномерных систем, легко можно показать, что зависимость от времени нормальных координат  $\xi_i(t)$  определяется решениями дифференциальных уравнений

$$M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = E_j \quad (j = 1, 2, \dots, \infty), \quad (3-147a)$$

где

$$M_j = \int \int_S \varphi_j^2 \rho dx dy \quad (3-147b)$$

представляет собой обобщенную массу, а

$$E_j = \int \int_S F_z(x, y, t) \varphi_j dx dy$$

— обобщенную силу, соответствующую  $j$ -й форме собственных колебаний. Это представление решения предполагает, что из уравнения (3-146) могут быть определены соответствующие собственные значения и собственные функции. Для практических форм крыла эта задача представляет большие трудности, так что обычно применяются численные приближенные решения. Эти решения подробно рассматриваются в четвертой главе.

Если мы предположим, что направленные по хорде сечения крыла являются жесткими, то уравнение (3-144) может быть приведено к паре интегральных уравнений с одной независимой переменной. В этом случае деформация крыла может быть описана кривизной сечения поверхности крыла, плоскостью  $uz$  и углом поворота относительно оси  $y$ , как это уже было рассмотрено в п. 2-9.

Внося в уравнение (3-144) выражения (2-61) и (2-62), после некоторых упрощений получаем два следующих совместных интегральных уравнения колебаний крыла:

$$\begin{aligned} \omega(y, t) = & \int_0^l C^{zz}(y, \eta) [-m(\eta) \ddot{w}(\eta, t) + S_y(\eta) \ddot{\theta}(\eta, t) + F_z(\eta, t)] d\eta + \\ & + \int_0^l C^{z\theta}(y, \eta) [-I_y(\eta) \ddot{\theta}(\eta, t) + S_y(\eta) \ddot{w}(\eta, t) + t(\eta, t)] d\eta, \end{aligned} \quad (3-148)$$

$$\begin{aligned} \theta(y, t) = & \int_0^l C^{\theta z}(y, \eta) [-m(\eta) \ddot{w}(\eta, t) + S_y(\eta) \ddot{\theta}(\eta, t) + F_z(\eta, t)] d\eta + \\ & + \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) [-I_y(\eta) \ddot{\theta}(\eta, t) + S_y(\eta) \ddot{w}(\eta, t) + t(\eta, t)] d\eta, \end{aligned} \quad (3-149)$$

где

$$\begin{aligned}
 m(\eta) &= \int_{\text{хорда}} \rho(\xi, \eta) d\xi && \text{— масса, приходящаяся на единицу длины размаха,} \\
 S_y(\eta) &= \int_{\text{хорда}} \rho(\xi, \eta) \xi d\xi && \text{— статический момент относительно оси } y \text{ на единицу длины размаха,} \\
 I_y(\eta) &= \int_{\text{хорда}} \rho(\xi, \eta) \xi^2 d\xi && \text{— момент инерции относительно оси } y \text{ на единицу длины размаха,} \\
 F_z(\eta, t) &= \int_{\text{хорда}} F_z(\xi, \eta, t) d\xi && \text{— внешняя сила на единицу длины размаха,} \\
 t(\eta, t) &= - \int_{\text{хорда}} F_z(\xi, \eta, t) \xi d\xi && \text{— внешний крутящий момент на единицу длины размаха.}
 \end{aligned}$$

Уравнения (3-148) и (3-149) взаимно связаны с помощью величин, характеризующих инерционные и упругие свойства крыла. Связь, определяющая упругие свойства, представляется функциями влияния  $C^{z\theta}(y, \eta)$  и  $C^{\theta z}(y, \eta)$ , а связь, выражающая инерционные свойства, определяется статически неуравновешенными членами  $S_y(\eta)$ . Эти уравнения могут быть применены к крыльям, которые можно считать жесткими в направлении оси  $x$ , в том числе и к стреловидным крыльям и к крыльям с вырезами. Если крыло является нестреловидным и не содержит конструктивных разрывов непрерывности, то обычно можно предположить существование упругой оси. В этом случае взаимная зависимость уравнений через упругие свойства пропадает и уравнения движения приводятся к простому виду

$$\omega(y, t) = \int_0^l C^{zz}(y, \eta) [-m(\eta) \ddot{w}(\eta, t) + S_y(\eta) \ddot{\theta}(\eta, t) + F_z(\eta, t)] d\eta, \quad (3-150)$$

$$\theta(y, t) = \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) [-I_y(\eta) \ddot{\theta}(\eta, t) + S_y(\eta) \ddot{w}(\eta, t) + t(\eta, t)] d\eta. \quad (3-151)$$

Уравнения (3-150) и (3-151) связаны между собой через инерционные свойства, и эта связь пропадает только в тех случаях, когда центр тяжести каждого хордового сечения лежит на упругой оси.

Упрощенная форма уравнений колебаний, представляемая уравнениями (3-150) и (3-151), часто возникает при динамическом исследовании крыльев с прямой упругой осью. Поскольку между изгибом и кручением нет никакого взаимодействия через упругие свойства, часто бывает более удобно оперировать с дифференциальными уравнениями, содержащими жесткость на изгиб  $EI$  и жесткость на кручение  $GJ$ , нежели с интегральными уравнениями. Дифференциальная форма уравнений движения может быть выведена более удобным образом из элементарных соображений равновесия. Как показывает фиг. 3-20, изображающая систему сил инерции и приложенных внешних сил, действующих на крыло с прямой упругой осью, суммарная сила, приходящаяся на единицу длины и включающая в себя силу инерции, представляется в виде

$$Z(y, t) = F_z(y, t) + m(y) s(y) \ddot{\theta}(y, t) - m(y) \ddot{w}(y, t), \quad (3-152)$$

а скорость изменения по  $y$  крутящего момента относительно упругой оси равна

$$T'(y, t) = -t(y, t) + s(y) [m(y) s(y) \theta(y, t) - m(y) \omega(y, t)] + I_{ц. т.}(y) \ddot{\theta}(y, t). \quad (3-153)$$

Если инерцией вращения и деформацией сдвига можно пренебречь, то эти результаты можно подставить в соотношения

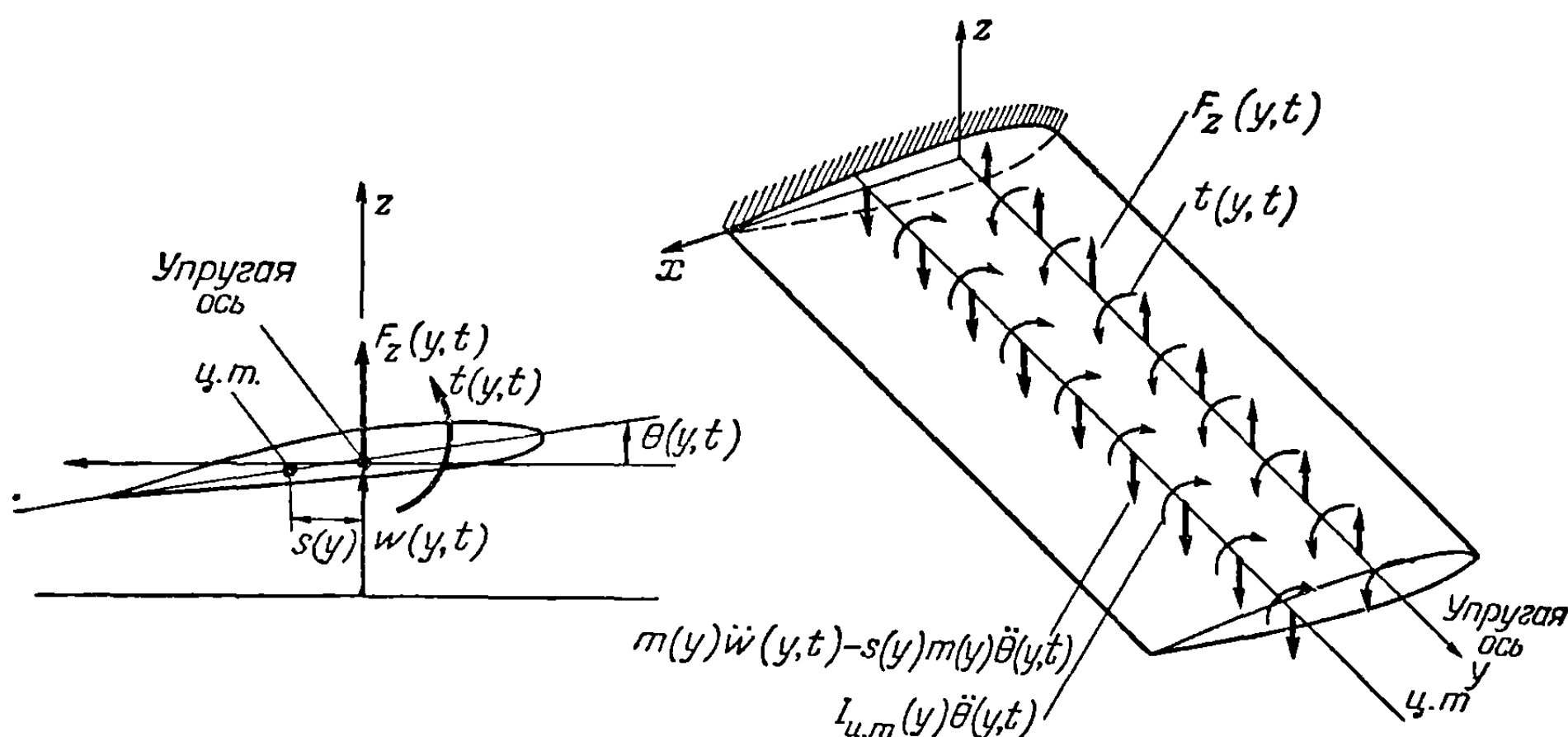
$$\begin{aligned} [EIw''(y, t)]'' &= Z(y, t), \\ [GJ\theta'(y, t)]' &= T'(y, t), \end{aligned} \quad (3-154)$$

и мы получим уравнения в частных производных динамического равновесия в виде

$$m(y)\ddot{w}(y, t) - S_y(y)\ddot{\theta}(y, t) + [EIw''(y, t)]'' = F_z(y, t), \quad (3-155)$$

$$I_y(y)\ddot{\theta}(y, t) - S_y(y)\ddot{w}(y, t) - [GJ\theta'(y, t)]' = t(y, t), \quad (3-156)$$

где  $S_y = ms$  представляет собой статический момент массы относительно упругой оси на единицу длины, а  $I_y = I_{ц.т.} + ms^2$  — момент инерции массы относительно упругой оси. Эти дифференциальные уравнения эквивалентны интегральным уравнениям (3-150) — (3-151) и в некоторых случаях более удобны для практического исследования встречающихся в действительности форм крыльев самолетов.



Фиг. 3-20. Крыло самолета с жесткими хордовыми сечениями и прямой упругой осью.

**3-7. Динамическое равновесие незакрепленного упругого самолета.** В практических задачах аэроупругости обычно самолет рассматривается в полете. Необходимо поэтому использовать как основу решения подобных задач уравнения движения незакрепленного самолета. При наиболее общем выводе этих уравнений следует, конечно, учитывать, что самолет представляет собой пространственный упругий объект, могущий свободно совершать в пространстве поступательные перемещения и вращения. Однако в нашем исследовании будет предполагаться, что самолет, как показано на фиг. 3-21, спрессован в упругую плоскую пластинку и что дополнительно к своим упругим степеням свободы он может совершать малые поступательные перемещения в вертикальном направлении, малые повороты относительно поперечной оси и малые повороты относительно продольной оси. Упругая пластинка предполагается жесткой в ее собственной плоскости. Хотя эти предположения и приводят к некоторой потере общности, они позволяют дать более сжатый вывод уравнений движения. Получающиеся в этих предположениях уравнения могут быть применены в большинстве практических задач аэроупругости, в которых рассматривается самолет в полете.

(а) *Интегральное уравнение собственных колебаний.* Деформации упругого самолета рассмотренной здесь конструкции могут быть достаточно

удобно исследованы при помощи некоторой двумерной функции влияния и соответствующего ей интегрального уравнения. Пусть оси координат расположены относительно самолета так, как это показано на фиг. 3-21. Начало системы координат расположено так, что оно всегда остается в центре тяжести деформированного самолета. Далее, оси  $x$  и  $y$  всегда совпадают с главными осями инерции деформированного самолета. Так как самолет совершает собственные колебания, оси  $x$  и  $y$  можно считать фиксированными в пространстве. Деформация описывается некоторой функцией  $w(x, y, t)$ , которая представляет собой прогиб колеблющейся упругой поверхности относительно фиксированной плоскости  $xy$ .

Необходимо получить четыре уравнения движения. Условие равновесия всех сил, действующих на самолет в направлении оси  $z$ , при отсутствии внешних сил дает соотношение

$$\int_S \ddot{w}(x, y, t) \rho(x, y) dx dy = 0, \quad (3-157)$$

где интегрирование распространяется на всю площадь поверхности самолета. Равновесие моментов сил инерции собственных колебаний относительно оси  $y$  дает соотношение

$$\int_S \ddot{w}(x, y, t) x \rho(x, y) dx dy = 0, \quad (3-158)$$

а равновесие моментов сил инерции относительно оси  $x$  дает уравнение

$$\int_S \ddot{w}(x, y, t) y \rho(x, y) dx dy = 0. \quad (3-159)$$

Четвертое уравнение равновесия, связывающее силы упругости и силы инерции, получается путем применения уравнения (2-55):

$$\begin{aligned} w(x, y, t) - w(0, 0, t) - x \frac{\partial w(0, 0, t)}{\partial x} - y \frac{\partial w(0, 0, t)}{\partial y} = \\ = - \int_S C(x, y; \xi, \eta) \rho \ddot{w} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3-160)$$

где  $w(0, 0, t)$  представляет собой прогиб, а  $\partial w(0, 0, t)/\partial x$  и  $\partial w(0, 0, t)/\partial y$  — наклоны изогнутой упругой поверхности в точке пересечения ее с осью  $z$ . Подставив решение в форме

$$w(x, y, t) = W(x, y) T(t), \quad (3-161)$$

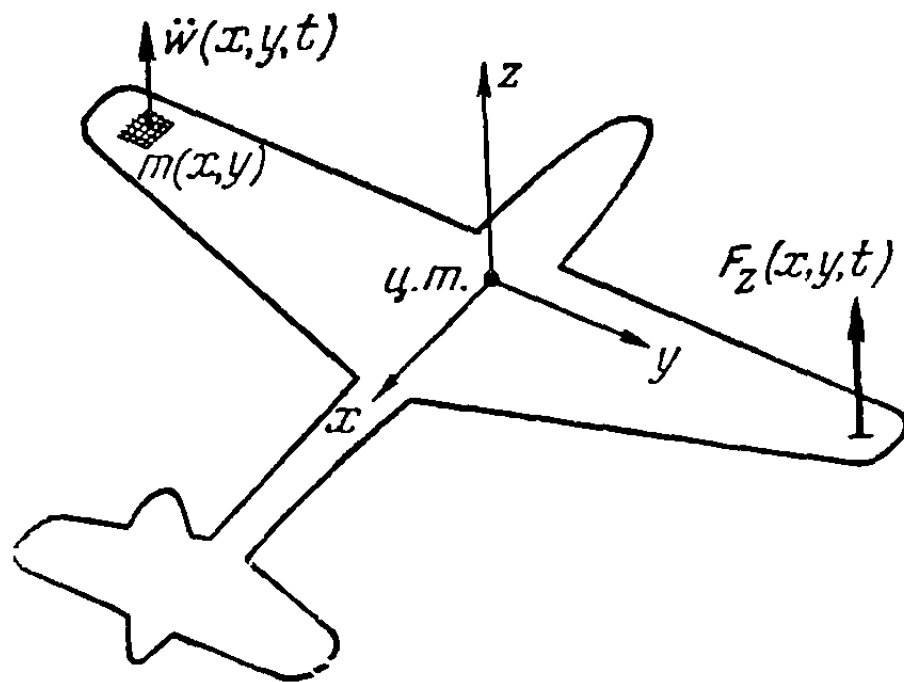
мы приведем уравнения движения к виду

$$\int_S W(x, y) \rho(x, y) dx dy = 0, \quad (3-162)$$

$$\int_S W(x, y) x \rho(x, y) dx dy = 0, \quad (3-163)$$

$$\int_S W(x, y) y \rho(x, y) dx dy = 0, \quad (3-164)$$

$$\begin{aligned} T \left\{ W(x, y) - W(0, 0) - x \frac{\partial W(0, 0)}{\partial x} - y \frac{\partial W(0, 0)}{\partial y} \right\} = \\ = - \ddot{T} \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) W(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3-165)$$



Фиг. 3-21. Незакрепленный упругий самолет.



Переменные в уравнении (3-165) разделяются, и мы приходим к двум уравнениям:

$$\omega^2 \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = W(x, y) - W(0, 0) - x \frac{\partial W(0, 0)}{\partial x} - y \frac{\partial W(0, 0)}{\partial y}, \quad (3-166a)$$

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (3-166b)$$

где  $\omega^2$  представляет собой постоянную, появляющуюся при разделении переменных. Физически эта постоянная представляет собой квадрат частоты, соответствующей рассматриваемому тону собственных колебаний.

Уравнения (3-162), (3-163), (3-164) и (3-166a) могут быть объединены в одно уравнение, из которого исключены величины  $W(0, 0)$ ,  $\partial W(0, 0)/\partial x$ ,  $\partial W(0, 0)/\partial y$  (см. [3—8]). Умножая обе части уравнения (3-166a) на  $\rho(x, y)$  и интегрируя по всей поверхности самолета, получаем

$$\omega^2 \int_S \int \rho(x, y) \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta dx dy = \\ = \int_S \int W(x, y) \rho(x, y) dx dy - W(0, 0) \int_S \int \rho(x, y) dx dy - \\ - \frac{\partial W(0, 0)}{\partial x} \int_S \int x \rho(x, y) dx dy - \frac{\partial W(0, 0)}{\partial y} \int_S \int y \rho(x, y) dx dy. \quad (3-167)$$

Заметим, что в силу уравнения (3-162) первый интеграл правой части последнего уравнения равен нулю. Третий и четвертый интегралы правой части равны нулю, так как начало координат, по определению, совпадает с центром тяжести. Полученное уравнение можно разрешить относительно  $W(0, 0)$ ; в результате получим

$$W(0, 0) = - \frac{\omega^2}{M} \int_S \int \rho(x, y) \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta dx dy. \quad (3-168)$$

Умножая уравнение (3-166a) на  $x\rho(x, y)$  и интегрируя по поверхности, получаем

$$\omega^2 \int_S \int x \rho(x, y) \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta dx dy = \\ = \int_S \int W(x, y) x \rho(x, y) dx dy - W(0, 0) \int_S \int x \rho(x, y) dx dy - \frac{\partial W(0, 0)}{\partial x} \times \\ \times \int_S \int x^2 \rho(x, y) dx dy - \frac{\partial W(0, 0)}{\partial y} \int_S \int x y \rho(x, y) dx dy. \quad (3-169)$$

Вследствие уравнения (3-163) первый интеграл правой части уравнения (3-169) обращается в нуль. Второй интеграл обращается в нуль, так как начало координат совпадает с центром тяжести самолета. Четвертый интеграл обращается в нуль, поскольку плоскость  $xz$  представляет собой плоскость симметрии. Таким образом, получающееся уравнение может быть разрешено относительно  $\partial W(0, 0)/\partial x$ , и мы будем иметь

$$\frac{\partial W(0, 0)}{\partial x} = - \frac{\omega^2}{I_y} \int_S \int x \rho(x, y) \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta dx dy, \quad (3-170)$$

где

$$I_y = \int \int_S x^2 \rho(x, y) dx dy.$$

Наконец, умножая уравнение (3-166а) на  $y\rho(x, y)$  и интегрируя по поверхности, можно аналогичным образом привести получающийся результат к виду

$$\frac{\partial W(0, 0)}{\partial y} = -\frac{\omega^2}{I_x} \int \int_S y\rho(x, y) \int \int_S C(x, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta dx dy, \quad (3-171)$$

где

$$I_x = \int \int_S y^2 \rho(x, y) dx dy.$$

Если подставить выражения (3-168), (3-170) и (3-171) в уравнение (3-166а), то мы получим однородное линейное интегральное уравнение относительно функции  $W(x, y)$  в следующем виде:

$$\omega^2 \int \int_S G(x, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta = W(x, y), \quad (3-172)$$

где

$$G(x, y; \xi, \eta) = C(x, y; \xi, \eta) - \int \int_S C(r, s; \xi, \eta) \left[ \frac{1}{M} + \frac{yr}{I_x} + \frac{xs}{I_y} \right] \rho(r, s) dr ds, \quad (3-173)$$

а  $G(x, y; \xi, \eta)$  представляет собой функцию влияния для незакрепленного самолета, которая, если известны упругие и инерционные характеристики самолета, может быть получена из решения уравнения (3-173). Уравнение (3-172) удовлетворяется бесконечным числом пар функций собственных колебаний  $W_j(x, y)$  и частот  $\omega_j$ , соответствующих деформациям самолета. В частном случае балки уравнения (3-172) и (3-173) приводятся к уравнениям, уже рассмотренным в п. 3-3 (b).

Хотя функция влияния  $G(x, y; \xi, \eta)$  не является симметричной функцией, можно показать, что функции собственных колебаний незакрепленного самолета ортогональны между собой. Для двух различных нормальных функций, соответствующих индексам  $m$  и  $n$ , можно написать соотношения

$$\omega_n^2 \int \int_S G(x, y; \xi, \eta) W_n(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta = W_n(x, y) \quad (3-174)$$

$$\omega_m^2 \int \int_S G(x, y; \xi, \eta) W_m(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta = W_m(x, y). \quad (3-175)$$

Умножая уравнения (3-174) и (3-175) соответственно на  $W_m\rho(x, y)$  и  $W_n\rho(x, y)$  и интегрируя по всей поверхности, получаем

$$\frac{1}{\omega_n^2} \int \int_S W_n W_m \rho dx dy = \int \int_S W_m \rho \left[ \int \int_S G W_n \rho d\xi d\eta \right] dx dy, \quad (3-176)$$

$$\frac{1}{\omega_m^2} \int \int_S W_m W_n \rho dx dy = \int \int_S W_n \rho \left[ \int \int_S G W_m \rho d\xi d\eta \right] dx dy. \quad (3-177)$$

Меняя порядок интегрирования в правой части уравнения (3-177), в результате будем иметь

$$\frac{1}{\omega_m^2} \int_S \int W_m W_n \rho dx dy = \int_S \int W_m(x, y) \rho(x, y) \left[ \int_S \int G(\xi, \eta; x, y) W_n(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] dx dy. \quad (3-178)$$

На основании равенства (3-173) может быть построено следующее выражение для функции влияния:

$$G(\xi, \eta; x, y) = G(x, y; \xi, \eta) + \int_S \int C(r, s; \xi, \eta) \left[ \frac{1}{M} + \frac{yr}{I_x} + \frac{xs}{I_y} \right] \rho(r, s) dr ds - \int_S \int C(r, s; x, y) \left[ \frac{1}{M} + \frac{\eta r}{I_x} + \frac{\xi s}{I_y} \right] \rho(r, s) dr ds. \quad (3-179)$$

Внося выражение (3-179) в соотношение (3-178) и используя уравнения (3-162), (3-163) и (3-164), получаем

$$\frac{1}{\omega_m^2} \int_S \int W_m W_n \rho dx dy = \int_S \int W_m \rho \left[ \int_S \int G W_n \rho d\xi d\eta \right] dx dy. \quad (3-180)$$

Так как правые части уравнений (3-176) и (3-180) тождественны, то мы можем получить соотношение

$$\left( \frac{1}{\omega_m^2} - \frac{1}{\omega_n^2} \right) \int_S \int W_m W_n \rho dx dy = 0. \quad (3-181)$$

При  $m \neq n$  это соотношение приводится к условию ортогональности

$$\int_S \int W_m W_n \rho dx dy = 0. \quad (3-182)$$

Можно сказать, что процесс получения интегрального уравнения колебаний свободного незакрепленного самолета (3-172) представляет собой процесс „выметания“ нормальных функций, соответствующих движению самолета как твердого тела. Эти нормальные функции, соответствующие движению самолета как твердого тела, могут быть представлены в следующем виде:

а) нормальная функция, соответствующая перемещению начала координат вдоль оси  $z$ ,

$$W_1(x, y) = C_1, \quad (3-183)$$

б) нормальная функция, соответствующая малому вращению системы осей относительно оси  $y$ ,

$$W_2(x, y) = C_2 x, \quad (3-184)$$

с) нормальная функция, соответствующая малому вращению системы осей относительно оси  $x$ ,

$$W_3(x, y) = C_3 y. \quad (3-185)$$

Можно отметить, что в сделанных нами предположениях самолет имеет три формы колебаний, отвечающие нулевой частоте, определяемые соотношениями (3-183), (3-184) и (3-185) и соответствующие движению системы как твердого тела, и бесконечное число форм колебаний, отвечающих конечной частоте и определяемых решениями уравнения (3-172). Важно отметить, что условие ортогональности, определяемое соотношением (3-182) и полученное рассмотрением одних только форм колебаний, соответствующих деформации

самолета, охватывает также формы колебаний, соответствующие движению самолета как твердого тела. Это означает, что нормальные функции, соответствующие движению самолета как твердого тела, ортогональны друг другу и ортогональны нормальным функциям, соответствующим деформациям самолета. Это обстоятельство, которое может быть проверено посредством простой подстановки, имеет место в силу предположения, что система осей  $xuz$  представляет собой главную центральную систему осей деформированного самолета.

(b) *Представление вынужденных колебаний через нормальные формы колебаний.* Решение задачи о вынужденных движениях незакрепленного самолета может быть выражено через нормальные функции колебаний свободного незакрепленного самолета. Рассмотрим вначале, для простоты, вынужденное движение упругого самолета, который свободно может перемещаться в вертикальном направлении, но не может поворачиваться ни относительно продольной, ни относительно поперечной осей. Обозначая приложенную динамическую силу, приходящуюся на единицу площади самолета, через  $F_z(x, y, t)$ , вследствие равновесия всех сил, действующих на самолет в направлении оси  $z$ , получаем соотношение

$$\int_S \ddot{w}(x, y, t) \rho(x, y) dx dy = \int_S F_z(x, y, t) dx dy. \quad (3-186)$$

Используя уравнение (2-55) и предположение о том, что самолет может свободно совершать вертикальные перемещения, приходим к следующему уравнению равновесия, связывающему внешние, упругие и инерционные силы:

$$w(x, y, t) - w(0, 0, t) = - \int_S C(x, y; \xi, \eta) [\rho(\xi, \eta) \ddot{w}(\xi, \eta, t) - F_z(\xi, \eta, t)] d\xi d\eta. \quad (3-187)$$

При рассмотрении вынужденных движений незакрепленного самолета удобно использовать понятие форм колебаний, соответствующих движению самолета как твердого тела. Для настоящего примера это означает, что суммарное перемещение самолета складывается из поступательного перемещения плоскости  $xu$  в направлении оси  $z$ , т. е. поступательного перемещения вместе с центром тяжести, и упругой деформации относительно плоскости  $xu$ . Таким образом, мы представляем суммарное перемещение относительно любой подходящим образом выбранной горизонтальной плоскости отсчета в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x, y) \xi_i(t), \quad (3-188)$$

где поступательное перемещение плоскости  $xu$  определяется нормальной функцией, соответствующей движению самолета как твердого тела и отвечающей нулевой частоте,

$$\varphi_1(x, y) = 1, \quad \omega_1 = 0, \quad (3-189)$$

а упругая деформация относительно перемещающейся плоскости  $xu$  определяется наложением нормальных форм колебаний, отвечающих конечным значениям частоты,

$$\begin{array}{cc} \varphi_2(x, y) & \cdot \quad \omega_2 \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_{\infty}(x, y) & \omega_{\infty} \end{array} \quad (3-190)$$

Очевидно, что функция прогиба  $w(x, y, t)$  имеет в случае вынужденного движения другой смысл, отличный от того, какой эта функция имеет

в случае собственных колебаний, рассмотренном в предыдущем пункте. В случае собственных колебаний  $w(x, y, t)$  обозначает смещение относительно главных осей инерции, которые можно считать неподвижными в пространстве, тогда как в случае вынужденного движения  $w(x, y, t)$  представляет полное перемещение упругой поверхности, которое, вообще говоря, может включать в себя малое вертикальное поступательное перемещение системы главных осей инерции и малые повороты этой системы относительно поперечной и продольной осей самолета.

Из рассуждений предыдущего пункта видно, что для настоящего примера функции  $\varphi_2(x, y), \dots, \varphi_\infty(x, y)$  представляют собой решения однородных уравнений

$$\omega_i^2 \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) \varphi_i(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta = \varphi_i(x, y) - \varphi_i(0, 0),$$

$$(i = 2, 3, \dots, \infty), \quad (3-191)$$

при дополнительных условиях

$$\int_S \int \varphi_i \rho(x, y) dx dy = 0. \quad (3-192)$$

Внося в уравнение (3-186) выражение (3-188) и используя уравнения (3-189) и (3-192), получаем

$$\ddot{\xi}_1 \int_S \int \rho(x, y) dx dy = M \ddot{\xi}_1 = \int_S \int F_z(x, y, t) dx dy, \quad (3-193)$$

где  $M$  — масса самолета.

Подставив в уравнение (3-187) формулу (3-188) и положив  $\varphi_1(x, y) = \varphi_1(0, 0)$ , найдем

$$\sum_{i=2}^{\infty} [\varphi_i(x, y) - \varphi_i(0, 0)] \xi_i =$$

$$= - \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) \left[ \rho(\xi, \eta) \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(\xi, \eta) \ddot{\xi}_i - F_z(\xi, \eta, t) \right] d\xi d\eta. \quad (3-194)$$

Используя уравнение (3-191), можно привести уравнение (3-194) к виду

$$\sum_{i=2}^{\infty} [\varphi_i(x, y) - \varphi_i(0, 0)] \xi_i + \sum_{i=2}^{\infty} [\varphi_i(x, y) - \varphi_i(0, 0)] \frac{\ddot{\xi}_i}{\omega_i^2} =$$

$$= - \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) [\rho(\xi, \eta) \ddot{\xi}_1 - F_z(\xi, \eta, t)] d\xi d\eta. \quad (3-195)$$

Умножая обе части этого уравнения на  $\varphi_j(x, y) \rho(x, y)$ , интегрируя по всей площади  $S$  и используя условие ортогональности, получаем

$$M_j \left( \frac{\ddot{\xi}_j}{\omega_j^2} + \xi_j \right) = \int_S \int \varphi_j(x, y) \rho(x, y) \times$$

$$\times \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) [F_z(\xi, \eta, t) - \rho(\xi, \eta) \ddot{\xi}_1] d\xi d\eta dx dy, \quad (3-196)$$

где

$$M_j = \int_S \int \varphi_j^2(x, y) \rho(x, y) dx dy.$$

Полагая  $C(x, y; \xi, \eta) = C(\xi, \eta; x, y)$ , мы можем привести уравнение (3-196) к виду

$$M_j \left( \frac{\ddot{\xi}_j}{\omega_j^2} + \xi_j \right) = \int_S \int [F_z(x, y, t) - \rho(x, y) \ddot{\xi}_1] \times \\ \times \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) \varphi_j(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta dx dy. \quad (3-197)$$

Далее, правую часть уравнения (3-197) можно упростить, используя условие (3-192):

$$M_j \left( \frac{\ddot{\xi}_j}{\omega_j^2} + \xi_j \right) = \frac{1}{\omega_j^2} \int_S \int [F_z(x, y, t) - \rho(x, y) \ddot{\xi}_1] [\varphi_j(x, y) - \varphi_j(0, 0)] dx dy. \quad (3-198)$$

Разлагая правую часть и используя уравнения (3-192) и (3-193), получаем окончательно

$$M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = \int_S \int F_z(x, y, t) \varphi_j(x, y) dx dy, \quad (j = 2, 3, \dots, \infty). \quad (3-199)$$

Система уравнений движения упругого самолета, могущего совершать вертикальные перемещения, состоит из одного уравнения, описывающего вертикальное перемещение центра тяжести,

$$M_1 \ddot{\xi}_1 = \Xi_1, \quad (3-200)$$

и бесконечной системы уравнений, описывающих перемещения, соответствующие формам собственных колебаний конечной частоты,

$$M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = \Xi_j, \quad (j = 2, 3, \dots, \infty). \quad (3-201)$$

Входящие в уравнения (3-200) и (3-201) обобщенная масса и обобщенная сила получаются из следующих соотношений:

$$M_j = \int_S \int \varphi_j^2(x, y) \rho(x, y) dx dy, \quad (3-202)$$

$$\Xi_j = \int_S \int F_z(x, y, t) \varphi_j(x, y) dx dy.$$

Приведенный выше вывод может быть распространен на случай возможности малых угловых смещений относительно продольной и поперечной осей самолета посредством введения следующих дополнительных форм колебаний нулевой частоты и соответствующих нормальных функций:

$$\begin{aligned} \text{а) (вращение относительно поперечной оси) } \varphi_2 = -x, \quad \omega_2 = 0; \\ \text{б) (вращение относительно продольной оси) } \varphi_3 = +y, \quad \omega_3 = 0. \end{aligned} \quad (3-203)$$

Вывод, аналогичный изложенному выше, приводит в более общем случае, когда допустимы вертикальное поступательное перемещение самолета и его вращение относительно поперечной и продольной осей, к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{\xi}_1 = \Xi_1, \quad M_2 \ddot{\xi}_2 = \Xi_2, \quad M_3 \ddot{\xi}_3 = \Xi_3, \\ M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = \Xi_j, \quad (j = 4, 5, \dots, \infty), \end{aligned} \quad (3-204)$$

где  $M_j$  и  $\Xi_j$  определяются равенствами (3-202). Можно показать, что обобщенная масса  $M_1$  в уравнениях (3-204) представляет собой массу самолета, а  $\xi_1$  —

вертикальное перемещение. Аналогично,  $M_2$  и  $M_3$  представляют собой моменты инерции относительно поперечной и продольной осей, а  $\xi_2$  и  $\xi_3$  — малые угловые перемещения относительно тех же осей.

**3-8. Энергетические методы.** Предыдущие разделы этой главы представляли собой иллюстрацию некоторого общего метода вычисления реакции конструкции на динамическую нагрузку. Этот метод основан на принципе Даламбера, используемом совместно с уравнениями равновесия. Несколько другой и в ряде случаев более удобный подход получается при применении энергетических методов. Энергетические методы могут быть применены для построения уравнений равновесия, которые получаются как следствие обращения в нуль вариации некоторых выражений работы или энергии. Это осуществляется тем же самым способом, который уже применялся для задач статики в п. 2-11. Таким образом, уравнения равновесия непосредственно получаются из выражений работы и энергии, так что применение этих уравнений в явной форме не является необходимым.

(а) *Применение принципа виртуальной работы к динамическим задачам.* Основой энергетических методов является принцип виртуальной работы, рассмотренный в п. 2-11 (а). Применяя принцип виртуальной работы к динамическим задачам, мы поступаем в точности так, как в случае применения этого принципа к статическим задачам, за исключением того, что теперь мы пользуемся принципом Даламбера и наряду с заданными внешними силами вводим в рассмотрение силы инерции. Таким образом, мы получаем следующую формулировку принципа виртуальной работы применительно к динамическим задачам:

$$\delta W_e + \delta W_{ин.} = \delta U, \quad (3-205)$$

где  $\delta W_{ин.}$  представляет собой виртуальную работу сил инерции на некотором произвольном виртуальном перемещении системы.

(б) *Уравнения Лагранжа.* Можно получить иную, правда, несколько более частную форму принципа виртуальной работы, называемую уравнениями Лагранжа<sup>1)</sup>. Эти уравнения применимы к системам, пространственная конфигурация которых может быть описана некоторой совокупностью дискретных обобщенных координат. Во второй главе в связи со статическими задачами мы видели, что обобщенные координаты суть независимые координаты, изменения которых представляют собой возможные перемещения системы. Таким образом, при применении принципа виртуальной работы, оказывается возможным удовлетворить требованию, чтобы каждой обобщенной координате можно было дать некоторое виртуальное приращение  $\delta q_i$ , не изменяя значений других координат и не нарушая геометрических связей, наложенных на систему. В динамических задачах аэроупругости обычно оказывается возможным выбрать такие координаты. Системы, которые могут быть описаны при помощи обобщенных координат, часто называются *голономными* системами<sup>2)</sup>.

Для вывода уравнений Лагранжа рассмотрим незакрепленное трехмерное непрерывное упругое тело, на которое действуют аэродинамические давления, распределенные по его внешней поверхности. Предположим, что под действием этих аэродинамических давлений тело относительно некоторой фиксированной в пространстве системы осей получает малые смещения  $u(x, y, z, t)$ ,  $v(x, y, z, t)$  и  $w(x, y, z, t)$ . Пусть распределенное по поверхности аэродинамическое давление  $F_s(x, y, z, t)$  имеет компоненты  $F_x(x, y, z, t)$ ,  $F_y(x, y, z, t)$  и  $F_z(x, y, z, t)$ . Тогда виртуальная работа внешних сил на произвольных виртуальных пере-

<sup>1)</sup> Принцип виртуальной работы представляет собой основу принципа Гамильтона (см. [3—9]), применимого как к непрерывным системам, так и к системам, описываемым некоторым числом дискретных координат.

<sup>2)</sup> Если связи, налагаемые на систему, таковы, что это оказывается невозможным, система называется неголономной. Подобные системы мы здесь не рассматриваем.



мещениях  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  будет определяться выражением

$$\delta W_e = \int_S (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) dS, \quad (3-206)$$

где интегрирование распространяется по всей поверхности тела. Если распределение плотности представляется функцией  $\rho(x, y, z)$ , то виртуальная работа сил инерции определяется выражением

$$\delta W_{\text{ин.}} = - \int_V \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dV, \quad (3-207)$$

где интегрирование распространяется по всему объему тела. Обозначая энергию деформации, приходящуюся на единицу объема (плотность энергии деформации) символом  $U_0(x, y, z)$ , мы можем символически выразить изменение внутренней энергии деформации следующим образом:

$$\delta U = \int_V \delta U_0 dV. \quad (3-208)$$

Предположим далее, что любое перемещение тела может быть выражено при помощи некоторой совокупности  $n$  дискретных обобщенных координат. Таким образом, мы можем в принципе записать следующие формулы преобразования:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u(x, y, z, q_1, q_2, \dots, q_n), \\ v(x, y, z, t) &= v(x, y, z, q_1, q_2, \dots, q_n), \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, z, q_1, q_2, \dots, q_n), \end{aligned} \quad (3-209)$$

где обобщенные координаты являются функциями времени.

Внося в уравнение (3-206) выражения (3-209), получим выражение виртуальной работы внешних сил в следующем виде:

$$\delta W_e = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad (3-210)$$

где

$$Q_i = \int_S \left( F_x \frac{\partial u}{\partial q_i} + F_y \frac{\partial v}{\partial q_i} + F_z \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) dS \quad (3-211)$$

представляет собой обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате  $q_i$ .

Подстановка в уравнение (3-207) выражения (3-209) дает

$$\delta W_{\text{ин.}} = - \sum_{i=1}^n \int_V \rho \left( \ddot{u} \frac{\partial u}{\partial q_i} + \ddot{v} \frac{\partial v}{\partial q_i} + \ddot{w} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) dV \delta q_i. \quad (3-212)$$

Уравнение (3-212) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ин.}} &= - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \int_V \rho \left( \dot{u} \frac{\partial u}{\partial q_i} + \dot{v} \frac{\partial v}{\partial q_i} + \dot{w} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) dV \delta q_i + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_V \rho \left( \dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial q_i} + \dot{v} \frac{\partial \dot{v}}{\partial q_i} + \dot{w} \frac{\partial \dot{w}}{\partial q_i} \right) dV \delta q_i. \end{aligned} \quad (3-213)$$

Уравнение (3-213) можно упростить, введя кинетическую энергию тела, определяемую выражением

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV. \quad (3-214)$$

Из уравнения (3-214) мы видим, что

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \int_V \rho \left( \dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{v} \frac{\partial \dot{v}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{w} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \dot{q}_i} \right) dV, \quad (3-215)$$

и так как, например,

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \frac{\partial u}{\partial q_i}, \quad (3-216)$$

то уравнение (3-215) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \int_V \rho \left( \dot{u} \frac{\partial u}{\partial q_i} + \dot{v} \frac{\partial v}{\partial q_i} + \dot{w} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) dV. \quad (3-217)$$

Кроме того, можно показать, что

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \int_V \rho \left( \dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial q_i} + \dot{v} \frac{\partial \dot{v}}{\partial q_i} + \dot{w} \frac{\partial \dot{w}}{\partial q_i} \right) dV. \quad (3-218)$$

Внося в уравнение (3-213) соотношения (3-217) и (3-218), получаем следующее выражение виртуальной работы сил инерции через кинетическую энергию тела:

$$\delta W_{\text{ин.}} = - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (3-219)$$

Поскольку энергия деформации на единицу объема также может быть выражена через обобщенные координаты, то уравнение (3-208) может быть записано в виде

$$\delta U = \int_V \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial U_0}{\partial q_i} \delta q_i \right) dV = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (3-220)$$

где

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \int_V U_0 dV.$$

Подставив в уравнение виртуальной работы (3-205) выражения (3-210), (3-219) и (3-220), получим соотношение:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ Q_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right\} \delta q_i = 0, \quad (3-221)$$

которое, в силу того что  $\delta q_i$  представляют собой независимые произвольные конечные величины, эквивалентно системе уравнений вида

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3-222)$$

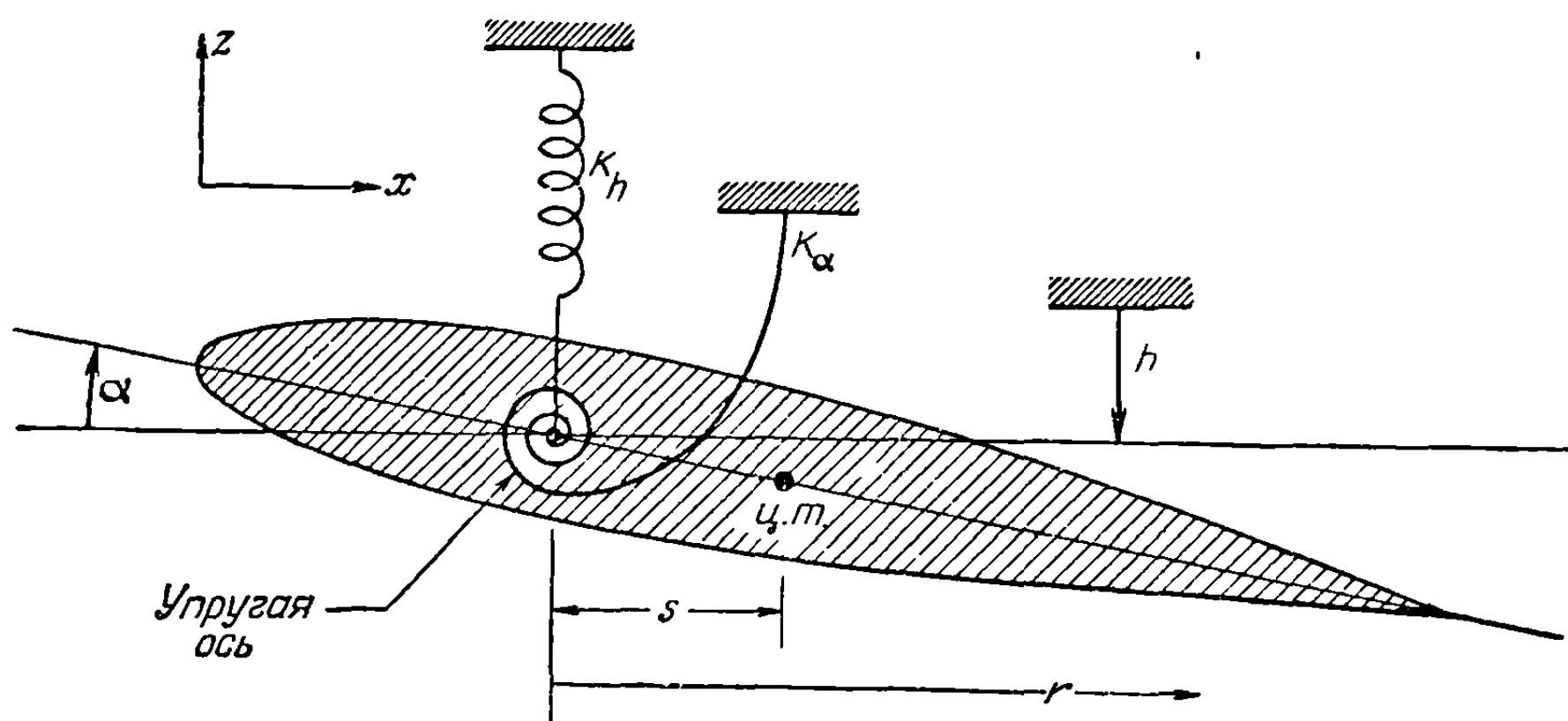
Эти уравнения называются уравнениями движения в форме Лагранжа. Уравнение (3-221) можно рассматривать в качестве замены более фундаментального принципа виртуальной работы как средства получения уравнений равновесия системы, конфигурация которой может быть определена с помощью некоторой системы дискретных обобщенных координат<sup>1)</sup>. В предыдущих рассуждениях мы

<sup>1)</sup> Очевидно, что уравнения Лагранжа играют ту же самую роль в задачах динамики, что и уравнения (2-97) в задачах статики. В самом деле, последние уравнения могут рассматриваться как частный случай уравнений Лагранжа, соответствующий кинетической энергии, равной нулю.

для простоты предполагали, что любое перемещение тела может быть выражено через некоторую совокупность  $n$  дискретных обобщенных координат. В общем случае это предположение для непрерывных систем не вполне верно, и для получения точного решения следует рассматривать некоторую полную систему функций, удовлетворяющих граничным условиям, при этом и число  $n$  должно бесконечно возрастать. Если эти последние условия выполняются, то уравнения Лагранжа представляют собой основу для получения точного решения, выражаемого через счетное бесконечное множество обобщенных координат. Однако если  $n$  остается конечным, то рассматриваемый метод дает лишь приближенное решение и степень точности этого приближения всецело зависит от выбора обобщенных координат. Для систем с сосредоточенными параметрами, обладающих  $n$  степенями свободы, уравнения Лагранжа дают точные дифференциальные уравнения равновесия.

Уравнения Лагранжа находят широкое применение в динамических задачах аэроупругости. Первое основное применение их, на которое следовало бы обратить внимание, состоит в выводе точных дифференциальных уравнений систем с сосредоточенными параметрами. Оно будет проиллюстрировано в нижеследующем п. 3-8 (с). Второе основное применение их состоит в выводе дифференциальных уравнений равновесия, соответствующих непрерывным системам. Эти уравнения могут быть точными только в том случае, если  $n$  бесконечно возрастает. Эта особенность уравнений Лагранжа иллюстрирована в п. 3-8 (d). Приближенные результаты, получаемые с помощью конечного числа  $n$ , представляют собой основу для метода Рэлея—Ритца в применении к динамическим задачам. Это последнее, быть может наиболее важное, применение уравнений Лагранжа описывается в п. 3-10.

(с) Уравнения Лагранжа в применении к системам с сосредоточенными параметрами. В качестве иллюстрации применения уравнений Лагранжа к системам с сосредоточенными параметрами рассмотрим, например, систему, состоящую из закрепленного на пружинах жесткого элемента крыла, изображенного



Фиг. 3-22. Жесткий элемент крыла, закрепленный на пружинах.

на фиг. 3-22. Если элемент крыла может совершать *малые* вертикальные и угловые смещения, то в качестве обобщенных координат, описывающих смещенную конфигурацию системы<sup>1)</sup>, удобно выбрать координаты  $h$  и  $\alpha$ . Таким

<sup>1)</sup> Очевидно, что каждая из этих координат может независимо изменяться без нарушения геометрических связей, налагаемых на систему. Это означает, что эти координаты не связаны между собой никакими уравнениями связи. Можно показать (см [3—9]), что это и есть наименьшее возможное число координат, полностью описывающих конфигурацию системы. Такое число часто называется числом степеней свободы системы

образом, уравнения преобразования, соответствующие уравнениям (3-209) и связывающие перемещение крыла и обобщенные координаты, имеют вид

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = h - r\alpha, \quad (3-223)$$

где  $r$  — текущая координата, отсчитываемая вдоль хорды профиля; положительным направлением считается направление от упругой оси к задней кромке сечения. Кинетическая энергия элемента крыла получается применением уравнения (3-214):

$$T = \frac{1}{2} \int_{\text{хорда}} \dot{w}^2 dm = \frac{1}{2} \int_{\text{хорда}} (\dot{h} + r\dot{\alpha})^2 dm. \quad (3-224)$$

Интегрирование уравнения (3-224) приводит к некоторой квадратичной функции скоростей  $\dot{h}$  и  $\dot{\alpha}$  следующего вида:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{h}^2 + \frac{1}{2} I_\alpha \dot{\alpha}^2 + S_\alpha \dot{\alpha} \dot{h}, \quad (3-225)$$

где

$m$  — масса элемента крыла,

$I_\alpha$  — момент инерции массы элемента крыла относительно упругой оси и

$S_\alpha = ms$  — статический момент массы элемента крыла относительно упругой оси.

Если жесткости пружин, воспринимающих растяжение и кручение, соответственно равны  $K_h$  и  $K_\alpha$ , то энергия деформации определяется выражением

$$U = \frac{1}{2} K_h h^2 + \frac{1}{2} K_\alpha \alpha^2. \quad (3-226)$$

Уравнения Лагранжа применительно к рассматриваемой задаче записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{h}} \right) + \frac{\partial U}{\partial h} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0. \quad (3-227)$$

Следует заметить, что члены вида  $\partial T / \partial q_i$  в эти уравнения не вошли, поскольку в рассматриваемом примере  $T$  является функцией одних только скоростей. Подставив в уравнения (3-227) выражения (3-225) и (3-226), получим уравнения движения в следующем виде:

$$m \ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + K_h h = 0, \quad S_\alpha \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + K_\alpha \alpha = 0. \quad (3-228)$$

В ряде случаев, в частности при исследовании флаттера, уравнения (3-228) удобно записывать через частоты независимых форм колебаний. Рассматриваемая система разбивается на независимые уравнения, если коэффициент  $S_\alpha$  в членах, обуславливающих инерционное взаимодействие элементов системы, положить равным нулю. Таким образом, найдем

$$m \ddot{h} + K_h h = 0, \quad I_\alpha \ddot{\alpha} + K_\alpha \alpha = 0. \quad (3-229)$$

Беря решения в виде

$$h = h_0 \sin \omega_h t, \quad \alpha = \alpha_0 \sin \omega_\alpha t, \quad (3-230)$$

получаем следующие выражения для частот собственных отдельных колебаний

$$\omega_h = \sqrt{\frac{K_h}{m}}, \quad \omega_\alpha = \sqrt{\frac{K_\alpha}{I_\alpha}}. \quad (3-231)$$

Разрешая уравнения (3-231) относительно постоянных, определяющих жесткости пружин, т. е. выражая эти постоянные через частоты отдельных колебаний системы и подставляя результат в уравнения (3-228), получаем

$$m \ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + m \omega_h^2 h = 0, \quad S_\alpha \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + I_\alpha \omega_\alpha^2 \alpha = 0. \quad (3-232)$$

В рассмотренном выше примере мы видели [см. уравнение (3-225)], что кинетическая энергия представляет собой положительно определенную квадратичную функцию скоростей  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{h}$ . Это свойство характерно для систем с малыми перемещениями; можно показать, что кинетическая энергия всегда представляется в подобной форме, если только перемещения малы. Если для простоты мы рассмотрим систему с сосредоточенными параметрами, уравнения преобразований для которой суть

$$u = u(q_1, q_2, q_3), \quad v = v(q_1, q_2, q_3), \quad w = w(q_1, q_2, q_3), \quad (3-233)$$

то кинетическая энергия, в силу равенства (3-214), будет иметь вид

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left\{ \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial w}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 \right\} dV. \quad (3-234)$$

Разложение уравнения (3-234) дает соотношение

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial u}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial w}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \right\} dV, \quad (3-235)$$

которое может быть переписано следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3-236)$$

где

$$m_{ij} = \int_V \rho \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial u}{\partial q_j} + \frac{\partial v}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial q_j} + \frac{\partial w}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial q_j} \right) dV. \quad (3-237)$$

Так как каждая из величин  $u$ ,  $v$ ,  $w$  является, вообще говоря, функцией  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ , то каждая из производных, входящих в уравнение (3-237), также является функцией  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ . Однако, если  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$  малы и отсчитываются от положения равновесия, вокруг которого система колеблется, мы можем с незначительной погрешностью положить в выражении каждой из производных  $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ . Правая часть уравнения (3-237), таким образом, становится равной некоторой постоянной. Из уравнения (3-237) видно также, что инерционные параметры удовлетворяют соотношению взаимности:

$$m_{ij} = m_{ji}. \quad (3-238)$$

(d) *Применение уравнений Лагранжа к непрерывной системе.* Рассмотрим задачу определения прогибов тонких балок под действием произвольных поперечных нагрузок. В качестве функционального соотношения между прогибом балки и обобщенными координатами выберем соотношение

$$w(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y) \xi_i(t), \quad (3-239)$$

в котором функции  $\varphi_i(y)$  представляют собой нормированные собственные функции собственных колебаний балки, соответствующие заданным граничным условиям, а  $\xi_i(t)$  — нормальные координаты. Подставив величину (3-239) в выражение для кинетической энергии балки, получим

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{w}^2(y, t) m(y) dy = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^l \varphi_i(y) \varphi_j(y) m(y) dy \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j. \quad (3-240)$$

Так как функции собственных колебаний взаимно ортогональны, то равенство (3-240) приводится к виду

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} M_i \dot{\xi}_i^2, \quad (3-241)$$

где

$$M_i = \int_0^l \varphi_i^2(y) m(y) dy.$$

Таким образом, выражение для кинетической энергии в том случае, когда обобщенные координаты представляют собой нормальные координаты, приводится к некоторой функции квадратов обобщенных координат.

Энергия деформации может быть выражена через нормальные координаты следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y) \left( \frac{\partial^n w}{\partial y^n} \right)^2 dy = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^l EI(y) \varphi_i'' \varphi_j'' dy \xi_i \xi_j. \quad (3-242)$$

Выражение (3-242) можно упростить, применяя уравнение (3-15). Уравнение (3-15) можно переписать, вводя нормированные функции собственных колебаний, в виде

$$\int_0^l (EI \varphi_i'')' \varphi_j dy = \omega_i^2 \int_0^l \varphi_i \varphi_j m dy. \quad (3-243)$$

Выполнив в левой части интегрирование по частям, приведем это уравнение к виду

$$[\varphi_j (EI \varphi_i'')' - \varphi_j' (EI \varphi_i'')]_0^l + \int_0^l EI \varphi_i'' \varphi_j'' dy = \omega_i^2 \int_0^l \varphi_i \varphi_j m dy. \quad (3-244)$$

Для всех граничных условий, встречающихся на практике, выражение в квадратных скобках в левой части обращается в нуль, так что при помощи условий ортогональности уравнение (3-244) приводится к виду

$$\int_0^l EI \varphi_i'' \varphi_j'' dy = \begin{cases} M_i \omega_i^2 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (3-245)$$

Применяя к уравнению (3-242) соотношение (3-245), получим следующее выражение для энергии деформации:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} M_i \omega_i^2 \xi_i^2. \quad (3-246)$$

Мы видим, таким образом, что применение нормальных координат приводит выражения для кинетической и потенциальной энергии к виду сумм квадратов. Это является общим свойством нормальных координат.

Уравнения Лагранжа применительно к рассматриваемой задаче имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_j} \right) + \frac{\partial U}{\partial \xi_j} = \Xi_j, \quad (j = 1, \dots, \infty). \quad (3-247)$$

Подставив выражения для кинетической и потенциальной энергий, заключающиеся в формулах (3-241) и (3-246), в уравнения Лагранжа, найдем

$$M_j \dot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = \Xi_j, \quad (j = 1, \dots, \infty). \quad (3-248)$$

Обобщенная сила  $\Xi_j$  получается применением уравнения (3-206):

$$\delta W_e = \int_0^l F_z(y, t) \delta w(y, t) dy = \int_0^l F_z(y, t) \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y) \delta \xi_i dy = \sum_{i=1}^{\infty} \Xi_i \delta \xi_i. \quad (3-249)$$

Так как  $\delta \xi_i$  произвольны и конечны, то

$$\Xi_j = \int_0^l F_z(y, t) \varphi_j(y) dy. \quad (3-250)$$

Уравнения (3-248) и (3-250) совпадают с уравнениями, полученными ранее из дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений вынужденных колебаний тонких балок.

**Пример 3-6.** Получить дифференциальные уравнения вынужденных колебаний незакрепленного упругого самолета в нормальных координатах при помощи уравнений Лагранжа.

*Решение.* Введем преобразование

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x, y) \xi_i(t), \quad (a)$$

где  $w(x, y, t)$  — малое вертикальное перемещение упругой поверхности, представляющей самолет, отсчитываемое от произвольно расположенной горизонтальной плоскости. В этом преобразовании перемещение нашего гипотетического самолета представляется тремя формами колебаний нулевой частоты, соответствующими движению самолета как твердого тела, плюс некоторое наложение нормированных форм колебаний незакрепленного самолета, так что

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1, & \omega_1 &= 0, \\ \varphi_2 &= -x, & \omega_2 &= 0, \\ \varphi_3 &= +y, & \omega_3 &= 0. \end{aligned} \quad (b)$$

Нормированные собственные функции и частоты собственных колебаний незакрепленного самолета, соответствующие деформации самолета, являются решениями уравнения (3-172) и представляются в виде

$$\begin{array}{cc} \varphi_4 & \omega_4 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \varphi_{\infty} & \omega_{\infty} \end{array} \quad (c)$$

К этой задаче можно применить уравнения Лагранжа, если кинетическую энергию и энергию деформации выразить через нормальные координаты. Кинетическая энергия может быть представлена в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} \int_S \dot{w}^2 \rho dx dy = \frac{1}{2} \int_S \rho \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \dot{\xi}_i \right]^2 dx dy. \quad (d)$$

Разлагая это выражение и используя уравнения (3-162), (3-163), (3-164) и (3-182), приводим формулу для кинетической энергии к виду

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} M_i \dot{\xi}_i^2, \quad (e)$$

где

$$M_i = \int_S \varphi_i^2 \rho dx dy.$$

Энергию деформации, применяя двумерную форму уравнения (2-60), можно символически выразить через некоторую функцию влияния жесткости  $k(x, y; \xi, \eta)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_S \int_S \left[ w(x, y) - w(0, 0) - x \frac{\partial w(0, 0)}{\partial x} - y \frac{\partial w(0, 0)}{\partial y} \right] \times \\ &\times \int_S \int_S k(x, y; \xi, \eta) \left[ w(\xi, \eta) - w(0, 0) - \xi \frac{\partial w(0, 0)}{\partial x} - \eta \frac{\partial w(0, 0)}{\partial y} \right] d\xi d\eta dx dy. \end{aligned} \quad (f)$$



Подставляя выражение (а) в уравнение (f), получим

$$U = \frac{1}{2} \int_S \int_S \sum_{i=4}^{\infty} \left[ \varphi_i(x, y) - \varphi_i(0, 0) - x \frac{\partial \varphi_i(0, 0)}{\partial x} - y \frac{\partial \varphi_i(0, 0)}{\partial y} \right] \xi_i \times \\ \times \int_S \int_S k(x, y; \xi, \eta) \sum_{j=4}^{\infty} \left[ \varphi_j(\xi, \eta) - \varphi_j(0, 0) - \xi \frac{\partial \varphi_j(0, 0)}{\partial x} - \eta \frac{\partial \varphi_j(0, 0)}{\partial y} \right] \xi_j d\xi d\eta dx dy. \quad (g)$$

Нижнее значение индекса суммирования взято равным четырем, поскольку при  $l < 4$  суммы внутри квадратных скобок обращаются в нуль. Равенство (g) можно упростить, применяя уравнение (3-166а). Используя соотношение взаимности между  $C(x, y; \xi, \eta)$  и  $k(x, y; \xi, \eta)$ , можно заметить, что уравнение (3-166а), выраженное через нормированные собственные функции собственных колебаний, можно обратить и привести к виду

$$\rho(x, y) \varphi_i(x, y) \omega_i^2 = \\ = \int_S \int_S k(x, y; \xi, \eta) \left[ \varphi_i(\xi, \eta) - \varphi_i(0, 0) - \xi \frac{\partial \varphi_i(0, 0)}{\partial x} - \eta \frac{\partial \varphi_i(0, 0)}{\partial y} \right] d\xi d\eta. \quad (h)$$

Внеся уравнение (h) в равенство (g), получим

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=4}^{\infty} \sum_{j=4}^{\infty} \left\{ \int_S \int_S \left[ \varphi_i(x, y) - \varphi_i(0, 0) - x \frac{\partial \varphi_i(0, 0)}{\partial x} - y \frac{\partial \varphi_i(0, 0)}{\partial y} \right] \times \right. \\ \left. \times \varphi_j(x, y) \rho(x, y) dx dy \right\} \omega_j^2 \xi_i \xi_j. \quad (i)$$

Используя условие ортогональности, приведем выражение (i) к виду

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=4}^{\infty} M_i \omega_i^2 \xi_i^2, \quad (j)$$

где

$$M_i = \int_S \int_S \varphi_i^2 \rho dx dy.$$

Подставляя величины (e) и (j) в уравнения Лагранжа, получаем следующие дифференциальные уравнения, выраженные через нормальные координаты:

$$M_1 \ddot{\xi}_1 = \Xi_1, \quad M_2 \ddot{\xi}_2 = \Xi_2, \quad M_3 \ddot{\xi}_3 = \Xi_3, \quad (k)$$

$$M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = \Xi_j, \quad (j = 4, \dots, \infty). \quad (l)$$

Если на самолет действует распределенная сила  $F_z(x, y, t)$ , то обобщенные силы можно вычислить из следующего уравнения, получающегося из уравнения (3-206):

$$\delta W_e = \int_S \int_S F_z(x, y, t) \delta w dx dy = \sum_{i=1}^{\infty} \Xi_i \delta \xi_i, \quad (m)$$

из которого следует, что

$$\Xi_j = \int_S \int_S F_z(x, y, t) \varphi_j(x, y) dx dy, \quad (j = 1, 2, \dots, \infty). \quad (n)$$

**3-9. Приближенные методы решения практических задач.** Предыдущие пункты настоящей главы были посвящены выводу уравнений движения непрерывной системы и построению их точных решений с помощью бесконечного множества нормальных координат. Рассмотрим теперь некоторые методы получения решений практических задач. Для того чтобы подобные решения были обозримыми, они должны, разумеется, содержать в себе некоторую степень приближения. Вообще говоря, приближение состоит в предположении,

что пространственная конфигурация деформируемой конструкции, которая на самом деле обладает бесконечным числом степеней свободы, может быть аппроксимирована некоторой эквивалентной системой с конечным числом степеней свободы. Успех этого начального этапа аппроксимации в значительной мере зависит от искусства и выбора исследователя. Коль скоро этот этап осуществлен, поведение системы определяется конечной системой совместных обыкновенных дифференциальных уравнений; независимым переменным является время.

Первым методом аппроксимации, который сразу же приходит в голову, является метод, предусматривающий замену бесконечного множества нормальных координат конечной системой их и использование решений, уже полученных в предыдущих разделах настоящей главы. По-видимому, этот метод является наиболее широко распространенным методом решения задач аэроупругости. Он обычно оказывается успешным, так как в большинстве случаев для описания деформаций конструкции бывает достаточно относительно небольшого числа низших форм собственных колебаний. Ввиду принципиальной важности этого метода для решения задач аэроупругости четвертая глава полностью посвящена методам вычисления функций собственных колебаний.

Вторым приближенным методом, нашедшим широкое применение благодаря своей простоте, является метод приближения пространственной конфигурации конструкции наложением конечного числа *определенным образом выбранных* форм колебаний. Мы будем называть этот метод методом Рэлея — Ритца; он соответствует, разумеется, аналогичному методу, примененному в п. 2-11 для решения задач о статической деформации. В этом методе каждая из выбранных функций деформации или форм соответствует некоторой степени свободы, а множитель, определяющий величину вклада соответствующего типа деформации в суммарную деформацию, представляет собой обобщенную координату, отвечающую этому типу деформации. Применение метода Рэлея — Ритца к динамическим задачам более подробно рассматривается в п. 3-10.

Описанные выше первый и второй методы приведения непрерывной системы к системе с конечным числом степеней свободы основаны на представлении действительной деформации наложением определяемых в явном виде непрерывных функций — форм колебаний. Третий, несколько иной подход к решению динамических задач, также часто используемый, называется методом сосредоточенных параметров. В этом методе деформация некоторой непрерывной конструкции приближенно представляется некоторым конечным числом дискретных обобщенных перемещений различных частей конструкции. Метод сосредоточенных масс, или жестких элементов, при применении которого конструкция разбивается на некоторое число жестких элементов, связанных между собой невесомыми пружинами, представляет собой хороший пример применения методов этого типа. Метод сосредоточенных параметров рассматривается в п. 3-11.

Указанные выше методы служат для приведения задач с бесконечным числом степеней свободы, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных или интегральными уравнениями, к задачам, описываемым конечным числом совместных обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы решения совместных обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются подробнее при изложении конкретных приложений в последующих главах.

**3-10. Приближенное решение методом Рэлея — Ритца.** Метод представления решения при помощи конечной системы выбранных форм колебаний, известный под названием метода Рэлея — Ритца, может быть применен к динамическим задачам, по существу, таким же образом, как и к статическим задачам (см. п. 2-11). Вклад каждой из заданных форм колебаний в суммарное движение получается применением принципа виртуальной работы или, в частности, специальной формы этого принципа, известной под названием уравнений Лагранжа.

(а) *Закрепленное крыло самолета.* Рассмотрим для примера задачу о приближенном расчете прогиба закрепленного крыла самолета, заделанного

в корневом сечении, под действием динамической поперечной нагрузки. Выберем представление прогиба в виде конечного ряда

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x, y) q_i(t), \quad (3-251)$$

где  $\gamma_i(x, y)$  — выбранные функции, определяющие прогиб и удовлетворяющие по крайней мере геометрическим граничным условиям в корневом сечении крыла<sup>1)</sup>. В случае тонкого консольного крыла эти условия имеют вид

$$\gamma_i(x, 0) = 0, \quad \gamma_i'(x, 0) = 0. \quad (3-252)$$

Величины  $q_i(t)$  представляют собой пока неопределенные обобщенные координаты, определяющие вклад каждой из заданных функций прогиба в суммарный прогиб поверхности крыла. Введя выражение (3-251) в выражение для кинетической энергии закрепленного крыла, получим

$$T = \frac{1}{2} \int_S \int \dot{w}^2 \rho \, dx \, dy = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3-253a)$$

где величины

$$m_{ij} = \int_S \int \gamma_i \gamma_j \rho \, dx \, dy \quad (3-253b)$$

представляют собой инерционное взаимодействие между обобщенными координатами, причем  $m_{ij} = m_{ji}$ .

Выражение для энергии деформации получится, если подставить величину (3-251) в выражение для энергии деформации через функцию влияния жесткости, в следующем виде:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \int w(x, y, t) \int_S \int k(x, y; \xi, \eta) w(\xi, \eta, t) \, d\xi \, d\eta \, dx \, dy = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j, \quad (3-254)$$

где коэффициенты

$$k_{ij} = \int_S \int \gamma_i(x, y) \int_S \int k(x, y; \xi, \eta) \gamma_j(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \, dx \, dy \quad (3-255)$$

представляют собой упругое взаимодействие между обобщенными координатами, причем  $k_{ij} = k_{ji}$ . Подставив выражения (3-253a) и (3-254) в уравнения Лагранжа, получим  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j = Q_i, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3-256)$$

Обобщенная сила  $Q_i$  вычисляется из соотношения

$$\delta W_e = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_S \int F_z(x, y, t) \gamma_i(x, y) \, dx \, dy \right\} \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3-257)$$

которое дает

$$Q_i = \int_S \int F_z(x, y, t) \gamma_i(x, y) \, dx \, dy, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3-258)$$

<sup>1)</sup> Хотя принцип виртуальной работы, а также уравнения Лагранжа требуют только удовлетворения геометрическим граничным условиям, лучшая аппроксимация получается, если взять функции, удовлетворяющие также граничным условиям на свободном конце.

Решения уравнений (3-256), определяющие функции  $q_1(t), \dots, q_n(t)$ , следует подставить в соотношение (3-251), и мы получим окончательное выражение приближенного решения. Важно отметить, что дифференциальные уравнения (3-256) содержат члены, представляющие как инерционное, так и упругое взаимодействие. Мы уже видели, что и то и другое взаимодействие исчезают, если выбранные функции представляют собой нормальные функции собственных колебаний.

Степень точности аппроксимации решения приближенным представлением решения, полученным по методу Рэлея — Ритца, всецело зависит от числа и выбора обобщенных координат. Можно, однако, показать, что при неограниченном возрастании числа  $n$  разность между приближенным и точным решениями стремится к нулю.

Практически получение уравнений (3-256) требует численного расчета коэффициентов  $m_{ij}$  и  $k_{ij}$ , а также обобщенных сил  $Q_i$ . Процесс вычисления  $k_{ij}$  является наиболее трудным и оказывается различным для разных типов конструкций. Для простейшего случая тонкого крыла с жесткими направленными вдоль хорды сечениями энергия деформации представляется в виде

$$U = \int_0^l \frac{EI}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dy + \int_0^l \frac{GJ}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 dy, \quad (3-259)$$

где  $\partial w / \partial x$  представляет собой угол закручивания крыла, предполагаемого жестким в направлении хорды. Используя равенство (3-251), получаем

$$k_{ij} = \int_0^l EI(y) \left( \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \gamma_j}{\partial y^2} \right) dy + \int_0^l GJ(y) \left( \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial y \partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \gamma_j}{\partial y \partial x} \right) dy. \quad (3-260)$$

Более сложным примером является крыло малого удлинения, аппроксимируемое деформируемой пластинкой, когда матрица коэффициентов влияния гибкости определена в  $n$  дискретных точках. В этом случае мы получим численное приближенное выражение для коэффициентов  $k_{ij}$ , представив уравнение (3-255) в матричной форме

$$k_{ij} = \underline{\gamma}_i \underline{W} [k] \overline{\gamma}_j. \quad (3-261)$$

Через коэффициенты влияния гибкости это уравнение может быть представлено в виде

$$k_{ij} = \underline{\gamma}_i \underline{W} [C]^{-1} \overline{\gamma}_j, \quad (3-262)$$

где

- $\underline{\gamma}_i$  — строчная матрица амплитуд  $i$ -й формы колебаний,
- $\overline{\gamma}_j$  — столбцовая матрица амплитуд  $j$ -й формы колебаний,
- $\underline{W}$  — весовая матрица,
- $[k] = [C]^{-1}$  — матрица коэффициентов влияния жесткости.

(а) *Незакрепленный упругий самолет.* Ввиду большого труда, который приходится затрачивать при вычислении нормальных функций собственных колебаний незакрепленного самолета, часто бывает удобно сделать предположение, что деформации конструкции приближенно представляются наложением каким-то образом выбранных форм колебаний. Можно, например, предположить, что движение описывается малыми линейными и угловыми перемещениями плоскости, касательной к упругой поверхности самолета (фиг. 3-21) в точке пересечения этой поверхности с осью  $y$ , и заданными формами упругих колебаний, представляющих перемещения относительно этой касательной плоскости. Таким образом,

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x, y) q_i(t), \quad (3-263)$$

где  $w(x, y, t)$  представляет собой суммарное вертикальное перемещение упругой поверхности, измеряемое относительно некоторой произвольно расположенной горизонтальной плоскости. В равенстве (3-263) первые три из заданных форм колебаний представляют собой линейные и угловые перемещения плоскости, касательной к деформированной поверхности, а остальные формы выражают некоторым образом выбранные упругие перемещения относительно этой касательной плоскости. Подставив выражение (3-263) в формулу для кинетической энергии незакрепленного самолета, получим

$$T = \frac{1}{2} \int_S \int \dot{w}^2 \rho \, dx \, dy = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3-264)$$

где

$$m_{ij} = \int_S \int \gamma_i \gamma_j \rho \, dx \, dy.$$

Энергия деформации представляется в виде

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j, \quad (3-265)$$

где  $k_{ij}$  определяются равенствами (3-255). Подставив выражения (3-264) и (3-265) в уравнения Лагранжа, получим  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j = Q_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3-266)$$

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j = Q_i, \quad (i = 4, \dots, n),$$

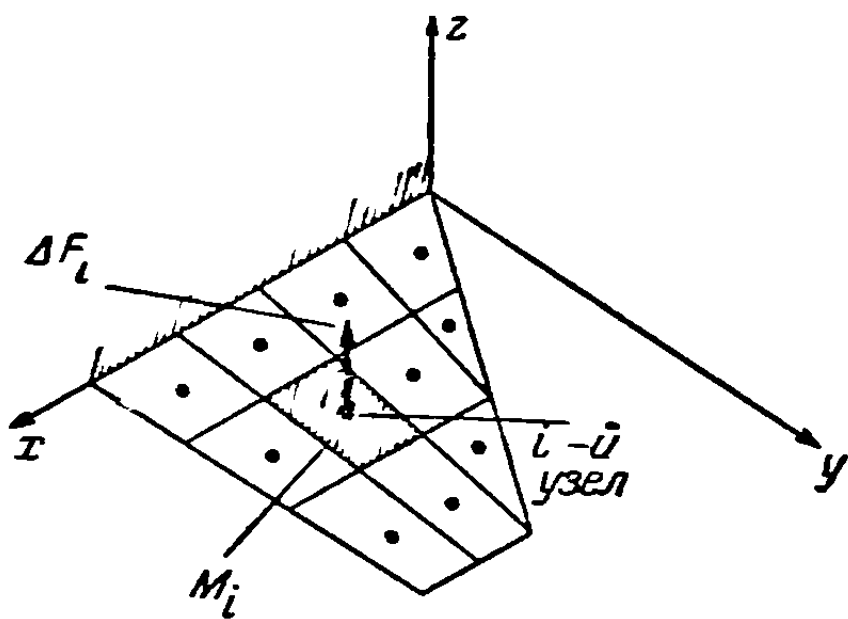
где

$$Q_i = \int_S \int F_z(x, y, t) \gamma_i \, dx \, dy. \quad (3-267)$$

Поскольку  $\gamma_i(x, y)$  представляют собой произвольным образом выбранные формы колебаний, приведенные выше дифференциальные уравнения содержат, вообще говоря, члены, представляющие собой как упругое, так и инерционное взаимодействие различных форм колебаний.

3-11. Приближенное решение по методу сосредоточенных параметров. В простейшем варианте метода сосредоточенных параметров предполагается,

что деформация некоторой непрерывной конструкции может быть приближенно представлена линейными смещениями в некотором конечном числе дискретных точек. Это означает, что функция  $w(x, y, t)$ , представляющая собой, например, деформированную поверхность крыла, приближенно представляется столбцевой матрицей следующего вида:



Фиг. 3-23. Крыло малого удлинения, разделенное на ячейки сеткой.

$$w(x, y, t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{bmatrix}. \quad (3-268)$$

Для иллюстрации принципов, заключающихся в применении равенства (3-268), рассмотрим закрепленное крыло малого удлинения, изображенное на фиг. 3-23.

Предположим, что на крыло действует переменная во времени распределенная внешняя нагрузка  $F_z(x, y, t)$  и что результирующая деформация может быть представлена деформациями в  $n$  дискретных точках поверхности крыла. Интегральное уравнение представляет собой удобный способ получения обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $w_1, w_2, \dots, w_n$ . Соответствующее интегральное уравнение равновесия имеет вид

$$w(x, y, t) = \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) [-\rho(\xi, \eta) \ddot{w}(\xi, \eta, t) + F_z(\xi, \eta, t)] d\xi d\eta. \quad (3-144)$$

Прогиб крыла в каждой из  $n$  дискретных точек получается из равенства (3-144) в виде

$$w_i = \int_S \int C(x_i, y_i; \xi, \eta) [-\rho(\xi, \eta) \ddot{w}(\xi, \eta, t) + F_z(\xi, \eta, t)] d\xi d\eta, \quad (3-269)$$

$(i = 1, \dots, n).$

Соотношение (2-79) показывает, что интегрирование в равенстве (3-269) может быть выполнено численно при помощи некоторой весовой матрицы:

$$\{w\} = -[C] [\underline{\rho}] [\underline{\bar{W}}] \{\ddot{w}\} + [C] [\underline{\bar{W}}] \{F_z\}, \quad (3-270)$$

где  $[\underline{\bar{W}}]$  представляет собой некоторую диагональную матрицу весовых чисел, зависящую от выбранной схемы численного интегрирования. Использованный выше метод удовлетворения некоторого уравнения в некотором числе дискретных точек иногда называется методом совмещения<sup>1)</sup>.

Заметим, что если масса участков поверхности крыла и внешняя сила внутри каждой из ячеек сетки, изображенной на фиг. 3-23, предполагаются сосредоточенными в некоторых точках внутри границ ячеек, то равенство (3-270) приводится к более простой форме, соответствующей некоторой системе сосредоточенных масс:

$$\{w\} = -[C] [\underline{M}] \{\ddot{w}\} + [C] \{\Delta F_z\}, \quad (3-271)$$

где  $[\underline{M}]$  представляет собой некоторую диагональную матрицу сосредоточенных масс, а  $\{\Delta F_z\}$  — столбцевую матрицу приложенных дискретных сил.

В случае тонких крыльев, когда крыло в направлении хорды можно считать жестким, деформация крыла может быть представлена линейными и угловыми перемещениями  $n$  сечений по размаху крыла. Таким образом, мы можем применить к равенствам (3-148) и (3-149) метод совмещения. На  $i$ -м сечении линейное и угловое перемещение крыла в соответствии с равенствами (3-148) и (3-149) представляются соответственно в следующем виде:

$$w_i = \int_0^l C^{zz}(y_i, \eta) [-m(\eta) \ddot{w}(\eta, t) + S_y(\eta) \ddot{\theta}(\eta, t) + F_z(\eta, t)] d\eta +$$

$$+ \int_0^l C^{z\theta}(y_i, \eta) [-I_y(\eta) \ddot{\theta}(\eta, t) + S_y(\eta) \ddot{w}(\eta, t) + t(\eta, t)] d\eta, \quad (3-272)$$

$$\theta_i = \int_0^l C^{\theta z}(y_i, \eta) [-m(\eta) \ddot{w}(\eta, t) + S_y(\eta) \ddot{\theta}(\eta, t) + F_z(\eta, t)] d\eta +$$

$$+ \int_0^l C^{\theta\theta}(y_i, \eta) [-I_y(\eta) \ddot{\theta}(\eta, t) + S_y(\eta) \ddot{w}(\eta, t) + t(\eta, t)] d\eta. \quad (3-273)$$

<sup>1)</sup> Или метод коллокации. — Прим. ред.

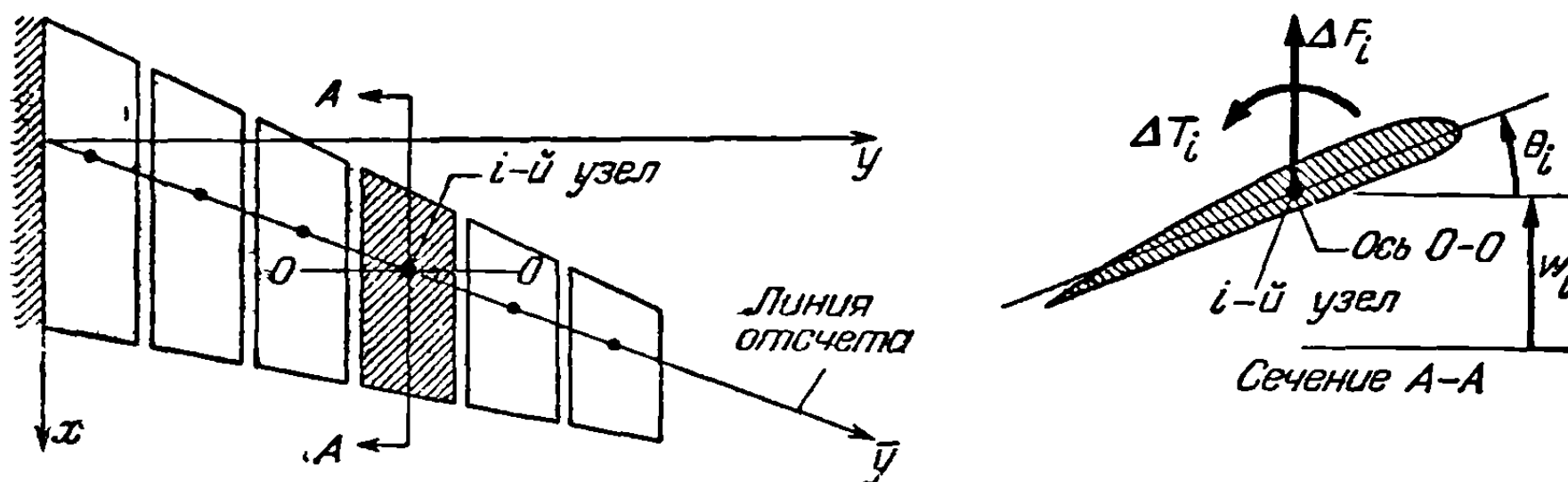


Выполняя в равенствах (3-272) и (3-273) численное интегрирование при помощи весовых матриц, приходим к одному матричному уравнению:

$$\begin{bmatrix} \{w\} \\ \{\theta\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C^{zz}] & [C^{z\theta}] \\ [C^{\theta z}] & [C^{\theta\theta}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\underline{W}] & [0] \\ [0] & [\underline{W}] \end{bmatrix} \times \\ \times \left\{ \begin{bmatrix} -[\underline{m}] & [\underline{S}_y] \\ [\underline{S}_y] & -[\underline{I}_y] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{w}\} \\ \{\ddot{\theta}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{F_z\} \\ \{t\} \end{bmatrix} \right\}, \quad (3-274)$$

где  $[\underline{W}]$  представляет собой диагональную матрицу весовых чисел.

Представим себе, наконец, крылья разделенными на  $n$  жестких элементов, как показано на фиг. 3-24. Если инерционные свойства каждого элемента



Фиг. 3-24. Крыло большого удлинения, разделенное на жесткие элементы.

крыла мы предположим сконцентрированными в узлах крыла, то уравнение (3-274) приведет к виду, соответствующему некоторой системе сосредоточенных масс

$$\begin{bmatrix} \{w\} \\ \{\theta\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C^{zz}] & [C^{z\theta}] \\ [C^{\theta z}] & [C^{\theta\theta}] \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -[\underline{M}] & [\underline{S}] \\ [\underline{S}] & -[\underline{I}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{w}\} \\ \{\ddot{\theta}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Delta F_z\} \\ \{\Delta t\} \end{bmatrix} \right\}, \quad (3-275)$$

где  $[\underline{M}]$ ,  $[\underline{I}]$  и  $[\underline{S}]$  представляют собой соответственно диагональные матрицы масс, моментов инерции и статических моментов жестких элементов. Момент инерции и статический момент каждого элемента измеряются относительно оси, параллельной оси  $y$  и проходящей через  $i$ -й узел. На фиг. 3-24 эта ось обозначена линией  $O-O$ . Матрицы  $\{\Delta F_z\}$  и  $\{\Delta t\}$  представляют собой столбцевые матрицы соответственно суммарных сил и моментов, действующих на каждый жесткий элемент.

Уравнение (3-275) содержит члены, определяющие упругое и инерционное взаимодействие. Инерционное взаимодействие исчезает, если ось вращения каждого элемента крыла, т. е. ось  $O-O$  на фиг. 3-24, проходит через центр тяжести элемента, так что статические моменты обращаются в нуль. Упругое взаимодействие между изгибом и кручением, определяемое матрицами  $[C^{z\theta}]$  и  $[C^{\theta z}]$ , может быть исключено, если взять ось вращения  $O-O$  совпадающей с упругой осью.



## Глава 4

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИИ

**4-1. Введение.** В третьей главе было показано, что деформация некоторой непрерывной конструкции под действием динамических нагрузок может быть выражена через нормальные функции и частоты собственных колебаний. За исключением некоторых, весьма частных случаев, эти нормальные функции и частоты не могут быть определены точно, поэтому для их определения был развит ряд приближенных методов. Целью настоящей главы является систематическое изложение нескольких таких характерных приближенных методов. Мы попытаемся дать здесь иллюстрацию одного или более приближенных методов каждого существенного класса так, чтобы читатель мог себе ясно представить, каким образом следует комбинировать свойства нескольких методов. Настоящая глава частично основана на монографии [4-1], представляющей собой обширный сравнительный обзор приближенных методов.

Мы видели, что реальная конструкция самолета представляет собой некоторую непрерывную систему с бесконечным числом степеней свободы. Следовательно, имеется бесконечное число нормальных функций и частот собственных колебаний. Приближенные методы предназначены для получения приближенных представлений нормальных функций и частот лишь относительно небольшого числа низших форм колебаний. Эти методы могут быть вообще разбиты на три группы соответственно способу формулировки задачи: энергетические методы, методы интегральных уравнений и методы дифференциальных уравнений. В некоторых случаях такой способ классификации вызывает затруднения; однако эта группировка приближенных методов образует удобную основу для расположения материала настоящей главы. В пп. 4-2, 4-3 и 4-4 каждый метод для простоты описывается применительно к случаю сужающейся консольной балки. В этих разделах показывается, что большинство методов приводит задачу к некоторой системе совместных линейных однородных уравнений. Методы решения подобных систем уравнений рассматриваются в п. 4-5. Наконец, пп. 4-6 и 4-7 посвящены приближенным методам, применимым соответственно к сложным конструкциям самолета и к вращающимся балкам.

**4-2. Вычисление нормальных функций и частот собственных колебаний при помощи энергетических методов.** Энергетические методы вычисления нормальных функций и частот собственных колебаний основываются на принципе виртуальной работы или на более частной форме этого принципа, известной под названием уравнений Лагранжа. Так как мы рассматриваем собственные колебания и малые перемещения, то соответствующую форму уравнений Лагранжа можно получить из уравнений (3-222), полагая в них  $\partial T / \partial \dot{q}_i = Q_i = 0$ :

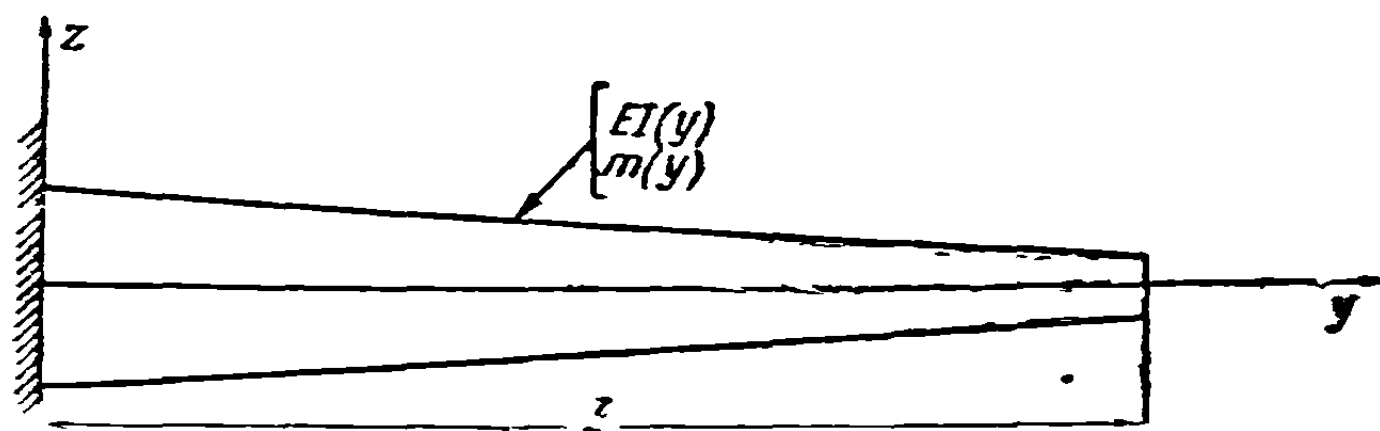
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4-1)$$

Уравнения Лагранжа можно применять к рассматриваемым задачам, если приближенно представить деформацию конструкции таким образом, чтобы она могла быть описана при помощи конечного числа обобщенных координат  $q_1, \dots, q_n$ .

(а) *Метод Рэлея—Ритца.* Рассмотрим в качестве иллюстративного примера случай консольной балки переменного поперечного сечения, изображенной на фиг. 4-1, и представим кривую прогибов нейтральной оси следующим выражением:

$$\varpi(y, t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(y) q_i(t). \quad (4-2)$$

Функции  $\gamma_i(y)$  представляют собой некоторые заданные функции — функции прогиба, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям  $\gamma_i(0) = \gamma_i'(0) = 0$ . Они выбираются таким образом, чтобы было возможно получить хорошее приближенное представление для колебаний каждого из нужных тонов



Фиг. 4-1. Консольная балка с изменяющимися по длине свойствами.

посредством наложения. Величины  $q_i(t)$  представляют собой обобщенные координаты, определяющие вклад каждой функции прогиба в выражение суммарного прогиба.

Пренебрегая влиянием инерции вращения, получим выражение для кинетической энергии тонкой балки в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(y) \dot{\varpi}^2(y, t) dy. \quad (4-3)$$

Пренебрегая деформацией сдвига, можно выразить энергию деформации тонкой балки через жесткость балки на изгиб следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y) (\varpi'')^2 dy, \quad (4-4)$$

где штрихи означают дифференцирование по  $y$ . Внося выражение (4-2) в равенства (4-3) и (4-4), получим после упрощения следующие квадратичные формы:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (4-5)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j, \quad (4-6)$$

где

$$m_{ij} = \int_0^l \gamma_i \gamma_j m dy, \quad (4-7)$$

$$k_{ij} = \int_0^l EI \gamma_i'' \gamma_j'' dy. \quad (4-8)$$

Подставляя соотношения (4-5) и (4-6) в уравнения Лагранжа, получаем обыкновенные дифференциальные уравнения свободных колебаний:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4-9)$$

Выбирая решение в виде

$$q_i = \bar{q}_i \sin(\omega t + \psi), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4-10)$$

где  $\bar{q}_i$  — амплитуда прогиба,  $\omega$  — частота, а  $\psi$  — угол сдвига фазы, имеем

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - m_{ij} \omega^2) \bar{q}_j = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4-11a)$$

Эта система характеристических уравнений может быть разрешена относительно  $n$  дискретных приближенных значений  $\omega^2$ . Приближенные значения  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$  обладают тем свойством, что

$$\lambda_1^2 \leq \omega_1^2, \quad \lambda_2^2 \leq \omega_2^2, \quad \dots, \quad \lambda_n^2 \leq \omega_n^2, \quad (4-11b)$$

где  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$  представляют собой  $n$  наименьших точных собственных значений рассматриваемой первоначальной задачи (см. [4-2]).

С каждым собственным значением связана некоторая система величин  $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n$ . Величины  $\bar{q}_i$  могут быть определены только с точностью до постоянного множителя, так как система уравнений определяет только отношения этих величин. Нормальные функции собственных колебаний определяются выражениями

$$W_r(y) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(y) \bar{q}_i^{(r)}, \quad (r = 1, \dots, n). \quad (4-12)$$

Эти выражения определяют собой лишь приближенное представление истинных нормальных функций собственных колебаний, поскольку точность приближения ограничена числом и строением выбранных функций прогиба. Приближение является наилучшим для низших форм колебаний и становится все хуже и хуже с возрастанием номера формы колебаний. Нельзя ожидать, что все  $n$  полученных таким образом формальных решений будут давать хорошее приближение к истинным нормальным функциям; обычно необходимо отбросить несколько форм наиболее высокой частоты. Успех применения метода существенно зависит от искусства исследователя при выборе задаваемых функций прогиба. Так как выбор задаваемых функций является весьма важной частью при исследовании колебаний как этим, так и другими методами, он будет обсужден подробнее в п. 4-2 (d).

Характеристические уравнения, аналогичные уравнениям (4-11a), получаются при применении большинства методов исследования. Методы их решения рассматриваются в п. 4-5.

Если использовать матричные обозначения, то характеристические уравнения (4-11a) легко могут быть приведены к некоторой форме, удобной для численных расчетов. Если разделить балку по длине на  $n$  отрезков, то выражения для масс и жесткостей, определяемые равенствами (4-7) и (4-8) соответственно, могут быть записаны в следующей матричной форме:

$$[m_{ij}] = [\gamma] \sum m \sum \sum \bar{W} \sum [\gamma]', \quad (4-13)$$

$$[k_{ij}] = [\gamma''] \sum EI \sum \sum \bar{W} \sum [\gamma'']', \quad (4-14)$$

где

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} \gamma_1(y_1) & \dots & \gamma_1(y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_n(y_1) & \dots & \gamma_n(y_n) \end{bmatrix},$$

$[\gamma]'$  — матрица, транспонированная по отношению к матрице  $[\gamma]$ .

$$[\gamma''] = \begin{bmatrix} \gamma_1''(y_1) & \dots & \gamma_1''(y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_n''(y_1) & \dots & \gamma_n''(y_n) \end{bmatrix},$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m(y_1) & & & & \\ & m(y_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & m(y_n) \end{bmatrix},$$

$$[EI] = \begin{bmatrix} EI(y_1) & & & & \\ & EI(y_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & EI(y_n) \end{bmatrix},$$

$[\bar{W}]$  — некоторая матрица весовых чисел, соответствующих  $n$  сечениям, расположенным по длине балки.

В матричной форме уравнение (4-11a) имеет вид

$$\omega^2 [m_{ij}] \bar{q} = [k_{ij}] \bar{q}. \quad (4-15)$$

Используя уравнения (4-13 и 4-14), получим

$$\omega^2 [\gamma] [m] [\bar{W}] [\gamma'] \bar{q} = [\gamma''] [EI] [\bar{W}] [\gamma''] \bar{q}. \quad (4-16)$$

Уравнение в форме (4-16) является особенно удобным для вычислений. Существенным ограничением этого метода является, однако, способ выражения энергии деформации. Поскольку уравнение (4-16) содержит производные от заданных функций, эти функции следует задавать в аналитической форме, чтобы можно было с достаточной точностью определить значения их производных. Применение метода Рэля—Ритца дано в примере 4-1.

(b) *Метод Рэля.* Если в методе Рэля—Ритца, рассмотренном в предыдущем разделе, задаваться одной-единственной формой колебаний, то метод сведется к известному методу Рэля. Положив в уравнении (4-11a)  $i=j=1$ , получим для частоты формулу

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_{11}}{m_{11}}} = \sqrt{\frac{\int_0^l EI (\gamma_1'')^2 dy}{\int_0^l \gamma_1^2 m dy}}. \quad (4-17)$$

Формула (4-17) оказывается полезной для оценки нижней частоты собственных изгибных колебаний балки. Применяя метод Рэля и рассматривая одну-единственную форму колебаний, мы как бы вводим некоторые дополнительные связи, приводящие рассматриваемую систему к системе с одной степенью свободы. Эти дополнительные связи могут лишь уменьшить жесткость системы и,

следовательно, частоту колебаний. Поэтому приближенные значения частоты, получаемые по методу Рэлея, оказываются более высокими, нежели точные значения.

(с) *Модифицированный метод Рэлея—Ритца.* Полезное видоизменение метода Рэлея—Ритца получается, если выразить энергию деформации через инерционные нагрузки. Это изменение метода Рэлея—Ритца было указано Э. Рейсснером [4-3], использовавшим идею дополнительной энергии. Рассмотрим случай консольной балки. Мы можем выразить энергию деформации через изгибающий момент в балке следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI(y)} dy, \quad (4-18)$$

где  $M$  — изгибающий момент в сечении балки. Изгибающий момент от инерционных нагрузок, обуславливаемых собственными колебаниями, получается в виде интеграла

$$M = - \int_y^l \int_{\eta}^l m(\eta) \ddot{w}(\eta, t) d\eta dy. \quad (4-19)$$

Полагая, как и ранее,

$$w(y, t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(y) q_i(t), \quad (4-2)$$

где  $\gamma_i(y)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — заданные функции, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям, и комбинируя равенства (4-18) и (4-19), получим выражение энергии деформаций через инерционные нагрузки, определяемые свободными колебаниями, в следующем виде:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} \ddot{q}_i \ddot{q}_j, \quad (4-20)$$

где

$$L_{ij} = \int_0^l \frac{1}{EI(y)} \left\{ \int_y^l \int_{\eta}^l m(\eta) \gamma_i(\eta) d\eta dy \right\} \left\{ \int_y^l \int_{\eta}^l m(\eta) \gamma_j(\eta) d\eta dy \right\} dy. \quad (4-21)$$

Так как величины  $q_i$  изменяются по простому гармоническому закону, то можно положить  $\ddot{q}_i = -\omega^2 q_i$ , так что

$$U = \frac{1}{2} \omega^4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} q_i q_j. \quad (4-22)$$

Выражение для кинетической энергии сохраняем в прежнем виде (4-5):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (4-5)$$

Подставляя выражения (4-22) и (4-5) в уравнения Лагранжа и используя равенство (4-10), получаем

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} - \omega^2 L_{ij}) \bar{q}_j = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4-23)$$

Мы видим, что эта система уравнений имеет тот же вид, что и система (4-11а), за исключением того, что в системе (4-23) множитель  $\omega^2$  стоит при коэффициентах  $L_{ij}$ , а не при коэффициентах  $m_{ij}$ .

Можно получить выражение для коэффициентов  $L_{ij}$ , определяющих взаимодействие различных координат, через функцию влияния, а не через жесткость балки на изгиб. Распределение сил инерции при простом гармоническом движении может быть записано в форме

$$Z(y, t) = \omega^2 \sum_{i=1}^n m(y) \gamma_i(y) q_i. \quad (4-24)$$

Прогиб балки под действием этих сил инерции можно получить по формуле (2-43) в виде

$$w(y, t) = \int_0^l C(y, \eta) \left\{ \omega^2 \sum_{i=1}^n m(\eta) \gamma_i(\eta) q_i \right\} d\eta. \quad (4-25)$$

Выражения (4-24) и (4-25) можно использовать для вычисления энергии деформации при помощи соотношения (2-58):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l Z(y, t) w(y, t) dy. \quad (2-58)$$

Подставив величины (4-24) и (4-25) в формулу (2-58), получим

$$U = \frac{1}{2} \omega^4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} q_i q_j, \quad (4-26a)$$

где

$$L_{ij} = \int_0^l \gamma_j(y) m(y) \int_0^l C(y, \eta) \gamma_i(\eta) m(\eta) d\eta dy. \quad (4-26b)$$

Таким образом, равенство (4-26b) дает другое выражение для коэффициентов  $L_{ij}$ , отличное от выражения (4-21). Численно найдя интегралы, определяющие  $m_{ij}$  (равенство 4-13) и  $L_{ij}$  (равенство 4-26b), можно записать уравнения (4-23) в матричной форме:

$$[\gamma] \begin{bmatrix} m \\ \bar{W} \end{bmatrix} [\gamma]' \{q\} = \omega^2 [\gamma] \begin{bmatrix} m \\ \bar{W} \end{bmatrix} [C] \begin{bmatrix} m \\ \bar{W} \end{bmatrix} [\gamma]' \{q\}. \quad (4-27)$$

Уравнения (4-27) представляют собой характеристические уравнения модифицированного метода Рэлея—Ритца, выраженные через коэффициенты влияния.

Разница между классическим и модифицированными методами Рэлея—Ритца заключается, по существу, в способе выражения энергии деформации. В классическом методе выражение энергии деформации соответствует некоторому деформированному состоянию системы, совместному с заданными деформациями. В модифицированном методе энергия деформации соответствует инерционной нагрузке, отвечающей колебанию заданной формы. Для точного решения, обладающего бесконечным числом форм колебаний, оба метода эквивалентны. При приближенном решении, когда берется конечное число форм колебаний, напряженное и деформированное состояния не могут одновременно соответствовать заданной деформации и инерционной нагрузке. Таким образом, природа аппроксимации в обоих этих методах различна. Существенным преимуществом модифицированного метода Рэлея—Ритца над классическим методом является способ выражения упругих свойств конструкции. Выражение этих свойств через коэффициенты влияния придает видоизмененному методу Рэлея—Ритца дополнительную общность и гибкость.

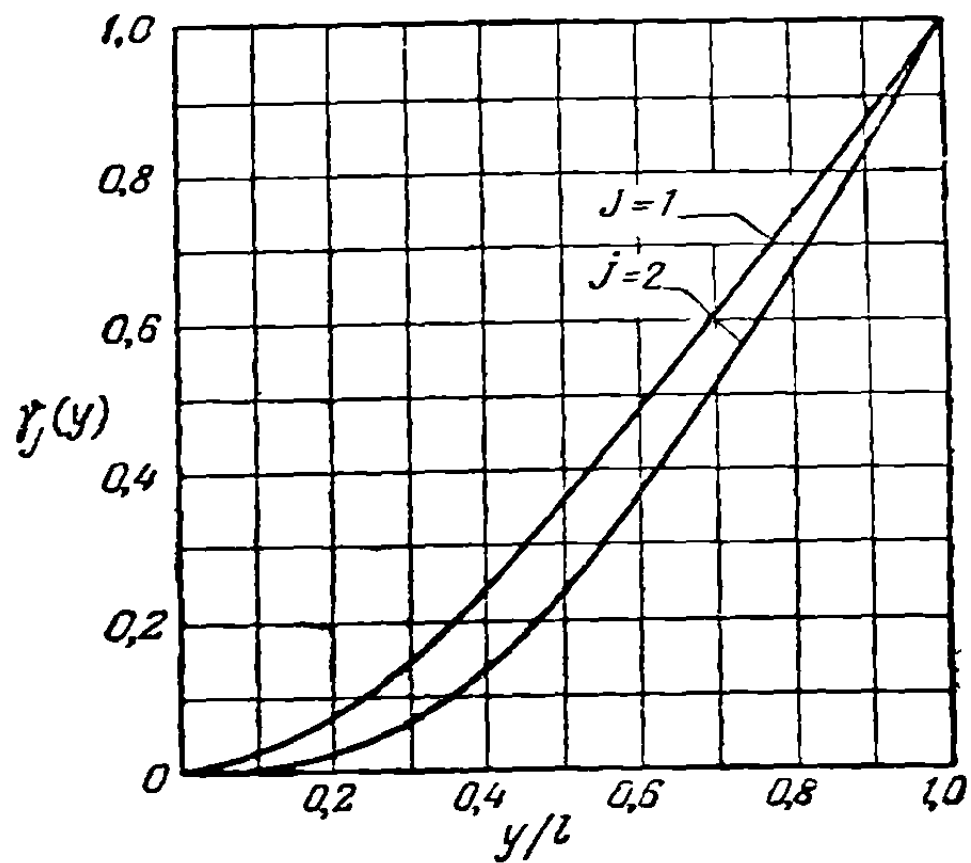
(d) *Выбор задаваемых функций в энергетических методах.* Мы видели, что в энергетических методах прогибы конструкции выражаются в виде некоторого наложения колебаний задаваемых форм. Выбор функций, представляющих

задаваемые формы колебаний, очень важен, и успех применения приближенных методов в большой мере зависит от этого выбора.

Для получения хороших результатов выбираемые функции должны удовлетворять двум общим требованиям, а именно: они должны удовлетворять граничным условиям и быть линейно независимыми друг от друга. Удовлетворение всех граничных условий на свободных границах не является строго обязательным, поскольку в процессе аппроксимации мы стремимся получить такое наложение задаваемых функций, чтобы окончательный результат удовлетворял этим граничным условиям.

Линейная независимость требует, чтобы было невозможно выразить какую-либо одну из задаваемых функций в виде наложения нескольких или всех остальных функций. Чем более далеки задаваемые функции от линейной зависимости, тем более подходящими для приближенного решения они являются. Примерами линейно независимых функций могут служить члены степенного ряда или члены ряда Фурье.

По-видимому, наиболее простой и полезной функциональной формой является полиномиальное выражение. Можно получить некоторые стандартные формы, удовлетворяющие граничным условиям отдельных частных задач. Например, для случая консольной балки Дункан [4—4] предложил следующее полиномиальное выражение:



Фиг. 4-2. Полиномиальные функции применяемые при исследовании консольных балок.

$$\gamma_j(y) = \frac{1}{6}(j+2)(j+3)\left(\frac{y}{l}\right)^{j+1} - \frac{1}{3}j(j+3)\left(\frac{y}{l}\right)^{j+2} + \frac{1}{6}j(j+1)\left(\frac{y}{l}\right)^{j+3}, \quad (j=1, \dots, n). \quad (4-28)$$

Простой подстановкой легко проверить, что соотношение (4-28) удовлетворяет граничным условиям, налагаемым на консольную балку. На фиг. 4-2 графически изображены функции, соответствующие равенству (4-28) при  $j=1$  и  $j=2$ .

Полиномиальные функции несколько иного типа, так же, как и другие функции, могут быть построены при помощи метода, предложенного Вильямсом [4-5]. Согласно этому методу, выписывается выражение в виде ряда для старшей производной функции прогиба, входящей в граничные условия. Это выражение последовательно интегрируется, пока не получается выражение для самой функции прогиба, причем постоянные интегрирования выбираются таким образом, чтобы удовлетворить остальным граничным условиям на соответствующих границах. Например, для однородной консольной балки можно исходить из следующего выражения, удовлетворяющего условию обращения в нуль поперечной силы на конце:

$$\gamma_j'''(y) = \left(1 - \frac{y}{l}\right)^j. \quad (4-29)$$

Интегрируя и используя граничные условия  $\gamma_j(0) = \gamma_j'(0) = \gamma_j''(l) = 0$ , получаем

$$\gamma_j(y) = \frac{l^3 \left[ 1 - (j+3)\frac{y}{l} - \left(1 - \frac{y}{l}\right)^{j+3} \right]}{(j+1)(j+2)(j+3)}. \quad (4-30)$$

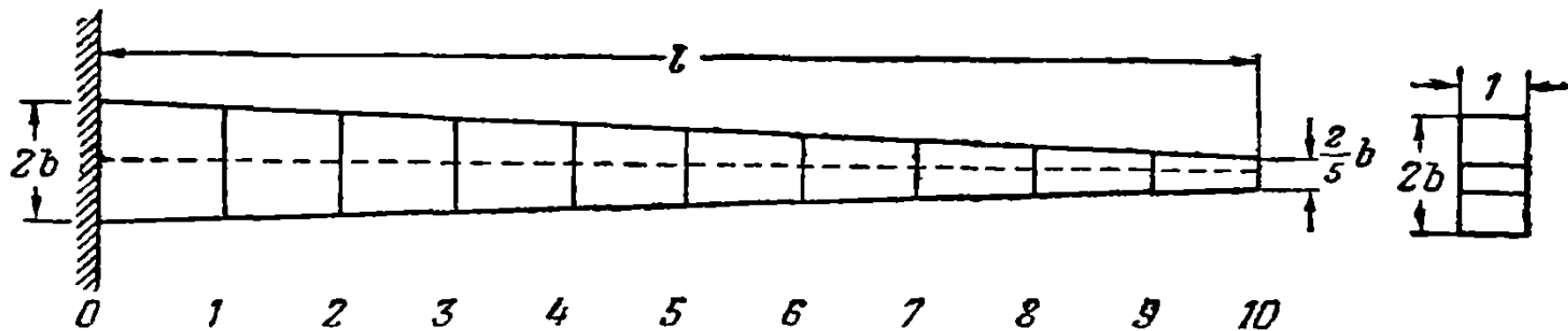


Так как абсолютная величина каждой из функций прогиба незначительна, мы можем переписать уравнение (4-30) в более простом виде:

$$\gamma_j(y) = 1 - (j+3) \frac{y}{l} + \left(1 - \frac{y}{l}\right)^{j+3}. \quad (4-31)$$

Если известны нормальные функции собственных колебаний для некоторой конструкции, подобной с точки зрения ее характеристик рассматриваемой конструкции и подчиненной тем же граничным условиям, то эти нормальные функции являются вполне подходящими для использования их в качестве задаваемых функций. Так, например, нормальные функции собственных колебаний для однородной консольной балки могут быть очень эффективно использованы для исследования консольной балки с переменными упругими и инерционными свойствами. Если балка несет на себе сосредоточенные массы, то может оказаться полезным включить в число задаваемых функций функции, определяющие статический прогиб под действием сосредоточенных сил, расположенных в точках приложения сосредоточенных масс.

**Пример 4-1.** Вычислить методом Рэлея — Ритца первые две нормальные функции и частоты собственных колебаний консольной балки, высота которой уменьшается по линейному закону, а ширина равна единице (фиг. 4-3). Результат сравнить с точным решением.



Фиг. 4-3. Консольная балка, ширина которой равна единице, а высота уменьшается по направлению к свободному концу по линейному закону.

**Решение.** Как указано в п. 4-2 (а), в методе Рэлея — Ритца используются задаваемые нормальные функции. Возьмем в качестве задаваемых нормальных функций полиномиальные функции, определяемые уравнением (4-28) при  $j=1$  и  $j=2$ . Эти функции графически изображены на фиг. 4-2. Если балка разделена по длине на десять равных участков, как изображено на фиг. 4-3, то всего имеется одиннадцать сечений, в том числе и корневое сечение; прогибы можно представить в виде матричного равенства

$$\{W\} = \{\gamma_1\} \bar{q}_1 + \{\gamma_2\} \bar{q}_2, \quad (a)$$

где

$$\{\gamma_1\} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0187 \\ 0,0699 \\ 0,1467 \\ 0,2423 \\ 0,3542 \\ 0,4752 \\ 0,6027 \\ 0,7339 \\ 0,8667 \\ 1,000 \end{bmatrix}, \quad (b) \quad \{\gamma_2\} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0030 \\ 0,0217 \\ 0,0654 \\ 0,1382 \\ 0,2396 \\ 0,3658 \\ 0,5111 \\ 0,6690 \\ 0,8335 \\ 1,000 \end{bmatrix}. \quad (c)$$

Элементами столбцовых матриц (b) и (c) являются ординаты кривых на фиг. 4-2. Характеристические уравнения определяются уравнением

$$\omega^2 [\gamma] \sum m \sum \bar{W} \sum [\gamma]' \{\bar{q}\} = [\gamma''] \sum EI \sum \bar{W} \sum [\gamma]'' \{\bar{q}\}. \quad (4-16)$$

Матрица  $[\gamma]$  в уравнении (4-16) составляется из матриц (a) и (b) и имеет следующий вид:

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 0 & 0,0187 & 0,0699 & 0,1467 & 0,2423 & 0,3542 & 0,4752 & 0,6027 & 0,7339 & 0,8667 & 1,000 \\ 0 & 0,0030 & 0,0217 & 0,0654 & 0,1382 & 0,2396 & 0,3658 & 0,5111 & 0,6690 & 0,8335 & 1,000 \end{bmatrix}. \quad (d)$$



Подставляя приведенные выше матрицы в уравнение (4-16), получаем следующее матричное уравнение:

$$0,0367b\rho l\omega^2 \begin{bmatrix} 3,4282 & 2,9401 \\ 2,9401 & 2,5799 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} = 0,01789 \frac{Eb^3}{l^3} \begin{bmatrix} 81,3634 & 49,2526 \\ 49,2526 & 53,5682 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix}. \quad (i)$$

Транспозиция приводит это уравнение к детерминантной форме:

$$\begin{bmatrix} \left(0,18396b\rho l\omega^2 - 1,4555 \frac{bE}{l^3}\right) \left(0,1578b\rho l\omega^2 - 0,8811 \frac{b^3E}{l^3}\right) \\ \left(0,1578b\rho l\omega^2 - 0,8811 \frac{b^3E}{l^3}\right) \left(0,1384b\rho l\omega^2 - 0,9583 \frac{b^3E}{l^3}\right) \end{bmatrix} = 0. \quad (j)$$

Раскрывая детерминант, получаем многочлен второй степени относительно  $\omega^2$ , а именно

$$0,0005766b^2\rho^2l^2\omega^4 - 0,09979 \frac{\rho Eb^4}{l^2} \omega^2 + 0,6185 \frac{E^2b^6}{l^6} = 0. \quad (k)$$

Решая биквадратное уравнение (k), получаем две собственные частоты

$$\omega_1 = 2,5372 \sqrt{\frac{Eb^2}{\rho l^4}}, \quad \omega_2 = 12,9085 \sqrt{\frac{Eb^2}{\rho l^4}}.$$

Подставляя выражение  $\omega_1$  в уравнение (i) и разрешая это уравнение относительно отношения  $\bar{q}_1/\bar{q}_2$ , получаем для первой формы колебаний

$$\frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_2} = 0,4968. \quad (l)$$

Аналогично, беря  $\omega_2$ , имеем для второй формы

$$\frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_2} = -0,8702. \quad (m)$$

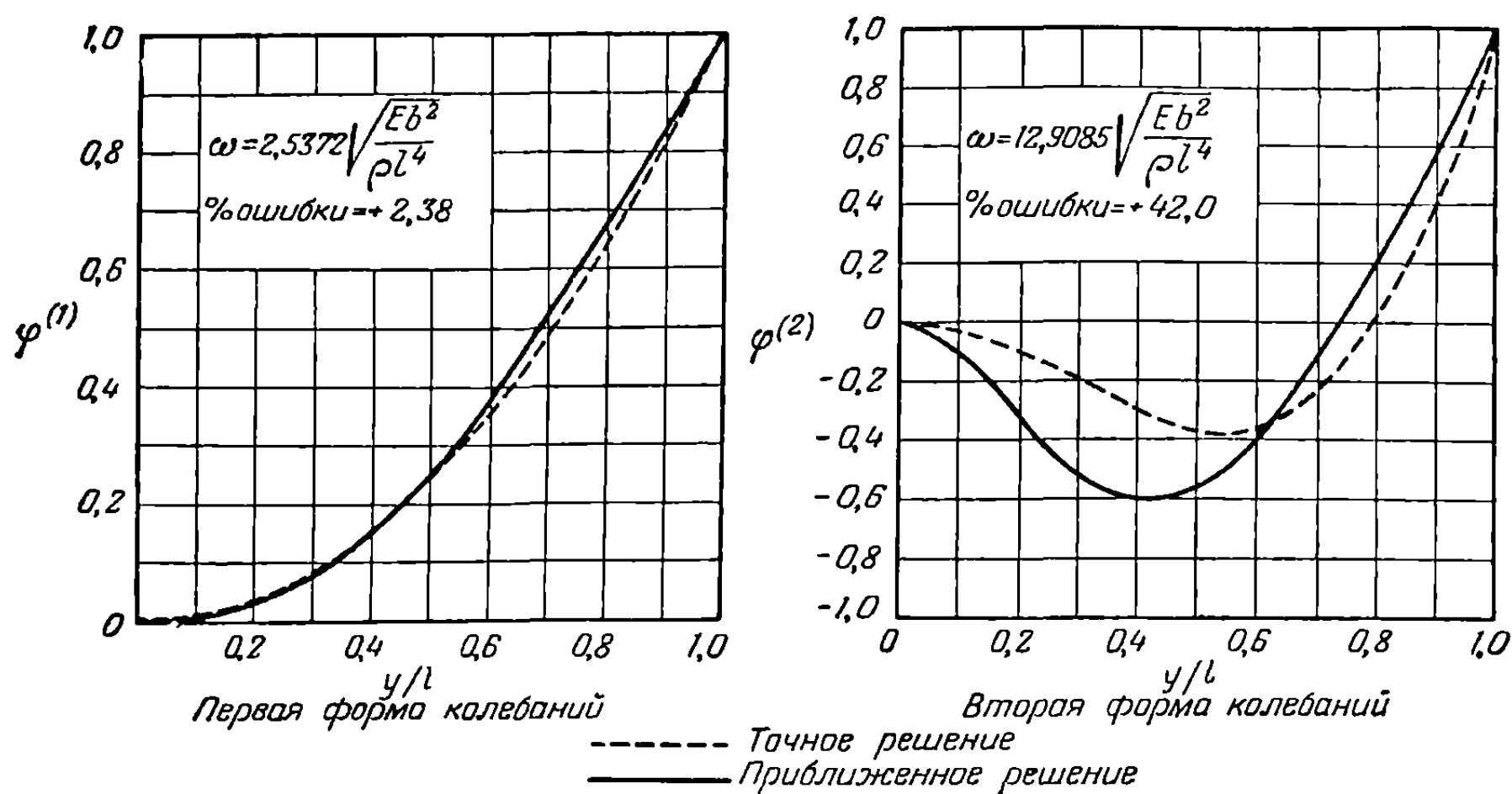
Столбцевая матрица, представляющая нормальную функцию первой формы колебания, получается, если положить в равенстве (a)  $\bar{q}_2 = 1$ ,  $\bar{q}_1 = 0,4968$ :

$$\{W^{(1)}\} = 0,4968 \{\gamma_1\} + \{\gamma_2\} = 1,4968 \begin{bmatrix} 0 \\ 0,00822 \\ 0,03765 \\ 0,09240 \\ 0,17308 \\ 0,2776 \\ 0,4021 \\ 0,5415 \\ 0,6905 \\ 0,8445 \\ 1,0000 \end{bmatrix}. \quad (n)$$

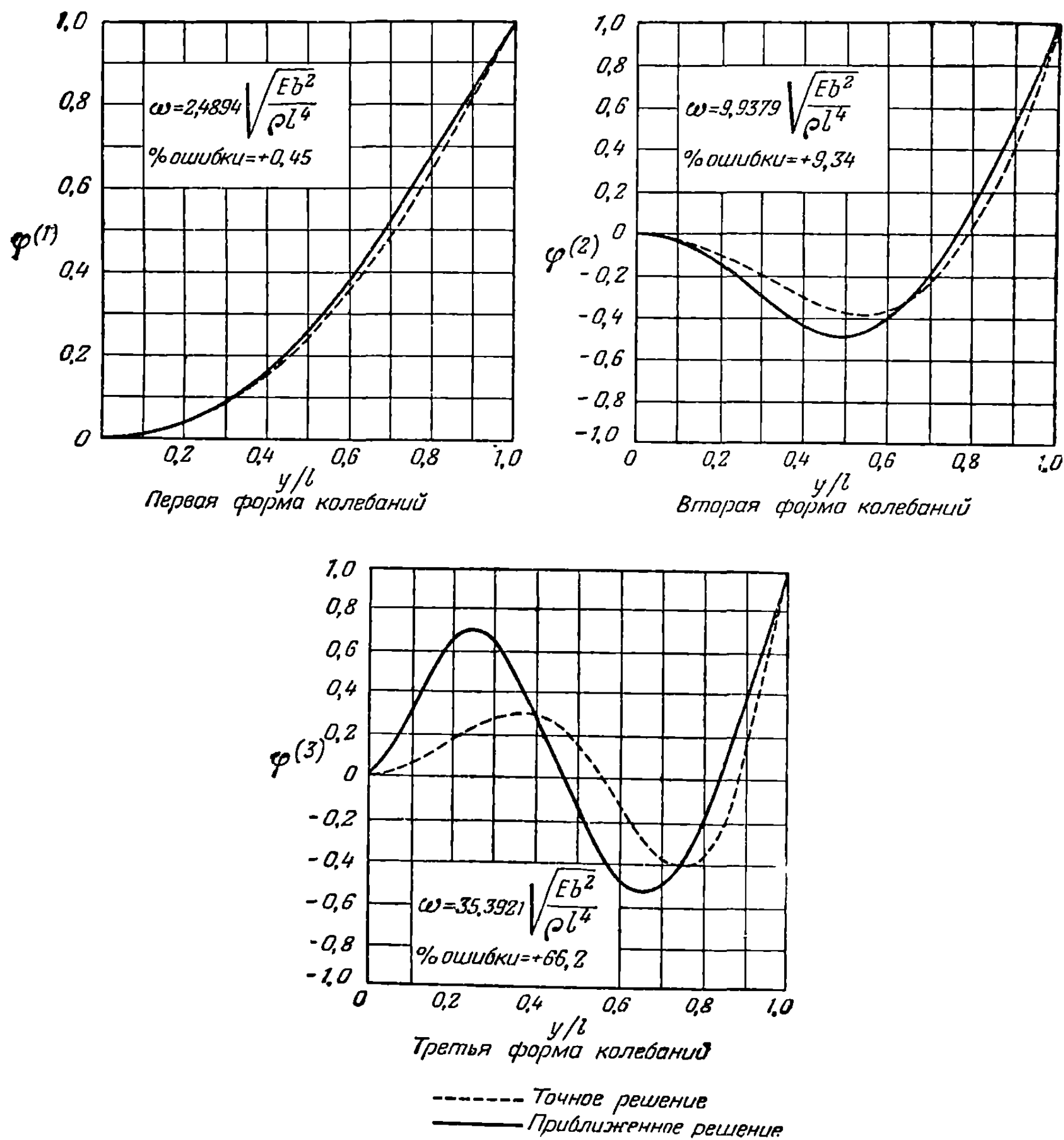
Нормальная функция второй формы получается, если в равенстве (a) положить  $\bar{q}_2 = 1$ ,  $\bar{q}_1 = -0,8702$ :

$$\{W^{(2)}\} = -0,8702 \{\gamma_1\} + \{\gamma_2\} = 0,1298 \begin{bmatrix} 0 \\ -0,1022 \\ -0,3016 \\ -0,4795 \\ -0,5654 \\ -0,5287 \\ -0,3679 \\ -0,1032 \\ 0,2342 \\ 0,6108 \\ 1,0000 \end{bmatrix}. \quad (o)$$

Окончательные выражения столбцевых матриц в равенствах (n) и (o) нормированы таким образом, чтобы прогиб на конце балки равнялся единице. Сравнение этих результатов с имеющимся точным решением (4-1) показано на фиг. 4-4. Мы видим, что в данном



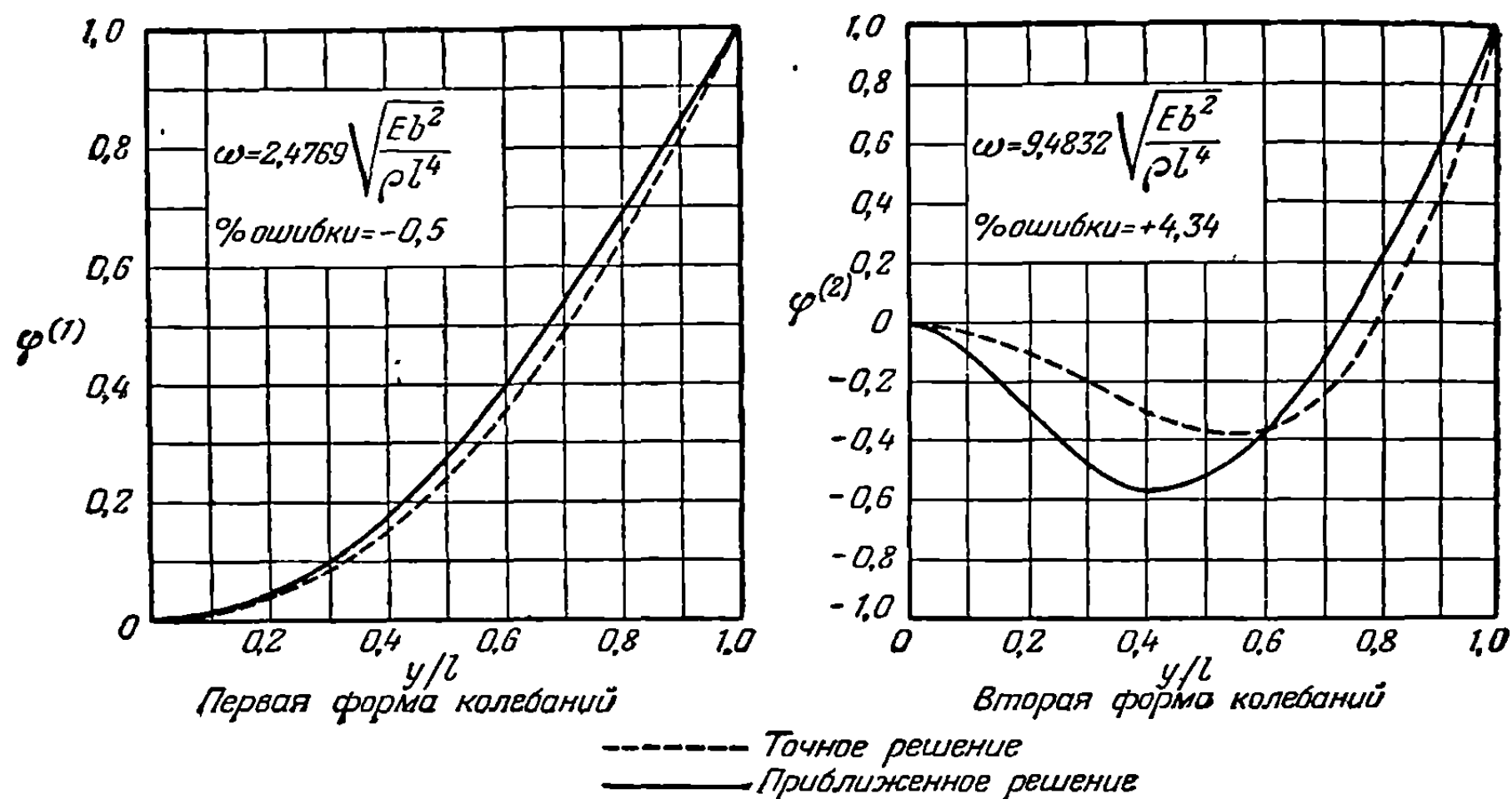
Фиг. 4-4. Метод Рэлея — Ритца (два полинома).



Фиг. 4-5. Метод Рэлея — Ритца (три полинома).

случае только приближенное решение, соответствующее первой форме колебаний, может считаться удовлетворительно совпадающим с точным, хотя и здесь ошибка довольно значительна. На фиг. 4-5 изображены результаты, получающиеся при использовании трех полиномиальных функций  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), определяемых равенством (4-28). Мы видим, что совпадение точного и приближенного решений для первой формы колебаний много лучше, чем при предыдущей аппроксимации; однако совпадение для второй и третьей форм колебаний является, вообще говоря, неудовлетворительным. Если выбрать задаваемые функции прогиба иначе, например взять в качестве этих функций нормальные функции для однородной консольной балки, то мы получим, по-видимому, более удовлетворительные результаты, нежели приведенные выше. Однако получающиеся таким образом нормальные функции могут оказаться более громоздкими для использования, чем использованные выше полиномиальные.

Пример 4-2. Вычислить две первые нормальные функции и частоты собственных колебаний для консольной балки, изображенной на фиг. 4-3, по модифицированному методу Рэлея — Ритца и сравнить результат с точным решением.



Фиг. 4-6. Модифицированный метод Рэлея — Ритца (два полинома).

*Решение.* Модифицированный метод Рэлея — Ритца можно применить к сужающейся балке, составив систему уравнений, определяемую матричным уравнением (4-27),

$$[\gamma] \begin{bmatrix} m \\ \bar{W} \end{bmatrix} [\gamma]' \{q\} = \omega^2 [\gamma] \begin{bmatrix} m \\ \bar{W} \end{bmatrix} [C] \begin{bmatrix} m \\ \bar{W} \end{bmatrix} [\gamma]' \{q\}. \quad (4-27)$$

Используя те же самые полиномиальные функции, что и в примере 4-1, можно по данным примера 4-1 построить левую часть матричного уравнения (4-27). В правую часть входит матрица коэффициентов влияния балки. Эти коэффициенты вычисляются при помощи уравнений (2-114) и (2-115) при условии пренебрежения деформациями сдвига; полученный результат имеет вид

$$[C] = \frac{15}{128} \frac{l^3}{Eb^3} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00450 & 0,01146 & 0,01841 & 0,02538 & 0,03232 & 0,03929 & 0,04624 & 0,05320 & 0,06015 & 0,06711 \\ 0 & 0,01146 & 0,03875 & 0,06923 & 0,09970 & 0,13017 & 0,16065 & 0,19113 & 0,22161 & 0,25209 & 0,28256 \\ 0 & 0,01841 & 0,06923 & 0,14125 & 0,21704 & 0,29283 & 0,36861 & 0,44441 & 0,52020 & 0,59599 & 0,67177 \\ 0 & 0,02538 & 0,09970 & 0,21704 & 0,36150 & 0,51209 & 0,66268 & 0,81326 & 0,96385 & 1,11444 & 1,26502 \\ 0 & 0,03232 & 0,13017 & 0,29283 & 0,51209 & 0,77075 & 1,03742 & 1,30409 & 1,57075 & 1,83741 & 2,10409 \\ 0 & 0,03929 & 0,16065 & 0,36861 & 0,66268 & 1,03742 & 1,46825 & 1,91133 & 2,35440 & 2,79747 & 3,24056 \\ 0 & 0,04624 & 0,19113 & 0,44441 & 0,81326 & 1,30409 & 1,91133 & 2,60475 & 3,31748 & 4,03020 & 4,74294 \\ 0 & 0,05320 & 0,22161 & 0,52020 & 0,96385 & 1,57075 & 2,35440 & 3,31748 & 4,42150 & 5,55928 & 6,69705 \\ 0 & 0,06015 & 0,25209 & 0,59599 & 1,11444 & 1,83741 & 2,79747 & 4,03020 & 5,55928 & 7,34400 & 9,19542 \\ 0 & 0,06711 & 0,28256 & 0,67177 & 1,26502 & 2,10409 & 3,24056 & 4,74294 & 6,69705 & 9,19542 & 12,23600 \end{bmatrix} \quad (a)$$

Комбинируя различные матрицы в уравнении (4-27), используя данные примера 4-1 и приведенное выше выражение для матрицы  $[C]$ , получаем следующее характеристическое

уравнение:

$$0,05367b\rho l \begin{bmatrix} 3,4282 & 2,9401 \\ 2,9401 & 2,5799 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} = 0,0003375 \frac{\rho^2 l^5}{Eb} \omega^2 \begin{bmatrix} 87,3827 & 76,3653 \\ 76,3653 & 66,8419 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix}. \quad (b)$$

Разлагая детерминант и решая уравнение (b), получаем следующие выражения для частот и отношений амплитуд:

$$\omega_1 = 2,4769 \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_2} = 0,116, \quad (c)$$

$$\omega_2 = 9,4832 \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_2} = -0,875. \quad (d)$$

Первые две нормальные функции получаются нормированием столбцовых матриц, определяемых равенствами

$$\{W^{(1)}\} = 0,116 \{\gamma_1\} + \{\gamma_2\}, \quad (e)$$

$$\{W^{(2)}\} = -0,875 \{\gamma_1\} + \{\gamma_2\}, \quad (f)$$

где матрицы  $\{\gamma_1\}$  и  $\{\gamma_2\}$  определены и рассмотрены в примере 4-1. Полученные таким образом результаты сравниваются с точным решением на фиг. 4-6. Сравнение обнаруживает преимущество модифицированного метода Рэлея—Ритца перед классическим методом Рэлея—Ритца. Частоты получаются более точно, однако приближения для нормальных функций улучшаются несущественно.

**4-3. Определение нормальных функций и частот собственных колебаний из интегрального уравнения.** В третьей главе мы видели, что нормальные функции и частоты собственных колебаний некоторой конструкции можно выразить через решения некоторых однородных интегральных уравнений. Например, в случае балки, свойства которой изменяются по ее длине, соответствующее интегральное уравнение имеет вид

$$W(y) = \omega^2 \int_0^l C(y, \eta) W(\eta) m(\eta) d\eta. \quad (4-32)$$

Интегральное уравнение является более удобным для приближенного численного решения и, вообще говоря, лучшей основой для такого решения, нежели соответствующее дифференциальное уравнение. Можно сказать, что это, по существу, объясняется тем фактом, что основной операцией, выполняемой над заданными функциями, здесь является интегрирование, а не дифференцирование.

(а) *Применение интегрального уравнения к системе сосредоточенных масс.* По-видимому, наиболее грубое приближенное решение уравнения (4-32) получается при произвольной замене непрерывной балки невесомой балкой, несущей  $n$  сосредоточенных масс. Интеграл в этом случае приводится к виду некоторой суммы, а уравнение удовлетворяется для каждой из масс и определяет следующую систему характеристических уравнений:

$$W_i = \omega^2 \sum_{j=1}^n C_{ij} M_j W_j, \quad (j = 1, \dots, n), \quad (4-33)$$

где  $M_j$  представляют собой сосредоточенные массы. Уравнение (4-33) может быть записано в матричной форме:

$$\{W\} = \omega^2 [C] \left[ \sum M \right] \{W\}. \quad (4-34)$$

Выражение (4-34) аналогично характеристическим уравнениям, получающимся в методе Рэлея—Ритца. Однако множитель  $\omega$  находится в другом месте, что очень существенно для численных расчетов методом последовательных приближений. Численные примеры применения метода сосредоточенных масс даны в примерах 4-4, 4-5, 4-6 и 4-7 настоящей главы.

(b) *Метод совмещения, использующий численное интегрирование.* Приближенное численное решение однородного интегрального уравнения можно получить, удовлетворяя это уравнение в конечном числе выбранных точек. Этот процесс известен под названием метода совмещения. Предположим, что мы хотим удовлетворить интегральному уравнению собственных колебаний (уравнение (4-32)) в  $n$  точках по длине балки. Мы можем, таким образом, записать

$$W_i = \omega^2 \int_0^l C(y_i, \eta) m(\eta) W(\eta) d\eta, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4-35)$$

Интегрируя уравнение (4-35) численно при помощи весовых чисел, получаем

$$W_i = \omega^2 \sum_{j=1}^n C_{ij} m_j \bar{W}_j W_j, \quad (4-36)$$

где  $W_j = W(y_j)$ . В матричных обозначениях имеем

$$\{W\} = \omega^2 [C] \sum m \sum \bar{W} \sum \{W\}. \quad (4-37)$$

Этот метод построения совместных уравнений дает нам прямое решение задачи. Уравнения могут быть построены очень легко и быстро, если изменение упругих и инерционных свойств является достаточно гладким. Если это не так, то метод все же остается полезным, однако его применение уже требует некоторого искусства и дополнительных рассуждений. Так как число уравнений равняется числу узлов совмещения и так как число узлов совмещения должно быть достаточным для получения нужного числа ординат кривой прогиба, то обычно бывает необходимо решать большое число совместных уравнений. Решение этих уравнений составляет в подобных задачах главную часть всей работы. Сравнение результатов, полученных методом совмещения при разбиении балки одиннадцатью сечениями, и точного решения представлено на фиг. 4-7. Мы видим, что первые три нормальные функции довольно хорошо совпадают с точным решением, однако только две первые частоты дают удовлетворительное совпадение. Значительная ошибка в частоте третьей формы колебаний объясняется, вероятно, ошибками в процессе численного интегрирования. Следует, по-видимому, ожидать прогрессивного возрастания этих ошибок с переходом к более высоким формам колебаний.

Следует отметить, что решение задачи методом совмещения при разбиении консольной балки одиннадцатью сечениями приводится к решению системы десяти однородных линейных уравнений. Решения таких систем не могут быть достаточно просто получены при помощи простых методов, использованных в примерах 4-1 и 4-2. В п. 4-5 рассматриваются другие, более мощные методы решения таких уравнений.

(c) *Метод совмещения, использующий выбранные функции и узловые функции.* Другой вариант метода совмещения основывается на представлении прогиба в виде наложения выбранных нормальных функций, а именно

$$W(y) = \sum_{j=1}^n \gamma_j(y) \bar{q}_j \quad (4-38)$$

Здесь  $\gamma_j(y)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) представляют собой выбранные функции, удовлетворяющие граничным условиям. Подставляя это выражение в интегральное уравнение (4-32), получаем

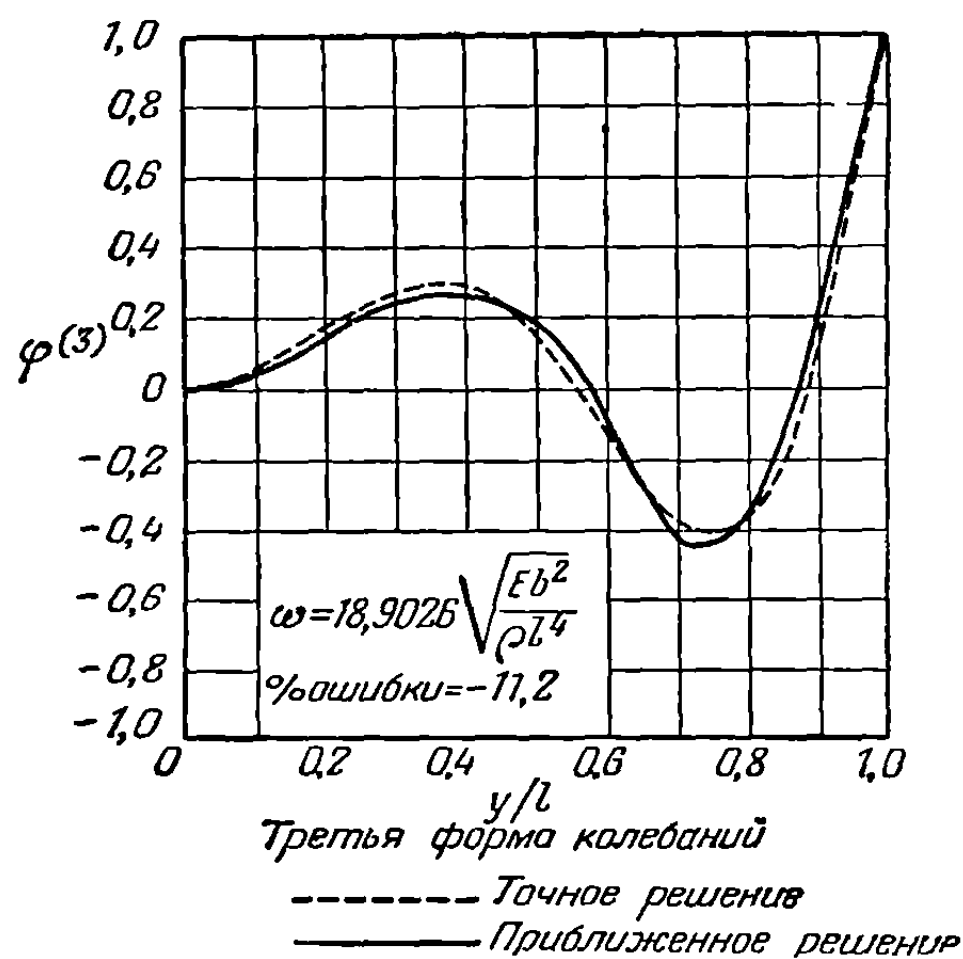
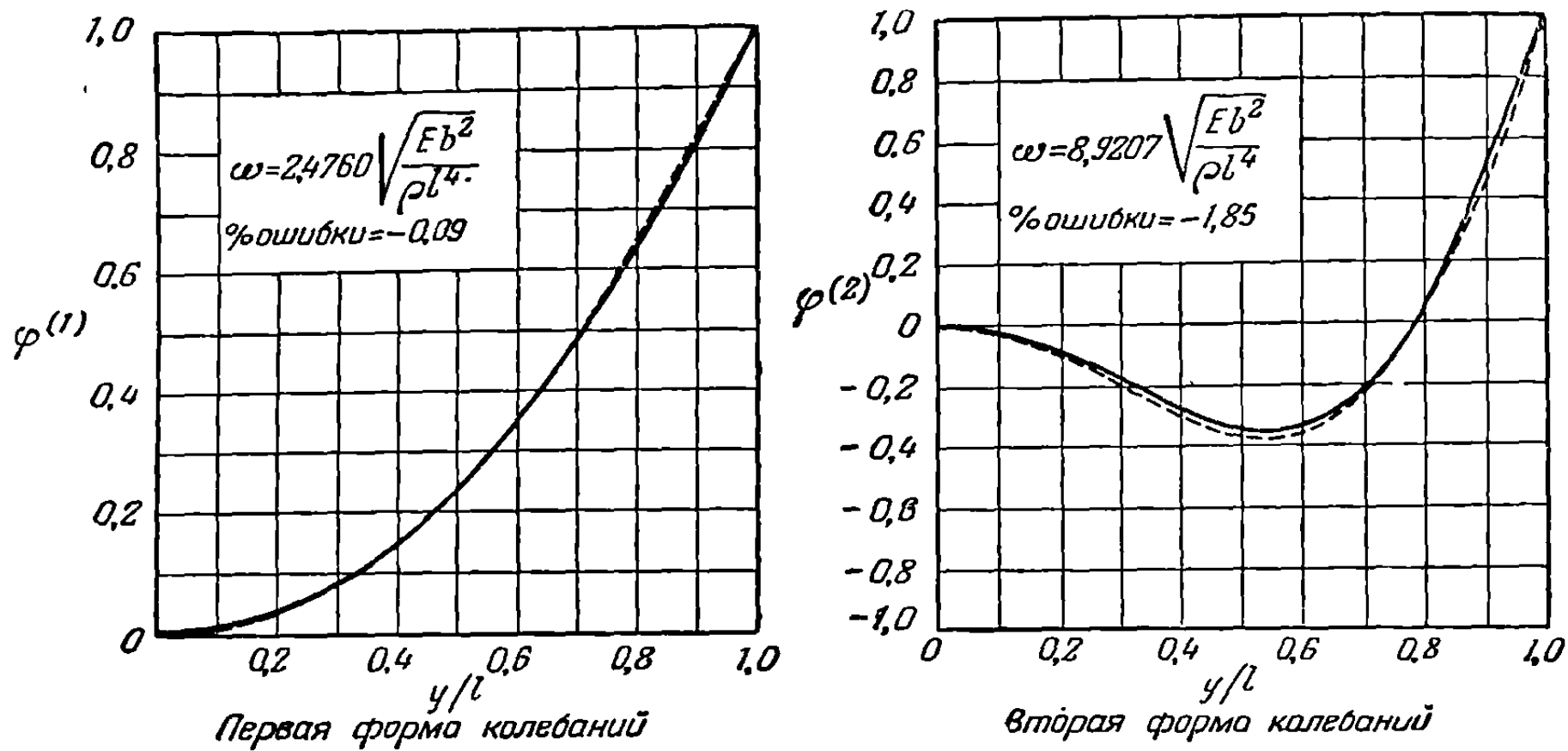
$$\sum_{j=1}^n \gamma_j(y) \bar{q}_j = \omega^2 \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^l C(y, \eta) m(\eta) \gamma_j(\eta) d\eta \right\} \bar{q}_j \quad (4-39)$$



Потребуем теперь, чтобы уравнение (4-39) удовлетворялось в  $n$  сечениях (в том числе и в корневом сечении), каждое из которых отвечает некоторому индексу  $i$ . Имеем

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j(y_i) \bar{q}_j = \omega^2 \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^l C(y_i, \eta) m(\eta) \gamma_j(\eta) d\eta \right\} \bar{q}_j, \quad (i=0, 1, \dots, n). \quad (4-40)$$

Так как корневое сечение на фиг. 4-3 является нулевым, то индекс  $i$  охватывает все сечения от нулевого до  $n$ -го. Интеграл в уравнении (4-40) может быть



Фиг. 4-7. Метод совмещения, использующий численное интегрирование (11 сечений).

определен численно при помощи весовых чисел, и мы получаем характеристические уравнения

$$\sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \bar{q}_j = \omega^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^n C_{ik} m_k \bar{W}_k \gamma_{kj} \bar{q}_j, \quad (i=0, 1, \dots, n), \quad (4-41)$$

где  $\gamma_{ij} = \gamma_j(y_i)$  и  $C_{ik} = C(y_i, y_k)$ . В матричных обозначениях имеем

$$[\gamma] \{\bar{q}\} = \omega^2 [C] \{\underline{m}\} \{\bar{W}\} [\gamma] \{\bar{q}\}. \quad (4-42)$$

Метод совмещения может быть упрощен, если использовать интерполяционные функции, т. е. функции, дающие аналитические выражения функций  $W(y)$

через некоторое число значений этой функции  $W_j$  в определенных точках:

$$W(y) = \sum_{j=0}^n \gamma_j(y) W_j. \quad (4-43)$$

Суммирование в равенстве (4-43) начинается с нуля, чтобы было включено и корневое сечение. Такое представление является возможным только в том случае, если функции  $\gamma_j(y)$  удовлетворяют условиям

$$\gamma_j(y_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (4-44)$$

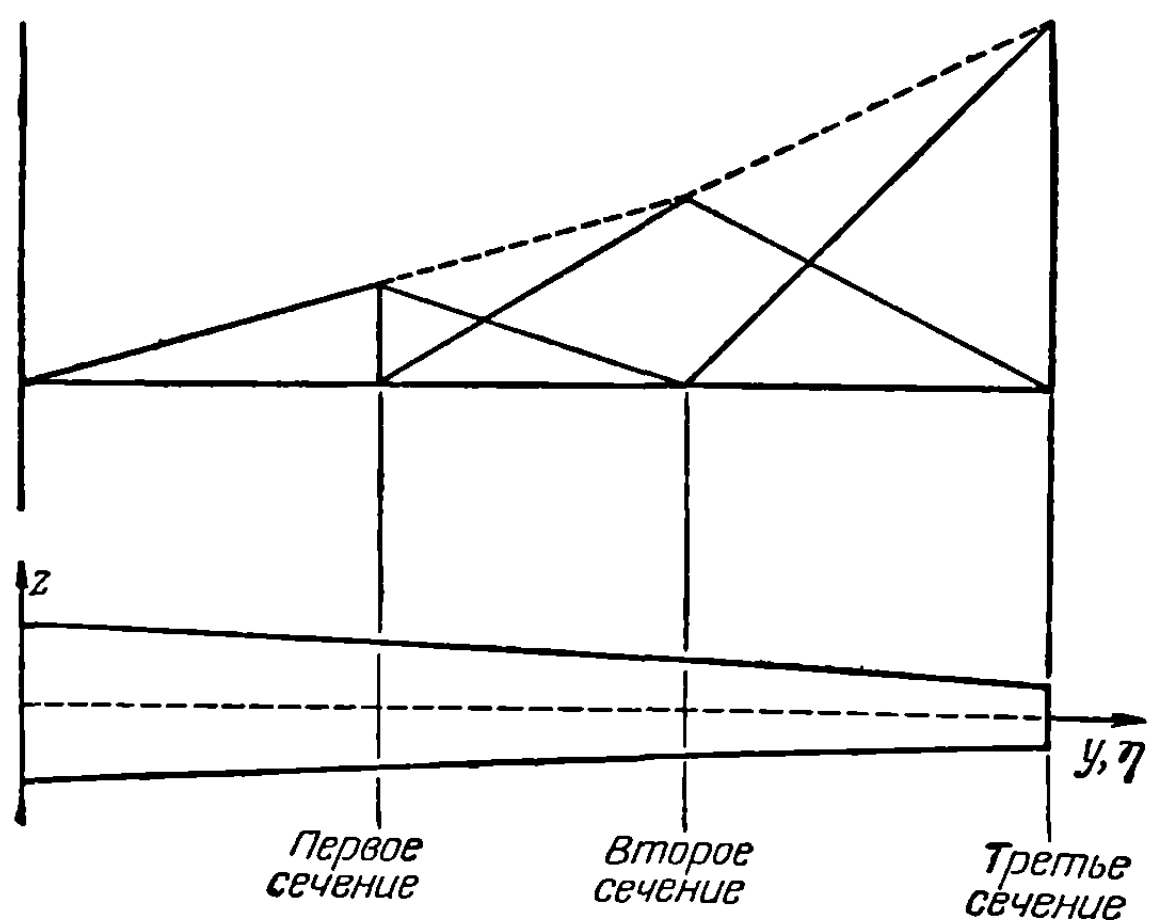
Внося выражение (4-43) в уравнение (4-32) и требуя, чтобы это уравнение было удовлетворено в  $n$  сечениях, находим

$$W_i = \omega^2 \sum_{j=0}^n \left\{ \int_0^l C(y_i, \eta) m(\eta) \gamma_j(\eta) d\eta \right\} W_j, \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (4-45)$$

и в матричной форме, используя численное интегрирование, получаем

$$\{W\} = \omega^2 [C] [\sum m \sum] [\sum \bar{W} \sum] [\gamma] \{W\}. \quad (4-46)$$

Одна полезная форма интерполяционной функции носит название узловой функции. Раушер [4-6] выдвинул идею узловых функций в качестве некоторого улучшения метода сосредоточенных масс, учитывающего непрерывность распределения масс, но сохраняющего простоту выбора конечной системы ординат в качестве обобщенных координат. В наиболее простой форме узловые функции строятся по кривым прогибов, определяемых сосредоточенными нагрузками, действующими в некоторых выбранных сечениях вдоль балки. Для консольной балки имеем



Фиг. 4-8. Треугольные кривые нагружения для улучшенного способа вычисления узловых функций.

Для консольной балки имеем

$$\gamma_i(y) = \sum_{j=1}^n C(y, \eta_j) P_{ij}, \quad (4-47)$$

$$(i = 1, \dots, n),$$

где  $P_{ij}$  представляет собой сосредоточенную силу, приложенную

в  $j$ -м сечении. Условие того, что  $\gamma_i(y)$  представляет собой интерполяционную функцию, имеет вид

$$\gamma_i(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y = y_i, \\ 0 & \text{при } y = y_k \ (y_k \neq y_i). \end{cases} \quad (4-48)$$

Применяя это условие к соотношению (4-47), имеем

$$\sum_{j=1}^n C_{kj} P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = i, \\ 0 & \text{при } k \neq i. \end{cases} \quad (4-49)$$

Уравнения (4-49) составляют систему совместных уравнений, которую можно разрешить относительно величин  $P_{ij}$ . Подставив полученные значения этих величин в равенство (4-47), получим интерполяционные, или узловые, функции  $\gamma_i(y)$ .

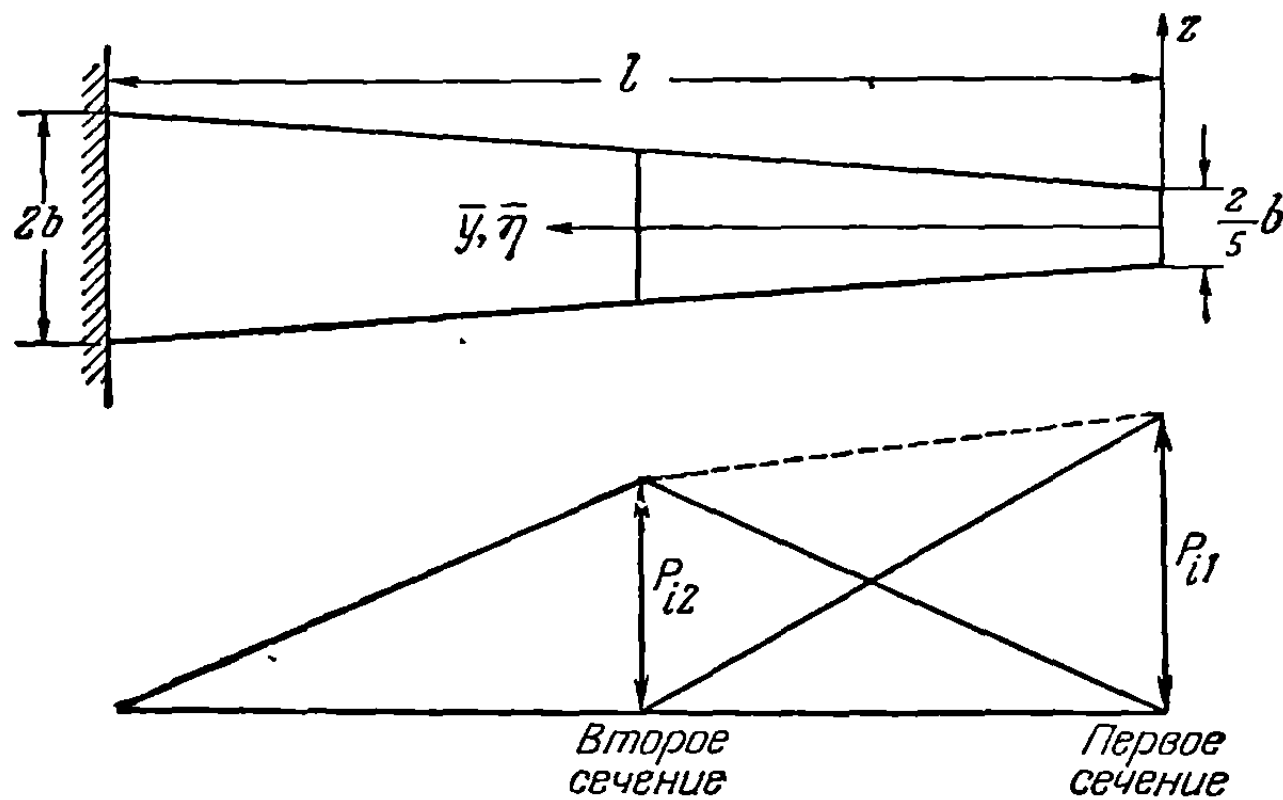
Узловые функции могут быть дополнительно улучшены, если использовать вместо сосредоточенных нагрузок треугольные нагрузки, вершины каждой из которых находятся в одном из сечений, а основание соединяет смежные с вершиной сечения (см. фиг. 4-8). Пунктирная линия на чертеже представляет собой сумму подобных нагрузок. Такой тип нагрузок, по-видимому, обеспечивает кривую прогибов, более близкую к кривой, определяющей вид некоторой формы колебаний балки с распределенной массой, чем кривая, соответствующая сосредоточенным нагрузкам. Можно получить дальнейшее улучшение, если умножить треугольные нагрузки на распределенные массы и использовать получающиеся нагрузки при построении узловых функций. Если на балке имеются сосредоточенные массы, последний метод учитывает также и их.

**Пример 4-3.** Вычислить две первые нормальные функции и частоты собственных колебаний сужающейся консольной балки, изображенной на фиг. 4-3, при помощи метода совмещения, использующего узловые функции. Сравнить результат с точным решением.

**Решение.** Характеристические уравнения метода узловых функций получаются из уравнения

$$\{W\} = \omega^2 [C] \left[ \sum m \right] \left[ \sum \bar{W} \right] [\gamma] \{W\}. \quad (4-46)$$

Рассмотрим два сечения: одно в середине и другое на конце балки (см. фиг. 4-9). Узловые функции в рассматриваемом примере будут построены при помощи треугольных нагрузок, умноженных на распределенную массу балки. Таким образом, мы должны найти



Фиг. 4-9. Треугольные кривые нагружения для случая двух узловых функций.

прогибы балки, обуславливаемые нагрузками, кривые распределения которых изображены на фиг. 4-9. За начало координат для удобства принимается конец балки. Две необходимые узловые функции определяются соотношениями

$$\gamma_1(\bar{y}) = P_{11}f_1(\bar{y}) + P_{12}f_2(\bar{y}), \quad (a)$$

$$\gamma_2(\bar{y}) = P_{21}f_1(\bar{y}) + P_{22}f_2(\bar{y}), \quad (b)$$

где

$$f_1(\bar{y}) = \int_0^{l/2} C(\bar{y}, \bar{\eta}) \left(1 - \frac{2\bar{\eta}}{l}\right) m(\bar{\eta}) d\bar{\eta}, \quad (c)$$

$$f_2(\bar{y}) = \int_0^{l/2} C(\bar{y}, \bar{\eta}) \left(\frac{2\bar{\eta}}{l}\right) m(\bar{\eta}) d\bar{\eta} + \int_{l/2}^l C(\bar{y}, \bar{\eta}) \left(2 - \frac{2\bar{\eta}}{l}\right) m(\bar{\eta}) d\bar{\eta}. \quad (d)$$

Коэффициенты  $P_{ij}$  определяются из следующего условия, которое получается из равенства (4-49):

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(0) & f_1\left(\frac{l}{2}\right) \\ f_2(0) & f_2\left(\frac{l}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (e)$$

Выполнив вычисления в формулах (с) и (d), найдем, что

$$\begin{bmatrix} f_1(0) & f_1\left(\frac{l}{2}\right) \\ f_2(0) & f_2\left(\frac{l}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1385 & 0,0307 \\ 0,1510 & 0,0473 \end{bmatrix} \frac{\rho l^4}{Eb^2}. \quad (f)$$

Обращая матрицу (f), согласно равенству (e), получаем

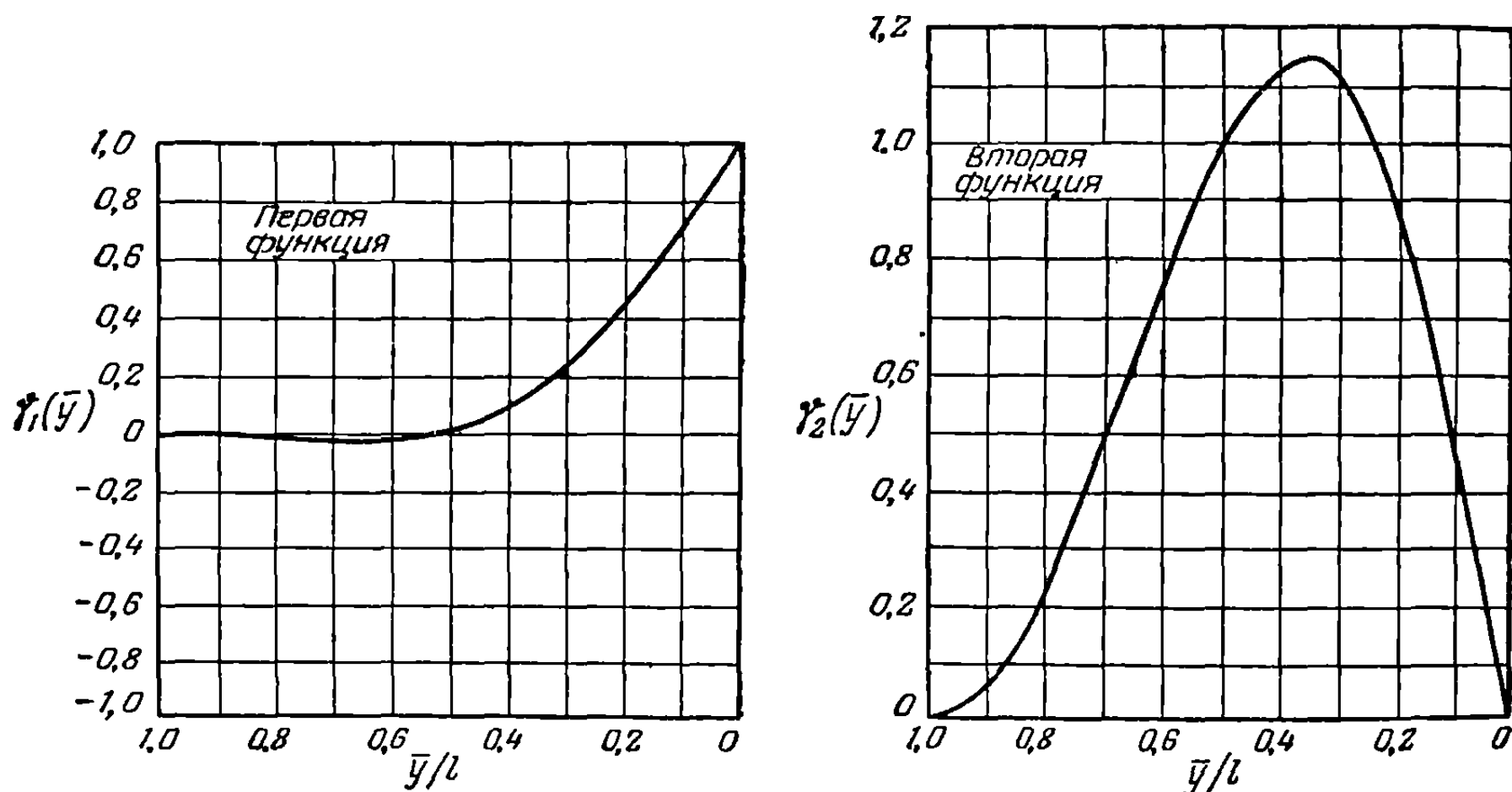
$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,602 & -15,937 \\ -78,450 & 71,938 \end{bmatrix} \frac{Eb^2}{\rho l^4}. \quad (g)$$

Используя значения коэффициентов  $P_{ij}$ , определяемых уравнением (g), и равенства (a) и (b), мы получаем выражения узловых функций в следующем виде:

$$\gamma_1(\bar{y}) = \frac{Eb^2}{\rho l^4} \{24,602 f_1(\bar{y}) - 15,937 f_2(\bar{y})\}, \quad (h)$$

$$\gamma_2(\bar{y}) = \frac{Eb^2}{\rho l^4} \{-78,450 f_1(\bar{y}) + 71,938 f_2(\bar{y})\}, \quad (i)$$

где функции  $f_1(\bar{y})$  и  $f_2(\bar{y})$  определяются соответственно уравнениями (с) и (d). Вычисляя значения функций  $\gamma_1(\bar{y})$  и  $\gamma_2(\bar{y})$ , определяемых уравнениями (h) и (i) в одиннадцати



Фиг. 4-10. Узловые функции.

сечениях, разделяющих балку по длине на равные части, получим следующие результаты:

$$\{\gamma_1\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,70122 \\ 0,43248 \\ 0,22252 \\ 0,08023 \\ 0 \\ -0,03251 \\ -0,03399 \\ -0,02071 \\ -0,00634 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (j)$$

$$\{\gamma_2\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,49084 \\ 0,88830 \\ 1,10964 \\ 1,13677 \\ 1 \\ 0,76038 \\ 0,48460 \\ 0,23455 \\ 0,06247 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (k)$$

Построение узловых функций  $\gamma_1(\bar{y})$  и  $\gamma_2(\bar{y})$  показано на фиг. 4-10.

Согласно равенству (4-43), заданный прогиб балки выражается в виде

$$\{W\} = \{\gamma_1\} W_1 + \{\gamma_2\} W_2, \quad (l)$$

где  $\{\gamma_1\}$  и  $\{\gamma_2\}$  представляют собой столбцевые матрицы узловых функций, определяемые соответственно равенствами (j) и (k). Матрица  $[\gamma]$  в характеристическом уравнении (4-46) принимает, таким образом, вид

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,70122 & 0,49084 \\ 0,43248 & 0,88830 \\ 0,22252 & 1,10964 \\ 0,08023 & 1,13677 \\ 0 & 1 \\ -0,03251 & 0,76038 \\ -0,03399 & 0,48460 \\ -0,02071 & 0,23455 \\ -0,00634 & 0,06247 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (m)$$

Матрица коэффициентов влияния в уравнении (4-46) представляет собой некоторую матрицу с двумя строками и одиннадцатью столбцами; эта матрица получается, если взять строки матрицы уравнения (a) примера (4-2), соответствующие сечениям, расположенным в середине балки и на ее конце, в следующем виде:

$$[C] = \frac{15}{128} \frac{l^3}{Eb^3} \times \begin{bmatrix} 12,23600 & 9,19542 & 6,69705 & 4,74294 & 3,24056 & 2,10409 & 1,26502 & 0,67177 & 0,28256 & 0,06711 & 0 \\ 2,10409 & 1,83741 & 1,57075 & 1,30409 & 1,03742 & 0,77075 & 0,51209 & 0,29283 & 0,13017 & 0,03232 & 0 \end{bmatrix}. \quad (n)$$

Матрица масс в уравнении (4-46) получается из матрицы (f) примера 4-1, если переименовать на противоположную систему нумерации сечений так, чтобы нулевое сечение оказалось на конце. Это дает

$$[m] = 2bp \begin{bmatrix} 0,20 & & & & & & & & & & \\ & 0,28 & & & & & & & & & \\ & & 0,36 & & & & & & & & \\ & & & 0,44 & & & & & & & \\ & & & & 0,52 & & & & & & \\ & & & & & 0,60 & & & & & \\ & & & & & & 0,68 & & & & \\ & & & & & & & 0,76 & & & \\ & & & & & & & & 0,84 & & \\ & & & & & & & & & 0,92 & \\ & & & & & & & & & & 1,0 \end{bmatrix}. \quad (o)$$

Весовая матрица в уравнении (4-46) тождественна с матрицей (g) примера 4-1. Подставляя матрицы (m), (n) и (o), приведенные выше, а также матрицу (g) примера 4-1 в уравнение (4-46) и преобразуя, получаем следующие характеристические уравнения:

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 17,0952 & 37,1150 \\ 3,59281 & 10,7742 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \times 0,00628924 \frac{\rho l^4}{Eb^2}. \quad (p)$$

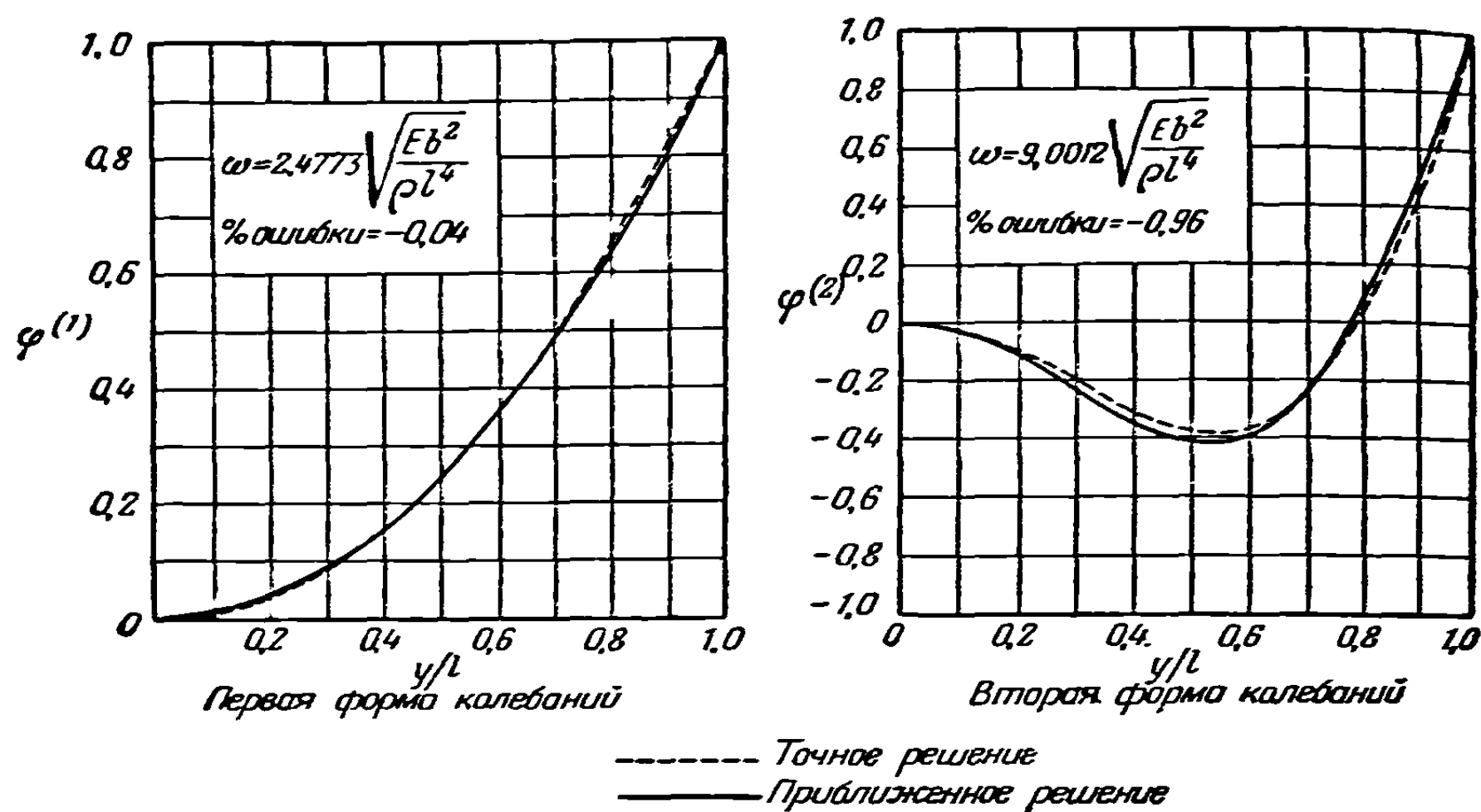
Решения уравнений (p) имеют вид

$$\omega_1 = 2,4773 \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \frac{W_1}{W_2} = 4,21178, \quad (q)$$

$$\omega_2 = 9,0012 \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \frac{W_1}{W_2} = -2,45261. \quad (r)$$

Полагая в уравнении (l)  $W_2 = 1$  и  $W_1 = 4,21178$ , получаем первую нормальную функцию; полагая в этом уравнении  $W_2 = 1$  и  $W_1 = -2,45261$ , получаем вторую нормальную функцию. Соответствующие рассматриваемому приближению нормированные нормальные

функции сравн а тся с точными на графике фиг. 4-11. Сравнение показывает, что метод с вмещения обеспечивает высокую точность результата в том случае, когда для вычисления двух первых форм колебания используются две узловые функции. Можно показат , что и в общем случае при применении того же самого числа узловых функции что и нужное число форм колебания, получаются прекрасные результаты.



Фиг. 4-11. Метод совмещения, использующий две узловые функции.

(d) *Метод прямой итерации Стодола — Вианелло.* Для решения уравнения (4-32) может быть непосредственно применен итеративный метод. Согласно этому методу задается некоторая функция  $f_1(y)$  в качестве нормальной функции первой формы колебаний. Подставляя эту функцию в правую часть интегрального уравнения (4-32) и вычисляя интеграл, получаем

$$f_2(y) = \int_0^l C(y, \eta) m(\eta) f_1(\eta) d\eta. \quad (4-50)$$

При написании уравнения (4-50) мы опустили множитель  $\omega^2$ , поскольку нормальные функции собственных колебаний вычисляются только с точностью до постоянного множителя. Далее повторяем процесс, используя функцию  $f_2(y)$  в качестве заданной функции в интеграле, и так далее, пока не будет установлена удовлетворительная сходимость. Процесс будет сходиться к нормальной функции основной формы колебаний.

На практике принято после каждой итерации нормировать получающуюся нормальную функцию так, чтобы получался единичный прогиб в сечении, где этот прогиб является наибольшим, например в случае консольной балки — на свободном конце. Обозначая нормированную нормальную функцию черточкой над символом соответствующей функции, имеем

$$\bar{f}_n(y) = \frac{f_n(y)}{f_n(l)}. \quad (4-51)$$

Таким образом, после  $n - 1$  итераций найдем

$$f_n(y) = \int_0^l C(y, \eta) m(\eta) \bar{f}_{n-1}(\eta) d\eta. \quad (4-52)$$

Однако если в процессе итерации аппроксимация улучшается, то мы после  $n-1$  итераций получим приближенное решение в следующем виде:

$$\bar{f}_{n-1}(y) \cong \omega^2 \int_0^l C(y, \eta) m(\eta) \bar{f}_{n-1}(\eta) d\eta. \quad (4-53)$$

Сравнивая уравнения (4-52) и (4-53), мы видим, что

$$\omega^2 \cong \frac{\bar{f}_{n-1}(y)}{f_n(y)}. \quad (4-54a)$$

Величина правой части этого равенства представляет собой некоторую функцию от  $y$ . Если мы возьмем в качестве некоторого приближения значение этой функции при  $y=l$ , то найдем, что

$$\omega^2 \cong \frac{1}{f_n(l)} \quad (4-54b)$$

и

$$\omega^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f_n(l)}. \quad (4-54c)$$

Сходимость будет наиболее быстрой, если первое выбранное выражение прогиба удовлетворяет граничным условиям, однако это условие не является необходимым. Удобной функцией для начала процесса является функция влияния при некотором частном значении параметра  $\eta$ , например при  $\eta = a$ :

$$f_1(y) = C(y, a). \quad (4-55)$$

Если  $a$  выбрано таким образом, что соответствующая точка располагается в окрестности свободного конца балки, то функция влияния будет иметь ту же общую форму, что и нормальная функция первой формы колебаний.

Процесс итерации всегда будет сходиться к нормальной функции первой формы колебаний. Это можно показать, разлагая заданную функцию в ряд по нормальным функциям собственных колебаний системы  $\varphi_r(y)$ , так что

$$f_1(y) = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r(y) \xi_r, \quad (4-56)$$

где  $\xi_r$  представляют собой коэффициенты, определяющие компоненту каждой формы собственных колебаний в заданной функции. Подставляя это выражение в равенство (4-50), получаем

$$f_2(y) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \int_0^l C(y, \eta) m(\eta) \varphi_r(\eta) d\eta \right\} \xi_r. \quad (4-57)$$

Так как  $\varphi_r(y)$  представляет собой нормальную функцию, то равенство (4-57) приводится к виду

$$f_2(y) = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r(y) \frac{\xi_r}{\omega_r^2}. \quad (4-58)$$

После  $n$ -й итерации имеем следующее выражение для ненормированной функции:

$$f_n(y) = \varphi_1(y) \frac{\xi_1}{(\omega_1^2)^n} + \varphi_2(y) \frac{\xi_2}{(\omega_2^2)^n} + \dots + \varphi_{\infty}(y) \frac{\xi_{\infty}}{(\omega_{\infty}^2)^n}. \quad (4-59)$$

Поскольку  $\omega_1$  представляет собой низшую частоту колебаний, а  $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \dots < \omega_{\infty}$ , то ясно, что при возрастании  $n$  все последующие члены становятся малыми сравнительно с первым. Таким образом,

$$f_n(y) \cong \varphi_1(y) \frac{\xi_1}{(\omega_1^2)^n}. \quad (4-60)$$



Так как рассмотренный выше процесс сходится к нормальной функции первой формы колебаний, то для вычисления нормальной функции второй формы колебаний при помощи того же процесса следует привлечь некоторые дополнительные соображения. Для получения нормальной функции второй формы колебаний необходимо удалить из выбранного выражения для прогиба компоненту, соответствующую первой форме колебаний. Это можно сделать, беря произвольную функцию  $h(y)$  и вычитая из нее ее компоненту, соответствующую первой форме колебаний:

$$f_1^{(2)}(y) = h(y) - \varphi_1(y) \xi_1. \quad (4-61)$$

Вычислим  $\xi_1$  таким образом, чтобы функция  $f_1^{(2)}(y)$  не имела компоненты, соответствующей первой форме колебаний. Для этого сделаем  $f_1^{(2)}(y)$  ортогональной к нормальной функции первой формы колебаний с весом  $m(y)$ . Таким образом,

$$\int_0^l f_1^{(2)}(y) \varphi_1(y) m(y) dy = \int_0^l h(y) \varphi_1(y) m(y) dy - \xi_1 \int_0^l \varphi_1^2(y) m(y) dy = 0, \quad (4-62)$$

так что

$$\xi_1 = \frac{\int_0^l h(y) \varphi_1(y) m(y) dy}{\int_0^l \varphi_1^2(y) m(y) dy}. \quad (4-63)$$

Освобождение получающейся функции от компонент, соответствующих первой форме колебаний, должно быть выполнено после каждой итерации. Это объясняется тем, что нормальная функция первой формы колебаний не может быть определена с достаточной точностью, а также тем, что интегралы, возможно, определяются численно, вследствие чего тоже могут возникнуть некоторые ошибки. При наличии в заданной функции некоторой компоненты, соответствующей первой форме колебаний, эта ошибка будет в процессе итерации возрастать. Нормальная функция третьей формы колебаний получается аналогичным образом путем освобождения заданной функции от компонент, соответствующих первой и второй формам колебаний, и так далее для более высоких форм колебаний. Этот процесс иногда называется „выметанием“ (см. [4—7]). Следует заметить, что сходимость итерационного процесса становится весьма плохой, когда две или более форм колебаний имеют близкую частоту.

Если интегральное уравнение приводится к матричной форме и затем применяется процесс итерации, такой процесс называется матричной итерацией. Этот метод, часто применяемый в практической работе, рассматривается в п. 4-5 настоящей главы.

(е) *Метод Галеркина*<sup>1)</sup>. Метод Галеркина решения дифференциальных и интегральных уравнений [4-8] может быть применен к однородному интегральному уравнению собственных колебаний. Сначала представим прогиб как наложение заданных функций, применяя тот же способ, что и в методе совмещения, использующем заданные функции:

$$W(y) = \sum_{j=1}^n \gamma_j(y) \bar{q}_j. \quad (4-38)$$

<sup>1)</sup> Описываемый ниже метод был предложен И. Г. Бубновым в 1913 г. в рецензии на известную работу С. П. Тимошенко, посвященную устойчивости упругих тонких пластин (отзыв о работе проф. С. П. Тимошенко об устойчивости упругих систем. Сборник института инженеров путей сообщения, вып. 31, Избранные труды, Судпромгиз, 1956, стр. 136—139). В 1915 г. метод И. Г. Бубнова был применен Б. Г. Галеркиным (Вестник инженеров, 1915). — Прим. ред.

Здесь  $\gamma_j(y)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) представляют собой некоторые заданные функции, удовлетворяющие граничным условиям. Подставляя выражение (4-38) в правую часть интегрального уравнения (4-32), мы получаем далее выражение для функции ошибки  $\mathcal{E}(y)$ :

$$\mathcal{E}(y) = \sum_{j=1}^n \left\{ \gamma_j(y) - \omega^2 \int_0^l C(y, \eta) \gamma_j(\eta) m(\eta) d\eta \right\} \bar{q}_j. \quad (4-64)$$

В соответствии с методом Галеркина потребуем, чтобы функция  $\mathcal{E}(y)$  была ортогональна к функциям  $\gamma_i(y) m(y)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), т. е. чтобы среднее с весом  $\gamma_i(y) m(y)$  значение этой функции равнялось нулю:

$$\int_0^l \mathcal{E}(y) \gamma_i(y) m(y) dy = 0. \quad (4-64a)$$

Подставив (4-64) в (4-64a), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \bar{q}_j \int_0^l \gamma_i(y) \gamma_j(y) m(y) dy = \\ = \omega^2 \sum_{j=1}^n \bar{q}_j \int_0^l \gamma_i(y) m(y) \int_0^l C(y, \eta) \gamma_j(\eta) m(\eta) d\eta dy, \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (4-65)$$

Равенства (4-65) определяют систему характеристических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} - \omega^2 L_{ij}) \bar{q}_j = 0, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4-66)$$

где

$$m_{ij} = \int_0^l \gamma_i \gamma_j m dy, \quad (4-67a)$$

$$L_{ij} = \int_0^l \gamma_i(y) m(y) \int_0^l C(y, \eta) \gamma_j(\eta) m(\eta) d\eta dy. \quad (4-67b)$$

Сравнивая уравнения (4-23) и (4-66), можно заметить, что метод Галеркина в применении к интегральным уравнениям приводит к тем же результатам, что и модифицированный метод Рэлея—Ритца, использующий функции влияния.

(f) *Итерированный модифицированный метод Рэлея—Ритца (Галеркина)*. На примере 4-2 мы видели, что модифицированный метод Рэлея—Ритца дает значения частот, более близкие к точным значениям, нежели классический метод Рэлея—Ритца. Однако приближенные представления нормальных функций не получаются существенно лучшими. Интересно отметить, что приближенные представления нормальных функций, получаемые при применении модифицированного метода Рэлея—Ритца, могут быть сильно улучшены при помощи однократной итерации интегрального уравнения. Таким образом, если нормальную функцию, получаемую при применении модифицированного метода Рэлея—Ритца, или, что эквивалентно, метода Галеркина,

$$W_r(y) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(y) \bar{q}_i^{(r)}, \quad (4-12)$$

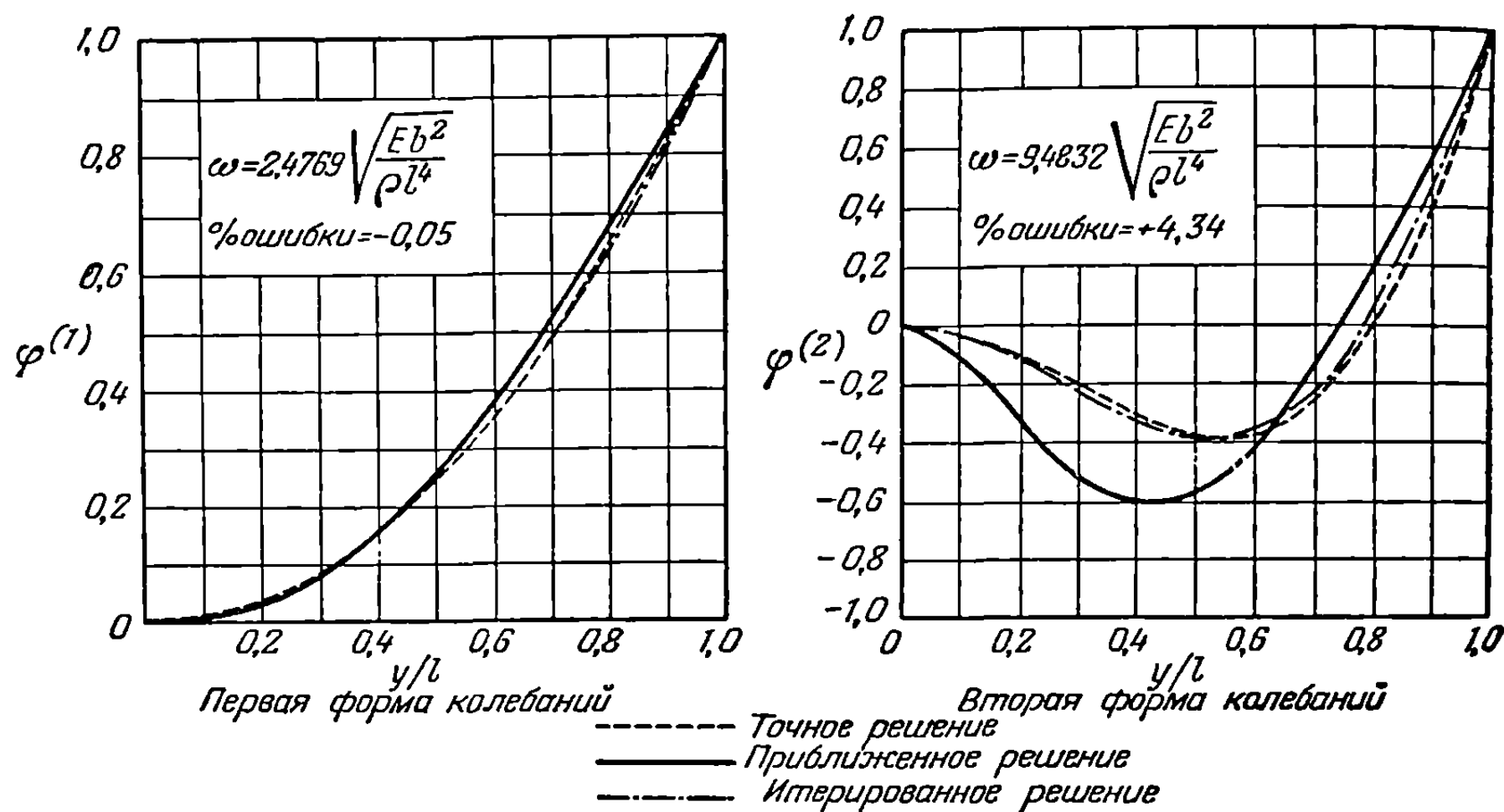
подставить в правую часть интегрального уравнения (4-32), то получим

$$[W_r(y)]_{(\text{итер.})} = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i^{(r)} \int_0^l C(y, \eta) \gamma_i(\eta) m(\eta) d\eta. \quad (4-68)$$

Улучшенное таким способом приближенное выражение нормальной функции получается при применении одного цикла процесса прямой итерации. Матричная форма уравнения (4-68) имеет вид

$$\{W_r(y)\}_{(итер)} = [C] \{m\} \{W\} [\gamma]' \{\bar{q}^{(r)}\}. \quad (4-69)$$

Для иллюстрации получающегося при применении этой операции улучшения приближенного выражения нормальных функций нормальные функции, найденные в примере 4-2, были один раз численно проитерированы согласно уравнению (4-69). Результаты представлены на фиг. 4-12. Мы видим, что первые две нормальные функции, полученные этим методом, близки к точному решению.



Фиг. 4-12. Модифицированный итерационный метод Рэля — Ритца (два полинома).

Хотя схема применения однократной итерации в качестве средства для улучшения приближенных представлений нормальных функций была проиллюстрирована здесь только на примере модифицированного метода Рэля — Ритца, она может быть, конечно, применена к приближенным представлениям нормальных функций, полученным любым другим методом. Итерация оказывается эффективной только для низкочастотных форм колебаний и может даже увеличить отклонение от точных значений при применении ее к нормальным функциям высокочастотных форм колебаний.

**4-4. Получение нормальных функций и частот собственных колебаний из дифференциальных уравнений.** Нормальные функции и частоты собственных колебаний тонких балок при кручении и изгибе могут быть получены из дифференциальных уравнений. Например, в третьей главе мы видели, что нормальные функции и частоты тонкой балки удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$(EIW''')'' - m\omega^2 W = 0. \quad (3-11)$$

Вообще говоря, дифференциальное уравнение является менее подходящим для приближенного решения задач колебания конструкций с нерегулярно распределенными характеристиками, нежели соответствующее интегральное уравнение (4-32). Например, метод совмещения может быть применен к уравнению (3-11), по существу, таким же способом, как и метод, рассмотренный в пп. 4-3(b) и 4-3(c). Однако если характеристики балки распределены по ее длине не регулярно, то результаты будут, вообще говоря, неудовлетворительными, если только не взять очень большое количество сечений. Это объясняется тем, что мы не учитываем свойства балки в промежутках между выбранными сечениями.

В противоположность этому в интегральном уравнении выполняемые интегрирования отражают свойства балки и в промежутках между узлами.

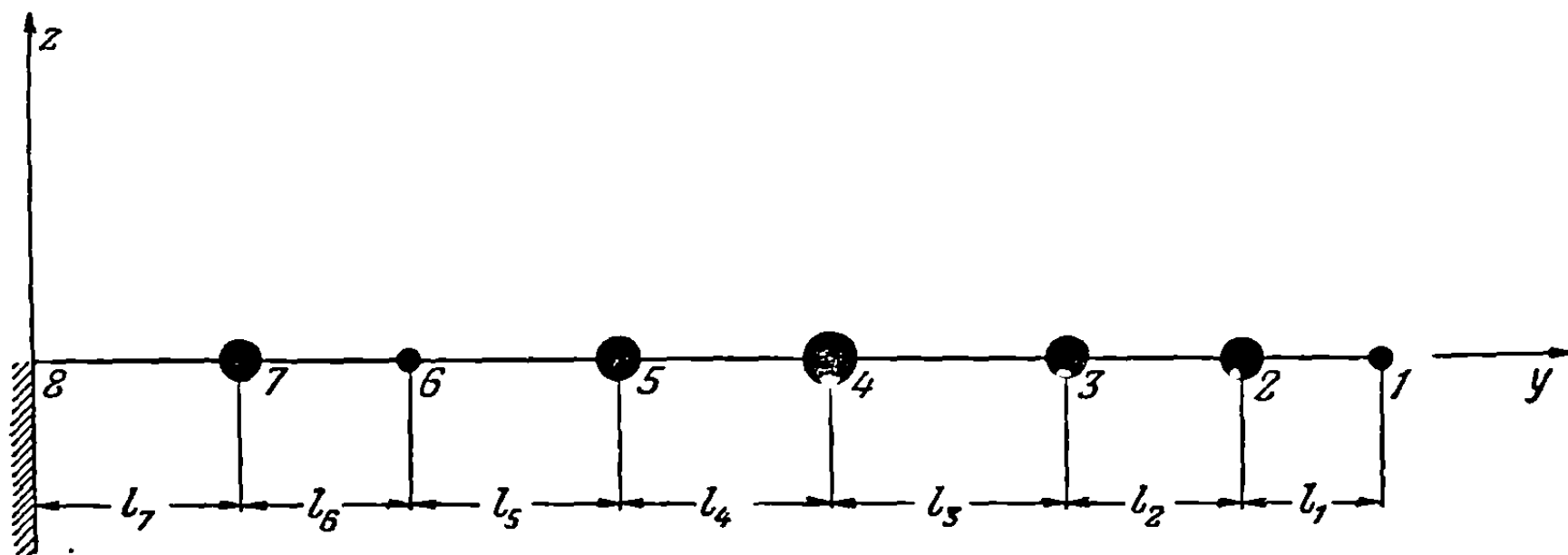
(а) *Метод прямой итерации Стодола — Вианелло.* Метод прямой итерации может быть применен к дифференциальному уравнению таким же способом, как и к соответствующему интегральному уравнению. Этот метод применяется к уравнению, получаемому последовательным интегрированием уравнения (3-11). Например, в случае консольной балки последовательное интегрирование уравнения (3-11) дает

$$W(y) = \omega^2 \int_0^y \int_0^y \frac{1}{EI(y)} \int_y^l \int_y^l m(y) W(y) dy dy dy dy. \quad (4-70)$$

Процесс итерации осуществляется тем же способом, что и для интегрального уравнения [см. п. 4-3(d)]. Задаем некоторой начальной функцией  $f_1(y)$  и подставляем ее в правую часть уравнения (4-70); в результате получаем

$$f_2(y) = \int_0^y \int_0^y \frac{1}{EI(y)} \int_y^l \int_y^l m(y) f_1(y) dy dy dy dy, \quad (4-71)$$

где функция  $f_2(y)$  представляет собой более близкое приближение к нормальной функции первой формы колебаний, если функция  $f_1(y)$  выбрана подходящим



Фиг. 4-13. Система сосредоточенных масс, используемая в методе Хольцера — Майклстэда.

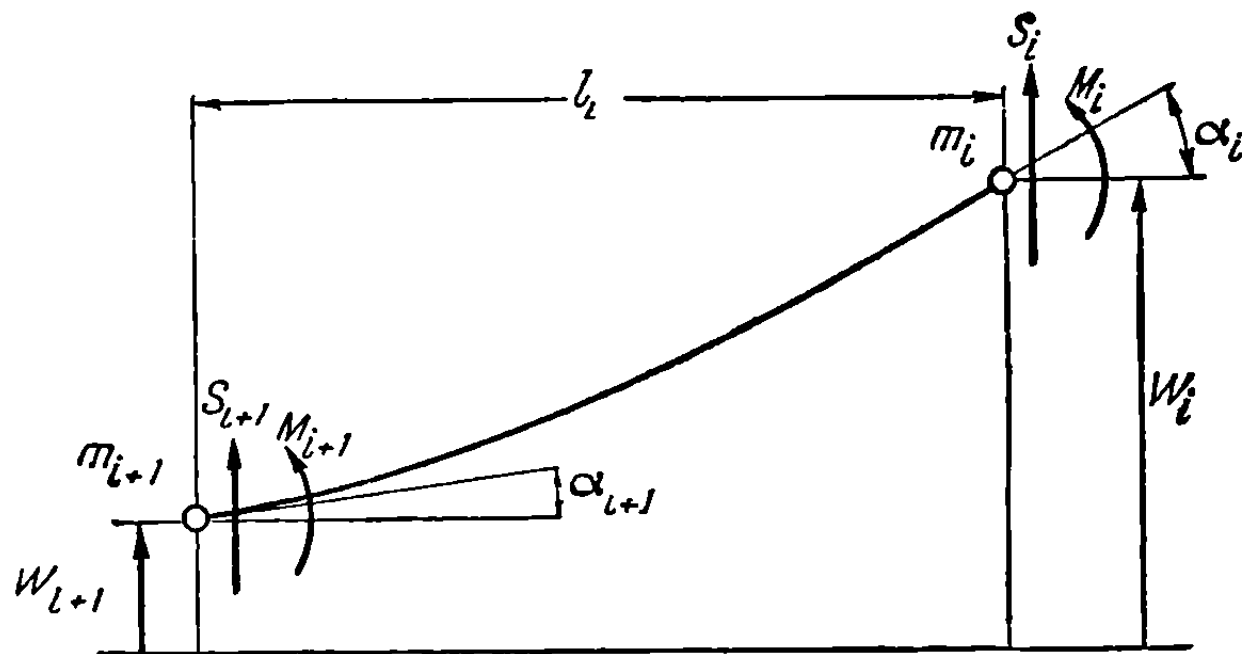
образом. При написании равенства (4-71) множитель  $\omega^2$  был опущен, так как нормальная функция определяется только с точностью до некоторого постоянного множителя. В случае балок с нерегулярно распределенными характеристиками вычисление по формуле (4-71) следует выполнять численными или графическими методами.

Итерационный процесс продолжается далее подстановкой функции  $f_2(y)$  в правую часть, и так далее до тех пор, пока не будет установлено достаточно близкое совпадение получающихся функций с нормальной функцией основной формы колебаний. Частота определяется по методу, описанному в п. 4-3(d), и нормируется в соответствии с равенством (4-54а). Нормальные функции более высоких форм колебаний получают очищением задаваемых и получающихся функций от компонент, соответствующих нижним формам, после каждой итерации, как описано в п. 4-3(d). Таким образом, прямая итерация дифференциального уравнения эквивалентна итерации интегрального уравнения, за исключением того, что упругие свойства балки выражаются в обоих уравнениях по-разному. В этом отношении интегральное уравнение допускает более общий подход, поскольку выражения функций влияния могут учитывать такие эффекты, как например, деформацию сдвига, которые не учитываются уравнением (4-70).

(б) *Метод Хольцера — Майклстэда.* Полезный и практичный метод вычисления нормальных функций и частот, известный под названием метода Хольцера, использовался инженерами в течение многих лет. Он был развит Хольцером [4-9]

главным образом применительно к задачам крутильных колебаний. При исследовании крыльев самолета бывает полезным одно обобщение метода Хольцера на задачи изгиба балок, данное Майклстэдом [4-10]. Мы будем называть этот метод методом Хольцера — Майклстэда. И метод Хольцера и обобщение этого метода, данное Майклстэдом, представляют собой, по существу, метод численного решения дифференциальных уравнений системы с сосредоточенными параметрами.

Рассмотрим систему сосредоточенных масс, соответствующую консольной балке, изображенную на фиг. 4-13. Деформация участка балки между  $i$ -м и



Фиг. 4-14. Деформация участка балки между сосредоточенными массами.

$(i+1)$ -м сечениями изображена на фиг. 4-14. Определим в соответствии с фиг. 4-14 следующие величины:

- $S_i$  — поперечная сила в балке непосредственно справа от  $i$ -й массы;
- $M_i$  — изгибающий момент в балке непосредственно справа от  $i$ -й массы;
- $\alpha_i$  — наклон балки в сечении, где помещена  $i$ -я масса;
- $W_i$  — прогиб точки, где помещена  $i$ -я масса.

Положительные направления отсчета различных физических величин указаны стрелками на фиг. 4-14. Предполагая колебания гармоническими с частотой  $\omega$ , можно записать уравнения, связывающие различные величины в смежных сечениях:

$$S_{i+1} = S_i + m_i \omega^2 W_i, \quad (4-72)$$

$$M_{i+1} = M_i + S_i l_i + m_i \omega^2 W_i l_i, \quad (4-73)$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - M_i C_i^{\alpha\alpha} - S_i C_i^{\alpha z} - m_i \omega^2 W_i C_i^{\alpha z}, \quad (4-74)$$

$$W_{i+1} = W_i - M_i C_i^{z\alpha} - S_i C_i^{zz} - m_i \omega^2 W_i C_i^{zz} - \alpha_{i+1} l_i, \quad (4-75)$$

где  $C_i^{zz}$  — прогиб  $i$ -го сечения относительно  $(i+1)$ -го, обусловливаемый единичной силой, приложенной в  $i$ -м сечении, когда  $(i+1)$ -е сечение рассматривается как неподвижное;

$C_i^{z\alpha}$  — прогиб  $i$ -го сечения относительно  $(i+1)$ -го, обусловливаемый единичным моментом, приложенным в  $i$ -м сечении, когда  $(i+1)$ -е сечение рассматривается как неподвижное;

$C_i^{\alpha z}$  — угловое смещение  $i$ -го сечения относительно наклона балки в  $(i+1)$ -м сечении, обусловливаемое единичной силой, приложенной в  $i$ -м сечении;

$C_i^{\alpha\alpha}$  — угловое смещение  $i$ -го сечения относительно наклона балки в  $(i+1)$ -м сечении, обусловливаемое единичным моментом, приложенным в  $i$ -м сечении.

Таким образом, зная поперечную силу, изгибающий момент, наклон и прогиб в одном сечении, можно вычислить соответствующие величины в соседнем сечении. Задаваясь некоторым значением частоты и исходя из поперечной силы, изгибающего момента, наклона и прогиба на одном конце балки, мы можем переходить от одной массы к другой, пока не получим соответствующих величин на другом конце балки. Если взятая частота выбрана неправильно, то окажется невозможным удовлетворить граничным условиям одновременно на обоих концах балки. Вообще говоря, поперечная сила, изгибающий момент, наклон и прогиб на левом конце балки, изображенной на фиг. 4-13, могут быть выражены в виде линейных функций соответствующих величин на ее правом конце, так что

$$S_8 = C_1 S_1 + C_2 M_1 + C_3 \alpha_1 + C_4 W_1, \quad (4-76a)$$

$$M_8 = D_1 S_1 + D_2 M_1 + D_3 \alpha_1 + D_4 W_1, \quad (4-76b)$$

$$\alpha_8 = E_1 S_1 + E_2 M_1 + E_3 \alpha_1 + E_4 W_1, \quad (4-77a)$$

$$W_8 = F_1 S_1 + F_2 M_1 + F_3 \alpha_1 + F_4 W_1, \quad (4-77b)$$

где коэффициенты  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и  $F$  являются некоторыми функциями частоты  $\omega$ .

В случае консольной балки можно внести в равенства (4-76) и (4-77) следующие граничные условия:

$$\alpha_8 = W_8 = 0, \quad M_1 = S_1 = 0, \quad (4-78)$$

так что равенства (4-76) и (4-77) приведутся к виду

$$S_8 = C_3 \alpha_1 + C_4 W_1, \quad (4-79a)$$

$$M_8 = D_3 \alpha_1 + D_4 W_1, \quad (4-79b)$$

$$0 = E_3 \alpha_1 + E_4 W_1, \quad (4-80a)$$

$$0 = F_3 \alpha_1 + F_4 W_1. \quad (4-80b)$$

Уравнения (4-80a) и (4-80b) определяют условия, из которых можно вычислить собственные частоты. Именно для того, чтобы величины  $\alpha_1$  и  $W_1$  были конечными, детерминант коэффициентов системы (4-80a)—(4-80b) должен быть равен нулю:

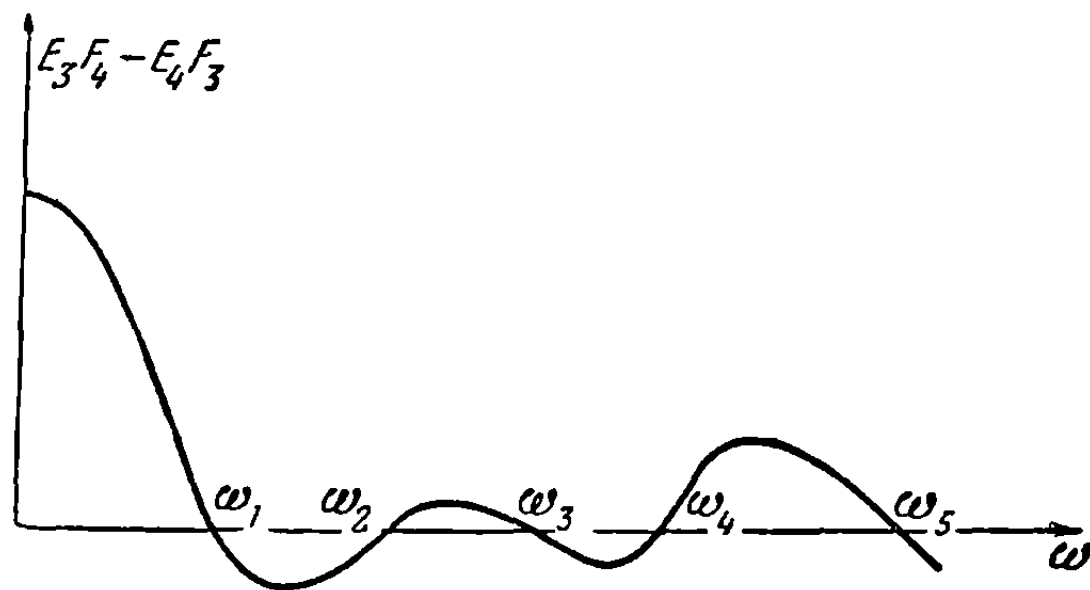
$$\begin{vmatrix} E_3 & E_4 \\ F_3 & F_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (4-81)$$

Так как элементы детерминанта являются функциями собственной частоты, то можно построить график величины детерминанта в функции частоты, подобно графику, изображенному на фиг. 4-15. Точки пересечения соответствующей кривой с осью абсцисс и определяют собственные частоты балки. В практических задачах эти точки пересечения находятся по методу проб.

Вычислив собственные частоты системы, можно достаточно просто вычислить нормальные функции, отвечающие каждой частоте. Заметим сначала, что, согласно уравнениям (4-80), прогиб  $W_1$  и наклон  $\alpha_1$  на свободном конце балки (первое сечение) связаны соотношениями

$$\alpha_1 = -\frac{E_4}{E_3} W_1 = -\frac{F_4}{F_3} W_1. \quad (4-82)$$

Для некоторого данного значения частоты мы начинаем вычисление нормальной функции, приписывая произвольное значение величине  $W_1$ , равное, например,

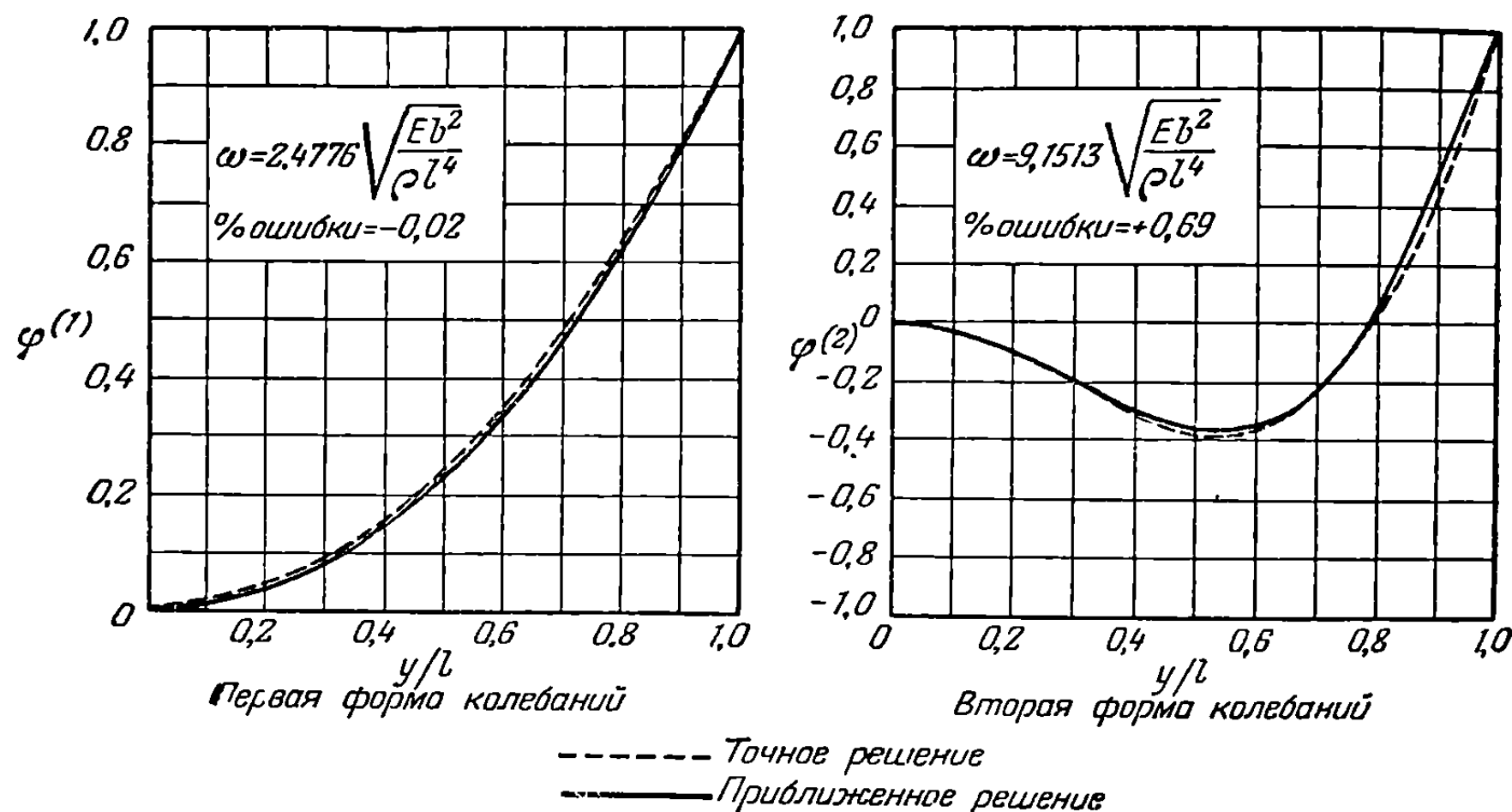


Фиг. 4-15. График зависимости величины частотного детерминанта от частоты.



единице, после чего по формуле (4-82) находим соответствующее значение  $\alpha_1$ . Таким образом, мы располагаем явными численными значениями величин  $\alpha_1$  и  $W_1$ , соответствующими первому сечению. Подставив эти значения в равенства (4-74) и (4-75), мы найдем  $\alpha_2$  и  $W_2$ . От второго сечения мы можем перейти к третьему при помощи уравнений (4-72) (4-75) и так далее, пока не определим величины  $\alpha$  и  $W$  во всех сечениях.

Поскольку метод Хольцера — Майклстэда основан на замене конструкции некоторой системой сосредоточенных масс, этому методу свойственны все ограничения систем сосредоточенных масс. Главным преимуществом этого метода является то, что частота и нормальная функция каждой формы колебаний могут быть найдены независимо от других форм. Необходимость использования характеристик низших форм при расчете более высоких форм, вносящая затруднения в другие методы, здесь отсутствует. Этот метод успешно применялся при вычислении на автоматических быстродействующих счетных машинах перфораторного типа. Он является особенно пригодным для подобного использования, поскольку вычисления, будучи очень значительными по объему, являются упорядоченными



Фиг. 4-16. Метод Хольцера — Майклстэда — десять сосредоточенных масс.

и повторяющимися. Иллюстрация результатов, получающихся при применении метода Хольцера — Майклстэда, приведена на фиг. 4-16. На этой фигуре сравниваются нормальные функции первых двух форм колебаний сужающейся балки (см. фиг. 4-3), соответствующие точному решению, и полученные по методу Хольцера — Майклстэда. При применении метода Хольцера — Майклстэда балка была разделена на десять равных участков и каждый участок заменялся сосредоточенной массой, помещенной в его центре.

**4-5. Решение характеристических уравнений.** Наиболее общая форма характеристических уравнений, получающаяся при применении различных методов, рассмотренных в предыдущих разделах, содержит члены, представляющие как упругое, так и инерционное взаимодействие, и имеет вид

$$\omega^2 \sum_{j=1}^n m_{ij} \bar{q}_j = \sum_{j=1}^n k_{ij} \bar{q}_j, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4-83)$$

При применении некоторых из этих методов характеристические уравнения получаются непосредственно в более простой форме, в которой члены, представляющие упругое или инерционное взаимодействие, пропадают. Если исключается упругое взаимодействие, то характеристические уравнения принимают вид

$$\omega^2 \sum_{j=1}^n D_{ij} \bar{q}_j = \bar{q}_i, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4-84)$$



а если исключается инерционное взаимодействие, то эти уравнения записываются следующим образом:

$$\omega^2 \bar{q}_i = \sum_{j=1}^n E_{ij} \bar{q}_j, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4-85)$$

Например, метод Рэля — Ритца обыкновенно приводит к уравнениям вида (4-83). Однако при подходящем выборе задаваемых функций один из видов взаимодействия координат может быть исключен [4-1]. При решении интегрального уравнения методом совмещения, использующим заданные функции, мы также приходим к характеристическим уравнениям типа уравнений (4-83). Мы видели, что для исключения упругого взаимодействия в этом случае можно применить интерполяционные или узловые функции, так что система приводится к виду (4-84). Использование систем сосредоточенных масс и решение интегральных уравнений методом совмещения, в котором применяется численное интегрирование, приводят к системам характеристических уравнений вида (4-84).

Уравнения (4-83), (4-84) и (4-85) могут быть записаны в следующей матричной форме:

$$([k] - \omega^2 [m]) \{\bar{q}\} = 0, \quad (4-86)$$

$$([\sum I_{\square}] - \omega^2 [D]) \{\bar{q}\} = 0, \quad (4-87)$$

$$([E] - \omega^2 [\sum I_{\square}]) \{\bar{q}\} = 0, \quad (4-88)$$

где  $[\sum I_{\square}]$  — единичная матрица. Очевидно, что уравнение (4-86) можно свести к уравнению (4-87) посредством умножения слева на  $[k]^{-1}$  или к уравнению (4-88) посредством умножения слева на  $[m]^{-1}$ .

Для решения этих уравнений обычно применяются два основных способа. Первый способ основан на разложении детерминанта коэффициентов при  $\bar{q}_i$ , представлении его в форме полинома и последующем решении полученного полиномиального уравнения. Для решения последней задачи предложен ряд методов; Уейланд [4-11] дал прекрасную сводку этих методов. Например, в простых задачах, подобных рассмотренным в примерах 4-1, 4-2 и 4-3, когда система обладает двумя степенями свободы, непосредственное разложение детерминанта и решение получающегося квадратного уравнения является вполне удобным методом. Такой способ оказывается удовлетворительным для систем, обладающих не более чем тремя или четырьмя степенями свободы. Для систем более высокого порядка следует применять более усовершенствованные методы. Среди этих методов следует отметить методы Данилевского [4-11] и Самуэльсона [4-11], являющиеся вполне эффективными для систем более высокого порядка.

Второй основной способ, известный под названием матричной итерации, представляет собой полезный и практичный инженерный метод. Этот способ непосредственно применим только к уравнениям в форме (4-87) и (4-88). Рассмотрим применение этого метода к некоторой системе вида (4-87), а именно к системе

$$\frac{1}{\omega^2} \{W\} = [D] \{W\}, \quad (4-89)$$

где столбцевая матрица  $\{W\}$  представляет значения нормальной функции. Эта система может непосредственно получиться, например, при приближенной трактовке задачи методом сосредоточенных масс; она может также быть получена умножением уравнения (4-86) на  $[k]^{-1}$ .

Предположим, что некоторая система значений нормальной функции первой формы колебаний выбрана произвольно. Обозначим эти величины через  $W_{1j}$ , где  $j = 1, \dots, n$ . Одну из величин  $W_{1j}$ , например величину  $W_{1n}$ , положим

равной единице. Подставляя выбранную таким образом столбцевую матрицу в правую часть уравнения (4-89), получаем

$$[D] \{W_{1j}\} = \{N_{1j}\}. \quad (4-90)$$

Получаемую таким образом столбцевую матрицу нормируем, деля ее на  $N_{1n}$ , так что последний элемент этой матрицы снова оказывается равным единице:

$$\{N_{1j}\} = N_{1n} \left\{ \frac{N_{1j}}{N_{1n}} \right\} = N_{1n} \{W_{2j}\}. \quad (4-91)$$

Повторяем процесс еще раз, используя теперь матрицу  $\{W_{2j}\}$  в качестве аппроксимации нормальной функции. Если этот итеративный процесс будет продолжаться, то последовательные значения матрицы  $\{W\}$  будут сходиться к матрице значений нормальной функции основного тона собственных колебаний, а последовательные значения величины  $1/N_{mn}$  при возрастании  $m$  будут сходиться к  $1/\omega_1^2$ , где  $\omega_1$  — основная частота собственных колебаний системы. Аналогичный процесс итерации уравнения (4-88) сходится к нормальной функции собственных колебаний некоторой формы более высокой частоты.

Сходимость может быть доказана тем же методом, что и в случае прямой итерации интегрального уравнения в п. 4-3(d). В самом деле, матричную итерацию можно рассматривать как точно такой же процесс, за исключением того, что в рассматриваемом случае интегральное уравнение заменено соответствующей ему приближенной матричной формой. Разлагая прогиб, определяемый первой заданной нормальной функцией, в ряд по нормированным нормальным функциям, получаем

$$\{W_{1j}\} = \sum_{r=1}^n \{\varphi^{(r)}\} \xi_r, \quad (4-92)$$

где коэффициенты  $\xi_r$  определяют вклад отдельных форм колебаний в суммарный прогиб, а столбцевые матрицы  $\{\varphi^{(r)}\}$  определяют значения нормированных нормальных функций собственных колебаний. Умножая слева обе части уравнения (4-92) на  $[D]$ , получаем

$$[D] \{W_{1j}\} = \sum_{r=1}^n [D] \{\varphi^{(r)}\} \xi_r. \quad (4-93)$$

Так как матрица  $\{\varphi^{(r)}\}$  определяет значения одной из нормальных функций собственных колебаний, она удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\omega_r^2} \{\varphi^{(r)}\} = [D] \{\varphi^{(r)}\}. \quad (4-94)$$

Вводя выражение (4-94) в правую часть уравнения (4-93), находим

$$[D] \{W_{1j}\} = \sum_{r=1}^n \{\varphi^{(r)}\} \frac{\xi_r}{\omega_r^2}. \quad (4-95)$$

Уравнение (4-95) соответствует одному циклу процесса итерации. Дальнейшие циклы основаны на дополнительном умножении слева на матрицу  $[D]$ , так что после  $m$ -й итерации имеем

$$[D]^m \{W_{1j}\} = \left(\frac{1}{\omega_1^2}\right)^m \{\varphi^{(1)}\} \xi_1 + \dots + \left(\frac{1}{\omega_n^2}\right)^m \{\varphi^{(n)}\} \xi_n. \quad (4-96)$$

Исследование уравнения (4-96) показывает, что, так как  $\omega_r$  возрастает с возрастанием  $r$ , все члены, содержащие нормальные функции форм колебаний выше первой, с возрастанием  $r$  становятся малыми сравнительно с первым членом. Нормальная функция, получающаяся после каждой итерации, согласно

уравнению (4-96), не нормируется, что, однако, несущественно для приводимого доказательства, поскольку это не влияет на сходимость.

Из уравнения (4-96) видно, что сходимость процесса итерации определенно ухудшается в том случае, когда две формы колебаний имеют близкие частоты. В некоторых случаях это может привести к полной непригодности метода вследствие плохой или неустойчивой сходимости. Имеются, однако, методы ускорения сходимости процесса итерации. Айзаксон [4-12], например, использовал значения, полученные в трех последовательных итерациях, для определения окончательной формы решения при помощи некоторой экспоненциальной экстраполяции.

В предыдущих рассуждениях мы рассмотрели, каким образом используется процесс итерации для получения характеристик основного тона колебаний. В практических задачах нас обычно интересуют две или три низшие формы колебаний. Необходимо поэтому обобщить этот метод, чтобы можно было получать характеристики более высоких форм колебаний. Это осуществляется путем использования условия ортогональности для очищения заданных функций от компонент, соответствующих низшим формам колебаний. Наиболее общая форма условия ортогональности между некоторыми системами значений нормальных функций  $W_i^{(r)}$  и  $W_j^{(s)}$  может быть записана в виде

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} W_i^{(r)} W_j^{(s)} = 0. \quad (4-97)$$

Если величины  $W_i^{(r)}$  имеются в явном виде, то условие, которому должны удовлетворять величины  $W_j^{(s)}$ , чтобы обе нормальные функции были взаимно ортогональны, имеет вид

$$\sum_{j=1}^n B_j^{(r)} W_j^{(s)} = 0, \quad (4-98)$$

где

$$B_j^{(r)} = \sum_{i=1}^n A_{ij} W_i^{(r)}. \quad (4-99)$$

Мы видим, таким образом, что можно получить нормальную функцию со значениями  $W_j^{(s)}$ , ортогональную к некоторой заданной нормальной функции собственных колебаний со значениями  $W_i^{(r)}$ , задавая произвольно все значения  $W_j^{(s)}$ , кроме одного, и определяя это последнее значение при помощи уравнения (4-98). Таким образом, выбирая произвольно некоторую систему значений  $W_2^{(s)}, W_3^{(s)}, \dots, W_n^{(s)}$  и определяя  $W_1^{(s)}$ , согласно уравнению (4-99), в следующем виде:

$$W_1^{(s)} = - \frac{B_2^{(r)}}{B_1^{(r)}} W_2^{(s)} - \frac{B_3^{(r)}}{B_1^{(r)}} W_3^{(s)} - \dots - \frac{B_n^{(r)}}{B_1^{(r)}} W_n^{(s)}, \quad (4-100)$$

мы можем утверждать, что система значений  $W_i^{(s)}$  ортогональна системе значений  $W_i^{(r)}$ . Можно выразить в матричной форме условие того, что некоторая произвольным образом выбранная система значений  $W_i^{(2)}$ , представляющая нормальную функцию второй формы колебаний, ортогональна к заданной системе значений  $W_i^{(1)}$ , представляющей нормальную функцию первой формы колебаний

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -K_{12}^{(1)} & -K_{13}^{(1)} & \dots & -K_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix}, \quad (4-101)$$

где

$$K_{1i}^{(1)} \quad \begin{matrix} B_i^{(1)} \\ B_1^{(1)} \end{matrix} \quad (4-102)$$

Квадратную матрицу в уравнении (4-101) можно назвать „выметающей“ матрицей; она обозначается через  $[S^{(1)}]$ . Мы видим, что если подставить в правую часть уравнения (4-101) произвольную систему чисел  $W_1, \dots, W_n$ , то произведение матриц определит систему чисел  $W_1, \dots, W_n$ , ортогональную к первой. Если вместо первоначальной, произвольным образом выбранной системы значений нормальной функции использовать в процессе итерации получающуюся таким образом систему значений, то процесс итерации будет сходиться к нормальной функции второй формы колебаний. Необходимо, разумеется, выполнять операцию „выметания“ в каждом цикле процесса итерации. Процесс становится наиболее эффективным, если умножить первоначальную матрицу  $[D]$  на „выметающую“ матрицу  $[S^{(1)}]$ :

$$[D][S^{(1)}]\{W\} = [D^{(2)}]\{W\}. \quad (4-103)$$

Матрица  $[D^{(2)}]$  определяет процесс итерации, сходящийся к нормальной функции второй формы колебаний, таким же образом, как матрица  $[D]$  определяет процесс, сходящийся к нормальной функции первой формы колебаний. Очевидно, что первый столбец матрицы  $[D^{(2)}]$  состоит из одних нулей, так что ранг матрицы  $[D^{(2)}]$  уменьшается на единицу по сравнению с рангом первоначальной матрицы  $[D]$ .

Переходя к нормальной функции третьей формы колебаний, мы должны использовать условия ортогональности выбранной нормальной функции и нормальной функции первой формы колебаний, а также выбранной нормальной функции и нормальной функции второй формы колебаний. Можно построить такую „выметающую“ матрицу, которая исключала бы из заданной функции компоненты первой и второй форм колебаний. Эта матрица имеет вид

$$[S^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} & \dots & K_{1n}^{(2)} \\ 0 & 0 & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & \dots & K_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (4-104)$$

так что первые два столбца состоят из одних нулей, и ранг матрицы

$$[D^{(3)}] = [D][S^{(2)}] \quad (4-105)$$

уменьшается по сравнению с рангом исходной матрицы  $[D]$  на два. Вообще говоря, для каждой последующей формы колебаний в „выметающую“ матрицу добавляется новая строка величин  $K$ , и вместе с тем число величин  $K$  в каждой строке уменьшается на единицу. С возрастанием номера формы колебаний трудности вычисления величин  $K$  возрастают. Систематический метод вычисления величин  $K$ , соответствующих  $(r+1)$ -й форме колебаний, по известным соответствующим величинам для  $r$ -й формы, опирающийся на условие ортогональности выбираемой нормальной функции и нормальной функции  $r$ -й формы, изложен в работе [4-13].

Другой способ вычисления нормальных функций высших форм колебаний методом матричной итерации был сообщен автору М. Дж. Тернером, сотрудником

самолестроительной компании „Боинг“. Если совместные уравнения собственных колебаний имеют вид

$$[C] \{m\} \{W\} = \frac{1}{\omega^2} \{W\} \quad (4-106a)$$

и если система значений нормальной функции первой формы колебаний определяется столбцевой матрицей  $\{\varphi^{(1)}\}$ , то, как легко видеть, систему значений нормальной функции второй формы колебаний можно получить при помощи процесса итерации из матричного уравнения

$$\left( [C] \{m\} - \frac{1}{\omega_1^2} \{\varphi^{(1)}\} \{ \varphi^{(1)} \} \{m\} \right) \{W\} = \frac{1}{\omega_2^2} \{W\}. \quad (4-106b)$$

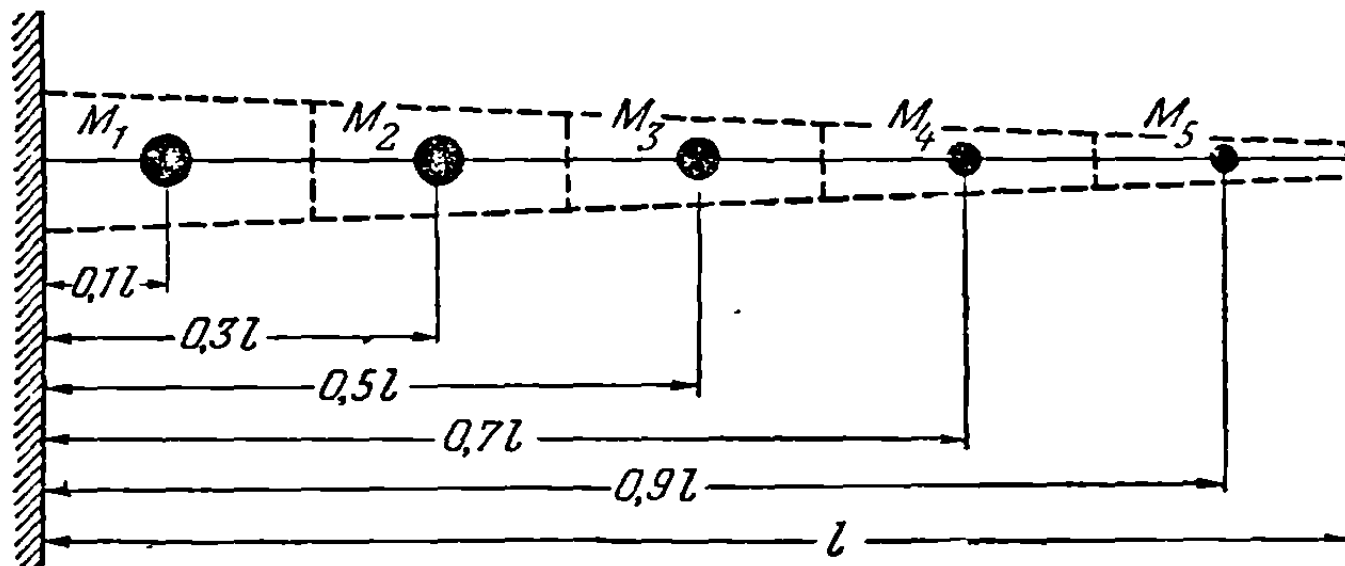
Таким образом, при определении нормальных функций более высоких форм колебаний нужно лишь в начале каждой итерации вычитать из динамической матрицы некоторое простое тройное матричное произведение. Нормальные функции нормируются таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\{ \varphi^{(i)} \} \{m\} \{ \varphi^{(i)} \} = 1.$$

Этот метод представляется особенно подходящим для автоматизированных вычислений.

**Пример 4-4.** Вычислить две первые нормальные функции и собственные частоты колебаний сужающейся консольной балки, изображенной на фиг. 4-3, используя метод сосредоточенных масс [п. 4-3 (а)]. Характеристические уравнения решить методом матричной итерации.

**Решение.** Применяя метод сосредоточенных масс, разделим балку по длине на пять равных участков и сосредоточим массу каждого участка в его центре, как показано



Фиг. 4-17. Замена сужающейся балки системой сосредоточенных масс.

на фиг. 4-17. Мы заменяем, таким образом, балку с непрерывно распределенной массой невесомой балкой с пятью сосредоточенными массами. Характеристические уравнения полученной таким образом системы определяются соотношением (4-34):

$$\{W\} = \omega^2 [C] \{M\} \{W\}. \quad (4-34)$$

Матрица масс, диагональные элементы которой представляют собой сосредоточенные массы, изображенные на фиг. 4-17, имеет вид:

$$\{M\} = bpl \begin{bmatrix} 0,386 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,304 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,240 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,176 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,112 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Матрица коэффициентов влияния, представляющая коэффициенты влияния, соответствующие пяти сечениям, изображенным на фиг. 4-17, получается, если в матрице [C]

(уравнение (а) примера 4-2) вычеркнуть нечетные строки и столбцы:

$$[C] = \frac{15}{128} \frac{l^8}{Eb^3} \begin{bmatrix} 0,00450 & 0,01841 & 0,03232 & 0,04624 & 0,06015 \\ 0,01841 & 0,14125 & 0,29283 & 0,44441 & 0,59599 \\ 0,03232 & 0,29283 & 0,77075 & 1,30409 & 1,83741 \\ 0,04624 & 0,44441 & 1,30409 & 2,60475 & 4,03020 \\ 0,06015 & 0,59599 & 1,83741 & 4,03020 & 7,34400 \end{bmatrix}. \quad (b)$$

Подставляя выражения (а) и (b) в уравнение (4-34), приходим к характеристическим уравнениям следующего вида:

$$\frac{128}{15} \frac{Eb^2}{\rho l^4} \frac{1}{\omega^2} \{W\} = [D] \{W\}, \quad (c)$$

где

$$[D] = \begin{bmatrix} 0,001656 & 0,0055966 & 0,0077568 & 0,0081382 & 0,0067368 \\ 0,0067748 & 0,042940 & 0,0702792 & 0,0782162 & 0,0667509 \\ 0,0118938 & 0,0890203 & 0,184980 & 0,229520 & 0,205790 \\ 0,0170163 & 0,135101 & 0,312982 & 0,458436 & 0,451382 \\ 0,0221352 & 0,181181 & 0,440978 & 0,709315 & 0,822528 \end{bmatrix}. \quad (d)$$

Начиная процесс итерации, подставим в качестве первого приближения в правую часть уравнения (с) столбцевую матрицу, все элементы которой равны единице. После умножения и нормировки получим следующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Первое приближение}} \begin{bmatrix} 0,029884 \\ 0,264961 \\ 0,721204 \\ 1,374917 \\ 2,176137 \end{bmatrix} = 2,176137 \begin{bmatrix} 0,0137328 \\ 0,1217576 \\ 0,3314148 \\ 0,631815 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Используя полученную таким образом столбцевую матрицу в качестве второго приближения и продолжая процесс, пока не будет обеспечена удовлетворительная сходимость последовательных приближений, получим следующие результаты:

$$\begin{array}{l} \text{Второе} \\ \text{приближение} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 0,0151360 \\ 0,1447820 \\ 0,4231116 \\ 0,8614391 \\ 1,4391950 \end{bmatrix} = 1,4391950 \begin{bmatrix} 0,0105292 \\ 0,1005993 \\ 0,2939918 \\ 0,5985562 \\ 1 \end{bmatrix} \dots$$

$$\begin{array}{l} \text{Шестое} \\ \text{приближение} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 0,0144178 \\ 0,1381565 \\ 0,4053817 \\ 0,8292775 \\ 1,3918115 \end{bmatrix} = 1,3918115 \begin{bmatrix} 0,0103590 \\ 0,0992638 \\ 0,2912619 \\ 0,5958260 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{Седьмое} \\ \text{приближение} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 0,0144177 \\ 0,1381564 \\ 0,4053813 \\ 0,8292767 \\ 1,3918104 \end{bmatrix} = 1,3918104 \begin{bmatrix} 0,0103590 \\ 0,0992638 \\ 0,2912619 \\ 0,5958259 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Мы видим, что нормированная столбцевая матрица, послужившая исходной для седьмого приближения, почти точно совпадает с нормированной столбцевой матрицей, получившейся в результате этого приближения.

Определим систему значений искомой нормальной функции при помощи нормированной матрицы, полученной в результате седьмого приближения:

$$\{\varphi^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 0,010359 \\ 0,0992638 \\ 0,2912619 \\ 0,5958259 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Частота, соответствующая этой столбцовой матрице, получается из соотношения

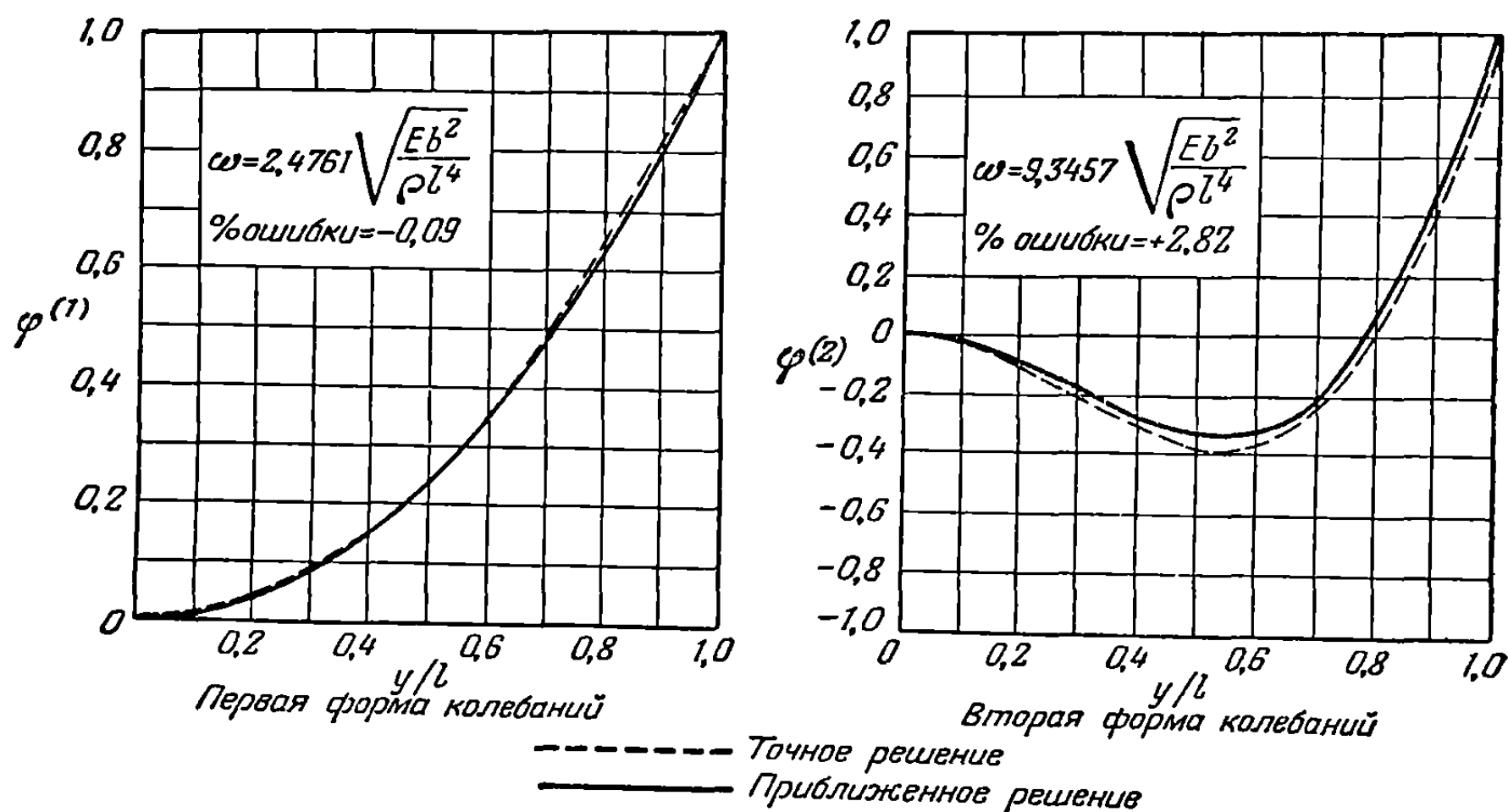
$$\frac{128 Eb^2}{15 \rho l^4} \frac{1}{\omega_1^2} = 1,3918104,$$

которое определяет частоту первой формы колебаний в виде

$$\omega_1 = 2,47612 \sqrt{\frac{Eb^2}{\rho l^4}}.$$

Матрица, сходящаяся к системе значений нормальной функции второй формы колебаний, получается, если построить выметающую матрицу согласно уравнению (4-101):

$$[S^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{M_2 \varphi_2^{(1)}}{M_1 \varphi_1^{(1)}} & -\frac{M_3 \varphi_3^{(1)}}{M_1 \varphi_1^{(1)}} & -\frac{M_4 \varphi_4^{(1)}}{M_1 \varphi_1^{(1)}} & -\frac{M_5 \varphi_5^{(1)}}{M_1 \varphi_1^{(1)}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,034037 & -0,26943 & -0,624133 & -0,936298 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (e)$$



Фиг. 4-18. Метод сосредоточенных масс (пять масс).

Матричное уравнение, решение которого определяет нормальную функцию второй формы колебаний, получается подстановкой выметающей матрицы в уравнение (с):

$$\frac{128 Eb^2}{15 \rho l^4} \frac{1}{\omega^2} \{W\} = [D] [S^{(1)}] \{W\} = [D^{(2)}] \{W\}, \quad (f)$$

где матрица  $[D^{(2)}]$  определяется соотношением

$$[D^{(2)}] = [D] [S^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & -0,0608163 & -0,0723889 & -0,0404327 & -0,00586094 \\ 0 & 0,0358079 & 0,0312596 & 0,0134851 & 0,00165275 \\ 0 & 0,0368392 & 0,0565397 & 0,0335743 & 0,00488939 \\ 0 & 0,0157175 & 0,0286178 & 0,0249553 & 0,00450290 \\ 0 & 0,00183059 & 0,00355214 & 0,00378154 & 0,00142670 \end{bmatrix}. \quad (g)$$

Исходя, как и ранее, из столбцовой матрицы, все элементы которой равны единице, как из первого приближения, после восьми итераций получаем следующие выражения



для матрицы, определяющей значения нормированной нормальной функции и частоты второй формы колебаний:

$$\{\varphi^{(2)}\} = \begin{bmatrix} -0,051472 \\ -0,393380 \\ -0,7390130 \\ -0,4603381 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \omega_2 = 9,34574 \sqrt{\frac{Eb^2}{\rho l^4}}.$$

Сравнение этих результатов с точным решением показано на фиг. 4-18. Мы видим, что для первой формы колебаний совпадение точного и приближенного решений является хорошим, в то время как для второй формы — лишь удовлетворительным. Если требуется определить характеристики следующих форм колебаний, то для получения приемлемых результатов требуется разбить балку на большее число участков.

При вычислении характеристик двух первых форм колебаний матричная итерация, как показано выше, вполне удобна для применения. Однако при переходе к более высоким формам колебаний процесс итерации становится все более трудным и сложным вследствие необходимости выметания нижних форм колебаний, а также благодаря ухудшению сходимости. Процесс итерации следует начинать с выражения, содержащего относительно большое число значащих цифр, поскольку при переходе к более высоким формам точность уменьшается. Было обнаружено, что потеря точности при переходе от некоторой формы к следующей составляет, грубо говоря, одну значащую цифру.

**4-6. Нормальные функции и частоты колебаний сложных конструкций самолета.** Методы исследования, рассмотренные в предыдущих разделах настоящей главы, излагались нами применительно к изгибу консольной балки. Большинство этих методов может быть распространено и на более сложные конструкции. Главная трудность при вычислении нормальных функций и частот сложных конструкций заключается в выборе минимального числа обобщенных координат, которое может обеспечить удовлетворительную точность приближенного решения для желаемого числа форм колебаний. В большинстве случаев оказывается необходимым заменить действительную конструкцию более простой моделью, сохраняющей, однако, существенные свойства первоначальной конструкции.

Хотя самолет является существенно трехмерным объектом, однако принятое в третьей главе предположение о возможности представления конструкции самолета в виде некоторой упругой поверхности, расположенной в плоскости  $xu$ , оказывается применимым в огромном большинстве случаев. Мы видели, что удобным способом решения задач определения характеристик форм собственных колебаний двумерной упругой поверхности является метод, опирающийся на интегральное уравнение. Интегральное уравнение, определяющее свободное движение незакрепленной упругой поверхности, было установлено в третьей главе; оно имеет вид

$$W(x, y) = \omega^2 \int_S \int G(x, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (3-172)$$

где

$$G(x, y; \xi, \eta) = C(x, y; \xi, \eta) - \int_S \int C(r, s; \xi, \eta) \left[ \frac{1}{M} + \frac{yr}{I_x} + \frac{xs}{I_y} \right] \rho(r, s) dr ds. \quad (3-173)$$

Методы приближенного решения однородных интегральных уравнений, изложенные в п. 4-3, можно распространить и на решение уравнения (3-172). Детали способа распространения этих методов существенно зависят от характера рассматриваемой конструкции. Например, при применении метода совмещения, использующего численное интегрирование, уравнение (3-172) приводится к матричному уравнению

$$\{W\} = \omega^2 [G] \left[ \sum \rho \right] \left[ \sum \bar{W} \right] \{W\}. \quad (4-107)$$

Выбор используемого метода численного интегрирования зависит от характера распределения масс и конструкции. Если распределение масс является гладким, то можно применять весовые числа, получаемые, например, при помощи интерполяционных функций. Если же распределение масс разрывное, как это часто бывает в случае конструкций самолета, несущих топливные баки или другие сосредоточенные массы, то вид весовой матрицы будет уже зависеть от данных частных условий, так что здесь нельзя указать никаких общих правил.

Метод совмещения, использующий заданные функции, применяется к сложным конструкциям таким же образом, как и к балкам [п. 4-3 (с)]. Если заданные функции являются узловыми функциями, то имеем

$$\{W\} = \omega^2 [G] \left[ \sum \rho \right] \left[ \sum \bar{W} \right] \{\gamma\} \{W\}. \quad (4-108)$$

В этом случае узловые функции определяются по формам поверхности прогиб под действием пирамидальной нагрузки, причем вершина пирамиды находится в одном из сечений, а углы основания — в четырех смежных по диагонали сечениях [4-6].

Функция влияния незакрепленного самолета определяется равенством (3-173). Выражение этой функции через коэффициенты влияния и весовые числа можно записать в следующем виде:

$$G_{ij} = C_{ij} - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n C_{kj} \rho_k \bar{W}_k - \frac{y_i}{I_x} \sum_{k=1}^n C_{kj} \rho_k \bar{W}_k y_k - \frac{x_i}{I_y} \sum_{k=1}^n C_{kj} \rho_k \bar{W}_k x_k. \quad (4-109)$$

Вычисленные по формуле (4-109) величины  $G_{ij}$  образуют матрицу  $[G]$ , входящую в уравнения (4-107) и (4-108).

Приближенное решение уравнения (3-172) методом сосредоточенных масс, хотя и является относительно грубым по сравнению с другими методами, все же дает возможность быстро и удобно получить результат, когда требуется определить несколько первых форм колебаний. Приближенное решение методом сосредоточенных масс получается заменой конструкции системой сосредоточенных масс в плоскости  $xu$ . В таком приближении уравнение (3-172) приводится к матричному уравнению

$$\{W\} = \omega^2 [G] \left[ \sum M \right] \{W\}, \quad (4-110)$$

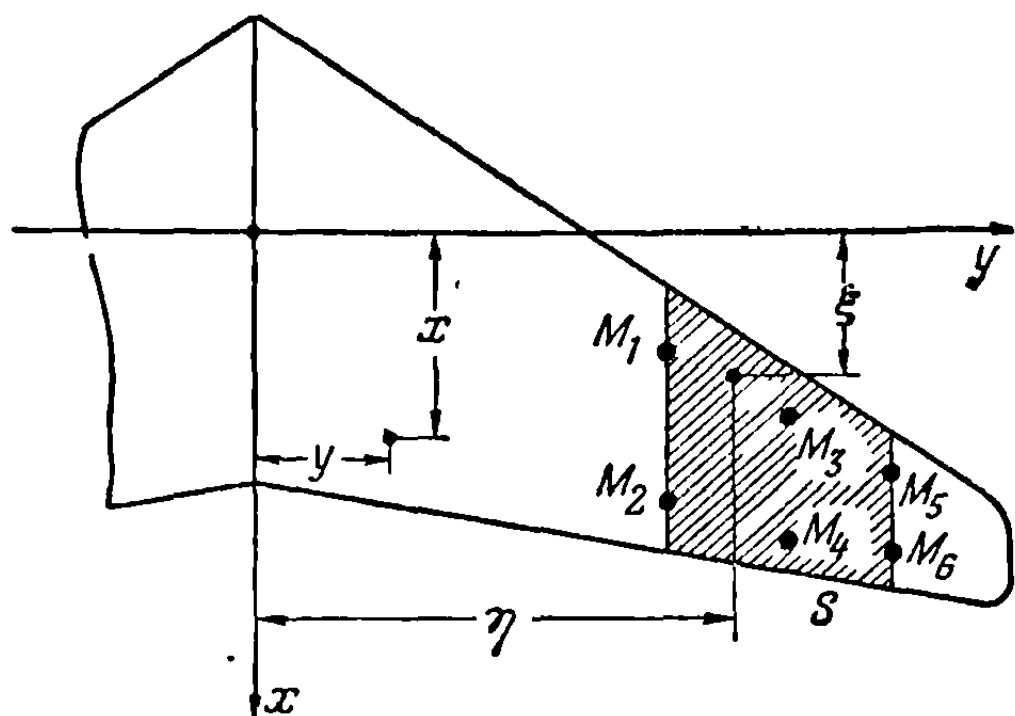
где  $\left[ \sum M \right]$  представляет собой диагональную матрицу сосредоточенных масс, а элементы матрицы коэффициентов влияния  $[G]$  определяются соотношением

$$G_{ij} = C_{ij} - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n C_{kj} M_k - \frac{y_i}{I_x} \sum_{k=1}^n C_{kj} M_k y_k - \frac{x_i}{I_y} \sum_{k=1}^n C_{kj} M_k x_k. \quad (4-111)$$

Замена непрерывной конструкции самолета системой сосредоточенных масс является процессом, в известной мере произвольным, так что успех такой замены существенно зависит от умения исследователя. Этот процесс вообще состоит в разбиении конструкции на жесткие элементы и сосредоточении полной массы каждого элемента в его центре тяжести. Осуществляя этот процесс, следует учитывать индивидуальные особенности рассматриваемой конструкции. Следует помещать сосредоточенные массы там, где на конструкции расположены мотор, топливный бак или другие массы. Границы элементов нужно проводить по линиям разрывов конструкции. Опыт показывает, что обычно бывает необходимо разбить конструкцию по меньшей мере на вдвое большее число участков, нежели число форм колебаний (см. пример 4-4).

Леви [4-14] предложил некоторый аналитический метод для выбора расположения и величины сосредоточенных масс. Этот метод основан на требовании, чтобы динамические нагрузки, обуславливаемые сосредоточенными массами,

создавали примерно тот же самый прогиб в удаленных частях конструкции, что и сосредоточенные массы. Рассмотрим крыло самолета, изображенное на фиг. 4-19, совершающее собственные колебания некоторой формы. Предположим, что нормальную функцию в некоторой заштрихованной области  $S$  можно аппроксимировать полиномом



нормальную функцию в некоторой заштрихованной области  $S$  можно аппроксимировать полиномом

$$W(\xi, \eta) = a_1 + b_1\eta + c_1\xi + d_1\eta^2 + e_1\xi^2 + \dots \quad (4-112)$$

Функция влияния некоторой точки  $(x, y)$ , находящейся вне области  $S$ , на некоторую точку  $(\xi, \eta)$ , расположенную внутри области  $S$ , приближенно представляется полиномом

$$C(x, y; \xi, \eta) = a_2 + b_2\eta + c_2\xi + d_2\eta^2 + e_2\xi^2 + \dots, \quad (4-113)$$

Фиг. 4-19. Замена крыла самолета системой сосредоточенных масс.

где  $a_2, b_2, c_2, d_2$  и  $e_2$  — некоторые функции от  $x$  и  $y$ . Когда крыло совершает собственные колебания некоторой формы, прогиб в точке  $(x, y)$ , вызываемый распределенными инерционными нагрузками, приложенными в области  $S$ , выражается следующим образом:

$$W(x, y) = \omega^2 \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (4-114)$$

Подставляя выражения (4-112) и (4-113) в уравнение (4-114), получаем

$$W(x, y) = \omega^2 a_1 a_2 \int_S \int \rho d\xi d\eta + \omega^2 (a_1 b_2 + a_2 b_1) \int_S \int \rho \eta d\xi d\eta + \\ + \omega^2 (a_1 c_2 + a_2 c_1) \int_S \int \rho \xi d\xi d\eta + \omega^2 (a_1 e_2 + a_2 e_1 + c_1 c_2) \int_S \int \rho \xi^2 d\xi d\eta + \dots \quad (4-115)$$

Предположим далее, что распределенные по области  $S$  массы заменены сосредоточенными массами  $M_1, M_2, M_3, \dots$ , расположенными в точках  $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$ . Прогиб в точке  $(x, y)$ , определяемый этими сосредоточенными массами, находится по формуле

$$W(x, y) = \omega^2 [C(x, y; \xi_1, \eta_1) M_1 W_1(\xi_1, \eta_1) + C(x, y; \xi_2, \eta_2) M_2 W_2(\xi_2, \eta_2) + \dots]. \quad (4-116)$$

Подставляя выражения (4-112) и (4-113) в равенство (4-116) и упрощая, получаем

$$W(x, y) = \omega^2 [a_1 a_2 (M_1 + M_2 + \dots) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) (M_1 \eta_1 + M_2 \eta_2 + \dots) + \\ + (a_1 c_2 + a_2 c_1) (M_1 \xi_1 + M_2 \xi_2 + \dots) + (a_1 e_2 + a_2 e_1 + c_1 c_2) (M_1 \xi_1^2 + M_2 \xi_2^2 + \dots) + \dots]. \quad (4-117)$$

Сравнивая правые части равенств (4-115) и (4-117), получаем условие равенства прогиба в точке  $(x, y)$ , обусловливаемого действием распределенных масс, прогибу в той же точке  $(x, y)$ , определяемому действием сосредоточенных масс. Если, например, как показано на фиг. 4-19, внутри области  $S$  выбрано шесть

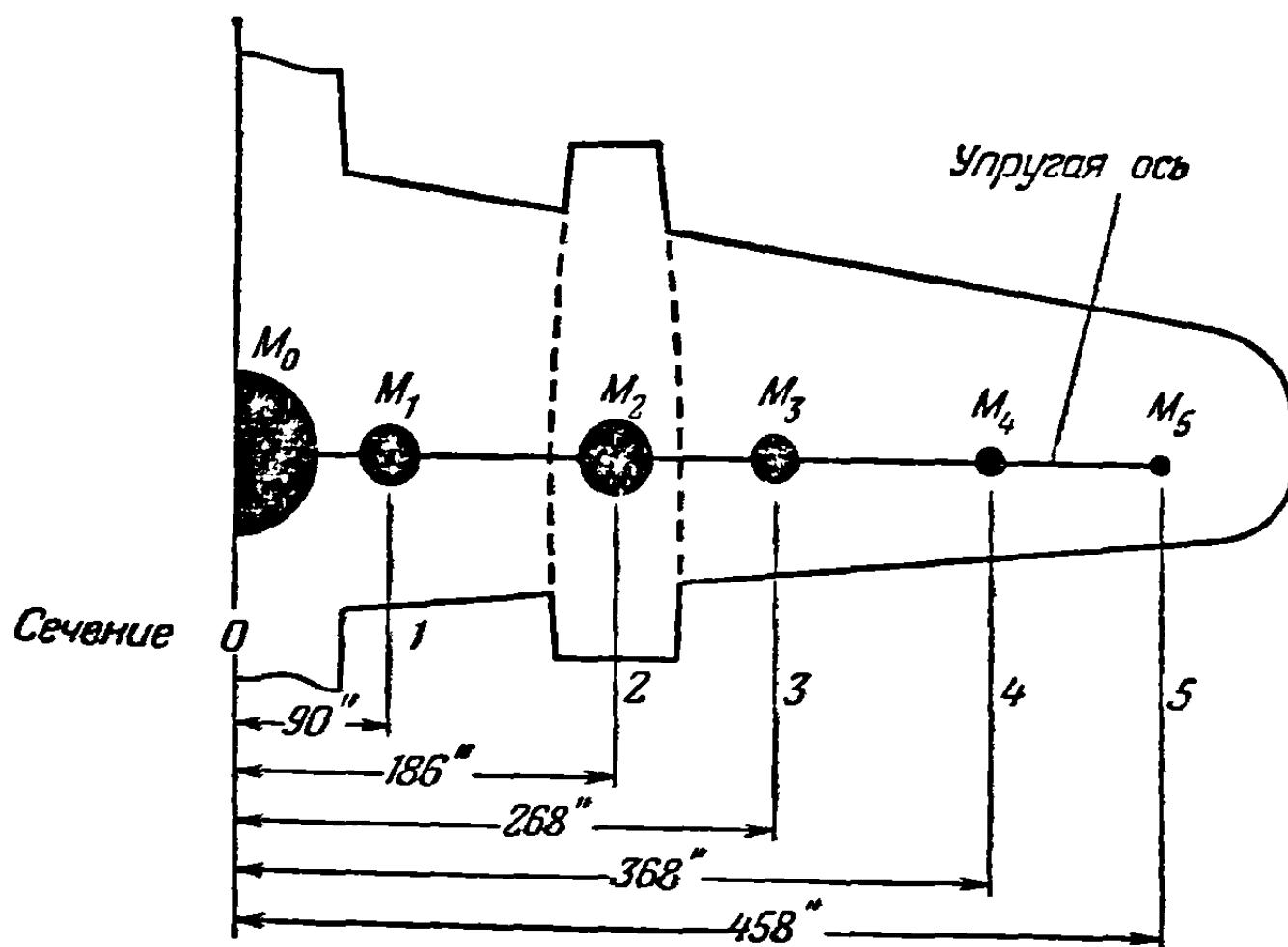
точек приложения масс, то должны быть удовлетворены следующие шесть условий:

$$\begin{aligned}
 M_1 + M_2 + \dots + M_6 &= \int_S \rho d\bar{\zeta} d\eta, \\
 M_1\eta_1 + M_2\eta_2 + \dots + M_6\eta_6 &= \int_S \rho\eta d\bar{\zeta} d\eta, \\
 M_1\xi_1 + M_2\xi_2 + \dots + M_6\xi_6 &= \int_S \rho\xi d\bar{\zeta} d\eta, \\
 M_1\eta_1^2 + M_2\eta_2^2 + \dots + M_6\eta_6^2 &= \int_S \rho\eta^2 d\bar{\zeta} d\eta, \\
 M_1\xi_1^2 + M_2\xi_2^2 + \dots + M_6\xi_6^2 &= \int_S \rho\xi^2 d\bar{\zeta} d\eta, \\
 M_1\xi_1\eta_1 + M_2\xi_2\eta_2 + \dots + M_6\xi_6\eta_6 &= \int_S \rho\xi\eta d\bar{\zeta} d\eta.
 \end{aligned}
 \tag{4-118}$$

Первые три уравнения выражают требование, чтобы полная масса и центр тяжести системы сосредоточенных масс совпадали с полной массой и центром тяжести системы распределенных масс. Остальные три уравнения выражают требование равенства моментов инерции и произведений инерции системы сосредоточенных масс и системы распределенных масс. Величины шести сосредоточенных масс получаются из совместного решения уравнений (4-118).

Пример 4-5. Вычислить характеристики следующих форм чисто изгибных колебаний (т. е. таких колебаний, когда отсутствует взаимодействие изгиба и кручения) крыла реактивного самолета, рассмотренного в примере 2-1:

- (а) первой формы изгибных колебаний консольного крыла;
- (б) первой формы симметричных изгибных колебаний незакрепленного крыла;
- (в) второй формы симметричных изгибных колебаний незакрепленного крыла;
- (г) первой формы антисимметричных изгибных колебаний.



Фиг. 4-20. Система сосредоточенных масс для расчета изгибных форм колебаний крыла реактивного транспортного самолета.

Решение. Чисто изгибные формы колебаний (когда кручение не оказывает влияния на деформацию изгиба) получаются в предположении, что массы всех сечений крыла сосредоточиваются вдоль его упругой оси. В этом предположении крыло, разумеется, способно совершать только чисто изгибные колебания. Примем, что распределение масс

по крылу реактивного транспортного самолета заменяется системой сосредоточенных масс изображенной на фиг. 4-20. Можно получить решение, рассматривая только одну половину крыла, помещенная на центральной линии самолета (фиг. 4-20), представляет собой половину массы фюзеляжа. Матрица масс системы, изображенной на фиг. 4-20, имеет вид

$$\underline{M} = \frac{1}{386} \begin{bmatrix} 17,400 & & & & & \\ & 6,039 & & & & \\ & & 10,200 & & & \\ & & & 4,200 & & \\ & & & & 3,400 & \\ & & & & & 680 \end{bmatrix} \frac{\text{фунт} \cdot \text{сек}^2}{\text{дюйм}} \quad (a)$$

Матрица коэффициентов влияния при изгибе  $[C^{zz}]$ , соответствующая сосредоточенным массам системы, изображенной на фиг. 4-20, уже вычислена в примере 2-1.

(a) Первая форма изгибных колебаний консольного крыла. Характеристические уравнения для изгибных колебаний консольного крыла имеют вид

$$\{W\} = \omega^2 [C^{zz}] \underline{M} \{W\} = \omega^2 [D] \{W\}, \quad (b)$$

где матрица коэффициентов влияния  $[C^{zz}]$  определяется уравнением (e) примера 2-1, а матрица масс  $\underline{M}$  определяется уравнением (a). Комбинируя эти матрицы, приводим уравнение (b) к виду

$$\frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{bmatrix} = \frac{10^{-3}}{386} \begin{bmatrix} 43,279 & 117,07 & 63,401 & 66,327 & 15,966 \\ 69,310 & 258,37 & 193,74 & 243,08 & 64,139 \\ 91,162 & 470,52 & 523,96 & 649,81 & 170,58 \\ 117,81 & 729,25 & 802,71 & 1240,98 & 356,14 \\ 141,79 & 962,09 & 1053,58 & 1780,72 & 573,51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{bmatrix} \quad (c)$$

Применяя к уравнению (c) метод матричной итерации, получаем следующую матрицу значений нормальной функции и частоту первой формы изгибных колебаний консольного крыла:

$$\{\varphi^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 0,04466 \\ 0,1417 \\ 0,3792 \\ 0,6935 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \omega_1 = 12,799 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$$

Соответствующая нормальная функция изображена на графике фиг. 4-21, а.

(b) Первая форма симметричных изгибных колебаний незакрепленного крыла. Характеристические уравнения для таких колебаний имеют вид (см. уравнение 4-110)

$$\{W\} = \omega^2 [G] \underline{M} \{W\} = \omega^2 [D] \{W\}, \quad (d)$$

где элементы матрицы  $[G]$  получаются из уравнения (4-111) в следующем виде:

$$G_{ij} = C_{ij}^{zz} - \frac{1}{M} \sum_{k=0}^5 C_{kj}^{zz} M_k \quad (e)$$

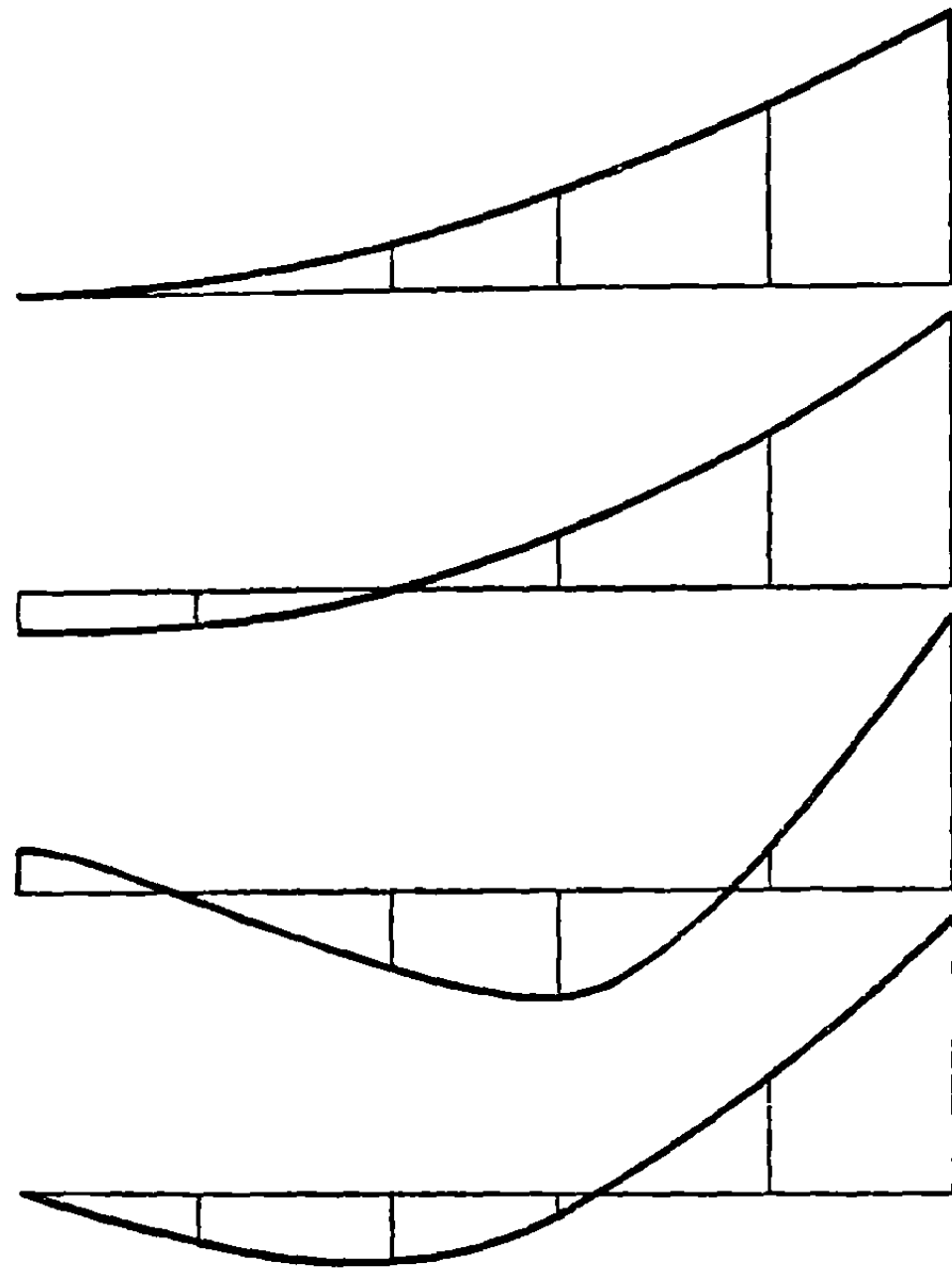
При выводе равенства (e) из уравнения (4-111) из степеней свободы самолета, отвечающих движению его как твердого тела, учитывается только одна, соответствующая вертикальным перемещениям. Так как мы рассматриваем только половину самолета, величина  $M$  в уравнении (e) представляет собой половину полной массы самолета. Строя элементы матрицы  $[G]$  по ранее данным матрицам масс и коэффициентов влияния, получаем

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -7,3119 & -19,768 & -45,470 & -69,346 & -107,63 \\ 0 & -0,070436 & -8,2908 & -30,374 & -57,948 & -84,149 \\ 0 & 4,1656 & 5,5627 & 0,66020 & -5,9616 & -13,306 \\ 0 & 7,7840 & 26,362 & 79,283 & 113,66 & 143,22 \\ 0 & 12,196 & 51,727 & 145,65 & 287,54 & 416,11 \\ 0 & 16,168 & 74,555 & 205,38 & 446,28 & 735,77 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \quad (f)$$

Внося матрицы  $[\Sigma M]$  и  $[G]$ , определяемые соответственно равенствами (а) и (f), в уравнение (d) и итерируя это уравнение для матрицы значений нормальной функции и частоты первой симметричной формы колебаний незакрепленного крыла, получаем выражения<sup>1)</sup>

$$\{\varphi^{(1)}\} = \begin{bmatrix} -0,1683 \\ -0,1286 \\ -0,01530 \\ 0,2513 \\ 0,6277 \\ 1,000 \end{bmatrix}; \quad \omega_1 = 15,316 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

Нормальная функция построена на фиг. 4-21, b.



a Первая форма изгибных колебаний консольно заделанного крыла  $\omega = 12,799 \text{ рад/сек}$

b Первая форма симметричных изгибных колебаний незакрепленного крыла  $\omega = 15,316 \text{ рад/сек}$

c Вторая форма симметричных изгибных колебаний незакрепленного крыла  $\omega = 53,545 \text{ рад/сек}$

d Первая форма антисимметричных изгибных колебаний незакрепленного крыла  $\omega = 28,85 \text{ рад/сек}$

Фиг. 4-21. Нормальные функции чисто изгибных колебаний крыла реактивного транспортного самолета.

(c) Вторая форма симметричных изгибных колебаний незакрепленного крыла. Матричное уравнение, итерация которого сходится ко второй форме колебаний, определяется следующим выражением [см. уравнение (4-103)]:

$$\{W\} = \omega^2 [G] [\Sigma M] [S^{(1)}] \{W\} = \omega^2 [D^{(2)}] \{W\}, \quad (g)$$

где  $[S^{(1)}]$  представляет собой выметающую матрицу, определяемую равенством (4-101). Первая строка выметающей матрицы представляет собой только условия ортогональности

<sup>1)</sup> Другой метод, применяемый иногда при расчете колебаний незакрепленного самолета, заключается в том, что при применении процесса итерации опускается первая строка матрицы  $[D] = [G] [\Sigma M]$ . Таким образом, итерируя, мы получаем некоторые значения прогибов  $\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}$ , однако величина  $\varphi_0^{(1)}$  остается неопределенной. Для ее определения используем условие, что сумма сил инерции, действующих на незакрепленное крыло, совершающее собственные колебания некоторого тона, должна равняться нулю:

$$\varphi_0^{(1)} = -\frac{1}{M_0} \sum_{i=1}^5 M_i \varphi_i^{(1)}.$$

Хотя этот метод и метод, использованный в рассматриваемом примере, должны в принципе приводить к одному и тому же результату, однако второй метод часто бывает предпочтительнее, когда желательно быть уверенным, что сумма сил инерции с высокой степенью точности равна нулю.

нормальных функций первой и второй форм колебаний. Условие ортогональности нормальных функции первой и второй форм колебания системы сосредоточенных масс определяется равенством

$$\sum_{i=0}^5 M_i W_i^{(1)} W_i^{(2)} = 0. \quad (h)$$

Так как система является незакрепленной, следует еще дополнительно потребовать, чтобы силы инерции, обусловливаемые собственными колебаниями второй формы, находились в равновесии. Это условие выражается в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^5 M_i W_i^{(2)} = 0. \quad (i)$$

Соотношение (i) показывает также, что нормальная функция второй формы колебаний ортогональна к нормальной функции, соответствующей движению крыла как твердого тела. Комбинируя уравнения (h) и (i), можно построить некоторое условие ортогональности, из которого будет исключена величина  $W_0^{(2)}$ ,

$$\sum_{i=1}^5 M_i (W_i^{(1)} - W_0^{(1)}) W_i^{(2)} = 0. \quad (j)$$

Уравнение (j) устанавливает, что нормальные функции первой и второй форм колебаний ортогональны и, кроме того, что силы инерции, определяемые собственными колебаниями второй формы, находятся в равновесии. Уравнение (j) соответствует уравнению (4-98), полученному при общем рассмотрении процесса выметания, и поэтому члены  $K_{1i}^{(1)}$  выметающей матрицы [уравнение (4-101)] определяются следующим выражением:

$$K_{1i}^{(1)} = \frac{M_i (W_i^{(1)} - W_0^{(1)})}{M_1 (W_1^{(1)} - W_0^{(1)})} = \frac{M_i (\varphi_i^{(1)} - \varphi_0^{(1)})}{M_1 (\varphi_1^{(1)} - \varphi_0^{(1)})}. \quad (k)$$

Внеся сюда численные значения, полученные из предыдущих результатов, найдем выражение для выметающей матрицы в виде

$$[S^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & -6,4515 & -7,2709 & -11,1595 & -3,2751 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (l)$$

Подставляя этот результат, а также полученные ранее выражения матриц  $[G]$  и  $[M]$  в уравнение (g) и итерируя это уравнение, находим следующие выражения для матрицы значений нормальной функции и частоты второй формы симметричных колебаний незакрепленного крыла:

$$\{\varphi^{(2)}\} = \begin{bmatrix} 0,1667 \\ -0,04153 \\ -0,1742 \\ -0,4578 \\ 0,1092 \\ 1,000 \end{bmatrix}; \quad \omega_2 = 53,545 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

Соответствующая нормальная функция построена на фиг. 4-21, с.

(d) Первая форма антисимметричных изгибных колебаний. Характеристические уравнения для антисимметричных изгибных колебаний [см. уравнение (4-110)] имеют вид

$$\{W\} = \omega^2 [G] [M] \{W\} = \omega^2 [D] \{W\}, \quad (m)$$

где элементы матрицы  $[G]$ , получающиеся из уравнения (4-111), определяются равенствами:

$$G_{ij} = C_{ij}^{zz} - \frac{y_i}{I_x} \sum_{k=0} C_{kj} M_{kyk}. \quad (n)$$



При выводе равенства (п) из равенства (4-111) мы учитывали из степеней свободы, соответствующих движению самолета как твердого тела, только одну, отвечающую вращению самолета около продольной оси. Величина  $I_x$  в равенстве (п) представляет собой половину момента инерции относительно главной оси  $x$  всего самолета. В эту величину следует включить момент инерции фюзеляжа относительно оси  $x$ . В рассматриваемом частном примере  $I_x = 135,02 \times 10^7$  фунт·дюйм<sup>2</sup>. Используя ранее приведенные данные о массах и коэффициентах влияния, приведем матрицу  $[G]$ , соответствующую чистому антисимметричному изгибу, к виду

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,22802 & -0,35243 & -2,1793 & -4,5895 & -6,9312 \\ 0 & 0,12247 & -0,56723 & -3,0107 & -6,3671 & -9,7445 \\ 0 & 0,032313 & 0,14591 & 1,4906 & -0,36330 & -2,5458 \\ 0 & -0,077635 & 1,01558 & 4,0288 & 9,7571 & 14,433 \\ 0 & -0,17659 & 1,7982 & 6,3131 & 19,0914 & 37,119 \end{bmatrix} \times 10^{-6}. \quad (f)$$

Подставляя в уравнение (м) выражения матрицы  $[M]$  и  $[G]$ , определяемые соответственно соотношениями (а) и (f), и итерируя, получаем матрицу значений нормальной функции и частоту первой формы антисимметричных изгибных колебаний в следующем виде<sup>1)</sup>:

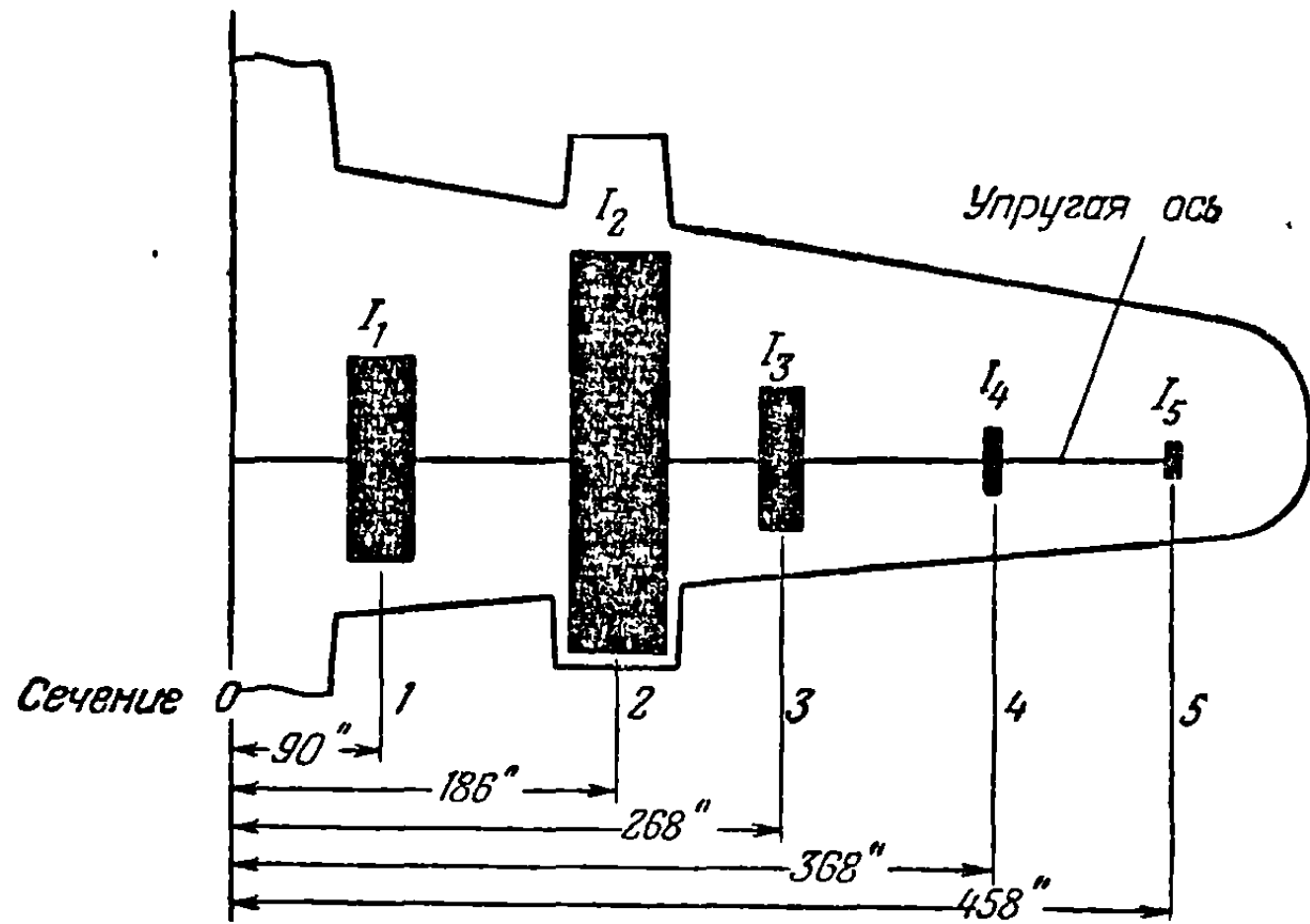
$$\{\varphi^{(1)}\}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,2175 \\ -0,2932 \\ -0,0684 \\ 0,4330 \\ 1,000 \end{bmatrix};$$

$$\omega_1 = 28,85 \text{ рад/сек.}$$

Соответствующая нормальная функция построена на фиг. 4-21, d.

Пример 4-6. Вычислить первую форму чисто крутильных колебаний крыла реактивного транспортного самолета.

**Решение.** Чисто крутильные колебания получаются в предположении, что центры тяжести всех сечений крыла, параллельных хорде, лежат на упругой оси, так что между крутильными и изгибными колебаниями не возникает взаимодействия. Действительное распределение моментов инерции вдоль размаха крыла реактивного транспортного самолета можно заменить, как показано на фиг. 4-22, системой сосредоточенных в некоторых сечениях моментов инерции. Предположим теперь, что момент инерции фюзеляжа относительно поперечной оси бесконечно велик. Тогда исследование можно проводить таким же образом, как если бы упругая ось крыла была



Фиг. 4-22. Система сосредоточенных масс для расчета крутильных колебаний крыла реактивного транспортного самолета.

<sup>1)</sup> Следует отметить, что угловое смещение фюзеляжа относительно продольной оси можно вычислить по системе значений нормальной функции, определяемой столбцовой матрицей  $\{\varphi^{(1)}\}$ . Для этого следует воспользоваться условием, что момент сил инерции относительно оси  $x$  для антисимметричных колебаний незакрепленного самолета должен быть равен нулю:

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} = -\frac{2}{I_f} \sum_{i=1}^5 M_i y_i \varphi_i^{(1)},$$

где  $I_f$  представляет собой момент инерции фюзеляжа относительно продольной оси (оси  $x$ ).

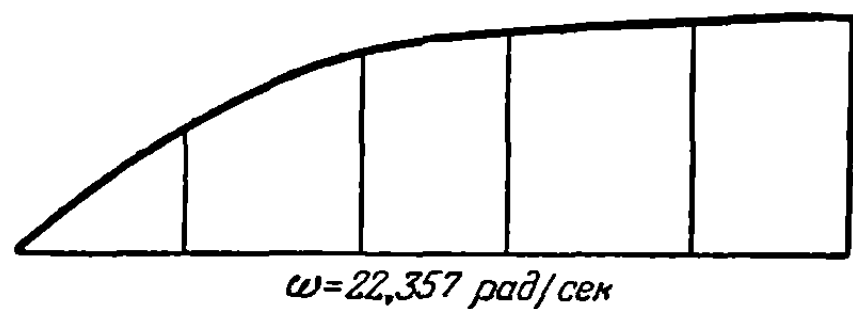
закреплена на центральной линии самолета. Матрица моментов инерции масс для системы, изображенной на фиг. 4-22, имеет вид

$$\underline{I} = \frac{1}{386} \begin{bmatrix} \infty & & & & \\ & 8,723 & & & \\ & & 93,16 & & \\ & & & 3,725 & \\ & & & & 2,775 \\ & & & & & 0,40 \end{bmatrix} \text{ фунт} \cdot \text{дюйм} \cdot \text{сек}^2. \quad (a)$$

Характеристические уравнения чисто крутильных колебаний системы сосредоточенных масс имеют вид

$$\{\theta\} = \omega^2 [C^{00}] \underline{I} \{\theta\}, \quad (b)$$

где матрица коэффициентов влияния  $[C^{00}]$  определяется равенством (g) примера 2-1, а матрица моментов инерции  $\underline{I}$  определяется приведенным выше равенством (a). Образуя произведение матриц в правой части уравнения (b) и итерируя, получим следующие выражения для матрицы значений нормальной функции и частоты первой формы крутильных колебаний:



$$\omega = 22,357 \text{ рад/сек}$$

Фиг. 4-23. Нормальная функция первой формы чисто крутильных колебаний крыла реактивного транспортного самолета.

$$\{\varphi^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4489 \\ 0,91932 \\ 0,95216 \\ 0,98939 \\ 1,000 \end{bmatrix}; \quad \omega_1 = 22,357 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$$

соответствующая нормальная функция построена на графике фиг. 4-23.

Пример 4-7. Вычислить характеристики двух первых форм симметричных колебаний (изгибно-крутильные формы колебаний) крыла реактивного транспортного самолета.

Решение. При вычислении предположим, что самолет может свободно совершать перемещения в вертикальном направлении, но не может вращаться ни относительно продольной, ни относительно поперечной оси. Заменим крыло системой сосредоточенных масс, изображенных на фиг. 4-24. Каждый участок крыла заменяется некоторым „сопряженным“ элементом, состоящим из двух равных сосредоточенных масс, расположенных на двух концах жесткого плеча. Масса каждого „сопряженного“ элемента равна массе участка крыла, который заменяется этим „сопряженным“ элементом. Далее, каждый элемент располагается параллельно хорде таким образом, чтобы его момент инерции и статический момент относительно упругой оси равнялись соответствующим величинам для заменяемого участка крыла.

Для построения системы, изображенной на фиг. 4-24, мы должны знать в дополнение к данным примеров 4-5 и 4-6 статические моменты  $S_\alpha$  каждого из участков крыла. Для расчета характеристик „сопряженных“ элементов используем следующую таблицу:

Координата сечения (дюйм)	$M$ (фунт)	$I_\alpha$ (фунт $\times$ дюйм <sup>2</sup> )	$S_\alpha$ (фунт $\times$ дюйм)	$e = S_\alpha/M$ (дюйм)	$m$ (фунт)	$d = 2 \sqrt{\frac{I_\alpha}{M} - e^2}$ (дюйм)
0	17 400	$\infty$	—	—	17 400	—
90	6 039	$8,72 \times 10^6$	—42 273	—7	3 019,5	74,7
186	10 200	$93,16 \times 10^6$	—140 083	—13,734	5 100	189,15
268	4 200	$3,72 \times 10^6$	8 400	2,0	2 100	59,39
368	3 400	$2,77 \times 10^6$	6 800	2,0	1 700	56,95
458	680	$0,40 \times 10^6$	2 720	4,0	340	47,84

В приведенной таблице  $S_\alpha$  представляет собой статический момент каждого „сопряженного“ элемента относительно упругой оси, а  $e$  представляет собой расстояние от упругой оси до центра тяжести каждого элемента. Обе эти величины считаются положительными.

ными, если центр тяжести участка расположен в сторону кормы от упругой оси крыла. Далее,  $m$  представляет собой величину каждой из сосредоточенных масс „сопряженных“ элементов, равную половине полной массы участка для всех сечений, кроме сечения, расположенного на центральной линии, для которого  $m$  представляет собой полную массу;  $d$  представляет собой длину жесткого плеча „сопряженного“ элемента.

Характеристические уравнения для нормальных функций симметричных колебаний незакрепленного крыла имеют вид

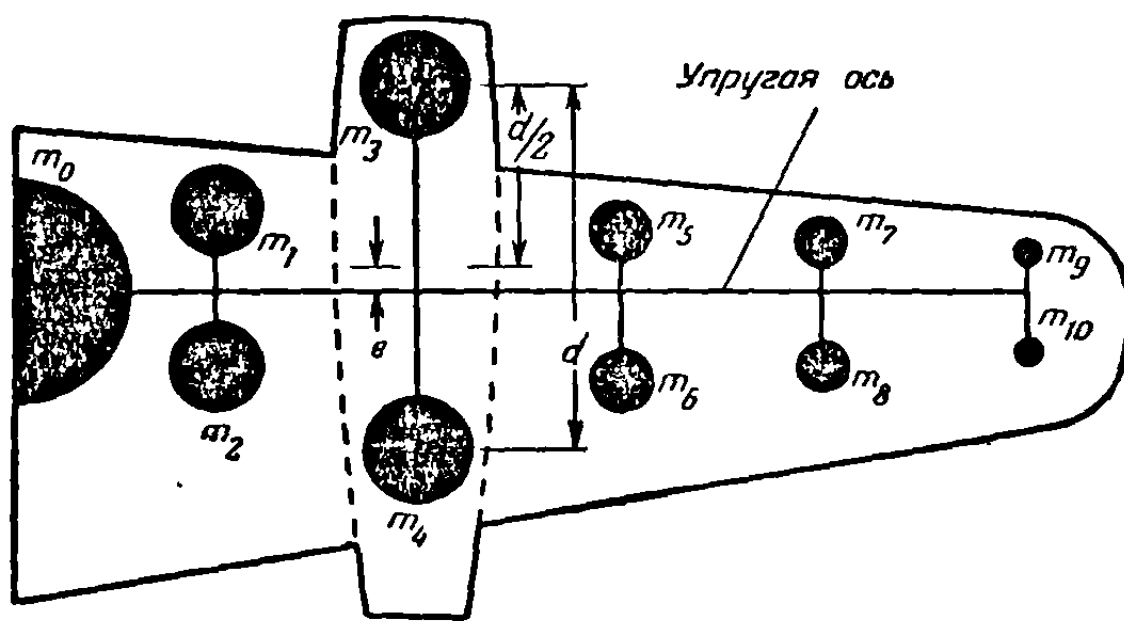
$$\{W\} = \omega^2 [G] \{m\} \quad \{W\} = \omega^2 [D] \{W\}, \quad (a)$$

где элементы матрицы  $[G]$  получаются, согласно равенству (4-111), в следующем виде:

$$G_{ij} = C_{ij}^{zz} - \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{10} C_{kj}^{zz} M_k \quad (b)$$

Так как система состоит из одиннадцати сосредоточенных масс, матрицы  $[G]$  и  $\{m\}$  имеют по одиннадцать столбцов и строк. Величина  $M$  в равенстве (b) представляет собой половину полной массы самолета.

Коэффициенты влияния, соответствующие системе сосредоточенных масс, изображенной на фиг. 4-24, можно вычислить, используя матрицы  $[C^{zz}]$  и  $[C^{\theta\theta}]$ , определяемые соответственно соотношениями (e) и (g) примера 2-1. Это выполняется просто, если поместить единичные нагрузки в одну из точек, где располагаются сосредоточенные массы, и вычислить прогибы во всех точках расположения сосредоточенных масс, используя матрицы  $[C^{zz}]$  и  $[C^{\theta\theta}]$ . Процесс повторяется до тех пор, пока единичная нагрузка не будет приложена последовательно во всех точках расположения сосредоточенных масс.



Фиг. 4-24. Динамическая модель крыла реактивного транспортного самолета.

Процесс итерации уравнения (a) сходится к нормальной функции основной формы колебаний незакрепленного крыла. Матрица значений нормированной нормальной функции и частота имеют следующие значения:

$$\{\varphi^{(1)}\} = \begin{bmatrix} \varphi_0^{(1)} \\ \varphi_1^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi_{10}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,167241 \\ -0,130234 \\ -0,125428 \\ -0,0279016 \\ -0,00513142 \\ 0,246037 \\ 0,254583 \\ 0,619040 \\ 0,629625 \\ 0,989446 \\ 1,0000 \end{bmatrix}; \quad \omega_1 = 15,310 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$$

Каждое численное значение элемента приведенной выше столбцовой матрицы представляет прогиб некоторой сосредоточенной массы. Узловая линия первой формы колебаний незакрепленного крыла построена на фиг. 4-25, а, изображающей крыло в плане <sup>1)</sup>. Колебания первой формы весьма близки к некоторой форме чисто изгибных колебаний, так что частота колебаний первой формы лишь немного отличается от частоты первой формы изгибных колебаний, вычисленной в примере 4-5 (b). Подобная близость является типичной для умеренно тонких крыльев с малым статическим моментом. Следует заметить, что в рассматриваемом частном примере статический момент мал, несмотря даже на то, что крыло несет на себе большую массу мотора.

<sup>1)</sup> Узловая линия построена при помощи простой интерполяции кривых прогиба вдоль линий, параллельных размаху, между „сопряженными“ элементами  $m_3, m_4$  и  $m_5, m_6$ .

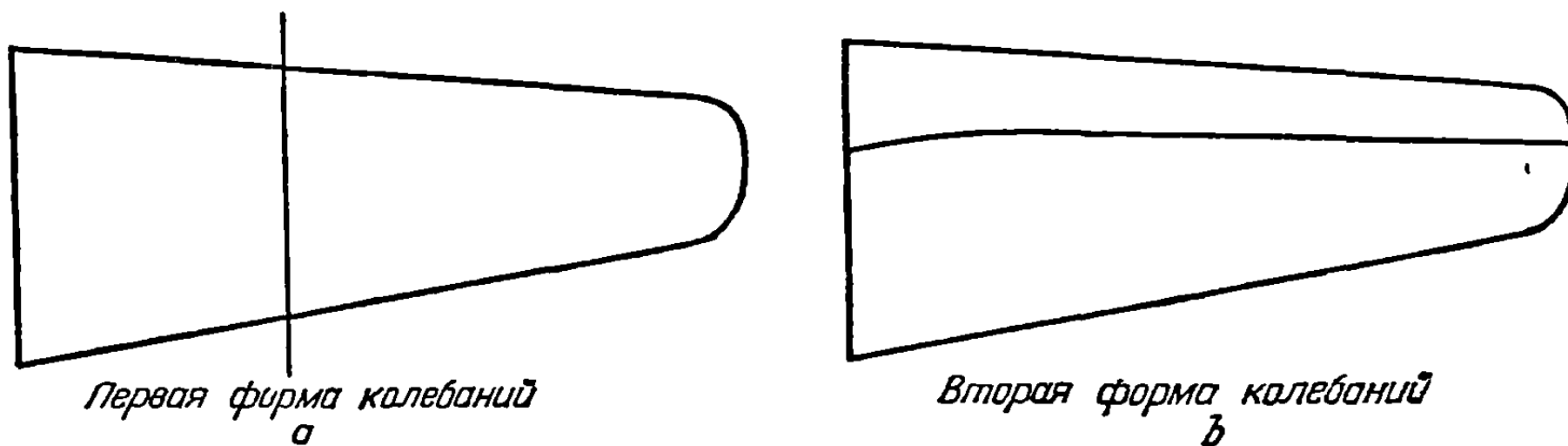
Нормальная функция симметричных колебаний незакрепленного крыла получается, если ввести в уравнение (а) выметающую матрицу:

$$\{W\} = \omega^2 [G] \left[ \sum m \right] [S^{(1)}] \{W\} = \omega^2 [D^{(2)}] \{W\}, \quad (с)$$

где  $[S^{(1)}]$  представляет собой выметающую матрицу, определяемую формулой (4-101). Процесс итерации уравнения (с) сходится к нормальной функции второй формы симметричных колебаний незакрепленного крыла, так что получим

$$\{\varphi^{(2)}\} = \begin{bmatrix} -0,0531214 \\ +0,165048 \\ -0,179550 \\ +1,0000 \\ -0,789320 \\ +0,265021 \\ -0,316863 \\ +0,289834 \\ -0,289804 \\ +0,249535 \\ -0,242188 \end{bmatrix}; \quad \omega_2 = 22,410 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

Узловая линия второй формы симметричных колебаний незакрепленного крыла построена на фиг. 4-25, б, изображающей форму крыла в плане. Колебания этой формы близки



Фиг. 4-25. Узловые линии симметричных колебаний незакрепленного крыла реактивного транспортного самолета.

уже к чисто крутильным колебаниям, так что соответствующая нормальная функция и частота весьма близки к нормальной функции и частоте, полученным в примере 4-6. Этот результат является опять-таки типичным для умеренно тонких крыльев с малым статическим моментом.

**4-7. Нормальные функции и частоты колебаний вращающихся балок.** Многие из методов, рассмотренных в предыдущих разделах, можно использовать также и для вращающихся балок. Рассмотрим, например, применение метода Галеркина [4-8] к решению однородного дифференциального уравнения движения вращающейся балки. Рассматривая для простоты однородную вращающуюся балку, приводим уравнение (3-124) к виду

$$EIW^{IV} - \frac{m\Omega^2}{2}(R^2 - y^2)W'' + m\Omega^2 yW' - m\omega^2 W = 0. \quad (4-119)$$

Приведем уравнение (4-119) к безразмерному виду, полагая  $\psi = W/R$  и  $\eta = y/R$ ; тогда дифференциальное уравнение запишется следующим образом:

$$\frac{d^4\psi}{d\eta^4} - \frac{K}{2}(1 - \eta^2)\frac{d^2\psi}{d\eta^2} + K\eta\frac{d\psi}{d\eta} - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 K\psi = 0, \quad (4-120)$$

где  $K$  представляет собой безразмерную постоянную, определяемую соотношением

$$K = \frac{m\Omega^2 R^4}{EI}.$$

Предположим, что функцию  $\psi(\eta)$  для случая деформированной вращающейся балки можно представить в виде

$$\psi(\eta) = \sum_{j=1}^n \gamma_j(\eta) \bar{q}_j, \quad (4-121)$$

где  $\gamma_j(\eta)$  представляют собой некоторые заданные функции, удовлетворяющие граничным условиям. Внося в уравнение (4-120) соотношение (4-121), получаем

$$\sum_{j=1}^n \left[ \gamma_j^{IV}(\eta) - \frac{K}{2}(1-\eta^2)\gamma_j''(\eta) + K\eta\gamma_j'(\eta) - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 K\gamma_j(\eta) \right] \bar{q}_j = 0, \quad (4-122)$$

где штрихи обозначают теперь дифференцирование по переменной  $\eta$ . Умножая обе части этого уравнения на  $\gamma_i(\eta)$  и интегрируя в пределах от нуля до единицы, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[ \int_0^1 \gamma_j^{IV} \gamma_i d\eta - \frac{K}{2} \int_0^1 (1-\eta^2) \gamma_j'' \gamma_i d\eta + \right. \\ \left. + K \int_0^1 \eta \gamma_j' \gamma_i d\eta - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 K \int_0^1 \gamma_i \gamma_j d\eta \right] \bar{q}_j = 0. \end{aligned} \quad (4-123)$$

Выполняя в первом интеграле интегрирование по частям, находим

$$\int_0^1 \gamma_j^{IV} \gamma_i d\eta = [\gamma_j''' \gamma_i - \gamma_j'' \gamma_i']_0^1 + \int_0^1 \gamma_i'' \gamma_j'' d\eta. \quad (4-124)$$

Предполагая граничные условия такими, что выражение в квадратных скобках в уравнении (4-124) обращается в нуль, приводим уравнение (4-123) к виду

$$\sum_{j=1}^n \left[ k_{ij} - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 m_{ij} \right] \bar{q}_j = 0, \quad (i=1, \dots, n), \quad (4-125)$$

где

$$m_{ij} = \int_0^1 \gamma_i \gamma_j d\eta,$$

$$k_{ij} = \frac{1}{K} \int_0^1 \gamma_i'' \gamma_j'' d\eta - \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\eta^2) \gamma_j'' \gamma_i d\eta + \int_0^1 \eta \gamma_j' \gamma_i d\eta.$$

Характеристические уравнения, определяемые соотношением (4-125), аналогичны по форме уравнениям (4-11а), так что к ним применимы различные методы решения, рассмотренные в п. 4-5. Часто бывает удобно привести уравнение (4-125) к матричной форме

$$\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 [m_{ij}] \{\bar{q}\} = [k_{ij}] \{\bar{q}\}, \quad (4-126)$$

где

$$[m_{ij}] = [\gamma] \underline{\Sigma} \bar{W} \underline{\Sigma} [\gamma]',$$

$$[k_{ij}] = \frac{1}{K} [\gamma''] \underline{\Sigma} \bar{W} \underline{\Sigma} [\gamma'']' - \frac{1}{2} [\gamma''] \underline{\Sigma} \bar{W} \underline{\Sigma} \underline{\Sigma} (1-\eta^2) \underline{\Sigma} [\gamma]' + [\gamma'] \underline{\Sigma} \bar{W} \underline{\Sigma} [\eta] [\gamma]'$$

Форма матриц  $[\gamma]$ ,  $[\gamma']$  и  $[\gamma'']$  та же самая, что и в рассмотренном ранее в связи с уравнениями (4-13) и (4-14) случае.

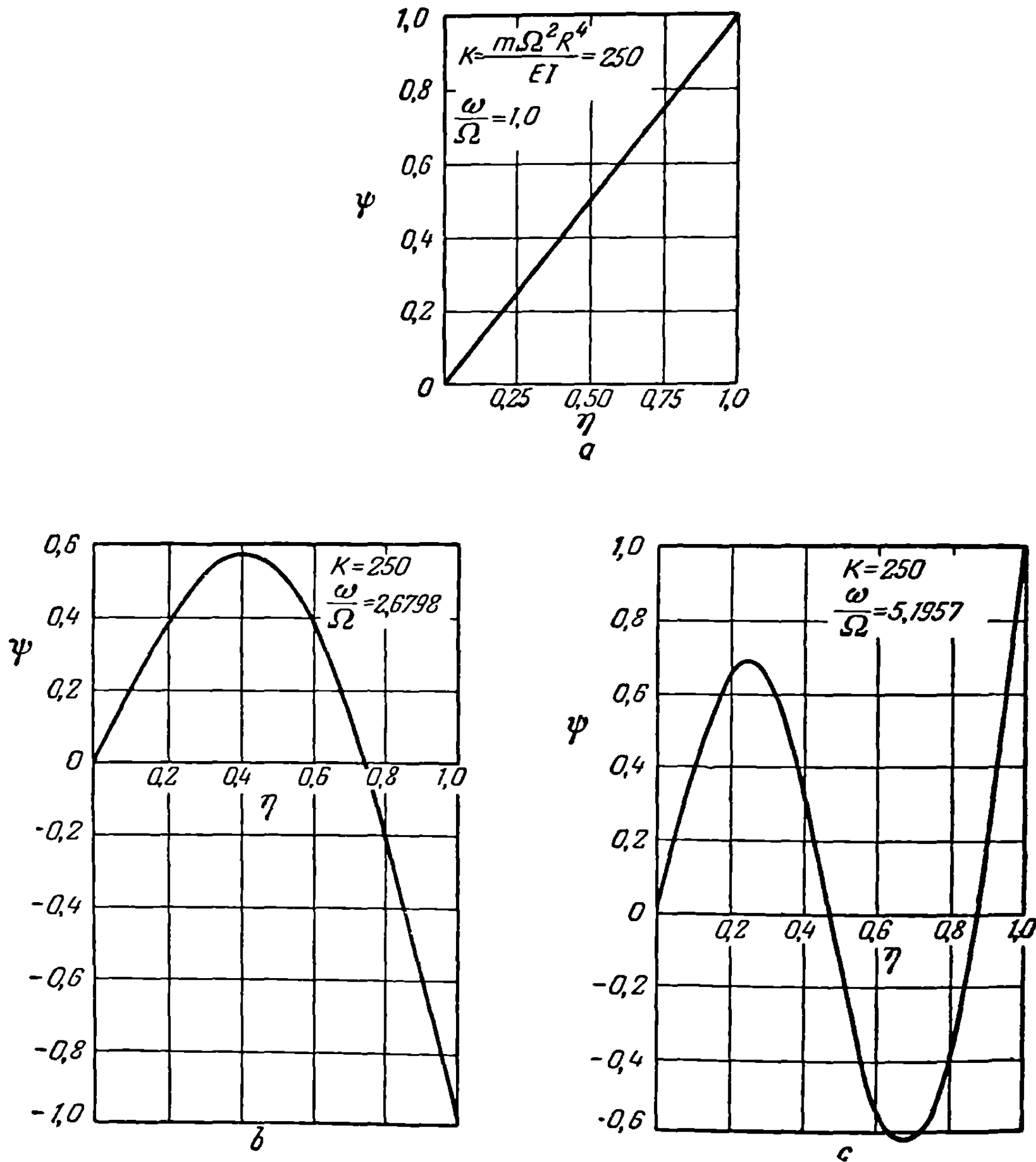
Функции прогиба  $\gamma_j(\eta)$  выбраны таким образом, чтобы граничные условия удовлетворялись настолько точно, насколько это возможно. Например, часто

применяются граничные условия для вращающейся балки, один конец которой закреплен на шарнире, а другой — свободен. Можно в этом случае использовать полиномиальное представление Дункана [4-4], полагая

$$\gamma_j = \eta, \quad (j = 1), \quad (4-127)$$

$$\gamma_j = \frac{1}{6}(j+2)(j+3)\eta^{j+1} - \frac{1}{3}j(j+3)\eta^{j+2} + \frac{1}{6}j(j+1)\eta^{j+3}; \quad (j \geq 2). \quad (4-128)$$

На фиг. 4-26 приведены результаты для первых двух изгибных форм колебаний, полученные применением четырех функций прогиба ( $j = 1, 2, 3, 4$ ),



Фиг. 4-26.

$a$  — нормальная функция, соответствующая вращению однородной балки как твердого тела,  $b$  — нормальная функция первой формы изгибных колебаний однородной вращающейся балки;  $c$  — нормальная функция второй формы изгибных колебаний однородной вращающейся балки.

определяемых уравнениями (4-127) и (4-128). При вычислении этих результатов величина  $K$  предполагалась равной 250. Весовые матрицы строились путем деления вращающейся балки с одним свободным концом и другим концом, закрепленным на шарнире, на десять равных участков и последующего применения формулы Симпсона. Так как безразмерная постоянная  $K$  является единственной входящей в расчеты физической постоянной, то результаты, изображенные на фиг. 4-26, применимы, разумеется, ко всем однородным вращающимся балкам, для которых  $K = 250$ .

## Глава 5

# СВЕДЕНИЯ ИЗ АЭРОДИНАМИКИ: ДВУМЕРНОЕ И ТРЕХМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

**5-1. Основные представления: понятие о малых возмущениях.** В предшествующих главах были описаны физические свойства и движение тех конструктивных элементов, с которыми должен иметь дело специалист по аэроупругости. Теперь мы рассмотрим динамику жидкости, чтобы тем самым завершить изложение всего вводного материала, необходимого для изучения связи между упругими деформациями и аэродинамическими нагрузками, обусловленными движением жидкости. Так как уже имеется много прекрасных справочных книг и учебников по динамике жидкости, то необходимо сказать несколько слов в оправдание еще одного обзора некоторых ее основ. Одной из важных причин этого является характер вспомогательных сведений из аэродинамики, используемых при практическом решении задач аэроупругости. Если не считать некоторых специальных случаев, подобных срывному флаттеру, где играет существенную роль нелинейность, эти вспомогательные сведения обязательно должны математически выражаться линейными уравнениями, чтобы без чрезмерного труда и с достаточной быстротой обеспечить нахождение решений. Поэтому необходимо описать строгие методы линеаризации, лежащие в основе большинства используемых в дальнейшем результатов. Кроме того, с точки зрения специалиста по аэроупругости недостаток почти всех книг по динамике жидкости состоит в том, что в них основное внимание уделяется вопросам установившегося течения. Даже в столь высокоавторитетной работе, как книга Ферри „Аэродинамика сверхзвуковых течений“<sup>1)</sup>, первый раздел первой главы начинается словами: „Рассмотрим установившееся течение невязкой сжимаемой жидкости“, и автор книги всюду придерживается этого ограничения. Другие авторы, рассматривая неустановившиеся течения, подробно анализируют распространение одномерных возмущений, тогда как для специалиста по аэроупругости требуются обычно сведения о двумерных и трехмерных течениях и особенно об обтекании тел, при котором создается подъемная сила.

Рассматриваемая здесь жидкость обычно представляет собой невязкий идеальный газ. Однако имеются исключения из этого правила, когда временно, для упрощения математического исследования, вводится предположение о несжимаемости. На механические свойства идеального газа налагается условие, состоящее в том, что сила, действующая на любую поверхность внутри газа или на его границе, направлена по нормали к этой поверхности и является сжимающей. Все термодинамические свойства выводятся из уравнения состояния

$$p = R\rho T, \quad (5-1)$$

связывающего давление  $p$ , плотность  $\rho$  и абсолютную температуру  $T$  в элементарном объеме, окружающем данную точку, в сочетании с предположением о постоянстве удельной теплоемкости при постоянном давлении  $c_p$  и обратимости всех процессов, за несколькими специальными исключениями.

<sup>1)</sup> Ферри А., Аэродинамика сверхзвуковых течений, Гостехиздат, М.—Л., 1952.—  
Прим. ред.



Так как предполагается, что читатель знаком с общими основами аэродинамики, то основные уравнения приводятся ниже без вывода. Вывод их можно найти в таких книгах, как [5-1] или [5-2]<sup>1)</sup>. Течение идеального газа может быть полностью описано путем задания величин  $p$ ,  $\rho$  и  $T$  в элементарном объеме и составляющих скорости  $(u, v, w)$  каждой частицы как функций времени  $t$  и положения  $(x, y, z)$  в прямоугольной декартовой системе координат. Эти шесть зависимых переменных всегда связаны между собой условием сохранения массы, т. е. уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (5-2)$$

и тремя уравнениями движения в проекциях на оси инерциальной системы координат<sup>2)</sup>:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5-3a)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (5-3b)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (5-3c)$$

В уравнениях (5-3), как это обычно делается в теории аппаратов тяжелее воздуха, сила тяжести и другие внешние силы не учитываются.

Чтобы получить математически определенную систему уравнений для поля течения, уравнения (5-1) — (5-3) должны быть дополнены двумя первыми экспериментальными законами термодинамического равновесия. Как показано, например, в [5-3], введение этих законов равносильно определению трех новых переменных, характеризующих состояние однородного вещества и известных как удельная полная энергия, удельная энтальпия и удельная энтропия.

Следует указать, что в большей части аэродинамической теории, представляющей интерес для специалиста по аэроупругости, термодинамические свойства газа представлены лишь отношением удельных теплоемкостей  $\gamma$ , а состояние газа характеризуется возмущением давления, или разностью между местным давлением в элементе объема и некоторым постоянным значением давления. В теории такого рода существенную роль играют определенные функции, уменьшающие число зависимых переменных, а именно потенциал скоростей  $\varphi(x, y, z, t)$  и потенциал ускорений, или функция давления,  $\psi(x, y, z, t)$ . Существование первой из этих функций связано с условием отсутствия вихрей, означая физически, что все частицы жидкости обладают нулевым моментом количества движения относительно осей, проходящих через их центры тяжести. Математически это условие выражается равенством нулю вихря<sup>3)</sup> вектора  $\mathbf{q}$  или, в проекциях на оси координат, равенствами

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (5-4)$$

Факт обращения  $\text{rot } \mathbf{q}$  в нуль во всех точках течения, в большинстве случаев имеющих практический интерес, совершенно не очевиден, но может быть доказан как для установившихся, так и для неустановившихся течений путем одновременного применения теорем Стокса и Кельвина. Теорема Стокса выражает чисто геометрическое свойство любого векторного поля, а именно, что интеграл

<sup>1)</sup> См. также: Кочин, Кибель, Розе, Теоретическая гидромеханика, т. II, М., 1948; Лойцянский, Механика жидкости и газа, М., 1957.—Прим. ред.

<sup>2)</sup> Субстанциональная производная  $D(\ )/Dt$  обозначает скорость изменения во времени той или иной величины для данной частицы жидкости.

<sup>3)</sup> Векторное обозначение  $\mathbf{q} = ui + vj + wk$  будет применяться здесь для упрощения записи нескольких уравнений. Векторные операторы, такие, как дивергенция, градиент и вихрь, применяются в их обычном определении.

нормальной компоненты  $\text{rot } \mathbf{q}$  по любой поверхности  $S$  в векторном поле равен криволинейному интегралу векторной функции  $\mathbf{q}$ , взятому по замкнутой кривой  $C$ , ограничивающей поверхность  $S$ . Как доказывается в любом курсе высшей математики или векторного анализа,

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{q} \cdot d\mathbf{s} = \Gamma. \quad (5-5)$$

Соответствующие векторные обозначения показаны на фиг. 5-1. Криволинейный интеграл в правой части уравнения известен в механике жидкости как циркуляция  $\Gamma$ . Теорема Стокса полезна тем, что позволяет установить справедливость уравнений (5-4), если есть возможность доказать обращение в нуль циркуляции  $\Gamma$  по любому контуру, лежащему целиком внутри некоторой односвязной области течения. Действительно, если некоторая частица жидкости удовлетворяет условию  $\text{rot } \mathbf{q} \neq 0$ , то можно сразу же показать, что циркуляция  $\Gamma$  при соответствующем выборе поверхности  $S$  не будет равна нулю.

Теорема Кельвина [5-2] является следствием законов динамики и касается скорости изменения со временем циркуляции  $\Gamma$  по замкнутому контуру, представляющему собой всегда совокупность одних и тех же частиц жидкости. Для невязкой жидкости наиболее общая форма теоремы может быть записана следующим образом:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \frac{dp}{\rho}. \quad (5-6)$$

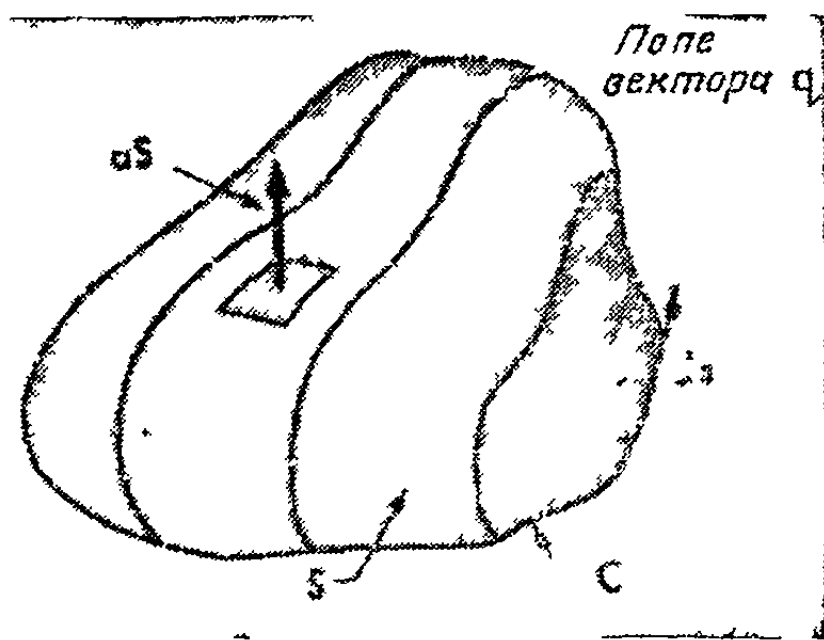
Очевидно, что для несжимаемой жидкости или для случая баротропного во всех точках течения (течения при неизменном соотношении между плотностью и давлением) это уравнение принимает вид

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (5-7)$$

Баротропность имеет место в большинстве случаев, практически важных для специалиста по аэроупругости. В частности, когда жидкость вытекает из резервуара при неизменных параметрах заторможенного потока (замкнутая или незамкнутая аэродинамическая труба) или когда линии тока прямолинейны и параллельны при постоянстве параметров, характеризующих каждую частицу жидкости, вверх по течению (прямолинейный полет в атмосфере), можно показать, что течение, если оно обратимо, будет изэнтропичным, причем во всех его точках справедливо соотношение  $p = \text{const} \cdot \rho^\gamma$ . Постоянство этого соотношения может быть нарушено только сильными ударными волнами или интенсивным подводом тепла. Если уравнение (5-7) справедливо во все время движения и для любых контуров, то циркуляция  $\Gamma$  остается постоянной для любой совокупности частиц. Поскольку для течений из резервуара или течений, образующихся из течений с прямолинейными линиями тока, циркуляция  $\Gamma$  по любому такому контуру первоначально равна нулю, то постоянное отсутствие циркуляции доказывает на основании теоремы Стокса безвихревой характер течения во всех его точках.

Учитывая приведенные выше рассуждения, мы предполагаем, как правило, что уравнения (5-4) справедливы в любой внутренней точке поля течения<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Основным исключением из этого правила является случай наличия поверхностей разрыва тангенциальной составляющей скорости, простирающихся от задних кромок несущих поверхностей крыла; этот случай будет рассмотрен ниже.



Фиг. 5-1. Поверхность  $S$ , ограниченная кривой  $C$ , в векторном поле. Вектор элемента площади  $dS$  направлен по нормали к соответствующей площадке  $dS$ . Вектор элемента длины  $ds$  направлен так, чтобы обход в указываемом им направлении соответствующей элементарной площадки  $dS$  происходил согласно правилу правой руки.

Обращение в нуль вихря в векторном поле служит необходимым и достаточным условием того, чтобы данный вектор являлся градиентом некоторой скалярной функции (см. [5-4], стр. 100—101). В данном случае такой функцией является потенциал скоростей  $\varphi$ . Если векторное уравнение

$$\mathbf{q} = \text{grad } \varphi \quad (5-8)$$

записать в проекциях на оси координат, то получатся известные соотношения

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (5-9)$$

уменьшающие на два число независимых переменных в аэродинамических задачах. Очевидно, что из уравнений (5-9) можно вывести уравнения (5-4) путем приравнивания трех пар смешанных производных функции  $\varphi$ .

Потенциал скоростей является основной искомой величиной в большинстве теоретических исследований. Посредством уравнений движения (5-3) он связан с давлением — величиной, имеющей более отчетливый физический смысл, а первый интеграл этих уравнений известен как уравнение Кельвина или уравнение Бернулли для неустановившегося течения. Применяя векторные обозначения, можно быстро получить этот интеграл, если заметить, что уравнения (5-3) записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \text{grad}) \mathbf{q} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad (5-10)$$

что для безвихревого баротропного течения равносильно уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi + \text{grad} \left( \frac{q^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad (5-11)$$

или

$$\text{grad} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} \right] = 0. \quad (5-12)$$

После интегрирования уравнения (5-12) очевидно, что сумма входящих в него трех величин постоянна во всем поле течения в любой заданный момент времени, так что в наиболее общем случае эта сумма равняется некоторой функции времени:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = F(t). \quad (5-13)$$

Функцию  $F(t)$  можно исключить из правой части уравнения Кельвина, давая иное определение потенциала скоростей. Так, например,  $\varphi$  можно заменить на  $\left[ \varphi - \int F(t) dt \right]$  без какого-либо изменения поля скоростей. Однако в большинстве практически важных случаев такая замена не нужна, поскольку для баротропного потока, соединенного с большим резервуаром,  $F(t)$  обращается в нуль. Кроме того, в тех случаях, когда на достаточном удалении движение жидкости со скоростью  $U$  характеризуется прямолинейными линиями тока,

$$F(t) = \frac{1}{2} U^2. \quad (5-14)$$

При изэнтропическом течении интеграл давления вычисляется просто.

Дифференциальное уравнение в частных производных для потенциала скоростей может быть получено путем непосредственного исключения параметров состояния из уравнения (5-13) и уравнения неразрывности (5-2), которое мы запишем в векторной форме

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\mathbf{q}}{\rho} \cdot \text{grad } \rho + \text{div } \mathbf{q} = 0. \quad (5-15)$$

Если  $\varphi$  существует, то воспользуемся тем обстоятельством, что дивергенция градиента равна оператору Лапласа  $\nabla^2(\ )$ :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\ )) = \nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial z^2}. \quad (5-16)$$

Тогда уравнение (5-15) принимает вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\mathbf{q}}{\rho} \cdot \operatorname{grad} \rho + \nabla^2 \varphi = 0. \quad (5-17)$$

Прежде чем продолжать выкладки, стоит заметить, что в тех случаях, когда жидкость можно считать несжимаемой, уравнение (5-17) сводится к уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (5-18)$$

В этих случаях можно не только использовать широко известные и тщательно разработанные математические методы (см., например, [5-2] и [5-5]), особенно метод комплексного переменного для двумерных течений, но и расчленить задачу на две различные части. Уравнение (5-18) представляет собой чисто геометрический результат совместно действующих условий неразрывности и отсутствия вихрей; законы механики вводятся только при вычислении давлений по известному полю скоростей с помощью уравнения, являющегося аналогом уравнения Кельвина для случая несжимаемой жидкости,

$$p + \frac{\rho q^2}{2} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho F(t). \quad (5-19)$$

Возвратимся к общему уравнению для потенциала  $\varphi$ ; с помощью уравнения (5-13) исключим два члена, содержащие плотность, причем функция  $F(t)$  исключается с помощью одного из указанных выше способов. Возьмем частную производную по времени от всех членов уравнения (5-13):

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5-20)$$

Здесь

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (5-21)$$

есть скорость звука, или местная скорость распространения малых возмущений, которую удобно ввести взамен параметров состояния. Операция вычисления градиента от всех членов уравнения Кельвина дает

$$-\operatorname{grad} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \frac{a^2}{\rho} \operatorname{grad} \rho, \quad (5-22)$$

откуда

$$\frac{\mathbf{q}}{\rho} \cdot \operatorname{grad} \rho = -\frac{1}{a^2} \left[ \mathbf{q} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi + \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \left( \frac{q^2}{2} \right) \right] = -\frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{q^2}{2} \right) + \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \left( \frac{q^2}{2} \right) \right]. \quad (5-23)$$

Если выражения (5-20) и (5-23) подставить в уравнение (5-17), то будем иметь

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial q^2}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \left( \frac{q^2}{2} \right) \right] = 0. \quad (5-24)$$

Так как  $\mathbf{q} = \operatorname{grad} \varphi$ , то полученное уравнение является точным нелинейным уравнением для потенциала скоростей при неустановившемся течении. Присутствие в уравнении (5-24) величины  $a^2$  вызывает вопрос, является ли  $\varphi$  единственной зависимой переменной в этом уравнении. Для установившегося течения  $a^2$  легко исключить с помощью известного соотношения — следствия первого закона термодинамики:

$$a^2 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) q^2 = \text{const}. \quad (5-25)$$

Можно, однако, показать, что соотношение такого рода неприменимо при учете изменения величин со временем. Это затруднение не имеет практического значения в аэроупругости, поскольку для произвольного случая нелинейные уравнения не могут быть решены. Мы можем обойти это затруднение, заменяя  $a^2$  постоянной величиной, соответствующей его значению в однородном течении при линеаризованном варианте уравнений (5-24).

Обратимся теперь к тому, что составляет вторую часть полного математического описания задач, связанных с течением жидкости, а именно — к граничным условиям. Если жидкость снаружи не ограничена, то имеется обычно два типа этих условий: условия в бесконечности и условия, связанные с присутствием одного или нескольких тел, погруженных в движущуюся жидкость. Условия первого типа зависят от природы дифференциального уравнения в частных производных для потенциала  $\phi$ . Если это — уравнение Лапласа, как в случае течения несжимаемой жидкости, то требуется лишь, чтобы в отдаленных точках жидкость находилась в состоянии покоя или некоторого определенного равномерного движения. Если дифференциальное уравнение имеет сходство с волновым уравнением, как это имеет место при неустановившемся движении с учетом сжимаемости, то условия в бесконечности должны устанавливать дополнительно, что возмущения волнового типа распространяются наружу от их источников. Эти вопросы исследуются более детально в последующих пунктах.

Условие на границе тела обычной формы просто состоит в том, что вдоль всей поверхности тела составляющая скорости жидкости  $\partial\phi/\partial n$ , перпендикулярная к этой поверхности, определяется движением самого тела. Частицы, соприкасающиеся с телом, должны участвовать в его движении по направлению нормали к поверхности, поскольку внутри течения, если исключить не затрагиваемые нами здесь случаи кавитации, не должно образовываться каверн. Ламб показал ([5-2], гл. 1), что если уравнение поверхности тела при его неустановившемся движении имеет вид

$$F(x, y, z, t) = 0, \quad (5-26)$$

то граничное условие по всей площади поверхности  $F$  имеет вид

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (5-27)$$

Другими словами, если следить за движением определенной частицы жидкости (субстанциональная производная), то скорость изменения численной величины функции  $F$  равна нулю, так что эта частица непрерывно соприкасается с поверхностью  $F=0$ . При установившемся течении  $F$  не зависит от времени  $t$  и уравнение (5-27) сводится к виду

$$\mathbf{q} \cdot \text{grad } F = 0. \quad (5-28)$$

Физически это означает, что составляющая скорости, перпендикулярная к  $F$ , равна нулю.

Именно вид граничных условий (5-27) и (5-28) для тел, имеющих распространяющую в авиационной технике форму, привел к возникновению понятия малых возмущений, лежащего в основе большинства приемов линеаризации аэродинамических задач. Мы будем рассматривать здесь крылья, так как они представляют наибольший интерес для специалиста по аэроупругости, но заметим при этом, что результаты могут быть распространены на тонкие фюзеляжи и т. п. Представим себе крыло или профиль погруженным в неограниченную массу жидкости, которая равномерно перемещается со скоростью  $U$  в положительном направлении оси  $x$  декартовой системы координат. Крыло жестко связано с системой координат так, что оно лежит вблизи плоскости  $xu$ . Тогда оказывается, что переменная  $z$  в уравнении (5-26) может быть выделена в явной форме, а само уравнение можно расчленить на два — одно для верхней поверхности



крыла, другое для нижней поверхности:

$$F_U = z - z_U(x, y, t) = 0, \quad (5-29a)$$

$$F_L = z - z_L(x, y, t) = 0. \quad (5-29b)$$

Уравнения (5-29) справедливы в области между передней кромкой, след которой на плоскости  $xu$  выражается уравнением  $x = x_t(y)$ , и задней кромкой, уравнение следа которой  $x = x_t(y)$ . Так как  $\partial F / \partial z = 1$ , то мы можем разрешить уравнение (5-27) относительно значений вертикальной составляющей скорости  $w$  в любой точке поверхности крыла:

$$w = \frac{\partial z_U}{\partial t} + u \frac{\partial z_U}{\partial x} + v \frac{\partial z_U}{\partial y}; \quad \text{для } z = z_U, (x, y) \text{ в области } R_a, \quad (5-30a)$$

$$w = \frac{\partial z_L}{\partial t} + u \frac{\partial z_L}{\partial x} + v \frac{\partial z_L}{\partial y}; \quad \text{для } z = z_L, (x, y) \text{ в области } R_a, \quad (5-30b)$$

где область  $R_a$  есть та часть плоскости  $xu$ , которая покрывается проекцией крыла на эту плоскость.

Уравнения (5-30) являются точными уравнениями, но мы заменим их приближенными, замечая, что почти для всех крыльев в большинстве точек их поверхности (1) наклоны  $\partial z_U / \partial x$ ,  $\partial z_U / \partial y$  и т. д. очень малы по сравнению с единицей и (2) результирующий вектор скорости жидкости  $\mathbf{q}$  по направлению и величине лишь незначительно отличается от скорости невозмущенного течения  $U\mathbf{i}$ . Замечание (2) мы примем в качестве основного допущения теории малых возмущений, вводя определение потенциала скоростей возмущения  $\varphi'$ , который получается из суммарного потенциала скоростей  $\varphi$  путем выделения части, создаваемой однородным течением,

$$\varphi = \varphi' + Ux. \quad (5-31)$$

Предполагается, что составляющие скорости возмущения

$$u - U = u' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi'}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \quad (5-32)$$

удовлетворяют следующему требованию, накладываемому на порядок величин:

$$u', v, w \ll U. \quad (5-33)$$

Условие (5-33), разумеется, тесно связано с малостью наклонов касательной в любой точке поверхности профиля. Если условия (1) и (2) выполняются в действительности, то членами  $u'(\partial z_U / \partial x)$  и  $v(\partial z_U / \partial y)$  в уравнении (5-30a) можно пренебречь по сравнению со значительно большим членом  $U(\partial z_U / \partial x)$ ; аналогично поступаем и с уравнением (5-30b). В результате получим уравнения

$$w = \frac{\partial z_U}{\partial t} + U \frac{\partial z_U}{\partial x} \quad \text{для } z = z_U, (x, y) \text{ в области } R_a, \quad (5-34a)$$

$$w = \frac{\partial z_L}{\partial t} + U \frac{\partial z_L}{\partial x} \quad \text{для } z = z_L, (x, y) \text{ в области } R_a. \quad (5-34b)$$

Однако первое условие равноценно утверждению, что  $z_U$  и  $z_L$  очень малы по сравнению с хордой крыла, а это обстоятельство позволяет сделать следующий шаг. Оказывается, что для целей решения краевой задачи можно действительное крыло заменить поверхностью бесконечно малой толщины, на которой терпят разрыв  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и давление  $p$ . Поместим эту поверхность разрыва на плоскости  $xu$ , поскольку математически это вполне допустимо. Величину  $w$

[равенства (5-34)] разложим в ряд Маклорена в окрестности ее значений непосредственно над и непосредственно под плоскостью  $xu$ :

$$\omega(x, y, z_U, t) = \omega(x, y, 0^+, t) + z_U \frac{\partial \omega(x, y, 0^+, t)}{\partial z} + \frac{z_U^2}{2!} \frac{\partial^2 \omega(x, y, 0^+, t)}{\partial z^2} + \dots, \quad (5-35a)$$

$$\omega(x, y, z_L, t) = \omega(x, y, 0^-, t) + z_L \frac{\partial \omega(x, y, 0^-, t)}{\partial z} + \frac{z_L^2}{2!} \frac{\partial^2 \omega(x, y, 0^-, t)}{\partial z^2} + \dots. \quad (5-35b)$$

Если производные  $\partial \omega / \partial z$  и т. д. таковы, что их произведениями на малые величины  $z_U (\partial \omega / \partial z)$  и т. д. можно пренебречь в сравнении с самим  $\omega$ , то в правых частях уравнений (5-35) можно опустить все члены, кроме первых. При таком предположении граничные условия (5-30) представляются в одно-родной линейной форме

$$\omega = \frac{\partial z_U}{\partial t} + U \frac{\partial z_U}{\partial x} \quad \text{для } z = 0^+, (x, y) \text{ в области } R_a, \quad (5-36a)$$

$$\omega = \frac{\partial z_L}{\partial t} + U \frac{\partial z_L}{\partial x} \quad \text{для } z = 0^-, (x, y) \text{ в области } R_a. \quad (5-36b)$$

Важно отметить, что равенства (5-36) полезно применять лишь в тех случаях, когда действительное крыло может быть аппроксимировано частью плоскости, при переходе через которую должны иметь место соответствующие разрывы.

Когда речь идет об упрощении граничных условий, требование (5-33) должно выполняться только вблизи поверхности. Естественно ожидать, однако, что если оно выполняется там, то оно справедливо и во всем поле течения. Действительно, Ламб [5-2] доказывает для случая *несжимаемой* жидкости, что возмущение должно быть максимальным на границах. Если распространить действие такого предположения на все поле течения сжимаемой жидкости, то это приведет к процессу линеаризации дифференциального уравнения (5-24), совместимому с условиями (5-36). Члены, входящие в состав оператора Лапласа, уже являются линейными, и нет причин ожидать, что один из них будет намного больше или меньше других. В три члена, стоящие в скобках, вместо  $q$  введем выражение

$$q = (U + u')i + vj + wk = Ui + \text{grad } \varphi' \quad (5-37)$$

и отбросим те части, которые явно намного меньше оставляемых частей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial q^2}{\partial t} + q \cdot \text{grad} \left( \frac{q^2}{2} \right) &= \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} + 2 [Ui + \text{grad } \varphi'] \cdot \frac{\partial}{\partial t} [Ui + \text{grad } \varphi'] + \\ &+ [Ui + \text{grad } \varphi'] \cdot \text{grad} \left[ \frac{U^2}{2} + Ui \cdot \text{grad } \varphi' + \frac{1}{2} |\text{grad } \varphi'|^2 \right] = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} + 2 [Ui + \text{grad } \varphi'] \cdot \left[ \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial t} i + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y \partial t} j + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial t} k \right] + \\ &+ [Ui + \text{grad } \varphi'] \cdot \left[ U \frac{\partial u'}{\partial x} i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'^2}{\partial x} i + \frac{\partial v^2}{\partial x} i + \dots \right) \right] \cong \\ &\cong \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2}. \quad (5-38) \end{aligned}$$

Очевидно, что в дополнение к условию (5-33) мы ввели ряд предположений относительно малости первых производных составляющих скорости по пространственным и временным координатам. Например, мы пренебрегаем третьим слагаемым в последней скобке уравнения (5-38), так как

$$U \frac{\partial u'}{\partial x} \gg v \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (5-39)$$



и т. д. Если допустить, что малые величины изменяются достаточно постепенно во всех направлениях, а масштаб времени не слишком мал, то все эти предположения можно рассматривать как следствия условия (5-33).

Линеаризация уравнения (5-24) завершается выбором значения множителя  $1/a^2$ . Для случая установившегося течения это выполняется с помощью уравнения (5-25), если заметить, что любые отклонения величины  $a^2$  от ее значения в невозмущенном потоке  $a_\infty^2$  создают такие множители перед скобкой в уравнении (5-24), которые ведут к образованию членов такого же порядка, как члены, отброшенные в уравнении (5-38)<sup>1)</sup>. Если течение является неустановившимся, то выберем соответствующую форму термодинамического уравнения энергии и используем уравнение (5-20)

$$\frac{D}{Dt} \left[ \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{q^2}{2} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{q^2}{2} \right). \quad (5-40)$$

Приближения, аналогичные тем, которые привели к записи граничных условий в форме (5-24), позволяют заменить субстанциональную производную следующим выражением:

$$\frac{D}{Dt} [\dots] \cong \frac{\partial}{\partial t} [\dots] + U \frac{\partial}{\partial x} [\dots]. \quad (5-41)$$

Из малости различных производных от компонент скорости возмущения следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{q^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{(U+u')^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} \right] \cong U \frac{\partial u'}{\partial t}. \quad (5-42)$$

Подставив выражения (5-41) и (5-42) в уравнение (5-40) и заменив  $\varphi$  на  $\varphi'$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a^2}{\gamma-1} \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a^2}{\gamma-1} \right) = - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - 2U \frac{\partial u'}{\partial t} - U^2 \frac{\partial u'}{\partial x}. \quad (5-43a)$$

Если мы определим возмущение  $a'$  скорости звука с помощью равенства  $a = a_\infty + a'$  и умножим все члены уравнения (5-43a) на  $(\gamma-1)/2a_\infty^2$ , то, оставляя только члены, наибольшие по абсолютной величине, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a'}{a_\infty} \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a'}{a_\infty} \right) = - \frac{\gamma-1}{2} \left[ \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} + \frac{2U}{a_\infty^2} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{U^2}{a_\infty^2} \frac{\partial u'}{\partial x} \right]. \quad (5-43b)$$

Если обе части уравнения (5-43b) проинтегрировать по времени в пределах, определяющих интервал, необходимый частице жидкости для пересечения области возмущения и имеющий порядок пяти-десятикратного произведения  $U$  на длину хорды крыла, то мы придем к заключению, что отношение  $a'/a_\infty$  остается всегда очень малым по сравнению с единицей. Подставим выражение (5-38) в уравнение (5-24) и заметим, что малость  $a'$  по сравнению с  $a_\infty$  означает, что в уравнении (5-24)  $a$  может быть заменено на  $a_\infty$ . Все члены, которыми мы пренебрегаем, следуя этому принципу, имеют порядок малости по крайней мере на единицу выше, чем члены, сохраненные в уравнении. В результате придем к уравнению

$$\nabla^2 \varphi' - \frac{1}{a_\infty^2} \left[ \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} \right] = 0. \quad (5-44)$$

Это и есть линеаризованное дифференциальное уравнение в частных производных для неустановившегося течения сжимаемой жидкости. Применение его к вычислению аэродинамических величин, играющих существенную роль в аэроупругости, составит основу содержания этой и двух последующих глав.

<sup>1)</sup> Это справедливо только до тех пор, пока  $U$  не слишком велико в сравнении с  $a_\infty$ , так что мы должны исключить из рассмотрения течения с большими числами  $M$  (гиперзвуковые течения).

Настоящий пункт мы закончим упоминанием о второй функции, целесообразность введения которой по сравнению с  $\varphi$  более ограничена, именно — о потенциале ускорений Прандтля. Его существование при баротропном течении связано с наличием векторного уравнения движения

$$\frac{Dq}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p = -\text{grad} \int \frac{dp}{\rho}. \quad (5-3)$$

Это уравнение показывает, что вектор ускорения представляет собой градиент некоторой скалярной функции, которую мы обозначим через  $\psi(x, y, z, t)$ :

$$\frac{Dq}{Dt} = \text{grad } \psi, \quad (5-45)$$

с составляющими

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ и т. д.} \quad (5-46)$$

Из уравнений (5-3) и (5-45) следует, что

$$\text{grad } \psi + \text{grad} \int \frac{dp}{\rho} = 0, \quad (5-47)$$

так что указанные ниже величины отличаются самое большее на функцию времени

$$\psi = -\int \frac{dp}{\rho} + G(t). \quad (5-48)$$

Функция  $G(t)$  обладает теми же свойствами, что и  $F(t)$  в уравнении (5-13), и поэтому в большинстве случаев, имеющих практическое значение, является постоянной. Например, если жидкость несжимаема, а функции  $\psi$  приписывается нулевое значение в отдаленных точках течения, где  $p = p_\infty$ , то равенство (5-48) принимает следующий вид:

$$\psi = \frac{p_\infty - p}{\rho}. \quad (5-49)$$

Здесь, а также в некоторых сжимаемых потоках, подобных тем, в которых возникают лишь малые возмущения,  $\psi$  отличается от давления возмущения  $(p - p_\infty)$  только постоянным множителем. Поэтому о функции  $\psi$  говорят часто, как о функции давления; действительно, вся теория потенциала ускорений в том виде, как она применяется на практике, могла бы быть выведена просто путем введения давления возмущения в качестве неизвестной, которую необходимо найти. Соотношение между  $\psi$ ,  $\varphi$  и скоростью получится, если из уравнений (5-47) и (5-12) исключить  $\text{grad} \int (dp/\rho)$ . Для случая однородного течения со скоростью в бесконечности, равной  $U$ , получающееся дифференциальное уравнение интегрируется и дает результат

$$\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(q^2 - U^2). \quad (5-50a)$$

Если течение подчиняется предположению о малости возмущений (5-33), то уравнение (5-50a) можно линеаризировать:

$$\psi = \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + Uu' = \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi'}{\partial x}. \quad (5-50b)$$

Из возможности взаимной перестановки оператора  $[\partial/\partial t + U(\partial/\partial x)]$  с другими линейными операторами в уравнении (5-44) следует также, что  $\psi$  удовлетворяет такому же дифференциальному уравнению в частных производных, как и  $\varphi'$ .

**5-2. Свойства течения несжимаемой жидкости с циркуляцией и без нее.** Аналитическое решение задач о потенциальном течении несжимаемой жидкости в принципе не представляет трудностей. Нужно решить уравнение

Лапласа (5-18) при определенных граничных условиях, которые могут иметь вид условий (5-27), (5-28) или (5-36), выполняемых на поверхности одного или большего числа погруженных в жидкость тел; в то же время устанавливается, что в удаленных точках жидкость находится или в покое ( $\varphi = \text{const}$ ), или в равномерном поступательном движении. Эти вопросы рассматриваются более подробно в первых семи главах книги Ламба [5-2]. Впрочем, некоторые из результатов стоит сформулировать еще раз здесь, чтобы подчеркнуть их значение в приложениях к аэроупругости. Существуют две общие категории течений, к одной из которых может быть причислено всякое потенциальное течение несжимаемой жидкости; это течения без циркуляции и циркуляционные течения с сопутствующими вихревыми линиями или вихревыми слоями. С течениями первой категории иметь дело значительно проще вследствие того легкодоказуемого их свойства, что все поле скоростей частиц зависит лишь от движения погруженных тел в данный момент времени и совершенно не зависит от предшествующей истории этого движения. Эта особенность является следствием того факта, что скорость звука в таком течении практически бесконечно велика, так что любое изменение граничных условий мгновенно распространяется на все частицы. Рассмотрим, например, гладкое недеформируемое твердое тело, которое перемещается в заданном направлении или вращается вокруг заданной оси внутри не возмущенной другими способами неограниченной массы жидкости<sup>1)</sup>. Линейность дифференциального уравнения и линеаризованные граничные условия для поступательной или угловой скорости твердого тела приводят к тому, что мгновенная скорость частицы жидкости в любом ее положении по отношению к твердому телу будет прямо пропорциональна величине перемещения последнего. Следовательно, при поступательном перемещении суммарная кинетическая энергия, передаваемая жидкости, будет изменяться прямо пропорционально квадрату линейной скорости тела, а при вращательном движении — прямо пропорционально квадрату угловой скорости. Так как в системе отсутствуют рассеивающие факторы, то любое изменение скорости твердого тела требует, чтобы тело производило над жидкостью работу, количественно равную изменению кинетической энергии. Если бы всей системе сообщалось ускорение с помощью приложенной извне силы или момента, то некоторая постоянная доля этой силы или момента пошла бы на изменение энергии жидкости; подобный эффект можно объяснить физически, если представить себе массу или момент инерции тела увеличенными на некоторую фиксированную величину. Эти приращения масс и моментов инерции известны под названием присоединенных, или кажущихся, масс; они прямо пропорциональны плотности жидкости, но изменяются, в общем случае, при изменении линии перемещения или оси вращения по отношению к твердому телу. Следует соблюдать осторожность при применении принципа присоединенных масс к сочетаниям поступательных движений или к одновременным вращениям относительно различных осей, так как в выражении для кинетической энергии появляются тогда члены, содержащие произведения слагаемых скоростей поступательных движений или угловых скоростей. Однако, как показано Ламбом ([5-2], гл. VI), эта трудность может быть преодолена, а если тело имеет оси или плоскости симметрии, то некоторые из упомянутых членов исчезают.

Присоединенные массы можно вычислить аналитически для многих двумерных и трехмерных тел, представляющих практический интерес с точки зрения авиации. Они весьма полезны при оценке сил и моментов, действующих на те обтекаемые элементы самолета, которые не создают циркуляции, как например фюзеляжи, оболочки реактивных двигателей и наружные баки. Из аэродинамической

<sup>1)</sup> Более общие комбинированные движения этого типа количественно обсуждаются в гл. VI книги [5-2], а также в работе Мунка [5-6], которая посвящена твердым телам, имеющим форму эллипсоида.

нагрузки, передаваемой на несущие поверхности, удобно также выделить те ее доли, которые не создают циркуляции. Влияние подобных нагрузок увеличивается при больших значениях ускорения; например, при колебаниях очень высокой частоты оно пропорционально второй степени частоты и является при движении преобладающим. Так как бесциркуляционные нагрузки могут вычисляться так просто, то можно лишь пожалеть, что учет сжимаемости воздуха приводит к ошибкам, тем большим, чем выше частота колебания. Данная задача переходит тогда в задачу о распространении звуковых волн, которую мы рассмотрим подробнее в последующих главах.

Казалось бы более естественным ввести понятие о присоединенных массах, разбирая вопрос о количестве движения, а не о кинетической энергии, сообщаемой бесконечной массе жидкости движущимися в ней телами. Однако, как показали Ламб [5-2], Теодорсен [5-7] и другие, такой подход не годится. В самом деле, изменение движения любого тела может создать такое распределение давления на воображаемую ограничивающую поверхность в бесконечности, которое дает бесконечное изменение общему количеству движения (так как эта ограничивающая поверхность может считаться неподвижной, то на ней не производится никакой работы, а работа движущегося тела по-прежнему может быть приравнена кинетической энергии жидкости). Имеется, однако, простой способ вычисления *импульса*, передаваемого ускоряющимся телом жидкости в любом направлении. Для этого мы задаем себе вопрос, какая система импульсов давлений, возникнув из состояния покоя, создала бы данное состояние движения. Мы можем найти эти импульсы путем интегрирования векторного уравнения (5-3) при  $\rho = \text{const}$  по бесконечно малому промежутку времени действия такого импульса:

$$\rho \int \frac{D\mathbf{q}}{Dt} dt = - \int [\text{grad } p] dt \quad (5-51a)$$

или

$$\rho \mathbf{q} = - \text{grad} \int p dt. \quad (5-51b)$$

Справедливо также, конечно, утверждение, что

$$\rho \mathbf{q} = \text{grad} (\rho \varphi). \quad (5-8)$$

Следовательно, если мы определим потенциал скоростей так, чтобы он обращался в нуль, когда жидкость во всех ее точках находится в покое, то получим

$$\int p dt = - \rho \varphi. \quad (5-52)$$

Это уравнение означает, что импульс, связанный с каким-либо изменением движения, прямо пропорционален изменению значения  $\varphi$ . Так как вид функции  $\varphi$  зависит только от состояния движения в данный момент, то величина упомянутого импульса не зависит от того, возникает ли движение внезапно, как предполагалось в вышеприведенных выкладках, или в какой-то мере постепенно. Полный импульс, сообщенный жидкости в начале движения какого либо тела, определяется путем интегрирования соответствующей компоненты импульса давлений  $-\rho \varphi d\mathbf{S}$  по поверхности тела  $S$ . Например:

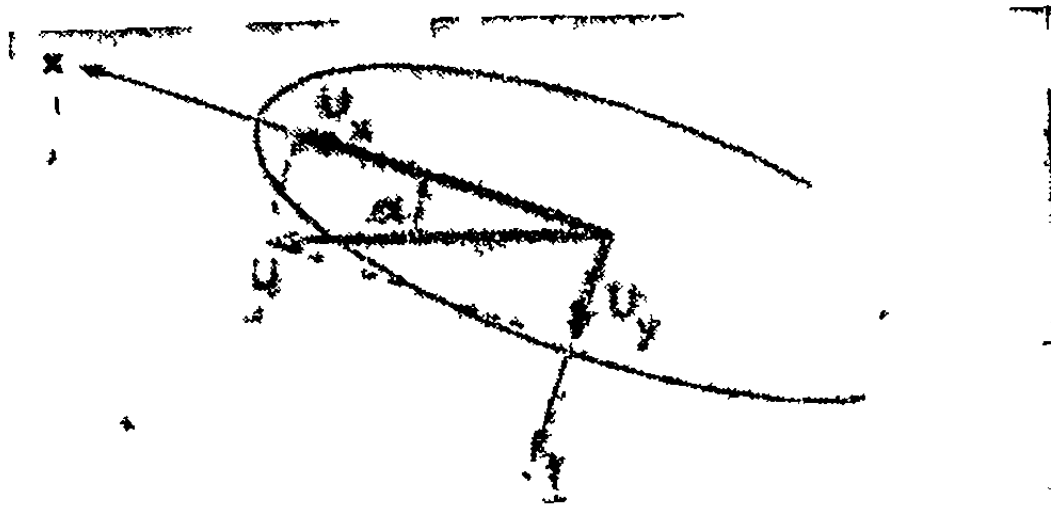
$$I_x = \int F_x dt = - \rho \int \int_S \varphi \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}, \quad (5-53)$$

что после дифференцирования дает

$$F_x = - \rho \frac{d}{dt} \int \int_S \varphi \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5-54)$$

Отрицательная величина  $F_x$  свидетельствовала бы о наличии сопротивления жидкости ускорению тела в направлении оси  $x$ .

В качестве иллюстрации применения этих идей рассмотрим прямолинейное движение тонкого эллипсоида вращения (фиг. 5-2), который может представлять собой установленный снаружи бак с горючим или оболочку двигателя. Ламб ([5-2], стр. 152-155) показал, что импульсивные силы, связанные со скоростями  $U_x$  и  $U_y$ , направленными соответственно параллельно оси  $x$  (оси симметрии) и параллельно любой поперечной оси  $y$ , выражаются следующим образом:



$$I_x = k_1 U_x \rho \cdot (\text{объем}),$$

$$I_y = k_2 U_y \rho \cdot (\text{объем}),$$
(5-55)

Фиг. 5-2. Обтекаемый эллипсоид вращения, совершающий поступательное движение в неограниченной массе несжимаемой жидкости.

где  $k_1$  и  $k_2$  представляют собой инерционные коэффициенты, зависящие только от удлинения эллипсоида. Когда эллипсоид становится очень тонким и вытянутым,  $k_1$  исчезает, тогда как  $k_2$  приближается к единице (табл. 5-1).

Таблица 5-1

Коэффициенты инерции для эллипсоида вращения в несжимаемом потоке

Удлинение (длина/диаметр)	$k_1$	$k_2$	Удлинение (длина/диаметр)	$k_1$	$k_2$	Удлинение (длина/диаметр)	$k_1$	$k_2$
1	0,5	0,5	5,0	0,0591	0,8943	8,5	0,0266	0,9494
1,5	0,3037	0,6221	5,5	0,0514	0,9068	9,0	0,0244	0,9535
2,0	0,2100	0,7042	6,0	0,0452	0,9171	9,5	0,0224	0,9571
2,5	0,1563	0,7619	6,5	0,0401	0,9258	10	0,0207	0,9602
3,0	0,1220	0,8039	7,0	0,0358	0,9331	15	0,0109	0,9787
3,5	0,0985	0,8354	7,5	0,0323	0,9393	20	0,00679	0,9866
4,0	0,0816	0,8598	8,0	0,0292	0,9447	$\infty$	0	1
4,5	0,0689	0,8789						

Из уравнений (5-55) можно вывести много интересных заключений. Например, продольному ускорению  $dU_x/dt$  будет соответствовать сила типа силы лобового сопротивления:

$$D_x = - \frac{dI_x}{dt} = -k_1 \rho \cdot (\text{объем}) \cdot \frac{dU_x}{dt}. \quad (5-56)$$

Скорость поперечных колебаний  $U_y = \bar{U}_y \sin \omega t$ , как это может иметь место при изгибных колебаниях крыла, приводит к возникновению боковой силы

$$F_y = - \frac{dI_y}{dt} = -k_2 \rho \omega \bar{U}_y \cos \omega t \cdot (\text{объем}). \quad (5-57)$$

Уравнения (5-56) и (5-57) показывают, что присоединенные массы для ускорений в направлении оси  $x$  или оси  $y$  выражаются произведениями  $k_1 \rho \cdot (\text{объем})$  и  $k_2 \rho \cdot (\text{объем})$ , последнее из которых для представляющих практический интерес обтекаемых эллипсоидов почти равно массе той жидкости, которая заполняла бы объем данного тела.

Если эллипсоид движется в потоке воздуха поступательно и равномерно со скоростью  $U$  и с углом атаки  $\alpha$  (фиг. 5-2), то составляющие импульса, параллельная и перпендикулярная к направлению полета, соответственно равны

$$[k_1 U \cos^2 \alpha + k_2 U \sin^2 \alpha] \rho \cdot (\text{объем})$$

$$[k_2 U \sin \alpha \cos \alpha - k_1 U \cos \alpha \sin \alpha] \rho \cdot (\text{объем}).$$



Хотя последняя составляющая и остается постоянной по величине, но ее линия действия равномерно перемещается перпендикулярно самой себе со скоростью  $U$  тем же образом, то момент количества движения жидкости относительно неподвижной оси  $z$  непрерывно уменьшается. Для сообщения частицам жидкости полного отрицательного момента количества движения эллипсоид должен действовать на них парой сил с моментом, направленным в отрицательную сторону оси  $z$  и численно равным скорости изменения этого момента количества движения. Со стороны жидкости на тело действует реактивная пара с положительным моментом:

$$M_z = U [k_2 U \sin \alpha \cos \alpha - k_1 U \cos \alpha \sin \alpha] \rho \cdot (\text{объем}) = \\ = \frac{1}{2} \rho U^2 [k_2 - k_1] \sin 2\alpha \cdot (\text{объем}). \quad (5-58)$$

Эта формула выражает общеизвестный дестабилизирующий момент, испытываемый удлиненными телами вращения типа фюзеляжа самолета. Его действительное значение, вычисленное для течения несжимаемой жидкости, оказывается несколько ниже значения, даваемого формулой (5-58), так что выражение в правой ее части умножается на некоторый поправочный множитель, лежащий для имеющих практическую важность приложений в пределах от 0,8 до 0,9. Расхождение обусловлено отрывом пограничного слоя от верхней задней части тела. Отрыв приводит также к возникновению небольшой стационарной подъемной силы (ср. [5-8]), хотя теория и не предсказывает таковой.

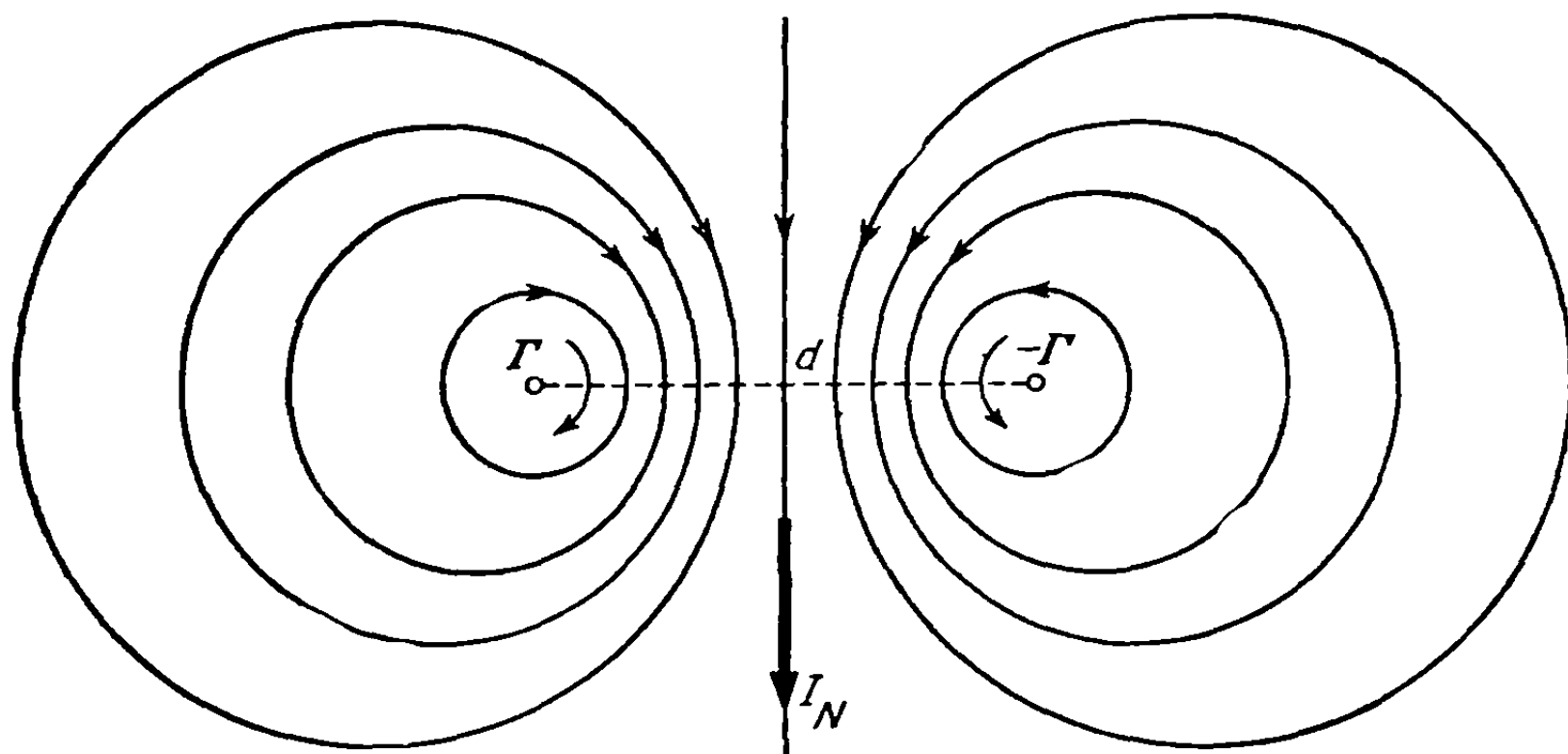
**5-3. Вихревое течение.** Обращаясь к вопросу о движении несжимаемой жидкости при наличии вихрей и циркуляции, мы не находим уже той привлекательной однозначной связи между картиной течения и граничными условиями в данный момент времени, которая была описана выше. Простейшая ситуация, в которой исчезает эта однозначность, возникает при обтекании жидкостью двумерного тела (т. е. любого цилиндрического объекта, простирающегося в бесконечность в обоих направлениях или закрепленного на своих концах в плоских параллельных стенах, ограничивающих поток). Теоремы Стокса и Кельвина [равенства (5-5) и (5-7)] неприменимы к какой-либо замкнутой кривой, окружающей тело, так как поверхность, ограниченная такой кривой, должна пройти сквозь тело и, следовательно, выйти из поля скоростей. Соответственно, циркуляции  $\Gamma$  по этой кривой может быть приписано любое произвольное значение. Мы, конечно, должны отдавать себе отчет в том, что теорема Стокса требует постоянства  $\Gamma$  в данный момент времени для любой из описанных вокруг тела кривых, но иногда граничные условия не обладают достаточной физической определенностью для однозначного определения циркуляции. Если имеются два двумерных тела или более, как в случае каскада турбинных лопаток, то циркуляция должна быть определена для каждого из тел в отдельности.

Наиболее известными примерами из авиации, в которых физические соображения обуславливают наличие не равной нулю циркуляции, представляют собой профили или аналогичные тела с заостренными концевыми кромками. Гипотеза Кутта о том, что циркуляция должна быть выбрана так, чтобы скорость жидкости у острой кромки была конечной и чтобы благодаря этому получался плавный переход от верхней части поля течения к нижней, хорошо подтверждена сейчас для дозвукового полета. Справедливость теоремы Стокса для такого течения может быть легко установлена, если вообразить, что профиль заменен покоящейся массой жидкости, а граница между профилем и наружным потоком — узкой областью сдвига, аппроксимирующей действительный вязкий пограничный слой. Общая интенсивность вихрей в этом слое должна тогда равняться внешней циркуляции, а наличие сил вязкости, обусловленное большими поперечными градиентами скоростей, обеспечивает механизм образования этих вихрей в газе или жидкости, не вполне свободной от трения. Естественно, что наличие этих сил не учитывается теоремой Кельвина.

Рассматривая последовательность больших окружностей, внутри которых находится тело с циркуляцией, нетрудно показать, что скорость должна уменьшаться обратно пропорционально расстоянию от тела. Таким образом, картина течения вдали от тела близка к картине течения, возникающего от прямолинейного вихря, потенциал скоростей которого в цилиндрических координатах равен

$$\varphi_{\Gamma} = \frac{\Gamma \theta}{2\pi}. \quad (5-59)$$

Такое течение обладает бесконечно большим моментом количества движения и бесконечно большой энергией. Мы приходим поэтому к заключению, что никакая система конечных сил, действующих в течение конечного промежутка времени, не может привести к образованию прямолинейного вихря. Этот результат подтверждается при попытках экспериментального получения такого вихря. С другой стороны, пара параллельных вихрей одинаковой интенсивности и противоположного направления, разделенных расстоянием  $d$  (фиг. 5-3), обладает конечной кинетической энергией, приходящейся на единицу длины вихревой линии.



Фиг. 5-3. Пара вихрей, разделенных расстоянием  $d$ . Указано направление импульса  $I_N = \rho \Gamma d$ .

Известно также, что импульс, приходящийся на единицу длины, имеет величину (см. [5-9], стр. 102—104 и 325—326)

$$I_N = \rho \Gamma d \quad (5-60)$$

и направлен перпендикулярно к плоскости, в которой лежат обе вихревые линии. Такая пара вихрей не создает, следовательно, никаких физических препятствий к своему образованию. Это заставляет нас допустить, что циркуляция вокруг двумерного тела, когда бы она ни возникала или ни изменяла своей величины, должна привести к образованию где-то в потоке вихря той же интенсивности, но противоположного направления. Если этим телом является профиль, то местом, где естественно ожидать появления такого вихря, будет область непосредственно за задней кромкой. В этой области из верхнего и нижнего пограничных слоев непрерывно образуется вихревая пелена. Эта пелена и дает отрицательную циркуляцию в те моменты, когда увеличивается положительная интенсивность вихрей вокруг профиля. Поскольку свободный вихрь должен всегда состоять из одних и тех же частиц жидкости и передвигаться вместе с окружающей средой, то любой противоположно направленный вихрь должен проходить вниз по течению, как часть вихревой пелены. Обычно предполагают, что движение этого вихря по скорости и направлению очень близко к движению основного потока за профилем.



В случае установившегося движения при постоянной циркуляции наличие противоположно направленных вихрей не вносит никаких трудностей. Мы предполагаем, что в какой-то отдаленный момент времени профиль начал свое движение в некоторой точке пространства. Тогда циркуляция  $\Gamma$ , вычисленная должным образом в соответствии с гипотезой Кутта, быстро увеличивается, создавая все время короткий след противоположно направленных вихрей общей интенсивности —  $\Gamma$ . Как только течение примет установившийся характер, эти вихри оказываются слишком далеко вниз по потоку для того, чтобы влиять на условия течения вблизи профиля. Однако они дают возможность удобного объяснения существования подъемной силы, так как расстояние  $d$  между „присоединенным“ вихрем на профиле и „отрывающимися“ противоположно направленными вихрями увеличивается с постоянной скоростью  $U$ , равной скорости движения профиля. Следовательно, вихревая система должна постоянно создавать силу, действующую на жидкость в направлении импульса  $I_N$  (фиг. 5-3). Текущее значение этой силы равно

$$\frac{dI_N}{dt} = \rho \Gamma \frac{d(d)}{dt} = \rho \Gamma U. \quad (5-61)$$

Единственным твердым телом в потоке является профиль, и следовательно, он и должен развивать эту силу; уравновешивающей ее реакцией является подъемная сила на единицу размаха  $\rho \Gamma U$ .

При неустановившемся движении вокруг профиля будут происходить непрерывные изменения циркуляции. Только при условии чрезвычайной малости этих изменений можно предположить, что соответствующие противоположно направленные вихри отходят вниз по потоку, в бесконечность так быстро, что можно пренебречь их влиянием на распределение скоростей жидкости вокруг профиля. Иначе говоря, наличие этих изменений наделяет течение „памятью“, так что его характеристики в данный момент времени зависят от предыдущей истории циркуляции течения. Это явление аналогично влиянию истории деформаций пластичного тела под действием нагрузки на распределение напряжений в данный момент времени или предварительно наложенных магнитных полей на степень поляризации в подверженном гистерезису электромагните в данный момент времени. Такое поведение приводит всегда к математическим представлениям, содержащим интегральное уравнение с временем в качестве независимого переменного; позднее мы увидим, что это имеет место во всех случаях, когда пелена противоположно направленных вихрей играет значительную роль в течении.

Хотя предыдущие рассуждения были ограничены двумерным движением жидкости, справедливо также, что и несущие крылья конечного размаха создают вихревые слои, обязанные своим происхождением силам вязкости в пограничном слое. Образование трехмерной вихревой пелены также может быть объяснено с помощью изучения системы импульсов, выражающих действие крыла на жидкость, как это сделано особенно хорошо Карманом и Бюргерсом во втором томе книги „Аэродинамика“ [5-9]. Свободные вихри в несжимаемой жидкости подчиняются некоторым хорошо известным законам (см. [5-2], гл. VII): их циркуляция остается неизменной, и они всегда состоят из одних и тех же частиц жидкости; они не могут оканчиваться внутри потока, а должны или образовывать замкнутые петли, или простираются в бесконечность, или примыкать к твердой поверхности. Эти законы перечислены здесь без доказательства. Они окажутся полезными для нас при разборе некоторых вопросов, касающихся установившегося и неустановившегося движения крыльев. Также без вывода мы дадим здесь важный результат из теории потенциала, именуемый законом Био и Савара<sup>1)</sup>. В том виде, как он используется в гидромеханике, этот закон утверждает, что элемент длины  $ds$  вихревой линии, имеющей цир-

<sup>1)</sup> Один из лучших выводов этого закона дается в п. 4-4 книги Стрэттона „Теория электромагнетизма“ [5-10].

куляцию  $\Gamma$ , индуцирует в точке  $P$ , расположенной на расстоянии от  $ds$ , определяемом вектором  $R$ , скорость, равную

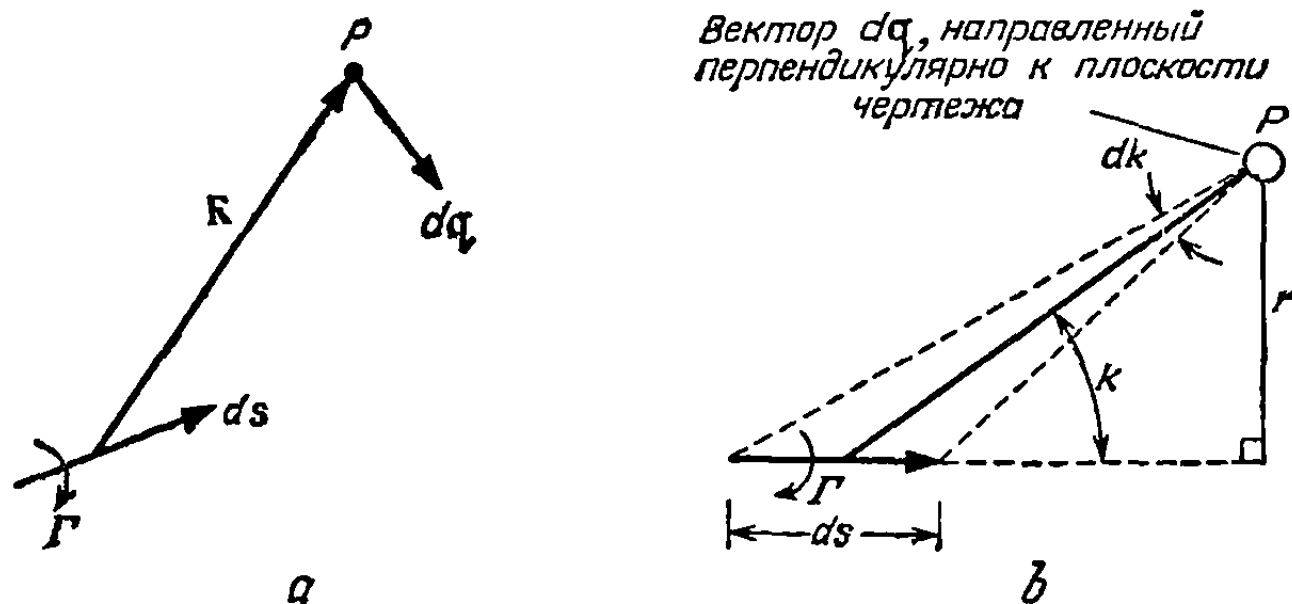
$$dq = \frac{\Gamma ds \times R}{4\pi R^3}. \quad (5-62a)$$

Направление  $ds$  должно быть принято таким, чтобы циркуляция вокруг него в соответствии с правилом правой руки была положительна, что иллюстрируется на фиг. 5-4, *a*. Скалярная форма этого закона записывается в виде

$$dq = \frac{r}{4\pi R^3} \Gamma ds = \frac{\sin \alpha}{4\pi R^2} \Gamma ds. \quad (5-62b)$$

Длина перпендикуляра  $r$ , опущенного из точки  $P$  на ось элемента вихря, и угол  $\alpha$  между  $R$  и этой осью показаны на фиг. 5-4, *b*.

В качестве простого примера применения уравнения (5-62b) рассмотрим двумерное течение около прямой вихревой линии, имеющей бесконечную протяженность и постоянную циркуляцию  $\Gamma_0$ . В точке  $P$  на расстоянии  $r$  от вихря все индуцируемые им скорости будут направлены по касательной к координатной окружности, или в направлении отсчета угла  $\theta$  системы цилиндрических



Фиг. 5-4. Две схемы, показывающие скорость  $dq$ , индуцируемую элементом  $ds$  вихревой линии с циркуляцией  $\Gamma$ .

*a* — векторные величины, входящие в уравнение; *b* — вид в плане, иллюстрирующий длины  $r$ ,  $R$  и угол  $\alpha$ .

координат, полярная ось которой совпадает с вихрем. Элемент  $ds$  под углом  $\alpha$  будет находиться на расстоянии  $R = r/\sin \alpha$  от точки  $P$  и иметь длину  $ds = R dx/\sin \alpha = r dx/\sin^2 \alpha$ . Следовательно, доля, вносимая этим элементом в общую скорость  $q_\theta$ , индуцируемую вихрем, равна

$$dq_\theta = \frac{\sin \alpha}{4\pi R^2} \Gamma ds = \frac{\Gamma_0}{4\pi} \frac{\sin^3 \alpha}{r^2} \frac{r dx}{\sin^2 \alpha}. \quad (5-63)$$

Простое интегрирование приводит к хорошо известной формуле

$$q_\theta = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} dq_\theta = \frac{\Gamma_0}{4\pi r} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}, \quad (5-64)$$

которую можно было бы получить также путем дифференцирования равенства (5-59). Результаты, выражаемые равенствами (5-62) и (5-64), будут использованы в последующих пунктах для вычисления аэродинамической нагрузки на двумерные и трехмерные крылья при установившемся и неустановившемся движениях.

**5-4. Установившееся движение тонких профилей.** Практически все важнейшие с точки зрения специалиста по аэроупругости характеристики крыльев очень большого удлинения вычисляются с помощью так называемой теории тонкого профиля. В основе этого метода лежит предположение о малости возмущений, которое было подробно обсуждено и применено к дифференциальному уравнению и граничным условиям в п. 5-1. Предполагается, что существует потенциал скоростей возмущения  $\varphi'$ ; в случае несжимаемого потока скорость звука становится относительно большой и уравнение (5-44) приводится к уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi' = 0. \quad (5-65)$$

Этот результат можно было бы получить и непосредственно из уравнения (5-18), показывая тем самым, что допущение о малости возмущений в действительности не связано с видом дифференциального уравнения.

Для установившегося течения точное выражение условия направленности потока по касательной к поверхностям профиля

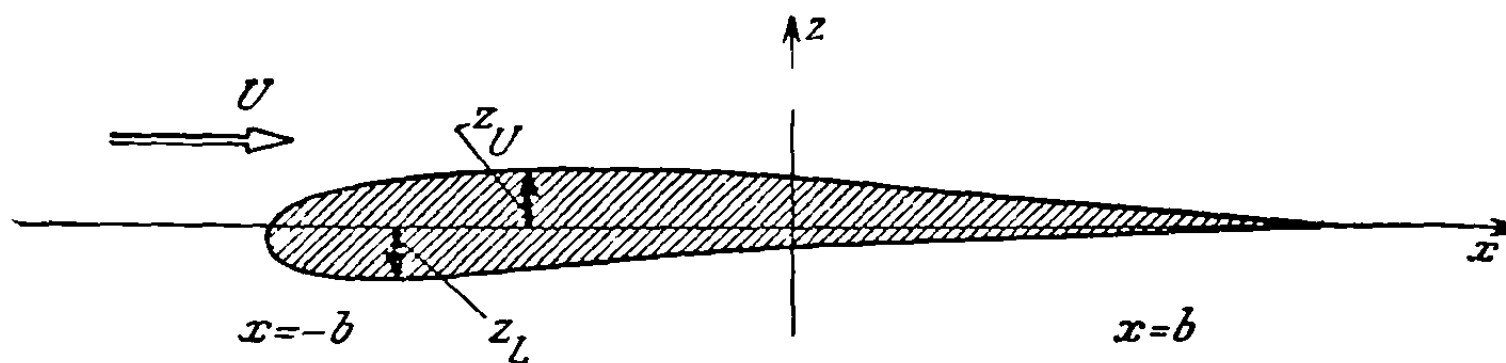
$$z = z_U(x) \quad \text{и} \quad z = z_L(x) \quad (5-66)$$

записывается в виде

$$\frac{w}{u} = \frac{dz_U}{dx} \quad \text{для} \quad z = z_U, \quad -b \leq x \leq b, \quad (5-67)$$

$$\frac{w}{u} = \frac{dz_L}{dx} \quad \text{для} \quad z = z_L, \quad -b \leq x \leq b, \quad (5-68)$$

где  $2b$  — длина хорды профиля. Характерное поперечное сечение показано на фиг. 5-5. Так как мы имеем дело с двумерным профилем, то  $z_U$  и  $z_L$  являются функциями только  $x$ , и эта картина остается одной и той же для любого



Фиг. 5-5. Поперечное сечение тонкого профиля или крыла, лежащего в плоскости  $xz$ .

положения вдоль размаха крыла. Как показано при выводе уравнений (5-36), граничные условия могут быть приведены к упрощенному виду:

$$w = U \frac{dz_U}{dx} \quad \text{для} \quad z = 0^+, \quad -b \leq x \leq b, \quad (5-69)$$

$$w = U \frac{dz_L}{dx} \quad \text{для} \quad z = 0^-, \quad -b \leq x \leq b. \quad (5-70)$$

Предположение о малости возмущений при решении данной задачи сразу же наталкивается на возражение в связи с тем, что оно несправедливо в окрестности критических точек, где жидкость приводится в состояние покоя; такие точки возникают вблизи передней и (при наличии конечного угла раствора) у задней кромки любого реального профиля. Однако, как показывает опыт, окрестности таких точек, в которых скорости частиц существенно отличаются от  $U$ , очень малы. Теория малых возмущений с замечательным успехом может быть использована для вычисления подъемной силы, момента тангажа и даже распределения давлений во всех точках, кроме тех, которые лежат на расстоянии нескольких процентов длины хорды от критических точек.

Для несжимаемой жидкости уравнение Лапласа является следствием геометрических условий непрерывности движения и отсутствия в нем вихрей. Законы динамики вводятся в рассмотрение, когда для вычисления давления по известному распределению скорости и потенциала скоростей используется уравнение Кельвина (5-19). Форма этого уравнения может быть упрощена, если заметить, что в случае движения, равномерного в бесконечности, имеем

$$\rho F(t) = \frac{1}{2} \rho U^2 + p_\infty. \quad (5-71)$$

Надлежащее применение условия (5-33) приводит к замене

$$q^2 = (U + u')^2 + v^2 + w^2 \cong U^2 + 2Uu'. \quad (5-72)$$

После указанных подстановок уравнение (5-19) дает простую формулу для определения безразмерного коэффициента давления  $C_p$ :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = -\frac{2u'}{U} - \frac{2}{U^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t}. \quad (5-73)$$

Движение профиля считается здесь установившимся, а поэтому уравнение (5-73) приводится к виду

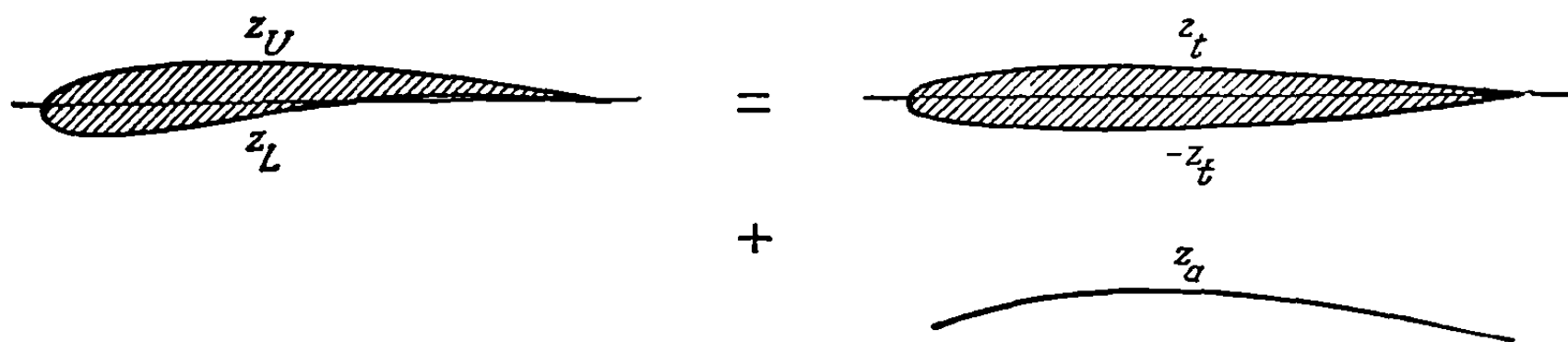
$$C_p = -\frac{2u'}{U} = -\frac{2}{U} \frac{\partial \varphi'}{\partial x}. \quad (5-74)$$

Уравнения (5-73) и (5-74) представляют собой линейные соотношения между зависимыми переменными. Они вместе с граничными условиями (5-69), (5-70) получены с помощью линеаризации, осуществленной на основе наших предположений. Следует подчеркнуть, что здесь не нужны те дополнительные условия, накладываемые на производные от скорости, подобные условию (5-39), которые требуются для сжимаемых жидкостей, когда точное дифференциальное уравнение нелинейно. Для последнего случая в гл. 6 будут сделаны более грубые упрощения действительной физической картины течения.

Теперь мы изучим более подробно краевую задачу, сформулированную уравнениями (5-65), (5-69) и (5-70). Мы расчленим каждую из функций  $z_U$  и  $z_L$  на четную  $z_a$  и нечетную  $z_t$  части следующим образом:

$$z_U = z_a + z_t, \quad z_L = z_a - z_t. \quad (5-75)$$

Здесь  $z_t$  характеризует форму, симметричную относительно плоскости  $xu$ , и выражает распределение толщины в направлении хорды, тогда как  $z_a$  содержит члены, зависящие от угла атаки и кривизны. Так как условия (5-69) и (5-70) являются линейными и выполняются на определенной линии, то краевые задачи, связанные с  $z_t$  и  $z_a$ , могут решаться отдельно. Физически это означает, что



Фиг. 5-6. Тонкий профиль или крыло, показанные как результат сочетания симметричного тела с нулевым углом атаки и изогнутой наклоненной средней линии.

свойства профиля можно рассматривать как сочетание свойств симметричного профиля под нулевым углом атаки и свойств изогнутой наклоненной средней линии нулевой толщины; схематически это показано на фиг. 5-6. Прежде чем перейти к решению задачи для различных специальных случаев, укажем, что условия (5-69), (5-70) и (5-75) в равной мере годятся и для крыла конечного размаха при установившемся движении. Функции  $z_U$ ,  $z_L$ ,  $z_a$  и  $z_t$  зависят тогда как от  $x$ , так и от  $y$ , так что в эти условия войдут частные производные по  $x$ . Предположение о малости возмущений означает также, что любые наклоны крыла в направлении размаха малы по численной величине. Добавим к этому, что почти каждое крыло, представляющее интерес для авиации, по форме очень близко к плоскости, так что не может быть возражений против постановки граничных условий на плоскости  $z = 0$ .

Для специалиста по аэроупругости та часть задачи, которая зависит от  $z_t$  (т. е. симметричная задача или задача, связанная с толщиной), представляет незначительный интерес; поэтому ее решают наиболее быстрым способом,

одинаковым как для профилей, так и для крыльев конечного размаха. При рассмотрении наиболее общего случая нужно решить дифференциальное уравнение (5-65) при следующих граничных условиях:

$$\omega = \frac{\partial z'}{\partial z} = U \frac{\partial z_f}{\partial x} \quad \text{для } z = 0^+, \quad (x, y) \text{ в области } R_a, \quad (5-76)$$

$$\omega = \frac{\partial z'}{\partial z} = -U \frac{\partial z_f}{\partial x} \quad \text{для } z = 0^-, \quad (x, y) \text{ в области } R_a, \quad (5-77)$$

где область  $R_a$  представляет собой проекцию срединной поверхности крыла на плоскость  $xu$ . Вследствие симметрии крыла мы предполагаем получить картину течения, совершенно симметричную по отношению к плоскости  $xu$  и без разрывов давления или составляющих скорости на этой плоскости, за исключением скачка составляющей скорости  $\omega$ , равного  $2U(\partial z_f / \partial x)$  и определенного в области  $R_a$ . Вспомнивая простейшие методы механики жидкости, заметим, что все эти требования выполняются в том случае, если в области  $R_a$  непрерывно распределить решения уравнения Лапласа в виде точечных источников. Одиночный точечный источник, координаты которого в пространстве суть  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ ,  $z = \zeta$ , обладает потенциалом скоростей

$$\varphi_s = \frac{-H}{4\pi \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}}. \quad (5-78)$$

Уравнение (5-78) описывает движение, обладающее сферической симметрией относительно указанной точки, из которой, как легко показать, вытекает в окружающее пространство количество жидкости, равное  $H \text{ м}^3 \text{ сек}$  (в технических единицах). Величина  $H$  называется интенсивностью источника. Слой таких источников, непрерывно распределенных по поверхности  $R_a$  и имеющих интенсивность  $H(\xi, \eta)$  на единицу площади в окрестности точки  $(\xi, \eta, 0)$ , обладает потенциалом скоростей возмущения

$$\varphi'_s(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{R_a} \frac{H(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}}. \quad (5-79)$$

Для того чтобы увидеть, как можно с помощью этого решения добиться удовлетворения условия (5-70), вычислим скорость

$$\begin{aligned} \omega(x, y, 0^+) &= \frac{\partial z'(x, y, z)}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi} \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{R_a} \frac{H(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \lim_{z \rightarrow 0^+} z \iint_{R_a} \frac{H(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (5-80)$$

Символ дифференцирования может быть введен здесь под знак интеграла, поскольку пределы области  $R_a$  не зависят от  $z$ . Так как предполагается, что величина  $z$  имеет очень малые положительные значения, то после умножения на нее интеграл обращается в нуль везде, кроме окрестности точки  $\xi = x$ ,  $\eta = y$ , где подинтегральное выражение неограниченно возрастает. Ограничив эту область малым квадратом со стороной  $2\varepsilon$ , получим

$$\omega(x, y, 0^+) = \frac{1}{4\pi} \lim_{z \rightarrow 0^+} z \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{H(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (5-81)$$

Функция  $H(\xi, \eta)$ , будучи непрерывной, отличается от своего значения в центре  $H(x, y)$  на величину порядка  $\varepsilon$ . Следовательно, если пренебречь этими малыми

изменениями и временно ввести новые переменные интегрирования  $\xi' = (x - \xi)$ ,  $\eta' = (y - \eta)$ , то найдем

$$\begin{aligned} \omega(x, y, 0^+) &= \frac{H(x, y)}{4\pi} \lim_{z \rightarrow 0^+} z \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d\xi' d\eta'}{[\xi'^2 + \eta'^2 + z^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{H(x, y)}{4\pi} \lim_{z \rightarrow 0^+} \left[ 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{\varepsilon^2}{z \sqrt{2\varepsilon^2 + z^2}} \right) - 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{-\varepsilon^2}{z \sqrt{2\varepsilon^2 + z^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5-82)$$

Тщательное изучение проводимого здесь процесса предельного перехода показывает, что  $z$  и  $\varepsilon$  следует приближать к нулю таким образом, чтобы отношение  $\varepsilon/z$  становилось неограниченно большим. Для того чтобы члены, отброшенные при переходе от формулы (5-81) к формуле (5-82), были действительно пренебрежимо малыми, следует величину  $\varepsilon$  взять весьма малой, однако если только  $\varepsilon$  не будет оставаться большим по сравнению с  $z$ , то мы от области  $R_a$  за пределами малого квадрата получим при этом добавки, не равные нулю. Если предельный переход проводится должным образом, то арктангенсы в равенстве (5-82) должны приближаться к значениям  $+\pi/2$  и  $-\pi/2$ , так что в результате получим

$$\omega(x, y, 0^+) = \frac{1}{2} H(x, y). \quad (5-83a)$$

Если приближаться к слою источников с нижней стороны, то алгебраические знаки аргументов арктангенсов меняются на обратные, откуда следует, что

$$\omega(x, y, 0^-) = -\frac{1}{2} H(x, y). \quad (5-83b)$$

Отсюда видно, что источники приводят к образованию симметричного разрыва типа, определяемого равенствами (5-76) и (5-77), причем оба они могут быть удовлетворены, если положить

$$H(x, y) = 2U \frac{\partial z_t(x, y)}{\partial x}. \quad (5-84)$$

Мы могли бы прийти к тем же выводам качественным физическим методом, рассуждая, что источники испускают  $H$  м<sup>3</sup> жидкости с единицы площади в единицу времени. Истечение этой жидкости возможно только путем ее движения от слоя источников, причем половина ее движется вверх со скоростью  $H/2$ , а другая половина — вниз, со скоростью  $-H/2$ . Иногда описывают это явление, говоря, что любой источник в таком слое является однозначной функцией составляющей скорости, перпендикулярной к слою.

Решение задачи заканчивается путем подстановки выражения (5-84) в равенство (5-79):

$$\varphi'(x, y, z) = -\frac{U}{2\pi} \int_{R_a} \int \frac{\frac{\partial z_t(\xi, \eta)}{\partial x} d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}. \quad (5-85)$$

Обо всех свойствах течения можно судить по равенству (5-85). Например, чтобы вычислить распределение давления по крылу, надо обе части этого равенства продифференцировать по  $x$ , положить  $z = 0$  и подставить результат в формулу (5-74). В случае двумерного течения вокруг профиля начнем с двумерного распределения источников вдоль хорды и способом, совершенно аналогичным указанному выше, найдем

$$\varphi'(x, z) = \frac{U}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{dz_t(\xi)}{dx} \ln [(x-\xi)^2 + z^2] d\xi. \quad (5-86)$$

Течения, описываемые равенствами (5-85) и (5-86), представляют собой хорошие примеры бесциркуляционных течений в смысле п. 5-2. Соответственно



те же самые формулы вполне справедливы при граничных условиях, зависящих от времени, за исключением того, что равенство (5-84) должно быть модифицировано с учетом вертикальных скоростей, обусловленных местным изменением  $z_t$  (см. п. 5-1):

$$H(x, y, t) = 2 \frac{\partial z_t(x, y, t)}{\partial t} + 2U \frac{\partial z_t(x, y, t)}{\partial x}, \quad (5-87)$$

при соответствующих изменениях в равенствах (5-85) и (5-86). Полученные таким образом решения относятся к маловероятному случаю пульсаций толщины крыла. Дозвуковой флаттер панели крыла и выпучивание обшивки, зависящее от времени, являются единственными задачами аэроупругости, к которым полученные решения могут быть применены практически, однако оказывается, что эти задачи не имеют серьезного значения в условиях обычного полета.

Вследствие симметрии часть решения<sup>1)</sup>, обусловленная толщиной профиля, не влияет на подъемную силу, момент тангажа и момент крена, действующие на тонкий профиль или крыло. Поэтому мы предполагаем получить значительно больше от решения антисимметричной части задачи, связанного с функцией  $z_a$ . Здесь значения  $\omega$  вдоль всей плоскости  $xu$  уже неизвестны (для симметричного случая они были равны нулю вне области  $R_a$ ), и мы должны решать значительно более сложную краевую задачу смешанного типа. К счастью, путь решения в случае установившегося двумерного течения, с которым приходится иметь дело в первую очередь, сравнительно ясен. Потенциал  $\varphi'$  должен удовлетворять уравнению Лапласа для двух независимых переменных при выполнении условия

$$\omega = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = U \frac{\partial z_a}{\partial x} \quad \text{для } z = 0, \quad -b \leq x \leq b. \quad (5-88)$$

В дополнение к условию (5-88) следует подчеркнуть, что при переходе через плоскость  $xu$  нигде, кроме хорды профиля, не может возникнуть разрыв давлений, а следовательно, и скачок величины  $u'$ . Симметрию в свойствах поля возмущенного течения мы обнаруживаем, замечая, что условие (5-88) может удовлетворяться при распределении  $\omega$ , представляющем собой непрерывную четную функцию  $z$ . Если вспомнить, что после интегрирования четность или нечетность функции любого переменного переходит в свою противоположность, то это означает, что  $\varphi'$  и  $u' = \partial \varphi' / \partial x$  будут нечетными функциями  $z$ . Поэтому возмущенное движение будет антисимметричным по отношению к плоскости  $xu$ . Если расположить вдоль оси  $x$  слой двумерных вихрей, то можно получить такое течение и одновременно создать подъемную силу. Равенство (5-59), записанное в декартовых координатах, со знаком, измененным на обратный, для получения положительной циркуляции в положительном направлении оси  $y$ , дает в случае сосредоточенного вихря, расположенного на прямой  $x = \xi, z = \zeta$ , потенциал

$$\varphi_V = -\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{z - \zeta}{x - \xi} \right). \quad (5-89)$$

Распределение вихрей вдоль оси  $x$  ( $\zeta = 0$ ) при циркуляции  $\gamma_a(\xi)$  на единицу длины обладает потенциалом возмущений, равным

$$\varphi'(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int \gamma_a(\xi) \operatorname{arctg} \left( \frac{z}{x - \xi} \right) d\xi. \quad (5-90)$$

Чтобы решить, какова должна быть протяженность вихревого слоя, используем тесную связь между  $\gamma_a$  и местной скоростью возмущения  $u'$ . Это можно сделать с помощью дифференцирования равенства (5-90) по  $x$ , полагая при этом  $z$  стремящимся к нулю. Еще большая физическая ясность достигается, однако, если заметить, что наличие циркуляции равносильно наличию разрыва величины  $u'$

<sup>1)</sup> Эта часть решения содержит функцию  $z_t$ . — Прим. ред.



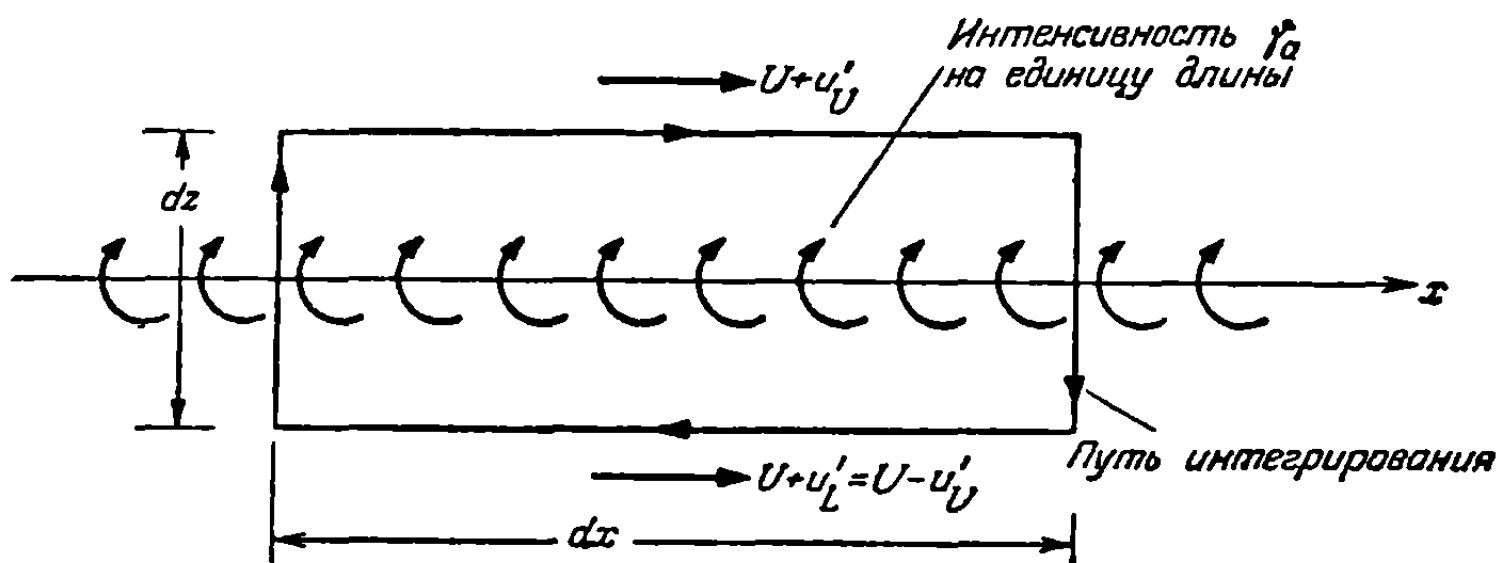
при переходе через вихревой слой. Если для  $z = 0^+$  значение этой величины равно  $u'_U$ , то для  $z = 0^-$  вследствие антисимметричности ее значение должно быть  $-u'_U$ . Это положение вещей иллюстрируется на фиг. 5-7, где показан элемент вихревого слоя длиной  $dx$ . Вычисляя циркуляцию по прямоугольному пути, показанному на фиг. 5-7, получаем

$$(U + u'_U) dx - w dz - (U - u'_U) dx + w dz = 2u'_U dx. \quad (5-91)$$

Согласно определению величины  $\gamma_a$ , эта циркуляция должна быть равна также  $\gamma_a dx$ , так что

$$u'_U = \frac{1}{2} \gamma_a. \quad (5-92)$$

Можно сказать, что любой вихрь в таком слое является однозначной функцией тангенциальной составляющей скорости. Сравнение с уравнением (5-74) пока-



Фиг. 5-7. Элемент расположенного вдоль оси  $x$  вихревого слоя, моделирующего возмущения, которые возникают вследствие кривизны тонкого профиля и наличия угла атаки. Показан путь интегрирования при выводе уравнения, связывающего  $u'_U$  и  $\gamma_a$ .

зывает, что при переходе через вихревой слой должен иметься также разрыв давления, определяемый формулой

$$\frac{P_U - P_L}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{2u'_U}{U} - \frac{2(-u'_U)}{U} = -\frac{2\gamma_a}{U}. \quad (5-93)$$

Так как для циркуляции в установившемся течении скачки тангенциальной скорости и давления неразрывно связаны между собой, то вихри могут быть только у той части оси  $x$ , которая совпадает с хордой профиля. Следовательно, пределами интегрирования в уравнении (5-90) будут  $\xi = -b$  и  $\xi = b$ . Очевидно также, что основной неизвестной величиной является  $\gamma_a$ , так как от нее зависит распределение давления, подъемная сила и момент для данного профиля.

С помощью вычисления  $w$  вдоль поверхности профиля и применения условия (5-88) можно вывести сравнительно простое интегральное уравнение для  $\gamma_a$ . В общем случае

$$w(x, z) = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{[x - \xi] \gamma_a(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + z^2}. \quad (5-94)$$

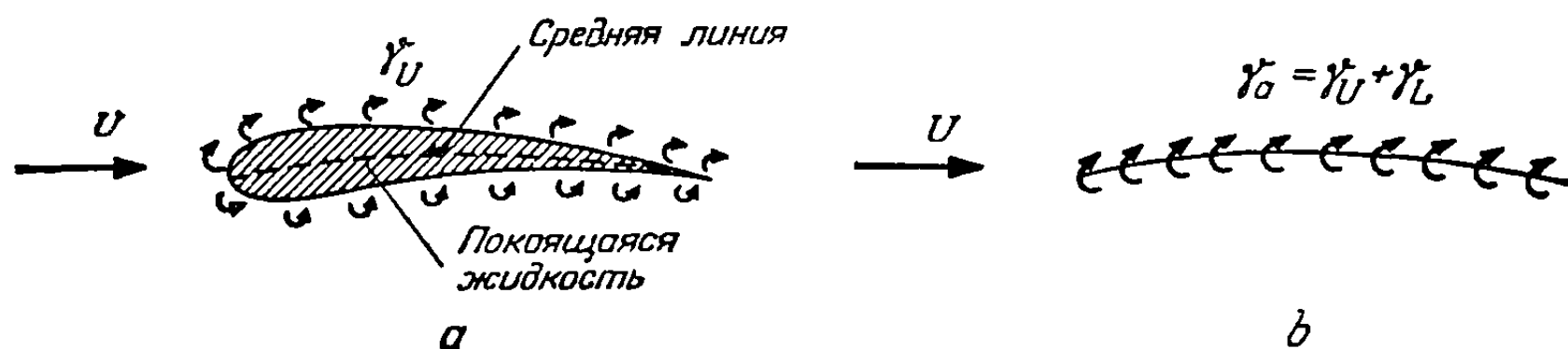
Если положить  $z$  равным нулю, то особая точка  $\xi = x$  подинтегрального выражения создает впечатление, что этот интеграл является величиной, не поддающейся математическому определению. Однако физическое требование, состоящее в том, что  $w$  должно оставаться в течение всего процесса предельного перехода непрерывной функцией  $z$ , приводит к заключению, что единственно

правильное значение  $\omega$  определяется путем вычисления главного значения в смысле Коши для интеграла

$$\omega(x, 0) = U \frac{dz_a}{dx} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma_a(\xi)}{x-\xi} d\xi. \quad (5-95)$$

Главное значение в смысле Коши вычисляется путем исключения особой точки  $\xi = x$  вместе с малым интервалом, симметричным относительно нее (т. е.  $x - \varepsilon \leq \xi \leq x + \varepsilon$ ), оценки оставшихся частей интеграла и приближения  $\varepsilon$  к нулю. Рассуждения, проливающие свет на вопрос об оценке несобственных интегралов с еще более сильными особенностями, даны Манглером [5-11].

Прежде чем решать уравнение (5-95), упомянем, что его можно также вывести, если исходить из представления (п. 5-3) о профиле как о покоящейся массе жидкости, отделенной сверху и снизу от внешнего потока непосредственно примыкающими к ней областями сдвига. Эти пограничные слои имеют очень близкое сходство с поверхностями разрыва тангенциальной скорости, и эта равноценность приводит к мысли о замене их двумерными вихревыми слоями, что также позволяет получить уравнение (5-92). Предположим, что верхний слой



Фиг. 5-8. Два этапа процесса замены тонкого профиля вихревыми слоями.

обладает циркуляцией  $\gamma_U$ , а нижний — циркуляцией  $\gamma_L$  на единицу длины в горизонтальном направлении (фиг. 5-8, а). При этом  $\gamma_U$  будет большой положительной величиной, тогда как для профиля, создающего подъемную силу,  $\gamma_L$  будет несколько меньшей отрицательной величиной. Предполагая, что влияние толщины можно учесть с помощью отдельного исследования, уменьшим вертикальные размеры профиля до нуля, вызывая слияние двух вихревых слоев в один слой, расположенный вдоль средней линии профиля, с удельной интенсивностью  $\gamma_a = \gamma_U + \gamma_L$ . Этот второй этап приближения показан на фиг. 5-8, б. Если мы запишем интегральное уравнение, выражающее то обстоятельство, что вертикальная скорость  $\omega$ , индуцированная вдоль средней линии этим слегка искривленным вихревым слоем, всюду равна величине  $U dz_a/dx$ , и заменим в качестве приближения все косинусы малых углов наклона прямых линий, соединяющих различные точки вихревого слоя, единицами, то опять получим уравнение (5-95).

Для удобства математических выкладок независимые переменные в уравнении (5-95) заменяются их безразмерными эквивалентами

$$x^* = \frac{x}{b}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{b}, \quad (5-96)$$

что приводит к уравнению

$$\omega(x^*, 0) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\gamma_a(\xi^*)}{x^* - \xi^*} d\xi^*. \quad (5-97)$$

Как указывалось в п. 5-3, решение уравнения (5-97) является неопределенным в том смысле, что при этом можно добавить произвольное значение циркуляции около профиля, не нарушая граничных условий. Это можно показать ана-

литически, замечая, что подстановка в правую часть равенства (5-97) функции

$$\gamma_{ac}(\xi^*) = \frac{\Gamma_c}{\pi b \sqrt{1 - \xi^{*2}}} \quad (5-98)$$

обращает эту часть в нуль. Действительно, если сделать замену переменного  $\xi^* = \cos \theta$ , то получим

$$\oint_{-1}^1 \frac{\gamma_{ac}(\xi^*)}{x^* - \xi^*} d\xi^* = \frac{\Gamma_c}{\pi b} \oint_{-1}^1 \frac{d\xi^*}{(x^* - \xi^*) \sqrt{1 - \xi^{*2}}} = \frac{\Gamma_c}{\pi b} \oint_0^\pi \frac{d\theta}{x^* - \cos \theta} = 0, \quad (5-99)$$

что является специальным случаем, соответствующим значению  $r = 0$  хорошо известной аэродинамиком формулы Глауэрта (см. [5-1], гл. 9):

$$\oint_0^\pi \frac{\cos r\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} = \frac{\pi \sin r\varphi}{\sin \varphi}; \quad \text{для } r = 0, 1, 2, \dots \quad (5-100)$$

Следовательно, решение, выражаемое уравнением (5-98), не нарушает граничных условий, удовлетворяемых с помощью любого другого решения уравнения (5-97). Однако решение (5-98) дает для циркуляции около профиля значение  $\Gamma_c$ . Это значение определяется путем суммирования циркуляций от всех присоединенных вихрей вдоль хорды

$$\Gamma = \int_{-b}^b \gamma_a d\xi = b \int_{-1}^1 \gamma_{ac} d\xi^* = \frac{\Gamma_c}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi^*}{\sqrt{1 - \xi^{*2}}} = \frac{\Gamma_c}{\pi} \int_0^\pi d\theta = \Gamma_c. \quad (5-101)$$

Для определения действительной величины  $\Gamma_c$  мы должны обратиться к гипотезе Кутта о плавном обтекании потока с заостренной задней кромкой. Непрерывное движение жидкости в этой области может осуществляться только в том случае, если при стекании потока назад от профиля не происходит разрывов давления. Поэтому из уравнения (5-93) получается условие

$$\gamma_a = 0 \quad \text{для } x = b \quad (x^* = 1). \quad (5-102)$$

При наличии условия (5-102) уравнение (5-97) может быть решено с помощью соответствующих подстановок в виде рядов Фурье для известных и неизвестных величин (см., например, Аллен [5-12]). Однако Зёнген [5-13] дал очень удобную формулу обращения, выведенную на основе общей теории потенциала. Так как этот метод полезен для задач о неустановившемся течении, то здесь будет приведен пример его применения. Между прочим, его результаты могут быть получены также и из решения в рядах Фурье, однако при меньшей общности в отношении типов средней линии профиля, к которым эти результаты могут быть применены со всей строгостью. Для любых двух функций  $f$  и  $g$ , могущих представлять интерес для инженера<sup>1)</sup>, Зёнген доказывает, что единственным решением интегрального уравнения

$$g(x^*) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^1 \frac{f(\xi^*)}{x^* - \xi^*} d\xi^*, \quad (5-103)$$

<sup>1)</sup> Мы подразумеваем под этим, что  $f$  и  $g$  должны быть непрерывными везде, за исключением, быть может, конечного числа конечных разрывов или конечного числа интегрируемых особенностей. Интегрируемой особенностью при  $x^* = x_0^*$  является такая, относительно которой можно установить, что вблизи этой точки она ведет себя как величина  $1/(x^* - x_0^*)^\beta$ , где  $\beta$  — положительное число, меньшее единицы.

для которого  $f(1)$  является конечным или равным нулю, будет решение вида

$$f(x^*) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{g(\xi^*)}{(x^*-\xi^*)} d\xi^*. \quad (5-104)$$

Функцию  $f$  можно отождествить с  $\gamma_a$ , а функцию  $g$  — с  $w$ , поэтому обращенная форма уравнения (5-97) имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_a(x^*) &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{w(\xi^*, 0)}{(x^*-\xi^*)} d\xi^* = \\ &= \frac{2U}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{dz_a(\xi^*)}{dx} d\xi^*. \end{aligned} \quad (5-105)$$

Чтобы вычислить распределение давления в направлении хорды, проинтегрируем уравнение (5-105) при известных средней линии и угле атаки и результат подставим в уравнение (5-93). Если косинусы малых углов считать равными единице, что оправдывается допущениями нашей теории, то подъемная сила и момент тангажа (относительно оси, проходящей через точку  $x = ba$ ), отнесенные к единице размаха крыла, выражаются формулами вида

$$L = - \int_{-b}^b [p_U - p_L] dx = \rho U \int_{-b}^b \gamma_a dx = \rho U \Gamma, \quad (5-106)$$

$$M_y = \int_{-b}^b [p_U - p_L] [x - ba] dx. \quad (5-107)$$

Здесь  $\Gamma$  обозначает действительное значение циркуляции вокруг профиля за счет присоединенного вихря. Подставляя выражение (5-105) в формулу (5-106), изменяя порядок интегрирования и вводя значение известного интеграла по  $x^*$ , получаем интегральную формулу Мунка

$$L = -2\rho U^2 b \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{dz_a(\xi^*)}{dx} d\xi^*. \quad (5-108)$$

Предыдущие результаты дают особенно ценную информацию, если их применить к случаю плоской пластинки, расположенной под углом атаки  $\alpha$ , для которого

$$z_a = -\alpha x = -\alpha b x^*. \quad (5-109)$$

Будучи подставлено в равенство (5-105), это выражение позволяет получить так называемую нагрузку плоской пластинки в направлении хорды

$$\gamma_a = 2U\alpha \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} = 2U\alpha \sqrt{\frac{b-x}{b+x}}. \quad (5-110)$$

Равенство (5-110) обнаруживает хорошо известную особенность у передней кромки (в точке  $x = -b$ ), представляющую собой результат тех упрощений, которые лежат в основе нашей теории. Тем не менее оно дает результат, вполне сравнимый с измеренным распределением перепада давлений по направлению хорды для слабонаклоненного тонкого неискривленного профиля, создающего такую же подъемную силу. Существенные расхождения возникают лишь в точках, лежащих на расстоянии нескольких процентов длины хорды от особой точки.

Выражения (5-106) и (5-107) на единицу длины размаха дают значения

$$L = 2\pi\rho U^2 b\alpha, \quad (5-111)$$

$$M_y = -L \left[ ba + \frac{1}{2}b \right]. \quad (5-112)$$

Эти же выражения, будучи приведены к форме коэффициентов подъемной силы и момента для сечения крыла, как они определяются в обычной аэродинамической практике, записываются так

$$c_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 (2b)} = 2\pi\alpha, \quad (5-113)$$

$$c_m = \frac{M_y}{\frac{1}{2}\rho U^2 (2b)^2} = -\pi\alpha \left[ a + \frac{1}{2} \right]. \quad (5-114)$$

Таким образом, наклон кривой подъемной силы для сечения крыла получается равным

$$a_0 = \frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi. \quad (5-115)$$

Аэродинамический центр профиля, или точка пересечения с хордой той оси, относительно которой момент тангажа не зависит от угла атаки, лежит точно на расстоянии одной четверти хорды от начала координат ( $a = -1/2$ ).

Значение, определяемое равенством (5-115), и положение аэродинамического центра — одни и те же для всех тонких профилей независимо от характера изменения кривизны или толщины. Это получается потому, что результаты, выведенные для плоской пластинки, характеризуют влияние *изменения*  $\Delta\alpha$  угла атаки на давление, подъемную силу и момент для любого профиля. Эти результаты могут непосредственно накладываться друг на друга вследствие линейности дифференциального уравнения и граничных условий задачи. Уравнения (5-113) и (5-114) описывают то, что Национальный совещательный комитет по авиации<sup>1)</sup> назвал «дополнительными» подъемной силой и моментом. «Основные» подъемная сила и момент профиля или крыла зависят от его кривизны. Например, для профиля с параболической средней линией при нулевом угле атаки мы имели бы

$$z_\alpha = z_{\alpha 0} \left[ 1 - \frac{x^2}{b^2} \right], \quad (5-116)$$

где  $z_{\alpha 0}/(2b)$  рассматривается иногда как количественная характеристика кривизны, или максимальная кривизна. Подставляя это выражение в равенства (5-107) и (5-108), приходим к следующим выражениям:

$$c_l = 2\pi \frac{z_{\alpha 0}}{b}, \quad (5-117)$$

$$c_m = \pi\alpha \frac{z_{\alpha 0}}{b}. \quad (5-118)$$

В частности, для аэродинамического центра профиля при  $a = -1/2$  коэффициент момента, инвариантный по отношению к изменению угла атаки, равен

$$c_{mAC} = \frac{-\pi z_{\alpha 0}}{2b}. \quad (5-119)$$

Отрицательные значения  $c_{mAC}$  характерны для профилей, имеющих среднюю линию нормальной формы. Подъемная сила и момент при других углах атаки

<sup>1)</sup> National Advisory Committee for Aeronautics (NACA). — Прим. ред.

определяются соответственно путем сложения выражений (5-113) и (5-117), или (5-114) и (5-118). В дальнейшем, однако,  $\alpha$  будет, как правило, обозначать угол атаки, измеренный от того положения, при котором профиль дает нулевую подъемную силу.

Мы дезориентировали бы читателя, если бы создали у него впечатление, что все вышеизложенное характеризует единственный путь для теоретического расчета аэродинамических характеристик профиля в потоке несжимаемой жидкости. Напротив, как это наиболее наглядно изложено в работе [5-14], методы конформного преобразования дают значительно более точные оценки распределения давления, положения аэродинамического центра и большинства других важных величин. Кроме того, ни одна теория не дает вполне удовлетворительного описания таких явлений, как возникновение сопротивления и срыва. В основе принятого здесь метода изложения лежит предположение о наличии у читателя некоторых общих знаний о крыльях, а само изложение ведется исключительно с точки зрения специалиста по аэроупругости. Точная теория произвольного профиля и даже столь остроумные ее упрощенные варианты, как схема Аллена [5-12], дающая возможность учесть влияние толщины с помощью видоизменения результатов теории тонкого профиля, являются нелинейными. Нелинейность этих теоретических схем следует понимать в том смысле, что при использовании в них граничных условий не удастся осуществить сложение частных решений, выражающих влияние угла атаки, изменений кривизны и т. д. на подъемную силу и другие интегральные величины, зависящие от распределения давления. Что касается специалиста по аэроупругости, то для упрощения анализа сложных вопросов взаимодействия ему необходимо наличие линейности как в конструктивно-прочностных, так и в аэродинамических соотношениях. Как это будет показано на многочисленных примерах в последующих главах, наилучшим образом недостатки линейной теории могут быть учтены путем эмпирического видоизменения постоянных, входящих в используемые уравнения. Силы лобового сопротивления не имеют в этом случае большого значения, а при теоретическом исследовании таких явлений, как флаттер при больших углах атаки, где играет роль срыв потока, получены весьма незначительные результаты.

В заключение суммируем те немногие факты, которые будут полезны в дальнейших приложениях. Формулы для профилей обычных крыльев могут быть приспособлены к стреловидным крыльям достаточно большого размаха следующим путем: если угол стреловидности крыла равен  $\Lambda$  и если при оценке всех свойств профиля в поперечных сечениях последние принимаются перпендикулярными к размаху, то  $U$  заменяется всюду нормальной составляющей скорости потока  $U \cos \Lambda$ . Если самолет летит со скоростью более 300 миль в час, то следует принять во внимание влияние сжимаемости. Это проявляется обычно во введении числа Маха полета в уравнения для определения подъемной силы и момента. Результаты для установившегося и неустановившегося течений подробно излагаются в гл. 6.

Для любого крыла и любого числа Маха имеется ограниченный интервал углов атаки (порядка  $15-30^\circ$  между положительным и отрицательным критическими углами), внутри которого подъемная сила изменяется линейно в зависимости от  $\alpha$ , тогда как лобовое сопротивление изменяется примерно по параболическому закону. В пределах этого же интервала  $\alpha$  аэродинамический центр профиля остается четко определенным, хотя он имеет тенденцию к быстрым перемещениям с увеличением числа Маха в околосвуковой области. Замечено, что для крыла заданной формы подъемная сила, момент и лобовое сопротивление пропорциональны по величине площади крыла в плане  $S$ ; вот почему  $S$  (или длина хорды  $2b$  в случае профилей единичного размаха) используется как мера площади при определении безразмерных коэффициентов, связанных с этими величинами.



При дозвуковых скоростях потока экспериментально замеренные наклоны кривой подъемной силы составляют около 90—95% от значений, вычисленных по теории тонкого профиля. Теоретические значения  $c_{mAc}$  и положения аэродинамического центра профиля являются еще более точными, но сведения о критическом режиме и лобовом сопротивлении лучше всего получать с помощью испытаний в аэродинамической трубе или в полете. Для сверхзвукового потока теория позволяет вычислить волновое сопротивление, связанное с возникновением возмущений, распространяющихся на бесконечно большое расстояние. Хотя волновое сопротивление часто и составляет существенную долю полного сопротивления, оно в случае реальных газов, когда возникают касательные усилия на поверхности крыла, всегда меньше последнего. Однако силы лобового сопротивления, как правило, значительно меньше подъемных сил, так что большая жесткость конструкции крыла в направлении хорды позволяет обычно совершенно пренебречь первыми при рассмотрении вопросов аэроупругости.

**5-5. Крылья конечного размаха в установившемся движении.** В качестве естественного следствия нашего подхода к несущему профилю, описанного в п. 5-4, обратимся к представлению трехмерной срединной поверхности в виде вихревого слоя, покрывающего проекцию этой поверхности  $R_a$  на плоскость  $xu$ . Так как влияние толщины учитывается решением, соответствующим формуле (5-85), то действительное крыло мы заменим бесконечно тонкой срединной поверхностью  $z = z_a(x, y)$ , и поле скоростей, создаваемое вихревым слоем, должно тогда соответствовать линеаризованному граничному условию

$$\omega = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = U \frac{\partial z_a}{\partial x} \quad \text{для } z = 0, \quad (x, y) \text{ в области } R_a. \quad (5-120)$$

При выводе формул (5-92) и (5-93) не было введено допущений, которые ограничивали бы их применимость рамками двумерного течения. В самом деле, прямая пропорциональность между местной нагрузкой на крыло  $(p_U - p_L)$ , разностью касательных скоростей  $(u'_U - u'_L)$  и циркуляцией присоединенных вихрей, отнесенной к единице длины хорды  $\gamma_a$ , является фактически основным отправным пунктом в развитии нашей теории. Эта пропорциональность устанавливает, что, поскольку разность  $(p_U - p_L)$  является функцией координат, отсчитываемых как вдоль размаха, так и вдоль хорды крыла, то и циркуляция должна быть такой же функцией  $\gamma_a = \gamma_a(x, y)$ . Но последнее обстоятельство наводит на мысль, что, если передвигаться вдоль какой-либо вихревой линии в направлении оси  $y$ , то можно обнаружить изменение интенсивности вихрей. Если только не нарушается основной закон непрерывности вихрей, то должны иметься также и вихревые линии, направленные параллельно оси  $x$ . Иначе говоря, результирующие вихревые линии могут быть ориентированы в плоскости  $xu$  любым образом;  $\gamma_a$  в данной точке пропорциональна величине направленной вдоль размаха компоненты суммарного вектора завихренности в той же точке (на самом деле при нулевой толщине слоя завихренность будет бесконечной, но введенное нами понятие является полезным и имеет смысл, если представить себе слой в виде очень тонкой области равномерного сдвига). Мы определяем направленную вдоль хорды компоненту того же вектора [5-15], называя функцию  $\delta_a(x, y)$  циркуляцией, отнесенной к единице длины в направлении оси  $y$  и вычисленной относительно оси, направленной вдоль отрицательной оси  $x$ . Такой выбор знака объясняется тем, что нужно сделать  $\delta_a$  пропорциональной разности направленных вдоль размаха компонент скорости  $v$  при прохождении через вихревой слой в положительном направлении оси  $z$ . Из фиг. 5-7 следует соотношение

$$\gamma_a = u'_U - u'_L; \quad (5-121a)$$

аналогично, при рассечении вихревого слоя плоскостью  $uz$  с заменой  $dx$  на  $dy$ ,  $\gamma_a$  на  $\delta_a$ , а составляющих скорости на  $v_U$  и  $v_L$ , получим

$$\delta_a = v_U - v_L. \quad (5-121b)$$



Уравнения (5-121) позволяют также получить простое количественное выражение непрерывности вихревых линий. Если через  $\varphi'_U$  и  $\varphi'_L$  обозначить значения потенциала возмущений непосредственно под слоем и над ним, то получим

$$\frac{\partial \gamma_a}{\partial y} = \frac{\partial (u'_U - u'_L)}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (\varphi'_U - \varphi'_L) = \frac{\partial (v_U - v_L)}{\partial x} = \frac{\partial \delta_a}{\partial x}. \quad (5-122)$$

Равенству производных  $\partial \gamma_a / \partial y$  и  $\partial \delta_a / \partial x$  можно придать следующий физический смысл: если интенсивность  $\gamma_a$  какой-либо вихревой линии, направленной вдоль размаха, увеличивается в направлении оси  $y$  ( $\partial \gamma_a / \partial y > 0$ ), то это должно являться результатом отклонения вихрей от оси  $x$ , так что интенсивность  $-\delta_a$  соответствующей вихревой линии, направленной вдоль хорды, должна уменьшаться в направлении оси  $x$  ( $-\partial \delta_a / \partial x < 0$  или  $\partial \delta_a / \partial x > 0$ ). Тщательное исследование задачи, которую мы пытаемся решить, убеждает нас также и в том, что вихревой слой не может быть ограничен лишь пределами области  $R_a$ . Если бы это было так, то он должен был бы состоять из ряда замкнутых колец; однако в этом случае общая величина циркуляции вокруг всего крыла в любом его сечении, перпендикулярном к размаху, была бы равна нулю, и на основании формулы (5-106) оказалось бы, что крыло не развивает подъемной силы. Необходимость решения, дающего конечную подъемную силу, приводит к требованию, чтобы вихревые линии из области  $R_a$  каким-то образом уходили в бесконечность. Поскольку источником вихревых линий является крыло, то единственным направлением, в котором они могут двигаться, подчиняясь в то же время правилу о том, что они должны быть все время связаны с одними и теми же частицами в свободном потоке, будет направление вниз по течению вдоль спутной струи. Поэтому в соответствии с допущением о малости возмущений мы предполагаем существование области спутной струи  $R_w$ , лежащей в плоскости  $xu$  между прямыми линиями, направленными вниз по течению от концов крыла. Эту область мы заполняем вихревым слоем, имеющим на единицу длины компоненты циркуляции  $\gamma_w$  и  $\delta_w$ . Для вихрей в области  $R_w$  уравнение (5-122) записывается в виде

$$\frac{\partial \gamma_w}{\partial y} = \frac{\partial \delta_w}{\partial x}. \quad (5-123)$$

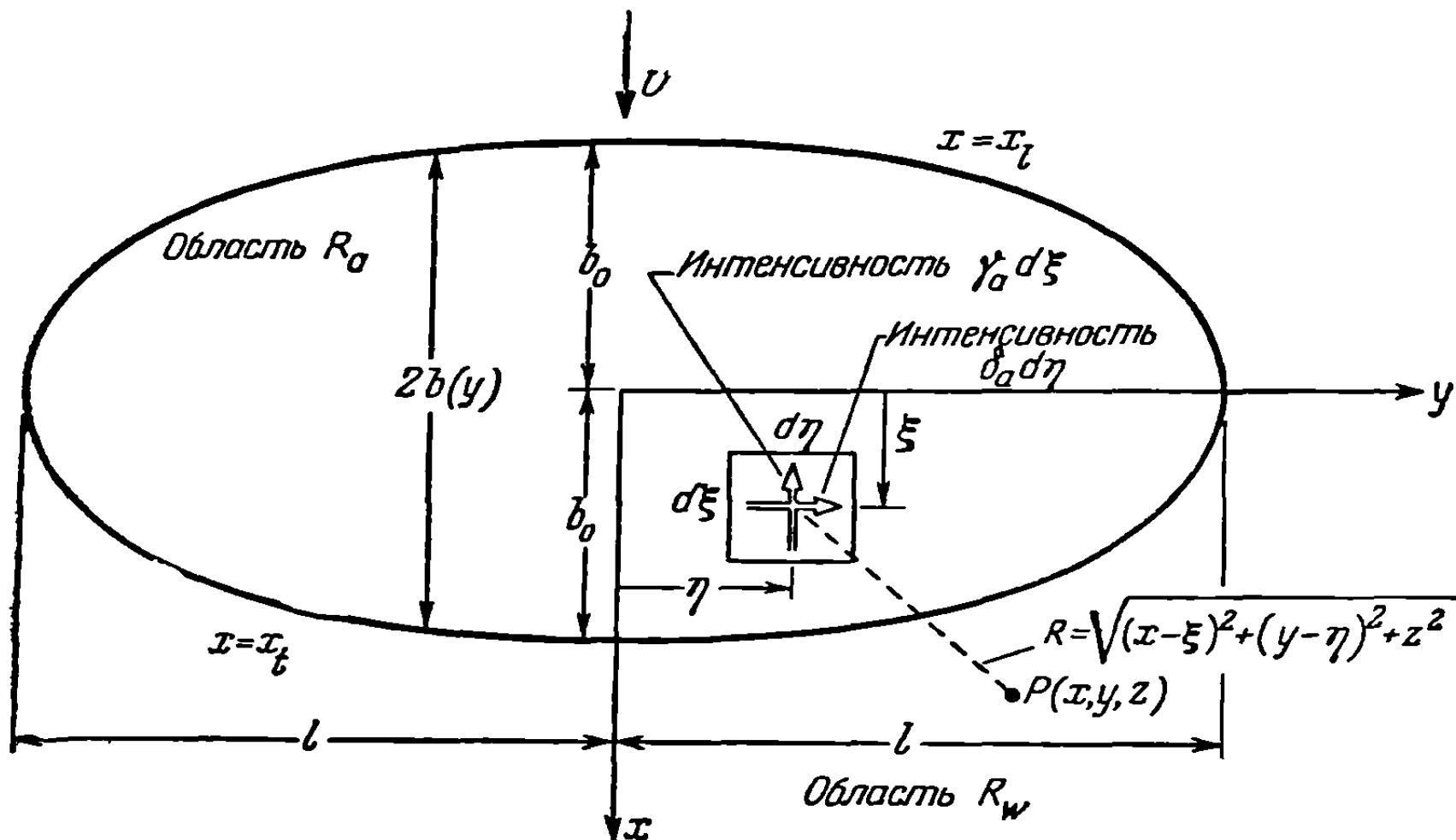
В дальнейшем мы рассмотрим следствия, вытекающие из этого уравнения в случае установившегося и неустановившегося течений. Границы областей  $R_a$  и  $R_w$  показаны на фиг. 5-9.

На основании (5-122) и (5-123) мы можем рассматривать одну из компонент циркуляции как основную неизвестную величину в данной задаче и вычислить впоследствии вторую компоненту с помощью простого дифференцирования и интегрирования. Непосредственная связь между компонентой  $\gamma$  и распределением нагрузки на крыло сразу же указывает на необходимость использования именно этой компоненты. Мы покажем, что закон Био и Савара в сочетании с граничным условием (5-120) дает интегральное уравнение для определения  $\gamma_a$ , совершенно аналогичное уравнению (5-95) для двумерного случая. Пусть области  $R_a$  и  $R_w$  вихревого слоя располагаются по отношению к системе координат так, как это показано на фиг. 5-9. Обратим внимание на вихри, заключенные в малом прямоугольном элементе слоя  $d\xi d\eta$ , центр которого имеет координаты  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ , и выясним, какова будет вертикальная скорость  $w$ , индуцируемая этими вихрями в произвольной точке пространства  $p(x, y, z)$ . Прежде всего применим равенство (5-62b) для определения полной скорости  $dq$ , обусловленной вихрем, направленным вдоль размаха и обладающим циркуляцией  $\Gamma = \gamma_a d\xi$ . Расстояние  $R$  между двумя точками здесь равно  $\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$ , а длина перпендикуляра  $r$ , опущенного из  $p$  на ось вихря, равна  $\sqrt{(x - \xi)^2 + z^2}$ . Подставив эти значения в уравнение (5-62b), мы

получим

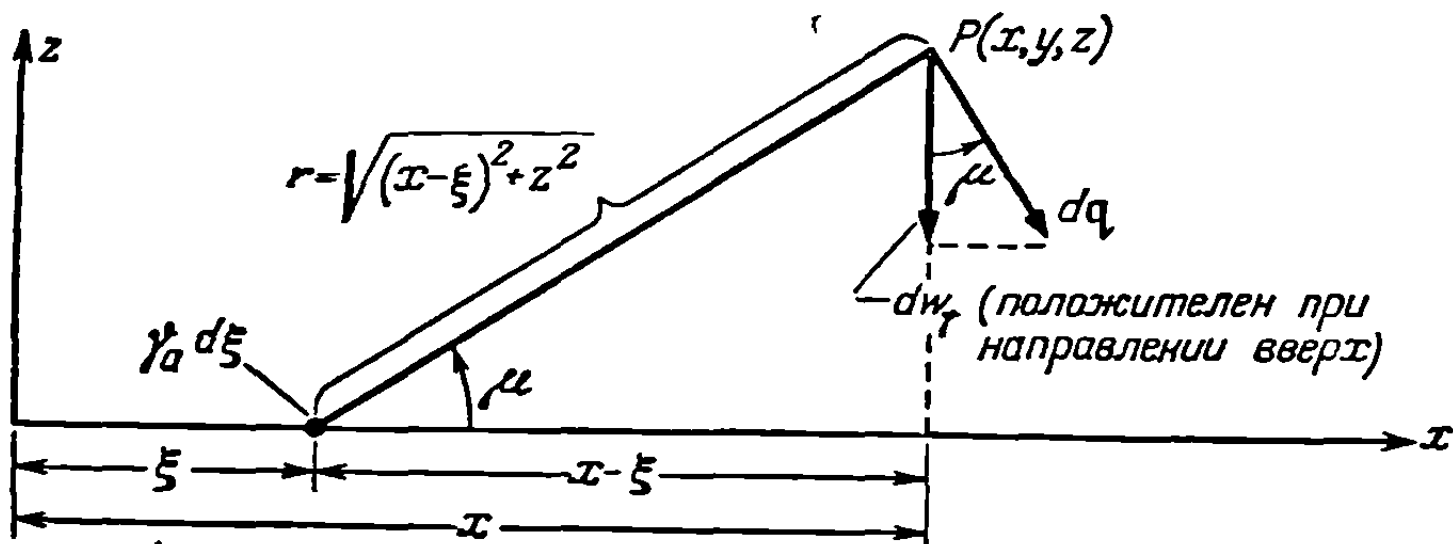
$$dq = \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + z^2} \gamma_a(\xi, \eta) d\xi d\eta}{4\pi [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (5-124)$$

В соответствии с правилом правой руки вектор  $dq$  лежит в плоскости, параллельной плоскости  $xz$  и проходящей через точку  $p$ , и направлен в общем случае вниз перпендикулярно к прямой  $r$ . Его вертикальная составляющая  $d\omega_\gamma$



Фиг. 5-9. Схема проекции крыла конечного размаха на плоскость  $xu$ , включающая область крыла  $R_a$  и область спутной струи  $R_w$ . Показаны также вихри, содержащиеся внутри элементарной площадки  $d\xi d\eta$  представляющего крыло вихревого слоя.

(положительная при направлении вверх) определяется путем умножения  $dq$  на косинус угла его наклона  $\mu$  к оси  $z$ . Как показано на фиг. 5-10, одна из сторон этого угла  $\mu$  перпендикулярна к прямой  $r$ , а другая — к прямой  $(x - \xi)$ ,



Фиг. 5-10. Скорости  $dq$  и  $d\omega_\gamma$ , показанные в плоскости  $xz$ , проходящей через точку  $P(x, y, z)$  на фиг. 5-9.

соединяющей вихревую линию с проекцией точки  $(x, y, z)$  на плоскость  $xu$ . Следовательно,  $\cos \mu$  равен  $(x - \xi) / \sqrt{(x - \xi)^2 + z^2}$ , и

$$d\omega_\gamma = -dq \frac{(x - \xi)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + z^2}} = \frac{-\gamma_a(\xi, \eta) [x - \xi] d\xi d\eta}{4\pi [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (5-125)$$

Подобным же образом найдем выражение для вертикальной скорости, индуцируемой вихрем, направленным вдоль хорды,

$$d\omega_\delta = \frac{-\delta_a(\xi, \eta) [y - \eta] d\xi d\eta}{4\pi [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (5-126)$$

Полная вертикальная скорость, обусловленная вихрями внутри элемента  $d\xi d\eta$ , равна

$$d\omega = d\omega_\gamma + d\omega_\delta. \quad (5-127)$$

Для вычисления скорости, обусловленной всем вихревым слоем, суммируем элементарные составляющие путем интегрирования по области крыла и области спутной струи:

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{R_a} \int \frac{\gamma_a(\xi, \eta) [x - \xi] + \delta_a(\xi, \eta) [y - \eta]}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}} d\xi d\eta - \\ & -\frac{1}{4\pi} \int_{R_w} \int \frac{\gamma_w(\xi, \eta) [x - \xi] + \delta_w(\xi, \eta) [y - \eta]}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (5-128)$$

Прежде чем начать преобразовывать уравнение (5-128) к удобному для наших целей виду, сделаем несколько важных замечаний. Прежде всего с математической точки зрения необязательно выводить уравнение (5-128), используя понятие вихревого слоя. Закон Био и Савара гарантирует, конечно, что полученная нами функция удовлетворяет уравнению Лапласа. Мы, однако, могли бы начать с оговорки, что искомая функция должна быть гармонической (т. е. функцией, удовлетворяющей уравнению Лапласа), соответствовать картине течения, антисимметричной в направлении оси  $z$ , и на поверхностях  $R_a$  и  $R_w$  иметь разрывы  $\varphi'$ . В другом варианте мы могли бы искать потенциал ускорений  $\psi$ , претерпевающий разрыв только на поверхности  $R_a$ . В любом случае мы должны были бы использовать наложение элементарных решений, известных под названием диполей,

$$\varphi_D = \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} = \frac{H[z - \zeta]}{4\pi [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}} \quad (5-129)$$

и интегральное соотношение, называемое теоремой Грина. Все методы такого рода быстро приводят к результату, выражаемому равенством (5-128) или какой-либо эквивалентной ему формулой. Вряд ли, однако, изящество таких методов дает им преимущество перед предельной физической ясностью вихревого метода. Тем не менее, потенциал ускорений был удачно использован при решении некоторых задач о крыльях. Примеры такого использования можно будет увидеть в главах, посвященных течению сжимаемой жидкости. Крыло является единственной поверхностью разрыва давления, и поэтому введение функции  $\psi$  очень полезно для несжимаемой жидкости, когда при соответствующем выборе системы координат можно сделать так, чтобы область  $R_a$  покрывала всю площадь одной из координатных поверхностей. Классическим примером такого подхода является решение Киннера [5-17] для распределения нагрузки на круглое крыло в сфероидальной системе координат.

Условие равенства нулю разрыва давлений при переходе через  $R_w$  в сочетании с уравнением (5-93) показывает, что для установившегося течения  $\gamma_w$  должно обращаться в нуль. Из равенства (5-123) следует, что

$$\frac{\partial \delta_w}{\partial x} = 0 \quad (5-130)$$

в каждой точке области  $R_w$  или что  $\delta_w$  во всех точках спутной струи является функцией одного  $y$ . Так как передней границей области  $R_w$  служит задняя кромка крыла,  $x = x_t$ , где гипотеза Кутта требует плавного и непрерывного движения жидкости, то мы можем пересечь  $x_t$ , двигаясь по линии  $y = \text{const}$ , и дать следующую оценку для  $\delta_w$ :

$$\delta_w(x, y) = \delta_w(x_t, y) = \delta_a(x_t, y). \quad (5-131)$$

Можно получить выражение и через более знакомую нам функцию, если заметить, что впереди передней кромки вихрей уже нет, так что можно проинтегрировать уравнение (5-122); в результате получим<sup>1)</sup>:

$$\delta_a(x_t, y) = \int_{x_l}^{x_t} \frac{\partial \gamma_a}{\partial y} dx = \frac{d}{dy} \int_{x_l}^{x_t} \gamma_a dx = \frac{d\Gamma}{dy}, \quad (5-132)$$

где  $\Gamma(y)$  — полная величина циркуляции присоединенных вихрей крыла при данном значении  $y$ . Подставив это выражение в равенство (5-131), получим

$$\delta_w(x, y) = \frac{d\Gamma(y)}{dy}. \quad (5-133)$$

Таким образом, спутная струя состоит из вихрей постоянной интенсивности, направленных вдоль по потоку, причем значение их циркуляции для каждого значения  $y$  определяется степенью изменения полной циркуляции крыла в том же сечении. Эти вихри представляют собой хорошо известные концевые вихри, которые, как предполагается, простираются вниз по потоку до того места, где начался установившийся полет. Там их концы замыкаются начальным вихрем, направленным параллельно размаху. Только в установившемся течении спутная струя целиком состоит из концевых вихрей. В гл. 7 мы увидим, что для неустановившегося течения спутная струя представляет собой сложное, зависящее от времени сочетание стекающих с крыла  $\gamma_w$ -вихрей и концевых вихрей. Однако условие равенства нулю разрыва давлений в  $R_w$  говорит нам, что все это образование включено в основной поток и движется вниз по течению со скоростью  $U$ . Как отмечено в п. 5-3, общая форма спутной струи определяется предшествующей зависимостью от времени циркуляции около создающего ее крыла.

Теперь мы можем возвратиться к равенству (5-128), воспользоваться нашими данными о  $\gamma_w$  и  $\delta_w$  и, устремляя  $z$  к нулю, построить нужное нам интегральное уравнение. Как показал Рейсснер в работе [5-16], сингулярный интеграл в силу непрерывности  $w$  для всех значений  $(x, y)$  в области  $R_a$  принимает главное значение Коши такого же типа, какой получается в случае профиля,

$$w(x, y, 0) = U \frac{\partial z_a}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{R_a} \oint \frac{\gamma_a(\xi, \eta) [x - \xi] + \delta_a(\xi, \eta) [y - \eta]}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta - \\ - \frac{1}{4\pi} \int \int_{R_w} \frac{\delta_a(\xi, \eta) [y - \eta]}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta. \quad (5-134)$$

На этом этапе для удобства представления введем ограничение, состоящее в том, что крыло имеет прямоугольную форму в плане, с размахом  $2l$  и хордой  $2b$ . Такой шаг вносит меньше ограничений, чем это может казаться, поскольку можно доказать, что некоторые из результатов, которые мы выведем, справедливы для крыльев различной формы, в частности для крыльев с прямолинейными задними кромками. Можно также достичь преимущества в виде постоянных

<sup>1)</sup> Предупреждаем читателя, что второе из написанных равенств подразумевает, что  $\gamma_a(x_t, y) = \gamma_a(x_l, y) = 0$ . Предположение об обращении в нуль  $\gamma_a$  у задней кромки уже было сделано, тогда как условие  $\gamma_a(x_l, y) = 0$  справедливо только в том случае, если мы устанавливаем, что всякое интегрирование по  $R_a$  захватывает небольшое пространство за действительной передней кромкой в области нулевой завихренности. Этот искусственный прием не противоречит другим этапам нашего анализа. Мы сделаем здесь также молчаливое предположение о том, что  $x_t$  и  $x_l$  являются однозначными функциями  $y$ . Это означает, что крыло не должно иметь боковых кромок с очертаниями, направленными выпуклостью внутрь крыла, — ограничение, которое выполняется практически для всех форм крыльев в плане.

пределов интегрирования, отказавшись от прямоугольных координат, с помощью интересной замены переменных:

$$x^* = \frac{2x - x_l - x_t}{x_t - x_l}, \quad (5-135a)$$

$$y^* = y/b_0. \quad (5-135b)$$

Такая замена была впервые применена в теории крыла Рейсснером ([5-15], стр. 18) и использовалась также Джонсом [5-18]. Она дает то преимущество, что передняя и задняя кромки преобразуются соответственно в линии  $x^* = -1$  и  $x^* = 1$ .

Подставим пределы для  $R_a$ ,  $x = \pm b$  и  $y = \pm l$  в уравнение (5-134) и выполним интегрирование различных членов следующим образом: интеграл, содержащий  $\gamma_a$ , берется по частям по переменной  $\eta$ , если заметить, что под-интегральная функция обращается в нуль вследствие равенства нулю нагрузки, а значит, и  $\gamma_a$  на обоих концах крыла; интеграл, содержащий  $\delta_a$ , берется по частям по переменной  $\xi$ , если заметить, что обращение в нуль  $\delta_a$  приводит к равенству нулю подинтегральной функции при ее нижнем пределе  $x = -b$ ; соотношение (5-122) используется для замены  $\partial\delta_a/\partial\xi$  на  $\partial\gamma_a/\partial\eta$  с тем, чтобы можно было объединить двойные интегралы, полученные после двух указанных операций; для слагаемого, относящегося к спутной струе, выполняется интегрирование по  $\xi$ , причем член, соответствующий нижнему пределу, сокращается с проинтегрированной частью интеграла, содержащего  $\delta_a$ , и, наконец,  $\delta_a(\xi_t, \eta) = \delta_a(b, \eta)$  заменяется, в силу равенства (5-133), на  $d\Gamma/d\eta$ . Описав эти этапы, приводим их в виде следующего ряда равенств:

$$\begin{aligned} \omega(x, y, 0) = U \frac{\partial z_a}{\partial x} = & -\frac{1}{4\pi} \oint_{-b}^b \oint_{-l}^l \frac{\gamma_a(\xi, \eta) [x - \xi]}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\eta d\xi - \\ & -\frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \oint_{-b}^b \frac{\delta_a(\xi, \eta) [y - \eta]}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta - \\ & -\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l \delta_a(b, \eta) [y - \eta] \left\{ \int_b^\infty \frac{d\xi}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} \right\} d\eta = \\ = & -\frac{1}{4\pi} \oint_{-b}^b \left\{ \frac{-\gamma_a(\xi, \eta) [y - \eta]}{[x - \xi] \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \Big|_{\eta=-l}^{\eta=l} \right\} d\xi - \\ & -\frac{1}{4\pi} \oint_{-b}^b \oint_{-l}^l \frac{\partial\gamma_a}{\partial\eta} \frac{[y - \eta]}{[x - \xi] \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\eta d\xi - \\ & -\frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \left\{ \frac{-\delta_a(\xi, \eta) [x - \xi]}{[y - \eta] \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \Big|_{\xi=-b}^{\xi=b} \right\} d\eta - \\ & -\frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \oint_{-b}^b \frac{\partial\delta_a}{\partial\xi} \frac{[x - \xi]}{[y - \eta] \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi d\eta - \\ & -\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l \delta_a(b, \eta) \left\{ \frac{-[x - \xi]}{[y - \eta] \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \Big|_{\xi=b}^{\xi=\infty} \right\} d\eta = \\ = & 0 - 0 - \frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \oint_{-b}^b \frac{\partial\gamma_a}{\partial\eta} \frac{[y - \eta]}{[x - \xi] \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi d\eta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{\delta_a(b, \eta) [x-b]}{[y-\eta] \sqrt{(x-b)^2 + (y-\eta)^2}} d\eta - 0 - \\
& - \frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \oint_{-b}^b \frac{\partial \gamma_a}{\partial \eta} \frac{[x-\xi]}{[y-\eta] \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\xi d\eta - \frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \delta_a(b, \eta) \times \\
& \times \left\{ -\frac{1}{y-\eta} + \frac{[x-b]}{[y-\eta] \sqrt{(x-b)^2 + (y-\eta)^2}} \right\} d\eta = \\
& = -\frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \oint_{-b}^b \frac{\partial \gamma_a}{\partial \eta} \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{(x-\xi)(y-\eta)} d\xi d\eta - \frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{(y-\eta)} \}. \quad (5-136)
\end{aligned}$$

Различные перемены порядка интегрирования и приемы вычисления предельных значений, выполненные в равенствах (5-136), оправдываются тем, что сингулярные интегралы берутся в их главных значениях Коши. Выпишем существенный окончательный результат

$$U \frac{\partial z_a}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{(y-\eta)} - \frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \oint_{-b}^b \frac{\partial \gamma_a}{\partial \eta} \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{(x-\xi)(y-\eta)} d\xi d\eta \quad (5-137a)$$

для всех значений  $(x, y)$  в области  $-b \leq x \leq b$ ,  $-l \leq y \leq l$ .

Не анализируя подробно все этапы, заметим, что вывод уравнения (5-137a) остается в силе и при такой форме крыла в плане, когда задняя кромка прямая  $x = x_t$ , а положение точек передней кромки  $x = x_l(y)$  изменяется от сечения к сечению. Единственное затруднение, которое возникает при видоизменении операций в равенствах (5-136), относится к первому интегрированию по частям, когда приходится оценивать значение  $\gamma_a(\xi, \eta)$  на передней кромке. В соответствии с предыдущим подстрочным примечанием напомним, что, как предполагается, во всех случаях интегрирования его пределы отодвигаются на небольшое расстояние за очертания крыла в плане, так что мы полагаем  $\gamma_a$  равным нулю. Результирующее уравнение имеет вид

$$U \frac{\partial z_a}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{(y-\eta)} - \frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \oint_{x_l(\eta)}^{x_t} \frac{\partial \gamma_a}{\partial \eta} \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{(x-\xi)(y-\eta)} d\xi d\eta \quad (5-137b)$$

для всех значений  $(x, y)$  в области  $x_l \leq x \leq x_t$ ,  $-l \leq y \leq l$ .

Такие уравнения, как (5-134) и (5-137), несмотря на их линейность, были решены без упрощений лишь для небольшого числа простых специальных случаев. Имеются два метода решения уравнения (5-137a), которые могут показаться очень простыми в принципе: 1) с помощью аппроксимации точных интегралов по формулам численного интегрирования, что дает ряд алгебраических уравнений для определения значений  $\gamma_a$  (или некоторой функции от  $\gamma_a$ ) в определенных точках срединной поверхности, 2) с помощью замены  $\gamma_a$  соответствующим двойным рядом Фурье, вычисления нужных определенных интегралов и удовлетворения полученному алгебраическому уравнению в стольких точках, сколько членов берется для ряда. Обе эти схемы наталкиваются на практические затруднения. При использовании первого метода приходится иметь дело с существенными особенностями подинтегральных выражений на прямых  $\eta = y$  и  $\xi = x$  (в гл. 7 мы рассмотрим удачный вариант решения аналогичной задачи для сжимаемой жидкости). Некоторые из определенных интегралов, получаемых при решении с помощью второго метода, являются столь громоздкими, что никто не пожелал тратить время на их вычисление. Тем не менее для возможности ссылок в



дальнейшем укажем, что теоретически уравнения (5-137) могут быть сведены к алгебраическим системам вида

$$\left\{ \frac{\partial z_a}{\partial x} \right\} = \frac{1}{U} [A] \{ \gamma_a \}. \quad (5-138)$$

Здесь столбцевые матрицы составлены из значений известной величины  $\partial z_a / \partial x$  и неизвестной  $\gamma_a$  в соответствующим образом выбранной совокупности точек на крыле. Квадратная аэродинамическая матрица  $[A]$  содержит известные конечные элементы и может быть обращена. Тогда будем иметь:

$$\frac{1}{U} \{ \gamma_a \} = [A]^{-1} \left\{ \frac{\partial z_a}{\partial x} \right\}. \quad (5-139)$$

Перейдем теперь к рассмотрению различных оказавшихся в прошлом полезными приемов приближенного решения линеаризированной задачи о несущем крыле. Мы рассмотрим сейчас три случая, представляющие особый интерес для специалиста по аэроупругости.

(а) *Теория несущей линии.* Классическая теория нагруженной линии Прандтля выводится из уравнения (5-137а), если заметить, что для прямоугольных крыльев большого удлинения, к которым применим этот метод, на большей части их поверхности длина  $|y - \eta|$  значительно превышает длину  $|x - \xi|$ . Кроме того, на любой симметричной прямоугольной площадке с центром в особой точке  $\xi = x$ ,  $\eta = y$  коэффициент при  $\partial \gamma_a / \partial \eta$  в последнем интеграле уравнения (5-137а) является нечетной функцией от  $(x - \xi)$  и  $(y - \eta)$ . Следовательно, такая площадка везде, за исключением тех областей в плоскости  $xu$ , где функция  $\partial \gamma_a / \partial \eta$  быстро изменяется, вносит в общее уравнение в численном отношении относительно небольшую долю. Эти два соображения хотя и не дают вполне строгого математического обоснования, но все же до некоторой степени оправдывают приближенную замену радикала  $\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$  на  $|y - \eta|$ . После этого мы можем следующим образом упростить интеграл, содержащий этот множитель:

$$\begin{aligned} \oint_{-l}^l \oint_{-b}^b \frac{\partial \gamma_a}{\partial \eta} \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}{(x - \xi)(y - \eta)} d\xi d\eta &\cong \oint_{-b}^b \frac{1}{(x - \xi)} \oint_{-l}^l \frac{\partial \gamma_a}{\partial \eta} \frac{|y - \eta|}{(y - \eta)} d\eta d\xi = \\ &= \oint_{-b}^b \frac{1}{(x - \xi)} \left\{ \int_{-l}^y \frac{\partial \gamma_a}{\partial \eta} d\eta - \int_y^l \frac{\partial \gamma_a}{\partial \eta} d\eta \right\} d\xi = 2 \oint_{-b}^b \frac{\gamma_a(\xi, y)}{x - \xi} d\xi. \end{aligned} \quad (5-140)$$

Последние два этапа преобразования справедливы, так как  $|y - \eta| / (y - \eta)$  точно равно  $+1$  для  $\eta < y$  и  $-1$  для  $\eta > y$ , а при пределах, соответствующих концам крыла,  $\eta = \pm l$ ,  $\gamma_a$  обращается в нуль. Подставив выражение (5-140) в уравнение (5-137а), получим соотношение, содержащее лишь одинарные интегралы, последний из которых напоминает интегралы в теории тонкого профиля [ср. равенство (5-95)]:

$$U \frac{\partial z_a}{\partial x} = - \frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{(y - \eta)} - \frac{1}{2\pi} \oint_{-b}^b \frac{\gamma_a(\xi, y)}{x - \xi} d\xi. \quad (5-141)$$

Последняя операция, приводящая к уравнению Прандтля, вызвана желанием получить возможность найти распределение *вдоль размаха* нагрузки на крыло большого удлинения. Мы достигаем этого путем исключения  $x$  из уравнения (5-141) с помощью интегрирования вдоль хорды крыла. При этом мы умножаем все члены на весовое число  $\sqrt{(b + x)/(b - x)}$  (так как интегральная формула Мунка [5-108]



подсказывает нам, что это окажет весьма полезное влияние на член, содержащий  $\gamma_a$ ):

$$\begin{aligned} \oint_{-b}^b \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} \oint_{-b}^b \frac{\gamma_a(\xi, y)}{x-\xi} d\xi dx &= \oint_{-b}^b \gamma_a(\xi, y) \left\{ \oint_{-b}^b \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} \frac{dx}{(x-\xi)} \right\} d\xi = \\ &= \oint_{-b}^b \gamma_a(\xi, y) \left\{ \oint_0^\pi \frac{(1+\cos\theta) d\theta}{(\cos\theta-\xi)} \right\} d\xi = \pi \oint_{-b}^b \gamma_a(\xi, y) d\xi = \pi\Gamma(y). \end{aligned} \quad (5-142)$$

Как и в п. 5-4, внутренний интеграл упрощался здесь с помощью замены переменного  $x/b = x^* = \cos\theta$ , причем использовалось уравнение (5-100) при  $r=1$ . Интеграл с весом по  $x$ , получающийся в первом члене правой части уравнения (5-141), равен  $\pi b$ , так что в результате всего процесса интегрирования получим

$$U \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} \frac{\partial z_a(x, y)}{\partial x} dx = -\frac{\Gamma}{2} - \frac{b}{4} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{(y-\eta)}. \quad (5-143)$$

Теория тонкого профиля позволяет нам рассматривать левую часть равенства (5-143) как выражение, пропорциональное углу атаки при данном значении  $y$ , отсчитанному от такого положения поперечного сечения, при котором подъемная сила равна нулю. Таким образом, комбинируя уравнения (5-108) и (5-113), имеем

$$U \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} \frac{\partial z_a(x, y)}{\partial x} dx = Ub \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} \frac{\partial z_a(x^*, y)}{\partial x} dx^* = -\frac{L_2}{2\rho U} = -\pi Ub\alpha, \quad (5-144)$$

где промежуточное обозначение  $L_2$  введено для подъемной силы двумерного профиля, отнесенной к единице размаха. Подставив выражение (5-144) в равенство (5-143) и умножив все члены на 2, получим

$$\Gamma(y) = 2\pi Ub \left[ \alpha(y) - \frac{1}{4\pi U} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{(y-\eta)} \right]. \quad (5-145)$$

Уравнение (5-145) представляет собой формулу для несущей линии для случая прямоугольного крыла, во всех сечениях которого наклоны кривой подъемной силы равны  $2\pi$ . Как хорошо известно авиационным инженерам, формула для общего случая была получена первоначально путем замены действительного вихревого слоя концентрированным одиночным присоединенным вихрем интенсивности  $\Gamma(y)$ , от которого отходит спутная струя, состоящая из концевых вихрей с интенсивностью  $d\Gamma/dy$  на единицу длины в направлении размаха. Текущее значение подъемной силы  $\rho U\Gamma$  в каждом сечении приравнивалось подъемной силе  $a_0 \frac{1}{2} \rho U^2 c \alpha_{эфф.}$  двумерного профиля, имеющего хорду  $c$  и наклон кривой подъемной силы  $a_0$  и обтекаемого при эффективном угле атаки.

Эффективный угол атаки  $\alpha_{эфф.}$  определялся при этом по вызванной наличием профиля картине течения и вычислялся путем вычитания из геометрического угла  $\alpha$  (отсчитанного от положения, при котором подъемная сила равна нулю) добавки от так называемого скоса потока. Этот скос потока, предполагаемый постоянным вдоль хорды каждого профиля, равен скорости на линии присоединенного вихря, направленной вниз и обусловленной всем вихревым слоем. После этого простое применение закона Био и Савара дает

$$\alpha_{эфф.} \cong \alpha - \frac{\text{Скос потока}}{U} = \alpha - \frac{1}{4\pi U} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{(y-\eta)}. \quad (5-146)$$

Приравнивание двух выражений для текущего значения подъемной силы после подстановки величины (5-146) и деления на  $\rho U$  приводит к уравнению

$$\Gamma(y) = a_0 U \frac{c}{2} \left[ \alpha(y) - \frac{1}{4\pi U} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{(y-\eta)} \right]. \quad (5-147)$$

Так как  $c/2 = b$ , то очевидно, что это не противоречит уравнению (5-145), хотя здесь и  $c$  и  $a_0$  могут быть функциями от координаты  $y$ <sup>1)</sup>, отсчитываемой вдоль размаха.

Обычно пользуются одним из двух методов решения уравнения (5-147). Наиболее известен метод подстановки ряда Фурье, предложенный Глауэртом; этот метод естественным путем приводит к общеизвестным понятиям об эллиптической нагрузке и минимальном индуктивном сопротивлении. Удобные угловые переменные, напоминающие  $\theta$ , которая была введена в уравнение (5-99), определяются соотношениями

$$\eta = l \cos \theta, \quad y = l \cos \varphi. \quad (5-148)$$

При такой замене концам крыла соответствуют  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Так как известно что  $\Gamma$  на концах крыла обращается в нуль, то для нее принимается выражение в форме синусоидального ряда Фурье

$$\Gamma(y) = \Gamma(\varphi) = Ul \sum_{r=1}^{\infty} \bar{A}_r \sin r\varphi. \quad (5-149)$$

При подстановке ряда (5-149) в правую часть равенства (5-146) используется общая интегральная формула (5-100)

$$\begin{aligned} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{(y-\eta)} &= -\frac{1}{l} \oint_0^\pi \frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{d\theta}{(\cos \varphi - \cos \theta)} = U \oint_0^\pi \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \bar{A}_r \cos r\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta = \\ &= U \sum_{r=1}^{\infty} r \bar{A}_r \int_0^\pi \frac{\cos r\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} = \pi U \sum_{r=1}^{\infty} r \bar{A}_r \frac{\sin r\varphi}{\sin \varphi}. \end{aligned} \quad (5-150)$$

Подставив величины (5-149) и (5-150) в уравнение (5-147), разделив обе части на  $Ul$  и переставив слагаемые, получим алгебраическое равенство

$$\frac{a_0 c}{2l} \alpha = \sum_{r=1}^{\infty} \bar{A}_r \left[ \sin r\varphi + \frac{a_0 c}{8l} \frac{\sin r\varphi}{\sin \varphi} \right]. \quad (5-151)$$

Синус с нечетным множителем перед  $\varphi$  вносит долю в симметричное по отношению к середине размаха распределение подъемной силы, тогда как четные множители дают антисимметричные значения. Следовательно,  $\alpha$  можно расчленить на части  $\alpha^s$  и  $\alpha^a$ , первая из которых определяется суммой нечетных членов правой части равенства (5-151), а последняя — суммой четных членов. Принято полученные таким образом два уравнения решать отдельно для постоянных  $\bar{A}_r^s$  и  $\bar{A}_r^a$ , требуя, чтобы эти уравнения тождественно удовлетворялись

<sup>1)</sup> Для обозначения хорды крыла во всей данной книге попеременно используются символы  $c$  и  $2b$ . Вообще говоря, мы пользуемся символом  $2b$  при разборе основ аэродинамической теории, а символом  $c$  при разборе приложений к проблемам аэроупругости для реального самолета.

в нескольких сечениях вдоль полуразмаха крыла; число этих сечений равно числу постоянных, необходимых для удовлетворительной сходимости ряда (5-149). При решении большинства задач аэроупругости для удобства принимается, что указанные сечения являются именно теми, свойства которых с точки зрения конструктивной жесткости известны, так что можно непосредственно комбинировать уравнения аэродинамики и уравнения теории упругости. Однако в этом нет особой необходимости.

В матричных обозначениях симметричная часть уравнения (5-151) для такой последовательности сечений имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2l} \left[ \begin{array}{c} \overline{a_0 c} \\ \overline{\phantom{a_0 c}} \end{array} \right] \{\alpha^s\} = [\sin r\varphi] \{\bar{A}_r^s\} + \frac{l}{8l} \left[ \begin{array}{c} \overline{a_0 c} \\ \overline{\phantom{a_0 c}} \end{array} \right] [r \sin r\varphi] \{\bar{A}_r^s\}. \quad (5-152)$$

В каждой из этих точек (или в любой другой интересующей нас точке) местная подъемная сила для сечения равна

$$\rho U \Gamma = \frac{1}{2} \rho U^2 c c_l. \quad (5-153)$$

Поэтому равенство (5-149) приводится к виду

$$c(y) c_l(y) = 2l \sum_{r=1} \bar{A}_r \sin r\varphi, \quad (5-154)$$

или в матричной форме, для симметричного случая:

$$\{c c_l^s\} = 2l [\sin r\varphi] \{\bar{A}_r^s\}. \quad (5-155)$$

Аэродинамическая матрица, связывающая коэффициент подъемной силы и угол атаки, определяется путем исключения  $\bar{A}_r^s$  из уравнений (5-152) и (5-155):

$$\frac{1}{2l} \left[ \begin{array}{c} \overline{a_0 c} \\ \overline{\phantom{a_0 c}} \end{array} \right] \{\alpha^s\} = \frac{1}{2l} ([\sin r\varphi] + \frac{1}{8l} \left[ \begin{array}{c} \overline{a_0 c} \\ \overline{\phantom{a_0 c}} \end{array} \right] [r \sin r\varphi]) [\sin r\varphi]^{-1} \{c c_l^s\}. \quad (5-156)$$

После сокращений и умножения на  $\left[ \begin{array}{c} \overline{1} \\ \overline{a_0 c} \end{array} \right]$  получим

$$\{\alpha^s\} = \left( \left[ \begin{array}{c} \overline{1} \\ \overline{a_0 c} \end{array} \right] + \frac{1}{8l} \left[ \begin{array}{c} \overline{1} \\ \overline{\phantom{a_0 c}} \end{array} \right] [r \sin r\varphi] [\sin r\varphi]^{-1} \right) \{c c_l^s\} = [A^s] \{c c_l^s\}. \quad (5-157)$$

Матрицу  $[A^s]$  можно рассматривать как соотношение, полностью аналогичное более точным соотношениям между местным наклоном и нагрузкой крыла, пример которых дает уравнение (5-138). Эта аналогия нарушается лишь тем, что здесь крыло (более простого типа) не претерпевает деформации в направлении хорды и подходит скорее к одномерной, чем к двумерной модели. Подобные систематизированные представления решений аэродинамических задач для установившихся течений были, по-видимому, впервые предложены Сирсом и Баем [5-20]. Матрица  $[A^a]$  по форме аналогична матрице  $[A^s]$  во всем, за исключением того, что в ней фигурируют четные, а не нечетные значения  $r$ , и нет нужды включать члены, относящиеся к середине размаха, где  $\alpha^a = c_l^a = 0$ . Очевидно также, что в тех случаях, когда величина размаха крыла  $2l$  такова, что второй член в круглых скобках уравнения (5-157) становится пренебрежимо малым, то указанное уравнение приводит к аэродинамической теории несущей полосы (влияние конечности размаха здесь не принимается во внимание).

Если разделить полуразмах крыла на  $n$  интервалов, то синусоидальные матрицы в уравнении (5-157) выразятся следующим образом:

$$\left[ \frac{1}{\sin \varphi} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sin \varphi_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin \varphi_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sin \varphi_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sin \varphi_n} \end{bmatrix}, \quad (5-158)$$

$$[r \sin r\varphi] = \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 & 3 \sin 3\varphi_1 & 5 \sin 5\varphi_1 & \dots & (2n-1) \sin (2n-1)\varphi_1 \\ \sin \varphi_2 & 3 \sin 3\varphi_2 & 5 \sin 5\varphi_2 & \dots & (2n-1) \sin (2n-1)\varphi_2 \\ \sin \varphi_3 & 3 \sin 3\varphi_3 & 5 \sin 5\varphi_3 & \dots & (2n-1) \sin (2n-1)\varphi_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \varphi_n & 3 \sin 3\varphi_n & 5 \sin 5\varphi_n & \dots & (2n-1) \sin (2n-1)\varphi_n \end{bmatrix}. \quad (5-159)$$

Мы получим две интересные формулы, если рассмотрим полную подъемную силу крыла, связанную с подстановкой Глауэрта (5-149). Подъемная сила вычисляется с помощью следующего интегрирования нагрузки на единицу размаха

$$L = \int_{-l}^l \rho U \Gamma dy = \rho U l \int_0^\pi \Gamma(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \rho U^2 l^2 \sum_{r=1}^{\infty} \bar{A}_r \int_0^\pi \sin r\varphi \sin \varphi d\varphi = \\ = \pi \frac{\rho}{2} U^2 l^2 \bar{A}_1. \quad (5-160)$$

Все члены, кроме первого, исчезают вследствие свойства ортогональности синусов с различными целочисленными множителями перед  $\varphi$  в интервале между 0 и  $\pi$ . Если обозначить через  $S$  площадь крыла и через  $\lambda$  — удлинение,

$$\lambda = \frac{(2l)^2}{S}, \quad (5-161)$$

то коэффициент полной подъемной силы будет равен

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 S} = \frac{\pi \lambda \bar{A}_1}{4}. \quad (5-162)$$

В связи с тем, что подъемная сила зависит лишь от первого члена ряда Фурье, тогда как в выражение для индуктивного сопротивления („сопротивление, обусловленное подъемной силой“, см., например, гл. 9 книги [5-1]) входят все его члены, проектировщики давно признали желательными крылья с эллиптическим распределением нагрузки

$$\Gamma = U l \bar{A}_1 \sin \varphi \quad (5-163)$$

(при построении графика  $\sin \varphi$  в зависимости от  $y$  получается кривая в форме верхней половины эллипса). Уравнение (5-151) показывает, что крыло с эллиптической нагрузкой, не имеющее аэродинамической закрутки ( $\alpha = \text{const}$ ), должно

иметь эллиптическую форму в плане. Когда длина хорды корневого сечения крыла равна  $c_0$ , уравнение (5-151) дает

$$\bar{A}_1 = \frac{a_0 c_0 \alpha}{2l [1 + (a_0 c_0 / 8l)]} = a_0 \alpha \frac{1}{(2l/c_0) + \frac{1}{4} a_0}. \quad (5-164)$$

Так как удлинение этого крыла равно

$$\lambda = \frac{(2l)^2}{\frac{\pi}{2} l c_0} = \frac{8}{\pi} \frac{l}{c_0}, \quad (5-165)$$

то из формулы (5-162) можно получить выражение для наклона кривой подъемной силы или дополнительной нагрузки

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = a_0 \frac{\lambda}{\lambda + (a_0/\pi)} \cong a_0 \frac{\lambda}{\lambda + 2}, \quad (5-166)$$

где во втором слагаемом знаменателя величине  $a_0$  приписано ее приближенное значение  $2\pi$ . Известно, что равенство (5-166) обеспечивает весьма точную оценку даже для таких крыльев, дополнительная нагрузка которых лишь грубо приближается к эллиптической, как например для крыльев, имеющих умеренно сужающуюся форму в плане с минимальным удлинением, равным 3.

При разработке одномерных методов, таких, как теория несущей линии, из поля зрения исследователя в той или иной степени выпадает задача о вычислении распределения вдоль размаха момента тангажа  $M_y$ . Необходимо опять обратиться к теории профиля, которая утверждает, что момент в любом сечении определяется подъемной силой, приложенной вдоль прямой, отстоящей на четверть хорды от передней кромки крыла, плюс постоянное приращение ( $c_{mAC}$ ), не зависящее от угла атаки. Поэтому присоединенный вихрь мы помещаем на линии четвертей хорды, считая ее прямой. Предполагается, что подъемная сила, связанная с дополнительной нагрузкой, обусловленной постоянным приращением  $\alpha$  без учета кривизны профиля, действует непосредственно на этой вихревой линии. Подъемную силу, связанную с основной нагрузкой (за счет закрутки и кривизны), мы считаем приложенной на той же линии, добавляя при этом постоянный момент, равный в каждом сечении моменту относительно аэродинамического центра действительной дужки, вычисленному по теории тонкого профиля.

Второй метод решения уравнения (5-147) связан с так называемой механической квадратурой Гаусса и был впервые предложен Мультхоппом [5-21]. При этом используется та же угловая переменная  $\varphi$ , что и для подстановки Глауэрта [уравнение (5-148b)], а на крыле отмечается нечетное число  $m$  точек, соответствующих отличающимся друг от друга на одну и ту же величину значениям  $\varphi$ ,

$$\varphi_n = \frac{n\pi}{m+1}; \quad n = 1, 2, \dots, m. \quad (5-167)$$

Так как координата  $y$  пропорциональна  $\cos \varphi$ , то эти точки сгущаются при приближении к концам действительного крыла, но считается, что это дает преимущество вследствие более быстрых изменений подъемной силы, происходящих в этих областях. Механическая квадратура или формула численного интегрирования констатирует просто, что взятый вдоль размаха интеграл любой функции  $f(y)$ , обращаемой в нуль на концах крыла (такой, как подъемная сила), может вычисляться следующим образом:

$$\int_{-l}^l f(y) dy = l \int_0^\pi f(\varphi) \sin \varphi d\varphi \cong \frac{\pi l}{m+1} \sum_{n=1}^m f(\varphi_n) \sin \varphi_n. \quad (5-168)$$

Это равенство оказывается точным в тех случаях, когда  $f(\varphi)$  выражается синусоидальным рядом Фурье, содержащим члены вплоть до  $\sin 2m\varphi$  или меньшее их число. Мультхопп использует квадратуру как остроумное средство выражения коэффициентов в разложении Глауэрта для безразмерной циркуляции

$$G(\varphi) = \frac{\Gamma(\varphi)}{2lU} = \sum_{\mu=1}^m 2\bar{A}_\mu \sin \mu\varphi. \quad (5-169)$$

Он отмечает, что если любой из коэффициентов  $2\bar{A}_\mu$  выражается по обычной формуле для  $\mu$ -го члена синусоидального ряда Фурье и если окончательный интеграл вычисляется по формуле (5-168), то

$$\begin{aligned} 2\bar{A}_\mu &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi G(\varphi) \sin \mu\varphi \, d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{G(\varphi) \sin \mu\varphi}{\sin \varphi} \right] \sin \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{2}{m+1} \sum_{n=1}^m \frac{G(\varphi_n) \sin \mu\varphi_n}{\sin \varphi_n} \sin \varphi_n. \end{aligned} \quad (5-170)$$

Если подставить выражение (5-170) в равенства (5-169), то получится формула, выражающая циркуляцию  $G$  через ее значения  $G_n$  в интересующих нас точках:

$$G(\varphi) = \frac{2}{m+1} \sum_{n=1}^m G_n \sum_{\mu=1}^m \sin \mu\varphi_n \sin \mu\varphi. \quad (5-171)$$

Для использования равенства (5-171) в правой части уравнения (5-147) нужно произвести вычисление интеграла в (5-147) при конкретном значении  $n = \nu$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi U} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{(y_\nu - \eta)} &= -\frac{1}{2\pi} \oint_0^\pi \frac{dG}{d\theta} \frac{d\theta}{(\cos \varphi_\nu - \cos \theta)} = \\ &= \frac{1}{\pi(m+1)} \sum_{n=1}^m G_n \sum_{\mu=1}^m \mu \sin \mu\varphi_n \oint_0^\pi \frac{\cos \mu\theta \, d\theta}{(\cos \theta - \cos \varphi_\nu)} = \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{n=1}^m G_n \sum_{\mu=1}^m \frac{\mu \sin \mu\varphi_n \sin \mu\varphi_\nu}{\sin \varphi_\nu} = b_{\nu\nu} G_\nu - \sum_{n=1}^m{}' b_{\nu n} G_n. \end{aligned} \quad (5-172)$$

Здесь штрих при символе суммирования означает, что член с индексом  $n = \nu$  исключается. В уравнении (5-172) использована известная формула интегрирования (5-100). Кроме того,  $b_{\nu\nu}$  и  $b_{\nu n}$  обозначают суммы по индексу  $\mu$ , являющиеся коэффициентами при  $G_n$ ; они могут быть выражены в явном виде при помощи простых операций с привлечением комплексной переменной и суммы геометрического ряда (ср. [5-22], стр. 16):

$$b_{\nu\nu} = \frac{1}{m+1} \sum_{\mu=1}^m \frac{\mu \sin^2 \mu\varphi_\nu}{\sin \varphi_\nu} = \frac{m+1}{4 \sin \varphi_\nu}, \quad (5-173a)$$

$$b_{\nu n} = -\frac{1}{m+1} \sum_{\mu=1}^m \frac{\mu \sin \mu\varphi_n \sin \mu\varphi_\nu}{\sin \varphi_\nu} = \frac{\sin \varphi_n}{(\cos \varphi_n - \cos \varphi_\nu)^2} \left[ \frac{1 - (-1)^{n-\nu}}{2(m+1)} \right]. \quad (5-173b)$$

Если мы подставим выражение (5-172) в правую часть (5-147) и всем членам уравнения припишем их значения в точке  $y = y_\nu$  (обозначенные индексом

сом  $\nu$ ), то п лучим

$$\frac{\Gamma_\nu}{2Ul} = G_\nu = \frac{a_\nu c_\nu}{4l} \left[ \alpha_\nu - b_{\nu\nu} G_\nu + \sum_{n=1}^m b_{\nu n} G_n \right]. \quad (5-174)$$

Это уравнение обычно приводится к виду

$$b_\nu G_\nu = \alpha_\nu + \sum_{n=1}^m b_{\nu n} G_n, \quad (5-175a)$$

где

$$b_\nu = b_{\nu\nu} + \frac{4l}{a_{0\nu} c_\nu}. \quad (5-175b)$$

Система уравнений (5-175a) для  $m$  значений  $y$ , может быть разрешена относительно значений  $G$  в этих точках:

$$G = \frac{\Gamma}{2lU} = \frac{cc_l}{4l}. \quad (5-176)$$

Мультхопп указал, однако, что обращение в нуль  $b_{\nu n}$  в тех случаях, когда  $(n - \nu)$  является четным целым числом, дает возможность, зная нечетные значения  $G$ , вычислить четные, или наоборот, с помощью равенства (5-175a). Он предложил использовать итерации, посредством которых последовательно вычисляются совокупности четных и нечетных значений до тех пор, пока этот процесс не сойдется; при этом нет необходимости в совместном решении уравнений.

В тех случаях, когда крыло симметрично ( $G_n = G_{(m+1-n)}$ ) или антисимметрично ( $G_n = -G_{(m+1-n)}$ ), уравнения (5-175a) можно очевидным путем свести соответственно к системе из  $(m+1)/2$  и  $(m-1)/2$  уравнений. Подробности этих преобразований достаточно полно освещены в работе [5-21], где даются также таблицы „аэродинамических коэффициентов влияния“  $b_{\nu\nu}$  и  $b_{\nu n}$  для применяющихся обычно значений  $m = 3, 7$  и  $15$ . В заключение этого пункта укажем, что, как видно из формулы (5-176), уравнение (5-175a) может быть выражено в матричной форме, совершенно аналогичной уравнению (5-157):

$$\{\alpha\} = [A] \cdot \{cc_l\}. \quad (5-177)$$

(b) *Метод L-функции Вейссингера.* Интегральное уравнение, предложенное Вейссингером в работе [5-23], было принято повсюду в качестве стандартного средства для расчета распределения нагрузки вдоль размаха в случае таких крыльев, к которым неприменима теория несущей линии, в частности, крыльев с прямой или обратной стреловидностью приблизительно от  $15^\circ$  и больше. Для прямоугольной формы в плане мы можем вывести формулу Вейссингера из нашего точного уравнения (5-127a) с помощью замены величины  $(x - \xi)^2$  под знак м радикала в последнем интеграле на ее грубо осредненное значение  $b^2$ . Эта аппроксимация оправдывается тем, что значения  $|x - \xi|$  всегда лежат между 0 и длиной хорды  $2b$ , причем попадают в интервал от 0 до  $b$  для большинства моментов времени и большинства точек  $(x, y)$ . Однако эта замена не имеет более строгого математического обоснования, чем отбрасывание величины  $(x - \xi)^2$ , лежащее в основе теории несущей линии. С помощью этой замены мы получаем

$$U \frac{\partial z_a}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{(y - \eta)} - \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l \int_{-b}^b \frac{\partial \gamma_a}{\partial \eta} \frac{\sqrt{b^2 + (y - \eta)^2}}{(x - \xi)(y - \eta)} d\xi d\eta. \quad (5-178)$$

Уравнение, не содержащее  $x$ , с циркуляцией  $\Gamma(y)$  в качестве главной неизвестной, строится так же, как и в предыдущем пункте, с помощью интегрирования обеих частей равенства (5-178) по длине хорды с весовым числом  $\sqrt{(b+x)(b-x)}$ . Влияние, оказываемое этой операцией на первые два



часть, так же, как и прежде (см. уравнение (5-144)). Последний член правой части имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b-x}{b-x}} \int_{-l}^l \int_{-l}^b \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \sqrt{\frac{b-x}{x-\xi}} \frac{d\xi d\tau dx}{(y-\tau)} = \\ & = \int_{-l}^l \sqrt{\frac{b+y-\tau}{y-\tau}} \int_{-l}^b \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \left\{ \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b-x}{b-x}} \frac{dx}{(x-\xi)} \right\} d\xi d\tau = \\ & = \pi \int_{-l}^l \sqrt{\frac{b+y-\tau}{y-\tau}} \frac{d}{d\tau} \left[ \int_{-b}^b \gamma_a(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau = \pi \int_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{\sqrt{b^2 + (y-\eta)^2}}{(y-\eta)} d\eta. \quad (5-179) \end{aligned}$$

Соответственно, интегрирование с помощью весовых чисел всех членов равенства 5-178 приводит к соотношению

$$\pi U b \alpha = \frac{b}{4} \int_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{(y-\eta)} + \frac{1}{4} \int_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{\sqrt{b^2 + (y-\eta)^2}}{(y-\eta)} d\eta. \quad (5-180)$$

Введем безразмерные величины

$$G = \frac{\Gamma}{2lU}, \quad (5-169)$$

$$y^* = \frac{y}{l}, \quad \tau^* = \frac{\eta}{l} \quad (5-181)$$

и разделим все члены равенства (5-180) на коэффициент  $\pi U b$ , стоящий в левой его части. В полученном после этого равенстве мы избавляемся от особенности в подынтегральной функции второго интеграла, стоящего в правой части, путем прибавления и вычитания члена  $1/(y^* - \tau^*)$ . Прибавляемая часть объединяется с первым интегралом, так что в конце концов получим

$$\alpha(y^*) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dG}{d\tau^*} \frac{d\tau^*}{(y^* - \tau^*)} - \frac{1}{2\pi b} \int_{-1}^1 \frac{dG}{d\tau^*} \frac{\sqrt{1 - (lb)^2 (y^* - \tau^*)^2} - 1}{(lb)(y^* - \tau^*)} d\tau^*. \quad (5-182)$$

Второй интеграл в правой части был умножен и разделен на удлинение  $lb = 2lc$ , чтобы показать, что коэффициент при  $dG/d\tau^*$ , известный под названием  $L$ -функции Вейссингера,

$$L(y^*, \tau^*) = \frac{\sqrt{1 - (lb)^2 (y^* - \tau^*)^2} - 1}{(lb)(y^* - \tau^*)}, \quad (5-183)$$

зависит лишь от единственной комбинации переменных  $(lb)(y^* - \tau^*)$ .

Равенство (5-182) представляет собой специальный вариант формулы Вейссингера для прямоугольного крыла. Первоначальный вывод этой формулы ее автором основывался примерно на таком же представлении вихревого слоя, как в теории несущей линии, но он справедлив для любой формы в плане, линия четвертей хорд которой в каждой половине размаха является прямой. Проиллюстрируем применение метода Вейссингера, рассматривая для простоты крыло с прямыми кромками (фиг. 5-11) и предполагая линию четвертей хорд расположенной перпендикулярно к направлению полета. Вихревой слой здесь совершенно аналогичен тому, который рассматривался в теории несущей линии, и состоит из сосредоточенного присоединенного вихря с интенсивностью  $\Gamma(y)$  и конце ого слоя с циркуляцией  $d\Gamma dy$  на единицу длины в направлении размаха крыла. Однако в данной теории мы удовлетворяем граничным условиям, требуя, чтобы наклон линий тока  $\psi/U$  на расстоянии трех четвертей хорды от

передней кромки для каждого сечения определялся по углу атаки  $\alpha$ , измеренному от положения, в котором местное значение подъемной силы равно нулю. Введение столь специальной схемы для учета влияния угла  $\alpha$  объясняется ее точностью в случае двумерного профиля, наклон кривой подъемной силы для которого равен  $2\pi$ . Для такого профиля подъемная сила на единицу длины размаха выражается по формуле

$$L_2 = 2\pi \frac{1}{2} \rho U^2 c \alpha. \quad (5-184)$$

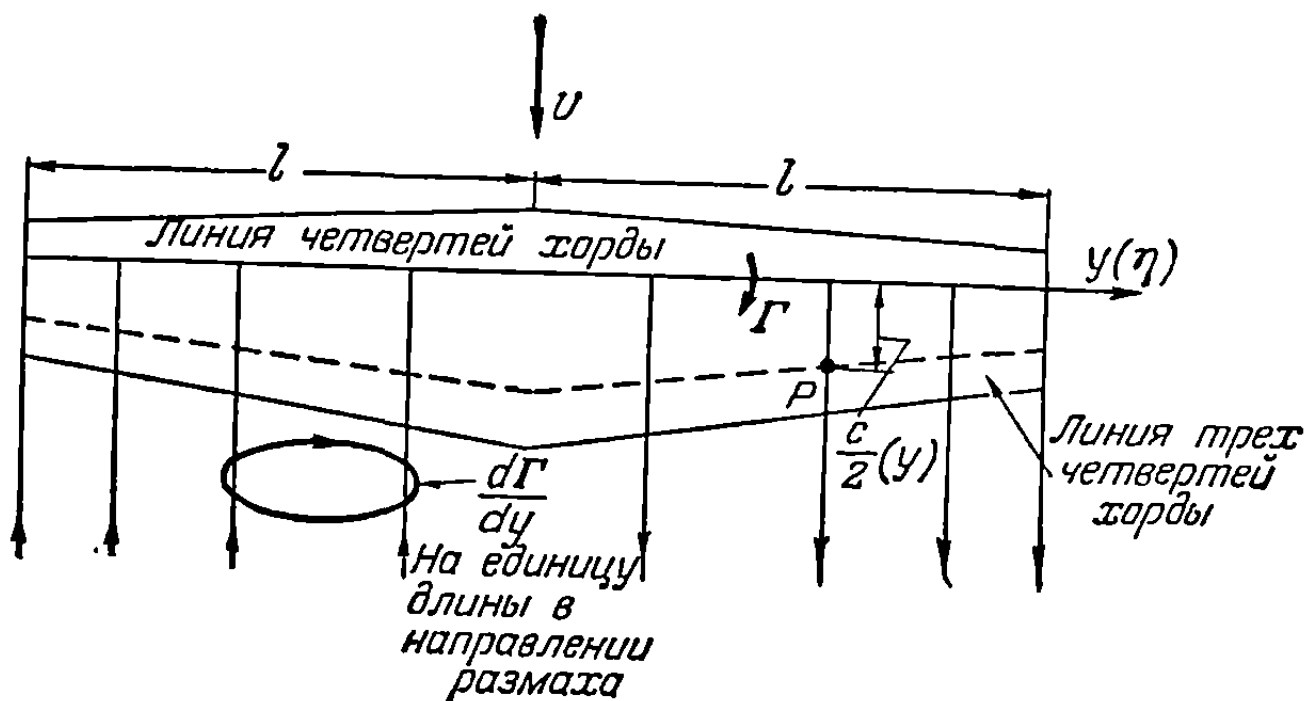
Но если вместо  $\alpha$  в формулу (5-184) подставить величину

$$-\frac{w}{U} = \frac{1}{U} \frac{\Gamma_2}{2\pi \frac{1}{2} c}, \quad (5-185)$$

т. е. наклон линий тока на расстоянии  $c/2$  вниз по потоку от сосредоточенного вихря интенсивности  $\Gamma_2$ , то получим

$$L_2 = \frac{\pi \rho U^2 c \Gamma_2}{\pi U c} = \rho U \Gamma_2. \quad (5-186)$$

Это — точное выражение связи между подъемной силой и циркуляцией для двумерного течения.



Фиг. 5-11. Предложенное Вейссингером представление крыла в виде присоединенного вихря, проходящего вдоль линии четвертей хорды, при удовлетворении граничных условий на линии трех четвертей хорды.

Для вычисления общего значения  $w/U$  в характерной точке  $p$ , расположенной на линии трех четвертей хорды, на расстоянии  $y$  от середины размаха (фиг. 5-11), воспользуемся законом Био и Савара [уравнение (5-62b)]. Элемент  $\Gamma d\eta$  присоединенного вихря, расположенный на расстоянии  $\eta$  от середины размаха, создает вертикальную скорость, равную

$$d\omega = -\frac{r}{4\pi R^3} \Gamma d\eta = \frac{-\left(\frac{1}{2}c\right) \Gamma d\eta}{4\pi \left[\left(\frac{1}{2}c\right)^2 + (y - \eta)^2\right]^{3/2}}. \quad (5-187)$$

Интегрируя уравнение (5-62б), находим, что свободный вихрь для сечения на том же расстоянии  $\eta$ , циркуляция которого по всей его длине равна  $(d\Gamma/d\eta) d\eta$ , индуцирует скорость

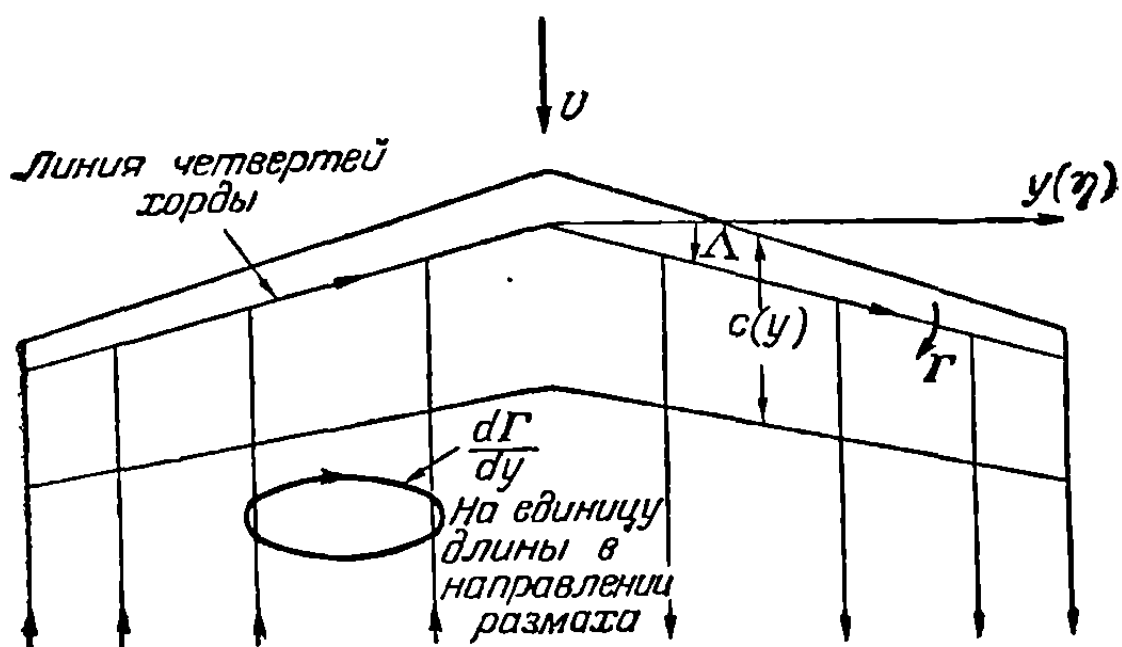
$$d\omega = \frac{-(d\Gamma/d\eta) d\eta}{4\pi (y - \eta)} \left[ \frac{\frac{1}{2}c}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}c\right)^2 + (y - \eta)^2}} + 1 \right]. \quad (5-188)$$

Проинтегрировав равенства (5-187) и (5-188) в пределах от одного конца крыла до другого, найдем общую скорость, создаваемую вихревым слоем.

После этого оказывается, что первый интеграл путем интегрирования по частям по переменной  $\eta$  и с учетом обращения  $\Gamma$  в нуль на концах крыла можно для удобства объединить со вторым:

$$\begin{aligned}
 -w &= \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l \left( \frac{1}{2} c \right) \Gamma d\eta \left[ \left( \frac{1}{2} c \right)^2 + (y - \eta)^2 \right]^{-1/2} + \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{1}{(y - \eta)} \left[ \frac{\frac{1}{2} c}{\sqrt{\left( \frac{1}{2} c \right)^2 + (y - \eta)^2}} + 1 \right] d\eta = -\frac{1}{4\pi} \frac{(y - \eta) \Gamma(\eta)}{\left( \frac{1}{2} c \right) \sqrt{\left( \frac{1}{2} c \right)^2 + (y - \eta)^2}} \Bigg|_{\eta = -l}^{\eta = l} + \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \left\{ \frac{(y - \eta)}{\frac{1}{2} c \sqrt{\left( \frac{1}{2} c \right)^2 + (y - \eta)^2}} + \frac{\frac{1}{2} c}{(y - \eta) \sqrt{\left( \frac{1}{2} c \right)^2 + (y - \eta)^2}} + \frac{1}{(y - \eta)} \right\} d\eta = \\
 &= 0 + \frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{(y - \eta)} + \frac{1}{2\pi c} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{\sqrt{\left( \frac{1}{2} c \right)^2 + (y - \eta)^2}}{(y - \eta)} d\eta. \quad (5-189)
 \end{aligned}$$

Так как в соответствии с граничным условием  $-w = U\alpha$ , то уравнение (5-189) аналогично уравнению (5-180), с тем существенным отличием, что здесь форма в плане является произвольной, а  $c$  определяет значение длины хорды в сечении  $y$ . Воспользовавшись уравнениями (5-169) и (5-181), приведем уравнение (5-189) к следующему виду:



Фиг. 5-12. Вихревой слой Вейссингера для крыла, линия четвертой хорды которого имеет стреловидность назад, характеризуемую углом  $\Lambda$ .

$$\begin{aligned}
 \alpha(y^*) &= \frac{1}{\pi} \oint_{-1}^1 \frac{dG}{d\eta^*} \frac{d\eta^*}{(y^* - \eta^*)} + \\
 &+ \frac{l}{\pi c(y^*)} \int_{-1}^1 \frac{dG}{d\eta^*} L(y^*, \eta^*) d\eta^*, \quad (5-190)
 \end{aligned}$$

где  $L(y^*, \eta^*)$  представляет собой выражение, определяемое равенством (5-183), с той разницей, однако, что здесь величина  $2b = c$  является функцией  $y^*$ .

Когда крыло имеет стреловидность, Вейссингер по-прежнему заканчивает свободные вихри у сосредоточенного вихря, расположенного вдоль линии четвертой хорды, и удовлетворяет граничным условиям на линии трех четвертей хорды, но теперь присоединенный вихрь по обе стороны от середины размаха наклонен под углом стреловидности  $\Lambda$  к прямой, перпендикулярной к направлению полета (фиг. 5-12). Такие величины, как  $\alpha$  и  $c$ , измеряются по-прежнему в поперечных сечениях, параллельных плоскости симметрии самолета, а направление оси  $y$  перпендикулярно к этой плоскости. Из закона Био и Савара (см., например, [5-22]) получаем для введенной в уравнение (5-190) функции  $L(y^*, \eta^*)$  стреловидного крыла следующее выражение (при  $y^* \geq 0$ ):

$$\begin{aligned}
 L(y^*, \eta^*) &= \frac{\sqrt{[1 + (2l/c)(y^* + \eta^*) \operatorname{tg} \Lambda]^2 + (2l/c)^2 (y^* - \eta^*)^2}}{(2l/c)(y^* - \eta^*) [1 + 2(2l/c)y^* \operatorname{tg} \Lambda]} - \frac{1}{(2l/c)(y^* - \eta^*)} + \\
 &+ \frac{2 \operatorname{tg} \Lambda \sqrt{[1 + (2l/c)y^* \operatorname{tg} \Lambda]^2 + (2l/c)^2 (y^*)^2}}{1 + 2(2l/c)y^* \operatorname{tg} \Lambda} \quad (5-191a)
 \end{aligned}$$

для  $\eta^* \leq 0$  и выражение

$$L(y^*, \eta^*) = \frac{1}{(2l c)(y^* - \eta^*)} + \frac{\sqrt{[1 + (2l c)(y^* - \eta^*) \operatorname{tg} \Delta] + (-l c)(y^* - \eta^*)}}{(2l c)(y^* - \eta^*)} \quad (5-191b)$$

для  $\eta^* \geq 0$ .

Здесь всюду  $c = c(y^*)$ ; очевидно, что по отношению к каждой из величин  $y^*$ ,  $\eta^*$ ,  $2l c(y^*)$  и  $\Delta$  в отдельности функция  $L(y^*, \eta^*)$  является степенной функцией. При  $\Delta = 0$  формулы (5-191) сводятся к формуле (5-183). Во всех случаях, за исключением этого специального случая, вихревой слой, изображенный на фиг. 5-12, индуцирует вдоль своих передних кромок бесконечно большой скос потока, чем и объясняется полная непригодность обычной теории несущей линии при наличии стреловидности.

Для вычисления интегралов в формуле (5-190) в случае прямых или стреловидных крыльев систематически применяется предложенный Мультхоппом ряд Фурье (5-171), причем для интеграла, содержащего  $L(y^*, \eta^*)$ , используется формула (5-168). Связь между отсчитываемой вдоль размаха координатой Вейссингера и угловой переменной имеет вид

$$\eta^* = \cos \theta, \quad y^* = \cos \varphi. \quad (5-192)$$

Первый интеграл в формуле (5-190) отличается от интеграла, встречающегося в теории несущей линии, лишь постоянным множителем, так что здесь вновь появляются коэффициенты  $b_{vn}$  и  $b_{vn}$ , введенные в уравнение (5-172). После подстановки вместо  $G$  его выражения в виде ряда производится оценка второго интеграла по формуле трапеций для переменной  $\varphi$ , что представляет собой распространение формулы (5-168) на случай, когда подинтегральное выражение не обращается в нуль на концах крыла. В обозначениях де Юнга и Харпера [5-22] полученное таким образом алгебраическое уравнение для сечения  $y^* = \cos \varphi$ , может быть записано в следующем виде:

$$\alpha_v = \left[ 2b_{vn} + \frac{2l}{c_v} g_{vn} \right] G_v + \sum_{n=1}^m \left[ \frac{2l}{c_v} g_{vn} - 2b_{vn} \right] G_n, \quad (5-193a)$$

где

$$g_{vn} = \frac{-1}{2(M+1)} \left\{ \frac{L_{v,0} f_{v,0} + L_{v,M+1} f_{v,M+1}}{-} - \sum_{r=1}^m L_{vr} f_{nr} \right\}, \quad (5-193b)$$

$$L_{vr} = L(\varphi_v, \theta_r) = L(y_v^*, \eta_r^*) \quad (5-193c)$$

и

$$f_{nr} = f_n(\varphi_r) = \frac{2}{n+1} \sum_{\mu=1}^m \mu \sin \mu \varphi_r \cos \mu \varphi_r \quad (5-193d)$$

Здесь  $M$  — произвольно выбранное нечетное целое число, не обязательно совпадающее с числом  $m$ , встречавшимся при вычислении  $L$ -интегралов в явной форме. Ввиду того что  $G = c c_l 2l$  [где  $c_l$  представляет собой подъемную силу на единицу длины в направлении оси  $y$ , разделенную на  $(\rho/2) U^2 c$ ], равенство (5-193a) для значений  $v = 1, 2, 3, \dots, m$  вновь выражается в хорошо знакомой нам матричной форме

$$\{\alpha\} = [A] \{c c_l\}. \quad (5-194)$$

Аэродинамическая матрица  $[A]$  в явном виде записывается так:

$$[A] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \left(b_{11} + \frac{l}{c_1} g_{11}\right) \left(\frac{l}{c_1} g_{12} - b_{12}\right) \dots \left(\frac{l}{c_1} g_{1m} - b_{1m}\right) \\ \left(\frac{l}{c_2} g_{21} - b_2\right) \left(b_{22} + \frac{l}{c_2} g_{22}\right) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{l}{c_m} g_{m1} - b_{m1}\right) & \dots & \dots \left(b_{mm} + \frac{l}{c_m} g_{mm}\right) \end{bmatrix}. \quad (5-195)$$

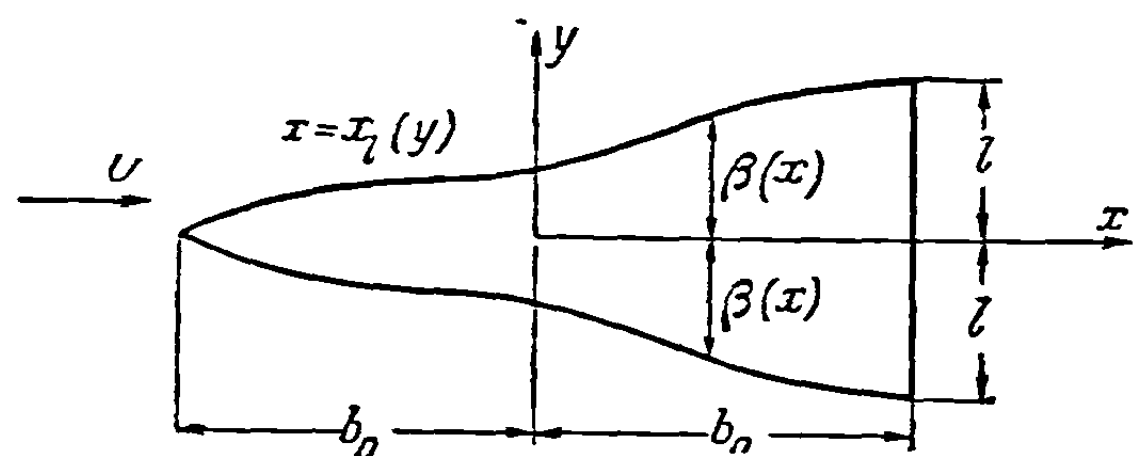
В работе [5-22] подробно излагается применение теории Вейссингера к симметрично нагруженным крыльям, включая рассмотрение поправок на сжимаемость и на отклонение наклона кривой подъемной силы для двумерного сечения от  $2\pi$ . Предположение о симметрии ( $G_n = G_{m+1-n}$ ) позволяет, естественно, свести уравнение (5-194) к системе из  $(m+1)2$  уравнений

$$\{\alpha^s\} = [A^s] \{c c_i^s\}. \quad (5-196)$$

Де Юнг и Харпер записывают уравнения (5-196) в виде

$$\alpha_\nu = \sum_{n=1}^{\frac{1}{2}(m+1)} a_{\nu n} G_n \quad (5-197)$$

для  $\nu = 1, 2, \dots, (m+1)2$ . Для  $m=7$  и для каждого из 16 воз-



Фиг. 5-13. Симметричное крыло малого удлинения с прямой задней кромкой.

можных сочетаний  $\nu$  и  $n$  в работе [5-22] дается полный набор графиков изменения коэффициентов влияния  $a_{\nu n}$  в зависимости от двух определяющих их параметров. Для этих кривых предусмотрена возможность учета поправки Прандтля — Глауэрта на сжимаемость (эту поправку мы рассмотрим в гл. 6) и поправок на изменение наклона кривой подъемной силы. Для числа Маха, равного нулю, и наклона, равного  $2\pi$ , параметрами, вводимыми в работе [5-22], по существу являются сам угол стреловидности  $\Lambda$  и „местное удлинение“  $2l c_\nu$ . Авторы делают различие между вычислением основной нагрузки, или распределения подъемной силы, обусловленной закруткой, при нулевом значении суммарного коэффициента  $G_L$ , и вычислением добавочной нагрузки, или распределения подъемной силы, обусловленной изменением угла атаки. В последней задаче фигурируют постоянные вдоль размаха значения  $\alpha$ , и ее решение дает сведения о наклоне кривой подъемной силы в случае трехмерного движения и о положении аэродинамического центра. В приложениях к задачам аэроупругости обычно интересуются упругим изгибом и кручением крыла, так что для нас наиболее существенными результатами теории Вейссингера являются такие уравнения, как [5-194] и [5-196], в которых изменение  $\alpha$  по размаху может быть произвольным. В гл. 8 показывается применение этих уравнений при изучении дивергенции, реверса элеронов и аналогичных явлений.

(с). Крылья очень малого удлинения. Учитывая увеличение числа самолетов с очень узкими несущими поверхностями, многие из которых имеют треугольную или дельтавидную форму в плане, мы закончим рассмотрение крыльев конечного размаха изложением теории, пригодной для исчезающе малых удлинений. В основе этого метода лежит предложенное Джонсом [5-24] обобщение аэродинамической теории Мунка. Принимая во внимание способ упрощения точного интегрального уравнения, можно сказать, что теория Джонса находится в таком же отношении к крыльям малого удлинения, в каком теория несущей линии к крыльям большого удлинения.

Так как результаты данной теории непригодны для прямоугольных форм в плане, обратимся к крылу, показанному на фиг. 5-13. Ввиду того что задняя кромка прямолинейна, можно применить уравнение (5-137b). Однако на большей части поверхности узкого крыла длина  $|x - \xi|$  значительно превышает длину  $|y - \eta|$ . По этой причине, а также вследствие описанного в п. 5-5 (а) поведения подинтегральной функции в окрестности точки  $\xi = x$ ,  $\eta = y$  мы вправе заменить радикал  $\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$  в уравнении (5-137b) его приближенным значением  $|x - \xi|$ . После этого уравнение может быть упрощено следующим путем:

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial z_a}{\partial x} &\cong -\frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{(y - \eta)} - \frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \oint_{x_l(\eta)}^{b_0} \frac{\partial \gamma_a}{\partial \eta} \frac{|x - \xi|}{(x - \xi)(y - \eta)} d\xi d\eta = \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \frac{1}{(y - \eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \int_{x_l(\eta)}^{b_0} \gamma_a(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta - \\
 &- \frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \frac{1}{(y - \eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \int_{x_l(\eta)}^{b_0} \gamma_a(\xi, \eta) \frac{|x - \xi|}{(x - \xi)} d\xi \right\} d\eta = \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \oint_{-l}^l \frac{1}{(y - \eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \int_{x_l(\eta)}^{\infty} \gamma_a(\xi, \eta) d\xi + \int_{\infty}^{b_0} \gamma_a(\xi, \eta) d\xi + \int_{x_l(\eta)}^{\infty} \gamma_a(\xi, \eta) d\xi - \right. \\
 &\left. - \int_{\infty}^{b_0} \gamma_a(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-l}^l \frac{1}{(y - \eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \int_{x_l(\eta)}^{\infty} \gamma_a(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta. \quad (5-198)
 \end{aligned}$$

Перемена порядка дифференцирования и интегрирования во втором интеграле является законной, поскольку  $\gamma_a$  обращается в нуль как на задней кромке  $\xi = b_0$ , так и на небольшом расстоянии за передней кромкой  $\xi = [x_l(\eta) - \epsilon]$ , т. е. в точке, до которой мы можем распространить интервал интегрирования. Так как  $\gamma_a$  представляет собой величину разрыва составляющей скорости возмущения  $u'$  на поверхности крыла, то последнее выражение в скобках в уравнении (5-198) можно отождествить с разрывом  $\Delta\varphi' = \varphi'_U - \varphi'_L$  потенциала скорости возмущения:

$$\int_{x_l(\eta)}^{\infty} \gamma_a(\xi, \eta) d\xi = \int_{x_l(\eta)}^{\infty} [u'_U - u'_L] d\xi = \int_{x_l(\eta)}^{\infty} \frac{\partial \Delta\varphi'}{\partial \xi} d\xi = \Delta\varphi'(x, \eta). \quad (5-199)$$

Значение  $\Delta\varphi'$  для нижнего предела равно нулю, так как эта точка находится несколько впереди крыла. Пределами для интеграла, из которого получается  $\Delta\varphi'$ , являются передняя кромка крыла и точка  $x$ , лежащая на хорде, так что пределы интегрирования вдоль размаха  $\pm l$  мы можем заменить на наибольшие размеры  $\pm \beta(x)$ , соответствующие данному значению  $x$ . Поэтому уравнение (5-198) принимает для всех значений  $(x, y)$  в области  $x_l \leq x \leq b_0$ ,  $-l \leq y \leq l$  следующий вид:

$$U \frac{\partial z_a}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-\beta(x)}^{\beta(x)} \frac{1}{(y - \eta)} \frac{\partial \Delta\varphi'(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta. \quad (5-200)$$

Правая часть уравнения (5-200) дает значение вертикальной скорости, индуцируемой вихревым слоем в точке  $(x, y)$ , но, как очевидно, интеграл зависит только от условий впереди линии  $x = \text{const}$ . Отсюда мы заключаем, что при допущениях данной теории наличие спутной струи не оказывает влияния на

течение. Это, конечно, является важным упрощением; оно имеет еще большее значение для неустановившегося течения. Неблагоприятная сторона этого упрощения заключается в отсутствии такого механизма, с помощью которого жидкость оповещалась бы о приближении задней кромки, вследствие чего гипотеза Кутта, вообще говоря, не выполняется. В этом состоит основной недостаток данной теории, поскольку даже для очень узких дельтавидных крыльев действительный разрыв давления стремится уменьшиться до нуля у задней кромки.

Интегральное уравнение (5-200) имеет такую же форму, как и уравнение (5-95), так что его можно решить с помощью рядов Фурье или сразу с помощью обращения, используя методы Зёнгена [5-13]. Выберем для удобства последний вариант решения и временно введем безразмерные переменные

$$\eta^* = \frac{\eta}{\beta(x)}, \quad y^* = \frac{y}{\beta(x)},$$

при которых пределы в уравнении (5-200) становятся равными единице:

$$U \frac{\partial z_a}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\partial \Delta \varphi'}{\partial \eta} \frac{d\eta^*}{(y^* - \eta^*)}. \quad (5-202)$$

Чтобы сделать решение единственным, найдем вспомогательное условие

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial \Delta \varphi'}{\partial \eta} d\eta^* = \frac{1}{\beta(x)} \int_{-1}^1 \frac{\partial \Delta \varphi'}{\partial \eta^*} d\eta^* = \frac{1}{\beta(x)} \Delta \varphi' \Big|_{\eta^*=-1}^{\eta^*=1} = 0, \quad (5-203)$$

являющееся следствием отсутствия разрыва потенциала скорости непосредственно за передними кромками. Соответствующие формулы из работы [5-13] показывают, что решение интегрального уравнения

$$g(y^*) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^1 \frac{f(\eta^*)}{y^* - \eta^*} d\eta^*, \quad (5-204)$$

для которого

$$\int_{-1}^1 f(\eta^*) d\eta^* = 0, \quad (5-205)$$

имеет вид

$$f(y^*) = -\frac{2}{\pi \sqrt{1-y^{*2}}} \oint_{-1}^1 \frac{g(\eta^*) \sqrt{1-\eta^{*2}}}{(y^* - \eta^*)} d\eta^*. \quad (5-206)$$

Здесь функции  $f$  и  $g$  могут быть отождествлены с  $\partial \Delta \varphi' / \partial \eta$  и  $-U (\partial z_a / \partial x)$  соответственно, так что равенство (5-206) в результате дает

$$\frac{\partial \Delta \varphi'}{\partial y} = \frac{2U}{\pi \sqrt{1-y^{*2}}} \oint_{-1}^1 \frac{\partial z_a}{\partial x} \frac{\sqrt{1-\eta^{*2}}}{(y^* - \eta^*)} d\eta^*. \quad (5-207a)$$

Для переменных, имеющих размерность, этот результат принимает вид

$$\frac{\partial \Delta \varphi'(x, y)}{\partial y} = \frac{2U}{\pi \sqrt{\beta^2(x) - y^2}} \oint_{-\beta(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial z_a(x, \eta)}{\partial x} \frac{\sqrt{\beta^2(x) - \eta^2}}{(y - \eta)} d\eta. \quad (5-207b)$$

Определив  $\Delta \varphi'$  путем интегрирования равенства (5-207b), можно с помощью равенств (5-93) найти распределение давления:

$$\frac{p_U - p_L}{\left(\frac{1}{2} \rho\right) U^2} = \frac{-2\gamma_a}{U} = -\frac{2}{U} \frac{\partial \Delta \varphi'}{\partial x} = -\frac{2}{U} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\beta(x)}^y \frac{\partial \Delta \varphi'(x, y')}{\partial y'} dy'. \quad (5-208)$$



Для крыльев малого удлинения особый интерес представляет случай, когда изменения наклона или упругие деформации имеют место только в направлении хорды, так что величина  $\frac{dz_a}{dx}$  не зависит от  $y$ . Тогда интеграл в правой части равенства (5-208) находится без труда и мы получаем:

$$\begin{aligned} \frac{p_U - p_L}{\left(\frac{1}{2}\rho\right)U^2} &= -\frac{2}{U} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{2U}{\pi} \frac{dz_a(x)}{dx} \int_{-\beta(x)}^y \frac{1}{\sqrt{\beta^2(x) - y'^2}} \oint_{-\beta(x)}^{\beta(x)} \frac{\sqrt{\beta^2(x) - \eta^2}}{(y' - \eta)} d\eta dy' \right\} = \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sqrt{\beta^2(x) - y^2} \frac{dz_a}{dx} \right\} = \\ &= 4 \sqrt{\beta^2(x) - y^2} \frac{d^2z_a}{dx^2} + \frac{4\beta(x)}{\sqrt{\beta^2(x) - y^2}} \frac{d\beta}{dx} \frac{dz_a}{dx}. \quad (5-209) \end{aligned}$$

Очевидно, что условие обращения в нуль разности  $p_U - p_L$ , или условие Кутта, будет выполняться на задней кромке  $x = b_0$  только в том случае, если там равна нулю кривизна срединной поверхности  $\frac{d^2z_a}{dx^2}$  и одновременно обращается в нуль или наклон  $\frac{dz_a}{dx}$  или степень увеличения размаха  $\frac{d\beta}{dx}$ .

Полезно проинтегрировать уравнение (5-209) и найти распределение подъемной силы в направлении хорды и в направлении размаха крыла. Если заметить, что у передней кромки, где  $y = \beta(x_l)$ , подынтегральная функция обращается в нуль, то подъемная сила на единицу размаха в сечении с координатой  $y$  получается с помощью интегрирования по  $x$ :

$$\begin{aligned} L(y) &= - \int_{x_l(y)}^{b_0} [p_U - p_L] dx = - 2\rho U^2 \int_{x_l(y)}^{b_0} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sqrt{\beta^2(x) - y^2} \frac{dz_a}{dx} \right] dx = \\ &= - 2\rho U^2 \sqrt{l^2 - y^2} \left( \frac{dz_a}{dx} \right)_{\text{задняя кромка}}. \quad (5-210) \end{aligned}$$

Формула (5-210) показывает, что нагрузка на любое крыло малого удлинения с недеформируемыми поперечными сечениями вдоль размаха изменяется по эллиптическому закону, причем величина подъемной силы определяется *только* наклоном у задней кромки. Суммарная подъемная сила равна

$$L = \int_{-l}^l L(y) dy = - \pi\rho U^2 l^2 \left( \frac{dz_a}{dx} \right)_{\text{задняя кромка}}. \quad (5-211)$$

В случае плоской пластинки или при вычислении дополнительной нагрузки угол наклона у задней кромки равен углу атаки, взятому с противоположным знаком, так что

$$L = \pi\rho U^2 l^2 \alpha \quad (5-212a)$$

и

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{2\pi l^2}{S} = \frac{\pi}{2} \lambda. \quad (5-212b)$$

Равенство (5-212b) представляет собой особенно хорошо известную формулу.

Для некоторых целей большой интерес представляет выражение для подъемной силы на единицу хорды в сечении  $x$ , определяемое с помощью интегрирования по  $y$ :

$$\begin{aligned} L(x) &= - \int_{-\beta(x)}^{\beta(x)} [p_U - p_L] dy = - 2\rho U^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{dz_a}{dx} \int_{-\beta(x)}^{\beta(x)} \sqrt{\beta^2(x) - y^2} dy \right\} = \\ &= - U^2 \frac{d}{dx} \left[ \pi\rho\beta^2(x) \frac{dz_a}{dx} \right]. \quad (5-213) \end{aligned}$$

Перемена порядка дифференцирования и интегрирования оправдана здесь тем, что при  $y = \pm \beta(x)$  подинтегральная функция обращается в нуль.

Все полученные равенства (5-209) — (5-213) могут быть также выведены с помощью предложенной Джонсом физической модели течения около узкого крыла. Он предполагал, что в плоскостях, перпендикулярных к направлению полета, движение имеет двумерный характер. Поэтому можно пренебречь скоростями возмущения  $u'$  и следить за историей жидкого объема в слое между плоскостями  $yz$ , расположенными на расстоянии  $\Delta x$ , при прохождении этого объема около крыла со скоростью  $U$ . Этому объему сообщается количество движения в направлении оси  $z$ , причем реакции, соответствующие создающим это количество движения силам, являются силами воздействия потока на крыло. Для вычисления указанного количества движения заметим, что движение в данном объеме такое же, какое было бы вызвано отрезком  $\Delta x$  двумерной плоской пластинки шириной  $2\beta(x)$ , перемещающимся перпендикулярно к своей плоскости в положительном направлении оси  $z$  со скоростью  $U dz_a/dx$  и одновременно расширяющимся со скоростью

$$\frac{d[2\beta(x)]}{dx} \frac{dx}{dt} = 2 \frac{d\beta}{dx} U. \quad (5-214)$$

В соответствии с тем, что говорилось в п. 5-2, импульс силы, необходимый для того, чтобы сообщить такой пластинке в направлении оси  $z$  скорость величиной  $U dz_a/dx$ , будет равен

$$\Delta I_x = [\pi \rho \beta^2(x) \Delta x] U \frac{dz_a}{dx}. \quad (5-215)$$

Этот результат следует из того факта, что присоединенная масса пластинки, как мы увидим в п. 5-6, равна  $\pi \rho \beta^2(x) \Delta x$ . Реакция, соответствующая силе, отнесенной к единице длины хорды и потребной для создания действительного изменения количества движения, в точности равна текущему значению изменяющейся вдоль хорды подъемной силы:

$$L(x) = - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\Delta I_x}{\Delta x} \right] = - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\Delta I_x}{\Delta x} \right] \frac{dx}{dt} = - U^2 \frac{d}{dx} \left[ \pi \rho \beta^2(x) \frac{dz_a}{dx} \right]. \quad (5-216)$$

Здесь мы выполнили деление на  $\Delta x$ , чтобы получить подъемную силу на единицу хорды, и заменили  $dx/dt$  на  $U$  ( $U$  — скорость, с которой жидкий объем движется вдоль крыла). Равенство (5-216) дает тот же конечный результат, что и равенство (5-213); очевидно, что интегрирование вдоль хорды приведет к тому же самому выражению для суммарной подъемной силы.

Метод Джонса показывает нам также, почему суммарная подъемная сила должна определяться только условиями на задней кромке. Рассматривая опять течение как состоящее из ряда пластов, ограниченных плоскостями, параллельными плоскости  $xz$  и зафиксированными в покоящейся жидкости, мы видим, что установившийся характер такого течения обеспечивает постоянство общего количества движения в направлении оси  $z$  для всех пластов, находящихся в данный момент между передней точкой крыла и его задней кромкой. Поэтому скорость, с которой увеличивается количество движения всей массы жидкости, равна скорости уменьшения количества движения за счет стекания с задней кромки. Количество движения каждого пласта толщиной  $\Delta x$  при отходе от этой кромки равно  $-\pi \rho l^2 U (dz_a/dx)_{\text{задняя кромка}}$  и зависит от длины размаха  $2l$  и величины угла атаки  $\alpha$  у задней кромки. Предполагается, что эти пласты уходят в бесконечность без дальнейших изменений картины течения внутри пласта, что можно интерпретировать как образование однородной спутной струи из концевых вихрей, имеющей одинаковую ширину с крылом. Эта схема поясняет также вывод Джонса о том, что нельзя ожидать увеличения подъемной силы от наличия сечений крыла, перпендикулярных к направлению полета и расположенных

ниже по течению от сечения, имеющего максимальный размах; эти сечения находятся в спутной струе, вызванной самым широким сечением, и нельзя предполагать, чтобы двумерное поперечное движение около этих сечений имело такой же характер, как около сечений в расширяющейся части крыла.

Наконец, как указывает Джонс, нет причин ожидать ощутимых изменений течения в направлении продольной оси при увеличении числа Маха потока до таких значений, при которых для более широких крыльев стало бы существенно проявляться влияние сжимаемости. В работе [5-24] приводится сравнение экспериментальных данных, свидетельствующее о том, что наклон кривой подъемной силы для узкого дельтавидного крыла, по существу, не зависит от  $M$  даже в сверхзвуковом диапазоне скоростей.

Помимо теорий, описанных в предыдущих пунктах, имеются многочисленные другие приближенные теории для несущей поверхности конечных размеров в установившемся течении несжимаемой жидкости. Ни одна из них не оказалась до сих пор столь же всесторонне полезной для специалиста по аэроупругости, как теории Прандтля и Вейссингера. Однако появление крыльев, коренным образом отличающихся по форме от тех, которым отдавалось предпочтение в течение первых 40 лет существования авиации, наводит на мысль, что это положение может измениться.

Обращаем внимание читателей, в частности, на теорию Лоуренса [5-25], которая представляется наиболее подходящей для удлинений, близких к единице. Лоуренс заменяет радикал  $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$  в равенствах (5-137) приближенным выражением вида  $\frac{1}{2} [|x-\xi| + \sqrt{(x-\xi)^2 + l^2}]$  и находит решение для распределения нагрузки в направлении хорды с помощью видоизмененного ряда Фурье. Хотя для записи формул Лоуренса в виде алгебраических равенств необходимо произвести ряд весьма утомительных вычислений интегралов, тем не менее его теория хорошо систематизирована и прекрасно согласуется как с экспериментальными данными, так и с другими теориями в тех областях, где они могут применяться одновременно.

Другая многообещающая схема расчета для крыльев прямоугольной формы в плане (Лейдло [5-26]) состоит в упрощении громоздкого интеграла в равенстве (5-137а) с помощью аппроксимации:

$$\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \cong \sigma_0(\lambda) |x-\xi| + \sigma_\infty(\lambda) |y-\eta|. \quad (5-217)$$

Параметры  $\sigma_0$  и  $\sigma_\infty$  вычисляются как функции удлинения при условии, чтобы четырехкратный интеграл по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $\xi$  и  $\eta$  в пределах всей формы в плане от квадрата разности обеих частей равенства (5-217) был минимальным по отношению к вариациям значений этих параметров. Как и следовало ожидать,  $\sigma_0$  при предельном нулевом значении  $\lambda$  равна единице и постепенно приближается к нулю с увеличением  $\lambda$ , тогда как  $\sigma_\infty$  при изменении  $\lambda$  в том же интервале увеличивается от нуля до единицы. Вследствие полной симметрии при удлинении, равном единице, значения этих параметров совпадают и равны 0,771. Метод Лейдло превращает двойные интегралы в равенстве (5-137а) в одинарные, приводя к равенству, с помощью которого при использовании соответствующего двойного ряда Фурье для  $\gamma_\alpha$  можно вычислить распределение давления по всему крылу. Определенные интегралы, которые нужно вычислить при применении этого метода, создают затруднения, не более серьезные, чем те, которые возникают в работе [5-25], и в окончательном итоге получается матричное уравнение, совершенно аналогичное уравнению [5-138]. Потенциальные преимущества этой теории состоят в том, что она безусловно применима для всего диапазона удлинений и непосредственно дает выражения для давлений, без дополнительных предположений и вычислений. Если бы она могла быть распространена на другие формы в плане, то вполне удовлетворяла бы нужды специалиста по

аэроупругости, желающего определить деформации крыла малого удлинения, подобные деформациям пластинки.

В заключение дадим некоторые полуэмпирические формулы, полезные для оценки общего влияния конечности размаха на нагрузку в потоке несжимаемой жидкости. Для крыльев обычных форм в плане уравнение

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = a_0 \frac{\lambda}{\lambda + (a_0/\pi)} \approx a_0 \frac{\lambda}{\lambda + 2} \quad (5-166)$$

является достаточно точным, если  $\lambda$  примерно равно или больше 4, но при значениях, меньших 4, это уравнение дает завышенные результаты. Дидерих (см. [5-27]) указывает, что формула

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = a_0 \frac{\lambda}{\lambda \sqrt{1 + (a_0/\pi\lambda)^2} + a_0/\pi} \quad (5-218)$$

дает достаточно хорошее приближение для всего диапазона, стремясь в пределе при больших  $\lambda$  к совпадению с равенством (5-166) и при приближении  $\lambda$  к нулю — к совпадению с равенством (5-212 б). Имея в виду специальную цель — дать поправку на влияние удлинения к значению скорости крутильной дивергенции, задача, при решении которой определено известно, что изменения  $C_L$  не сопровождаются постоянными вдоль всего размаха изменениями  $\alpha$ , — Дидерих и Будянский (см. [5-28]) вводят взамен соотношения (5-166) другую формулу:

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = a_0 \frac{\lambda}{\lambda + 4}. \quad (5-219)$$

Если крыло имеет угол стреловидности  $\Lambda$ , но удлинение столь велико, что можно не принимать во внимание наличие концов, то влияние стреловидности можно оценить достаточно точно с помощью теории тонкого профиля. Представив себе бесконечное стреловидное крыло с однородными свойствами в потоке, скорость которого равна  $U$ , мы обнаружим, что можно полностью исключить стреловидность, если ввести систему координат, скользящую назад вдоль размаха со скоростью  $U \sin \Lambda$ . Действительно, составляющая скорости потока, направленная вдоль размаха, не может оказать никакого влияния на распределение давления, если только не учитывается наличие вязкости и пограничного слоя. В новой системе координат мы получим крыло без стреловидности, имеющее хорду  $\bar{c}$  и угол атаки  $\bar{\alpha}$  и находящееся в потоке со скоростью, равной  $U \cos \Lambda$ . Из равенства (5-111), вводя в него вместо теоретического значения  $2\pi$  наклона кривой подъемной силы для двумерного течения экспериментальное значение  $a_0$ , мы получаем подъемную силу на единицу длины размаха

$$\bar{L} = a_0 \left( \frac{1}{2} \rho \right) (U \cos \Lambda)^2 \bar{c} \bar{\alpha}. \quad (5-220)$$

Но подъемная сила на единицу длины в направлении, перпендикулярном к направлению полета стреловидного крыла, равна  $\bar{L}/\cos \Lambda$ ; длина хорды равна

$$c = \frac{\bar{c}}{\cos \Lambda}, \quad (5-221a)$$

и угол атаки в плоскости, расположенной в направлении полета, будет

$$\alpha = \bar{\alpha} \cos \Lambda. \quad (5-221b)$$

Выполнив в равенстве (5-220) указанные подстановки, получим

$$L = \frac{\bar{L}}{\cos \Lambda} = a_0 \left( \frac{1}{2} \rho \right) U^2 c \cos \Lambda \alpha, \quad (5-222a)$$

так что

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{L}{\left( \frac{1}{2} \rho \right) U^2 c \alpha} = a_0 \cos \Lambda. \quad (5-222b)$$

Важный вывод, выражаемый формулой (5-222b), подсказал Дидерихсу [5-27], что можно учесть влияние стреловидности путем следующего видоизменения равенства (5-166):

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda + (a_0 \pi) \cos \Lambda} a_0 \cos \Lambda. \quad (5-223)$$

Аналогичным образом он дает обобщение равенства (5-218) в виде

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{\lambda a_0 \cos \Lambda}{\lambda \sqrt{1 + (a_0 \cos \Lambda \pi \lambda)^2} + (a_0 \pi) \cos \Lambda}. \quad (5-224)$$

Следовательно, отношение  $(dC_L/d\alpha) a_0 \cos \Lambda$  зависит от единственного параметра  $\pi \lambda a_0 \cos \Lambda$ , характеризующего форму в плане. Результаты измерений для различных крыльев многих разновидностей прекрасно согласуются с формулой (5-224).

**5-6. Колебания тонких профилей в потоке несжимаемой жидкости.** Задача о тонком профиле, совершающем малые поперечные колебания в однородном потоке несжимаемой жидкости, в течение многих лет составляла основу всех исследований флаттера. Результаты решения этой задачи все еще служат источником сравнительно надежных справочных сведений о крыльях большого удлинения, даже несмотря на то, что действительные скорости флаттера для этих крыльев могут быть околосвуковыми или сверхзвуковыми. Для случая простого гармонического движения задача была частично решена Глауэртом в 1929 году (см. [5-30]), но полное решение было впервые опубликовано в Соединенных Штатах Теодорсеном (см. [5-29]). Другие европейские авторы пришли в основном к тем же выводам и опубликовали их в тот же период (см., например, Чикала [5-31], Элленбергер [5-32], Борбей [5-33], Касснер и Фингадо [5-34], Кюсснер [5-35]). Интересные результаты содержатся в гл. V, §§ 6—8, стр. 293—304 общего исследования по теории крыла Кармана и Бюргерса [5-9]. Здесь, по-видимому, впервые интегралы, имеющие большое значение и связанные с циркуляцией в спутной струе, были для специальных случаев движения профиля выражены через функции Бесселя.

Мы начинаем с интерпретации метода Теодорсена, которая хорошо знакома многим, работающим в области аэроупругости, и позволяет произвести наглядное разделение потока на части, создающие циркуляцию и не создающие ее. Используя обозначения, принятые в теории малых возмущений, мы должны для потенциала возмущений решить уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi' = 0 \quad (5-65)$$

при граничном условии, соответствующем двумерной задаче [см. уравнения (5-36), (5-75) и (5-88)] и выполняющемся вдоль профиля с хордой  $2b$ :

$$w = \frac{\partial z_a}{\partial t} + U \frac{\partial z_a}{\partial x} = w_a(x, t); \quad \text{для } z = 0, \quad -b \leq x \leq b, \quad (5-225)$$

где  $w_a(x, t)$  представляет собой удобное сокращенное обозначение правой части уравнения (5-225) и может рассматриваться как известная функция. Пренебрегая возможностью задержки в приспособлении течения к условиям на задней кромке, применим на линии  $x = b$  гипотезу Кутта о конечности и непрерывности скоростей и давлений.

Теодорсен расчленяет свое решение на две части: уравнение (5-225) удовлетворяется при помощи соответствующего распределения источников и стоков непосредственно сверху и снизу от линии  $z = 0$ ; затем на этой линии располагается некоторая совокупность вихрей, причем вдоль спутной струи вплоть до бесконечности размещаются вихри противоположного направления; таким образом, гипотеза Кутта выполняется без нарушения граничных условий на профиле. Каждая из частей потока проще всего получается при применении конформного



преобразования Жуковского для отображения окружности радиуса  $b/2$  на контур профиля.

Для ознакомления с преобразованиями вообще и с преобразованием Жуковского в частности читатель отсылается к гл. 7 и 8 книги [5-1]<sup>1)</sup>. Детали, которые важны для нас здесь, состоят в следующем. Окружность

$$r = \frac{1}{2} b \quad (5-226)$$

в плоскости  $XZ$  преобразуется в прямолинейный отрезок, или „разрез“

$$-b \leq x \leq b, \quad z = 0 \quad (5-227)$$

в плоскости  $xz$  с помощью формулы

$$x + iz = (X + iZ) + \frac{b^2}{4(X + iZ)}, \quad (5-228)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ . Обе плоскости изображены на фиг. 5-14, где показаны также полярные координаты  $r$  и  $\theta$ , связанные с  $X$  и  $Z$  следующими формулами:

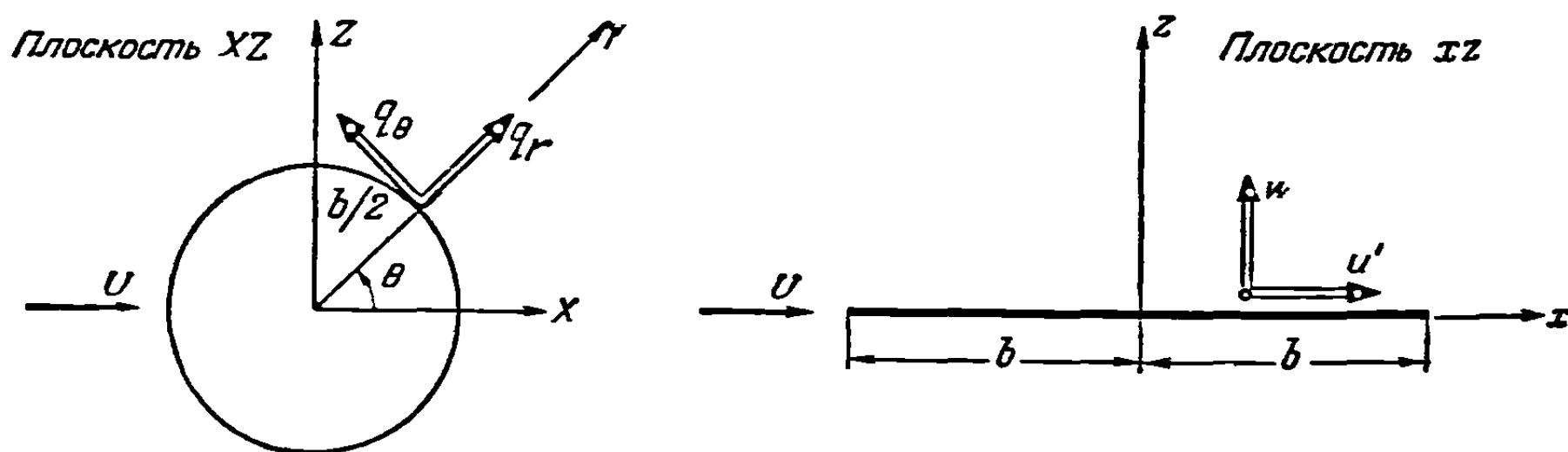
$$X = r \cos \theta, \quad Z = r \sin \theta, \quad (5-229a, b)$$

$$X + iZ = r(\cos \theta + i \sin \theta) r e^{i\theta}. \quad (5-229c)$$

Для определения соответствия между точками окружности и точками щели подставим выражение (5-229c) в формулу (5-228) и положим  $r = b/2$ . Приравняв действительные и мнимые части, получим

$$x = b \cos \theta, \quad z = 0. \quad (5-230)$$

В связи с наличием противоположно направленных вихрей в спутной струе необходимо знать соответствие между точками, лежащими на оси  $X$  за пре-



Фиг. 5-14. Плоскости  $XZ$  и  $xz$ , связанные между собой конформным преобразованием Жуковского.

делами окружности, и точками на оси  $x$ . Оно определяется, если в формуле (5-228) положить  $Z = 0$  и приравнять действительные и мнимые части:

$$x = X + \frac{b^2}{4X}, \quad z = Z = 0. \quad (5-231)$$

Скорости течения в двух плоскостях выражаются одна через другую с помощью комплексной формулы, содержащей производную функции преобразования, что является свойством всех конформных преобразований:

$$u' - iw' = \frac{q_x - iq_z}{[d(x + iz)/d(X + iZ)]}. \quad (5-232)$$

Здесь  $q_x$  и  $q_z$  представляют собой декартовы составляющие скорости возмущения в плоскости  $XZ$ . Необходимо вычислить скорости в точках разреза по скоростям в точках окружности и наоборот; подставим в равенство (5-232) выражение

$$\left[ \frac{d(x + iz)}{d(X + iZ)} \right]_{r=b/2} = \left[ 1 - \frac{b^2}{4(X + iZ)^2} \right]_{r=b/2} = 1 - \frac{b^2}{b^2 e^{i2\theta}} = 2 \sin \theta e^{i\theta} \quad (5-233)$$

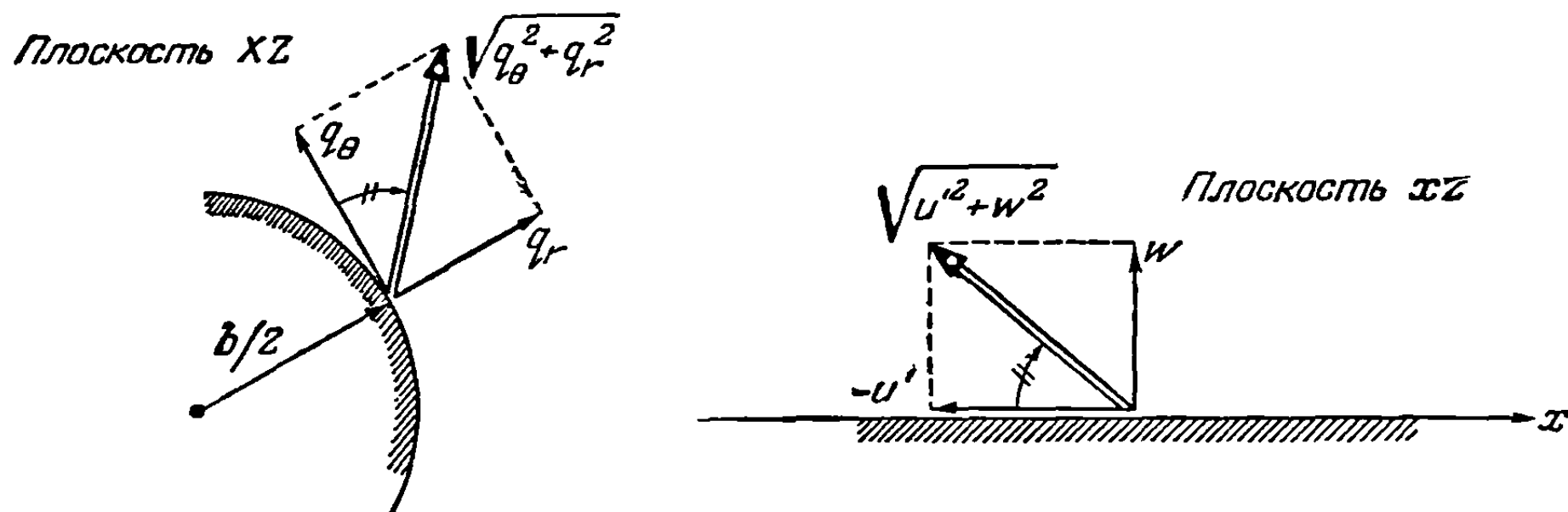
<sup>1)</sup> См. также Голубев В. В., Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке, М., 1938. — Прим. ред.

и напишем абсолютные величины обеих частей равенства (5-232):

$$|u' - i\omega| = \sqrt{u'^2 + \omega^2} = \frac{\sqrt{q_x^2 + q_z^2}}{|2 \sin \theta|} = \frac{\sqrt{q_\theta^2 + q_r^2}}{|2 \sin \theta|}, \quad (5-234)$$

где  $q_r$  и  $q_\theta$  суть радиальная и тангенциальная составляющие в плоскости  $XZ$ , показанные на фиг. 5-14.

Равенство (5-234) можно использовать также для установления соответствия между величинами каждой из составляющих в отдельности. При конформном преобразовании угол, под которым пересекаются две линии, не изменяется. В частности, угол наклона линии тока или вектора местной скорости к окружности равен углу, под которым соответствующий вектор скорости пересекает разрез в соответствующей точке (фиг. 5-15). Следовательно, тангенциальная и радиальная



Фиг. 5-15. Суммарные векторы скоростей в соответствующих точках окружности и щели наклонены под одинаковыми углами к обтекаемым поверхностям.

составляющие относятся соответственно к  $u'$  и  $\omega$  так же, как модули векторов скорости один к другому, и мы имеем

$$|u'| = \frac{|q_\theta|}{|2 \sin \theta|}, \quad (5-235a)$$

$$|\omega| = \frac{|q_r|}{|2 \sin \theta|}. \quad (5-236a)$$

На верхней части окружности, где  $\sin \theta \geq 0$ , положительные направления  $r$  и  $z$  одинаковы, тогда как для  $\theta$  и  $x$  они противоположны, так что

$$q_\theta = -2u' \sin \theta, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (5-235b)$$

$$q_r = 2\omega \sin \theta, \quad (5-236b)$$

Прежде чем приступить к построению решения Теодорсена, мы должны знать, как связаны между собой потенциалы скоростей возмущения в обеих плоскостях. Общий характер их взаимной зависимости можно описать, утверждая, что разности между значениями  $\varphi'$  для соответствующих пар точек в двух плоскостях одинаковы. Это следует из равенства (5-232), которое можно записать в виде

$$(u' - i\omega) d(x + iz) = (q_x - iq_z) d(X + iZ). \quad (5-237)$$

Приравняв действительные части, получим

$$u' dx + \omega dz = q_x dX + q_z dZ. \quad (5-238)$$

Равенство (5-238) эквивалентно следующему:

$$d\varphi'(x, y) = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi'}{\partial z} dz = \frac{\partial \varphi'}{\partial X} dX + \frac{\partial \varphi'}{\partial Z} dZ = d\varphi'(X, Y), \quad (5-239)$$



и может быть проинтегрировано между соответствующими точками 1 и 2, что дает

$$\begin{aligned} \varphi'(x_2, y_2) - \varphi'(x_1, y_1) &= \int_1^2 d\varphi'(x, y) = \int_1^2 d\varphi'(X, Y) = \\ &= \varphi'(X_2, Y_2) - \varphi'(X_1, Y_1). \end{aligned} \quad (5-240)$$

Для соответствующих друг другу путей интегрирования вдоль окружности и вдоль щели найдем

$$d\varphi'(X, Y) = q_0 \left( \frac{1}{2} b \right) d\theta, \quad (5-241)$$

$$d\varphi'(x, y) = u' dx. \quad (5-242)$$

Теперь можно использовать равенство (5-240) для двух таких путей между  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , а также между  $x_1$  и  $x_2$  (замечая, что если  $\theta_2 > \theta_1$ , то интегрирование идет в отрицательную сторону оси  $x$ ,  $x_2 < x_1$ ):

$$\varphi'_2 - \varphi'_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} q_0 \frac{b}{2} d\theta = - \int_{x_1}^{x_2} u' dx. \quad (5-243)$$

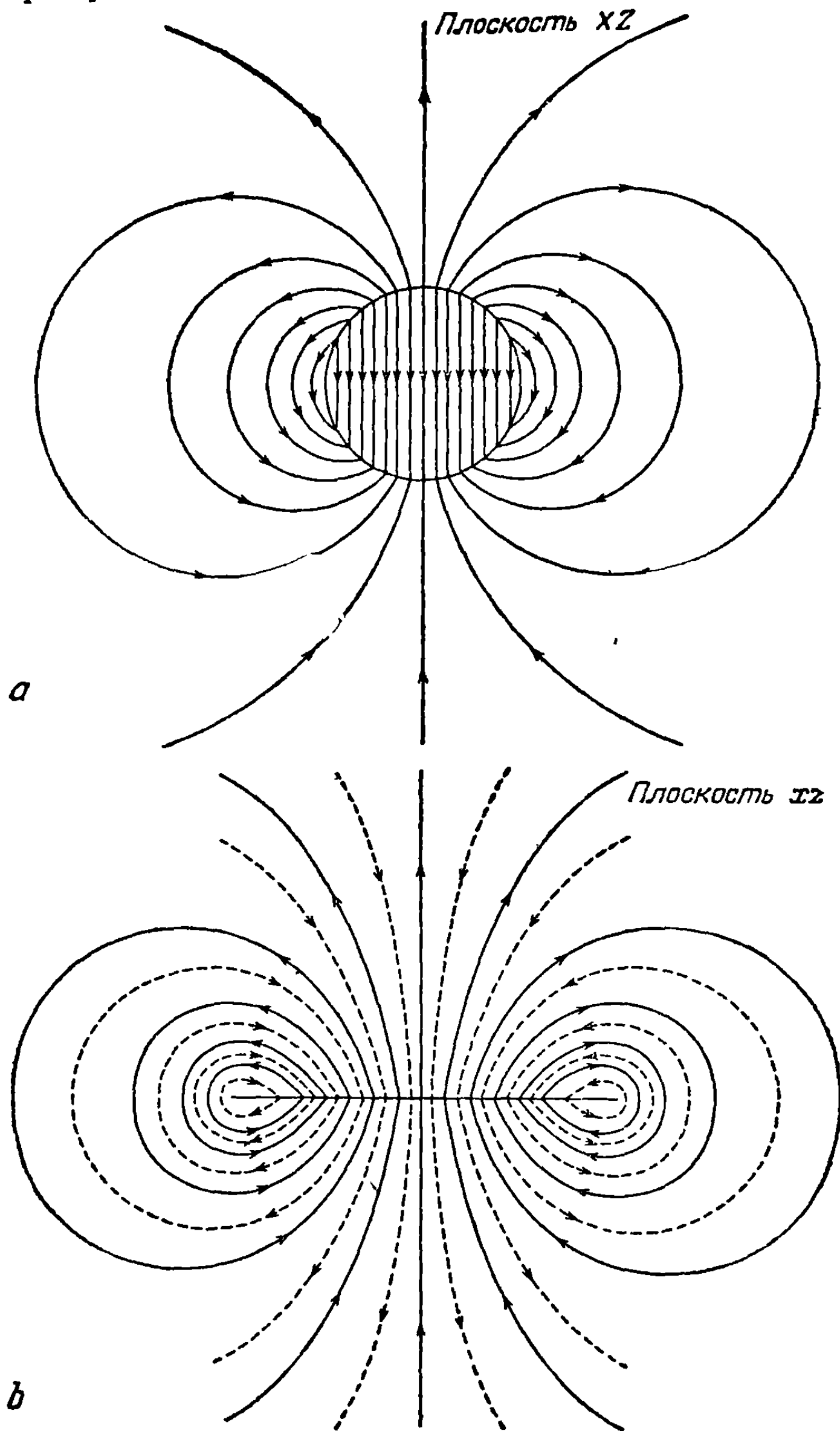
Чтобы удовлетворить условию (5-225), Теодорсен накладывает на верхнюю половину окружности слой двумерных источников, а на нижнюю половину — слой стоков такой же интенсивности. Когда такое течение преобразуется на плоскость  $xz$ , то оказывается, что вдоль разреза источники и стоки попадают на одну линию, и можно подумать, что они будут гасить друг друга. Мы поймем, что это совсем не так, если заметим, что верхняя и нижняя поверхности разреза отнюдь не соприкасаются между собой. Уравнение (5-228) преобразует все точки за пределами окружности в точки плоскости, внешние по отношению к разрезу, заполняющие, таким образом, всю плоскость  $xz$ . Однако точки внутри окружности преобразуются так, чтобы вторично заполнить всю плоскость. Это, очевидно, потому, что очень малые значения  $X$  и  $Z$  вблизи центра, будучи подставлены в уравнение (5-228), дают очень большие значения  $x$  или  $z$  или того и другого. Начало координат системы  $XZ$  преобразуется в бесконечно удаленную точку плоскости  $xz$ . Таким образом, вся плоскость  $XZ$  соответствует двум слоям, или римановой поверхности, получаемой в результате преобразования. Мы переходим с одного листа римановой поверхности на другой только тогда, когда пытаемся пересечь разрез сверху вниз, или наоборот, что соответствует переходу от внешней части окружности к внутренней. Выражаясь математическим языком, мы располагаем вдоль  $x = -b$  и  $x = b$  барьер, или „разрез“, переходить который нам запрещено. Однако все время следует помнить, что жидкость, которую источники направляют вниз, не поступает непосредственно в стоки, а образует другую, независимую от первой совокупность линий тока на втором листе римановой поверхности; эта жидкость проходит длинный путь, прежде чем попасть в конце концов по назначению и передать сверху ту долю жидкости, которая необходима стокам. Линии тока течений на обоих листах, созданных источниками и стоками постоянной интенсивности, наряду с соответствующими им линиями тока в плоскости  $XZ$  схематически показаны на фиг. 5-16.

Так как в отношении вертикальной скорости эти источники и стоки являются функциями точки, то можно с их помощью добиться выполнения условия (5-225) точно так же, как это делалось, чтобы охарактеризовать толщину крыла в п. 5-4. Рассматривая сначала только слой источников, мы вспоминаем, что одиночный двумерный источник интенсивности  $H$ , расположенный в точке  $x = \xi$ ,

$z = \zeta$  характеризуется своим потенциалом:

$$\varphi_{s2} = \frac{H}{4\pi} \ln [(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2]. \quad (5-244)$$

Непрерывное распределение источников по верхней стороне с интенсивностью



Фиг. 5-16. Линии тока, получаемые при течении за счет источников и стоков постоянной интенсивности, расположенных по обе стороны щели в плоскости  $xz$ . Пунктирными линиями обозначены линии тока на втором листе римановой поверхности.

$H^+(\xi, t)$  на единицу длины вдоль оси  $x$  дает, следовательно, потенциал возмущения

$$\varphi'(x, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b H^+(\xi, t) \ln [(x - \xi)^2 + z^2] d\xi. \quad (5-245)$$

Чтобы оставаться все время на одном и том же листе римановой поверхности, ограничим себя условием  $z > 0$  и перейдем к вычислению

$$\begin{aligned} \omega(x, 0^+, t) &= \frac{\partial \varphi'}{\partial z}(x, 0^+, t) = \frac{1}{4\pi} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-b}^b H^+(\xi, t) \ln [(x - \xi)^2 + z^2] d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0^+} z \int_{-b}^b \frac{H^+(\xi, t) d\xi}{[(x - \xi)^2 + z^2]}. \end{aligned} \quad (5-246)$$

По мере того как  $z$  принимает все меньшие и меньшие положительные значения, стоящий при интеграле множитель заставляет общий результат стремиться к нулю во всех точках, за исключением окрестности точки  $\xi = x$ , где подинтегральное выражение стремится к бесконечности. Выделив эту точку вместе с коротким отрезком длиной  $2\varepsilon$ , для которого она служит центром, получим

$$\omega(x, 0^+, t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0^+} z \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{H^+(\xi, t) d\xi}{[(x - \xi)^2 + z^2]}. \quad (5-247)$$

Так как  $H^+(\xi, t)$  является непрерывной функцией, то она отличается от своего значения в центре  $H^+(x, t)$  на величину порядка  $\varepsilon$ . Ввиду того что время  $t$  фигурирует здесь в качестве параметра при пространственном интегрировании, можно вынести  $H$  за знак интеграла. Введя временно переменную интегрирования  $\xi' = (x - \xi)$ , найдем

$$\begin{aligned} \omega(x, 0^+, t) &= \frac{H^+(x, t)}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0^+} \left[ z \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d\xi'}{[\xi'^2 + z^2]} \right] = \\ &= \frac{H^+(x, t)}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0^+} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{\varepsilon}{z} \right) - \operatorname{arctg} \left( -\frac{\varepsilon}{z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5-248)$$

Процесс предельного перехода, который требуется здесь сделать, аналогичен тому, который рассматривался в п. 5-4 при выводе равенства (5-83а). Будем приближать  $z$  и  $\xi$  к нулю таким образом, чтобы отношение  $\varepsilon/z$  стремилось к бесконечности; тогда получим

$$\omega(x, 0^+, t) = \frac{1}{2} H^+(x, t). \quad (5-249)$$

Граничное условие (5-225) показывает поэтому, что интенсивность слоя источников на единицу длины должна выражаться так:

$$H^+(x, t) = 2\omega_a(x, t). \quad (5-250)$$

Как и в п. 5-4, мы могли бы прийти к этому же выводу путем физических рассуждений, утверждая, что источники расходуют  $H^+$  *фут*<sup>3</sup> жидкости в единицу времени на единицу площади слоя (размер в направлении размаха равен единице). Эта жидкость может уходить только в результате движения от слоя, причем половина ее идет вверх с нормальной скоростью  $H^+/2$ , другая же половина исчезает внизу, переходя на другой лист римановой поверхности. Аналогичным образом интенсивность  $H^-$  стоков, расположенных непосредственно под щелью, потребная для создания такой же вертикальной скорости  $\omega_a$ , должна быть такова:

$$H^-(x, t) = -2\omega_a(x, t). \quad (5-251)$$

Пользуясь тем, что интенсивности слоя источников и слоя стоков представляют собой однозначные функции, можно вычислять интенсивность одного слоя, не рассматривая другой, как мы это уже и сделали. Изучая линии тока,

образованные какой-либо отдельной парой источник — сток, мы можем показать более строго, что стоки не влияют на вертикальную скорость у источников, и наоборот. В плоскости  $XZ$  сток и источник располагаются на окружности  $r = b/2$  в точках, расположенных над осью  $X$  и под ней, на одинаковых от нее расстояниях. В любой книге по элементарной гидродинамике указывается, что линии тока такой пары представляют собой окружности, проходящие через центры источника и стока. Окружность  $r = b/2$  совпадает с одной из них, являясь, таким образом, сама линией тока. Но эта окружность преобразуется в щель в плоскости  $xz$ , превращая щель в одну из линий тока на этой плоскости. Таким образом, ни один из стоков не может создать никакой вертикальной скорости вдоль слоя источников, и наоборот. Разумеется, каждый источник создает непосредственно над собой направленное вверх движение, но движение в его ближайшей окрестности полностью регулируется его собственным расходом и характеризуется скоростью  $\omega$ , определяемой равенством (5-249).

Вычисление потенциала  $\varphi'$  скоростей возмущенного течения удобно также начинать от основной окружности. Для верхней части окружности ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) из уравнения (5-236b) найдем, что нормальная скорость, создаваемая источниками на этой окружности, равна

$$q_r = 2\omega \sin \theta = 2\omega_a \sin \theta. \quad (5-252)$$

Местная интенсивность криволинейного слоя источников остается пропорциональной этой нормальной скорости, так что, по аналогии с равенством (5-250),

$$\begin{aligned} H^+(r = b/2, \theta, t) &= \\ &= 2q_r = 4\omega_a \sin \theta. \end{aligned} \quad (5-253)$$

Для стоков на нижней части окружности

$$H^-(r = b/2, \theta, t) = -4\omega_a \sin \theta. \quad (5-254)$$

Рассмотрим сначала отдельный элемент слоя источников длиной  $(\frac{1}{2}b)d\varphi$ , рас-

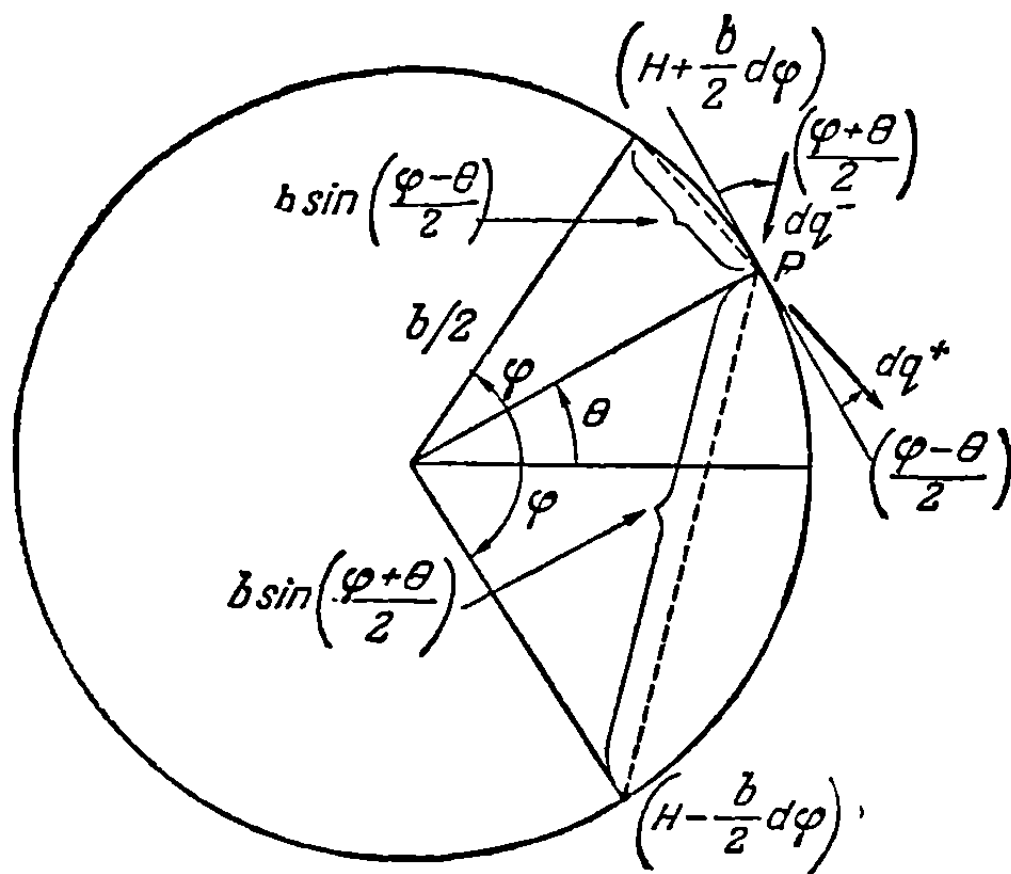
положенный на окружности в точке  $\theta = \varphi$ , вместе с соответствующим стоком, помещенным в точке  $\theta = -\varphi$ . Вычислим суммарную касательную скорость, создаваемую этой парой в произвольной точке  $p$ , определяемой углом  $\theta$  (фиг. 5-17). Скорость, индуцируемая где-либо источником или стоком, направлена по радиусу и имеет величину, равную отношению интенсивности к расстоянию от центра, деленному на  $2\pi$ . Следовательно, в точке  $P$  источник создает скорость

$$|dq^+| = \frac{H^+(\frac{1}{2}b)d\varphi}{2\pi b \sin[\frac{1}{2}(\varphi - \theta)]} = \frac{[4\omega_a \sin \varphi] (\frac{1}{2}b)d\varphi}{2\pi b \sin[\frac{1}{2}(\varphi - \theta)]} = \frac{\omega_a \sin \varphi d\varphi}{\pi \sin[\frac{1}{2}(\varphi - \theta)]}. \quad (5-255a)$$

Подобным же образом сток индуцирует скорость

$$|dq^-| = \frac{\omega_a \sin \varphi d\varphi}{\pi \sin[\frac{1}{2}(\varphi + \theta)]}. \quad (5-255b)$$

Длины и углы, связанные с выводом этих уравнений, показаны на фиг. 5-17. При положительных  $\omega_a$  как  $|dq^+|$ , так и  $|dq^-|$  направлены в сторону,



Фиг. 5-17. Скорости  $dq^+$  и  $dq^-$ , индуцируемые в лежащей на окружности точке  $P$  источником и стоком, расположенными в точках  $\varphi$  и  $-\varphi$ .

противоположному направлению отсчета  $\theta$ . Сложив их, мы получим суммарную элементарную скорость

$$dq_{\theta} = |dq^+| \cos \left[ \frac{1}{2} (\varphi - \theta) \right] - |dq^-| \cos \left[ \frac{1}{2} (\varphi + \theta) \right] = \\ = - \frac{w_{\alpha} \sin \varphi d\varphi}{\pi} \left[ \frac{\cos \left[ \frac{1}{2} (\varphi - \theta) \right]}{\sin \left[ \frac{1}{2} (\varphi - \theta) \right]} + \frac{\cos \left[ \frac{1}{2} (\varphi + \theta) \right]}{\sin \left[ \frac{1}{2} (\varphi + \theta) \right]} \right] = \frac{2w_{\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi}{\pi (\cos \varphi - \cos \theta)}. \quad (5-256)$$

Здесь были использованы элементарные тригонометрические формулы для сумм и произведений синусов и косинусов. Так же легко доказывается, что нормальная скорость  $dq_r$  в точке, определяемой углом  $\theta$ , равна нулю, что согласуется с нашим прежним утверждением о том, что окружность является линией тока.

Зная тангенциальную скорость, создаваемую дифференциальным элементом слоя источников и стоков, определим действие всего слоя путем интегрирования равенства (5-256) по всем возможным парам; это осуществляется посредством изменения  $\varphi$  от 0 до  $\pi$ :

$$q_{\theta}(\theta, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{w_{\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \theta)}. \quad (5-257)$$

Подставив выражение (5-257) в равенство (5-243), получим потенциал скоростей возмущения  $\varphi'_U$  в произвольной точке верхней половины окружности и в соответствующей точке на верхней границе щели. Производя подстановку, мы предполагаем, что угол  $\varphi'$  равен нулю у передней кромки (при  $\theta = \pi$ ); это допустимо, поскольку можно, не изменяя течения, добавлять произвольную функцию времени; имеем

$$\varphi'(\pi, t) - \varphi'_U(\theta, t) = \int_0^{\pi} q_{\theta} \frac{b}{2} d\theta, \quad (5-258)$$

откуда

$$\varphi'_U(\theta, t) = - \frac{b}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{w_{\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi d\theta}{(\cos \varphi - \cos \theta)}. \quad (5-259)$$

Вследствие антисимметричности картины течения, создаваемого слоем источников и стоков, относительно оси  $X$  значения  $q_{\theta}$  в симметрично расположенных точках на верхней и нижней половинах окружности будут одинаковы. Равенство (5-243) показывает поэтому, что разность между значениями  $\varphi'$  для  $\theta = \pi$  и для любой верхней точки должна равняться разности между значениями для соответствующей нижней точки и для  $\theta = \pi$ , т. е.

$$\varphi'(\pi, t) - \varphi'_U(\theta, t) = \varphi'_L(-\theta, t) - \varphi'(\pi, t), \quad (5-260)$$

откуда вследствие равенства нулю  $\varphi'(\pi, t)$  вытекает, что

$$\varphi'_L(-\theta, t) = - \varphi'_U(\theta, t). \quad (5-261)$$

Равенство (5-261) полезно для расчета распределения давлений вдоль щели, характеризующей профиль. В п. 5-4 было выведено линеаризованное уравнение Бернулли для неустановившегося течения [см. уравнение (5-73)]:

$$p - p_{\infty} = - \rho U u' - \rho \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = - \rho \left[ U \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right]. \quad (5-262)$$

Так как нижний предел  $\theta$  в равенстве (5-259) можно заменить соответствующим значением  $x = b \cos \theta$ , то равенства (5-262) и (5-261) дают следующее выра-

жение для разности давлений на верхнюю и нижнюю поверхности:

$$\begin{aligned} p_U - p_L &= -\rho \left[ U \left( \frac{\partial \varphi'_U}{\partial x} - \frac{\partial \varphi'_L}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \varphi'_U}{\partial t} - \frac{\partial \varphi'_L}{\partial t} \right) \right] = \\ &= -2\rho \left[ U \frac{\partial \varphi'_U}{\partial x} + \frac{\partial \varphi'_U}{\partial t} \right] = -2\rho \left[ \frac{\partial \varphi'_U}{\partial t} - \frac{U}{b \sin \theta} \frac{\partial \varphi'_U}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (5-263)$$

Интегрируя равенство (5-263), находим, что подъемная сила и момент (относительно оси, проходящей через точку  $x = ba$ ), обусловленные наличием источников и стоков и отнесенные к единице длины размаха, равны

$$\begin{aligned} L_{б.ц.} &= - \int_{-b}^b (p_U - p_L) dx = 2\rho \int_{-b}^b \frac{\partial \varphi'_U}{\partial t} dx + 2\rho U \int_{-b}^b \frac{\partial \varphi'_U}{\partial x} dx = \\ &= 2\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^b \varphi'_U dx = 2\rho b \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\pi \varphi'_U \sin \theta d\theta, \end{aligned} \quad (5-264)$$

$$\begin{aligned} M_{y_{б.ц.}} &= \int_{-b}^b (p_U - p_L) [x - ba] dx = \\ &= -2\rho U \int_{-b}^b \frac{\partial \varphi'_U}{\partial x} x dx - 2\rho \int_{-b}^b \frac{\partial \varphi'_U}{\partial t} x dx + ba L_{б.ц.} = \\ &= -2\rho U \left[ \varphi'_U x \Big|_{x=-b}^{x=b} - \int_{-b}^b \varphi'_U dx \right] - 2\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^b \varphi'_U x dx + 2\rho ba \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^b \varphi'_U dx = \\ &= 2\rho U \int_{-b}^b \varphi'_U dx - 2\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^b \varphi'_U [x - ba] dx = \\ &= 2\rho U b \int_0^\pi \varphi'_U \sin \theta d\theta - 2\rho b^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\pi \varphi'_U [\cos \theta - a] \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (5-265)$$

Последние строки каждой из этих формул дают возможность использовать непосредственно  $\varphi'_U$  как функцию  $\theta$ , т. е. в форме, даваемой равенством (5-259). При выводе формул использовался тот факт, что  $\varphi'_U$  обращается в нуль как у передней, так и у задней кромки. Для последней точки ( $\theta = 0$ ) этот факт устанавливается с помощью равенства (5-261); так как источники и стоки не создают циркуляции вокруг окружности или щели, то  $\varphi'$  является однозначной функцией и

$$\varphi'_U(\theta = 0, t) = \varphi'_L(\theta = 0, t) = 0. \quad (5-266)$$

Индекс „б.ц.“ при обозначениях  $L$  и  $M_y$  указывает на бесциркуляционный характер течения. Между прочим, равенство (5-264) показывает, что в любом установившемся течении подъемная сила равна нулю, о чем при отсутствии циркуляции можно заключить по формуле (5-106).

Как очевидно из вывода равенств (5-259) — (5-264), эти равенства справедливы для произвольного неустановившегося движения профиля. Поучительно применить их к некоторым случаям, представляющим практический интерес. Следуя Теодорсену, рассмотрим недеформируемый в направлении хорды профиль, имеющий у задней кромки аэродинамический неуравновешенный закрылок или рулевую поверхность, шарнирно закрепленную в точке  $x = bc$ . Профиль может совершать вертикальное перемещение  $h(t)$  и поворачиваться относительно

оси, проходящей через точку  $x = ba$ , на угол  $\alpha(t)$ ;  $\beta(t)$  обозначает угловое смещение закрылка по отношению к линии хорды профиля. Положительные направления отсчета этих переменных величин изображены на фиг. 5-18. Влияние кривизны и постоянного начального значения угла атаки при этом не учитывается, так как результаты этих влияний можно рассчитать с помощью теории установившего течения, наложив их затем на результаты настоящего расчета. Функция  $z_a(x, t)$ , характеризующая мгновенное значение малого смещения линии хорды, выражается в виде

$$z_a(x, t) = \begin{cases} -h - \alpha[x - ba]; & \text{для } -b \leq x \leq bc, \\ -h - \alpha[x - ba] - \beta[x - bc]; & \text{для } bc \leq x \leq b. \end{cases} \quad (5-267)$$

Подставив эту функцию в уравнение (5-225), найдем

$$\begin{aligned} \omega_a(x, t) = & \\ = & \begin{cases} -\dot{h} - U\alpha - \dot{\alpha}[x - ba]; & \text{для } -b \leq x \leq bc, \\ -\dot{h} - U\alpha - \dot{\alpha}[x - ba] - U\beta - \dot{\beta}[x - bc]; & \text{для } bc \leq x \leq b, \end{cases} \end{aligned} \quad (5-268)$$

где точка указывает на дифференцирование по  $t$ .

Дадим здесь оценку потенциалов скоростей, давлений и сил, обусловленных движениями, характеризуемыми изменениями  $h$  и  $\alpha$ . Результаты, обусловленные движением закрылка, будут просто выписаны, поскольку их весьма трудоемкий вывод приведен в приложении III к работе [5-29]. Если для упрощения интегрирования использовать подстановку  $x = b \cos \theta$  и формулу (5-100), то, подставив величины (5-268) при  $\beta = 0$  в равенство (5-259), получим

$$\begin{aligned} \varphi'_U(\theta, t) = \frac{b}{\pi} [\dot{h} + U\alpha] \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \varphi d\varphi d\theta}{(\cos \varphi - \cos \theta)} + \frac{b^2 \dot{\alpha}}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \varphi [\cos \varphi - a] d\varphi d\theta}{(\cos \varphi - \cos \theta)} = \\ = b [\dot{h} + U\alpha] \sin \theta + b^2 \dot{\alpha} \sin \theta \left[ \frac{1}{2} \cos \theta - a \right]. \end{aligned} \quad (5-269)$$

(Эти формулы легко сравнить с формулами Теодорсена, так как он использует безразмерную переменную, определяемую соотношением  $x = \cos \theta$ .) Для распределения давления формула (5-263) дает следующее выражение:

$$\begin{aligned} (p_U - p_L)_{\text{б.д.}} = -2\rho \{ -\dot{h}U \operatorname{ctg} \theta + \ddot{h}b \sin \theta - \alpha U^2 \operatorname{ctg} \theta + \\ + \dot{\alpha} Ub \left[ \sin \theta - \operatorname{ctg} \theta \left( \frac{1}{2} \cos \theta - a \right) + \frac{1}{2} \sin \theta \right] + \ddot{\alpha} b^2 \sin \theta \left[ \frac{1}{2} \cos \theta - a \right] \}. \end{aligned} \quad (5-270)$$

Выражения для подъемной силы и момента мы получим из формул (5-269), (5-264) и (5-265):

$$L_{\text{б.д.}} = \pi \rho b^2 [\dot{h} + U\dot{\alpha} - b a \ddot{\alpha}], \quad (5-271)$$

$$M_{y_{\text{б.д.}}} = \pi \rho b^2 \left[ U\dot{h} + ba\dot{\alpha} + U^2 a - b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right]. \quad (5-272)$$

Из формул (5-270) и (5-272) можно уяснить многие подробности, касающиеся бесциркуляционного течения. Мы видим, например, что задачи, связанные с величинами  $\dot{h}$  и  $U\alpha$  в равенствах (5-268), аналогичны одна другой; каждая из них соответствует вертикальной скорости, постоянной в любой момент времени для всех точек профиля. Этот тип движения называется иногда движением с углом атаки, или движением, характеризующимся вертикальным переме-



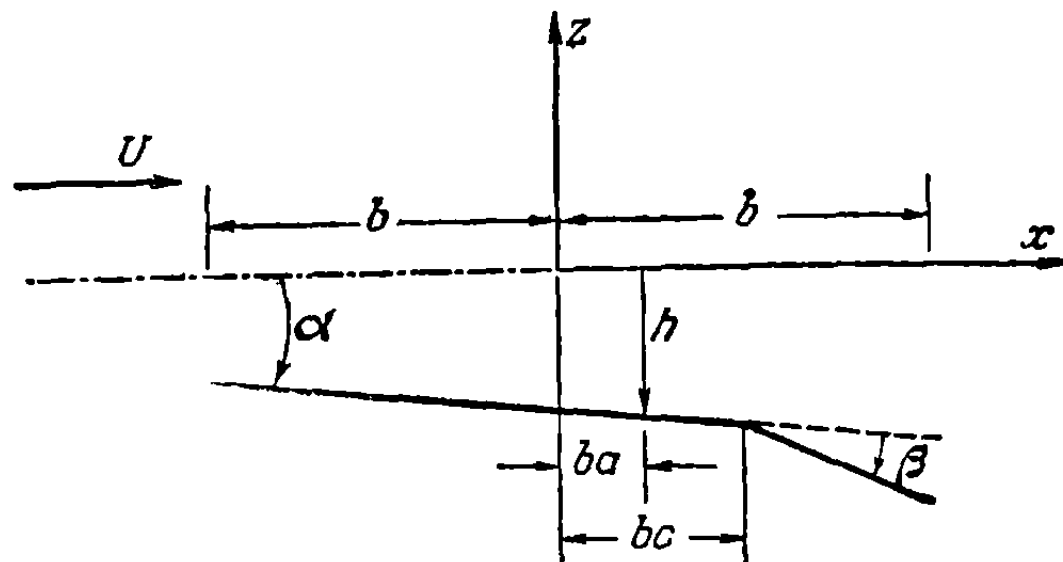
щением, в противоположность чисто вращательному движению, влияние которого проявляется через величину  $\dot{\alpha}$  в равенствах (5-268). Можно проследить, что члены, содержащие  $\dot{h}$  или  $U\alpha$ , входят в любое из уравнений (5-269)—(5-272) совместно. Отметим, что  $\dot{h}$  создает два различных распределения давления: компоненту  $2\rho U\dot{h} \operatorname{ctg} \theta$ , распределенную антисимметрично вдоль хорды и изменяющуюся от нуля посередине хорды до положительной и отрицательной бесконечностей у задней и передней кромок соответственно, и компоненту  $-2\rho b\ddot{h} \sin \theta$ , изменяющуюся как функция  $x$  по эллиптическому закону. Первая компонента не дает результирующей силы, а создает лишь дестабилизирующую пару  $\pi r b^2 U \dot{h}$ .

Вторая компонента создает подъемную силу  $\pi r b^2 \ddot{h}$ , направленную противоположно вектору  $\ddot{h}$  и пропорциональную ему по величине; эта сила приложена в середине хорды, что, очевидно, связано с обращением в нуль членов  $\pi r b^3 a \ddot{h}$  в выражении для момента при  $a = 0$ . Вспоминая некоторые из обобщений, касающихся бесциркуляционного движения жидкости и сделанных нами в п. 5-2, мы можем немедленно применить их здесь. Так, присоединенная масса, связанная с поперечным ускорением  $\ddot{h}$ , равна  $\rho(\pi b^2)$  на единицу длины размаха. Было указано, что это точно совпадает с массой цилиндра жидкости, диаметр которого равен хорде крыла. Пара  $\pi r b^2 U \dot{h}$ , действующая даже тогда, когда „угол атаки“ постоянен, аналогична той паре [см. уравнение (5-58)], которая действует на трехмерное тело в установившемся полете, и имеет то же физическое происхождение. Обращаясь к членам, характеризующим вращательное движение, мы обнаруживаем, что, когда ось вращения отодвинута от середины хорды, угловое ускорение создает момент  $-\pi r b^4 \left(\frac{1}{8} + a^2\right) \ddot{\alpha}$  и подъемную силу  $-\pi r b^3 a \ddot{\alpha}$ .

Момент можно представить себе как обусловленный присоединенным моментом инерции  $\rho \left[ \pi b^4 \left(\frac{1}{8} + a^2\right) \right]$ . Из этого результата видно, что было бы заблуждением чересчур тесно связывать идею присоединенной виртуальной массы с определенными объемами жидкости: в то время как цилиндр с хордой  $2b$  в качестве диаметра содержал бы массу жидкости, связанную с линейным ускорением, соответствующий цилиндр для угловых ускорений относительно оси, проходящей через середину хорды, имел бы диаметр  $\sqrt{2}b$ .

В заключение анализа бесциркуляционного течения воспроизведем взятые из работы [5-29] выражения для потенциала скоростей, подъемной силы и момента, обусловленных вращением неуравновешенного закрылка:

$$\begin{aligned} (\varphi'_U)_\beta = & \frac{Ub}{\pi} \beta \left\{ \sin \theta \arccos c - (\cos \theta - c) \ln \left[ \frac{1 - c \cos \theta - \sin \theta \sqrt{1 - c^2}}{\cos \theta - c} \right] \right\} + \\ & + \frac{b^2}{2\pi} \dot{\beta} \left\{ \sin \theta \sqrt{1 - c^2} + (\cos \theta - 2c) \sin \theta \arccos c - \right. \\ & \left. - (\cos \theta - c)^2 \ln \left[ \frac{1 - c \cos \theta - \sin \theta \sqrt{1 - c^2}}{\cos \theta - c} \right] \right\}, \quad (5-273) \end{aligned}$$



Фиг. 5-18. Средняя линия недеформируемого в направлении хорды профиля с закрылком, закрепленным без зазора у задней кромки и аэродинамически неуравновешенным. Величина  $h(t)$  определяет смещение вниз оси ( $x = ba$ ), вокруг которой происходит поворот на угол  $\alpha(t)$ ;  $\beta(t)$  — угол между линией хорды профиля и закрылком. Все величины положительны при указанном направлении изменения.

$$(L_{б.ц.})_{\beta} = -\rho b^2 U \dot{\beta} [c \sqrt{1-c^2} - \arccos c] - \rho b^3 \ddot{\beta} \left[ c \arccos c - \frac{1}{3} (2+c^2) \sqrt{1-c^2} \right], \quad (5-274)$$

$$\begin{aligned} (M_{y_{б.ц.}})_{\beta} = & -\rho b^2 U^2 \dot{\beta} [c \sqrt{1-c^2} - \arccos c] - \\ & -\rho b^3 U \dot{\beta} \left\{ \frac{1}{3} \sqrt{1-c^2} (c^2-1) - (c-a) [c \sqrt{1-c^2} - \arccos c] \right\} - \\ & -\rho b^4 \ddot{\beta} \left\{ \left( \frac{1}{8} + c^2 \right) \arccos c - \frac{1}{8} c \sqrt{1-c^2} (7+2c^2) + \right. \\ & \left. + (c-a) \left[ \frac{1}{3} \sqrt{1-c^2} (2+c^2) - c \arccos c \right] \right\}. \quad (5-275) \end{aligned}$$

Если учитывать влияние всех степеней свободы, то шарнирный момент (положительный, если он соответствует опусканию задней кромки), отнесенный к единице длины размаха и действующий на закрылок, будет равен

$$\begin{aligned} M_{\beta_{б.ц.}} = & \int_{bc}^b [p_U - p_L] [x - bc] dx = -\rho b^2 U \dot{h} [c \sqrt{1-c^2} - \arccos c] + \\ & + \rho b^3 \ddot{h} \left[ c \arccos c - \frac{1}{3} (2+c^2) \sqrt{1-c^2} \right] - \rho b^2 U^2 \alpha [c \sqrt{1-c^2} - \arccos c] + \\ & + \rho b^3 U \dot{\alpha} \left\{ a [c \sqrt{1-c^2} - \arccos c] + \frac{1}{3} (\sqrt{1-c^2})^3 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} (2+c^2) \sqrt{1-c^2} + c \arccos c \right\} - \\ & - \rho b^4 \ddot{\alpha} \left\{ \left( \frac{1}{8} + c^2 \right) \arccos c - \frac{1}{8} c \sqrt{1-c^2} (7+2c^2) + \right. \\ & \left. + (c-a) \left[ \frac{1}{3} (2+c^2) \sqrt{1-c^2} - c \arccos c \right] \right\} - \\ & - \frac{\rho b^2 U^2}{\pi} \beta [2c \sqrt{1-c^2} \arccos c - (1-c^2) - (\arccos c)^2] + \\ & + \frac{\rho b^4}{\pi} \ddot{\beta} \left[ \frac{1}{4} c \sqrt{1-c^2} \arccos c (7+2c^2) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{1}{8} + c^2 \right) (\arccos c)^2 - \frac{1}{8} (1-c^2) (5c^2+4) \right]. \quad (5-276) \end{aligned}$$

Решение для бесциркуляционного течения само по себе не может обеспечить удовлетворения гипотезы Кутта. Это легко увидеть, рассматривая равенство (5-270) или вычисляя составляющую  $u'$  скорости возмущения, от которой зависит давление, у задней кромки при  $x=b$ ,  $\theta=0$ . В общем случае

$$|u'| = \frac{|q_n|}{|2 \sin \theta|}, \quad (5-235a)$$

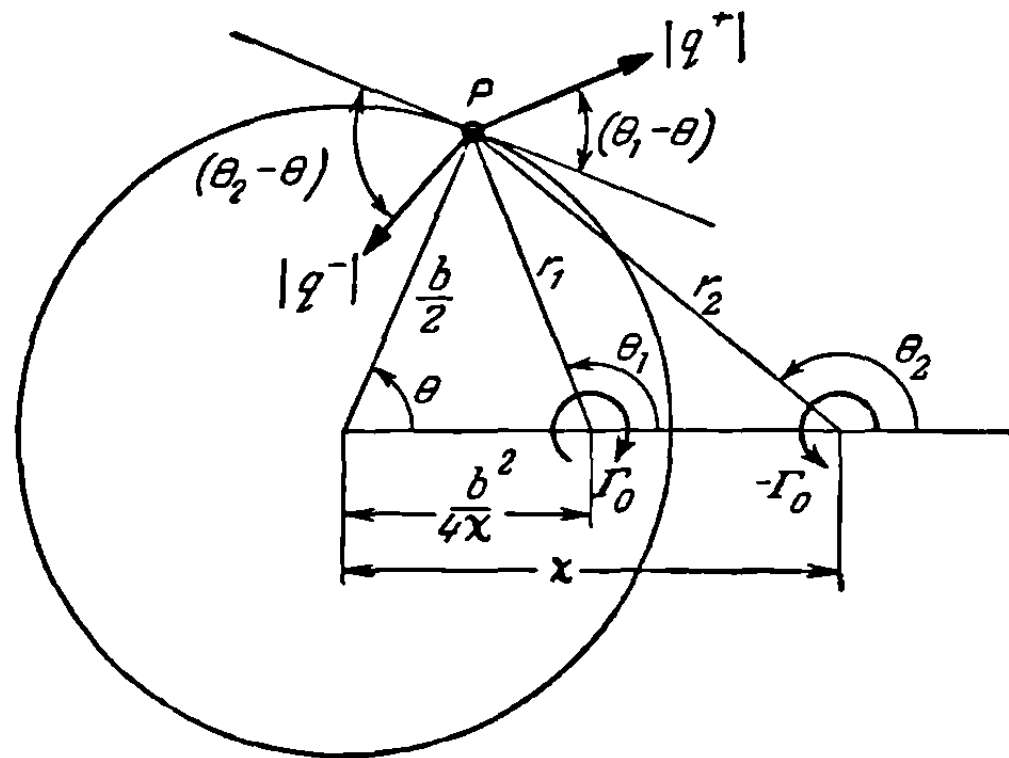
но это выражение при  $\sin \theta = 0$  принимает бесконечное значение, если только  $q_n$  там не обращается в нуль. Однако величина  $q_n$ , определяемая равенством (5-257), равна нулю только для такого весьма специального случая движения профиля, при котором удовлетворяется интегральное уравнение

$$\int_0^{\pi} \frac{w_a(\varphi, t) \sin^2 \varphi d\varphi}{(\cos \varphi - 1)} = 0, \quad (5-277)$$

а этот случай представляет лишь чисто теоретический интерес. Необходимо поэтому осуществить наложение некоторого добавочного потока, который унич-

тожал бы бесциркуляционную скорость  $q_\theta(0, t)$ . По аналогии с техникой, применявшейся для установившегося движения профиля, Теодорсен достигает этого с помощью присоединенных вихрей и спутной струи из стекающих вихрей противоположного направления, непрерывно удаляющихся от профиля со скоростью невозмущенного потока. Так как эти вихри возникают у задней кромки, то центры вихрей спутной струи располагаются вдоль оси  $x$  в ее положительном направлении, начиная от точки  $x = b$ . Следовательно, их отображения в плоскости  $XU$  находятся на оси  $X$  и соответствующие положения можно определить при помощи уравнений (5-231). Каждому из вихрей спутной струи соответствует присоединенный вихрь с противоположной по знаку циркуляцией, располагающийся в „отображенной“ точке внутри окружности; благодаря этому выполняется закон о равенстве нулю полной циркуляции и одновременно окружность и разрез превращаются в линии тока вихревого течения, так что граничные условия не нарушаются. В книгах по гидромеханике доказывается, что если необходимо, чтобы окружность  $r = b/2$  оставалась линией тока, то отображение вихря, находящегося в точке  $\chi$  на оси  $X$ , помещается в точке, где  $X = b^2/4\chi$ .

Начнем с рассмотрения свойств течения, созданного одиночным присоединенным вихрем с положительной интенсивностью  $\Gamma_0$  и его отображением с интенсивностью  $-\Gamma_0$ . Эти два вихря показаны на фиг. 5-19 вместе с результирующими скоростями  $|q^+|$  и  $|q^-|$ , индуцируемыми ими в произвольной точке  $p$  на окружности. Как и для любого двумерного вихря, каждая из этих скоростей направлена перпендикулярно к прямой, соединяющей индуцирующий эту скорость вихрь с точкой  $p$ , и имеет величину, равную деленному на  $2\pi$  отношению интенсивности к расстоянию. Используя символы, значение которых поясняется на фиг. 5-19, просуммируем тангенциальные составляющие скоростей  $|q^+|$  и  $|q^-|$ , в результате чего получим скорость  $q_\theta$  в точке  $p$ <sup>1)</sup>:



Фиг. 5-19. Присоединенный вихрь интенсивности  $\Gamma_0$  на окружности и его отображение  $\Gamma_0$  в точке  $X = \chi$ . Показаны также результирующие скорости  $|q^+|$  и  $|q^-|$ , индуцируемые обоими вихрями в произвольной точке на окружности радиуса  $r = b/2$ .

$$q_\theta = |q^-| \cos(\theta_2 - \theta) - |q^+| \cos(\theta_1 - \theta) = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \left[ \frac{r_2 \cos(\theta_2 - \theta)}{r_2^2} - \frac{r_1 \cos(\theta_1 - \theta)}{r_1^2} \right]. \quad (5-278)$$

Применяя теорему косинусов к двум треугольникам, изображенным на фиг. 5-19, получаем

$$r_2^2 = \chi^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\chi \frac{b}{2} \cos \theta, \quad (5-279a)$$

$$r_1^2 = \left[\frac{b^2}{4\chi}\right]^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2 \frac{b^2}{4\chi} \cdot \frac{b}{2} \cos \theta. \quad (5-279b)$$

Можно также опустить из центров двух вихрей перпендикуляры на прямую,

<sup>1)</sup> Несложные вычисления показывают, что скорость  $q_r$ , индуцируемая этой парой вихрей, равна нулю; тем самым доказывается, что окружность  $r = b/2$  является линией тока.

соединяющую точку  $p$  с центром окружности; пользуясь простыми тригонометрическими соотношениями, находим

$$r_2 \cos(\theta_2 - \theta) = \frac{b}{2} - \chi \cos \theta, \quad (5-280a)$$

$$r_1 \cos(\theta_1 - \theta) = \frac{b}{2} - \frac{b^2}{4\chi} \cos \theta. \quad (5-280b)$$

Подставим выражения (5-279) и (5-280) в равенство (5-278) и приведем результат к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} q_\theta &= \frac{\Gamma_0}{2\pi} \left\{ \frac{\frac{1}{2}b - \chi \cos \theta}{\chi^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - \chi b \cos \theta} - \frac{\frac{1}{2}b - (b^2/4\chi) \cos \theta}{(b^2/4\chi^2) \left[ \left(\frac{1}{2}b\right)^2 + \chi^2 - \chi b \cos \theta \right]} \right\} = \\ &= -\frac{\Gamma_0}{\pi b} \left[ \frac{\chi^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2}{\chi^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - \chi b \cos \theta} \right]. \end{aligned} \quad (5-281)$$

Предполагая опять, что  $\varphi'$  обращается в нуль у передней кромки, вычислим с помощью равенства (5-258) потенциал скоростей на верхней части окружности или щели:

$$\begin{aligned} \varphi'_U(\theta, t) &= -\int_\theta^\pi q_\theta \frac{b}{2} d\theta = \frac{\Gamma_0 \left[ \chi^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2 \right]}{2\pi} \int_\theta^\pi \frac{d\theta}{\chi^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - \chi b \cos \theta} = \\ &= \frac{\Gamma_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\chi - \frac{1}{2}b}{\chi + \frac{1}{2}b} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} \right]. \end{aligned} \quad (5-282)$$

Найдем теперь с помощью равенства (5-263) распределение давления, которое вследствие антисимметричности скоростей возмущения по отношению к оси  $X$  будет иметь место и в циркуляционном течении. Сделав это, заметим, что мы получим зависимость от времени с помощью функции  $\chi$ , определяющей положение вихря спутной струи в зависимости от  $t$ . Функция  $\chi(t)$  не известна непосредственно, но мы предположили, что точка  $x = \xi$  в плоскости  $xz$  движется вниз по течению со скоростью  $U$ , так что

$$\frac{d\xi}{dt} = U. \quad (5-283)$$

Связь между  $\xi$  и  $\chi$  определяется первым из уравнений (5-231):

$$\xi = \chi + \frac{b^2}{4\chi}. \quad (5-284)$$

Равенство (5-284) можно записать в другой эквивалентной форме,

$$\sqrt{\frac{\xi - b}{\xi + b}} = \frac{\chi - (b/2)}{\chi + (b/2)}, \quad (5-285)$$

которая позволяет нам записать равенство (5-282) в виде

$$\varphi'_U(\theta, t) = \frac{\Gamma_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{(\xi - b)(1 + \cos \theta)}{(\xi + b)(1 - \cos \theta)}} \right]. \quad (5-286)$$

Отсюда после некоторых преобразований распределение давления, обусловленного наличием пары вихрей, определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} (p_U - p_L)_{\Gamma_0} &= -2\rho \left[ \frac{\partial \varphi'_U}{\partial t} - \frac{U}{b \sin \theta} \frac{\partial \varphi'_U}{\partial \theta} \right] = \\ &= -2\rho \left[ \frac{\partial \varphi'_U}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} - \frac{U}{b \sin \theta} \frac{\partial \varphi'_U}{\partial \theta} \right] = \frac{-\rho U \Gamma_0 [\xi + b \cos \theta]}{\pi b \sin \theta \sqrt{\xi^2 - b^2}}. \end{aligned} \quad (5-287)$$

При вычислении подъемной силы и момента мы не можем использовать окончательные выражения из равенств (5-264) и (5-265), потому что  $\varphi'_U$  при наличии циркуляции уже не обращается в нуль у задней кромки. Действительно, равенство (5-286) дает

$$\varphi'_U(0, t) = \Gamma_0/2. \quad (5-288)$$

Этим подтверждается известный факт, что потенциал скоростей должен возрастать на величину, равную циркуляции, после каждого обхода вокруг вихря по замкнутому контуру по часовой стрелке. Результирующие аэродинамические нагрузки мы можем найти или путем интегрирования выражения для  $p_U - p_L$ , или косвенным путем, используя первую строку равенств (5-287). Эти нагрузки оказываются равными:

$$L_{\Gamma_0} = \frac{\rho U \Gamma_0 \xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}}, \quad (5-289)$$

$$M_{y\Gamma_0} = \frac{\rho U \Gamma_0 b^2}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \left[ \frac{\xi}{b} a - \frac{1}{2} \right], \quad (5-290)$$

$$\begin{aligned} M_{\Gamma_0} &= -\frac{\rho U \Gamma_0 b}{\pi} \left\{ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \left[ \left(1 + \frac{c}{2}\right) \sqrt{1 - c^2} - \left(c + \frac{1}{2}\right) \arccos c \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} \left[ \arccos c - c \sqrt{1 - c^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5-291)$$

Когда  $\xi$  становится очень большим, течение приближается по характеру к течению при наличии одиночного присоединенного вихря с интенсивностью  $\Gamma_0$ . Подъемная сила становится тогда равной  $\rho U \Gamma_0$  и, как видно из формулы (5-290), действует посредине хорды.

Для оценки механического воздействия всего циркуляционного течения можно использовать формулы (5-286)—(5-291), если сосредоточенный вихрь интенсивности  $\Gamma_0$  отождествить с отдельным элементом стекающего вихревого слоя интенсивности  $\gamma_w d\xi$ . Как и в п. 5-5,  $\gamma_w = \gamma_w(\xi, t)$  обозначает циркуляцию на единицу длины спутной струи, положительную в обычном направлении. Имея выражение

$$\Gamma_0 = -\gamma_w d\xi, \quad (5-292)$$

найдем суммарное распределение давления и аэродинамическую нагрузку с помощью интегрирования по всей спутной струе в пределах от  $\xi = b$  до  $\xi = \infty$ , помня при этом, что, если мы имеем дело с движением, происходящим лишь в течение конечного промежутка времени  $t_0$ , то верхний предел может быть заменен на  $b + Ut_0$ :

$$p_U - p_L = \frac{\rho U}{\pi b \sin \theta} \int_b^{\infty} \left[ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} (1 - \cos \theta) + \sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} \cos \theta \right] \gamma_w(\xi, t) d\xi, \quad (5-293)$$

$$L_C = -\rho U \int_b^{\infty} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \gamma_w(\xi, t) d\xi, \quad (5-294)$$

$$M_{yC} = \rho U b \int_b^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} - \left(a + \frac{1}{2}\right) \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \right] \gamma_w(\xi, t) d\xi, \quad (5-295)$$

$$M_{\beta C} = \frac{\rho U b}{\pi} \left\{ \left[ \left(1 + \frac{c}{2}\right) \sqrt{1-c^2} - \left(c + \frac{1}{2}\right) \arccos c \right] \int_h^{\infty} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \gamma_w(\xi, t) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ \arccos c - c \sqrt{1-c^2} \right] \int_b^{\infty} \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} \gamma_w(\xi, t) d\xi \right\}. \quad (5-296)$$

Все выражения были здесь несколько преобразованы с тем, чтобы было видно, что давление в циркуляционном потоке, подъемная сила, момента тангажа и шарнирный момент зависят лишь от двух различных интегралов с весом от циркуляции спутной струи.

Остается объединить поток от источников и поток от вихрей, применяя к их сочетанию гипотезу Кутта. Как видно из равенства (5-235а), это удобно сделать, добиваясь обращения в нуль величины  $q_{\theta}(0, t)$ , представленной в виде суммы двух слагаемых. Бесциркуляционное слагаемое  $q_{\theta}$  определяется равенством (5-257), циркуляционное же можно вычислить, выражая  $\chi$  в равенстве (5-281) через  $\xi$  и интегрируя по спутной струе. Суммируя эти два результата при значении  $\theta = 0$ , найдем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{w_a \sin^2 \varphi d\varphi}{(\cos \varphi - 1)} + \frac{1}{\pi b} \int_b^{\infty} \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} \gamma_w(\xi, t) d\xi = 0. \quad (5-297)$$

Так как функция  $w_a$  задана, то равенство (5-297) представляет собой интегральное уравнение для определения циркуляции спутной струи  $\gamma_w$ , от которой зависят все важные свойства циркуляционного течения. Половину первого интеграла Теодорсен обозначает через  $Q$ . Для случая движения (профиля), описанного уравнением (5-268), уравнение (5-297) записывается в виде

$$-\frac{1}{2\pi b} \int_b^{\infty} \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} \gamma_w(\xi, t) d\xi = Q = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [1 + \cos \varphi] [\dot{h} + U\alpha + \dot{\alpha}b(\cos \varphi - a)] d\varphi + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\arccos c} [1 + \cos \varphi] [U\beta + \dot{\beta}b(\cos \varphi - c)] d\varphi = \\ = \dot{h} + U\alpha + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} + \frac{U\beta}{\pi} [\sqrt{1-c^2} + \arccos c] + \\ + \frac{b\dot{\beta}}{2\pi} [(1-2c)\arccos c + (2-c)\sqrt{1-c^2}]. \quad (5-298)$$

Просуммируем распределения давлений и аэродинамические нагрузки для циркуляционного и бесциркуляционного течений, используя то преимущество, что, как показывает первая строка равенств (5-298), один из интегралов спутной

струм тождественно равен известной функции  $Q$ ; имеем

$$(p_U - p_L) = (p_U - p_L)_{\text{в.п.}} - 2\rho U Q \left\{ \text{ctg } \theta + \left[ \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right] \frac{\int_b^{\infty} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \gamma_w(\xi, t) d\xi}{\int_b^{\infty} \sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} \gamma_w(\xi, t) d\xi} \right\}; \quad 5-299)$$

$$L = L_{\text{в.п.}} + 2\pi\rho U b Q \frac{\int_b^{\infty} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \gamma_w(\xi, t) d\xi}{\int_b^{\infty} \sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} \gamma_w(\xi, t) d\xi}; \quad 5-300)$$

$$M_y = M_{y \text{ в.п.}} - 2\pi\rho U b^2 Q \left\{ \frac{1}{2} - \left( a + \frac{1}{2} \right) \frac{\int_b^{\infty} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \gamma_w(\xi, t) d\xi}{\int_b^{\infty} \sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} \gamma_w(\xi, t) d\xi} \right\}; \quad 5-301)$$

$$M_z = M_{z \text{ в.п.}} - 2\rho U b^2 Q \left\{ \frac{1}{2} [\arccos c - c \sqrt{1 - c^2}] + \left[ \left( 1 + \frac{c}{2} \right) \sqrt{1 - c^2} - \left( c + \frac{1}{2} \right) \arccos c \right] \frac{\int_b^{\infty} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \gamma_w(\xi, t) d\xi}{\int_b^{\infty} \sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} \gamma_w(\xi, t) d\xi} \right\}. \quad 5-302)$$

Как видно из формул, зависимость всех величин от циркуляции спутной струи выражается через некоторое отношение двух интегралов. Во всех предшествующих выкладках не было сделано никаких ограничений, касающихся характера зависимости движения от времени, за исключением того, что движение не должно противоречить гипотезе о малости возмущений. Теперь мы ограничимся рассмотрением простых гармонических колебаний и будем считать  $z_a$  и  $w_a$  функциями следующего вида:

$$z_a(x, t) = \bar{z}_a(x) e^{i\omega t}, \quad (5-303)$$

$$w_a(x, t) = \bar{w}_a(x) e^{i\omega t}, \quad (5-304)$$

где для обеспечения возможности изменения фазы от точки к точке  $\bar{z}_a$  и  $\bar{w}_a$  могут быть комплексными числами. Разумеется, реальная вибрация физической системы характеризуется действительными частями комплексных величин  $z_a$ ; линейность соотношений между всеми зависимыми переменными позволяет нам извлечь пользу из весьма удобного математического обозначения  $e^{i\omega t}$ . Если движение происходило в течение неопределенного отрезка времени, то, как показывает линейное уравнение (5-297),  $\gamma_w$  должна быть также пропорциональна  $e^{i\omega t}$ . Тем самым устанавливается ее функциональная зависимость как от  $\xi$ , так и от  $t$ , потому что в нашей упрощенной схеме  $\gamma_w$  постоянна в каждой



точке, движущейся вниз по потоку со скоростью  $U$ . Положение такой точки определяется уравнением

$$\xi = \xi_0 + Ut, \quad (5-305)$$

где  $\xi_0$  обозначает ее положение при  $t=0$ . Следовательно, при постоянном  $\xi_0 - \xi - Ut$  величина  $\gamma_w$  должна быть постоянной и может зависеть от  $\xi$  и  $t$  только как функция от  $\xi - Ut$  или от некоторой видоизмененной комбинации (например, от  $t - \xi/U$ ), которая обладает тем же свойством (оставаться постоянной). Соответственно будем описывать простое гармоническое движение слутной струи, предполагая, что

$$\gamma_w(\xi, t) = \bar{\gamma}_w e^{i\omega[t - (\xi/U)]} = \bar{\gamma}_w e^{i(\omega t - k\xi^*)}, \quad (5-306)$$

где величина

$$k = \frac{\omega b}{U} \quad (5-307)$$

известна под названием приведенной частоты колебаний, а

$$\xi^* = \xi/b \quad (5-96)$$

представляет собой безразмерную переменную, введенную в п. 5-4. Отношение интегралов, посредством которого определяется зависимость решения задачи от условий в слутной струе, принимает вид<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\int_b^\infty \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \gamma_w(\xi, t) d\xi}{\int_b^\infty \sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} \gamma_w(\xi, t) d\xi} &= \frac{\bar{\gamma}_w e^{i\omega t b} \int_1^\infty \frac{\xi^*}{\sqrt{\xi^{*2} - 1}} e^{-ik\xi^*} d\xi^*}{\bar{\gamma}_w e^{i\omega t b} \int_1^\infty \sqrt{\frac{\xi^* + 1}{\xi^* - 1}} e^{-ik\xi^*} d\xi^*} = \\ &= \frac{\int_1^\infty \frac{\xi^*}{\sqrt{\xi^{*2} - 1}} e^{-ik\xi^*} d\xi^*}{\int_1^\infty \sqrt{\frac{\xi^* + 1}{\xi^* - 1}} e^{-ik\xi^*} d\xi^*} = C(k), \quad (5-308) \end{aligned}$$

т. е. становится комплексной функцией одной лишь приведенной частоты  $k$ . Пользуясь формулой (34) на стр. 51 работы [5-36], Теодорсен отождествляет интегралы в уравнении (5-308) с функциями Ханкеля второго рода

$$C(k) = F(k) + iG(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)}, \quad (5-309)$$

где  $H_n^{(2)}$  представляет собой полезную при решении задач излучения комбинацию функций Бесселя первого и второго рода:

$$H_n^{(2)} = J_n - iY_n. \quad (5-310)$$

На фиг. 5-20,  $b$  представлен график изменения  $C(k)$  как комплексного вектора. Подстановка выражений (5-308) и (5-309) в равенства (5-299)—(5-302) завершает решение в замкнутой форме. В выражениях для моментов некоторые слагаемые, соответствующие циркуляционному и бесциркуляционному течениям, взаимно уничтожаются. Окончательные выражения для подъемной силы и момента тангажа,

1) Обращаем внимание читателя на последующие пояснения, касающиеся математического вопроса о существовании интегралов, входящих в это равенство.

обусловленных, например, вертикальным перемещением и изменением угла тангажа, могут быть записаны так:

$$L = \pi r b^2 [\ddot{h} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}] + 2\pi r U b C(k) \left[ \dot{h} + U\alpha + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right], \quad (5-311)$$

$$M_y = \pi r b^2 \left[ ba\ddot{h} - U b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} - b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right] + 2\pi r U b^2 \left( a + \frac{1}{2} \right) C(k) \left[ \dot{h} + U\alpha + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right]. \quad (5-312)$$

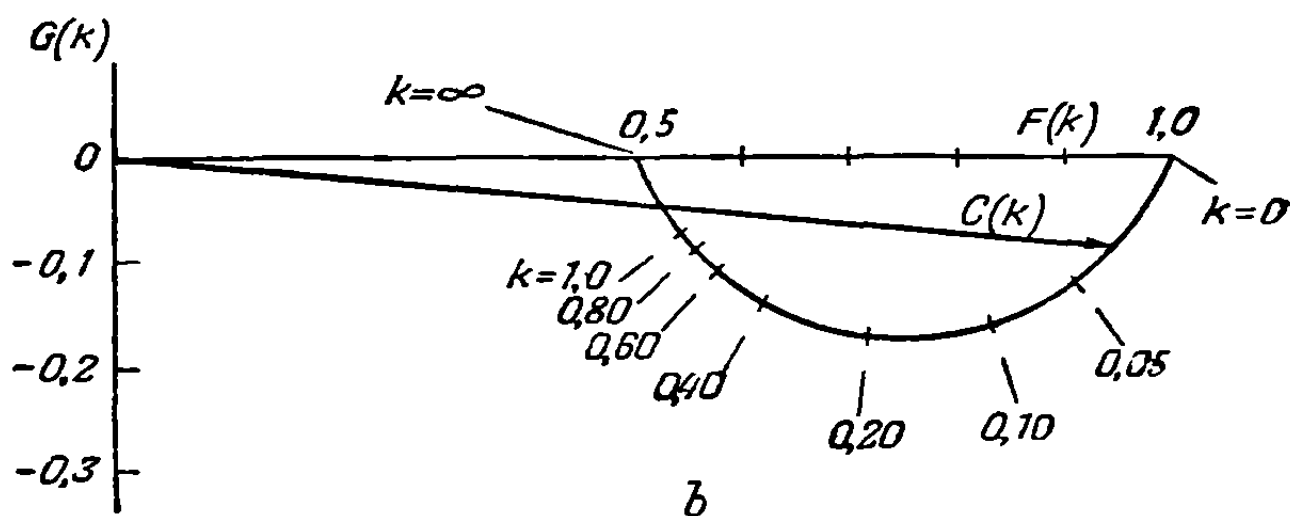
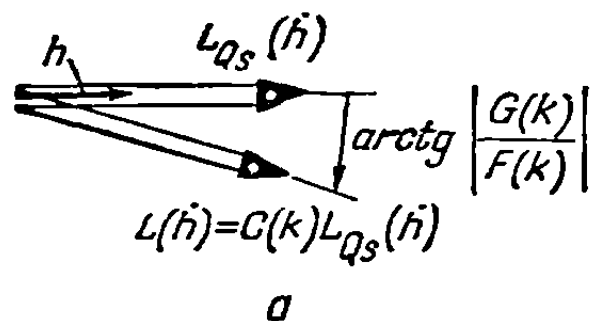
Строго говоря, два интеграла, приводящие к функции Теодорсена  $C(k)$ , не являются сходящимися. При стремлении  $\xi^*$  к бесконечному верхнему пределу оба подинтегральных выражения приближаются к виду  $(\cos k\xi^* - i \sin k\xi^*)$ , соответствующему непрерывным колебаниям вектора с абсолютной величиной, равной единице.

Можно показать, однако, что результат, выражаемый равенством (5-309), правилен, если представить себе сначала слабоусиливающиеся колебания, когда  $k$  является комплексным числом с отрицательной мнимой частью.

Тогда подинтегральные функции сходятся в бесконечности, и, как доказывалось в работе [5-36], представление результата с помощью функций Ханкеля является точным. С физической точки зрения мы должны ожидать непрерывной функциональной зависимости аэродинамических нагрузок от степени демпфирования, а их предельные выражения при уменьшении демпфирования до нуля должны содержать именно функцию  $C(k)$ . Все эти рассуждения не годятся при попытке рассмотреть случай затухающих колебаний, но, к счастью, были даны другие решения для простого гармонического движения, позволяющие избежать сомнительного пути. Наиболее компактным и широкообъемлющим из них является решение Шварца [5-37], который применяет к интегральному уравнению для вихревого слоя, характеризующего профиль и его спутную струю, формулы обращения Зёнгена (5-103) и (5-104). Мы дадим здесь обзор наиболее существенных частей его работы.

Рассмотрим вихревой слой, подобный слою, описанному уравнением (5-95); в данном случае, однако, зависимость полной циркуляции вокруг профиля от времени требует наличия спутной струи из двумерных вихрей, стекающих вдоль оси  $x$  от задней кромки к бесконечности. Если обозначить через  $\gamma_a$  и  $\gamma_w$  текущие значения циркуляции соответственно для крыла и спутной струи, то интегральное уравнение, заменяющее (5-95), записывается в виде

$$w(x, 0, t) = w_a(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-b}^b \frac{\gamma_a(\xi, t)}{x - \xi} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_b^\infty \frac{\gamma_w(\xi, t)}{x - \xi} d\xi. \quad (5-313a)$$



Фиг. 5-20.

$a$  — функция  $C(k)$  как характеристика изменения амплитуды и сдвига фазы циркуляционной подъемной силы, обусловленной вертикальными колебаниями с изменением величины  $h$ ;  $b$  — подъяра величины  $C(k) = F(k) + iG(k)$  как комплексного вектора.

Согласно с предположением о простом гармоническом характере движения имеем

$$\gamma_a(\xi, t) = \bar{\gamma}_a(\xi) e^{i\omega t}, \quad (5-314)$$

$$\gamma_w(\xi, t) = \bar{\gamma}_w(\xi) e^{i\omega t}, \quad (5-315)$$

$$w_a(x, t) = \bar{w}_a(x) e^{i\omega t} = \left[ i\omega \bar{z}_a(x) + U \frac{d\bar{z}_a}{dx} \right] e^{i\omega t}. \quad (5-316)$$

В соответствии с этим уравнение (5-313а) преобразуется к виду

$$\bar{w}_a(x) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-b}^b \frac{\bar{\gamma}_a(\xi) d\xi}{x-\xi} - \frac{1}{2\pi} \int_b^\infty \frac{\bar{\gamma}_w(\xi) d\xi}{x-\xi}. \quad (5-313b)$$

Функцию  $\gamma_w$  можно выразить через циркуляцию  $\Gamma$  вокруг профиля. Определение зависимости между ними, оправданное с физической точки зрения, связано с условием, что вихревой элемент спутной струи, стекающий с задней кромки за любой малый промежуток времени  $dt$ , имеет циркуляцию, равную и противоположную по знаку соответствующему изменению циркуляции вокруг крыла:

$$\gamma_w(b, t) dx = -\frac{d\Gamma(t)}{dt} dt. \quad (5-317)$$

Так как жидкость в целом движется приблизительно со скоростью  $U$ , положим  $dx = U dt$  и

$$U \gamma_w(b, t) = -\frac{d\Gamma(t)}{dt}. \quad (5-318)$$

Вихревой элемент, находящийся в произвольной точке  $\xi$  спутной струи, отрывается от задней кромки в момент, соответствующий промежутку времени  $(\xi - b)/U$ , необходимому для достижения им точки  $\xi$ . Следовательно,

$$U \gamma_w\left(\xi, t + \frac{\xi - b}{U}\right) = -\frac{d\Gamma(t)}{dt}. \quad (5-319)$$

Так как все переменные пропорциональны  $e^{i\omega t}$ , то можно переписать это соотношение в виде

$$U \bar{\gamma}_w e^{i\omega\left(t + \frac{\xi - b}{U}\right)} = -i\omega \bar{\Gamma} e^{i\omega t} \quad (5-320a)$$

или

$$\bar{\gamma}_w(\xi) = -\frac{i\omega}{U} \bar{\Gamma} e^{ik\xi} e^{-i(\omega\xi/U)}. \quad (5-320b)$$

Можно дать более строгий вывод уравнения (5-320b), используя условие, что при пересечении спутной струи давление изменяется непрерывно. Равенство (5-92)

$$u'_U = \frac{1}{2} \gamma_a, \quad (5-92)$$

связывающее тангенциальную скорость возмущения с циркуляцией и применимое при весьма общих условиях, позволяет переписать уравнение (5-263), выразив правую часть исключительно через  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} p_U - p_L &= -2\rho \left[ U \frac{\partial \varphi'_U}{\partial x} + \frac{\partial \varphi'_U}{\partial t} \right] = -2\rho \left[ U u'_U + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^x u'_U d\xi \right] = \\ &= -\rho \left[ U \gamma_a + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^x \gamma_a d\xi \right]. \quad (5-321) \end{aligned}$$

Уравнение (5-321) применимо к точкам, лежащим на профиле. Если распространить его на спутную струю, то последний член правой части необходимо заменить на

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{-b}^b \gamma_a d\xi + \int_b^{\infty} \gamma_w d\xi \right] = \frac{d\Gamma}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \int_b^{\infty} \gamma_w d\xi, \quad (5-322)$$

где для обеспечения отсутствия особенностей у задней кромки была использована гипотеза Кутта. Заменяя правую часть уравнения (5-321) в соответствии с уравнением (5-322) и предполагая движение простым гармоническим, получим вследствие условия равенства нулю разности давлений

$$U\gamma_w + i\omega\Gamma + i\omega \int_b^{\infty} \gamma_w d\xi = 0. \quad (5-323)$$

Возьмем производную по переменной  $x$  и построим дифференциальное уравнение для  $\gamma_w$ :

$$U \frac{\partial \gamma_w}{\partial x} + i\omega \gamma_w = 0, \quad (5-324)$$

решение которого имеет вид

$$\gamma_w(x, t) = F(t) e^{-i(\omega x/U)}. \quad (5-325)$$

Для определения произвольной функции интегрирования  $F(t)$  подставим выражение (5-325) в уравнение (5-323) и положим  $x = b$ :

$$F(t) = -\frac{i\omega}{U} \Gamma e^{i(\omega b/U)} = -\frac{i\omega}{U} \Gamma e^{ik}. \quad (5-326)$$

Подставляя значение  $F(t)$  в равенство (5-325) и сокращая зависящий от времени множитель  $e^{i\omega t}$ , мы приходим к равенству (5-320b).

Можно использовать приведенную циркуляцию

$$\bar{\Omega} = \frac{\bar{\Gamma}}{b} e^{ik}, \quad (5-327)$$

что позволяет упростить запись уравнения (5-320b):

$$\bar{\gamma}_w(\xi) = -ik\bar{\Omega} e^{-i(\omega\xi/U)}. \quad (5-320c)$$

Подстановка выражения (5-320c) в равенство (5-313b) дает

$$\bar{w}_a(x) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-b}^b \frac{\bar{\gamma}_a d\xi}{x-\xi} + \frac{ik\bar{\Omega}}{2\pi} \int_b^{\infty} \frac{e^{-i(\omega\xi/U)}}{x-\xi} d\xi. \quad (5-328)$$

Если ввести безразмерные переменные  $x^*$  и  $\xi^*$ , отсчитываемые вдоль хорды, то получим

$$-\bar{w}_a(x^*) + \frac{ik\bar{\Omega}}{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-ik\xi^*}}{x^* - \xi^*} d\xi^* = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_a}{x^* - \xi^*} d\xi^*. \quad (5-329)$$

Шварц [5-37] обнаружил, что если  $\bar{\Omega}$  временно рассматривать как известную постоянную, то уравнение (5-329) можно решить с помощью соотношений Зэнгена (5-103) и (5-104). Как указывалось в п. 5-4, эти формулы дают интегральное выражение для неизвестной  $\bar{\gamma}_a$  в правой части рассматриваемого

уравнения и одновременно обеспечивают выполнение гипотезы Кутты. Здесь они позволяют получить

$$\bar{\gamma}_a(x^*) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \left\{ -\oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{\bar{w}_a(\xi^*)}{(x^*-\xi^*)} d\xi^* + \right. \\ \left. + \frac{ik\bar{\Omega}}{2\pi} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \left[ \int_1^\infty \frac{e^{-ik\lambda} d\lambda}{\xi^*-\lambda} \right] \frac{d\xi^*}{(x^*-\xi^*)} \right\}, \quad (5-330)$$

где  $\lambda$  обозначает временно вводимую переменную интегрирования, изменяющуюся вдоль спутной струи. Перемена порядка интегрирования во втором члене правой части, подстановка  $\xi^* = \cos \theta$  и использование интегралов (5-100) дают следующий результат:

$$\bar{\gamma}_a(x^*) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \left\{ \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{\bar{w}_a(\xi^*)}{(x^*-\xi^*)} d\xi^* + \right. \\ \left. + \frac{ik\bar{\Omega}}{2} \int_1^\infty \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \frac{e^{-ik\lambda}}{(x^*-\lambda)} d\lambda \right\}. \quad (5-331)$$

Уравнение (5-331) может быть разрешено относительно амплитуды циркуляции  $\bar{\Omega}$ . После интегрирования обеих частей этого уравнения в пределах от  $x^* = -1$  до  $x^* = 1$  и перемены порядка интегрирования в обоих двойных интегралах получим

$$\int_{-1}^1 \bar{\gamma}_a(x^*) dx^* = \bar{\Omega} e^{-ik} = -2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \bar{w}_a(\xi^*) d\xi^* - \\ - ik\bar{\Omega} \int_1^\infty \left[ \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} - 1 \right] e^{-ik\lambda} d\lambda. \quad (5-332)$$

Последний интеграл в правой части является сходящимся, и применение тех же формул, которые использовались для получения уравнения (5-309), приводит к результату

$$\int_1^\infty \left[ \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} - 1 \right] e^{-ik\lambda} d\lambda = -\frac{\pi}{2} [H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)] - \frac{e^{-ik}}{ik}. \quad (5-333)$$

Используя уравнение (5-333) и разделив все члены уравнения (5-332) на коэффициент при  $\bar{\Omega}$ , найдем

$$\bar{\Omega} = \frac{4 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \bar{w}_a(\xi^*) d\xi^*}{\pi ik [H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)]}. \quad (5-334)$$

Распределение давления по профилю можно вычислить по уравнению (5-321). Пусть

$$p_U - p_L = \Delta \bar{p}_a(x) e^{i\omega t}; \quad (5-335)$$

тогда уравнение (5-321) для случая простого гармонического движения после сокращения на  $e^{i\omega t}$  и подстановки  $\xi^* = \xi/b$  принимает вид

$$\frac{\Delta \bar{p}_a(x^*)}{\rho U} = -\bar{\gamma}_a(x^*) - ik \int_{-1}^{x^*} \bar{\gamma}_a(\xi^*) d\xi^*. \quad (5-336)$$

Для получения окончательного результата требуется опять проинтегрировать обе части равенства (5-331). Если мы выполним это, изменив порядок интегрирования в обоих интегралах и воспользовавшись хорошо известными формулами интегрирования, то получим

$$\int_{-1}^{x^*} \bar{\gamma}_a(\xi^*) d\xi^* = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin x^* \right) + \Lambda_1(x^*, \xi^*) \right] \bar{\omega}_a d\xi^* - \\ - \frac{ik\bar{Q}}{\pi} \int_1^{\infty} \left[ \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin x^* \right) + \Lambda_2(x^*, \lambda) \right] e^{-ik\lambda} d\lambda, \quad (5-337a)$$

где

$$\Lambda_1(x^*, \xi^*) = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 - x^*\xi^* + \sqrt{1-\xi^{*2}} \sqrt{1-x^{*2}}}{1 - x^*\xi^* - \sqrt{1-\xi^{*2}} \sqrt{1-x^{*2}}} \right] \quad (5-337b)$$

и

$$\Lambda_2(x^*, \lambda) = 2 \arctg \left[ \sqrt{\frac{(1-x^*)(\lambda+1)}{(1+x^*)(\lambda-1)}} \right] - \pi. \quad (5-337c)$$

Уравнение (5-337a) можно привести к более простой форме, если вычтуть из него уравнение (5-332), умноженное на  $\left(\frac{1}{2} + \pi^{-1} \arcsin x^*\right)$ ;

$$\int_{-1}^{x^*} \bar{\gamma}_a(\xi^*) d\xi^* - \frac{e^{-ik\bar{Q}}}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin x^* \right) = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Lambda_1(x^*, \xi^*) \bar{\omega}_a(\xi^*) d\xi^* - \\ - \frac{ik\bar{Q}}{\pi} \int_1^{\infty} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin x^* + \Lambda_2(x^*, \lambda) \right] e^{-ik\lambda} d\lambda. \quad (5-338)$$

Интегрирование последнего члена по частям и сокращение в обеих частях уравнения дают

$$\int_{-1}^{x^*} \bar{\gamma}_a(\xi^*) d\xi^* = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Lambda_1(x^*, \xi^*) \bar{\omega}_a(\xi^*) d\xi^* - \frac{\bar{Q}}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \lambda} e^{-ik\lambda} d\lambda. \quad (5-339)$$

Подставим теперь выражения (5-331) и (5-339) в уравнение (5-336). Другое важное сокращение является следствием того, что

$$\frac{\partial \Lambda_2}{\partial \lambda} = \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} + \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \frac{1}{(x^*-\lambda)} \right]. \quad (5-340)$$

Упрощенный результат имеет вид

$$\frac{-\Delta \bar{p}_a(x^*)}{\rho U} = -\frac{ik\bar{Q}}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_1^{\infty} \frac{e^{-ik\lambda}}{\sqrt{\lambda^2-1}} d\lambda + \\ + \frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \left[ \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{1}{(x^*-\xi^*)} - ik\Lambda_1(x^*, \xi^*) \right] \bar{\omega}_a(\xi^*) d\xi^*. \quad (5-341)$$

Последние этапы при определении давления будут следующие: ввести  $\bar{Q}$  согласно формуле (5-334) и заменить первый интеграл правой части уравнения (5-341) его значением  $-i(\pi/2)H_0^{(2)}(k)$ ; эти подстановки приводят к результату

$$\frac{-\Delta \bar{p}_a(x^*)}{\rho U} = \frac{2}{\pi} [1 - C(k)] \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \bar{\omega}_a(\xi^*) d\xi^* + \\ + \frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \left[ \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{1}{(x^*-\xi^*)} - ik\Lambda_1(x^*, \xi^*) \right] \bar{\omega}_a(\xi^*) d\xi^*. \quad (5-342)$$

Через  $C(k)$  здесь снова обозначена функция Теодорсена, определяемая равенством (5-309). Различие между уравнениями (5-342) и (5-299) (если отношение интегралов заменить на  $C(k)$  и рассматривать случай простого гармонического движения) состоит только в более строгом выводе уравнения (5-342) и в том, что Шварц и Зёнген доказали справедливость их формы решения для функции  $\bar{w}_a(x^*)$ , имеющей разрывы и интегрируемые особенности. При заданном типе колебаний профиля результирующие выражения для подъемной силы и момента на единицу длины размаха, полученные путем соответствующего интегрирования обеих частей уравнения (5-342), идентичны с выражениями, найденными Теодорсеном.

Из уравнения (5-342) мы делаем интересный вывод, заключающийся в том, что распределение давления, связанное со спутной струей [член, содержащий множитель  $1 - C(k)$ ], одинаково с нагрузкой на плоскую пластинку, определяемой равенством (5-110) независимо от вида движения; при этом соответствующая равнодействующая всегда должна быть приложена в точке, отстоящей от передней кромки на одну четверть хорды. Можно также определить циркуляционную и бесциркуляционную части распределения давления, выражаемого уравнением (5-342). Последняя из них создается вихревым слоем крыла, который обеспечивает удовлетворение граничных условий в данный момент времени, но имеет нулевую суммарную циркуляцию; эту часть можно вычислить, положив  $\bar{Q} = 0$  и обращая оставшуюся часть уравнения (5-329) по второй формуле Зёнгена при выполнении вспомогательного требования

$$\int_{-1}^1 \bar{\gamma}_a(\xi^*) d\xi^* = 0. \quad (5-343)$$

В результате получаем

$$\frac{-(\Delta \bar{p}_a)_{\text{б.ц.}}}{\rho U} = \frac{2}{\pi} \oint_{-1}^1 \left[ \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-x^{*2}}} \frac{1}{(x^* - \xi^*)} - ik\Lambda_1(x^*, \xi^*) \right] \bar{w}_a(\xi^*) d\xi^*. \quad (5-344)$$

Различие правых частей уравнений (5-342) и (5-344) обеспечивает выполнение гипотезы Кутта и существование вихрей спутной струи.

Рассматривая решения для случая простого гармонического движения, полученные в этом пункте, мы видим, что функция  $C(k)$  играет здесь особую роль. Аргументом всех функций Бесселя, через которые выражается  $C(k)$ , служит сама приведенная частота, и по этой причине мы рассматриваем величину  $k$  как наилучшую меру „нестационарности“ течения несжимаемой жидкости и приписываем ей важную роль в наших рассуждениях. Этим объясняется также несколько неестественное введение полухорды  $b$  вместо хорды  $c = 2b$  и сравнительно редкое появление в уравнениях аэроупругости приведенных частот и скоростей, отнесенных к  $c$ . Четкое представление о значении функции  $C(k)$  создается после рассмотрения упрощенных выражений для подъемной силы и момента, используемых авиационными инженерами при изучении неустановившихся движений с малой приведенной частотой, таких, как колебания типов, рассматриваемых в теории динамической устойчивости. Широкое применение имеют по меньшей мере два варианта такого упрощения. В самом приближенном из них предполагается, что все аэродинамические нагрузки можно вычислить по формулам для установившегося движения, таким, как (5-111) и (5-112), с единственной заменой угла атаки  $\alpha$  на мгновенное значение угла наклона вектора суммарной скорости к средней линии профиля. В случае движений с изменением  $h$  и  $\alpha$ , показанных на фиг. 5-18, мы, идя таким путем, получили бы

$$L \cong 2\pi\rho U b [\dot{h} + U\alpha], \quad (5-345)$$

$$M_y \cong -L [ba + (b/2)]. \quad (5-346)$$



Более совершенную аппроксимацию дает так называемая гипотеза квазистационарности, предполагающая, что можно пренебречь только влиянием на течение вихревой слутной струи. Это равносильно замене  $C(k)$ , или отношения интегралов в равенствах (5-299) — (5-302), его значением 1, достигаемым при уменьшении  $k$  до нуля. Формулы (5-311) и (5-312) дают следующие выражения для квазистационарных подъемной силы и момента связанных с вертикальным перемещением и изменением угла тангажа:

$$L_{Qs} = \pi \rho b^2 [\ddot{h} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}] + 2\pi \rho Ub \left[ \dot{h} + U\alpha + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right], \quad (5-347)$$

$$M_{yQs} = \pi \rho b^2 \left[ ba\ddot{h} - Ub \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} - b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right] + \\ + 2\pi \rho Ub^2 \left( a + \frac{1}{2} \right) \left[ \dot{h} + U\alpha + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right]. \quad (5-348)$$

Члены, содержащие ускорения  $\ddot{h}$  и  $\ddot{\alpha}$ , могут быть объединены с силами инерции всего самолета, и часто они обоснованно отбрасываются, если относительная плотность очень велика. Однако член в первых квадратных скобках формулы (5-348), содержащий  $\dot{\alpha}$ , описывает затухание изменений угла тангажа, обусловленное циркуляционной частью решения. Для обычных самолетов влияние этого члена очень мало в сравнении с демпфирующим действием стабилизатора относительно оси, проходящей через центр тяжести, тем не менее пренебрежение этим членом может иногда повлечь к существенной недооценке устойчивости.

Физическую интерпретацию величины  $C(k)$  можно получить, сравнивая циркуляционные компоненты подъемной силы в точной формуле (5-311) и квазистационарном равенстве (5-347) для движения с постоянным углом атаки, т. е. компоненты, содержащие  $\dot{h}$ . Эти два выражения связаны следующим соотношением:

$$2\pi \rho Ub C(k) \dot{h} = L_C(\dot{h}) = C(k) \cdot L_{Qs}(\dot{h}), \quad (5-349)$$

где  $\dot{h}$  можно рассматривать как комплексный вектор, вращающийся с угловой скоростью  $\omega$ . Вектор  $L_{Qs}(\dot{h})$  пропорционален  $\dot{h}$  и, следовательно, имеет одинаковую с ним фазу; так как направления  $L$  и  $h$  противоположны, то вектор  $L_{Qs}(\dot{h})$  представляет собой демпфирующую силу, оказывающую непосредственное сопротивление вертикальным колебаниям. Когда нестационарность играет важную роль, т. е. при ощутимой величине  $k$ , вектор подъемной силы  $L_{Qs}(\dot{h})$  изменяется путем умножения на комплексное число  $C(k)$ . Это влечет за собой уменьшение величины вектора и поворот в отрицательном направлении, или сдвиг фазы, так что  $L_C(\dot{h})$  всегда запаздывает в своем изменении по сравнению с квазистационарным значением. На фиг. 5-20 показаны оба вектора подъемной силы и дается полярная диаграмма  $C(k)$  как комплексного вектора. Коэффициент уменьшения подъемной силы  $C(k)$  постепенно падает до значения  $\frac{1}{2}$  при изменении  $k$  от нуля до бесконечности. Однако его влияние на запаздывание по фазе сказывается очень быстро, так как его мнимая часть  $G(k)$  с увеличением  $k$  начинает изменяться от нуля, имея бесконечную отрицательную производную, и наибольшее отклонение вектора  $L_{Qs}(\dot{h})$  имеет место приблизительно при  $k = 0,2$ . Величина  $C(k)$  создает, конечно, аналогичные сдвиги фазы для всех циркуляционных компонент квазистационарных аэродинамических нагрузок. Поскольку количество энергии, которое воздушный поток отнимает у энергии колебательного движения или добавляет к ней, очень сильно зависит от некоторых из этих фазовых углов, то очевидно, какое важное влияние оказывает неустановившийся характер течения на неустойчивость типа флаттера, несмотря на то, что приведенная частота может быть порядка 0,1 или меньше.

По-видимому, наиболее точная таблица значений функции  $C(k)$  имеется в приложении V-J к работе [5-38]. Таблицы аэродинамических нагрузок и формулы для распространения решений на другие случаи движения профиля имеются в большом количестве. Например, Теодорсен и Гаррик [5-39] исследовали профили с аэродинамически уравновешенными закрылками и триммерами при закрытых зазорах. Влияние зазора, как открытого, так и закрытого, рассматривалось Кюсснером и Шварцем [5-40]. Наиболее широко используемыми в Соединенных Штатах таблицами являются таблицы Смилга и Вассермана [5-41]. Эти авторы представляют величины  $L$ ,  $M_y$  и  $M_z$ , выраженные формулами (5-300) — (5-302), в следующем виде (зазор предполагается открытым, поэтому фактически использовано решение Кюсснера — Шварца):

$$L = -\pi\rho b^3\omega^2 \left\{ L_h \frac{h}{b} + \left[ L_\alpha - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \alpha + L_\beta \beta \right\}; \quad (5-350)$$

$$M_y = \pi\rho b^4\omega^2 \left\{ \left[ M_h - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \frac{h}{b} + \left[ M_\alpha - (L_\alpha + M_h) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right] \alpha + \left[ M_\beta - L_\beta \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \beta \right\}; \quad (5-351)$$

$$M_z = \pi\rho b^4\omega^2 \left\{ T_h \frac{h}{b} + \left[ T_\alpha - T_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \alpha + T_\beta \beta \right\}. \quad (5-352)$$

Здесь

$$h = \bar{h}_0 e^{i\omega t}, \quad (5-353)$$

$$\alpha = \bar{\alpha}_0 e^{i\omega t}, \quad (5-354)$$

$$\beta = \bar{\beta}_0 e^{i\omega t}, \quad (5-355)$$

а  $L_h$ ,  $L_\alpha$ ,  $M_h$  и  $M_\alpha$  — табулированные безразмерные функции приведенной частоты; остальные коэффициенты в скобках затабулированы как функции приведенной частоты и положения передней кромки закрылка. Таблицы в работе [5-41] включают также аэродинамическую балансировку закрылка и влияние триммера, шарнирно закрепленного вдоль своей передней кромки. Более подробные таблицы аэродинамических коэффициентов для рулевых поверхностей даются в работе [5-42]. Шпильберг [5-46] приводит некоторые значения коэффициентов, необходимых для исследования флаттера при параболическом типе деформаций в направлении хорды.

Точность аэродинамической теории колебаний двумерного профиля проверялась многочисленными экспериментальными исследованиями. По-видимому, самое тщательное исследование движений с вертикальным перемещением и изменением угла тангажа выполнено Халфмэном [5-43]. Все его данные были получены при неизменно высоких числах Рейнольдса, но этот факт, а также механические ограничения частоты вибраций сделали невозможной работу со значениями, большими, чем примерно  $k = 0,4$ . При меньших значениях  $k$  амплитуды и фазовые углы всех (за одним исключением) компонент сил и моментов отличаются от своих теоретических значений на величину, меньшую экспериментальной ошибки. Исключение представляет подъемная сила при движении с изменением угла тангажа, которая при приближении приведенной частоты к нулю постепенно падает до величины, составляющей от 85 до 90% теоретического значения. Этот результат можно было ожидать, учитывая, что наклон кривой подъемной силы профиля при установившемся течении составляет примерно такую же долю от  $2\pi$ . Грейданус, ван де Ворен и Берг [5-44] выполнили измерения, аналогичные измерениям Халфмэна, но у них диапазон изменения приведенных частот расширяется вплоть до 1,0 за счет расширения диапазона изменения чисел Рейнольдса. Для компенсации влияния чисел Рейнольдса на пограничный слой использовались турбулизирующие проволоки, устанавливаемые перед профи-

лем. Данные этих авторов обнаруживают при равных значениях  $k$  примерно те же тенденции, что и данные Халфмэна. При значениях, больших, чем  $k = 0,4$ , некоторые аэродинамические величины постепенно отклоняются от своих теоретических значений. Эти расхождения приписываются влиянию запаздывания в выполнении гипотезы Кутта и неточности предположения о том, что вихри спутной струи движутся вниз по потоку в одной плоскости; можно ожидать, что оба эти фактора будут оказывать более сильное влияние на течение при увеличении приведенных частот.

Андреополис, Чайлек и Доновэн [5-45] измеряли некоторые из аэродинамических нагрузок на колеблющуюся комбинацию закрылка и триммера позади закрепленного профиля. Их наблюдения вполне удовлетворительно подтверждают теоретические расчеты Теодорсена для шарнирных моментов закрылка, но при расчете моментов, связанных с движением триммера, возникают большие неточности.

**5-7. Общий случай движения тонких профилей в потоке несжимаемой жидкости; задача о порыве.** Решения, данные в п. 5-6, имеют существенное значение для исследователей флаттера; однако специалист по аэроупругости, рассматривающий такие нестационарные явления, как быстрые маневры и вход в зону порыва, нуждается в теории, описывающей общий класс малых движений профиля. Широкое распространение получили два метода подхода к решению этой задачи. Первый из них состоит в попытке непосредственного численного решения одной из форм интегрального уравнения для вихревого слоя. В другом методе применяется наложение решений линейного уравнения для простого гармонического движения с помощью интеграла Фурье. Мы подробно опишем последний метод для течения несжимаемой жидкости, так как он основывается на материале, данном в п. 5-6.

Для введения читателя в курс дела укажем, что формулы (5-299) — (5-302), если в них ввести величину  $C(k)$  согласно равенству (5-308), применимы к колебаниям с амплитудой, возрастающей пропорционально  $e^{\lambda t}$ , где  $\lambda = \mu + i\omega$  и  $\mu > 0$ . Чтобы распространить указанные формулы на этот случай, мы просто будем считать  $h$ ,  $\alpha$  и т. д. соответствующими функциями времени и будем рассматривать величину  $k$  в функции  $C(k)$  как комплексный аргумент:

$$k = \frac{\omega b}{U} - i \frac{\mu b}{U}. \quad (5-356)$$

Значения  $C(k)$  для комплексных  $k$  затабулированы в работе [5-47]. Это важное обобщение формул Теодорсена содержится в одной из статей Зёнгена [5-48] и развито далее Джонсом [5-49]. Очевидно, что для случая затухающих колебаний, когда  $\mu < 0$ , подобный прямой вывод несправедлив, потому что интегралы в уравнении (5-308) оказываются расходящимися. Действительно, Зёнген в работе [5-48] доказал, что аэродинамические нагрузки при затухающих колебаниях, возникших внезапно при  $t = 0$ , состоят из двух частей, одна из которых содержит множитель  $e^{\lambda t}$ , а другая при больших  $t$  пропорциональна  $1/t$ . При  $\mu < 0$  вторая часть уменьшается медленнее, чем первая. Фрейс де Вебеке в своей обширной работе [5-50], посвященной неустановившемуся движению профиля при малых скоростях, показывает, что часть нагрузки, зависящая от  $e^{\lambda t}$ , при затухающих колебаниях выражается по формулам, аналогичным формулам Теодорсена; он предлагает также метод определения остальной части, зависящей от  $1/t$ . Таблицы, приведенные в работе [5-47], включают  $C(k)$  для  $\mu < 0$ , так что они полезны как при вычислении экспоненциальных нагрузок, так и при оценке суммарных сил, действующих в любой период неустановившегося режима, когда нагрузки, зависящие от  $1/t$ , пренебрежимо малы в сравнении с остальными.

Результаты, полученные в п. 5-6 для бесциркуляционного течения, справедливы независимо от природы неустановившегося движения, лишь бы оно

было малым. Мы сосредоточим здесь наше внимание на определении подъемной силы и момента. Рассматривая сначала только вертикальное перемещение и движение с изменением угла тангажа, мы можем утверждать, что бесциркуляционная часть выражения (5-311) и часть выражения (5-312), не содержащая  $C(k)$ , не будут изменяться. Последняя из них содержит член, пропорциональный величине  $\dot{\alpha}$ , которая, как известно, зависит от циркуляции, но коэффициентом при  $\dot{\alpha}$  служит постоянная величина, не зависящая от частоты. Поэтому, используя принцип наложения простых гармонических компонент движения, мы можем утверждать, что, если этот член имеет одну и ту же форму для каждой гармонической, то он должен остаться таким же и для функции времени более общего вида, построенной путем сложения этих гармоник.

Остальные члены в формулах (5-311) и (5-312) связаны с колебательным движением только посредством величины

$$\omega_{\frac{3}{4}c}(t) = - \left[ \dot{h} + U\alpha + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right]. \quad (5-357)$$

Эта величина определяет мгновенное значение вертикальной скорости жидкой частицы, которая соприкасается с точкой профиля, находящейся на расстоянии трех четвертей хорды от передней кромки. Мы можем представить  $\omega_{\frac{3}{4}c}(t)$  для произвольного движения с помощью интеграла Фурье:

$$\omega_{\frac{3}{4}c}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (5-358a)$$

что можно записать в обращенной форме:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\frac{3}{4}c}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (5-358b)$$

Так как циркуляционная часть подъемной силы на единицу длины размаха для любой из гармоник Фурье при единичной амплитуде  $\omega_{\frac{3}{4}c}$  равна

$$\Delta L_c = -2\pi\rho U b C(k) e^{i\omega t}, \quad (5-359)$$

то результирующая подъемная сила будет

$$L_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \Delta L_c d\omega = -\frac{2\pi\rho U b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(k) f(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5-360)$$

Выражения для текущих значений полной подъемной силы и момента (относительно оси, проходящей через точку  $x = ba$ ) имеют вид

$$L = \pi\rho b^2 [\ddot{h} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}] - \rho U b \int_{-\infty}^{\infty} C\left(\frac{\omega b}{U}\right) f(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (5-361)$$

$$M_y = \pi\rho b^2 \left[ ba\ddot{h} - Ub \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} - b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right] - \rho U b^2 \left( \frac{1}{2} + a \right) \int_{-\infty}^{\infty} C\left(\frac{\omega b}{U}\right) f(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5-362)$$

Заметим, что компонента подъемной силы, зависящая от  $C(k)$ , приложена в точке  $a = -1/2$ , отстоящей на одну четверть хорды от передней кромки. Точки, соответствующие одной четверти и трем четвертям хорды, играют в данной теории

столь существенную роль, что Кюсснер назвал их передней и задней нейтральными точками профиля.

Наложение с помощью интеграла Фурье может быть использовано для любой функции, которая имеет конечное число конечных разрывов и интеграл от абсолютного значения которой, взятый в пределах от  $t = -\infty$  до  $t = +\infty$ , равен конечной величине. Это определение должно подходить к большинству функций, представляющих интерес для инженера. Задача Вагнера о внезапном изменении угла атаки представляет собой случай, который несколько выходит за пределы указанных ограничений, но тем не менее может быть рассмотрен. Эта задача характеризуется следующими условиями:

$$\omega_{\frac{3}{4}c} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -U\alpha_0, & t > 0. \end{cases} \quad (5-363)$$

Такая функция выражается интегральной формулой Фурье вида

$$\omega_{\frac{3}{4}c} = -\frac{U\alpha_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} d\omega, \quad (5-364)$$

где путь интегрирования описывает бесконечно малую дугу под полюсом, находящимся в нулевой точке. Формула (5-360) дает циркуляционную подъемную силу для этого случая движения (называемую иногда переходной подъемной силой):

$$L = \rho U b U \alpha_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(k)}{ik} e^{iks} dk. \quad (5-365)$$

Здесь

$$s = \frac{Ut}{b} \quad (5-366)$$

представляет собой выраженный в долях полухорды путь, проходимый профилем после скачка угла атаки. Формулу (5-365) часто записывают иначе, вводя функцию Вагнера  $\varphi(s)$ :

$$L = 2\pi\rho U^2 b \alpha_0 \varphi(s). \quad (5-367)$$

Коэффициент при функции  $\varphi(s)$  представляет собой подъемную силу при установившемся движении, а поэтому для больших значений  $s$  эта функция приближается к единице. Она была впервые вычислена в работе [5-53] методом вихревого слоя. В данном случае она выражается формулой

$$\varphi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(k)}{k} e^{iks} dk = 1(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(k)-1}{k} e^{iks} dk, \quad (5-368a)$$

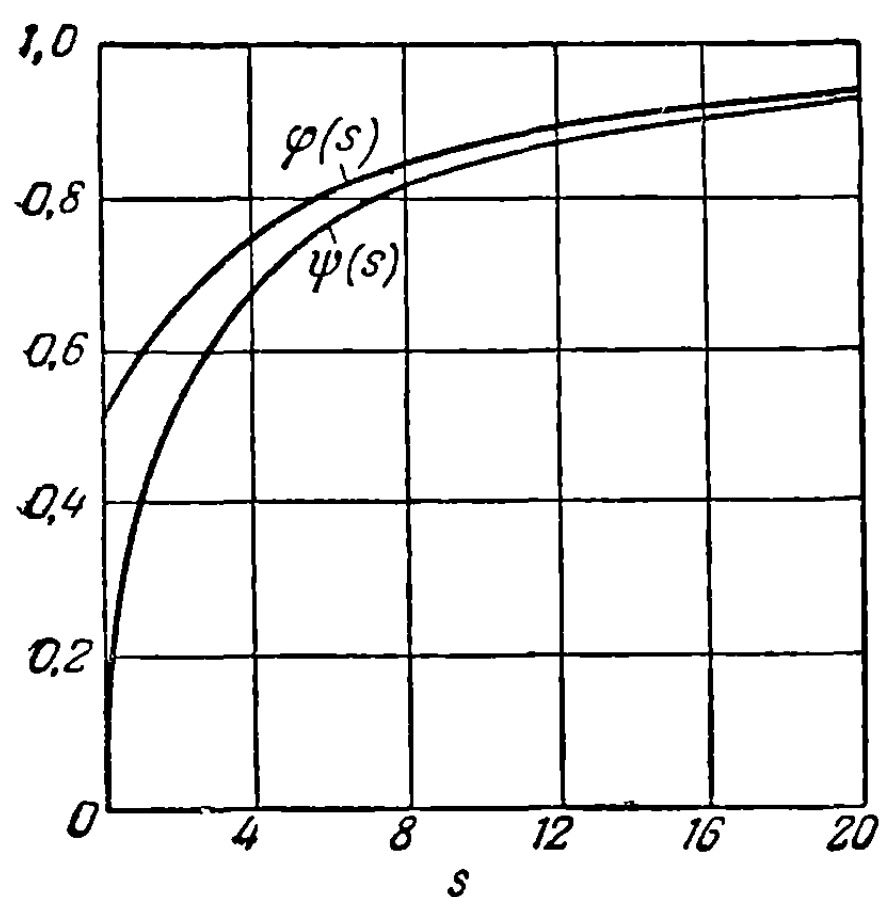
где  $1(s)$  представляет собой ступенчатую функцию, которая при  $s=0$  делает скачок от нуля до единицы.

Расчленив  $e^{iks}$  и  $C(k)$  на их действительные и мнимые части, перепишем последний интеграл уравнения (5-368a) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= 1(s) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(k)-1] \frac{\sin ks}{k} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(k) \frac{\cos ks}{k} dk + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G(k) \frac{\sin ks}{k} - [F(k)-1] \frac{\cos ks}{k} \right\} dk = \\ &= 1(s) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [F(k)-1] \frac{\sin ks}{k} + G(k) \frac{\cos ks}{k} \right\} dk. \end{aligned} \quad (5-368b)$$

Здесь мы использовали то обстоятельство, что  $F(k)$  и  $\cos ks$  являются четными функциями переменной интегрирования, а  $G(k)$  и  $\sin ks$  — нечетными. Симметричность функций  $F(k)$  и  $G(k)$  можно установить, или изучая их как комбинации функций Бесселя, или замечая, что мнимая часть функции  $\varphi(x)$  в формуле (5-368b) должна быть равна нулю для всех значений  $s$ . Кроме того, функция  $C(k)$  представляет собой комплексную функцию проводимости для установившихся колебаний линейной системы, а известно, что всякая такая функция имеет четную действительную часть и нечетную мнимую часть.

Можно еще более упростить формулу (5-368b), используя обращение в нуль  $\varphi(s)$  и  $1(s)$  для отрицательных  $s$ . Для  $s < 0$  эта формула дает



Фиг. 5-21. Функция Вагнера  $\psi(s)$  для переходной подъемной силы и функция Кюсснера  $\varphi(s)$  для подъемной силы, обусловленной резко ограниченным порывом, в зависимости от измеренного в долях полухорды расстояния.

Следовательно, формулу (5-368b) окончательно можно привести для вычислительных целей к виду

$$\varphi(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F(k)}{k} \sin ks \, dk = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G(k)}{k} \cos ks \, dk. \quad (5-369)$$

Очевидно, что эта формула ограничена значениями  $s > 0$ . Первая формула в равенствах (5-369) практически более удобна, поскольку в ней подинтегральная функция при приближении  $k$  к нулю остается конечной. График функции  $\varphi(s)$  показан на фиг. 5-21.

Для многих приложений удобно при записи выражений для циркуляционных компонент подъемной силы и момента в случае произвольного движения общего вида использовать саму функцию  $\varphi(s)$ . Например, для жесткого профиля, начинающего двигаться при  $t=0$ , применение интеграла Дюамеля, или функции наложения, приводит к выражению

$$L = \pi r b^2 [\dot{h} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}] - 2\pi r U b \left[ \omega_{\frac{3}{4}c}(0) \varphi(s) + \int_0^s \frac{d\omega_{\frac{3}{4}c}(\sigma)}{d\sigma} \varphi(s - \sigma) d\sigma \right] \quad (5-370)$$

на единицу длины размаха. Несмотря на то что функция  $\varphi(s)$  имеет сравнительно простую форму, ее не удастся выразить через какие-либо хорошо

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [F(k) - 1] \frac{\sin ks}{k} dk &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(k) \frac{\cos ks}{k} dk. \quad (5-368c) \end{aligned}$$

Так как  $\sin ks$  является нечетной функцией, то равенство (5-368c) можно записать для абсолютных значений  $s$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [F(k) - 1] \frac{\sin k|s|}{k} dk &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(k) \frac{\cos k|s|}{k} dk. \quad (5-368d) \end{aligned}$$

Однако равенство (5-368d) справедливо для всех положительных чисел  $|s|$ ; оно показывает, что два слагаемых в последнем интеграле формулы (5-368b) равны между собой.



известные функции. Поэтому мы прибегаем часто к некоторым удобным приближенным представлениям, как, например,

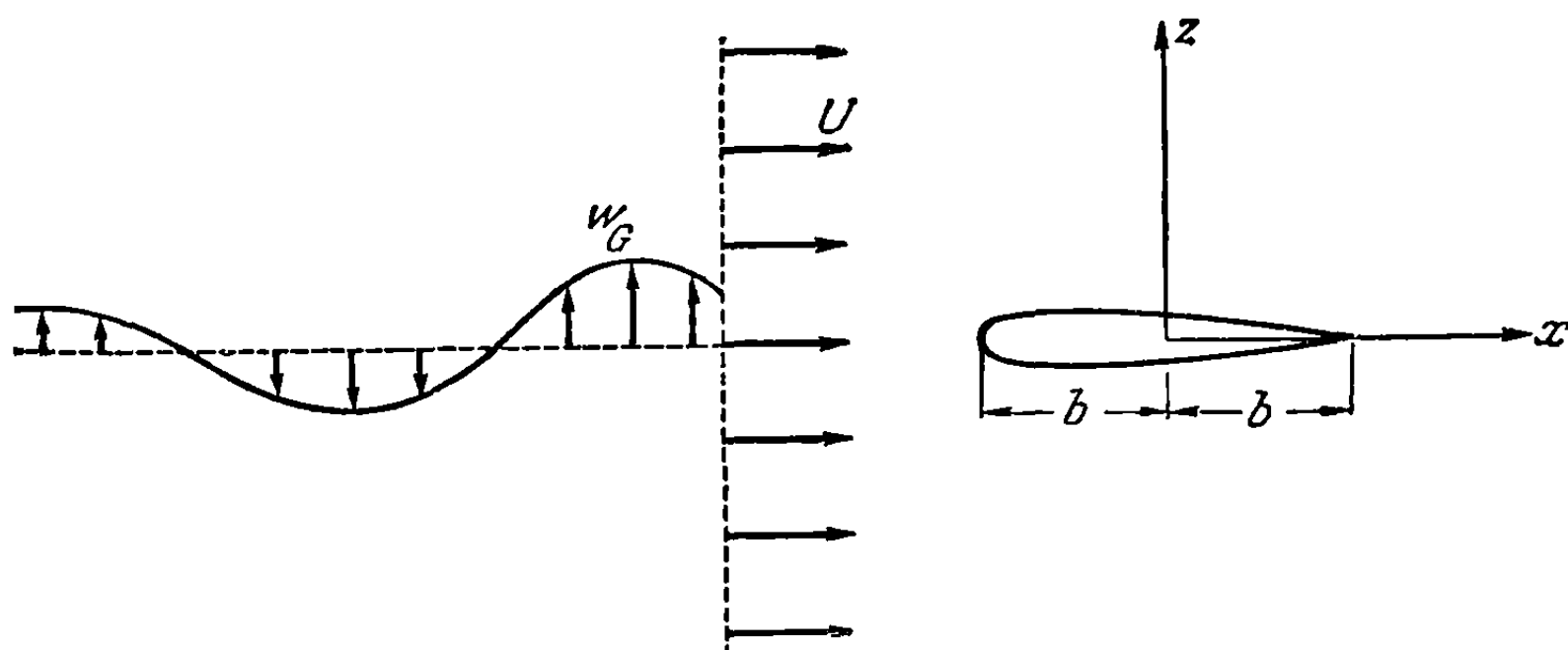
$$\varphi(s) \cong 1 - 0,165e^{-0,0455s} - 0,335e^{-0,8s} \quad (5-371)$$

и

$$\varphi(s) \cong \frac{s+2}{s+4}. \quad (5-372)$$

Первое из них имеет элементарное лапласово преобразование, что делает удобным исследование линейных систем с использованием операторной техники. Оно подвергалось критике, так как искажает характер предельного поведения функции при больших значениях  $s$ . Формула (5-372) дает лучшую аппроксимацию при этих значениях, так как разность между  $\varphi(s)$  и единицей в действительности уменьшается подобно величине  $1/s$ .

Другое полезное приложение интеграла Фурье к неустановившемуся движению жидкости вокруг профиля относится к нагрузке под действием порыва. Когда тонкий профиль попадает в область атмосферной турбулентности с распределением нормальной скорости  $w_G$  ( $w_G \ll U$ ), то можно вывести граничное условие, аналогичное уравнению (5-225). Это положение представлено на фиг. 5-22.



Фиг. 5-22. Тонкий профиль, приближающийся к области атмосферной турбулентности с вертикальной скоростью порыва  $w_G(x - Ut)$ .

Нас интересуют только силы, обусловленные самой структурой порыва, поскольку мы можем исследовать движение жесткого профиля под действием этих сил с помощью описанных выше методов, а затем использовать принцип наложения результатов. Соответственно этому суммарная вертикальная скорость, обусловленная порывом и вихревым слоем профиля, должна равняться нулю:

$$w_G + w_a = 0, \quad (5-373a)$$

или

$$w_a(x, t) = -w_G; \quad \text{для } z = 0, \quad -b \leq x \leq b. \quad (5-373b)$$

Мы предполагаем область турбулентности в атмосфере такой, что она проходит мимо профиля со скоростью  $U$  без ощутимого изменения  $w_G$  для каждой отдельной частицы в период контакта с профилем. Как и в случае с  $\gamma_w$  [см. равенство (5-306)], выразим это условие, полагая  $w_G$  функцией переменных  $x$  и  $t$  в сочетании  $(x - Ut)$ .

Чтобы сделать возможным наложение Фурье, мы должны сначала применить теорию п. 5-6 к задаче о простом гармоническом порыве. К этому классу относится так называемый синусоидальный порыв, описываемый действительной частью выражения

$$w_G(x - Ut) = \overline{w}_G e^{i\omega[t - (x/U)]} = \overline{w}_G e^{ik(s - x^*)}. \quad (5-374)$$

Подставляя выражение (5-374) в равенство (5-373b), получаем соотношение:

$$\overline{w}_a(x^*) = -\overline{w}_G e^{-ikx^*}. \quad (5-375)$$



Это соотношение в свою очередь годится для того, чтобы, используя с его помощью решение Шварца (5-342), вычислить распределение давления, подъемную силу и момент на единицу длины размаха. Последние две величины выражаются при этом так:

$$L = 2\pi\rho U b \bar{\omega}_G \{C(k) [J_0(k) - iJ_1(k)] + iJ_1(k)\} e^{i\omega t}, \quad (5-376)$$

$$M_y = b \left( \frac{1}{2} + a \right) L. \quad (5-377)$$

Таким образом, полная аэродинамическая сила, обусловленная синусоидальным порывом, приложена в точке, располагающейся на расстоянии одной четверти хорды от передней кромки. Если использовать принцип наложения, то мы приходим к тому же выводу для любого другого порыва, зависящего только от  $(x - Ut)$ .

Интеграл Фурье дает возможность получить по формулам (5-376) и (5-377) выражения для аэродинамических нагрузок, вызванных произвольным  $\omega_G$ . Рассмотрим, например, резко ограниченный порыв, ударяющий в переднюю кромку профиля при  $t = 0$  (задача Кюсснера, [5-35]):

$$\omega_G = \begin{cases} 0, & x > Ut - b, \\ \omega_0, & x < Ut - b. \end{cases} \quad (5-378)$$

Следуя Гаррику [5-54], мы можем представить это равенство в таком виде:

$$\omega_G = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{b}{U} - \frac{x}{U} \right)}}{i\omega} d\omega = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(s-x^*-1)}}{ik} dk; \quad (5-379)$$

здесь путь интегрирования должен снова описать бесконечно малую дугу под нулевой точкой. Поэтому подъемная сила на единицу размаха оказывается равной

$$L = \rho U b \omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{C(k) [J_0(k) - iJ_1(k)] + iJ_1(k)\} e^{ik(s-1)}}{ik} dk, \quad (5-380)$$

тогда как момент определяется формулой (5-377). Можно, конечно, упростить это выражение для вычислительных целей, используя соображения о симметрии, подобные тем, которые привели к формуле (5-369).

Из формулы (5-380) мы определим функцию Кюсснера, характеризующую изменение безразмерной подъемной силы при резко ограниченном порыве,

$$L(s) = 2\pi\rho U b \omega_0 \psi(s), \quad (5-381a)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[F_G(k) + iG_G(k)] e^{ik(s-1)}}{k} dk = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[F_G(k) - G_G(k)] \sin ks \sin k}{k} dk \end{aligned} \quad (5-381b)$$

для  $s > 0$ .

Здесь  $F_G(k)$  и  $G_G(k)$  представляют собой действительную и мнимую части выражения в фигурных скобках формулы (5-376), а интеграл преобразован так же, как в случае  $\varphi(s)$ . Аналогично функции Вагнера функцию  $\psi(s)$  нельзя представить в виде простого алгебраического выражения. Она увеличивается от 0 при  $t = 0$  до 1 при  $t = \infty$ , как показано на фиг. 5-21. Обе основные переходные функции для течения несжимаемой жидкости затабулированы многими авторами, в том числе Сирсом [5-55].

Если определить произвольную функцию  $w_G(s)$  для  $s \geq 0$  как скорость порыва, в область которого передняя кромка профиля попадает в момент  $t = sb/U$ , то интеграл Дюамеля дает

$$L = 2\pi\rho Ub \left\{ w_G(0) \psi(s) + \int_0^s \frac{dw_G(\sigma)}{d\sigma} \psi(s-\sigma) d\sigma \right\}. \quad (5-382)$$

Подобно функции  $\varphi(s)$ ,  $\psi(s)$  часто заменяется простыми приближенными алгебраическими выражениями, как, например,

$$\psi(s) \simeq 1 - 0,500e^{-0,130s} - 0,500e^{-s} \quad (5-383)$$

и

$$\psi(s) \simeq \frac{s^2 + s}{s^2 + 2,82s + 0,80}. \quad (5-384)$$

Первое из них имеет удобное преобразование Лапласа, но, как и в случае  $\varphi(s)$ , последнее дает лучшее асимптотическое представление для больших величин  $s$ .

К сожалению, пока еще не было проведено достаточно тщательных или достаточно общих экспериментальных исследований с целью проверки точности функций Вагнера и Кюсснера. Этот пробел можно отнести за счет затруднений с измерительным оборудованием, возникающих в случае внезапных изменений нагрузки. Имеется надежда, что появление приборов для измерения давления, обладающих очень быстрой динамической реакцией, в недалеком будущем обеспечит средства для успешных измерений, а пока, основываясь на предположении справедливости принципа наложения, мы можем констатировать, что эксперименты с колеблющимися профилями дают нам косвенное подтверждение результата Вагнера.

Чтобы завершить рассмотрение вопроса о произвольном движении профиля, мы дадим обзор важных формул, получаемых при подходе к этой задаче с точки зрения теории вихревого слоя. Среди первых публикаций по этому вопросу были работы Вагнера [5-53] и Кюсснера [5-35]. Однако основы большинства исследований в Соединенных Штатах были заложены статьями Кармана и Сирса ([5-55] и [5-56]), и мы будем следовать здесь их методу. При этом мы будем пользоваться теми же обозначениями, которые применялись при разборе работы Теодорсена в п. 5-6. Полная циркуляция вокруг профиля в данный момент времени определяется выражением

$$\Gamma = \int_{-b}^b \gamma_a(x, t) dx. \quad (5-385)$$

Кроме того, условие равенства нулю полной циркуляции во всем потоке может быть записано в виде

$$\Gamma + \int_b^\infty \gamma_w(x, t) dx = 0. \quad (5-386)$$

Расчленим функцию, определяющую текущее значение погонной циркуляции присоединенных вихрей, на две части:

$$\gamma_a(x, t) = \gamma_0(x, t) + \gamma_1(x, t). \quad (5-387)$$

Здесь  $\gamma_0$  есть значение квазистационарного течения, которое может быть легко вычислено. Например, формула (5-105) после замены  $Udz_a/dx$  на  $w_a$  дает

$$\gamma_0(x, t) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}} \frac{w_a(\xi, t)}{(x^2 - \xi^2)} d\xi^*, \quad (5-388)$$

откуда путем интегрирования получаем

$$\Gamma_0(t) = \int_{-b}^b \gamma_0(x, t) dx = -2b \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \omega_a(\xi^*, t) d\xi^*. \quad (5-389)$$

Величина  $\gamma_1$  определяет добавочную циркуляцию, обусловленную нестандартностью течения. Каждому элементу с циркуляцией  $\gamma_1$  соответствует элемент с циркуляцией противоположного знака  $\gamma_w$  в спутной струе. Течение, определяемое сочетанием  $\gamma_1 - \gamma_w$ , должно удовлетворять гипотезе Кутта, поскольку ей удовлетворяет течение с циркуляцией  $\gamma_0$ . Выполнение граничного условия (5-225) на поверхности профиля, осуществляемое за счет  $\gamma_0$ , также не должно нарушаться. Но именно такими свойствами обладает течение, созданное противоположно направленными парами вихрей одинаковой интенсивности и использованное Теодорсеном во второй части его решения. Мы можем поэтому применить для своих целей любую формулу Теодорсена, которая окажется полезной. В частности, уравнение (5-297) поможет нам найти  $\gamma_w$  и

$$\Gamma_1(t) = \int_{-b}^b \gamma_1(x, t) dx = \Gamma(t) - \Gamma_0(t). \quad (5-390)$$

Перепишем уравнение (5-297), вводя переменную  $\xi^* = \cos \varphi$  взамен  $\varphi$  в первом из интегралов левой части,

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^{*2}}}{(\xi^*-1)} \omega_a(\xi^*, t) d\xi^* + \frac{1}{\pi b} \int_b^\infty \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} \gamma_w(\xi, t) d\xi = 0. \quad (5-391)$$

Если умножить все члены этого уравнения на  $\pi b$ , а выражение  $\sqrt{1-\xi^{*2}}/(\xi^*-1)$  преобразовать к виду  $-\sqrt{(1+\xi^*)/(1-\xi^*)}$ , то первый интеграл в левой части окажется равным циркуляции при квазистационарном течении, выражаемой формулой (5-389), и уравнение примет вид

$$\Gamma_0(t) + \int_b^\infty \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} \gamma_w(\xi, t) d\xi = 0. \quad (5-392)$$

Можно видоизменить это уравнение, приведя его с помощью равенств [(5-386) и (5-390) к виду

$$\Gamma_1(t) = \int_b^\infty \left[ \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} - 1 \right] \gamma_w(\xi, t) d\xi. \quad (5-393)$$

Так как функция  $\Gamma_0$  известна, то уравнение (5-392) представляет собой интегральное уравнение для определения распределения циркуляции спутной струи; зная последнюю, по формуле (5-393) можно вычислить  $\Gamma_1$ .

Если распределение циркуляции известно, то остается еще определить аэродинамические нагрузки на профиль. Это можно сделать с помощью формул (5-299)—(5-302), но в работе [5-56] дается взамен этого другой интересный ряд формул. Эти формулы можно получить, используя различные варианты записи уравнения Бернулли или, как сделано в [5-56], рассматривая скорости изменения импульсов [см. уравнение (5-60)], создаваемых всеми вихрями в потоке.

В результате получим

$$L = \rho U \Gamma_0 - \rho \frac{d}{dt} \int_{-b}^b \gamma_0(x, t) x dx + \rho U b \int_b^{\infty} \frac{\gamma_w(x, t) dx}{\sqrt{x^2 - b^2}}, \quad (5-394)$$

$$M_y = -\rho U \int_{-b}^b \gamma_0(x, t) x dx + \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_{-b}^b \gamma_0(x, t) \left[ x^2 - \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right] dx + \\ + \frac{\rho}{2} U b^2 \int_b^{\infty} \frac{\gamma_w(x, t) dx}{\sqrt{x^2 - b^2}}. \quad (5-395)$$

Здесь момент  $M_y$  берется относительно оси, проходящей через середину хорды, где  $x=0$ ; можно перенести эту ось в точку  $x=ba$ , добавляя произведение  $L$  на длину перемещения оси  $ba$ . Очевидно, что в каждой из формул (5-394) и (5-395) первый член характеризует эффект квазистационарного циркуляционного течения. Второй член представляет собой бесциркуляционную добавку, тогда как третий определяет нестационарное циркуляционное воздействие спутной струи, исчезающее, когда  $\gamma_w$  пренебрежимо мало или когда величина  $\sqrt{x^2 - b^2}$  в знаменателе становится очень большой. Как уже упоминалось ранее, из последних интегралов в формулах (5-394) и (5-395) можно видеть, что подъемная сила, обусловленная действием спутной струи, всегда приложена в точке, отстоящей на одну четверть хорды от передней кромки.

Неймарк [5-57] вывел аналогичное выражение для распределения давления в направлении хорды:

$$p_U - p_L = -\rho U \gamma_0 - \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^x \gamma_{on}(x, t) dx - \frac{\rho U}{\pi} \sqrt{\frac{b-x}{b+x}} \int_b^{\infty} \frac{\gamma_w(\xi, t) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}}, \quad (5-396)$$

где  $\gamma_{on}$  определяет бесциркуляционную часть вихревого слоя профиля, которая, как можно показать с помощью формул Зёнгена [5-13], выражается в виде

$$\gamma_{on}(x, t) = -\frac{2}{\pi \sqrt{b^2 - x^2}} \int_{-b}^b \frac{\sqrt{b^2 - \xi^2}}{(x - \xi)} \omega_a(\xi, t) d\xi. \quad (5-397)$$

Практическое решение задачи по методу Кармана и Сирса распадается на два этапа. Сначала уравнение (5-392) используется для вычисления  $\gamma_w(x, t)$ . Затем можно непосредственно вычислить интегралы в формулах (5-394) и (5-395) и найти подъемную силу и момент. Это делалось часто с помощью численного интегрирования, однако, как указывает Сирс [5-55], замечательное упрощение достигается путем введения преобразования Лапласа для переменной, характеризующей время. Так, приводя уравнение (5-392) к безразмерной форме и вспоминая, что  $\gamma_w$  зависит только от  $(x - Ut)$ , находим

$$\frac{\Gamma_0(s)}{Ub} + \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\xi^* + 1}{\xi^* - 1}} \frac{\gamma_w(\xi^* - s)}{U} d\xi^* = 0. \quad (5-398)$$

Для задач переходного типа, когда неустановившееся движение начинается при  $s=t=0$ , спутная струя распространяется только до  $\xi^* = 1 + s$ . Произведем замену переменного

$$\xi^* = 1 + s - \sigma$$

и заметим, что  $\gamma_w$  зависит только от  $\sigma$ , так как последняя отличается от разности  $(\xi^* - s)$  только постоянным слагаемым

$$-\frac{\Gamma_0(s)}{Ub} = \int_0^s \sqrt{\frac{2 + (s - \sigma)}{(s - \sigma)}} \frac{\gamma_w(\sigma)}{U} d\sigma. \quad (5-399)$$

Последний член в формуле (5-394), представляющий собой единственную трудную для вычисления часть подъемной силы, можно аналогичным образом преобразовать к виду

$$\frac{L_2(s)}{\rho U^2 b} = \int_0^s \frac{\gamma_w(\sigma)}{U} \frac{d\sigma}{\sqrt{(s-\sigma)^2 + 2(s-\sigma)}}. \quad (5-400)$$

Интегралы, стоящие в правых частях уравнений (5-399) и (5-400), с точки зрения операционного исчисления (см., например, Черчилль [5-58]) представляют собой интегралы свертки. Это означает, что при применении преобразования Лапласа

$$\mathfrak{L}\{f(s)\} = \int_0^\infty e^{-ps} f(s) ds \quad (5-401)$$

эти интегралы сводятся к произведениям преобразований подинтегральных функций, рассматриваемых как функции от  $s$ . Поэтому мы применим соотношения

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2 + 2s}}\right\} = e^p K_0(p), \quad (5-402)$$

$$\mathfrak{L}\left\{\sqrt{\frac{2+s}{s}}\right\} = e^p [K_0(p) + K_1(p)] \quad (5-403)$$

(где  $K_0$  и  $K_1$  представляют собой функции Бесселя второго рода от мнимого аргумента) и выполним над уравнениями (5-399) и (5-400) преобразование Лапласа:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\Gamma_0}{Ub}\right\} = -e^p [K_0(p) + K_1(p)] \mathfrak{L}\left\{\frac{\gamma_w}{U}\right\}, \quad (5-404)$$

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{L_2}{\rho U^2 b}\right\} = e^p K_0(p) \mathfrak{L}\left\{\frac{\gamma_w}{U}\right\}. \quad (5-405)$$

Если исключить из этих уравнений преобразование неизвестной циркуляции спутной струи, то получим

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{L_2}{\rho U^2 b}\right\} = -\frac{K_0(p)}{K_0(p) + K_1(p)} \mathfrak{L}\left\{\frac{\Gamma_0}{Ub}\right\}. \quad (5-406)$$

Сирс [5-55] применяет уравнение (5-406) к нескольким специальным случаям. Например, рассматривая задачу Вагнера, после замены  $\alpha_0$  на  $1/2\pi$  он получает коэффициенты единичной подъемной силы для установившегося движения:

$$\frac{\Gamma_0}{Ub} = 1 \quad (5-407)$$

и

$$\mathfrak{L}\{1\} = \frac{1}{p}. \quad (5-408)$$

С помощью этих соотношений находим, что уравнения (5-406) и (5-394) дают для результирующей подъемной силы следующее выражение:

$$\frac{L}{\rho U^2 b} = \frac{\Gamma_0}{Ub} + \frac{L_2}{\rho U^2 b} = 1 - \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{K_0(p)}{p[K_0(p) + K_1(p)]}\right\} = \varphi(s). \quad (5-409)$$

Для значений  $s = 0$  бесциркуляционная подъемная сила отсутствует. Несмотря на то, что нельзя получить обращение этого преобразования в замкнутой форме, оно обеспечивает все же весьма эффективную схему для вычисления  $\varphi(s)$ .

В качестве второго примера используем уравнение (5-406) для воспроизведения полученных нами результатов в случае простого гармонического движения. Вспомним тот факт, что реакция любой линейной системы на простое гармоническое колебание некоторой входной величины определяется лапласовым преоб-

разованием ее реакции на импульс той же величины, имеющий такую же амплитуду, причем вместо  $p$  подставляется частота колебаний, умноженная на  $\sqrt{-1}$ . Рассмотрим движение с изменением угла атаки, характеризуемое величиной  $\dot{h}$ . Квазистационарная циркуляционная подъемная сила имеет вид

$$L_0 = 2\pi\rho b U \dot{h}, \quad (5-410)$$

а бесциркуляционная часть равна

$$L_1 = \pi\rho b^2 \ddot{h}. \quad (5-411)$$

Следовательно,

$$\frac{\Gamma_0}{Ub} = \frac{L_0}{\rho U^2 b} = \frac{2\pi\dot{h}}{U}. \quad (5-412)$$

Умножив это выражение на *единичный* импульс, найдем, что соответствующее преобразование Лапласа будет иметь вид

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\Gamma_0}{Ub}\right\} = 2\pi \frac{\dot{h}}{U} \cdot 1. \quad (5-413)$$

Заменяя в уравнении (5-406)  $p$  на  $ik$  и применяя упомянутый выше принцип для простого гармонического движения, получаем

$$\frac{L^2}{\rho U^2 b} = \frac{-K_0(ik)}{K_0(ik) + K_1(ik)} 2\pi \frac{\dot{h}}{U}. \quad (5-414)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} L = L_1 + L_0 + L_2 &= \pi\rho b^2 \ddot{h} + 2\pi\rho U b \dot{h} \left[1 - \frac{K_0(ik)}{K_0(ik) + K_1(ik)}\right] = \\ &= \pi\rho b^2 \ddot{h} + 2\pi\rho U b \dot{h} \left[\frac{K_1(ik)}{K_0(ik) + K_1(ik)}\right]. \end{aligned} \quad (5-415)$$

Однако

$$K_1(ik) = \frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(k), \quad K_0(ik) = i \frac{\pi}{2} H_0^{(2)}(k), \quad (5-416)$$

так что

$$L = \pi\rho b^2 \ddot{h} + 2\pi\rho U b \dot{h} \frac{H_1^{(2)}(k)}{[H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)]} = \pi\rho b^2 \ddot{h} + 2\pi\rho U b C(k) \dot{h}, \quad (5-417)$$

чем подтверждается правильность формул (5-309) и (5-311). Можно без труда выполнить проверки и для других типов колебаний профиля.

## Глава 6

# СВЕДЕНИЯ ИЗ АЭРОДИНАМИКИ: ТЕЧЕНИЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

**6-1. Введение.** Задачи, связанные с полетом при больших дозвуковых, околозвуковых и сверхзвуковых скоростях, не вызывают теперь затруднений у опытного специалиста по аэроупругости. К счастью для него, из трех областей прикладной механики, которые связаны с его работой, — динамики, теории упругости и аэродинамики — лишь в последней ощущается существенное влияние перехода к таким скоростям. Это справедливо по крайней мере до тех пор, пока напряжения и свойства конструкционных материалов не начинают заметно изменяться под воздействием теплопередачи. Этот факт позволяет всегда использовать одни и те же уравнения статической деформации <sup>1)</sup> и уравнения движения, оставляя лишь некоторые скобки или аэродинамические матрицы для введения в них коэффициентов, соответствующих диапазону чисел Маха, в котором происходит полет. Аналогичное замечание можно сделать и о программировании задач аэроупругости для моделирующих вычислительных машин, так как этот процесс представляет собой, конечно, лишь другой способ выражения упомянутых выше уравнений. Возможно, однако, что техника экспериментов по аэроупругости в аэродинамической трубе или в полете с увеличением скоростей будет нуждаться в полном пересмотре, как мы увидим в главах, посвященных этим вопросам.

Настоящие замечания сделаны потому, что некоторые специалисты по аэроупругости имели склонность весьма поверхностно относиться к таким вопросам, как подбор коэффициентов для аэродинамических матриц или составление аэродинамических схем для вычислительных машин; кроме того, они иногда раздражались, если аэродинамики были не в состоянии обеспечить их точными линейными теориями в простой математической форме. Принимая во внимание трудности, возникающие при рассмотрении неустановившегося течения несжимаемой жидкости, можно предположить, что далеко не всегда просто учесть влияние сжимаемости. К счастью, в некоторых областях был сделан значительный прогресс. В данной главе и частично в следующей мы намереваемся показать эти области и наметить пути подхода, которые могут оказаться плодотворными в будущем.

Идея малых возмущений, выраженная в равенствах (5-31)—(5-33), лежит в основе большей части теории течения сжимаемой жидкости, применяемой в аэроупругости. В п. 5—1 мы показали, что основным следствием этой идеи является линеаризованное дифференциальное уравнение в частных производных (5-44), которое можно переписать в виде

$$\nabla^2 \varphi' - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - \frac{2M}{a_\infty} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial t} - M^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} = 0, \quad (6-1)$$

где

$$M = \frac{U}{a_\infty} \quad (6-2)$$

<sup>1)</sup> Речь идет только о малых движениях. — *Прим. ред.*



есть числа Маха свободного потока. Известно что уравнение (6-1), выведенн е на основании гипотезы малых возмущений, правильно описывает течения, удовлетворяющие этим предпосылкам, за исключением некоторых установившихся или почти установившихся околосвуковых течений вокруг крыльев большого удлинения и профилей. Если полет происходит с очень большой сверхзвуковой скоростью при

$$M \gg 1, \quad 6-3$$

то уже нет оснований считать  $u'$ ,  $v$  и  $w$  малыми только потому, что они пренебрежимо малы по сравнению с  $U$ . Они могут быть величинами того же порядка, что и скорость звука, и, следовательно, предпосылки линейности теории нарушаются.

Если уравнение (6-1) имеет силу, то не следует ожидать, что граничные условия на крыле, которые являются чисто геометрическими, будут изменяться под влиянием сжимаемости. При симметричном распределении толщины в случае установившегося течения, что, как указано в п. 5-4, является единственным из симметричных случаев, представляющим существенный интерес, имеют место уравнения (5-76) и (5-77):

$$w = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = U \frac{\partial z_t}{\partial x}; \quad \text{для } z = 0^+, (x, y) \text{ в области } R_a, \quad (5-76)$$

$$w = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = -U \frac{\partial z_t}{\partial x}; \quad \text{для } z = 0^-, (x, y) \text{ в области } R_a. \quad (5-77)$$

Для антисимметричного течения вокруг несущих крыльев, имеющих кривизну и совершающих неустановившееся движение под углом атаки, отличным от нуля, мы будем иметь видоизмененное уравнение (5-225):

$$w = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = \frac{\partial z_a}{\partial t} + U \frac{\partial z_a}{\partial x} = w_a(x, y, t); \quad \text{для } z = 0, (x, y) \text{ в области } R_a. \quad (6-4)$$

Как мы увидим позднее, гипотеза Кутта для течения сжимаемой жидкости вполне логична с физической точки зрения, если только при этом задняя кромка принадлежит к типу, известному под названием дозвукового. Кроме того, условие равенства нулю возмущений в бесконечности должно быть истолковано в соответствии с формой уравнения (6-1), определяющего задачу.

Можно было бы думать, что связь между скоростью и давлением, или уравнение Бернулли,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = F(t), \quad (5-13)$$

изменится в результате учета сжимаемости, но на самом деле, при условии малости возмущений, этого не происходит. В п. 5-1 было показано, что из уравнений (5-31) и (5-33) следует

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} \approx \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \frac{U^2}{2} + Uu'. \quad (6-5)$$

Кроме того, мы нашли, что  $F(t) = U^2/2$ , если движение жидкости далеко вверх по течению от крыла является однородным, с параллельными линиями тока; это соотношение справедливо, когда интеграл от  $1/\rho(p)$  берется в пределах от значения  $p = p_\infty$ , соответствующего свободному потоку, до местного значения  $p$ , соответствующего скорости  $q$ . Поскольку, однако, существует неразрывная внутренняя связь между давлением, плотностью, скоростью и потенциалом скоростей, то малые возмущения двух из этих величин указывают на такой же характер возмущений остальных величин. Мы можем предположить поэтому, что

$$(p - p_\infty) \ll p_\infty. \quad (6-6)$$

и получить отсюда

$$\rho(p) = \rho_\infty + \left(\frac{d\rho}{dp}\right)_\infty [p - p_\infty] + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2\rho}{dp^2}\right)_\infty [p - p_\infty]^2 + \dots, \quad (6-7)$$

где все члены в правой части, следующие за первым, малы по сравнению с ним. Отсюда следует, что для интеграла в уравнении (5-13) мы можем получить следующее приближенное выражение:

$$\begin{aligned} \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho(p)} &= \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho_\infty \left\{ 1 + \left(\frac{d\rho}{dp}\right)_\infty \frac{[p - p_\infty]}{\rho_\infty} + \dots \right\}} = \\ &= \frac{1}{\rho_\infty} \int_{p_\infty}^p \left\{ 1 - \frac{p - p_\infty}{\gamma p_\infty} - \dots \right\} dp \simeq \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty}. \end{aligned} \quad (6-8)$$

Здесь мы использовали формулу, выражающую зависимость между давлением и плотностью при изэнтропическом течении, которую можно записать так:

$$\left(\frac{d\rho}{dp}\right)_\infty = \frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}. \quad (6-9)$$

Подставив выражения (6-8), (6-5) и (5-14) в уравнение (5-13) и разрешив его относительно давления, мы получим

$$p - p_\infty = -\rho_\infty \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + U u' \right), \quad (6-10a)$$

или

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U^2} = -\frac{2}{U^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \frac{2}{U} \frac{\partial \varphi'}{\partial x}. \quad (6-10b)$$

Формула (6-10b) очень похожа на формулу (5-73), однако последняя была выведена лишь для течений несжимаемой жидкости.

**6-2. Установившееся обтекание крыльев и профилей дозвуковым потоком; преобразование Прандтля — Глауэрта.** Исключив из уравнения (6-1) два члена, содержащие производные по времени, мы получим дифференциальное уравнение, описывающее любое установившееся дозвуковое течение с малыми возмущениями,

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} = 0, \quad (6-11)$$

где  $M$  есть число Маха свободного потока. Если крыло или тело, с которым мы имеем дело, является почти плоским, то граничные условия даются в форме уравнения (5-76) или уравнения (6-4). Для наших целей достаточно рассмотреть лишь один тип граничных условий. Мы сосредоточим свое внимание на более важном случае несущего крыла, которому соответствует уравнение (6-4); исключив из этого уравнения член, содержащий производную по времени, получим:

$$\omega = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = U \frac{\partial z_a}{\partial x} = \omega_a(x, y); \quad \text{для } z = 0, (x, y) \text{ в области } R_a. \quad (6-12)$$

Одно из ранних существенных открытий в линеаризированной теории движения сжимаемой жидкости заключалось в том, что каждой задаче, решаемой посредством уравнения (6-11), соответствует определенное течение несжимаемой жидкости. Это объясняется тем, что уравнение (6-11) отличается от уравнения Лапласа только изменением масштаба в направлении оси  $x$ . С помощью так

называемого преобразования Прандтля—Глауэрта мы введем ряд вспомогательных зависимых и независимых переменных:

$$x_0 = \frac{x}{\sqrt{1-M^2}}, \quad (6-13a)$$

$$y_0 = y, \quad (6-13b)$$

$$z_0 = z, \quad (6-13c)$$

$$\varphi'_0(x_0, y_0, z_0) = \varphi'(x, y, z). \quad (6-14)$$

Уравнение (6-14) означает, что численное значение функции  $\varphi'_0$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  равно численному значению потенциала возмущений  $\varphi'$  в точке  $(x, y, z)$  первоначальной декартовой системы координат, если зависимость между координатами этих двух точек выражается формулами (6-13). Подставив величины (6-13) и (6-14) в уравнения (6-11) и (6-12), мы получим новую математическую задачу, выраженную следующими уравнениями:

$$\frac{\partial^2 \varphi'_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi'_0}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi'_0}{\partial z_0^2} = 0, \quad (6-15)$$

$$\frac{\partial \varphi'_0}{\partial z_0} = w_{a0}(x_0, y_0); \quad \text{для } z_0 = 0, (x_0, y_0) \text{ в области } R_{a0}. \quad (6-16)$$

Здесь  $w_{a0}$  — заданная функция, равная функции  $w_a$  в соответствующих точках, и  $R_{a0}$  — область в плоскости  $x_0 y_0$ , ограниченная той линией, в которую преобразуется граница области  $R_a$  в плоскости  $x y$ . При преобразовании уравнений (6-11) и (6-12) мы имели дело лишь с одной зависимой переменной  $\varphi'$ , зная которую, можно с помощью дифференцирования рассчитать все свойства течения сжимаемой жидкости. По-видимому, большая часть затруднений, возникающих при истолковании этого преобразования, проистекает от попытки преобразовать одновременно более чем одну зависимую переменную (как, например,  $\varphi'$  и  $w$ ). В действительности решение полностью определяется одной лишь функцией  $\varphi'$ .

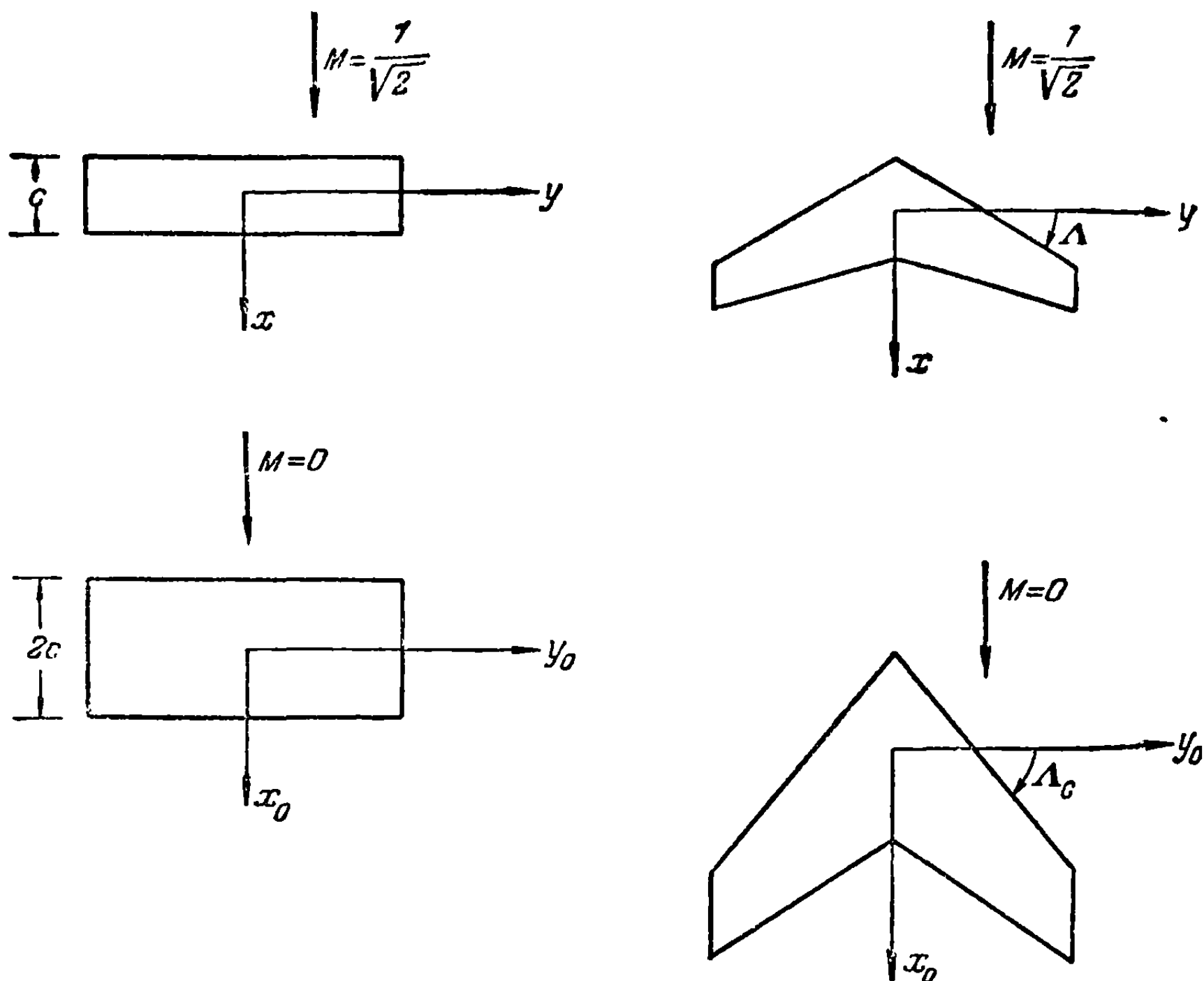
Уравнение (6-15) представляет собой как раз уравнение Лапласа, и поэтому было бы поучительно дать физическую интерпретацию задачи, поставленной уравнениями (6-15) и (6-16). Можно рассматривать  $\varphi'_0$  как потенциал скоростей возмущения для установившегося течения несжимаемой жидкости вокруг крыла, проекция которого в плане на плоскость  $x_0 y_0$  определяет область  $R_{a0}$ . Профиль нового крыла имеет такую форму, что вертикальные скорости частиц, соприкасающихся с верхней и нижней поверхностями крыла, распределяются в соответствии с функцией  $w_{a0}(x_0, y_0)$ . Если мы предположим для удобства, что оба однородных потока имеют одну и ту же скорость  $U$ , т. е. что полный потенциал скоростей определяется как

$$\varphi_0 = \varphi'_0 + U x_0, \quad (6-17)$$

то из уравнений (6-12) и (6-16) мы заключим, что профили двух крыльев имеют в соответствующих точках одинаковые наклоны. Так как скорость звука в первоначальном газе столь мала, что сжимаемость играет существенную роль, то эти два течения лучше всего представить себе как течения разных жидкостей, таких, как воздух и вода или фреон и воздух. Очевидно, что два крыла имеют различную форму в плане, так как уравнение (6-13a) показывает, что для течения несжимаемой жидкости все размеры в направлении оси  $x_0$  увеличиваются в  $1/\sqrt{1-M^2}$  раз. Благодаря этому как тангенс угла стреловидности, так и

длина хорды в каждом сечении по направлению потока увеличиваются в том же отношении. Размах крыла не изменяется, так что увеличение площади в плане ведет к уменьшению удлинения пропорционально величине  $\sqrt{1-M^2}$ . Две пары эквивалентных форм в плане показаны на фиг. 6-1.

Значение результатов, выраженных уравнениями (6-13) и (6-16), заключается в том, что они позволяют применить к задачам о дозвуковом течении всю мощную технику теории потенциала. Мы можем использовать любой из методов для профилей и крыльев, описанных в пп. 5-4 и 5-5 или в литературе, ссылки



Фиг. 6-1. Эквивалентные формы в плане прямых и стреловидных крыльев, получаемых с помощью преобразования Прандтля — Глауэрта [уравнение (6-13)].

на которую там даны, если только этот метод пригоден для определенного, изучаемого нами вида течения несжимаемой жидкости. Вспомогательные граничные условия, дополняющие уравнение (6-16), остаются здесь теми же самыми. Так как оба дифференциальных уравнения (6-11) и (6-15) принадлежат к эллиптическому типу (см. [6-1], гл. 7), то единственное требование в бесконечности состоит в том, чтобы функция  $\varphi'_0$  стремилась к нулю всюду, за исключением окрестности спутной струи. К течению несжимаемой жидкости мы применяли гипотезу Кутта, заставляя разрыв давлений на поверхности крыла падать у задней кромки до нуля. Когда жидкость сжимаемая, но основной поток дозвуковой, возникает та же неопределенность в отношении полной циркуляции вокруг каждого сечения, параллельного оси самолета, и, как свидетельствуют экспериментальные данные, единственно правильное значение циркуляции опять определяется условием плавного стекания потока. Кроме того, задняя кромка области  $R_a$  преобразуется в заднюю же кромку области  $R_{a\alpha}$ .

Если мы решили уравнения (6-15) и (6-16) при выполнении только что упомянутых добавочных условий, то последний этап процесса преобразования будет состоять в определении аэродинамической нагрузки на первоначальное

крыло. Мы сделаем это путем преобразования уравнения Бернулли для установившегося течения (6-10b):

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U^2} = -\frac{2}{U} \frac{d\varphi'}{dx}. \quad (6-18)$$

Местный коэффициент давления  $C_{p0}$  в любой точке  $(x_0, y_0)$  преобразованного крыла выражается в виде

$$C_{p0} = \frac{p_0 - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = -\frac{2}{U} \frac{d\varphi'_0}{dx_0}. \quad (6-19)$$

Уравнения (6-13) и (6-14) дают

$$\frac{d\varphi'}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \frac{d\varphi'_0}{dx_0}, \quad (6-20)$$

и мы можем исключить производные из уравнений (6-18) и (6-19), после чего получим

$$C_p = \frac{C_{p0}}{\sqrt{1-M^2}}. \quad (6-21)$$

Если плотности свободного потока для обоих случаев считать одинаковыми, то можно заключить, что давление возмущения в каждой точке крыла в сжимаемой жидкости в  $1/\sqrt{1-M^2}$  раз больше давления в соответствующей точке эквивалентного крыла в несжимаемой жидкости.

Коэффициенты подъемной силы (полной или текущей) и момента для обоих крыльев связаны соотношениями, подобными формуле (6-21), так как эти величины представляют собой безразмерные интегралы от  $C_p$  по одной и той же безразмерной поверхности. Однако истинные значения полной подъемной силы и подъемной силы на единицу размаха, особенно важные для нас, так как они часто вычисляются по теории несущей линии [уравнение (5-147)] или по теории Вейссингера [уравнение (5-190)], оказываются для обоих крыльев одинаковыми. Мы докажем это следующим образом. Текущее значение подъемной силы первоначального крыла выражается так:

$$L(y) = - \int_{x_l(y)}^{x_t(y)} [p_U - p_L] dx, \quad (6-22)$$

где  $x_l$  и  $x_t$  — координаты передней и задней точек рассматриваемого сечения. Подобным же образом выражается соответствующая подъемная сила для преобразованного крыла:

$$L_0(y_0) = - \int_{x_{l0}(y_0)}^{x_{t0}(y_0)} [p_{0U} - p_{0L}] dx_0. \quad (6-23)$$

Динамические давления одинаковы для обоих течений, и поэтому из формулы (6-21) следует

$$p_U - p_L = \frac{p_{0U} - p_{0L}}{\sqrt{1-M^2}}. \quad (6-24)$$

Подставляя  $p_{0U} - p_{0L}$  из формулы (6-24) в формулу (6-23) и выполняя преобразование (6-13а), находим

$$L_0(y_0) = - \int_{x_l(y)}^{x_t(y)} \sqrt{1-M^2} [p_U - p_L] \frac{dx}{\sqrt{1-M^2}} = L(y). \quad (6-25)$$

Следовательно, сжатие крыла в направлении хорды при обратном переходе от несжимаемого потока к сжимаемому точно компенсирует увеличение давления. Значения полной подъемной силы также одинаковы, так как преобразование (6-13b) не влияет на интегрирование в направлении размаха.

Уравнение (6-25) позволяет нам определить погонную нагрузку в направлении размаха, или  $cc_l$  — распределение для деформированной формы в плане, и перенести ее без изменения на первоначальное крыло. Так рекомендуют поступать, например, Юнг и Харпер [6-2] при использовании интегрального уравнения Вейссингера для прямых и стреловидных крыльев. После того как нагрузка отнесена к действительному крылу, без малейшего труда вычисляются момент тангажа, положение аэродинамического центра, индуктивное сопротивление и т. п.

Когда течение имеет трехмерный характер, то уже нельзя избежать неудобства рассмотрения новой формы в плане для каждого нового числа Маха  $M$ . Однако простые свойства двумерных течений позволяют нам вывести соотношения между давлениями на один и тот же профиль с учетом и без учета сжимаемости. Когда мы преобразовываем такой профиль в соответствии с уравнениями (6-13a) и (6-13b), его хорда удлиняется в  $1/\sqrt{1-M^2}$  раз, но, как мы видели, отсчитываемые в направлении хорды наклоны  $dz_a/dx$  остаются неизменными. Это означает, что угол атаки, форма и безразмерная кривизна в эквивалентном несжимаемом потоке сохраняются. Влияние размаха здесь, однако, не сказывается, и на безразмерных величинах, характеризующих свойства определенным образом расположенного профиля, таких, как коэффициент подъемной силы, коэффициент момента и коэффициент распределения давления, не отражается такое простое изменение масштаба, как увеличение всех размеров в  $1/\sqrt{1-M^2}$  раз. Следовательно, мы можем утверждать, что уравнение (6-21) справедливо для подобных друг другу профилей. А отсюда следует, что соотношения

$$c_l = \frac{c_{l0}}{\sqrt{1-M^2}}, \quad (6-26)$$

$$c_m = \frac{c_{m0}}{\sqrt{1-M^2}}, \quad (6-27)$$

$$\frac{dc_l}{da} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \left( \frac{dc_l}{da} \right)_0 = \frac{a_0}{\sqrt{1-M^2}} \quad (6-28)$$

связывают свойства одного и того же двумерного профиля при условиях полета с учетом и без учета сжимаемости.

Аэродинамический центр профиля остается на расстоянии одной четверти хорды от передней кромки, а инвариантность граничных условий показывает также, что уравнение (6-21) пригодно для расчета давлений, обусловленных толщиной профиля. Формула (6-28), выражающая влияние сжимаемости на наклон кривой подъемной силы, особенно хорошо известна. Она была вполне удовлетворительно подтверждена экспериментами с тонкими крыльями под малыми углами атаки с числами Маха вплоть до отличающихся от критических лишь на несколько процентов.

Результат, выражаемый формулами (6-21) и (6-26)—(6-28), называют поправкой Прандтля—Глауэрта на сжимаемость. Она строго справедлива для двумерных течений, и ее безоговорочное применение к крыльям конечного размаха может привести к ошибкам, особенно в случае малости удлинения. Теоретическая справедливость поправки не распространяется также на лобовое сопротивление, вызываемое на тонких профилях в основном вязкими касательными силами. В действительности коэффициент лобового сопротивления остается обычно постоянным, независимо от числа Маха, до тех пор, пока его резкое повыше-



ние не является свидетельством появления скачков на поверхности крыла. Для вывода поправочных формул на сжимаемость с учетом нелинейности были использованы другие, более точные теории двумерного течения. По-видимому, наиболее известной и точной из этих формул является формула, полученная Карманом и Цянем (см. [6-3], гл. 11):

$$C_p = \frac{C_{p0}}{\sqrt{1-M^2} + \frac{M-C_{p0}}{2\sqrt{1-M^2}+2}}. \quad (6-29)$$

Так как  $C_{p0}$  входит в знаменатель формулы (6-29), то эту формулу нельзя непосредственно проинтегрировать для определения поправок к значениям подъемной силы и момента. Различные линейные соотношения, которые можно получить с помощью преобразования Прандтля—Глауэрта, применялись почти исключительно при решении задач аэроупругости, связанных с установившимся дозвуковым движением.

При изучении течений около более толстых объектов, например тел вращения, граничные условия должны преобразовываться иным путем. Они больше не могут удовлетворяться на плоскости  $z=0$ , а должны следовать за контурами тела. При этих условиях одна из возможностей заключается в применении преобразования в форме Гёттерта, подробно разобранного в работе [6-4].

Естественно ожидать, что все эти поправки перестанут быть справедливыми при таких скоростях полета, когда числа Маха превышают критические значения для данного крыла или тела и когда на поверхности начинают появляться сверхзвуковые зоны и образуются скачки. Формулы, подобные (6-28), не имеют смысла в околосзвуковом диапазоне скоростей, когда знаменатель приближается к нулевому значению. В случае двумерного течения это явление отражает существенную нелинейность основного дифференциального уравнения, проявляющуюся вопреки гипотезе малых возмущений. Однако в случае трехмерных крыльев формальное рассмотрение преобразования (6-13) приводит к заключению о том, что, когда величина  $\sqrt{1-M^2}$  близка к нулю, любой форме в плане соответствует в несжимаемом потоке форма очень малого удлинения. Для вычисления нагрузки на нее может быть применена теория, описанная в п. 5-5 (с). Хислет, Ломакс и Шпрейтер [6-5] подвергли всестороннему анализу теорию, соответствующую предельному случаю  $M=1$ .

Изучение формулы (6-21) в нижней части диапазона чисел Маха позволяет объяснить, почему теория несжимаемого потока может быть с успехом использована вплоть до довольно высоких дозвуковых скоростей. Множитель  $1/\sqrt{1-M^2}$  приближается к единице при приближении  $M$  к нулю, имея нулевую производную. Даже при  $M=0,3$  этот множитель имеет численное значение 1,048, так что формулы, основанные на предположении о постоянстве плотности, дают ошибку менее 5%.

В заключение этого пункта дадим распространение полуэмпирических формул, приведенных в конце п. 5-5, на дозвуковой диапазон течения сжимаемой жидкости. Уравнение (5-166), например, выведено на основе теории несущей линии и поэтому является точным только для прямых крыльев большого удлинения. Так как коэффициенты подъемной силы и наклоны кривых подъемной силы для эквивалентных крыльев связаны формулой (6-21), то мы должны взять наклон кривой подъемной силы крыла меньшего удлинения в несжимаемом потоке и умножить его на величину  $1/\sqrt{1-M^2}$ . Это приводит к выражению

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{a_0}{\sqrt{1-M^2}} \frac{\lambda \sqrt{1-M^2}}{[\lambda \sqrt{1-M^2} + (a_0/\pi)]} \approx a_0 \frac{\lambda}{[\lambda \sqrt{1-M^2} + 2]}, \quad (6-30)$$



где  $a_0$  — значение, вычисленное для несжимаемого двумерного потока. Применяя тот же процесс к более точному уравнению (5-218), получаем

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{a_0}{\sqrt{1-M^2}} \frac{\lambda \sqrt{1-M^2}}{\left[ \lambda \sqrt{1-M^2} \sqrt{1 + \left( \frac{a_0}{\pi \lambda \sqrt{1-M^2}} \right)^2} + \frac{a_0}{\pi} \right]}. \quad (6-31)$$

Вспомним, что для двумерного стреловидного крыла все аэродинамические нагрузки определяются составляющей скорости течения, перпендикулярной к передней кромке. Поскольку те же рассуждения справедливы для случая сжимаемой жидкости, то число Маха, определяющее влияние сжимаемости, исчисляется здесь по составляющей скорости, направленной вдоль нормали; оно равно  $M \cos \Lambda$ , где  $M$  — основное число Маха полета. Мы можем сказать поэтому, что наклон кривой подъемной силы на единицу размаха стреловидного крыла будет равен

$$\frac{d\bar{c}_l}{d\bar{\alpha}} = \frac{a_0}{\sqrt{1-M^2 \cos^2 \Lambda}}, \quad (6-32)$$

где  $a_0$  — наклон для двумерного профиля в сечении, перпендикулярном к прямой, направленной вдоль размаха. Вследствие уравнения (5-222b) наклон кривой погонной подъемной силы для сечений, параллельных направлению полета, и для соответствующих углов атаки равен

$$\frac{dc_l}{d\alpha} = \frac{a_0 \cos \Lambda}{\sqrt{1-M^2 \cos^2 \Lambda}}. \quad (6-33)$$

Уравнения (6-32) и (6-33) показывают важное свойство стреловидных крыльев большого удлинения, состоящее в том, что влияние сжимаемости начинает проявляться позднее, лишь когда  $M \cos \Lambda$  достигает критических значений.

Стреловидные крылья конечного размаха совершенно аналогично прямым крыльям имеют свои эквиваленты для несжимаемого потока. Эффективный угол стреловидности (фиг. 6-1) определяется формулами

$$\operatorname{tg} \Lambda_e = \frac{\operatorname{tg} \Lambda}{\sqrt{1-M^2}}, \quad (6-34a)$$

$$\cos \Lambda_e = \frac{\sqrt{1-M^2}}{\sqrt{1-M^2 \cos^2 \Lambda}} \cos \Lambda. \quad (6-34b)$$

В соответствии с предыдущими формулами, естественным обобщением уравнения (5-224) служит весьма общая формула Дидериха [6-6]:

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{a_0 \cos \Lambda_e}{\sqrt{1-M^2}} \frac{\lambda \sqrt{1-M^2}}{\lambda \sqrt{1-M^2} \sqrt{1 + \left( \frac{a_0 \cos \Lambda_e}{\pi \lambda \sqrt{1-M^2}} \right)^2} + \frac{a_0 \cos \Lambda_e}{\pi}}. \quad (6-5)$$

Данные измерений в работе [6-6] вплоть до  $M=0,7$  и для  $\lambda=1,5$  и далее исключительно хорошо подтверждают точность уравнения (6-35).

**6-3. Обтекание профилей и крыльев установившимся сверхзвуковым потоком.** Подобно всем видам неустановившегося течения сжимаемой жидкости, установившийся сверхзвуковой поток порождает целый ряд новых явлений, отличающихся от явлений, обычных при установившемся движении жидкости с меньшими скоростями. Говоря простым физическим языком, решающее воздействие на характер движения оказывает тот факт, что для распространения любого возмущения от одной точки до другой требуется конечный промежуток времени, и никакие сигналы не могут распространяться против основного течения, скорость которого превышает скорость звука. Можно

доказать, что все возмущения, порожденные тонким крылом или телом, остаются внутри определенных конусов или клиньев, имеющих направленные вниз по течению образующие и начинающихся от передней кромки.

Линеаризованная теория, выведенная в п. 5-1, охватывает большую часть качественно важных особенностей, наблюдаемых в действительности при сверхзвуковом полете самолета, за некоторыми, однако, исключениями. Важнейшим из этих исключений является то, что предположение о постоянстве энтропии во всем объеме газа исключает возможность возникновения скачков конечной интенсивности. Пренебрежение вязкостью и теплопроводностью исключает из рассмотрения также механический и температурный пограничные слои. Это обстоятельство само по себе не приводит к ошибкам, более существенным, чем для дозвукового течения, пока числа  $M$  не достигают значений, равных примерно  $M = 3$  или более высоких, при которых для проектировщика начинает играть первостепенную роль теплопередача. Вязкость также принимает участие в образовании скачков, а утолщение или отрыв пограничного слоя в тех областях, где скачки подходят близко к поверхности тела, может даже в случае очень тонкого крыла распространить влияние вязкости на значительно больший объем потока, чем это могло бы быть при дозвуковом полете.

В теории слабовозмущенного сверхзвукового потока имеется одно любопытное внутреннее противоречие. При применении основного дифференциального уравнения имеется в виду, что различные пространственные и временные производные поля скоростей должны быть повсюду сравнительно малы. В то же время, однако, найдено, что в решениях для течений вдоль некоторых поверхностей имеют место конечные разрывы скорости (бесконечные производные). Мы принуждены считать эти разрывы, подобно особенностям давления в решениях для дозвуковых течений, частью той дани, которая обусловлена линеаризацией. Единственным настоящим оправданием этого противоречия служит хорошее соответствие между теоретическими и экспериментальными данными во всех случаях, когда экспериментальные данные были получены.

Прежде чем производить какие-либо математические выкладки, рассмотрим несколько важных физических фактов, являющихся следствием предположения о малости возмущений. В п. 5-1 показано, что следует пренебречь отклонениями значений скорости звука от ее величины в свободном потоке  $a_\infty$ . Отсюда и из условия (5-33) следует, что любой сигнал, исходящий из точки  $(x, y, z)$  координатной системы, связанной с обтекаемым телом, может быть принят только внутри или на поверхности прямого кругового конуса, ось которого направлена вниз по потоку от точки  $(x, y, z)$ . Наблюдателю, движущемуся вместе с жидкостью, представляется, что определенный импульс, испускаемый в момент  $t = 0$ , распространяется по сферической поверхности мгновенного радиуса  $a_\infty t$ , центр которой движется вниз по течению относительно нашей координатной системы со скоростью  $U$ . Как показано на фиг. 6-2, огибающая различных положений этой сферы представляет собой конус, имеющий половину угла при вершине

$$\mu = \arcsin \frac{a_\infty t}{Ut} = \arcsin \frac{1}{M} = \arctg \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad (6-36)$$

равную углу Маха. Любая последовательность возмущений, исходящих из точки  $(x, y, z)$ , остается внутри этого конуса, уравнение которого при совпадении направления оси  $x$  с направлением свободного потока имеет вид

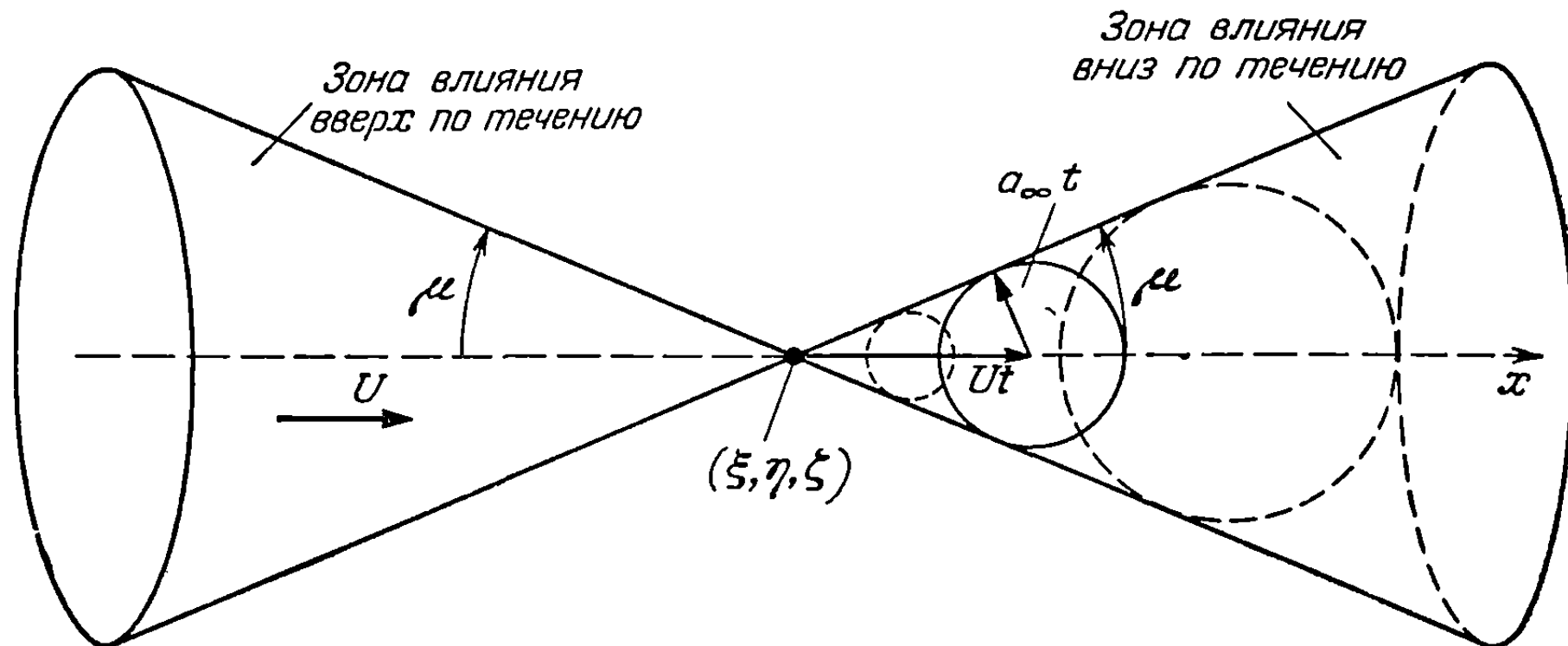
$$(\xi - x)^2 - (M^2 - 1)[(\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2] = 0 \quad \text{для } x \leq \xi. \quad (6-37)$$

Этот конус известен под названием конуса Маха, или зоны влияния точки  $(x, y, z)$  вниз по течению.

Сама такая точка может испытывать воздействие лишь со стороны тех источников возмущения, в зону влияния которых вниз по течению она попадает.

Очевидно, что геометрическим местом таких источников является конус Маха, ось которого направлена вверх по потоку от точки  $(x, y, z)$ . Он называется передним конусом, или зоной влияния точки  $(x, y, z)$  вверх по течению, и определяется тем же уравнением (6-37), где, однако, величина  $\xi$  ограничивается условием  $x \geq \xi$ . Обе зоны влияния показаны на фиг. 6-2.

Если тело, создающее возмущения в сверхзвуковом потоке, представляет собой крыло, которое можно приближенно считать лежащим в плоскости  $xu$ , то общая зона влияния всего крыла вниз по течению ограничена огибающей поверхностью конусов Маха, идущих назад от передней кромки крыла. Если, например, эта кромка прямая или крыло представляет собой двумерный профиль,



Фиг. 6-2. Образование конуса Маха возмущением, начавшим двигаться в момент  $t = 0$  из точки  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Показаны также зоны влияния точки  $(\xi, \eta, \zeta)$  вверх и вниз по течению.

то эти конусы образуют так называемый клин Маха. Таким образом, задача о расчете движения жидкости в любой точке, обусловленного наличием сверхзвукового крыла произвольной формы, упрощается тем, что на характеристики движения в такой точке оказывает влияние только часть плоскости  $xu$ , попадающая внутрь переднего конуса. В общем случае для точки  $(x, y, z)$  эта область влияния ограничена гиперболой, уравнение которой получается из уравнения (6-37), если положить в нем  $\zeta = 0$  и ограничиться значениями  $\xi$ , меньшими  $x$ :

$$\xi = x - \sqrt{(M^2 - 1) [(y - \eta)^2 + z^2]} \quad (6-38a)$$

или

$$\eta = y \pm \sqrt{\frac{(x - \xi)^2}{M^2 - 1} - z^2}. \quad (6-38b)$$

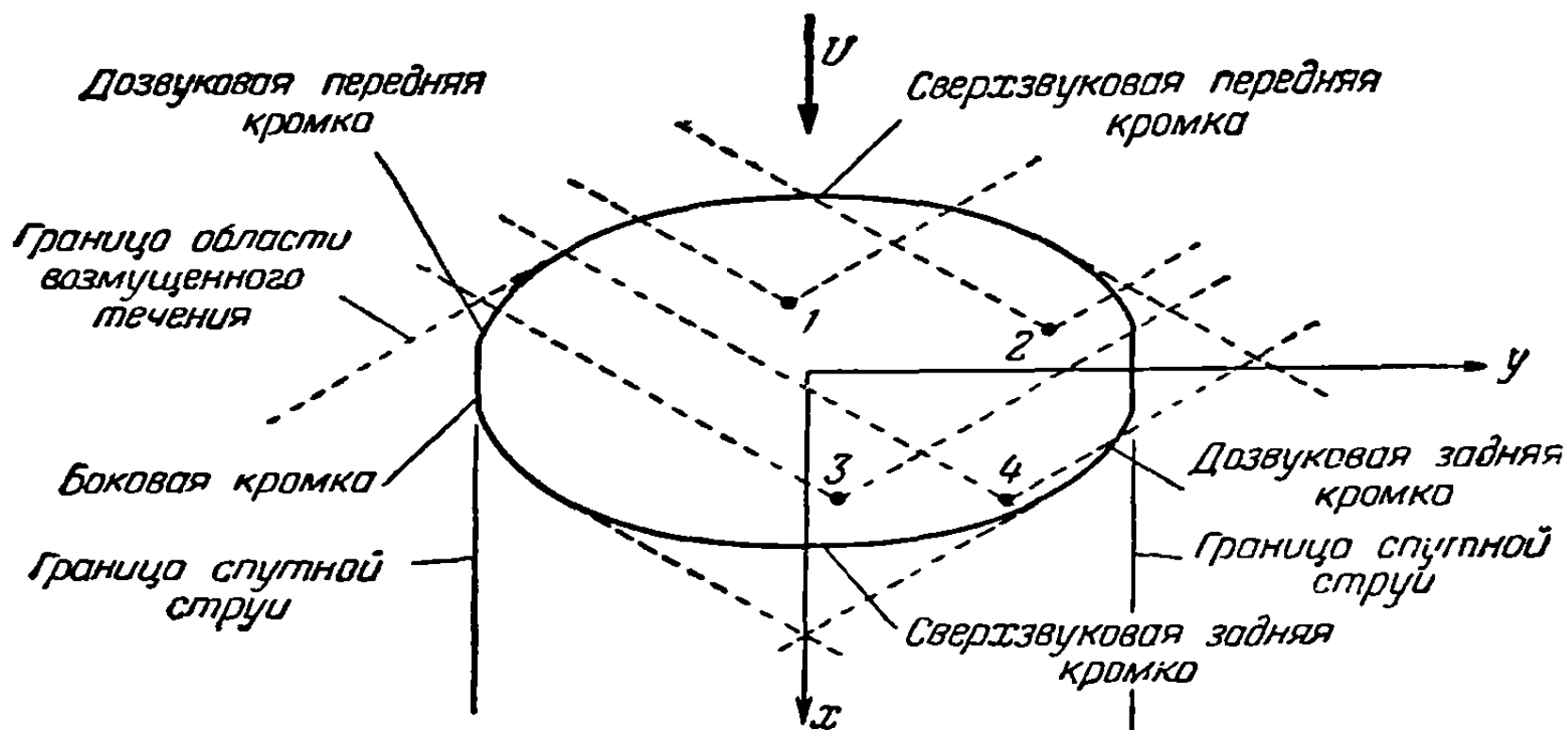
Здесь  $\xi$  и  $\eta$  — текущие координаты плоскости крыла. Для точки  $(x, y, 0^+)$  на поверхности крыла уравнение (6-38a) сводится к уравнению пары прямых линий:

$$\xi - x = \pm \sqrt{M^2 - 1} (y - \eta) \quad \text{для } \xi \leq x. \quad (6-39)$$

На фиг. 6-3 показаны обобщенная форма сверхзвукового крыла в плане и четыре точки  $(x, y, 0^+)$ , расположенные различным образом по отношению к кромкам, вместе с границами их зон влияния вверх по течению, определяемыми уравнением (6-39). Различные пунктирные линии на фиг. 6-3 — это линии Маха в плоскости крыла; подобно границам зон влияния, все они составляют с осью  $x$  угол  $\mu$ . Из этой фигуры видно, что характер области, оказывающей влияние на какую-либо точку, зависит как от положения точки, так и от типа передней и задней кромок, принадлежащих крылу. Прежде всего любая точка впереди от передней кромки и впереди линий Маха, идущих от этой кромки, не подвергается возмущениям, и там мы можем положить  $\varphi' = 0$  ( $\varphi = Ux$ );

это утверждение справедливо также для любой части поля течения, находящейся впереди упомянутой выше огибающей конусов Маха с вершинами на передней кромке.

Точка 1 на фигуре расположена в зоне влияния точек, находящейся на той же поверхности, что и данная точка, между ней и передней кромкой. Течение впереди этой кромки не влияет на значение  $\varphi'$ . Та часть передней кромки, которая находится в зоне влияния точки 1 вверх по течению, обладает тем свойством, что перпендикулярная к ней составляющая скорости невозмущенного потока превышает  $a_\infty$ ; она называется поэтому сверхзвуковой передней кромкой. О тех областях, в которых зоны влияния точек вверх по течению пересекают



Фиг. 6-3. Обобщенная форма сверхзвукового крыла в плане. Показаны различные точки на поверхности и их зоны влияния вверх по течению.

только сверхзвуковые кромки (как, например, вся срединная поверхность двумерного профиля), говорят, что здесь верхняя и нижняя поверхности крыла независимы. Течение над верхней или над нижней поверхностью может быть рассчитано независимо от формы противоположной поверхности.

На точку 2 оказывает влияние область возмущенного течения вне крыла, так как в ее зону влияния вверх по течению попадает часть дозвуковой передней кромки, где перпендикулярная к кромке составляющая  $U$  меньше чем  $a_\infty$ . Форма поверхности крыла на стороне, противоположной точке 2, влияет на характеристики течения вне крыла, а те в свою очередь влияют на значение  $\varphi'$  в точке 2. Следовательно, поверхности в этой области уже не могут считаться независимыми.

Точка 3 находится в зоне влияния двух расположенных по противоположным сторонам участков дозвуковой передней кромки с соответствующими возмущенными областями вне крыла. В точку 4 попадают сигналы от сверхзвуковой и дозвуковой передних кромок, боковой кромки и дозвуковой задней кромки, причем мы предполагаем, что с последней стекает некоторая спутная струя. Очевидно, что в зону влияния вверх по течению любой точки крыла, имеющего практическое значение, не могут попасть какие-либо участки сверхзвуковой задней кромки.

Трудность математического решения линеаризированной задачи все возрастает, если идти от точки к точке в последовательности 1—2—3—4. Для различных типов областей влияния оказываются успешными совершенно различные методы; это приводит к неблагоприятному положению, при котором каждый новый класс форм сверхзвуковых крыльев в плане требует обычно иного подхода к решению. Никакой широко применимой расчетной схемы, подобной интегральному уравнению Вейссингера, пока что не было разработано и, по-видимому, не имеется в перспективе.

Вследствие того, что могут быть два различных типа задних кромок, встает вопрос о выполнении гипотезы Кутта в теории сверхзвукового потока. При

сверхзвуковой кромке условие плавного схода потока не применяется, потому что отсутствует механизм, с помощью которого частицы, приближающиеся к кромке, оповещались бы о ее близости и поток успевал бы подготовиться к стеканию. В самом деле, распределение нагрузки на крыло, все задние границы которого являются сверхзвуковыми, рассчитывается так, как если бы крыло простиралось вниз по потоку до бесконечности. Однако дозвуковая задняя кромка может оказывать влияние на поток, обтекающий крыло, вблизи нее, и было принято делать предположение о равенстве нулю разрыва давлений у этой кромки. Оказалось, что математические решения имеют неопределенность такого же рода, как и в дозвуковом течении, которая устраняется подобным же образом, — с помощью гипотезы Кутта; имеющиеся экспериментальные данные оправдывают применение этого условия. Учитывая связанные с этим трудности, нужно признать удачным, что лишь некоторые из стреловидных крыльев, встречающихся практически на сверхзвуковых самолетах, имеют дозвуковые задние кромки.

В качестве примера построения очень простого решения, широко используемого при анализе статических аэроупругих свойств сверхзвуковых крыльев с помощью теории несущей полосы, рассмотрим двумерный профиль с произвольным распределением толщины и кривизны. Дифференциальное уравнение (6-1) лучше всего записать в виде

$$(M^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} = 0. \quad (6-40)$$

Если хорда имеет длину  $2b$ , то при установлении граничных условий для верхней и нижней поверхностей мы можем следовать пп. 5-1 и 5-4:

$$\omega = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = U \frac{dz_U}{dx} \quad \text{для } z = 0^+, \quad -b \leq x \leq b, \quad (6-41a)$$

$$\omega = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = U \frac{dz_L}{dx} \quad \text{для } z = 0^-, \quad -b \leq x \leq b. \quad (6-41b)$$

В уравнении (6-40) нетрудно узнать волновое уравнение для двумерного случая, решением которого, как доказывается в любом руководстве по дифференциальным уравнениям в частных производных, служит

$$\varphi' = f(x - z\sqrt{M^2 - 1}) + g(x + z\sqrt{M^2 - 1}), \quad (6-42)$$

где  $f$  и  $g$  представляют собой произвольные функции указанных комбинаций независимых переменных. Уравнение (6-42) можно применить и в данном случае (см., например, [6-3], гл. 9), однако имеется другой метод, более соответствующий методу, использованному в других пунктах данной книги, и состоящий в замене профиля слоем сверхзвуковых источников.

Потенциал возмущения, воспринимаемого в точке  $(x, y, z)$  и создаваемого стационарным пространственным сверхзвуковым источником интенсивности  $H$ , находящимся в точке  $(\xi, \eta, \zeta)$ , выражается в виде

$$\varphi'_s = \frac{-H}{2\pi \sqrt{(x - \xi)^2 - (M^2 - 1)[(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]}}. \quad (6-43)$$

Функция (6-43) есть решение уравнения

$$(M^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} = 0, \quad (6-44)$$

частным случаем которого для плоской задачи является уравнение (6-40). За пределами зоны влияния точки  $(\xi, \eta, \zeta)$  вниз по течению, граница которой определяется обращением в нуль величины под знаком радикала в уравнении (6-43) при  $x \geq \xi$ , мы должны считать  $\varphi'_s$  равным нулю. Во всех точках этой границы функция  $\varphi'_s$  имеет особенности, потому что сигналы, посылаемые *сосредоточенным* источником, усиливают на ней друг друга до бесконечности. Слой сверх-

звуковых источников на плоскости  $\xi\eta$ , интенсивность  $H(\xi)$  которого, отнесенная к единице площади, не зависит от координаты, отсчитываемой вдоль размаха, имеет потенциал

$$\varphi'(x, z) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-b}^{x-z\sqrt{M^2-1}} \int_{-\sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{M^2-1}-z^2}}^{\sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{M^2-1}-z^2}} \frac{H(\xi) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (M^2-1)(\eta^2+z^2)}}. \quad (6-45)$$

Здесь для удобства мы положили  $u$  равным нулю, так как предполагается, что двумерное течение имеет одинаковый характер в любой плоскости  $u = \text{const}$ . Пределы интегрирования для  $\xi$  и  $\eta$  лежат на гиперболе (6-38), образованной пересечением переднего конуса с вершиной в точке  $(x, 0, z)$  с плоскостью крыла, позади от передней кромки, определяемой уравнением  $\xi = -b$ .

Сосредоточим наше внимание на верхней поверхности профиля, характеризуемой уравнением (6-41a) и ограничением  $z \geq 0$ . Форма нижней поверхности не влияет на течение; тот факт, что течение можно определить независимо от этой формы, оправдывает использование нами элементарных решений, симметричных относительно плоскости  $z = 0$ , хотя известно, что в действительном движении такая симметрия отсутствует. Равенство (6-45) можно один раз проинтегрировать, так как неизвестная функция  $H$  не влияет на интегрирование по  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \varphi'(x, z) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{x-z\sqrt{M^2-1}} \frac{H(\xi)}{\sqrt{M^2-1}} \times \\ &\times \left\{ \arcsin \left[ \frac{\sqrt{M^2-1}\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (M^2-1)z^2}} \right] \Big|_{-\sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{M^2-1}-z^2}}^{\sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{M^2-1}-z^2}} \right\} d\xi = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{M^2-1}} \int_{-b}^{x-z\sqrt{M^2-1}} H(\xi) d\xi. \quad (6-46) \end{aligned}$$

Подставляя функцию (6-46) в граничное условие (6-41a) и пользуясь формулой дифференцирования определенного интеграла по параметру, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'(x, 0^+)}{\partial z} &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{-1}{2\sqrt{M^2-1}} \frac{\partial (x-z\sqrt{M^2-1})}{\partial z} H(x-z\sqrt{M^2-1}) \right\} = \\ &= \frac{H(x)}{2} = U \frac{dz_U}{dx}. \quad (6-47) \end{aligned}$$

Значение интенсивности слоя источников в данной точке пропорционально вертикальной скорости в той же точке, и можно сказать, что источники в таком слое являются однозначными функциями по отношению к  $w$ .

После подстановки уравнения (6-47) в уравнение (6-46) мы приходим к простому выражению для  $\varphi'$ :

$$\begin{aligned} \varphi'(x, z) &= \frac{-U}{\sqrt{M^2-1}} \int_{-b}^{x-z\sqrt{M^2-1}} \frac{dz_U}{d\xi} d\xi = \\ &= \frac{-U}{\sqrt{M^2-1}} [z_U(x-z\sqrt{M^2-1}) - z_U(-b)]. \quad (6-48) \end{aligned}$$



Потенциал возмущения непосредственно над верхней поверхностью выражается в виде

$$\varphi'_U(x, 0^+) = \frac{-U}{\sqrt{M^2 - 1}} [z_U(x) - z_U(-b)]. \quad (6-49)$$

Эта функция зависит только от разности вертикальных координат передней кромки и рассматриваемой точки. Кроме того, если двигаться вверх от поверхности, то  $\varphi'$  остается постоянным вдоль линии Маха, наклоненной к задней кромке,

$$x - z\sqrt{M^2 - 1} = \text{const}, \quad (6-50)$$

причем значение функции  $\varphi'$  в точке  $(x, z)$  равно ее значению в той точке, где проходящая через  $(x, z)$  линия Маха пересекается с верхней поверхностью. Потенциал  $\varphi'$  в формуле (6-48) имеет форму функции  $f$  в формуле (6-42). Это можно было предвидеть, заметив, что любое решение для  $z > 0$ , остающееся постоянным вдоль линий Маха  $x + z\sqrt{M^2 - 1} = \text{const}$ , проникало бы вперед, в запрещенную область вне клина Маха, идущего от передней кромки, так что функция  $g$  должна здесь обращаться в нуль.

Прямо противоположные условия имеют место на нижней половине профиля. Повторение только что сделанных операций для случая  $z < 0$  дает

$$\varphi'(x, z) = \frac{U}{\sqrt{M^2 - 1}} [z_L(x + z\sqrt{M^2 - 1}) - z_L(-b)] \quad (6-51)$$

и

$$\varphi'_L(x, 0^-) = \frac{U}{\sqrt{M^2 - 1}} [z_L(x) - z_L(-b)]. \quad (6-52)$$

В решении (6-51) содержится только функция, принадлежащая к типу функции  $g$  в решении (6-42), причем решение остается постоянным вдоль линий Маха, наклоненных назад и отходящих книзу от поверхности.

Формулы для распределения давлений и аэродинамических нагрузок получаются из формул (6-10), где следует отбросить производную по времени,

$$\frac{p_U - p_\infty}{\left(\frac{1}{2} \rho_\infty\right) U^2} = -\frac{2}{U} \frac{\partial \varphi'_U}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{dz_U}{dx}, \quad (6-53)$$

$$\frac{p_L - p_\infty}{\left(\frac{1}{2} \rho_\infty\right) U^2} = \frac{2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{dz_L}{dx}. \quad (6-54)$$

Формулы (6-53) и (6-54) выражают факт, хорошо известный для линеаризованного двумерного сверхзвукового течения: давление возмущения прямо пропорционально углу отклонения линии тока от направления свободного потока. Поворот течения, связанный с расхождением линий тока, приводит к расширению, тогда как сближение вызывает сжатие. Как и в п. 5-4, мы можем разделить контур профиля на симметричную и антисимметричную части. Антисимметричное распределение давления, создающее подъемную силу и момент тангажа, определяется путем замены  $z_U$  и  $z_L$  средней линией  $z_a(x)$ . Произведя эту замену и вычтя равенство (6-54) из равенства (6-53), мы получим

$$\frac{p_U - p_L}{\left(\frac{1}{2} \rho_\infty\right) U^2} = \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{dz_a}{dx}. \quad (6-55)$$



Так как подъемная сила и момент тангажа (относительно оси, проходящей через точку  $x = ba$ ), отнесенные к единице длины размаха, выражаются в виде

$$L = - \int_{-b}^b [p_U - p_L] dx, \quad (5-106)$$

$$M_y = \int_{-b}^b [p_U - p_L] [x - ba] dx, \quad (5-107)$$

то соответствующие коэффициенты на основании равенства (6-55) оказываются равными

$$c_l = \frac{L}{\left(\frac{1}{2} \rho_\infty\right) U^2 (2b)} = \frac{-2}{b \sqrt{M^2 - 1}} [z_a(b) - z_a(-b)], \quad (6-56)$$

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{M_y}{\left(\frac{1}{2} \rho_\infty\right) U^2 (2b)^2} = \frac{1}{b \sqrt{M^2 - 1}} \int_{-b}^b \frac{dz_a}{dx} \left[ \frac{x}{b} - a \right] dx = \\ &= \frac{1}{b \sqrt{M^2 - 1}} \left[ z_a(b) + z_a(-b) - \int_{-b}^b \frac{z_a}{b} dx \right] + \frac{a}{2} c_l. \quad (6-57) \end{aligned}$$

Задача об определении дополнительной нагрузки, связанная с задачей о плоской пластинке под углом атаки  $\alpha$ , решается путем введения в формулы (6-56) и (6-57) выражения

$$z_a = -\alpha x. \quad (6-58)$$

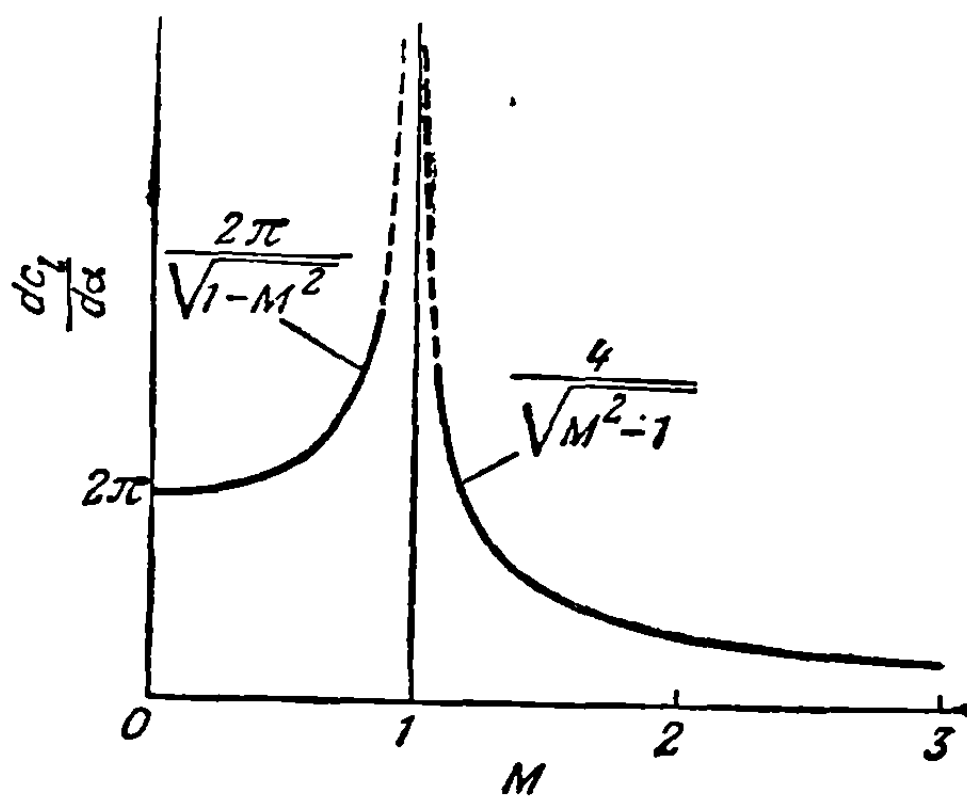
Выполнив это, мы получим

$$c_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad (6-59)$$

$$c_m = \frac{2a\alpha}{\sqrt{M^2 - 1}} = \frac{a}{2} c_l; \quad (6-60)$$

выражение для наклона кривой подъемной силы будет

$$\frac{dc_l}{d\alpha} = \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}}. \quad (6-61)$$



Формула (6-60) показывает, что теоретический аэродинамический центр всех сверхзвуковых профилей располагается посередине хорды, при  $a = 0$ . Влияние толщины, выражающееся нелинейным образом, сказывается обычно в перемещении аэродинамического центра вперед; согласно измерениям на профилях, применяемых в действительности, он располагается на расстоянии от передней кромки, равном от 40 до 50% хорды. На фиг. 6-4 дается график изменения наклона кривой подъемной силы, вычисленного по линеаризованной теории [уравнения (6-28) и (6-61)] во всем промежутке чисел Маха, для которого справедливы эти формулы. Как правило, результаты экспериментов при сверхзвуковых скоростях, подобные тем, которые опубликовал Винченти [6—7], дают неплохое подтверждение формулы (6-61), если не считать случаев, когда  $M$  слишком близко к единице.

Физ. 6-4. Наклон кривой подъемной силы двумерного профиля, вычисленный по теории малых возмущений для дозвуковых и сверхзвуковых скоростей.

Хорошо известно, что теория малых возмущений для двумерного сверхзвукового течения позволяет вычислять лобовое сопротивление. Хотя лобовое

сопротивление и не имеет большого значения в приложениях к задачам аэроупругости, мы можем, однако, немедленно вычислить его путем суммирования направленных вниз по потоку компонент сил давления, определяемых формулами (6-53) и (6-54). Результирующая сила вследствие постоянного  $p_\infty$  равна нулю, так что мы можем написать

$$D = \int_{-b}^b [p_U - p_\infty] \frac{dz_U}{dx} dx - \int_{-b}^b [p_L - p_\infty] \frac{dz_L}{dx} dx = \\ = \frac{\rho_\infty U^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_{-b}^b \left[ \left( \frac{dz_U}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz_L}{dx} \right)^2 \right] dx, \quad (6-62)$$

где  $D$ , очевидно, всегда положительно. Лобовое сопротивление зависит как от формы средней линии, так и от распределения толщины. Несмотря на наличие квадратичных членов, можно выделить слагаемые, зависящие только от одного из этих факторов, потому что

$$z_U = z_a + z_t, \quad z_L = z_a - z_t. \quad (5-75)$$

Подстановка этих выражений в формулу (6-62) приводит к сокращению членов, содержащих смешанные произведения; в результате получим

$$D = \frac{2\rho_\infty U^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_{-b}^b \left[ \left( \frac{dz_a}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz_t}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (6-63)$$

Физическое объяснение этих особенностей сверхзвукового сопротивления состоит в том, что потенциалы возмущения, определяемые формулами (6-49) и (6-51), не будут стремиться к нулю, если мы будем удаляться в бесконечность от профиля, оставаясь между линиями Маха, идущими от передней и задней кромок. Здесь имеет место непрерывный отвод механической энергии движения жидкости в бесконечность; между прочим, эта энергия не может там рассеиваться, потому что теория не учитывает трения, обусловленного вязкостью, и изменений энтропии. Работа, необходимая для создания этой энергии, производится силой  $D$ , направленной вперед и действующей со стороны крыла при его продвижении в покоящемся газе. Так как возникновение этого типа сопротивления жидкости объясняется волнообразным характером распространения энергии, то его и называют волновым сопротивлением.

Лобовое сопротивление несущих поверхностей конечного размаха значительно выше, чем определяемое формулой (6-63), благодаря двум добавочным явлениям. Первое из них, охватываемое линеаризированной теорией, состоит в наличии спутной струи, состоящей из вихрей с погонной циркуляцией, пропорциональной изменению подъемной силы в направлении размаха; эта спутная струя простирается за крылом до бесконечности, равномерно потребляя часть механической энергии системы. Второе явление связано непосредственно с касательными усилиями и искажением распределения давления вследствие вязкости, влияние которой при больших скоростях ощущается как через посредство скачков, так и через посредство пограничного слоя.

Все вышеприведенные формулы для сверхзвуковых профилей связаны с именем Аккерета, первым применившего идею малых возмущений в этом интервале чисел Маха [6-8].

Теория трехмерного обтекания тонких сверхзвуковых крыльев развивалась по нескольким резко очерченным направлениям. Наиболее широко распространены методы источников ([6-9], [6-10]), методы наложения других элементарных решений волнового уравнения для установившегося течения, подобных решениям

типа диполей или вихрей ([6-12], [6-13], [6-14], [6-15]), и теория конических течений (см., например, Лагерстром, [6-11]). Теорема Грина и идея применения теории вычетов для вычисления интегралов имели большое значение для унификации методов наложения и расширения областей их применения.

Мы продемонстрируем здесь лишь простейший из этих методов, сущность которого состоит в представлении течения, обусловленного наличием независимых верхней и нижней поверхностей крыла, с помощью слоев трехмерных источников. Дифференциальное уравнение, которое требуется решить, есть уравнение (6-44), а линеаризованные граничные условия совпадают с теми, которые даются равенствами (6-41), если сделать оговорку, что  $z_U$  и  $z_L$  могут зависеть от отсчитываемой вдоль размаха координаты  $y$ :

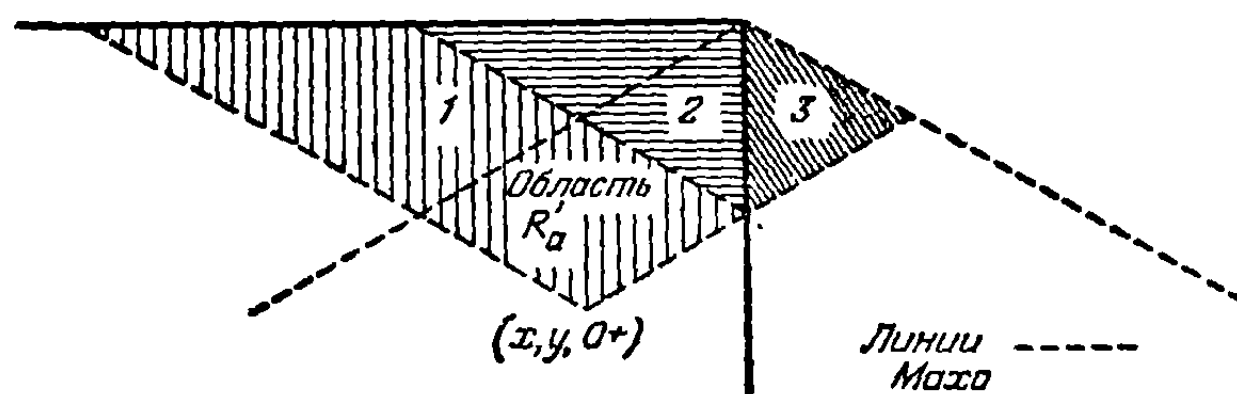
$$\omega = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = U \frac{\partial z_U}{\partial x} \quad \text{для } z = 0^+, \quad (x, y) \text{ в области } R_a, \quad (6-64a)$$

$$\omega = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = U \frac{\partial z_L}{\partial x} \quad \text{для } z = 0^-, \quad (x, y) \text{ в области } R_a. \quad (6-64b)$$

Как и в предшествующих расчетах,  $R_a$  обозначает здесь проекцию срединной поверхности на плоскость  $xu$ . Мы будем рассматривать только верхнюю половину крыла и поэтому будем считать, что  $z \geq 0$ . Начнем с распределения источников, во всем аналогичного тому, которое определяется уравнением (6-45), за исключением того, что значения  $y$  должны теперь считаться произвольными, а отнесенная к единице площади интенсивность  $H$  изменяется как в направлении размаха, так и в направлении хорды

$$\varphi'(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int \int_{R'_a} \frac{H(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (M^2-1)[(y-\eta)^2 + z^2]}}. \quad (6-65)$$

Пределы интегрирования определяются здесь границами области  $R'_a$ , образованной пересечением конуса, идущего вперед от точки  $(x, y, z)$ , с областью  $R_a$



Фиг. 6-5. Конец прямоугольного крыла в сверхзвуковом потоке. Показаны области интегрирования, используемые в теории Эварда.

(фиг. 6-5). Впрочем, неважно, как далеко область  $R'_a$  простирается вперед, поскольку в невозмущенной области впереди передней кромки интенсивность источников оказывается равной нулю. Следовательно, для интегрирования по  $\xi$  мы можем использовать в качестве пределов  $-C$  ( $C$  — достаточно большое положительное число) и  $[x - z\sqrt{M^2-1}]$ , а для интегрирования по  $\eta$  ввести в качестве пределов два значения, определенные уравнением (6-38b),

$$\varphi'(x, y, z) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-C}^{x-z\sqrt{M^2-1}} \int_{y-\sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{M^2-1}-z^2}}^{y+\sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{M^2-1}-z^2}} \frac{H(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (M^2-1)[(y-\eta)^2 + z^2]}}. \quad (6-66)$$

Для подстановки функции (6-66) в граничное условие (6-64) предлагалось множество схем, причем первой из опубликованных в Соединенных Штатах была схема Паккетта [6-9]. Здесь мы будем пользоваться той схемой, которая обеспечивает параллелизм с соответствующими расчетами для двумерного неустановившегося сверхзвукового течения. Заметим, что применяемые для краткости записи обозначения

$$Y_1 = y - \sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{M^2-1} - z^2}, \quad Y_2 = y + \sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{M^2-1} + z^2} \quad (6-67)$$

позволяют записать функцию (6-66) в виде

$$\varphi'(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi \sqrt{M^2-1}} \int_{-c}^{x-z\sqrt{M^2-1}} \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{H(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(\eta-Y_1)(Y_2-\eta)}}. \quad (6-68)$$

Подкоренное выражение в радикале, стоящем в знаменателе, можно выразить в виде произведения, так как мы знаем, что оно исчезает при обоих пределах интегрирования. Вместо переменной  $\eta$  введем очень удобную вспомогательную переменную интегрирования  $\theta$ , определяемую соотношением

$$\eta = \frac{Y_2 + Y_1}{2} - \frac{Y_2 - Y_1}{2} \cos \theta = y - \sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{M^2-1} - z^2} \cos \theta, \quad (6-69a)$$

или

$$\theta = \arccos \left[ \frac{Y_2 + Y_1 - 2\eta}{Y_2 - Y_1} \right]. \quad (6-69b)$$

Как легко показать, пределам  $Y_1$  и  $Y_2$  в формуле (6-68) соответствуют для переменной  $\theta$  пределы 0 и  $\pi$ . Кроме того,

$$\frac{d\eta}{\sqrt{(\eta-Y_1)(Y_2-\eta)}} = \frac{\frac{Y_2 - Y_1}{2} \sin \theta d\theta}{\sqrt{\left(\frac{Y_2 - Y_1}{2}\right)^2 (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}} = d\theta. \quad (6-70)$$

Следовательно, формула (6-68) может быть записана в виде

$$\varphi'(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi \sqrt{M^2-1}} \int_{-c}^{x-z\sqrt{M^2-1}} \int_0^\pi H\left(\xi, y - \sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{M^2-1} - z^2} \cos \theta\right) d\theta d\xi. \quad (6-71)$$

Для использования граничного условия необходимо знать частную производную по  $z$ , вычисляемую в соответствии с правилом дифференцирования определенного интеграла по параметру. Произведем требуемые выкладки, учитывая, что в члене, содержащем производную верхнего предела, функция  $H$  уже не зависит от  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} &= -\frac{\frac{\partial (x - z\sqrt{M^2-1})}{\partial z}}{2\pi \sqrt{M^2-1}} \times \\ &\times \int_0^\pi H\left[(x - z\sqrt{M^2-1}), y - \sqrt{\frac{(z\sqrt{M^2-1})^2}{M^2-1} - z^2} \cos \theta\right] d\theta + \\ &+ \frac{1}{2\pi \sqrt{M^2-1}} \int_{-c}^{x-z\sqrt{M^2-1}} \int_0^\pi \frac{\partial H\left(\xi, y - \sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{M^2-1} - z^2} \cos \theta\right)}{\partial z} d\theta d\xi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} H(x - z\sqrt{M^2 - 1}, y) \int_0^\pi d\theta - \\
 & - \frac{1}{2\pi\sqrt{M^2 - 1}} \int_{-c}^{x - z\sqrt{M^2 - 1}} \int_0^\pi \frac{\partial H}{\partial \left( y - \sqrt{\frac{(x - \xi)^2}{M^2 - 1} - z^2 \cos \theta} \right)} \times \\
 & \times \frac{\partial \left( y - \sqrt{\frac{(x - \xi)^2}{M^2 - 1} - z^2} \right)}{\partial z} d\theta d\xi = \frac{H(x - z\sqrt{M^2 - 1}, y)}{2} + \\
 & + \frac{z}{2\pi} \int_{-c}^{x - z\sqrt{M^2 - 1}} \int_0^\pi \frac{\frac{\partial H}{\partial \left( y - \sqrt{\frac{(x - \xi)^2}{M^2 - 1} - z^2 \cos \theta} \right)} \cos \theta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - z^2(M^2 - 1)}} d\theta d\xi. \quad (6-72)
 \end{aligned}$$

Чтобы использовать условие (6-64а), необходимо вычислить предел этого выражения при стремлении  $z$  к  $0^+$ . Ясно, что первый член окончательного выражения в уравнении (6-72) становится равным половине  $H(x, y)$ . Множитель  $z$ , стоящий у второго члена, обращает последний в нуль, так как  $H$  и ее производные являются непрерывными функциями, и, следовательно, интеграл, умноженный на  $z$ , не превосходит наибольшего значения производной от  $H$ , умноженной, скажем, на величину

$$\int_{-c}^{x - z\sqrt{M^2 - 1}} \frac{d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 - z^2(M^2 - 1)}} \int_0^\pi |\cos \theta| d\theta = 2 \operatorname{Arch} \left[ \frac{x + c}{z\sqrt{M^2 - 1}} \right]. \quad (6-73)$$

При приближении  $z$  к нулю произведение  $z \operatorname{Arch} (1/z)$  также стремится к нулю. Поэтому из уравнения (6-72) и граничного условия (6-64а) мы получаем

$$\frac{\partial \varphi'(x, y, 0^+)}{\partial z} = \frac{H(x, y)}{2} = U \frac{\partial z_U}{\partial x}. \quad (6-74)$$

В результате находим, что распределение источников продолжает выражаться однозначной функцией нормальной составляющей скорости даже и тогда, когда его интенсивность изменяется в направлениях обеих координатных осей. Это положение можно, конечно, доказать многими различными способами [6-10]. Окончательное решение для верхней поверхности крыла определяется после подстановки величины (6-74) в формулу (6-65):

$$\varphi'(x, y, z) = -\frac{U}{\pi} \int \int_{R'_a} \frac{[\partial z_U(\xi, \eta) \partial x] d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - (M^2 - 1)[(y - \eta)^2 + z^2]}} \quad (6-75)$$

для  $z > 0^+$ .

Соответствующие выкладки для нижней поверхности крыла приводят к следующему результату:

$$\varphi'(x, y, z) = \frac{U}{\pi} \int \int_{R'_a} \frac{[\partial z_L(\xi, \eta) \partial x] d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - (M^2 - 1)[(y - \eta)^2 + z^2]}} \quad (6-76)$$

для  $z \leq 0^-$ .

Формулы (6-75) и (6-76) очень похожи на формулу (5-85) для течения несжимаемой жидкости. Эта аналогия становится полной, если при решении

задачи мы имеем дело с симметричным распределением толщины; тогда  $z_U$  и  $z_L$  заменяются на  $\pm z_t$ , и один и тот же слой источников может характеризовать все поле течения:

$$\varphi'(x, y, z) = -\frac{U}{\pi} \int \int_{R'_a} \frac{[\partial z_t(\xi, \eta)/\partial x] d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (M^2-1)[(y-\eta)^2 + z^2]}}. \quad (6-77)$$

Антисимметричная задача о несущей поверхности решается с помощью формулы

$$\varphi'(x, y, z) = -\frac{U}{\pi} \int \int_{R'_a} \frac{[\partial z_a(\xi, \eta)/\partial x] d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (M^2-1)[(y-\eta)^2 + z^2]}}$$

для  $z \geq 0^+$ .

(6-78)

При вычислении аэродинамических нагрузок мы используем соображения симметрии, чтобы показать, что разность давлений на верхней и нижней поверхностях крыла вдвое больше давления возмущения на верхней поверхности, получаемого в свою очередь с помощью подстановки выражения (6-78) в уравнение (6-10а).

При выводе всех полученных выше результатов для сверхзвуковых крыльев подразумевалось, что верхняя и нижняя поверхности независимы одна от другой и что все производные —  $\partial z_U/\partial x$ , и т. д. — в формулах (6-75)—(6-78) известны во всех точках площади интегрирования. Строго говоря, эти предположения справедливы только для форм в плане, имеющих полностью сверхзвуковые переднюю и заднюю кромки, как например треугольное крыло (дельтавидное крыло) большого удлинения. Таких крыльев существует немного, но, к счастью, имеются определенные приемы, позволяющие очень сильно расширить пределы применимости формул (6-75)—(6-78). Например, формула (6-77) справедлива для любой формы в плане, при которой не возникает подъемная сила. Это следует из того, что в силу симметрии  $w$  является нечетной функцией  $z$  во всем поле течения, но она не должна терпеть разрыва при переходе через плоскость  $z=0$  и обращается на ней в нуль повсюду, кроме части плоскости, занятой крылом. Мы можем представить себе, что области возмущенного течения за пределами дозвуковых передней и задней кромок (см. фиг. 6-3) заменены слоем источников, создающим такое же поле течения, и, как показывает уравнение (6-74), такой слой будет иметь нулевую интенсивность повсюду, за исключением области  $R_a$ . В соответствии с этим формула (6-77) может применяться для оценки влияния толщины на распределение давления и волновое сопротивление в любом практически интересном случае. На это обстоятельство впервые указал Паккетт [6-9].

Для несущих крыльев возникает значительно больше трудностей. Однако формулу (6-78) можно применять без изменения для определения величины нагрузки в любой точке, подобной точке  $l$  на фиг. 6-3, для которой величина  $\partial z_a/\partial x$  известна во всей области интегрирования  $R'_a$ . Существует много форм в плане, у которых лишь некоторые области вблизи концевых и задних кромок не соответствуют этому правилу, так что для них нужно использовать более сложные методы. В работе [6-10] и в одной из других своих работ Эввард вывел и применил теорему, существенно помогающую расширению сферы применимости метода источников. Заменяя область возмущенного движения за пределами дозвуковой передней или боковой кромки эквивалентным ей искусственным слоем источников, он доказал для задачи о несущем крыле, что доля потенциала  $\varphi'(x, y, 0^+)$ , обусловленная частью области  $R'_a$ , лежащей за пределами кромки, в точности погашается его долей, обусловленной областью, лежащей впереди от проведенной через точку пересечения этой кромки с границей области  $R'_a$  линии Маха вто-



рого семейства. Например, на конце прямоугольного крыла, изображенного на фиг. 6-5, области 2 и 3 погашают друг друга, так что интеграл в формуле (6-78) можно вычислять только по одной области 1, где наклон контура сечения крыла известен.

Теорема Эвварда без труда распространяется на области, содержащие точки, подобные точке 3 на фиг. 6-3, и даже на области влияния задних кромок. Его результаты представляют особую ценность для задач аэроупругости, в которых нередко требуется определить распределение нагрузки, вызванной произвольной упругой деформацией крыла. Решение этой задачи сводится к вычислению интеграла в формуле (6-78), причем наклоны сечений деформированной конструкции аппроксимируются какими-либо сравнительно легко интегрируемыми функциями, например степенными рядами. Хотя такие вычисления далеко не всегда оказываются простыми, все же общий метод подхода значительно плодотворнее, например, теории конических течений, применимость которой ограничена, по существу, случаями постоянных углов атаки.

Теоретические результаты, касающиеся установившегося обтекания сверхзвуковых крыльев, широко опубликованы, так что мы не приводим здесь дальнейших примеров. Полезное собрание формул для подъемной силы, момента и сопротивления целого ряда практически интересных форм в плане сделано Лапиным [6-16].

**6-4. Колебания профилей в дозвуковом потоке.** При изучении колебаний профиля с помощью теории малых возмущений наибольшие аналитические затруднения вызывает область больших дозвуковых скоростей потока. Для подхода к решению этой задачи использовались два общих метода. Первый из них связан с решением интегрального уравнения, содержащего в качестве неизвестной функции интенсивность распределения диполей, характеризующих потенциал ускорений (функцию давления); этот метод был предложен Поссио [6-17]. Дитце [6-18] и Феттис [6-19] наряду с другими исследователями усовершенствовали метод Поссио и проделали многочисленные вычисления.

Второй метод состоит в преобразовании дифференциального уравнения для скорости или потенциала ускорений к эллиптическим координатам и в разложении решения в бесконечный ряд по функциям Матье. Из исследований в этом направлении были опубликованы работы Рейсснера и Шермана [6-20], Хаскинда [6-21] и Рейсснера [6-22]. Упомянутый способ использования потенциала ускорений был впервые предложен в докторской диссертации Тиммана. Приложения и развитие его работы имеются в статьях [6-23], [6-24] и [6-25]. Способ, использующий функции Матье, дает математически точное решение задачи и в конечном итоге может привести к более удобным вычислениям, чем метод Поссио. Однако наиболее точные из существующих таблиц основаны на использовании интегрального уравнения.

В этом пункте мы уделим преимущественное внимание теории Поссио как не требующей от читателя глубокого знания свойств сравнительно мало известных функций Матье. Краткий разбор свойств потенциала ускорений  $\psi$  дается в конце п. 5-1, где мы показываем, что в несжимаемом потоке он пропорционален давлению возмущения. Равенство (6-8) показывает, что вследствие предположения о малости возмущений указанная связь не нарушается и в случае сжимаемости, т. е.

$$p - p_{\infty} = -\rho_{\infty} \psi. \quad (6-79)$$

Уравнение, связывающее  $\psi$  и потенциал скоростей возмущения, также не изменяется. Оно имеет вид

$$\psi = \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi'}{\partial x}. \quad (5-50b)$$

Так как оператор, стоящий в правой части, представляет собой линеаризованную субстанциальную производную, то уравнение (5-50b) можно истолковать



в том смысле, что  $\psi$  выражается через субстанциальную производную функции  $\varphi'$ , точно так же, как ускорение, потенциалом которого является  $\psi$ , представляет собой субстанциальную производную скорости.

Принимая во внимание линейное соотношение (5-50b), определяющее  $\psi$  по известной функции  $\varphi'$ , мы можем взять субстанциальную производную от левой части уравнения (5-44), изменить соответствующим образом порядок дифференцирования и тем самым доказать, что для  $\psi$  справедливо точно такое же уравнение в частных производных, как и для  $\varphi'$ . Поэтому для любой двумерной задачи мы имеем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \left[ \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{2M}{a_\infty} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + M^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] = 0. \quad (6-80)$$

Для использования граничных условий необходимо знать, как функция  $\psi$  связана с составляющими скорости. Можно начать, например, с уравнения

$$D\omega = \frac{\partial \psi}{\partial z} dt \quad (6-81)$$

и проинтегрировать все его члены вдоль пути отдельной частицы жидкости. Если не учитывать нелинейных членов, то можно аппроксимировать такую траекторию прямой  $z = \text{const}$ , идущей от некоторой отдаленной исходной точки  $(-\infty, z)$  до точки  $(x, z)$ , в которой находится частица в момент  $t$ . Если  $\tau$  является вспомогательной переменной интегрирования, характеризующей любой момент времени от  $-\infty$  до  $t$ , то очевидно, что при произвольном  $\tau$  частица находилась в точке  $(x - U(t - \tau), z)$ , так что

$$\omega(x, z, t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} D\omega = \int_{-\infty}^t \frac{\partial \psi(x - U(t - \tau), z, \tau)}{\partial z} d\tau. \quad (6-82)$$

Если заменить переменную интегрирования  $\tau$  на  $\xi' = x - U(t - \tau)$ , то получим

$$\omega(x, z, t) = \int_{-\infty}^x \frac{\partial \psi(\xi)', z, t - \frac{x - \xi'}{U}}{\partial z} \frac{d\xi'}{U}. \quad (6-83)$$

Как и во всех предшествующих случаях, мы располагаем проекцию профиля между точками  $x = -b$  и  $x = b$ . Основное граничное условие задачи о произвольном двумерном движении несущего крыла формулируется так:

$$\omega = \frac{\partial z_a}{\partial t} + U \frac{\partial z_a}{\partial x} = \omega_a(x, t) \quad \text{для } z = 0, -b \leq x \leq b. \quad (5-225)$$

Для конкретного случая простого гармонического движения, когда все величины имеют зависящий от времени множитель  $e^{i\omega t}$ , равенство (5-225) записывается в виде

$$\bar{\omega}(x, 0) = i\omega \bar{z}_a(x) + U \frac{d\bar{z}_a}{dx} = \bar{\omega}_a(x) \quad \text{для } z = 0, -b \leq x \leq b, \quad (6-84)$$

где  $\bar{\omega}_a(x)$  можно считать известной функцией, так как она представляет собой сокращенное обозначение правой части уравнения.

Перечислим добавочные граничные условия.

(1) Разрыв давления на оси  $x$  равен нулю как впереди передней кромки профиля ( $x < -b$ ), так и в спутной струе ( $x > b$ ). Если принять во внимание антисимметричный характер всего поля давлений и уравнение (6-79), то это означает отсутствие разрывов функции  $\psi$  при переходе через плоскость  $z = 0$  для значений  $|x| > b$ , так что на этой плоскости  $\psi = 0$ .

(2) Все возникающие в газе сигналы должны распространяться от профиля в бесконечность, не отражаясь. Наличие в уравнении (6-80) производных по време-

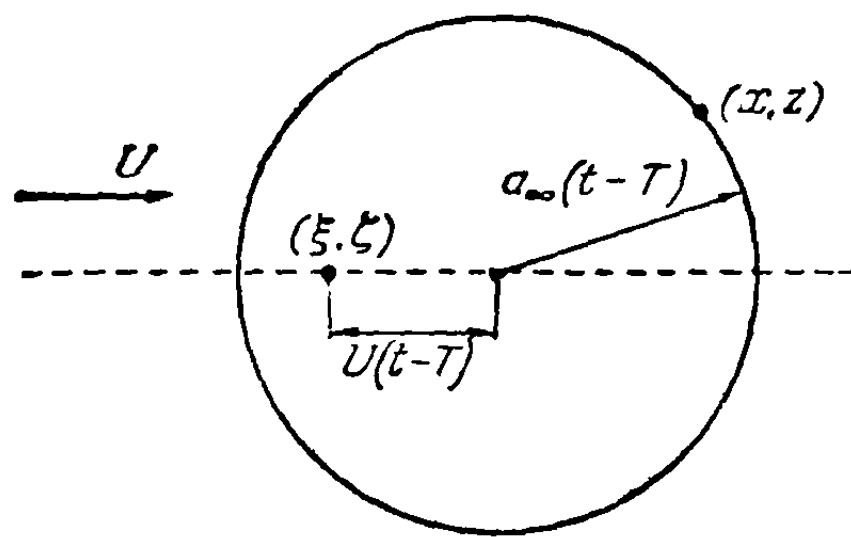
мени делает это уравнение гиперболическим, так что здесь недостаточно простого условия обращения возмущений в нуль в бесконечности, как это было в случае эллиптического уравнения (6-11).

(3) Так как течение остается дозвуковым, то на задней кромке должна выполняться гипотеза Кутта. Ее выполнение обеспечивается просто требованием, чтобы функция  $\psi$  не имела разрыва в точке  $x = b$ .

Интегральное уравнение Пюссио можно вывести, представляя профиль, с помощью диполей, характеризующих потенциал ускорений и размещенных вдоль проекции профиля. Диполь получается из простого решения уравнения (6-80), известного под названием пульсирующего источника:

$$\psi_{sp} = \frac{A(\xi, \zeta, T)}{\sqrt{a_\infty^2 (t-T)^2 - [(x-\xi) - U(t-T)]^2 - (z-\zeta)^2}}, \quad (6-85)$$

где  $\psi_{sp}$  можно рассматривать как возмущение давления, возникающее в точке  $(\xi, \zeta)$  в момент  $T$  и распространяющееся в жидкости, причем оно относится в то же время вниз по течению со скоростью основного потока  $U$ . Принимается, что правая часть равенства (6-85) равна нулю во всех случаях, когда величина  $t - T$  настолько мала, что выражение под знаком радикала становится отрицательным. Положительное значение величины  $t - T$ , обращающее в нуль указанное выражение, характеризует интервал времени, необходимый для прохождения возмущения от точки  $(\xi, \zeta)$  до точки  $(x, z)$  по кратчайшему пути. Фиг. 6-6 показывает расширяющуюся цилиндрическую границу распространения возмущения именно в тот момент, когда она впервые достигает точки  $(x, z)$ . Рассматривая эту фигуру с точки зрения геометрии, легко показать, что выражение  $\{a_\infty^2 (t-T)^2 - [(x-\xi) - U(t-T)]^2 - (z-\zeta)^2\}$  равно нулю. Так как фактически источник распределен вдоль линии, простирающейся в бесконечность по обоим направлениям оси  $y$ , то сигнал, возникающий в некоторый момент  $T$ , продолжает ощущаться в точке  $(x, z)$  в течение неопределенно долгого времени после первого момента его появления здесь.



Фиг. 6-6. Возмущение, создаваемое дозвуковым пульсирующим источником с центром в точке  $(\xi, \zeta)$ , показанное в тот момент, когда оно впервые достигает точки  $(x, z)$ .

Если источник в точке  $(\xi, \zeta)$  пульсировал уже долгое время по синусоидальному закону, то его воздействие можно определить, предполагая, что зависимость  $A$  от  $T$  выражается в виде

$$A(\xi, \zeta, T) = -\frac{\bar{A}(\xi, \zeta) U^2 a_\infty e^{i\omega T} dT}{2\pi}, \quad (6-86)$$

путем интегрирования по  $T$ :

$$\psi_s(x, z, t) = -\frac{\bar{A}(\xi, \zeta) U^2 a_\infty}{2\pi} \int_{-\infty}^g \frac{e^{i\omega T} dT}{\sqrt{a_\infty^2 (t-T)^2 - [(x-\xi) - U(t-T)]^2 - (z-\zeta)^2}}, \quad (6-87)$$

где  $\bar{A}$  — комплексная постоянная, зависящая от положения центра  $(\xi, \zeta)$ . Через  $g$  в формуле (6-87) обозначается самое большое значение  $T$ , при котором возмущение, возникающее в точке  $(\xi, \zeta)$ , может ощущаться в точке  $(x, y)$  в момент

времени  $t$ . Как уже говорилось выше, это значение определяется как положительная величина, при которой выражение под радикалом обращается в нуль,

$$g = t - \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2 (1-M^2)} - M(x-\xi)}{a_\infty (1-M^2)}. \quad (6-88)$$

Если мы подставим в формулу (6-87) новые переменные

$$\omega' = \frac{kM}{1-M^2} \sqrt{\left(\frac{x-\xi}{b}\right)^2 + (1-M^2)\left(\frac{z-\zeta}{b}\right)^2}, \quad (6-89)$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega'} \left[ \omega(t-T) + \frac{kM^2}{1-M^2} \left(\frac{x-\xi}{b}\right) \right], \quad (6-90)$$

где  $k$  — приведенная частота, равная  $\omega b/U$ , то знаменатель подинтегрального выражения значительно упростится; в результате получим

$$\psi_s(x, z, t) = \frac{-\bar{A}(\xi, \zeta) U^2 e^{i \left[ \omega t + \frac{kM^2(x-\xi)}{(1-M^2)b} \right]}}{2\pi \sqrt{1-M^2}} \int_1^\infty \frac{e^{-i\omega'\lambda}}{\sqrt{\lambda^2-1}} d\lambda. \quad (6-91)$$

Интеграл в равенстве (6-91) таков же, как интеграл, связанный с определением функции  $C(k)$  Теодорсена (п. 5—6). Он равен умноженной на  $-\pi i/2$  функции Ханкеля второго рода нулевого порядка, так что

$$\psi_s(x, z, t) = \frac{\bar{A}(\xi, \zeta) U^2 e^{i \left[ \omega t + \frac{kM^2(x-\xi)}{(1-M^2)b} \right]}}{4 \sqrt{1-M^2}} i H_0^{(2)}(\omega'). \quad (6-92)$$

Диполь с вертикальной осью, интенсивность которого изменяется по синусоидальному закону, получается из формулы (6-92), если поместить положительный источник  $\psi_s$  непосредственно над отрицательным источником такой же интенсивности  $-\psi_s$  и устремить к нулю разделяющее их расстояние, увеличивая в то же время их интенсивности обратно пропорционально этому расстоянию. Математически эта операция эквивалентна дифференцированию по переменной  $\zeta$ , характеризующей положение источника по вертикали. Так как мы желаем расположить диполи на оси  $x$ , то одновременно с выполнением дифференцирования мы делаем  $\zeta$  равным нулю:

$$\begin{aligned} \psi_D(x, z, t) &= \left( \frac{\partial \psi_s}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} = \frac{\bar{A}(\xi, 0) U^2 e^{i \left[ \omega t + \frac{kM^2(x-\xi)}{(1-M^2)b} \right]}}{4 \sqrt{1-M^2}} i \frac{dH_0^{(2)}}{d\omega'} \frac{\partial \omega'}{\partial \zeta} = \\ &= \frac{\bar{A}(\xi) \omega^2 M^2 z}{4(1-M^2)^{3/2}} i \frac{H_1^{(2)}(\omega')}{\omega'} e^{i \left[ \omega t + \frac{kM^2(x-\xi)}{(1-M^2)b} \right]}. \end{aligned} \quad (6-93)$$

Можно доказать, что любой диполь, помещенный в горизонтальном слое, получаемом с помощью интегрирования равенства (6-92) вдоль оси  $x$ , является однозначной функцией самой величины  $\psi$ . Это означает, что местное давление возмущения и интенсивность диполя прямо пропорциональны друг другу. Множитель  $z$  в формуле (6-93) делает все диполи нечетными функциями  $z$ , так что слой создает разрыв давления. Следовательно, от нас требуется лишь расположить слой вдоль хорды профиля, сводя его интенсивность в спутной струе к нулю и тем самым добиваясь автоматического удовлетворения граничного условия (1). Потенциал ускорений всего слоя выражается в виде

$$\psi(x, z, t) = \int_{-b}^b \psi_D d\xi = \frac{\omega^2 M^2 e^{i\omega t}}{4(1-M^2)^{3/2}} iz \int_{-b}^b \bar{A}(\xi) \frac{H_1^{(2)}(\omega')}{\omega'} e^{i \frac{kM^2(x-\xi)}{(1-M^2)b}} d\xi. \quad (6-94)$$

Приближая  $z$  к нулю из положительной полуплоскости с целью изучения характера функции в формуле (6-94) (которая в этом случае рассматривается как однозначная функция), заметим, что множитель  $z$  приводит к обращению в нуль правой части всюду, кроме ближайшей окрестности точки  $\xi = x$ , в которой подынтегральное выражение в пределе обращается в бесконечность. Мы исключаем из рассмотрения эту точку вместе с полосой ширины  $2\varepsilon$ , достаточно малой для того, чтобы можно было заменить непрерывные функции  $\bar{A}(\xi)$  и  $e^{i \frac{kM^2(x-\xi)}{(1-M^2)b}}$  их значениями  $\bar{A}(x)$  и 1 в середине интервала. Этот прием дает

$$\psi(x, 0^+, t) = \frac{\omega^2 M^2 e^{i\omega t}}{4(1-M^2)^{3/2}} \bar{A}(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ iz \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{H_1^{(2)}(\omega')}{\omega'} d\xi \right\}. \quad (6-95)$$

Значение величины  $\omega'$  определяется равенством (6-89) при  $\zeta = 0$  и представляет собой очень малую величину во всем интервале интегрирования. Поэтому в ряде, определяющем функцию Ханкеля, мы можем взять один первый член ([6-1], гл. 4):

$$H_1^{(2)}(\omega') \simeq \frac{2i}{\pi \omega'}. \quad (6-96)$$

Это дает

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ iz \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{H_1^{(2)}(\omega')}{\omega'} d\xi \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ -\frac{2z}{\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{d\xi}{\omega'^2} \right\} = \\ &= \frac{-2b^2(1-M^2)^2}{\pi M^2 K^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ z \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d\xi'}{[\xi'^2 + (1-M^2)z^2]} \right\} = \\ &= \frac{-2b^2(1-M^2)^2}{\pi M^2 k^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{z}{z\sqrt{1-M^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\varepsilon}{z\sqrt{1-M^2}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z}{z\sqrt{1-M^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{-\varepsilon}{z\sqrt{1-M^2}} \right) \right\} = \frac{-2b^2(1-M^2)^{3/2}}{M^2 k^2}. \quad (6-97) \end{aligned}$$

Как и в других случаях применения такого же процесса (см. п. 5-4), мы приближаемся к пределу таким образом, что отношение  $\varepsilon/z$  становится бесконечно большим. Этим обеспечивается возможность пренебрежения той долей, которую вносит в выражение для  $\psi$  часть слоя диполей, лежащая вне полосы  $2\varepsilon$ . Подставляя выражение (6-97) в равенство (6-95), мы после нескольких сокращений находим

$$\psi(x, 0^+, t) = -\frac{U^2 \bar{A}(x)}{2} e^{i\omega t}. \quad (6-98)$$

Производя аналогичные выкладки для отрицательных значений  $z$ , приходим к выражению

$$\psi(x, 0^-, t) = \frac{U^2 \bar{A}(x)}{2} e^{i\omega t}. \quad (6-99)$$

Принимая во внимание уравнение (6-79), получим

$$p_U - p_\infty = -\rho_\infty \psi(x, 0^+, t), \quad p_L - p_\infty = -\rho_\infty \psi(x, 0^-, t). \quad (6-100)$$

Поэтому разрыв давления на хорде профиля, представляющий собой простую гармоническую функцию

$$p_U - p_L = \Delta \bar{p}_a(x) e^{i\omega t}, \quad (6-101)$$

на основании равенств (6-98) и (6-99) пропорционален  $\bar{A}(x)$ :

$$\Delta \bar{p}_a(x) e^{i\omega t} = -\rho_\infty [\psi(x, 0^+, t) - \psi(x, 0^-, t)] = \rho_\infty U^2 \bar{A}(x) e^{i\omega t}. \quad (6-102)$$

Равенство (6-102) можно переписать в виде

$$\bar{A}(x) = \frac{\Delta \bar{p}_a(x)}{\rho_\infty U^2} \quad (6-103)$$

и подставить результат обратно в интеграл для слоя диполей, стоящий в формуле (6-94); тогда получим

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \frac{\omega^2 M^2 i z e^{i\omega t}}{4\rho_\infty U^2 (1-M^2)^{3/2}} \int_{-b}^b \frac{H_1^{(2)}(\omega')}{\omega'} e^{i \frac{kM^2(x-\xi)}{(1-M^2)b}} \Delta \bar{p}_a(\xi) d\xi = \\ &= \frac{-ie^{i\omega t}}{4\rho_\infty \sqrt{1-M^2}} \int_{-b}^b \left[ \frac{\partial H_0^{(2)}(\omega')}{\partial z} \right]_{z=0} e^{i \frac{kM^2(x-\xi)}{(1-M^2)b}} \Delta \bar{p}_a(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (6-104)$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (6-84), нужно вычислить  $\bar{w}(x, 0)$ , вводя выражения (6-104) в формулу (6-83) и приближая  $z$  к нулю. Формула (6-83) для случая простого гармонического колебательного движения записывается в виде

$$\bar{w}(x, 0, t) = \frac{1}{U} e^{-i(\omega x/U)} \int_{-\infty}^x \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{z \rightarrow 0^+} e^{i(\omega \xi'/U)} d\xi'. \quad (6-105)$$

Если подставить сюда выражение, стоящее в последней строке формулы (6-104), сократить на  $e^{i\omega t}$  и переменить порядок интегрирования, то получим

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, 0) &= \bar{w}_a(x) = \\ &= \frac{-ie^{-i(kx/b)}}{4\rho_\infty U \sqrt{1-M^2}} \int_{-b}^b \Delta \bar{p}_a(\xi) e^{i(k\xi/b)} \int_{-\infty}^x \left[ \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial z^2} \right]_{z \rightarrow 0^+} e^{i \frac{k(\xi' - \xi)}{(1-M^2)b}} d\xi' d\xi. \end{aligned} \quad (6-106)$$

В этом выражении вторая производная функции  $H_0^{(2)}$  в пределе при  $z=0$  имеет столь сильную особенность, что пользоваться формулой (6-106) становится невозможным. Один из путей для обхода этого затруднения выявляется, если подметить, что  $H_0^{(2)}(\omega')$  является решением следующего дифференциального уравнения в частных производных:

$$(1-M^2) \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{a_\infty^2 (1-M^2)} H_0^{(2)} = 0. \quad (6-107)$$

Поэтому внутренний интеграл в формуле (6-106) можно переписать так (временно опуская скобки, указывающие на предельные значения):

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^x \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial z^2} e^{i \frac{k(\xi' - \xi)}{(1-M^2)b}} d\xi' = -(1-M^2) \int_{-\infty}^x \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial \xi'^2} e^{i \frac{k(\xi' - \xi)}{(1-M^2)b}} d\xi' + \\ &+ \frac{\omega^2}{a_\infty^2 (1-M^2)} \int_{-\infty}^x H_0^{(2)} e^{i \frac{k(\xi' - \xi)}{(1-M^2)b}} d\xi' = -(1-M^2) \int_{-\infty}^{x-\xi} \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial \xi_0^2} e^{i \frac{k\xi_0}{(1-M^2)b}} d\xi_0 + \\ &+ \frac{\omega^2}{a_\infty^2 (1-M^2)} \int_{-\infty}^{x-\xi} H_0^{(2)} e^{i \frac{k\xi_0}{(1-M^2)b}} d\xi_0, \end{aligned} \quad (6-108)$$

где  $\xi_0 = \xi' - \xi$ . Двукратное интегрирование по частям, будучи применено к первому из этих интегралов, при  $z = 0^+$  дает следующее, поддающееся интегрированию, представление  $I$ :

$$I = \frac{\omega M}{U} \frac{|x - \xi|}{(x - \xi)} e^{i \frac{k(x - \xi)}{(1 - M^2)b}} H_1^{(2)} \left( \frac{kM|x - \xi|}{(1 - M^2)b} \right) + i \frac{\omega}{U} e^{i \frac{k(x - \xi)}{(1 - M^2)b}} H_0^{(2)} \left( \frac{kM|x - \xi|}{(1 - M^2)b} \right) + \\ + \frac{\omega^2}{U^2} \int_{-\infty}^{x - \xi} H_0^{(2)} \left( \frac{kM|\xi_0|}{(1 - M^2)b} \right) e^{i \frac{k\xi_0}{(1 - M^2)b}} d\xi_0. \quad (6-109)$$

Формула (6-109) может быть несколько упрощена, если воспользоваться равенством (см. [6-26]),

$$\int_{-\infty}^0 H_0^{(2)}(M|u|) e^{iu} du = \frac{2}{\pi \sqrt{1 - M^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - M^2}}{M}. \quad (6-110)$$

Подставив выражения (6-109) и (6-110) в равенство (6-106) и выполнив некоторые алгебраические преобразования, найдем

$$\bar{w}_a(x) = -\frac{\omega}{\rho_\infty U^2} \int_{-b}^b \Delta \bar{p}_a(\xi) K \left( M, \frac{k(x - \xi)}{b} \right) d\xi \quad \text{для} \quad -b \leq x \leq b. \quad (6-111)$$

Функция  $K$ , являющаяся ядром этого уравнения, определяется следующим образом:

$$K \left( M, \frac{k(x - \xi)}{b} \right) = \frac{1}{4 \sqrt{1 - M^2}} \left\{ e^{i \frac{kM^2(x - \xi)}{(1 - M^2)b}} \left[ iM \frac{|x - \xi|}{(x - \xi)} H_1^{(2)} \left( \frac{kM|x - \xi|}{(1 - M^2)b} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - H_0^{(2)} \left( \frac{kM|x - \xi|}{(1 - M^2)b} \right) \right] + i(1 - M^2) e^{-i \frac{k(x - \xi)}{b}} \left[ \frac{2}{\pi \sqrt{1 - M^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - M^2}}{M} + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{\frac{k(x - \xi)}{(1 - M^2)b}} e^{iu} H_0^{(2)}(M|u|) du \right] \right\}, \quad (6-112)$$

где  $u$  — сокращенное обозначение для переменной интегрирования

$$u = \frac{k(\xi' - \xi)}{(1 - M^2)b}. \quad (6-113)$$

Уравнение (6-111) представляет собой интегральное уравнение Поссио. Ядро  $K$ , хотя и не является простой функцией, но зависит только от двух не связанных между собой переменных; эта зависимость была подробно затабулирована Дитце [6-18]. Применяя прием, хорошо известный из теории установившегося движения тонкого профиля, Поссио пытался решить уравнение (6-111) путем введения новой переменной

$$\frac{\xi}{b} = \cos \theta. \quad (6-114)$$

Использованный им для неизвестной  $\Delta p_a$  ряд Фурье, содержащий соответствующую передней кромке особенность и удовлетворяющий гипотезе Кутта, имел следующую общую форму:

$$\Delta \bar{p}_a(\theta) = A_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta. \quad (6-115)$$

Эта подстановка не дает возможности непосредственного обращения уравнения, и необходимо приближенно рассчитать конечное число коэффициентов, удовлетворяя уравнению (6-111) в таком же числе точек, расположенных вдоль хорды профиля. Для каждого члена нужно произвести численное интегрирование. Ряд (6-115) не всегда быстро сходится, и он не может достаточно точно характеризовать разрывы функции  $\overline{\omega}_a$ , подобные разрыву у передней кромки шарнирного закрылка.

Более плодотворными оказались другие методы решения интегрального уравнения. Схема, предложенная Дитце [6-18], основана на выражении функции (6-112), являющейся ядром уравнения, через ее сравнительно простые аналоги для несжимаемого потока:

$$K\left(0, \frac{k(x-\xi)}{b}\right) = \frac{1}{2\pi} \left\{ i e^{-i \frac{k(x-\xi)}{b}} \times \right. \\ \left. \times \left[ Ci\left(\frac{k(x-\xi)}{b}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + Si\left(\frac{k(x-\xi)}{b}\right)\right) \right] - \frac{1}{\frac{k(x-\xi)}{b}} \right\}. \quad (6-116)$$

Здесь  $Ci$  и  $Si$  представляют собой интегральные синус и косинус — функции, затабулированные Янке и Эмде [6-27]. Отправляясь от известного решения для несжимаемой жидкости, Дитце разрабатывает итерационный процесс, состоящий в последовательности приближенных решений интегрального уравнения, ядром которого является функция

$$\Delta K = K\left(0, \frac{k(x-\xi)}{b}\right) - K\left(M, \frac{k(x-\xi)}{b}\right). \quad (6-117)$$

Сходимость оказывается хорошей для практически интересного интервала приведенных частот. Вычисления Дитце для колебаний профиля с вертикальным перемещением и изменением угла тангажа при вращении аэродинамически неуравновешенного закрылка и при числах 0,5 и 0,7 составляют основу этих полезных таблиц. Оказывается, что для  $M < 0,5$  влияние сжимаемости достаточно мало для того, чтобы можно было пренебречь им при расчете на флаттер.

Недостаток интегрального уравнения Дитце состоит в том, что его ядро имеет особенность при  $x = \xi$ . Феттис [6-19] обошел это затруднение, отбросив всю сингулярную часть уравнения (6-112) и аппроксимируя оставшуюся часть с помощью алгебраического полинома. В его методе используется известное решение для несжимаемой жидкости, но не требуется производить итераций.

Исключительно полные таблицы аэродинамических коэффициентов, найденные методом Феттиса для  $M = 0,7$ , приведены в работе [6-28]. Их можно использовать для определения подъемной силы, момента и шарнирного момента при колебаниях аэродинамически уравновешенной комбинации крыла и закрылка. Принятые обозначения совпадают с обозначениями работы [6-29]<sup>1)</sup> [см. формулы (5-350) — (5-352)]. Следовательно, эти таблицы особенно удобно использовать при исследовании флаттера в сжимаемом потоке и при аналогичных расчетах для систем, уравнения движения которых могут быть написаны с применением таких же символов. Люке [6-30] несколько дополнил таблицы Дитце и привел их к обозначениям работы [6-29]; обширные вычисления, основывающиеся на методе Дитце, даются Тёрнером и Рабиновичем [6-31].

<sup>1)</sup> Коэффициенты  $L_h$ ,  $L_a$ ,  $M_h$  и  $M_a$  для сжимаемого потока являются функциями числа  $M$  и приведенной частоты  $k$ . Все остальные коэффициенты зависят от  $M$ ,  $k$  и безразмерной координаты передней кромки закрылка. Обозначения работы [6-29] являются достаточно общими и могут применяться при составлении таблиц на основе любой линейной теории как для дозвукового, так и для сверхзвукового потока. Однако при опубликовании многочисленных данных о коэффициентах для чисел  $M$ , равных 1 и больше, применялись другие обозначения, перечисляемые нами в п. 6-6.



Чтобы завершить наш обзор исследований по колебаниям профиля в дозвуковом потоке, опишем вкратце другой подход к решению этой задачи, связанный с переходом к эллиптическим координатам и разложением зависимой переменной в ряд по функциям Матье. Следуя Рейсснеру [6-22], допустим, что потенциал двумерных возмущений представляется в простой гармонической форме:

$$\varphi'(x, z, t) = \bar{\varphi}'(x, z) e^{i\omega t}. \quad (6-118)$$

С помощью уравнения (6-118) уравнение (6-1) преобразуется к виду:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}'}{\partial z^2} - \frac{2Mi\omega}{a_\infty} \frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial x} + \frac{\omega^2}{a_\infty^2} \bar{\varphi}' = 0. \quad (6-119)$$

Замена переменных

$$\chi = e^{-i \frac{kM^2 x^*}{1-M^2}} \bar{\varphi}', \quad (6-120)$$

$$x^* = \frac{x}{b}, \quad z^* = \sqrt{1-M^2} \frac{z}{b} \quad (6-121)$$

упрощает уравнение (6-119):

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^{*2}} + x^2 \chi = 0 \quad (6-122)$$

при

$$x = \frac{kM}{1-M^2}. \quad (6-123)$$

При тех же обозначениях формула (6-10a), определяющая амплитуду давления возмущения при простых гармонических колебаниях, записывается в виде

$$\overline{p - p_\infty} = - \frac{\rho_\infty U}{b} e^{i \frac{kM^2 x^*}{1-M^2}} \left[ \frac{ik\chi}{1-M^2} + \frac{\partial \chi}{\partial x^*} \right]. \quad (6-124)$$

Основное граничное условие (6-4) принимает вид

$$\frac{\partial \chi}{\partial z^*} = \frac{U e^{-i \frac{kM^2 x^*}{1-M^2}}}{\sqrt{1-M^2}} \left[ ik\bar{z}_a + \frac{\partial \bar{z}_a}{\partial x^*} \right] \quad \text{для } z^* = 0, \quad -1 \leq x^* \leq 1. \quad (6-125)$$

Кроме того, давление возмущения, определяемое равенством (6-124), не может иметь разрывов на оси  $x^*$  при  $|x^*| > 1$ , а гипотеза Кутта требует его непрерывности у задней кромки, при  $x^* = 1$ .

Модифицированный потенциал возмущения  $\chi$  расщепляется на две части:

$$\chi = \chi_1 + \chi_2, \quad (6-126)$$

так что  $\chi_1$  характеризует бесциркуляционное течение, но удовлетворяет граничному условию (6-125), тогда как  $\chi_2$  обеспечивает наличие циркуляции около профиля, дополняет  $\chi_1$  так, чтобы выполнялась гипотеза Кутта, и не нарушает выполнения условия (6-125), т. е.

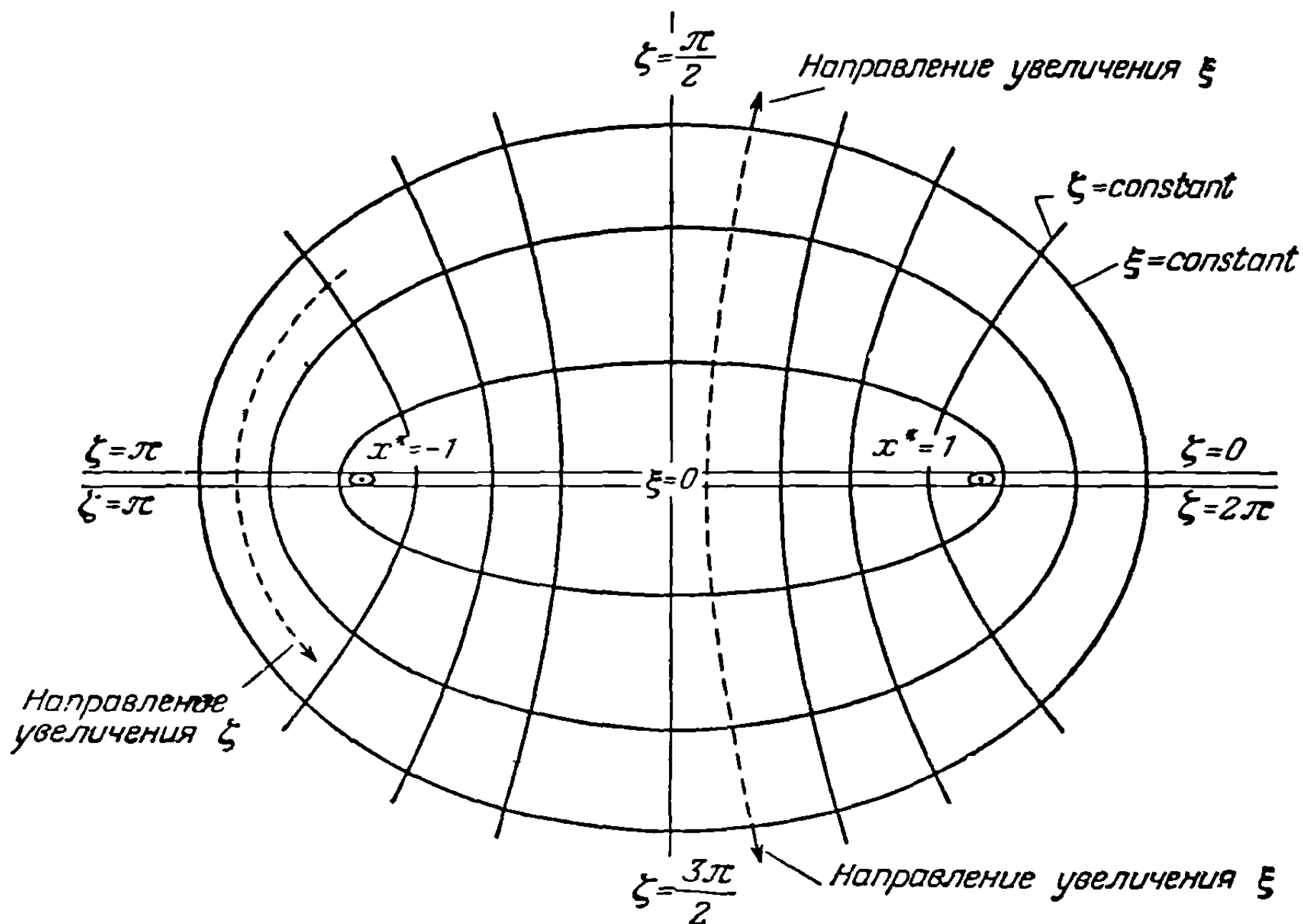
$$\frac{\partial \chi_1}{\partial z^*} = \frac{U e^{-i \frac{kM^2 x^*}{1-M^2}}}{\sqrt{1-M^2}} \left[ ik\bar{z}_a + \frac{\partial \bar{z}_a}{\partial x^*} \right], \quad \frac{\partial \chi_2}{\partial z^*} = 0 \quad \text{для } z^* = 0, \quad -1 \leq x^* \leq 1. \quad (6-127)$$

Уравнение (6-122) преобразуется к эллиптическим координатам с помощью формул

$$x^* = \text{ch } \xi \cos \zeta, \quad z^* = \text{sh } \xi \sin \zeta, \quad (6-128)$$

где  $\xi$  обладает тем свойством, что кривые  $\xi = \text{const}$  представляют собой софокусные эллипсы, имеющие фокусы в точках  $x^* = \pm 1$ . При увеличении  $\xi$  от

От  $0$  до  $\infty$  последовательность эллипсов изменяется от щели ( $-1 \leq x^* \leq 1, z^* = 0$ ) до окружности бесконечно большого радиуса. Кривые  $\zeta = \text{const}$  представляют собой гиперболы с теми же фокусами, что и эллипсы. Можно принять, что  $\zeta$  изменяется от  $0$  до  $2\pi$ ; прямая  $\zeta = 0$  совпадает с верхней частью оси  $x^*$  от  $x^* = 1$  до  $\infty$ , линия  $\zeta = \pi/2$  есть верхняя часть оси  $z^*$  и т. д. Эта координатная система особенно подходит для исследования данной задачи, так как вся плоскость  $\xi = 0$  совпадает с проекцией срединной поверхности крыла. Несколько кривых  $\xi = \text{const}$  и  $\zeta = \text{const}$  показаны на фиг. 6-7.



Фиг. 6-7. Координатные поверхности, соответствующие системе эллиптическо-цилиндрических координат  $\xi$  и  $\zeta$ .

Подстановка величин (6-128) в уравнение (6-122) дает преобразованное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta^2} + x^2 [\text{ch}^2 \xi - \cos^2 \zeta] \chi = 0. \quad (6-129)$$

Основное граничное условие (6-127) записывается в простом виде:

$$\frac{1}{\sin \zeta} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} = \frac{U e^{-i \frac{kM^2 \cos \zeta}{1-M^2}}}{\sqrt{1-M^2}} \left[ ik \bar{z}_a + \frac{\partial \bar{z}_a}{\partial x^*} \right] = g(\zeta), \quad (6-130)$$

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} = 0 \quad \text{для} \quad \xi = 0.$$

Давление возмущения, определяемое уравнением (6-124) для  $\xi = 0$ , можно выразить следующим образом:

$$\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U} = - \frac{\rho_\infty U}{b} e^{i \frac{kM^2 \cos \zeta}{1-M^2}} \left[ \frac{ik \chi(0, \zeta)}{1-M^2} - \frac{1}{\sin \zeta} \frac{\partial \chi(0, \zeta)}{\partial \zeta} \right]. \quad (6-131)$$

Если предположить, что решение выражается через две функции разных переменных,

$$\chi = F(\xi) G(\zeta), \quad (6-132)$$

то дифференциальное уравнение (6-129) распадается на два уравнения Матье:

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} + (x^2 \operatorname{ch}^2 \xi - c) F = 0, \quad (6-133a)$$

$$\frac{d^2 G}{d\zeta^2} - (x^2 \cos^2 \zeta - c) G = 0. \quad (6-133b)$$

Возможные значения постоянной разделения  $c$  определяются требованием, чтобы при данном  $x$  функция  $G(\zeta)$  была периодической с периодом  $2\pi$ ; это требование предотвращает возможность разрывов вдоль положительной части оси  $x$ . В книге Мак-Лахлана [6-32] можно найти два типа собственных функций уравнения (6-133b), имеющих такую периодичность:  $se_m(\zeta)$  и  $ce_m(\zeta)$ <sup>1)</sup>. Первая из этих функций обладает тем же свойством симметрии относительно точки  $\zeta = 0$ , что и функция  $\cos n\zeta$ , может быть разложена в бесконечный ряд по таким косинусам и приводится к функции  $\cos m\zeta$  для  $x = 0$ . Вторая функция аналогичным образом связана с функцией  $\sin n\zeta$ .

Решения уравнения (6-133a), соответствующие функциям  $ce_m(\zeta)$  и  $se_m(\zeta)$  и обладающие тем важным свойством, что они характеризуют распространение возмущений, уходящих в бесконечность, обозначаются через  $Se_m(\xi)$  и  $Se_m(\xi)$ . Рассматривая их асимптотические выражения при больших значениях  $\xi$ , можно подметить, что они содержат такой же множитель с волновым характером изменения, как и функции Ханкеля  $H_n^{(2)}$ .

Функция  $\chi_1$ , характеризующая бесциркуляционную часть течения, должна быть нечетной функцией  $\zeta$ , так как величина  $(1/\sin \zeta)(\partial \chi_1 / \partial \xi)$ , пропорциональная вертикальной скорости, должна быть четной функцией  $\zeta$ . Учитывая это, выберем для представления функции  $se_m(\zeta)$  ряд вида

$$\chi_1 = \sum_{m=0}^{\infty} b_m se_m(\zeta) Se_m(\xi). \quad (6-134)$$

Используя ортогональность этих функций Матье в интервале от 0 до  $\pi$ ,

$$\int_0^{\pi} se_m(\zeta) se_n(\zeta) d\zeta = 0, \quad m \neq n, \quad (6-135)$$

и предполагая функции нормированными в соответствии с условием

$$\frac{dSe_m(0)}{d\xi} = 1, \quad (6-136)$$

мы можем вычислить каждый из коэффициентов ряда (6-134) из уравнения (6-130) по следующей формуле:

$$b_m = \int_0^{\pi} \sin \zeta g(\zeta) se_m(\zeta) d\zeta. \quad (6-137)$$

Таким образом, полностью определяется функция  $\chi_1$  и посредством уравнения (6-131) находятся бесциркуляционные компоненты давления, подъемной силы и момента. Между прочим, утверждение о бесциркуляционном характере этой составляющей суммарного потока может быть подтверждено тем фактом, что  $\chi_1$

<sup>1)</sup> В применяемых здесь обозначениях функций Матье мы строго следуем работе [6-22]; они несколько отличаются от обозначений, примененных в работах [6-32] и [6-33]. Например, функции  $ce_m$  и  $se_m$  пропорциональны по величине функциям, обозначаемым Национальным бюро стандартов через  $Se_{2r}$  (или  $Se_{2r+1}$ ) и  $So_{2r}$  (или  $So_{2r+1}$ ) соответственно. Последние, однако, отличаются от первых способом нормирования. Относительно символов для функций, обозначаемых Рейсснером через  $Ce_m$  и  $Se_m$ , общего правила не существует.

а следовательно, и  $\varphi'$ ) не изменяется от добавления величины  $2\pi$  к значению переменной  $\zeta$ , что соответствует обходу вокруг профиля по замкнутому контуру.

Наиболее трудным этапом в применении метода функций Матье является определение подходящего выражения для функции  $\chi_2$ . Рейсснер в работе [6-22] утверждает, что наиболее удобным оказывается представление Хаскинда [6-21]. Функция  $\chi_2$  должна удовлетворять условию (6-130), но значительно менее благоприятными для ее определения являются ограничения, связанные с отсутствием разрывов давления на плоскости  $z^* = 0$  впереди профиля и в спутной струе. Учитывая, что на этих участках  $\chi_1 = 0$  и функция  $\chi_1$  не участвует здесь в создании давления возмущения, Рейсснер показывает, что функция  $\chi_2$  должна удовлетворять следующим требованиям:

$$\chi_2 = 0 \quad \text{для} \quad z^* = 0, \quad x^* \leq -1, \quad (6-138a)$$

$$\frac{ik\chi_2}{1-M^2} + \frac{\partial\chi_2}{\partial x^*} = 0 \quad \text{для} \quad z^* = 0, \quad x^* \geq 1. \quad (6-138b)$$

Если положить, что вдоль спутной струи

$$\chi_2 = Ce^{-i(kx^*/1-M^2)}, \quad (6-139)$$

где  $C$  — произвольная постоянная, то это было бы равносильно выполнению условия (6-138b). Положить, что в спутной струе имеем просто  $\chi_2 = 0$ , недостаточно, так как тем самым исключается циркуляция. Прием, применяемый Хаскиндо, состоит во введении другого решения уравнений Матье — функции  $W(\xi, \zeta)$ , производная которой по  $z^*$  пропорциональна давлению возмущения:

$$\frac{\partial W}{\partial z^*} = \frac{ik}{1-M^2} \chi_2 + \frac{\partial\chi_2}{\partial x^*}. \quad (6-140)$$

Так как  $\chi_2$ , аналогично  $\chi_1$ , является нечетной функцией от  $z$ , то функция  $W$  должна быть четной относительно  $z$  (и  $\zeta$ ). Следовательно, она выражается в виде

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} a_m c e_m(\zeta) C e_m(\xi). \quad (6-141)$$

Равенства (6-140) и (6-141) обеспечивают выполнение всех условий для давления, кроме гипотезы Кутта. Обращение в нуль на поверхности профиля составляющей вертикальной скорости, связанной с  $\chi_2$ , приводит сначала к выражению

$$W = A \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m c e_m(\zeta) C e_m(\xi) + B \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m c e_m(\zeta) C e_m(\xi). \quad (6-142)$$

Здесь  $A$  и  $B$  — неизвестные пока постоянные, а

$$\alpha_m = \frac{\int_0^{\pi} \cos(x \cos \zeta) c e_m(\zeta) d\zeta}{C e_m(0)}, \quad (6-143a)$$

$$\beta_m = \frac{\int_0^{\pi} \frac{\sin(x \cos \zeta) c e_m(\zeta)}{x} d\zeta}{C e_m(0)}. \quad (6-143b)$$

Условие равенства нулю вертикальной скорости дает после этого следующее соотношение между величинами  $A$  и  $B$ :

$$A \left[ e^{-i(x/M)x^2} \left( i \frac{1}{M} \sin x + \cos x \right) + \right. \\ \left. + x^2 \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n c e_n(\pi) \int_0^{\infty} e^{-i(x/M) \operatorname{ch} \xi} C e'_n(\xi) d\xi \right] + \\ + B \left[ e^{-i(x/M)} \left( i \frac{x}{M} \cos x - x \sin x \right) + \right. \\ \left. + x^2 \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n c e_n(\pi) \int_0^{\infty} e^{-i(x/M) \operatorname{ch} \xi} C e'_n(\xi) d\xi \right] = 0, \quad (6-144)$$

где штрих над  $C e_n(\xi)$  обозначает производную по  $\xi$ .

Наконец, требование конечности величины давления у задней кромки объединяет две части решения и дает второе уравнение для определения  $A$  и  $B$ :

$$A \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n c e_n(0) + B \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n c e_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n s e'_n(0) S e_n(0). \quad (6-145)$$

Из приведенного краткого обзора видно, что численные расчеты, связанные с методом функций Матье, отнюдь не являются ни прямыми, ни быстрыми. Даже для таких простых случаев движения, как вертикальное перемещение и поворот относительно поперечной оси, расчеты связаны с суммированием бесконечных рядов; число членов, вычисление которых необходимо для обеспечения сходимости, изменяется в широких пределах в зависимости от приведенной частоты и числа Маха. Более того, интегралы некоторых типов, как, например,

$$\int_0^{\infty} e^{-i(x/M) \operatorname{ch} \xi} C e'_n(\xi) d\xi,$$

нельзя представить даже и в виде бесконечного ряда сгруппированных коэффициентами, а приходится оценивать численным методом. Конечно, все эти операции будут производиться более точно и эффективно при наличии таблиц функций Матье, выпущенных Национальным бюро стандартов [6-33].

Аэродинамические коэффициенты для случая колебаний недеформируемого в направлении хорды профиля были вычислены с применением функций Матье Тимманом, ван де Вореном и Грейданусом [6-24]. Они рассчитаны на основе метода потенциала ускорений и даются для следующих значений числа Маха: 0,35, 0,5, 0,6, 0,7 и 0,8.

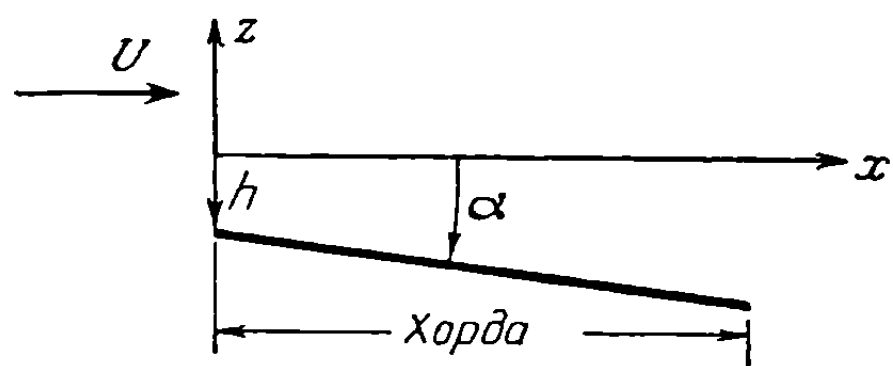
Пока не имеется экспериментальных данных, полностью подтверждающих теоретические расчеты аэродинамической нагрузки при колебаниях профиля в дозвуковом потоке сжимаемой жидкости. Испытания на флаттер в лучшем случае могут дать лишь косвенную проверку, так как вид уравнений флаттера зависит от предполагаемых форм колебаний, а также имеется возможность ошибок в оценке упругих, инерционных и аэродинамических свойств крыла. Тем не менее имеются данные измерений, показывающие, что общая тенденция изменения характеристик флаттера с изменением числа Маха соответствует теории. Расхождения с теоретическими результатами, на которые указывают отчеты об испытаниях, носят скорее случайный, чем систематический характер.

**6-5. Произвольные малые движения профиля в дозвуковом потоке.** Единственный практически применимый метод определения аэродинамических нагрузок, обусловленных произвольными малыми движениями профиля при дозвуковом полете, состоит в наложении теоретических результатов для простых

гармонических колебаний с помощью интеграла Фурье. Чтобы избежать затруднений со сходимостью, сначала определяются функции переходной проводимости, или характеристические функции, для простейших видов движения профиля. После этого для определения подъемной силы, момента и т. п. при движении более общего характера используется интеграл Дюамеля.

В данном пункте мы рассмотрим главным образом вертикальное перемещение и движение с изменением угла тангажа крыла, поперечное сечение которого не деформируется в направлении хорды, поскольку существующие таблицы относятся только к этим случаям. В принципе, однако, выражения, которые мы выведем, могут быть очевидным образом модифицированы для случаев вращающегося закрылка или предкрылка, заданных видов деформации в направлении хорды и т. п.

Влияние сжимаемости в известной степени усложняет использование интеграла Фурье для переходных движений. При конечной величине скорости звука в жидкости картина бесциркуляционного течения не может мгновенно перестроиться с изменением граничных условий. Любое определение понятия присоединенной массы в данном случае не имеет смысла. Бесциркуляционные подъемная сила и момент, вычисление которых связано с некоторыми трудностями, зависят не от значений ускорения и скорости крыла в данный момент, а от характера всех предшествующих изменений этих величин во времени. В соответствии с этим разделение потока на циркуляционную и бесциркуляционную части не дает никаких преимуществ. Действительно, основным оправданием такого разделения в случае несжимаемого потока является то, что бес-



Фиг. 6-8. Крыло, совершающее вертикальное перемещение и поворот относительно оси, проходящей через переднюю кромку в сечении посредине размаха.

циркуляционные нагрузки в начальный момент импульсного движения становятся бесконечно большими. Однако, если этот толчок смягчается за счет сжимаемости, то указанная особенность исключается.

В противоположность тому, что было найдено в п. 5-7, циркуляция вокруг профиля, недеформируемого в направлении хорды и помещенного в сжимаемом потоке, не определяется в точности значением вертикальной скорости в точке, отстоящей на три четверти хорды от передней кромки. Это означает,

что вместо одной функции Вагнера здесь будут фигурировать две функции переходной проводимости или характеристические функции, — одна для вертикального перемещения и другая для скорости изменения угла тангажа. Чтобы выяснить причины этого, рассмотрим граничное условие для вертикальной скорости частиц жидкости, соприкасающихся с поверхностью крыла, которое совершает показанные на фиг. 6-8 движения с изменением величин  $h$  и  $\alpha$ . Ось вращения мы временно совмещаем с осью, проходящей через переднюю кромку в сечении, расположенном посредине размаха, и предполагаем, что проекция этой точки является началом нашей системы координат. Граничное условие заключается в том, что производная функции  $\varphi'$  по  $z$  выражается следующим образом:

$$\omega_a(x, t) = -[\dot{h} + U\alpha + \dot{\alpha}x]. \quad (6-146)$$

Как указано в п. 5-6, члены  $\dot{h}$  и  $U\alpha$  создают постоянную вдоль хорды скорость  $\omega_a$  и их воздействие можно рассматривать совместно. Член, содержащий  $\dot{\alpha}$ , дает линейное изменение  $\omega_a$  по  $x$ , и его нужно учитывать отдельно. На фиг. 6-9 показаны движения крыла, при которых создается один из двух типов распределения вертикальных скоростей в отдельности.

На фиг. 6-9 показаны также два типа переходного движения. Предположим, что при данном числе Маха полета мы можем вычислить для каждого случая

переходные, подъемную силу и момент тангажа (относительно оси вращения). В случае вертикальной скорости  $\dot{h}_0$ , возникающей в момент  $t = 0$ , можно написать

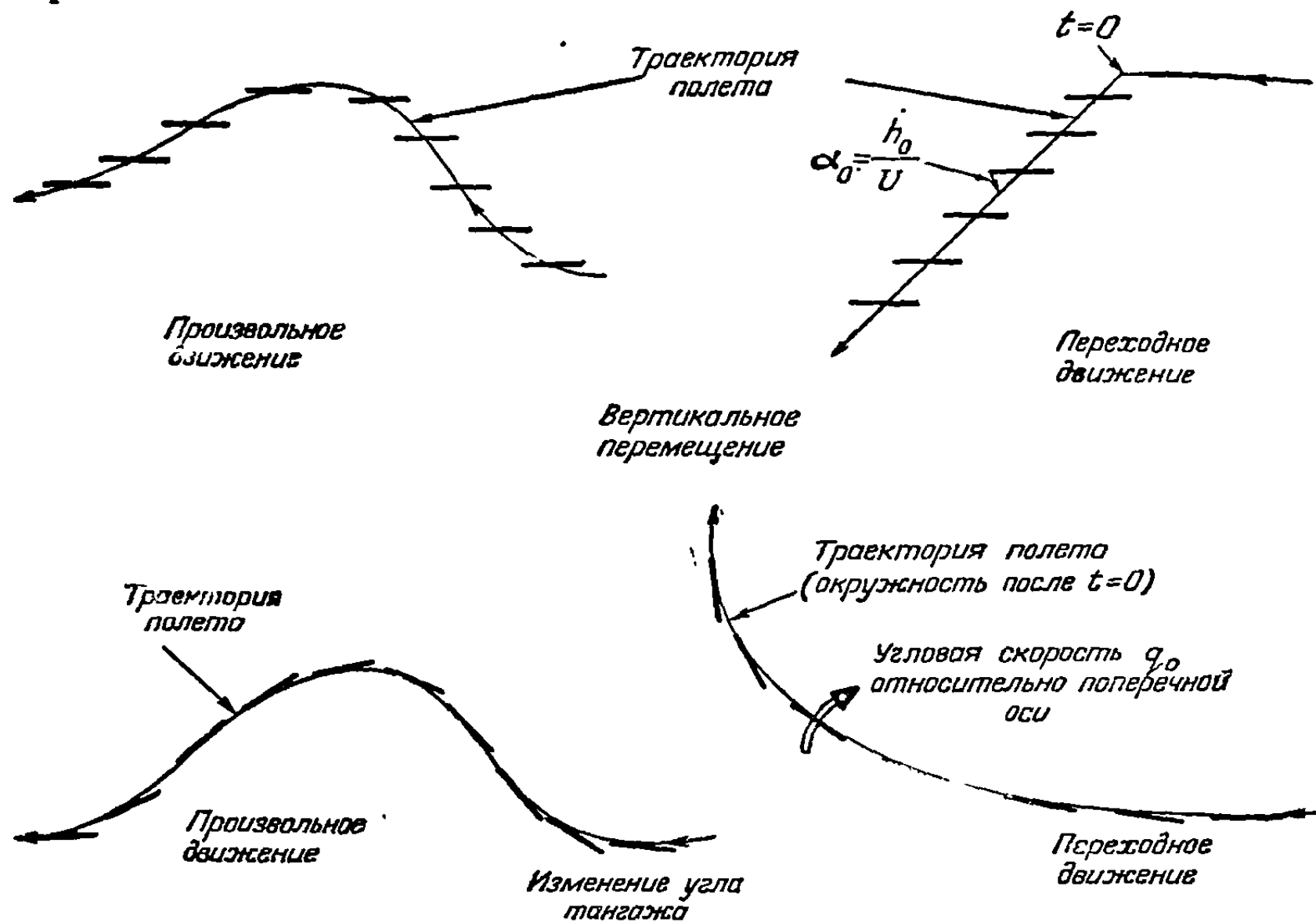
$$L'_T(s) = 2\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 S \frac{\dot{h}_0}{U} \varphi_c(s), \quad (6-147)$$

$$M'_{yT}(s) = 2\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 S (2b) \frac{\dot{h}_0}{U} \varphi_{cM}(s), \quad (6-148)$$

где величина

$$s = \frac{Ut}{b} \quad (5-366)$$

характеризует отнесенное к длине полухорды расстояние, пройденное крылом после начала вертикального движения, и  $S$  обозначает площадь крыла. Множитель  $2\pi$



Фиг. 6-9. Крылья, совершающие произвольные и переходные движения: вверху — с вертикальным перемещением (опусканием) и внизу — с изменением только угла тангажа без изменения угла атаки.

был выбран на основании сравнения с соответствующей задачей для несжимаемой жидкости, так что для двумерного профиля, движущегося с малой скоростью, безразмерная переходная функция  $\varphi_c(s)$  при очень больших  $s$  приближается к единице. Отношение  $\varphi_{cM}(s)/\varphi_c(s)$  определяет выраженное в долях хорды  $2b$  смещение мгновенного центра давления назад от передней кромки, что осуществлено путем соответствующего нормирования указанных функций.

Для переходного движения с угловой скоростью  $q_0$  относительно оси, проходящей через переднюю кромку, можно написать<sup>1)</sup>

$$L'_q(s) = 4\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 S \left(\frac{q_0 b}{U}\right) \varphi_{cq}(s), \quad (6-149)$$

$$M'_{yq}(s) = 4\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 S (2b) \left(\frac{q_0 b}{U}\right) \varphi_{cMq}(s). \quad (6-150)$$

<sup>1)</sup> Безразмерные переходные функции выбраны здесь так, чтобы они соответствовали функциям, вычисленным Мазельским ([6-34] и [6-35]), хотя необходимость сохранения однородных обозначений на протяжении всей книги не позволяет использовать его символы без изменений. Функции  $\varphi_c(s)$  и  $\varphi_{cq}(s)$  в случае двумерного профиля численно равны функциям Мазельского  $k_1(s)$  и  $k_{1q}(s)$ . Моментные функции отличаются от функций  $m_1(s)$  и  $m_{1q}(s)$  лишь сдвигом оси.



Такое определение функции  $\varphi_{cq}(s)$  приводит к заключению о том, что в случае двумерного профиля в несжимаемом потоке она асимптотически стремится к значению, равному  $3/4$ ; это можно доказать, приравняв правые части формул (6-149) и (5-367) и заменяя в последней  $\alpha_0$  на эффективный угол атаки  $3q_0 b / 2U$ , соответствующий повороту вокруг точки, отстоящей на три четверти хорды от передней кромки, с угловой скоростью  $q_0$ . Как и в предыдущем случае, величина  $-\varphi_{cMq}(s) \varphi_{cq}(s)$  характеризует относительное положение центра давления.

Имея четыре переходные функции, определяемые равенствами (6-147) — (6-150), и учитывая аналогию между величинами  $\dot{h}/U$  и  $\alpha$  в отношении их связи с функциями  $\varphi_c(s)$  и  $\varphi_{cM}(s)$ , мы можем для выражения подъемной силы и момента, возникающих при произвольном малом движении крыла, использовать интеграл Дюамеля. Если это движение начинается при  $t = 0$ , то соответствующие выражения имеют вид

$$L'(s) = 2\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 S \left\{ \left[ \alpha(0) + \frac{\dot{h}(0)}{U} \right] \varphi_c(s) + \int_0^s \frac{d}{d\sigma} \left[ \alpha(\sigma) + \frac{\dot{h}(\sigma)}{U} \right] \varphi_c(s - \sigma) d\sigma \right\} + \\ + 4\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 S \left\{ \frac{b}{U} \dot{\alpha}(0) \varphi_{cq}(s) + \int_0^s \frac{b}{U} \frac{d\dot{\alpha}(\sigma)}{d\sigma} \varphi_{cq}(s - \sigma) d\sigma \right\}, \quad (6-151)$$

$$M'_y(s) = 2\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 S (2b) \left\{ \left[ \alpha(0) + \frac{\dot{h}(0)}{U} \right] \varphi_{cM}(s) + \right. \\ \left. + \int_0^s \frac{d}{d\sigma} \left[ \alpha(\sigma) + \frac{\dot{h}(\sigma)}{U} \right] \varphi_{cM}(s - \sigma) d\sigma \right\} + \\ + 4\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 S (2b) \left\{ \frac{b}{U} \dot{\alpha}(0) \varphi_{cMq}(s) + \int_0^s \frac{b}{U} \frac{d\dot{\alpha}(\sigma)}{d\sigma} \varphi_{cMq}(s - \sigma) d\sigma \right\}. \quad (6-152)$$

Здесь точкой сверху обозначены производные по времени; эту точку в случае необходимости можно заменить символом производной по  $s$  или  $\sigma$ , умножая каждый из видоизмененных таким образом членов на величину  $U/b$ .

Формулы (6-151) и (6-152) являются совершенно общими и в пределах ограничений данной теории применимы к любому недеформируемому крылу в любом режиме полета, для которого имеются переходные функции. Если подъемная сила и момент отнесены к единице длины размаха, как это делается для двумерного профиля, то нужно лишь в тех местах, где встречается площадь крыла  $S$ , заменить ее на хорду  $2b$ . Мы сохраняем штрихи при обозначениях  $L'$  и  $M'_y$  с тем, чтобы указать, что эти величины вычислены для оси поворота, проходящей через переднюю кромку. Если следовать обозначениям Теодорсена и ввести для расчета момента и угла тангажа ось, лежащую на расстоянии  $b(a+1)$  позади передней кромки, то можно в зависимости от равенств (6-147) — (6-150) составить новый ряд выражений для переходных подъемной силы и момента. При этом мы будем пользоваться общим правилом относительно переноса оси момента. Заметим также, что наличие угловой скорости  $q_0$  относительно точки  $x = b(a+1)$  эквивалентно сочетанию такой же угловой скорости относительно точки  $x = 0$  и вертикального перемещения всего крыла  $h_0 = -q_0 b(a+1)$ .

$$L_T(s) = L'_T(s) = 2\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 S \frac{\dot{h}_0}{U} \{ \varphi_c(s) \}. \quad (6-153)$$

$$M_{yT}(s) = M'_{yT}(s) + L_T(s) b [a+1] = \\ = 2\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 S (2b) \frac{\dot{h}_0}{U} \left\{ \varphi_{cM}(s) + \left[ \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \right] \varphi_c(s) \right\}. \quad (6-154)$$

$$L_q(s) = L'_q(s) - 2\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 S \frac{q_0 b [a+1]}{U} \varphi_c(s) =$$

$$= 4\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 S \left(\frac{q_0 b}{U}\right) \left\{ \varphi_{cq}(s) - \left[\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\right] \varphi_c(s) \right\}. \quad (6-155)$$

$$M_{yq}(s) = M'_{yq}(s) - 2\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 S (2b) \frac{q_0 b [a+1]}{U} \varphi_{cM}(s) + L_q(s) b [a+1] =$$

$$= 4\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 S (2b) \left(\frac{q_0 b}{U}\right) \left\{ \varphi_{cMq}(s) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\right] [\varphi_{cq}(s) - \varphi_{cM}(s)] - \left[\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\right]^2 \varphi_c(s) \right\}. \quad (6-156)$$

Четыре величины, взятые в фигурные скобки в формулах (6-153) — (6-156), представляют собой новые переходные функции. Они могут быть использованы вместо функций, входящих первоначально в формулы (6-151) и (6-152), для нахождения  $L(s)$  и  $M_y(s)$ , обусловленных произвольным вертикальным перемещением и поворотом относительно оси, проходящей на расстоянии  $ba$  позади середины хорды.

В связи с применением этих формул следует упомянуть, что в задачах, касающихся движения самолета в целом, как, например, в задаче о динамической устойчивости, иногда возникает путаница из-за смешения используемых здесь осей координат и так называемых связанных осей, закрепленных по отношению к самолету. Величины  $\alpha$  и  $h$  характеризуют смещения крыла по отношению к осям, связанным с аэродинамической трубой. Другими словами, они измеряются в ньютоновской системе координат, движущейся вперед со скоростью  $U$  (которая предполагается постоянной), но не участвующей в каких-либо видах нестационарного возмущенного движения в поперечном направлении. В отличие от этого применяемые обычно в работах по динамической устойчивости вместо  $d$  и  $h$  величины  $\theta$  и  $\omega$  представляют угол поворота хорды крыла относительно некоторой фиксированной в пространстве поперечной оси и абсолютную скорость самолета (положительную при направлении вниз) по отношению к воздуху, измеряемую всегда в направлении, перпендикулярном к хорде. Таким образом, величина  $\omega/U$  представляет собой суммарный аэродинамический угол атаки хорды, тогда как  $\theta$  определяет угловое перемещение этой хорды без изменения угла атаки. Если  $\omega = 0$ , то величина  $\dot{\theta}$  (обозначаемая обычно символом  $q$ ) как раз характеризует чистое движение с изменением угла тангажа, показанное на фиг. 6-9. Преобразование, с помощью которого можно вычислить  $\theta$  и  $\omega$  по заданным  $\alpha$  и  $h$ , имеет вид

$$\frac{\omega}{U} = \frac{\dot{h}}{U} + \alpha, \quad (6-157)$$

$$\theta = \alpha, \quad (6-158)$$

если только начала координат обеих систем совпадают.

Для получения правильных результатов выражения  $\alpha$  и  $h$  из этих равенств должны быть одновременно подставлены в формулы типа (6-151) и (6-152).

Рассмотрим теперь вопрос об определении функций  $\varphi_c(s)$ ,  $\varphi_{cM}(s)$ ,  $\varphi_{cq}(s)$  и  $\varphi_{cMq}(s)$  для случая дозвукового полета профиля. Ни одна из них не может быть выражена точно через известные функции во всем промежутке изменения  $s$ . Однако начальные и асимптотические значения определяются легко, и Ломакс и др. [6-37] устанавливают интересную аналогию с установившимся течением, с помощью которой эти функции выражаются в простой форме при значениях  $s$ , лежащих между 0 и  $2M/(M+1)$ .

Асимптотические значения переходных величин определяются просто, как значения подъемной силы и момента для профиля в установившемся движении.

Эти значения вычисляются без труда путем умножения соответствующих значений для несжимаемого потока на множитель Прандтля—Глауэрта  $1/\sqrt{1-M^2}$ . Значения  $\varphi(\infty)$  и  $\varphi_M(\infty)$  для несжимаемого потока представляют собой умноженные на  $1/2\pi$  наклоны кривых подъемной силы и момента, соответствующих формулам (5-114) и (5-115) при  $a = -1$ , откуда мы получаем

$$\varphi_c(\infty) = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}}, \quad (6-159)$$

$$\varphi_{cM}(\infty) = \frac{-1}{4\sqrt{1-M^2}}. \quad (6-160)$$

Как и следовало ожидать, отношение правых частей равенств (6-160) и (6-159) показывает, что результирующая подъемная сила проходит через точку, лежащую на расстоянии одной четверти хорды от передней кромки. Известно, что переходная подъемная сила в случае несжимаемого потока проходит через эту точку во все время маневра, а поэтому отклонение линии действия подъемной силы от точки  $x = b/2$  в сжимаемом случае характеризует суммарное воздействие бесциркуляционного потока и сжимаемости на образование спутной струи. Формулы (5-117) и (5-118) для параболически искривленного профиля, создающего такое же распределение  $w_a$  вдоль хорды, как простой поворот вокруг оси, проходящей через середину хорды, приводят к выражениям, служащим аналогами  $\varphi_{cq}(\infty)$  и  $\varphi_{cMq}(\infty)$  для несжимаемого потока. Введение множителя Прандтля—Глауэрта дает

$$\varphi_{cq}(\infty) = \frac{3}{4\sqrt{1-M^2}}, \quad (6-161)$$

$$\varphi_{cMq}(\infty) = \frac{-1}{4\sqrt{1-M^2}}. \quad (6-162)$$

Все начальные значения  $\varphi_c(0)$  и т. д. могут быть найдены с помощью интеграла Фурье, так как они совпадают со значениями соответствующих величин при простом гармоническом движении с бесконечно большой частотой (см. [6-34], приложение А). Имеется, однако, столь же легкий способ определения этих значений с помощью физических рассуждений, применимый к любому крылу при любом числе Маха, большем нуля. Эти рассуждения проводятся следующим образом. Когда поршень начинает из состояния покоя внезапное движение в невозмущенной массе газа со скоростью  $u_0$ , малой в сравнении с  $a_\infty$ , на него действует вначале давление возмущения

$$p - p_\infty = \rho_\infty a_\infty u_0. \quad (6-163)$$

Этот результат получается по акустической теории или теории простой волны. Можно вывести его также, отправляясь от уравнений, приведенных в п. 6-1. Пусть поршень движется в направлении оси  $x$ . До тех пор, пока движение остается одномерным, оно подчиняется основному дифференциальному уравнению акустики [уравнение (6-1) при  $U = 0$ ]

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} = \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} \quad (6-164)$$

при следующем граничном условии

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = u_0 \quad \text{для } x \cong 0, t > 0. \quad (6-165)$$

Любая функция  $f(x - a_\infty t)$ , характеризующая распространение волн параллельно положительной части оси  $x$ , является решением уравнения (6-164). Функция  $f$  частного вида, удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df(x - a_\infty t)}{d(x - a_\infty t)} = u_0 \quad \text{для } x \cong 0, t > 0, \quad (6-166)$$

представляет собой интеграл ступенчатой функции  $u_0 l(a_\infty t - x)$ . Иначе говоря,

$$\frac{df}{d(x - a_\infty t)} = u_0 l(a_\infty t - x). \quad (6-167)$$

Но давление на поршень можно рассчитать, пользуясь линеаризированной формой уравнения Бернулли (5-13), где член  $q^2/2$  отбрасывается, а функция  $F(t)$  полагается равной нулю ввиду отсутствия возмущений в бесконечности:

$$\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty} = -\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = -\frac{df}{d(x - a_\infty t)} \frac{d(x - a_\infty t)}{dt} = a_\infty \frac{df}{d(x - a_\infty t)}. \quad (6-168)$$

При  $x=0$  и любом положительном  $t$  ступенчатая функция имеет значение, равное единице. Мы можем подставить выражение (6-167) в уравнение (6-168) и получить

$$p - p_\infty = \rho_\infty a_\infty u_0. \quad (6-163)$$

В общем случае между одномерным движением поршня и переходным изменением угла тангажа или вертикальным перемещением крыла нет сходства; но в самый первый момент  $t=0^+$  каждый малый элемент поверхности крыла двигается с места подобно маленькому поршню, обладающему нормальной скоростью  $w_\alpha$  по отношению к покоящемуся газу. Следовательно, уравнение (6-163) показывает, что начальное давление непосредственно над крылом, начинающим двигаться со скоростью  $\dot{h}_0$ , равно

$$p_U - p_\infty = \rho_\infty a_\infty [-\dot{h}_0] = -\rho_\infty \frac{U^2}{M} \frac{\dot{h}_0}{U}. \quad (6-169)$$

Давление в случае крыла, начинающего поворачиваться с угловой скоростью  $q_0$  относительно поперечной оси, проходящей через точку  $x=0$ , равно

$$(p_U - p_\infty)_q = \rho_\infty a_\infty [-q_0 x] = -\rho_\infty \frac{U^2}{M} \frac{q_0 x}{U}. \quad (6-170)$$

Вследствие антисимметричного характера картины течения значения давления возмущения  $(p_L - p_\infty)$  на нижней поверхности равны и противоположны указанным выше. Мы можем поэтому выполнить интегрирование, чтобы найти результирующие значения подъемной силы и момента для двумерного профиля:

$$L'_T(0) = -\int_0^{2b} [p_U - p_L] dx = 2\rho_\infty \frac{U^2 (2b)}{M} \frac{\dot{h}_0}{U} = 2\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 (2b) \frac{\dot{h}_0}{U} \varphi_c(0), \quad (6-171)$$

$$M'_{yT}(0) = \int_0^{2b} [p_U - p_L] x dx = -\rho_\infty \frac{U^2 (2b)^2}{M} \frac{\dot{h}_0}{U} = 2\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 (2b)^2 \frac{\dot{h}_0}{U} \varphi_{cM}(0), \quad (6-172)$$

$$L'_q(0) = -\int_0^{2b} [p_U - p_L]_q dx = 2\rho_\infty \frac{U^2 (2b)}{M} \frac{q_0 b}{U} = 4\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 (2b) \left(\frac{q_0 b}{U}\right) \varphi_{cq}(0), \quad (6-173)$$

$$M'_{yq}(0) = \int_0^{2b} [p_U - p_L]_q x dx = -\frac{4}{3} \rho_\infty \frac{U^2 (2b)^2}{M} \frac{q_0 b}{U} = 4\pi \frac{\rho_\infty}{2} U^2 (2b)^2 \left(\frac{q_0 b}{U}\right) \varphi_{cMq}(0). \quad (6-174)$$

Отсюда, наконец, получаем

$$\varphi_c(0) = \frac{2}{\pi M}, \quad (6-175)$$

$$\varphi_{cM}(0) = -\frac{1}{\pi M}, \quad (6-176)$$

$$\varphi_{cq}(0) = \frac{1}{\pi M}, \quad (6-177)$$

$$\varphi_{cMq}(0) = -\frac{2}{3\pi M}. \quad (6-178)$$

Как об этом подробно говорится в III части работы [6-37], формула (6-163) для начального давления приводит ко многим другим интересным выводам. Например, пользуясь уравнением (6-169), мы можем показать, что начальное значение коэффициента подъемной силы для единичного угла атаки  $\alpha_0 = \dot{h}_0/U$  для любого плоского крыла при любом числе Маха есть

$$\frac{dc_l(0)}{d\alpha_0} = \frac{4}{M}. \quad (6-179)$$

Из формул (6-175) и (6-178) можно заключить, что при  $s=0$  центры давления для случаев вертикального движения и движения тангажа располагаются соответственно посередине хорды и на расстоянии двух третей хорды от передней кромки. Этот результат можно было бы вывести также из линейного соотношения между давлением возмущения и местной начальной скоростью.

В начальной фазе движения мы можем вычислять значения переходных функций, пользуясь аналогией с теорией установившегося течения, изложенной нами в п. 6-3. Мы рассматриваем движение в системе координат, закрепленной по отношению к покоящейся жидкости, в которой профиль при  $t=0$  находится между  $x=0$  и  $x=2b$ , а затем начинает равномерно двигаться в отрицательном направлении оси  $x$  со скоростью  $U$ . Этот вид движения приводит к двумерной нестационарной задаче. Основное дифференциальное уравнение задачи получается с помощью линеаризации уравнения (5-24) в предположении, что все составляющие скорости малы по сравнению с  $a_\infty$ , или, другим способом, в предположении, что  $U$  в уравнении (6-1) равно нулю:

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} = 0. \quad (6-180a)$$

Основное граничное условие должно удовлетворяться для каждого положения проекции профиля в данный момент времени, т. е. для точек, лежащих между  $x = -Ut$  и  $x = -Ut + 2b$ . Иначе говоря,

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial z} = w_a(x, t) \text{ для } z=0, \quad -Ut \leq x \leq -Ut + 2b. \quad (6-180b)$$

Чтобы облегчить аналогию, сделаем для уравнений (6-180a) и (6-180b) преобразование

$$t_1 = a_\infty t, \quad (6-181)$$

в результате чего получим

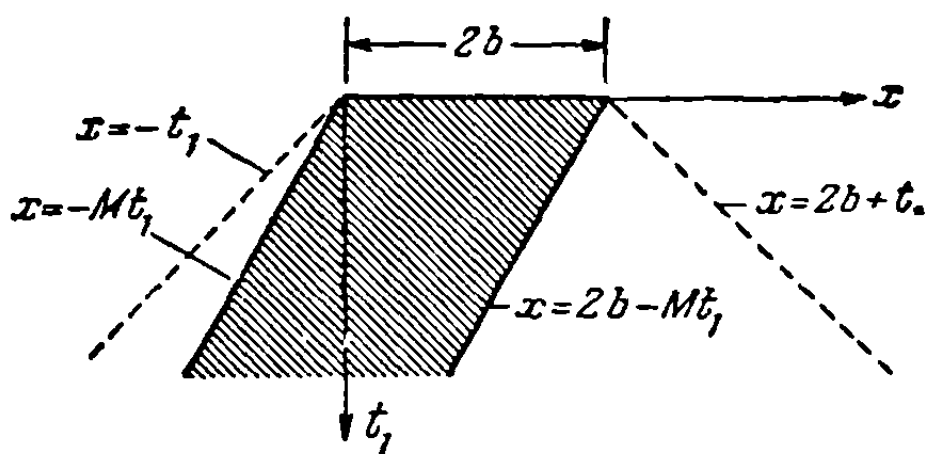
$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} = 0 \quad (6-182a)$$

и

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial z} = w_a(x, t_1) \text{ для } z=0, \quad -Mt_1 \leq x \leq -Mt_1 + 2b. \quad (6-182b)$$

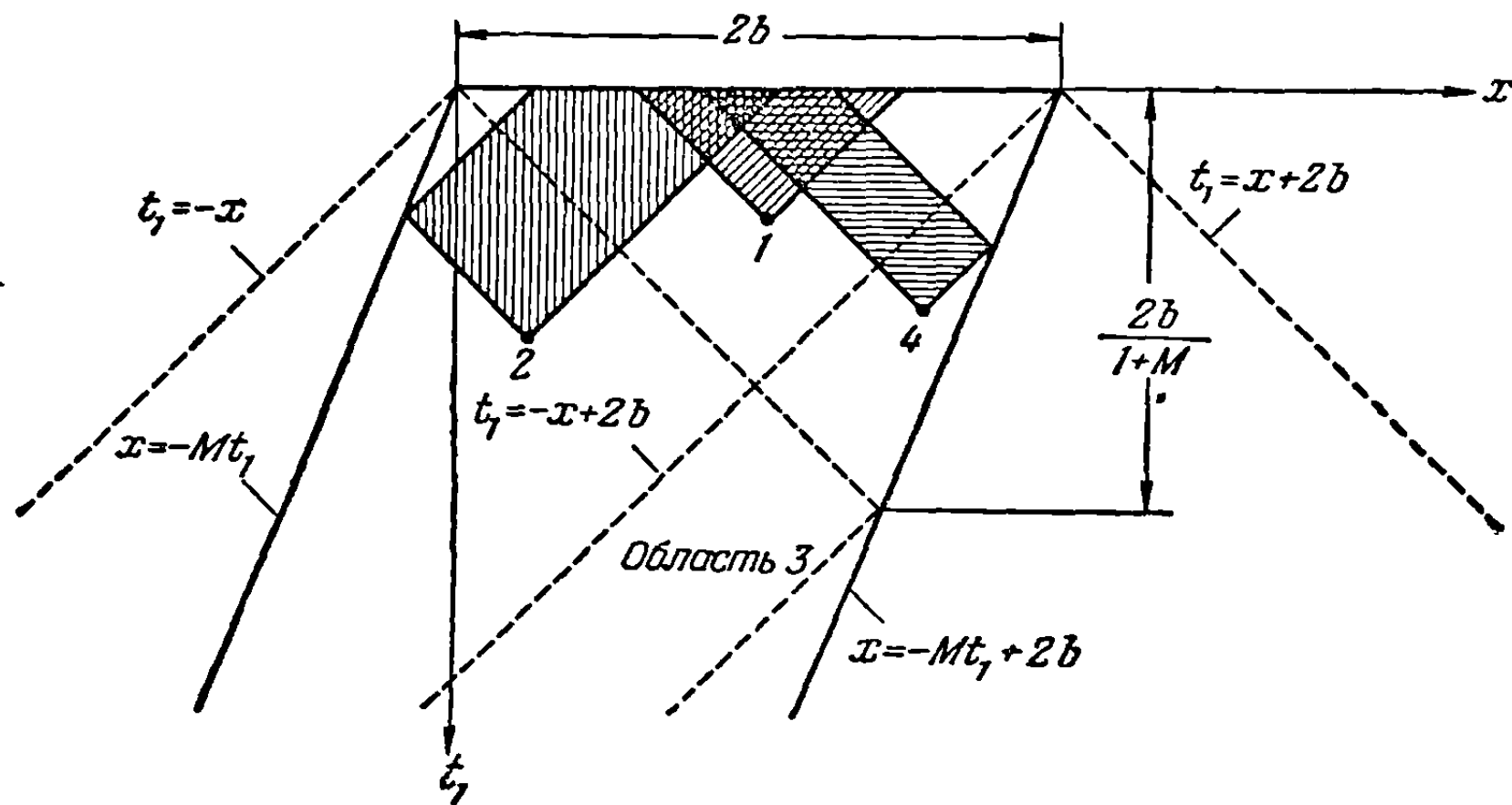
На фиг. 6—10 заштрихованная поверхность обозначает ту часть плоскости  $t_1 x$ , на которой действительно граничное условие (6-182b). На этой фигуре с помощью пунктирных линий показаны также пределы области, возмущенной движением профиля. Эти пределы определяются путем рассмотрения действительного течения в некоторой плоскости  $xz$ , определенной для каждого момента времени.

Начальные возмущения при  $t = t_1 = 0$  возникают на хорде крыла, и их распространение характеризуется последовательностью окружностей с центрами на прямой  $0 \leq x \leq 2b$  и мгновенными значениями радиуса  $a_\infty t = t_1$ . Передняя из этих окружностей пересекает плоскость  $z = 0$  в точке  $x = -t_1$ , тогда как самая задняя из них проходит позади профиля на расстоянии  $x = 2b + t_1$ , так что следы этих окружностей в плоскости  $t_1 x$  представляют собой прямые, проходящие через точки  $x = 0$  и  $x = 2b$  и наклоненные к оси  $x$  под углами  $-45^\circ$  и  $+45^\circ$  соответственно. В пространстве  $t_1 x z$  эти расширяющиеся окружности образуют «конусы Маха» с осями, параллельными положительному направлению оси  $t_1$ , и с вершинами, лежащими на пунктирных «линиях Маха» (фиг. 6-10).



Фиг. 6-10. След мгновенно начавшего двигаться профиля в плоскости  $t_1 x$ .

Имея в виду вышеуказанные факты, сравним дифференциальное уравнение (6-182а) с уравнением (6-44). Мы обнаружим, что эти уравнения аналогичны друг другу во всем, за исключением того, что роль переменных  $x$  и  $y$  здесь играют соответственно  $t_1$  и  $x$ , а число Маха равно  $\sqrt{2}$ . Рассматривая направление оси  $t_1$  как новое направление полета крыла в установившемся трехмерном сверхзвуковом потоке и обращаясь к фиг. 6-10, мы видим, что



Фиг. 6-11. Четыре области срединной поверхности крыла, полученного с помощью сверхзвуковой аналогии в плоскости  $t_1 x$ . Показаны точки, типичные для трех из этих областей, с соответствующими областями интегрирования (заштриховано).

граничные условия в точности совпадают с граничными условиями, соответствующими случаю конца крыла со стреловидностью вперед, при угле стреловидности, равном

$$\Lambda = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{M}\right), \quad (6-183)$$

причем крыло обрезано перпендикулярно к направлению полета. Здесь  $M$  не является больше числом Маха соответствующего установившегося течения, которое равно  $\sqrt{2}$ . Все вспомогательные граничные условия для двух задач находятся в полном соответствии. Возмущенная часть пространства  $t_1 x z$  заключена внутри соответствующих конусов Маха с углами при вершинах, равными  $90^\circ$ ; разрыв давления за пределами срединной поверхности должен быть равен нулю; наконец, возле дозвуковой задней кромки необходимо выполнение гипотезы Кутта.



Из формулы (6-78) мы получим решение эквивалентной задачи об установившемся течении, заменяя местный угол атаки  $\partial z_a / \partial x$  величиной  $w_a / U$  и выполняя необходимые замены независимых переменных

$$\varphi'(t_1, x, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{R'_a} \int \frac{w_a(\tau_1, \xi) d\tau_1 d\xi}{\sqrt{(t_1 - \tau_1)^2 - [(x - \xi)^2 + z^2]}}. \quad (6-184)$$

Формула (6-184) справедлива лишь для тех областей интегрирования  $R'_a$ , для которых пригоден метод источников или его обобщения, данные Эвардом.

В качестве примера применим эту аналогию к расчету распределения давления, подъемной силы и момента в случае переходного движения, представляющего собой вертикальное поступательное перемещение крыла, для которого

$$w_a = -\dot{h}_0. \quad (6-185)$$

Положив  $z = 0$ , мы найдем  $\varphi'(t_1, x, 0)$  для областей срединной поверхности, изображенных на фиг. 6-11. Там же показаны точки, характерные для трех из этих областей, и сплошные линии, ограничивающие определяемые теоремой Эварда площади интегрирования. Для точки 1 в области, где крыло можно рассматривать как двумерное, формула (6-184) записывается в виде

$$\varphi'_1(t_1, x, 0) = \frac{\dot{h}_0}{\pi} \int_0^{t_1} \int_{x-(t_1-\tau_1)}^{x+(t_1-\tau_1)} \frac{d\xi d\tau_1}{\sqrt{(t_1 - \tau_1)^2 - (x - \xi)^2}} = \dot{h}_0 t_1. \quad (6-186)$$

Для точки 2, находящейся в зоне влияния дозвуковой передней кромки, найдем

$$\begin{aligned} \varphi'_2(t_1, x, 0) &= \frac{\dot{h}_0}{\pi} \left\{ \int_{(t_1-x)/(1+M)}^{t_1} \int_{x-(t_1-\tau_1)}^{x+(t_1-\tau_1)} \frac{d\xi d\tau_1}{\sqrt{(t_1 - \tau_1)^2 - (x - \xi)^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{(t_1-x)/(1+M)} \int_{-\tau_1-(t_1-x)\left(\frac{M-1}{M+1}\right)}^{x-(t_1-\tau_1)} \frac{d\xi d\tau_1}{\sqrt{(t_1 - \tau_1)^2 - (x - \xi)^2}} \right\} = \\ &= \dot{h}_0 \left[ t_1 - \frac{2t_1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t_1 - x}{x + Mt_1}} \right] + \frac{2\dot{h}_0}{\pi(1+M)} \sqrt{(x + Mt_1)(t_1 - x)}. \quad (6-187) \end{aligned}$$

Выражение для давления возмущения на поверхности крыла получается, если положить в формуле (6-10а)  $U = 0$  и вместо  $t$  подставить  $t_1$ :

$$p - p_\infty = -\rho_\infty \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = -\rho_\infty a_\infty \frac{\partial \varphi'}{\partial t_1}. \quad (6-188a)$$

Разделив результат на действующее в полете динамическое давление, получим:

$$\frac{p - p_\infty}{\left(\frac{1}{2} \rho_\infty\right) U^2} = -\frac{2}{UM} \frac{\partial \varphi'}{\partial t_1}. \quad (6-188b)$$

Из антисимметричного характера течения следует, что

$$\frac{p_U - p_L}{\left(\frac{1}{4} \rho_\infty\right) U^2} = -\frac{4}{UM} \frac{\partial \varphi'(t_1, x, 0)}{\partial t_1}. \quad (6-189)$$

Используя формулу (6-186), из уравнения (6-189) получаем:

$$\frac{(p_U - p_L)_1}{\left(\frac{1}{2} \rho_\infty\right) U^2} = -\frac{4}{M} \frac{\dot{h}_0}{U}. \quad (6-190)$$

Заметим, что во всей области, где эквивалентное крыло со стреловидностью (вперед) можно рассматривать как двумерное, значение мгновенно возникающего



давления определяется уравнением (6-169). Справедливость этого утверждения видна из физической картины явления; так как никакие сигналы от передней или задней кромок не способны достичь частиц газа в этой области, то течение получается точно таким, какое было бы создано поршнем неограниченных размеров.

В области точки 2 формулы (6-189) и (6-187) приводят к уравнению

$$\frac{(p_U - p_L)_2}{\left(\frac{1}{2} \rho_\infty\right) U^2} = -\frac{8}{\pi M} \frac{\dot{h}_0}{U} \left[ \frac{M}{1+M} \sqrt{\frac{t_1 - x}{x + Mt_1}} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x + Mt_1}{t_1 - x}} \right]. \quad (6-191)$$

При помощи развития приемов Эварда, не изложенного в п. 6-3, Ломакс и др. [6-37] определили, что давления в областях точек 3 и 4 выражаются следующим образом:

$$\frac{(p_U - p_L)_3}{\left(\frac{1}{2} \rho_\infty\right) U^2} = -\frac{\dot{h}_0}{U} \left\{ \frac{8}{\pi(1+M)} \sqrt{\frac{t_1 - x}{x + Mt_1}} + \right. \\ \left. + \frac{4}{\pi M} \left[ \operatorname{arc} \sin \left( \frac{2x - t_1(1-M)}{t_1(1+M)} \right) + \operatorname{arc} \sin \left( \frac{2(2b-x) - t_1(1+M)}{t_1(1-M)} \right) \right] \right\}, \quad (6-192)$$

$$\frac{(p_U - p_L)_4}{\left(\frac{1}{2} \rho_\infty\right) U^2} = -\frac{8}{\pi M} \frac{\dot{h}_0}{U} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{x + Mt_1 - 2b}{t_1(M-1)}}. \quad (6-193)$$

Имея в своем распоряжении уравнения (6-190) — (6-193), мы можем рассчитать подъемную силу и момент на единицу размаха профиля как функции времени. Строго говоря, имеются два интервала изменения  $t_1$ , в которых эти вычисления должны производиться отдельно. Первый из них, от  $t_1 = 0$  до  $b$ , требует интегрирования по  $x$  в пределах областей 2, 1 и 4; второй, от  $t_1 = b$  до  $2b/(1+M)$ , требует интегрирования в пределах областей 2, 3 и 4. К счастью, выражения для обоих интервалов оказываются одинаковыми и имеют следующий вид [6-37]:

$$L'_T(t_1) = - \int_{-Mt_1}^{2b-Mt_1} [p_U - p_L] dx = \frac{2\rho_\infty U^2 (2b)}{M} \frac{\dot{h}_0}{U} \left[ 1 - \frac{t_1}{2b} (1-M) \right], \quad (6-194)$$

$$M'_{yT}(t_1) = \int_{-Mt_1}^{2b-Mt_1} [p_U - p_L] [x + Mt_1] dx = \\ = -\frac{\rho_\infty U^2 (2b)^2}{M} \frac{\dot{h}_0}{U} \left[ 1 - \frac{t_1}{2b} (1-M) + \frac{t_1^2 M}{8b^2} (M-2) \right] \quad (6-195)$$

при

$$0 \leq t_1 \leq \frac{2b}{1+M}.$$

Сравнивая формулы (6-194) и (6-195) с формулами (6-147) и (6-148) и имея при этом в виду, что

$$s = \frac{Ut}{b} = \frac{Mt_1}{b}, \quad (6-196)$$

находим следующие выражения для безразмерных переходных функций:

$$\varphi_c(s) = \frac{2}{\pi M} \left[ 1 - \frac{s}{2M} (1-M) \right], \quad (6-197)$$

$$\varphi_{cM}(s) = -\frac{1}{\pi M} \left[ 1 - \frac{s}{2M} (1-M) + \frac{s^2}{8M} (M-2) \right] \quad (6-198)$$

при

$$0 \leq s \leq \frac{2M}{1+M}.$$

В работе [6-37] показано, как тем же путем получают выражения для переходных подъемной силы и момента для случая поворота профиля относительно оси, проходящей по передней кромке. Окончательные выражения при принятых нами обозначениях имеют вид

$$L'_q(t_1) = \frac{2\rho_\infty U^2 (2b)}{M} \left( \frac{q_{0b}}{U} \right) \left[ 1 + \frac{t_1}{2b} (M - 1) + \frac{t_1^2}{4b^2} \left( M - \frac{M^2}{2} \right) \right]. \quad (6-199)$$

$$M'_{yq}(t_1) = -\frac{4\rho_\infty U^2 (2b)^2}{3M} \left( \frac{q_{0b}}{U} \right) \left\{ 1 - \frac{3t_1}{4b} (1 - M) + \frac{3t_1^2}{32b^2} (1 - M)^2 + \right. \\ \left. + \frac{t_1^3}{16b^3} \left[ M + \frac{1}{4} (1 - M)^3 \right] \right\} \quad (6-200)$$

при

$$0 \leq t_1 \leq \frac{2b}{1+M}.$$

Сравнивая эти формулы с формулами (6-149) и (6-150), получаем выражения для безразмерных переходных функций

$$\varphi_{cq}(s) = \frac{1}{\pi M} \left[ 1 - \frac{s}{2M} (1 - M) + \frac{s^2}{4M} \left( 1 - \frac{M}{2} \right) \right], \quad (6-201)$$

$$\varphi_{cMq}(s) = -\frac{2}{3\pi M} \left\{ 1 - \frac{3s}{4M} (1 - M) + \frac{3s^2}{32M^2} (1 - M)^2 + \right. \\ \left. + \frac{s^3}{16M^3} \left[ M + \frac{1}{4} (1 - M)^3 \right] \right\} \quad (6-202)$$

при

$$0 \leq s \leq \frac{2M}{1+M}.$$

Хотя метод сверхзвуковой аналогии можно применять для несколько ограниченного интервала значений  $s$ , мы дали здесь описание этого метода по двум причинам. Прежде всего при достаточных усилиях можно расширить интервал его применимости до значения  $s = 2M/(1 - M)$ , благодаря чему при числе Маха, близком к единице, может быть охвачена вся область применимости линеаризованной теории. Применяя способ Гудмена [6-38] с использованием интегральных уравнений, можно дойти до очень больших значений  $s$ , лишь бы хватило терпения у лица, производящего интегрирование. Однако даже и во втором интервале изменения  $s$  появляются интегралы, которые не могут быть выражены в известных функциях (см. [6-37]), так что, естественно, для решения переходных задач при дозвуковом обтекании мы обращаемся к интегралу Фурье. Это не означает, что сверхзвуковая аналогия не имеет других, более плодотворных, приложений. Например, мгновенно возникающее движение при сверхзвуковых скоростях имеет аналогом обтекание конца крыла со стреловидностью вперед и со сверхзвуковыми кромками. Непосредственное применение метода источников дает простые выражения для переходных функций во всем интервале изменения  $s$ . Пока не составлены более подробные таблицы аэродинамических коэффициентов, схема сверхзвуковой аналогии, по-видимому, дает единственный строгий метод исследования некоторых других нестационарных явлений при дозвуковом полете, как например вход в резкоограниченный порыв и мгновенный поворот закрылка.

На расстояниях от точки начального положения, превышающих примерно половину длины хорды, функции  $\varphi_c(s)$ ,  $\varphi_{cM}(s)$ ,  $\varphi_{cq}(s)$  и  $\varphi_{cMq}(s)$  для дозвуковых профилей наиболее эффективно рассчитываются с помощью интеграла Фурье. Так как общие соотношения между исходными данными (движение) и результирующими данными (аэродинамическая нагрузка) одинаковы для любой линейной системы, то соответствующие формулы для профиля в сжимае-

мом потоке можно вывести с помощью прямого сравнения со случаем несжимаемого потока. В п. 5-7 мы показали, что если подъемная сила, проходящая через точку трех четвертей хорды, для простого гармонического изменения скорости выражается в виде

$$L(k) = 2\pi \frac{\rho}{2} U^2 (2b) \left( \frac{-w_{\frac{3}{4}c}}{U} \right) [F(k) + iG(k)], \quad (6-203)$$

то соответствующая сила, обусловленная импульсивным движением,

$$\frac{-w_{\frac{3}{4}c}}{U} = \alpha_0 l(s), \quad (6-204)$$

будет

$$L(s) = 2\pi \frac{\rho}{2} U^2 (2b) \alpha_0 \varphi(s). \quad (5-367)$$

Здесь

$$\varphi(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F(k)}{k} \sin ks dk = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G(k)}{k} \cos ks dk \quad (5-369)$$

при  $s > 0$ . Эта подъемная сила не включает, конечно, доли, обусловленной бесциркуляционным потоком, которая при  $s = 0$  бесконечно велика.

Не делая дальнейших ссылок на аэродинамическую теорию, можно по аналогии утверждать, что подобный результат справедлив для случая сжимаемого потока. Предположим, что для случая вертикального перемещения по простому гармоническому закону

$$h = \bar{h} e^{i\omega t} = \bar{h} e^{iks} \quad (6-205)$$

результатирующая подъемная сила на единицу размаха выражается в виде

$$\begin{aligned} L'_T(k) &= 2\pi \frac{\rho_{\infty}}{2} U^2 (2b) \left( \frac{\dot{h}}{U} \right) [F_c(k) + iG_c(k)] = \\ &= 2\pi \frac{\rho_{\infty}}{2} U^2 2ik \bar{h} e^{iks} [F_c(k) + iG_c(k)]. \end{aligned} \quad (6-206)$$

Следовательно, импульсивное вертикальное перемещение, равное  $\dot{h}_0/U$ , должно приводить к следующему результату:

$$L'_T(s) = 2\pi \frac{\rho_{\infty}}{2} U^2 (2b) \left( \frac{\dot{h}_0}{U} \right) \varphi_c(s), \quad (6-147)$$

где

$$\varphi_c(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F_c(k)}{k} \sin ks dk = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G_c(k)}{k} \cos ks dk. \quad (6-207)$$

Подобным же образом, если другие выражения подъемной силы и момента в случаях вертикального перемещения и поворота относительно передней кромки по простому гармоническому закону имеют вид

$$M'_{yT}(k) = 2\pi \frac{\rho_{\infty}}{2} U^2 (2b)^2 \left( \frac{\dot{h}}{U} \right) [M_c(k) + iN_c(k)], \quad (6-208)$$

$$L'_q(k) = 4\pi \frac{\rho_{\infty}}{2} U^2 (2b) \left( \frac{qb}{U} \right) [F_{cq}(k) + iG_{cq}(k)], \quad (6-209)$$

$$M'_{yq}(k) = 4\pi \frac{\rho_{\infty}}{2} U^2 (2b)^2 \left( \frac{qb}{U} \right) [M_{cq}(k) + iN_{cq}(k)], \quad (6-210)$$

то соответствующие переходные функции в формулах (6-148)—(6-150) должны выражаться так:

$$\varphi_{cM}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{M_c(k)}{k} \sin ks \, dk = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{N_c(k)}{k} \cos ks \, dk, \quad (6-211)$$

$$\varphi_{cq}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F_{cq}(k)}{k} \sin ks \, dk = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G_{cq}(k)}{k} \cos ks \, dk, \quad (6-212)$$

$$\varphi_{cMq}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{M_{cq}(k)}{k} \sin ks \, dk = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{N_{cq}(k)}{k} \cos ks \, dk. \quad (6-213)$$

Применение формул (6-211)—(6-213) ограничено пределом  $s > 0$ .

Мазельский и Дришлер ([6-34], [6-35] и [6-36]) произвели численное интегрирование в формулах (6-207) и (6-211)—(6-213) для чисел Маха 0,5, 0,6 и 0,7. В каждом случае более подходящим является интеграл, содержащий функцию  $F$  или  $M$ , так как его подынтегральная часть не имеет особенностей при  $k=0$ , тогда как второй интеграл имеет логарифмическую особенность. Принципиальная трудность при оценке этих интегралов связана с тем, что существующие таблицы для простого гармонического движения не являются полными, особенно для двух меньших чисел Маха.

В работе [6-36] эта трудность преодолена с помощью процесса оценки значений  $F_c(k)$  для больших  $k$ . Можно обратить представление функций  $\varphi_c(s)$  с помощью интеграла Фурье, так что  $\varphi_c(s)$  появится под знаком интеграла, а  $F_c(k)$  — вне его. Точное решение для переходной функции известно в пределах между  $s=0$  и  $2M/(1+M)$ , а важная теорема из теории преобразований Фурье позволяет затем с помощью численного интегрирования значений  $\varphi_c(s)$  вблизи точки  $s=0$  аппроксимировать  $F_c(k)$  для больших значений аргумента.

Таблицы Дитце [6-18], составляющие основу вычислений, даны не в тех обозначениях, какие применены в формуле (6-205). Однако соответствие между двумя вариантами обозначений легко выявляется, например,

$$F_c(k) = \frac{Z_2(k)}{2k}, \quad (6-214)$$

где  $Z_2$  представляет собой мнимую часть символа Дитце для безразмерной подъемной силы, обусловленной вертикальным смещением.

На фигурах 6-12, *a* и 6-12, *c* даны графики двух переходных функций  $\varphi_c(s)$  и  $\varphi_{cq}(s)$  как для несжимаемого потока, так и для трех дозвуковых чисел Маха. На фиг. 6-12, *b* показана переходная моментная функция для случая вертикального перемещения. Для того чтобы показать быстроту приближения момента к своему предельному нулевому значению, этот момент вычислен относительно оси, отстоящей на одну четверть хорды от передней кромки. Ординатой на фиг. 6-12, *b* служит величина

$$(\varphi_{cM})_{c/4} = \varphi_{cM}(s) + \frac{1}{4} \varphi_c(s). \quad (6-215)$$

На фиг. 6-12, *d* показана переходная функция момента поворота относительно передней кромки. Ось моментов опять проходит через точку, отстоящую на одну четверть хорды от передней кромки, так что

$$(\varphi_{cMq})_{c/4} = \varphi_{cMq}(s) + \frac{1}{4} \varphi_{cq}(s). \quad (6-216)$$

Из рассмотрения фиг. 6-12 можно сделать общий вывод о том, что влияние сжимаемости проявляется в большей постепенности приближения всех переходных величин к своим конечным значениям. Если влияние начального импульса,

имеющее преимущественно бесциркуляционный характер, постепенно сгладилось, то можно утверждать, что разность между значениями подъемной силы или момента для данного  $s$  и их конечными значениями увеличивается с увеличением числа Маха.

Оказывается, что все эти результаты Мазельского и Дришлера достаточно точны для того, чтобы ими можно было пользоваться при решении хорошо известных задач аэроупругости. Так как во многих из этих приложений применяется преобразование Лапласа по отношению к переменной, характеризующей изменение времени, то желательно иметь приближенные экспоненциальные выражения [подобные выражению (5-371)]. Такие выражения, построенные в работе [6-36], имеют следующую типичную форму:

$$\varphi(s) = b_0 + b_1 e^{-\beta_1 s} + b_2 e^{-\beta_2 s} + b_3 e^{-\beta_3 s}. \quad (6-217)$$

В табл. 6-1 указаны различные постоянные, связанные с функциями, характеризующими вертикальное движение.

Таблица 6-1

Экспоненциальные выражения переходных функций для различных чисел Маха

Переходная функция	$M$	$b$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
$\varphi_c(s)$	0	1	-0,165	-0,335	0	0,0455	0,300	—
	0,5	1,155	-0,406	-0,249	0,773	0,0754	0,372	1,890
	0,6	1,250	-0,452	-0,630	0,893	0,0646	0,481	0,958
	0,7	1,400	-0,5096	-0,567	-0,5866	0,0536	0,357	0,902
$(\varphi_{cM})_{c/4}$	0	0	0	0	0	—	—	—
	0,5	0	0,0557	-1,000	0,6263	2,555	3,308	6,09
	0,6	0	-0,100	-1,502	1,336	1,035	4,040	5,022
	0,7	0	-0,2425	0,084	-0,069	0,974	0,668	0,438

Ввиду того что весьма важно знать, какую нагрузку на самолет создает порыв при полете с большой скоростью, нам нужны сведения о переходных функциях для случая входа крыла в зону резко ограниченного порыва с учетом сжимаемости. Для двумерного течения подъемная сила и момент на единицу размаха могут выражаться, подобно зависимости (5-381a), с помощью формул

$$L(s) = 2\pi\rho_\infty U b \omega_0 \psi_c(s), \quad (6-218)$$

$$M(s) = 2\pi\rho_\infty U (2b^2) \omega_0 \psi_{cM}(s), \quad (6-219)$$

где  $\omega_0$  — вертикальная скорость в зоне однородного порыва, куда попадает передняя кромка при  $t=0$ . Для случая сверхзвукового течения известны обе функции,  $\psi_c(s)$  и  $\psi_{cM}(s)$ , но для дозвукового случая подробные числовые данные имеются только в отношении функции, характеризующей подъемную силу. С помощью метода сверхзвуковой аналогии получают следующие простые выражения, справедливые в том интервале времени после начала движения, который соответствует длине хорды

$$\psi_c(s) = \frac{s}{\pi \sqrt{M}}, \quad (6-220)$$

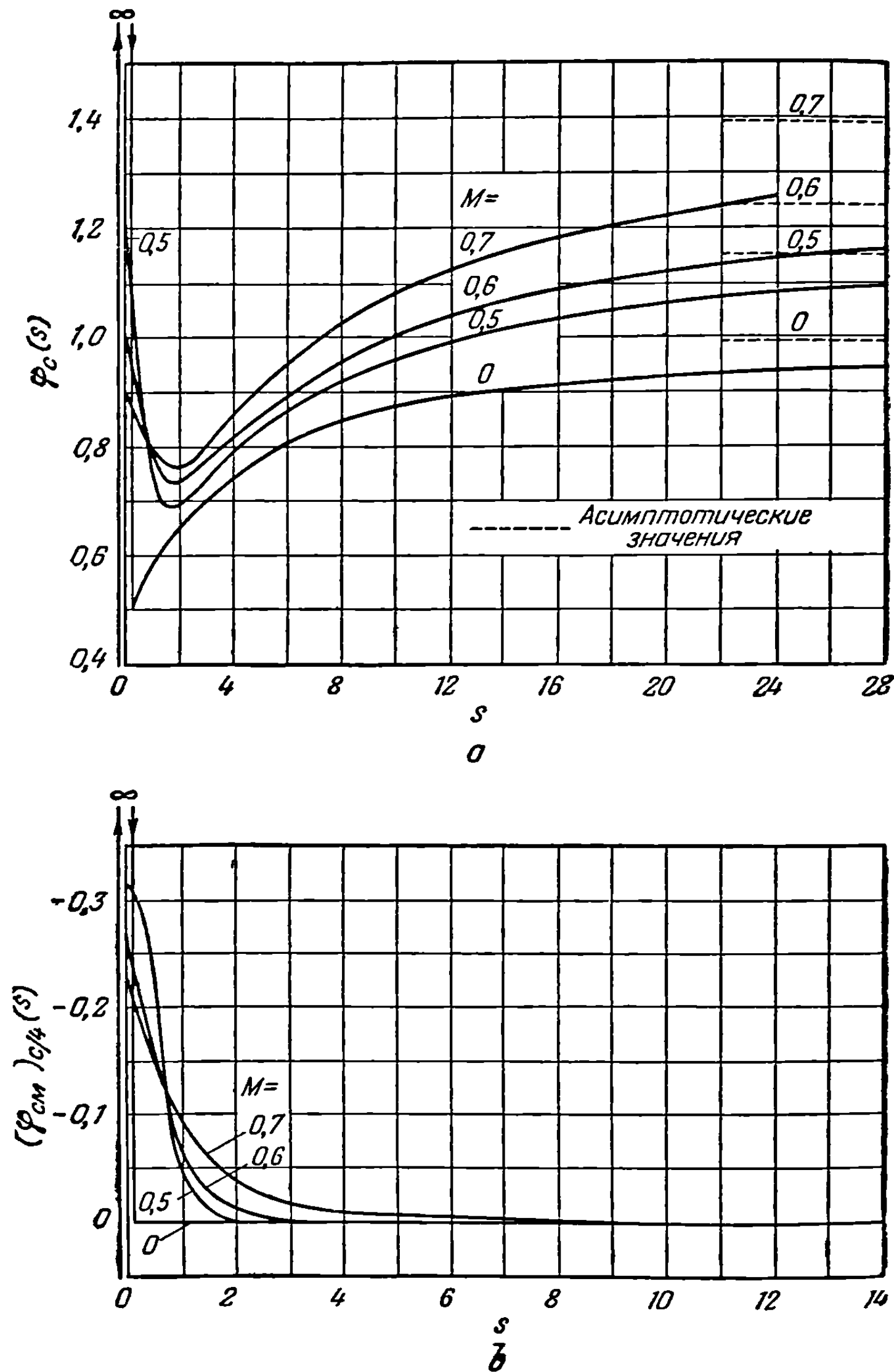
$$\psi_{cM}(s) = -\frac{s^2}{8\pi \sqrt{M}} \left[ \frac{M+1}{M} \right] \quad (6-221)$$

для

$$0 \leq s \leq \frac{2M}{1+M},$$

где момент действует относительно оси, проходящей через переднюю кромку профиля.

Мазельский в работе [6-34] предложил при рассмотрении течений сжимаемой жидкости использовать уравнение, связывающее  $\psi(s)$  с переходной функ-

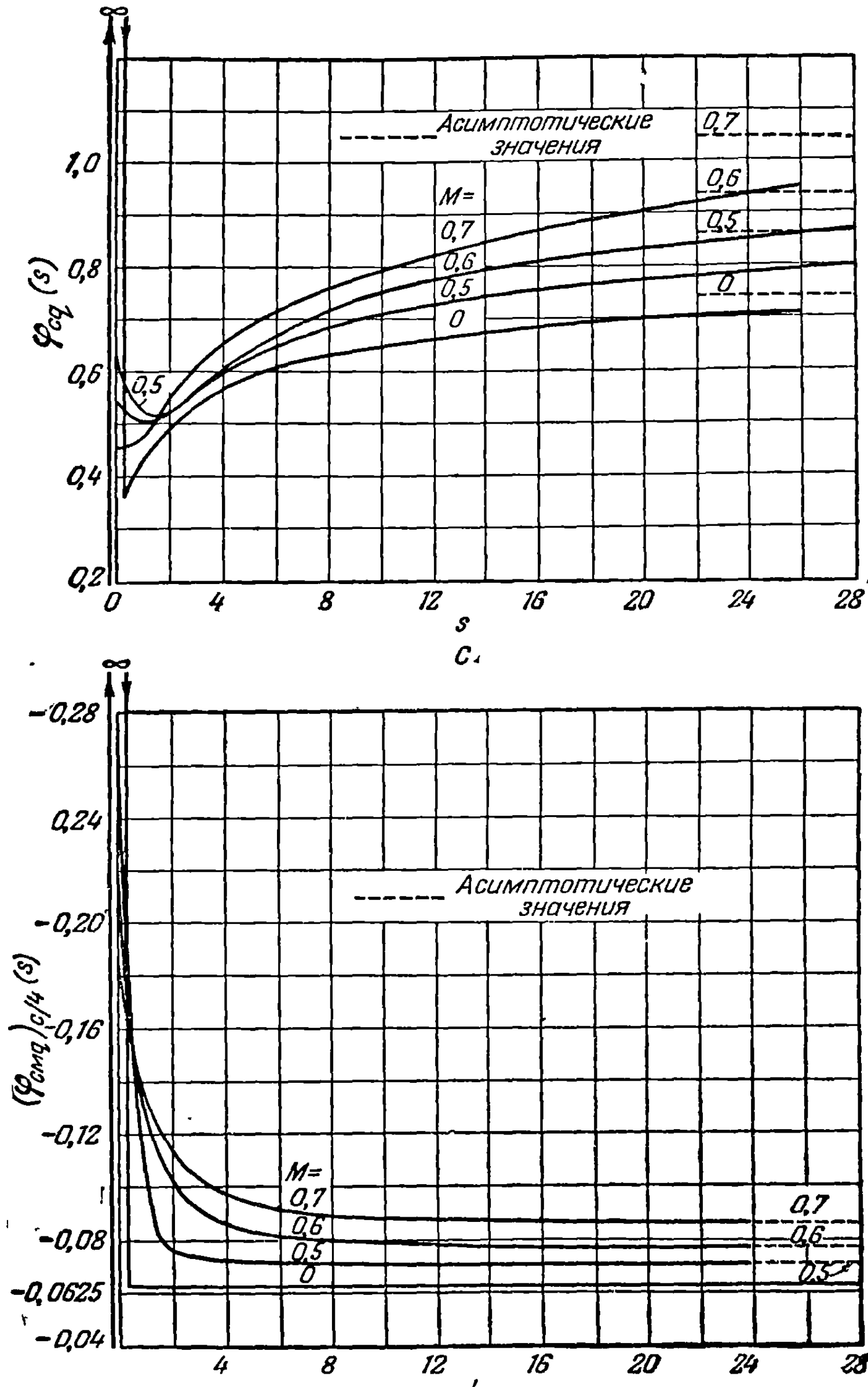


Фиг. 6-12. Переходные функции подъемной силы и момента при вертикальном перемещении и изменении угла тангажа профиля в дозвуковом сжимаемом потоке. Определения всех величин даны в тексте.

цией  $\varphi(s)$  для случая вертикального перемещения. Это уравнение было выведено Гарриком в работе [6-39]:

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^2 \varphi(s-\sigma) \sqrt{\frac{\sigma}{2-\sigma}} d\sigma \quad \text{для } s > 2. \quad (6-222)$$

Уравнение (6-222) не основывается на общих свойствах линейных систем, а получено с помощью теории малых возмущений для вихревых слоев в несжимаемой жидкости. Ввиду того что функция  $\varphi(s)$  связана только с циркуляционным движением жидкости, Мазельский предложил использовать уравнение (6-222)



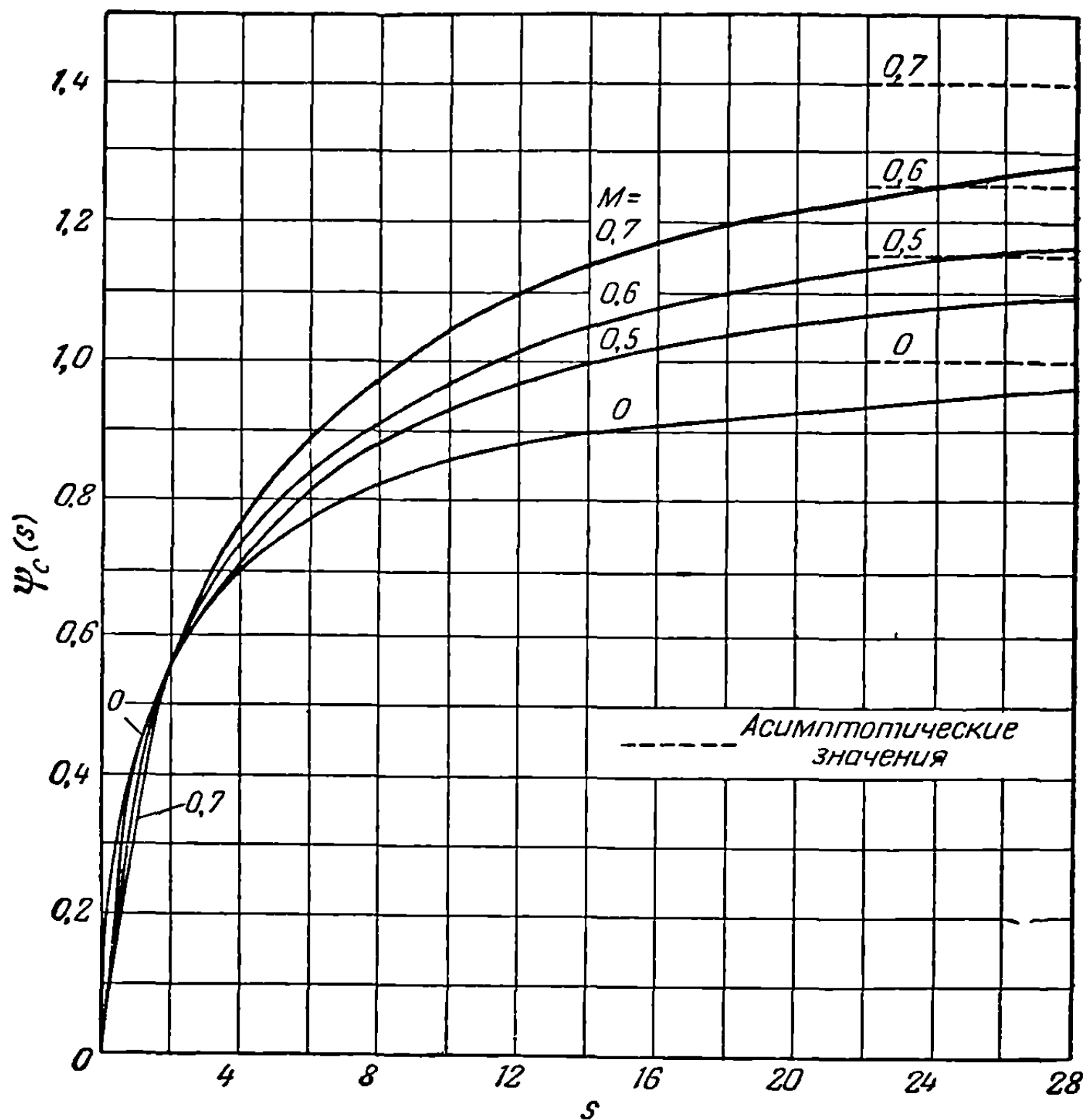
Фиг. 6 — 12 (продолжение).

для установления приближенной зависимости между  $\varphi_e(s)$  и  $\psi_e(s)$  после затухания бесциркуляционного течения. Используя в качестве критерия затухания приближение центра давления к точке одной четверти хорды, он делает вывод, что это имеет место при значениях, превышающих  $s=4$ , поэтому имеется возможность дать оценку функции  $\psi_e(s)$  при  $s \geq 6$ .

На фиг. 6-13 показаны кривые  $\psi_e(s)$  (взяты из работы [6-36]) для чисел Маха: 0, 0,5, 0,6 и 0,7, вычисленные путем комбинирования уравнений (6-220) и (6-222) и интерполяции. Для функции  $\psi_{\text{сМ}}(s)$  подобных данных не имеется.



Однако поскольку уравнение (6-221) показывает, что при  $s = 2M/(M+1)$  переходная подъемная сила проходит через точку одной четверти хорды, то, по-видимому, есть основание предполагать, что она приложена в этой точке в течение почти всего времени маневра. Более того, асимптотическое значение подъемной силы, созданной порывом, равно тому, какое получается в случае плоской пластинки под углом атаки, равным  $\omega_0/U$ , так что и в этих условиях подъемная сила проходит через точку одной четверти хорды.



Фиг. 6-13. Переходная функция подъемной силы для случая входа в зону резко ограниченного порыва в дозвуковом сжимаемом потоке. Определения символов даны в тексте.

В табл. 6-2 приводятся постоянные в экспоненциальных приближениях функций  $\psi_c(s)$  для различных чисел Маха. Буквенные обозначения постоянных соответствуют обозначениям формул (6-217). Очевидно, что асимптотические значения получаются такими же, как и для  $\varphi_c(s)$ .

Таблица 6-2

Экспоненциальное выражение переходной функции  $\psi_c(s)$  для случая входа в зону резко ограниченного порыва при различных числах Маха

$M$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
0	1	-0,500	-0,500	0	0,130	1,000	—
0,5	1,155	-0,450	-0,470	-0,235	0,0716	0,374	2,165
0,6	1,250	-0,410	-0,538	-0,302	0,0545	0,257	1,461
0,7	1,400	-0,563	-0,645	-0,192	0,0542	0,3125	1,474

Более точные вычисления функций  $\psi_c(s)$  и  $\psi_{cM}(s)$  должны основываться на наложении с помощью интеграла Фурье подъемных сил и моментов, обусловленных синусоидальным порывом. Как показано в п. 5-7, эта задача связана с выполнением вдоль хорды профиля следующего граничного условия:

$$\bar{w}_a(x^*) = -\bar{w}_G e^{-ikx^*}, \quad (5-375)$$

где  $x^* = x/b$ . Выражение (5-375) можно подставить в интегральное уравнение Поссио (6-111) и определить распределение давления при помощи одного из стандартных методов решения. При другом способе, когда применяются функции Матье, граничное условие Рейсснера (6-130) принимает вид

$$\frac{1}{\sin \zeta} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} = -\frac{e^{-i \frac{k \cos \zeta}{1-M^2}}}{\sqrt{1-M^2}} b \bar{w}_G = g(\zeta) \quad \text{для } \xi = 0. \quad (6-223)$$

Так как это условие связано лишь со сравнительно простой бесциркуляционной частью потока и при вычислении интеграла в формуле (6-137) не возникает трудностей, больших, чем при рассмотрении движения жесткого профиля, то этот подход оказывается более эффективным, чем подход Поссио. Действительно, вычисления для случая колебательного движения по вертикали дают непосредственно значение потенциала скоростей при синусоидальном порыве с видоизмененным значением приведенной частоты.

Независимо от способа их вычисления выражения для подъемной силы и момента в случае простого гармонического движения можно записать в виде

$$L(k) = 2\pi\rho_\infty U b \bar{w}_G [F_G(k) + iG_G(k)] e^{iks}, \quad (6-224)$$

$$M(k) = 2\pi\rho_\infty U (2b^2) \bar{w}_G [M_G(k) + iN_G(k)] e^{iks}. \quad (6-225)$$

Переходные нагрузки численно определяются с помощью интегралов Фурье, аналогичных интегралу в формуле (5-381b); эти интегралы можно сохранить неизменными при распространении их на случай течения с учетом сжимаемости.

**6-6. Колебания профилей при сверхзвуковых скоростях.** Задача о малых поперечных колебаниях крыльев в сверхзвуковом полете была решена впервые весьма сложным методом [6-40] с применением интегрирования по „обходному“ пути. В работе [6-41] Гаррик демонстрирует значительно более простой метод исследования двумерного случая с помощью пульсирующих источников. Его способ мы и рассмотрим здесь в первую очередь. Разумеется, дифференциальное уравнение и основное граничное условие совпадают с уравнениями (6-1) и (5-225), которые мы и воспроизводим здесь в наиболее подходящей для сверхзвукового течения форме:

$$(M^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} + \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} + \frac{2M}{a_\infty} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial t} = 0, \quad (6-1)$$

$$w = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = \frac{\partial z_a}{\partial t} + U \frac{\partial z_a}{\partial x} = w_a(x, t) \quad \text{для } z = 0, \quad -b \leq x \leq b. \quad (5-225)$$

Зависимость функции  $w_a$  от времени мы оставляем произвольной, так как оказывается, что решение справедливо для любого малого движения. Вспомогательные граничные условия для чисел Маха, больших единицы, состоят в требовании отсутствия возмущений ( $\varphi' = 0$ ) в области впереди линий Маха, отходящих от передней кромки назад, и в требовании, чтобы в бесконечности сигналы распространялись в направлении от профиля.

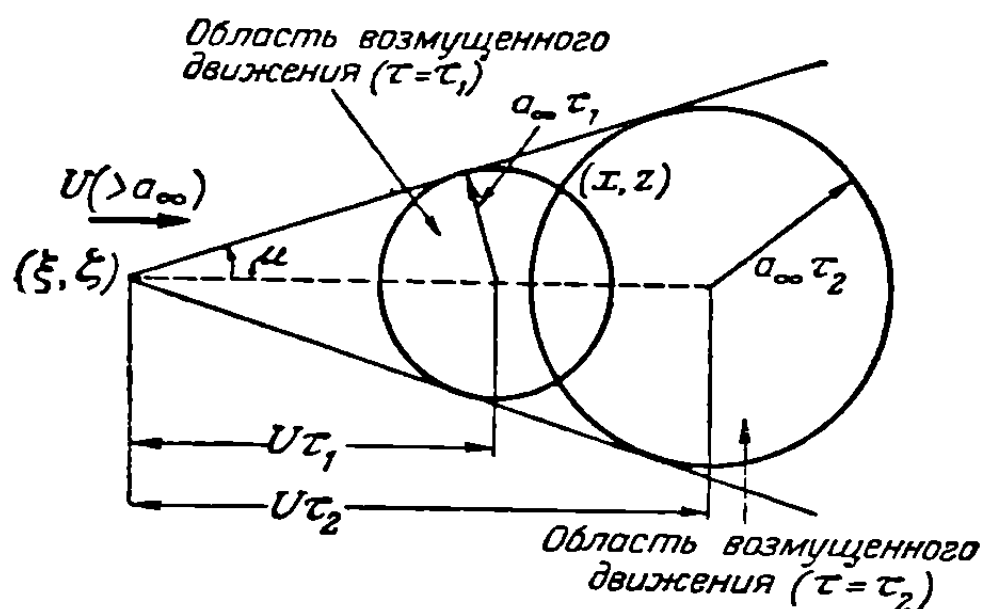
В п. 6-4 мы уже показали, что верхняя и нижняя поверхности профиля независимы одна от другой, так что интересующие нас величины могут быть определены для  $z \geq 0^+$ , а при расчете аэродинамических нагрузок мы можем полагаться на антисимметричный характер распределения давлений. Учитывая успех метода источников в задачах об установившемся движении такого же типа,

мы приходим к выводу о целесообразности использования подобного же приема и в данном случае. Пульсирующий источник, представляющий собой точную аналогию элементарного выражения для потенциала ускорений, данного формулой (6-85), оказывается здесь необходимым инструментом. Рассматривая упомянутое выражение как выражение для потенциала скоростей, удовлетворяющего уравнению (6-1) для двумерного случая, можно формулу (6-85) записать в виде

$$\varphi'_{sp}(x, z, t) = \frac{A(\xi, \zeta, T)}{\sqrt{a_\infty^2 (t-T)^2 - [(x-\xi) - U(t-T)]^2 - (z-\zeta)^2}}. \quad (6-226)$$

Возмущение, описываемое формулой (6-226), обладает многими из тех свойств, какие присущи его дозвуковому аналогу. Его влияние ощущается в точке  $(x, z)$  в момент времени  $t$  при наличии импульсного сигнала, испускаемого из точки  $(\xi, \zeta)$  в момент  $T$ . Очевидно, что в сверхзвуковом течении воздействие пульсирующего источника сможет ощущаться именно в зоне влияния точки  $(\xi, \zeta)$  вниз по потоку, представляющей собой клин, боковые грани которого располагаются сверху и снизу от плоскости  $z = \zeta$  и наклонены к ней под углами Маха. Даже в этой зоне мы имеем конечный интервал времени

$$\tau = t - T, \quad (6-227)$$



Фиг. 6-14. Два положения области возмущенного движения, создаваемого пульсирующим источником в точке  $(\xi, \zeta)$  в момент времени  $t = 0$  в двумерном сверхзвуковом потоке.

характеризующий запаздывание, с которым воспринимается импульс в точке  $(x, z)$ . Существует некоторое минимальное значение  $\tau = \tau_1$  — предел, раньше которого импульс не может достигнуть точки  $(x, z)$ ; после же некоторого  $\tau = \tau_2$  расширяющийся цилиндр, ограничивающий зону возмущения, сносится однородным потоком, превышающим скорость звука, от точки  $(x, z)$ . Эти два предельных положения цилиндра показаны на фиг. 6-14.

Все указания на такое поведение содержатся в формуле (6-226), потому что при всех значениях запаздывания  $\tau$ , не содержащихся между этими двумя пределами, подкоренное выражение становится отрицательным:

$$\tau_1 = \frac{M(x-\xi) - \sqrt{(x-\xi)^2 - (M^2-1)(z-\zeta)^2}}{a_\infty(M^2-1)} \quad (6-228a)$$

и

$$\tau_2 = \frac{M(x-\xi) + \sqrt{(x-\xi)^2 - (M^2-1)(z-\zeta)^2}}{a_\infty(M^2-1)}. \quad (6-228b)$$

Обе эти величины положительны внутри зоны влияния вниз по потоку. Они определяют два значения  $\tau$ , обращающие в нуль знаменатель в выражении (6-226). Вне зоны, ограниченной значениями  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , мы полагаем  $\varphi'_{sp}$  равным нулю. На гранях клина Маха с острием в точке  $(\xi, \zeta)$  радикал в формулах (6-228) обращается в нуль, так что  $\tau_1$  и  $\tau_2$  там равны. Этого и следовало ожидать, ибо отдельный импульс должен ощущаться там лишь одно мгновение.

Произвольное неустановившееся движение тонкого профиля может быть охарактеризовано соответственно подобранным слоем источников, расположенных вдоль средней линии профиля,  $z = 0$ ,  $-b \leq x \leq b$ . Распределение источников должно зависеть также и от времени, что можно осуществить с помощью интегрирования или по переменной  $T$ , или по вспомогательной переменной  $\tau$ , определяемой равенством (6-227). Учитывая ограничения в отношении того, какие импульсы могут оказать влияние на точку  $(x, z)$  в данный момент времени,

мы можем написать следующее выражение для потенциала возмущений слоя:

$$\varphi'(x, z, t) = \int_{-b}^{\xi_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{A(\xi, t - \tau) d\tau d\xi}{V a_\infty^2 \tau^2 - [(x - \xi) - U\tau]^2 - z^2}. \quad (6-229)$$

Для определения величины  $\xi_1$  в формуле (6-229) используется то обстоятельство, что ни один сигнал, возникающий позади точки  $(\xi_1, 0)$ , где грань направленного вверх по потоку клина Маха с острием в точке  $(x, z)$  пересекает слой, не достигает точки  $(x, z)$ . Следовательно,

$$\frac{z}{x - \xi_1} = \operatorname{tg} \mu = \frac{1}{V M^2 - 1}, \quad (6-230a)$$

или

$$\xi_1 = x - z V M^2 - 1. \quad (6-230b)$$

Так как  $\tau_1$  и  $\tau_2$  определяют значения  $\tau$ , обращающие в нуль подкоренное выражение знаменателя, то, вынося за знак интеграла коэффициент  $(U^2 - a_\infty^2)$  при квадратичном члене, мы переписываем формулу (6-229) в виде

$$\varphi'(x, z, t) = \frac{1}{V U^2 - a_\infty^2} \int_{-b}^{\xi_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{A(\xi, t - \tau) d\tau d\xi}{V (\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)}. \quad (6-231)$$

Формула (6-231) не отличается существенно от формулы (6-68) для установившегося трехмерного сверхзвукового течения. Поэтому, вводя переменную с размерностью угла

$$\tau = \frac{\tau_2 + \tau_1}{2} - \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \cos \theta, \quad (6-232)$$

мы достигаем тех же упрощений, что и в п. 6—3. Совершенно аналогично формуле (6-71) эта замена преобразует формулу (6-231) к следующему виду:

$$\varphi'(x, z, t) = \frac{1}{V U^2 - a_\infty^2} \times \\ \times \int_{-b}^{\xi_1} \int_0^\pi A \left( \xi, t - \frac{M(x - \xi)}{a_\infty(M^2 - 1)} + \frac{V(x - \xi)^2 - z^2(M^2 - 1)}{a_\infty(M^2 - 1)} \cos \theta \right) d\theta d\xi. \quad (6-233)$$

Из формулы (6-74) следует, что

$$\frac{\partial \varphi'(x, 0^+, t)}{\partial z} = - \frac{\pi}{a_\infty} A(x, t). \quad (6-234)$$

Используя то преимущество, что, как видно из последнего равенства, пульсирующий источник характеризуется однозначной функцией, применяем граничное условие (5-225) и получаем

$$A(x, t) = - \frac{a_\infty}{\pi} w_a(x, t). \quad (6-235)$$

Равенство (6-235) справедливо для верхней поверхности профиля. В нижней полуплоскости  $r_1 = x + z V M^2 - 1$ , откуда следует вывод о необходимости замены знаков в правых частях равенства (6-234) и (6-235) на обратные. На практике нет необходимости использовать это обстоятельство, так как разность давлений на верхней и нижней поверхностях профиля вдвое больше давления возмущения  $(p_U - p_\infty)$ , рассчитанного для  $z = 0^+$ . Подстановка выражения (6-235) в формулу (6-231) приводит к обращению интегрального уравнения и сводит решение задачи к интегрированию:

$$\varphi'(x, z, t) = - \frac{1}{\pi V M^2 - 1} \int_{-b}^{\xi_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{w_a(\xi, t - \tau) d\tau d\xi}{V (\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)}. \quad (6-236)$$

Первой из различных физических проблем, к рассмотрению которых можно применить формулу (6-236), была подробно исследована проблема простого гармонического колебания профиля [6-41]. В этом случае

$$\omega_a(\xi, t - \tau) = \bar{\omega}_a(\xi) e^{i\omega(t-\tau)} = \omega_a(\xi, t) e^{-i\omega\tau}. \quad (6-237)$$

После подстановки выражения (6-237) в формулу (6-236) и введения переменной  $\theta$  найдем

$$\begin{aligned} \varphi'(x, z, t) &= -\frac{1}{\pi \sqrt{M^2 - 1}} \int_{-b}^{\xi_1} \omega_a(\xi, t) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{(\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)}} d\tau d\xi = \\ &= -\frac{1}{\pi \sqrt{M^2 - 1}} \int_{-b}^{\xi_1} \omega_a(\xi, t) e^{-i\omega \left(\frac{\tau_2 + \tau_1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{i\omega \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{2}\right) \cos \theta} d\theta d\xi. \end{aligned} \quad (6-238)$$

Если в формулу (6-238) подставить значения, принимаемые величинами  $\tau_1$  и  $\tau_2$  на верхней поверхности профиля (при  $z = 0$ ), то эта формула примет вид

$$\varphi'(x, 0^+, t) = -\frac{1}{\pi \sqrt{M^2 - 1}} \int_{-b}^x \omega_a(\xi, t) e^{-i\omega \frac{(x-\xi)M}{a_\infty(M^2-1)}} \int_0^\pi e^{i\omega \frac{(x-\xi)}{a_\infty(M^2-1)} \cos \theta} d\theta d\xi. \quad (6-239)$$

Внутренний интеграл в правой части формулы (6-239) совпадает по форме с хорошо известным представлением функции Бесселя

$$J_0(q) = \pi \int_0^\pi e^{iq \cos \theta} d\theta. \quad (6-240)$$

Отсюда следует, что мы можем воспользоваться формулой (6-240) и ввести безразмерные переменные

$$x^* = \frac{x}{b}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{b}, \quad (5-96)$$

для того чтобы переписать формулу (6-239) в ее окончательном виде:

$$\varphi'(x^*, 0^+, t) = -\frac{b}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_{-1}^{x^*} \omega_a(\xi^*, t) e^{-i(\bar{\omega}/2)(x^* - \xi^*)} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{2M}(x^* - \xi^*)\right) d\xi^*. \quad (6-241)$$

Здесь  $\bar{\omega}$  представляет собой параметр, зависящий от приведенной частоты и числа Маха и играющий в теории сверхзвукового движения роль, в известной степени аналогичную роли  $k$  в той же задаче для несжимаемой жидкости

$$\bar{\omega} = \frac{2kM^2}{M^2 - 1}. \quad (6-242)$$

Выражения для распределения давления и аэродинамических нагрузок на профиле получаются как следствия выведенных ранее соотношений

$$p_U - p_L = -2\rho_\infty \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right) \Big|_{z=0^+} = -2\rho_\infty \frac{U}{b} \left( ik\varphi' + \frac{\partial \varphi'}{\partial x^*} \right) \Big|_{z^*=0^+}, \quad (6-243)$$

$$L(t) = -\int_{-b}^b [p_U - p_L] dx = -b \int_{-1}^1 [p_U - p_L] dx^*, \quad (5-106)$$

$$M_y(t) = \int_{-b}^b [p_U - p_L] [x - ba] dx = b^2 \int_{-1}^1 [p_U - p_L] [x^* - a] dx^*. \quad (5-107)$$

В качестве иллюстрации применения этих формул рассмотрим вертикальное движение профиля, описываемое уравнением

$$\omega_a = -\dot{h}(t) = -i\omega h_0 e^{i\omega t}. \quad (6-244)$$

Формула (6-241) дает следующее выражение для потенциала возмущений:

$$\begin{aligned} \varphi_h(x^*, 0^+, t) &= \frac{b\dot{h}}{\sqrt{M^2-1}} \int_{-1}^{x^*} e^{-i(\bar{\omega}/2)(x^*-\xi^*)} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{2M}(x^*-\xi^*)\right) d\xi^* = \\ &= \frac{2b\dot{h}}{\sqrt{M^2-1}} \int_0^{(x^*+1)/2} e^{-i\bar{\omega}u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M}u\right) du, \end{aligned} \quad (6-245)$$

где

$$u = \frac{x^* - \xi^*}{2}. \quad (6-246)$$

Разность давлений вычисляется по формуле (6-243):

$$\begin{aligned} p_U - p_L &= \frac{-4\rho_\infty b}{\sqrt{M^2-1}} \left\{ \ddot{h} \int_0^{(x^*+1)/2} e^{-i\bar{\omega}u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M}u\right) du + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{h}U}{2b} e^{-i\bar{\omega}[(x^*+1)/2]} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M}\left(\frac{x^*+1}{2}\right)\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6-247)$$

Подъемная сила и момент наиболее просто вычисляются с помощью непосредственного использования функции  $\varphi'_h$ . Так,

$$\begin{aligned} L_h(t) &= 2\rho_\infty b \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial \varphi'_h}{\partial t} + \frac{U}{b} \frac{\partial \varphi'_h}{\partial x^*} \right] dx^* = \\ &= 2\rho_\infty b \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^1 \varphi'_h dx^* + 2\rho_\infty U \varphi'_h(1, 0^+, t), \end{aligned} \quad (6-248)$$

где использовано то обстоятельство, что  $\varphi'_h$  у передней кромки обращается в нуль. Если в подинтегральном выражении, зависящем от  $x^*$ , произвести замену переменного

$$u' = \frac{x^* + 1}{2}, \quad (6-249)$$

то величину (6-245) можно подставить в формулу (6-248) и получить окончательное выражение

$$L_h(t) = \frac{4\rho_\infty b}{\sqrt{M^2-1}} [Ur_1\dot{h} + 2br_2\ddot{h}], \quad (6-250)$$

где

$$r_1(M, \bar{\omega}) = \int_0^1 e^{-i\bar{\omega}u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M}u\right) du \quad (6-251)$$

и

$$r_2(M, \bar{\omega}) = \int_0^1 \int_0^{u'} e^{-i\bar{\omega}u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M}u\right) du du'. \quad (6-252)$$

Аналогичная последовательность действий приводит к следующему выражению для момента:

$$M_{yh}(t) = b[a+1]L_h(t) - \frac{8\rho_\infty b^2}{\sqrt{M^2-1}} [Uq_1\dot{h} + bq_2\ddot{h}], \quad (6-253)$$

где

$$q_1(M, \bar{\omega}) = \int_0^1 u e^{-i\bar{\omega}u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M} u\right) du \quad (6-254)$$

и

$$q_2(M, \bar{\omega}) = 2 \int_0^1 \int_0^{u'} u' e^{-i\bar{\omega}u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M} u\right) du du'. \quad (6-255)$$

При простых гармонических колебаниях комбинации крыла с закрылком, описываемых уравнением (5-268), подъемная сила, момент тангажа и шарнирный момент могут быть выражены через ряд интегралов, подобных  $r_1$  и  $r_2$  и являющихся функциями числа Маха и параметра приведенной частоты для сверхзвукового движения  $\bar{\omega}$ . Как показали Гаррик и Рубинов [6-41], эти интегралы связаны алгебраическими соотношениями с четырьмя более простыми интегралами, определяемыми равенством

$$f_\lambda(M, \bar{\omega}) = \int_0^1 u^\lambda e^{-i\bar{\omega}u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M} u\right) du \quad \text{для } \lambda = 0, 1, 2 \text{ и } 3. \quad (6-256)$$

Например, как очевидно из определений (6-251) и (6-254),

$$r_1(M, \bar{\omega}) = f_0(M, \bar{\omega}) \quad (6-257)$$

и

$$q_1(M, \bar{\omega}) = f_1(M, \bar{\omega}). \quad (6-258)$$

Кроме того, если изменить порядок интегрирования в равенствах (6-252) и (6-255), то получим

$$\begin{aligned} r_2(M, \bar{\omega}) &= \int_0^1 e^{-i\bar{\omega}u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M} u\right) \left[ \int_u^1 du' \right] du = \\ &= \int_0^1 [1 - u] e^{-i\bar{\omega}u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M} u\right) du = f_0(M, \bar{\omega}) - f_1(M, \bar{\omega}), \end{aligned} \quad (6-259)$$

$$\begin{aligned} q_2(M, \bar{\omega}) &= \int_0^1 e^{-i\bar{\omega}u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M} u\right) \left[ 2 \int_u^1 u' du' \right] du = \\ &= \int_0^1 e^{-i\bar{\omega}u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M} u\right) [1 - u^2] du = f_0(M, \bar{\omega}) - f_2(M, \bar{\omega}). \end{aligned} \quad (6-260)$$

Интегралы  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  можно вычислить по известному значению  $f_0$  с помощью рекуррентной формулы. Интеграл  $f_0$  не выражается в элементарных функциях, но он был вычислен Шварцем [6-42] с помощью ряда

$$f_0(M, \bar{\omega}) = e^{-i\bar{\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{M^2 - 1}{M^2} \bar{\omega} \right)^n \frac{[J_n(\bar{\omega}) + iJ_{n+1}(\bar{\omega})]}{2^n n! (2n + 1)}. \quad (6-261)$$

Параметр  $\bar{\omega}$  появляется здесь в качестве аргумента функций Бесселя, что и объясняет его особое значение, как приведенной частоты сверхзвукового движения. Таблицы Шварца охватывают следующие значения чисел Маха:  $10/9$ ,



значений  $10/7$ ,  $5/3$ ,  $2$ ,  $5/2$ ,  $10/3$  и  $5$ , чем объясняется периодическое повторение этих значений в таблицах коэффициентов флаттера.

В работах [6-41] и [6-43] даются таблицы интегралов  $f_\lambda$  и аэродинамических нагрузок для колеблющейся комбинации крыла с закрылком при отсутствии аэродинамической балансировки и без зазора. Подъемная сила и моменты зависят от табулированных величин следующим образом:

$$L = 4\rho_\infty U^2 b k^2 \left\{ [L_1 + iL_2] \frac{h}{b} + [L_3 + iL_4] \alpha + [L_5 + iL_6] \beta \right\}, \quad (6-262)$$

$$M_y = -4\rho_\infty U^2 b^2 k^2 \left\{ [M_1 + iM_2] \frac{h}{b} + [M_3 + iM_4] \alpha + [M_5 + iM_6] \beta \right\}, \quad (6-263)$$

$$M_z = -4\rho_\infty U^2 b^2 k^2 \left\{ [N_1 + iN_2] \frac{h}{b} + [N_3 + iN_4] \alpha + [N_5 + iN_6] \beta \right\}. \quad (6-264)$$

Здесь все безразмерные действительные числа  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ , и т. д. могут вычисляться по значениям  $f_\lambda$  с помощью таких промежуточных интегралов, как  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  и  $q_4$ . Коэффициенты  $L_1$  и  $L_2$  зависят только от  $M$  и  $\bar{\omega}$ , но остальные коэффициенты зависят также и от характеристики положения оси вращения  $a$ , от безразмерной координаты оси поворота закрылка  $e$  или от обеих величин сразу. С целью составления таблиц нетрудно выделить зависимость этих коэффициентов от  $a$ . Так, коэффициенты, связанные с колебательными вертикальным перемещением и вращением относительно поперечной оси, записываются в виде

$$L_3 = L'_3 - (a + 1)L_1, \quad (6-265)$$

$$L_4 = L'_4 - (a + 1)L_2, \quad (6-266)$$

$$M_1 = M'_1 - (a + 1)L_1, \quad (6-267)$$

$$M_2 = M'_2 - (a + 1)L_2, \quad (6-268)$$

$$M_3 = M'_3 - (a + 1)[(M'_1 + L'_3) - (a + 1)L_1], \quad (6-269)$$

$$M_4 = M'_4 - (a + 1)[(M'_2 + L'_4) - (a + 1)L_2], \quad (6-270)$$

где различные коэффициенты в правых частях уже не зависят от  $a$ . Между прочим, эти последние коэффициенты были преобразованы к обозначениям работы [6-29] и опубликованы Льюком [6-30]. Таблицы для других чисел Маха даны в работе Темплеи Джана [6-47].

Вычисление и табулирование сил и моментов, обусловленных вращением закрылка, можно значительно упростить, обратив внимание на их тесную связь с силами и моментами для профиля в целом. Воздействие закрылка определяется, если исключить движение передней части профиля и определить потенциал возмущений и распределение давления, обусловливаемых движением одного лишь закрылка. Однако если оставаться в рамках линеаризованной теории, то очевидно, что вся оставшаяся часть профиля не создает возмущений, будучи неподвижной, и закрылок не может повлиять на сверхзвуковое течение впереди своей собственной оси поворота. Следовательно, закрылок ведет себя совершенно так же, как и профиль меньшего размера, имеющий хорду длиной  $b(1 - e)$  и вращающийся относительно оси, совпадающей с его передней кромкой. Число Маха потока не изменяется, но  $k$  и  $\bar{\omega}$  уменьшаются в такой же пропорции, как и хорда, т. е. в  $(1 - e)/2$  раз. Используя аналогию с формулой (6-262), мы могли бы выписать выражение для подъемной силы

закрылка (и тем самым силу, с которой закрылок действует на профиль в целом):

$$\begin{aligned}
 L_{\beta} &= 4\rho_{\infty} U^2 \left[ \frac{b(1-e)}{2} \right] \left[ \frac{\omega b(1-e)}{2} \right]^2 \times \\
 &\quad \times \left[ L_3 \left( M, \bar{\omega} \frac{1-e}{2}, a = -1 \right) + iL_4 \left( M, \bar{\omega} \frac{1-e}{2}, a = -1 \right) \right] \beta = \\
 &= 4\rho_{\infty} U^2 \left[ \frac{b(1-e)}{2} \right] \left[ \frac{\omega b(1-e)}{2} \right]^2 \times \\
 &\quad \times \left[ L'_3 \left( M, \bar{\omega} \frac{1-e}{2} \right) + iL'_4 \left( M, \bar{\omega} \frac{1-e}{2} \right) \right] \beta. \quad (6-271)
 \end{aligned}$$

Так как, согласно определению, справедливо также следующее соотношение:

$$L_{\beta} = 4\rho_{\infty} U^2 b \left( \frac{\omega b}{U} \right)^2 \left[ L_5(M, \bar{\omega}, e) + iL_6(M, \bar{\omega}, e) \right] \beta, \quad (6-272)$$

то отсюда должно следовать, что<sup>1)</sup>

$$L_5 = (M, \bar{\omega}, e) = \left[ \frac{1-e}{2} \right]^3 L'_3 \left( M, \bar{\omega} \frac{1-e}{2} \right), \quad (6-273a)$$

$$L_6 = (M, \bar{\omega}, e) = \left[ \frac{1-e}{2} \right]^3 L'_4 \left( M, \bar{\omega} \frac{1-e}{2} \right). \quad (6-273b)$$

Аналогичные выражения могут быть выведены для  $M_5$ ,  $M_6$ ,  $N_5$  и  $N_6$ . Другие коэффициенты в формуле (6-264) определяются по вычисленным интегралам с весом от распределения давления на закрылок при вертикальном перемещении профиля и повороте его вокруг поперечной оси. Хотя связь этих коэффициентов с коэффициентами для профиля и не может быть обоснована столь же простыми физическими рассуждениями, однако Гаррик и Рубинов вывели простые математические соотношения для их определения.

В связи с определением аэродинамических нагрузок при колебаниях сверхзвуковых профилей следует указать, что имеется лишь очень небольшое количество соответствующих экспериментальных данных; это в наибольшей степени относится к измерениям при числах Рейнольдса, достаточно больших для того, чтобы убедиться, что влияние вязкости исключает возможность сравнения с теорией. Некоторые авторы, в том числе Ван Дайк [6-44] и Джонс [6-45] исследовали с помощью различных приближенных методов нелинейное влияние толщины на распределение давления при колебаниях. Главнейший из их результатов, важный для исследователей флаттера, состоит в установлении заметного уменьшения демпфирования при движении с изменением угла тангажа, связанного с коэффициентом  $M_4$ . Это явление наиболее ярко выражено при небольших значениях чисел Маха и приведенных частот, а также при наиболее близком к передней кромке положении оси вращения профиля. В результате мы получаем расширение интервала неустойчивости колебаний с изменением угла тангажа по сравнению с тем, что предсказывает линейная теория. Однако для очень больших приведенных частот нелинейность может дать небольшое улучшение устойчивости.

Если и число Маха и приведенная частота достаточно велики, то к изучению колебаний профиля можно применить элементарный метод рассмотрения, предложенный Лайтхиллом [6-46]. Поток предполагается состоящим из ряда жидких пластов, каждый из которых заключен между двумя соседними плоскостями  $uz$  и движение в каждом пласте является одномерным, зависящим от  $z$ .

<sup>1)</sup> Так как в выражениях  $L'_3$  и  $L'_4$  [6-41] приведенная частота  $k$  наряду с  $\bar{\omega}$  фигурирует в явном виде, то, используя указанную аналогию, ее следует также заменить на  $k(1-e)/2$ .

Каждый такой пласт можно рассматривать как наполненный газом герметичный контейнер, совершающий равномерное перемещение; на одном из концов контейнера имеется поршень (поверхность профиля), движущийся туда и обратно и создающий последовательность простых волн сжатия и расширения. В каждый момент поршень обладает скоростью  $w_a(x, t)$ , т. е. скоростью, с которой прилегающие к профилю частицы вынуждены двигаться параллельно оси  $z$ . Применимость теории Лайтхилла не ограничена движениями с малой амплитудой, но для приложений к задачам аэроупругости мы можем линеаризировать ее, вводя ограничение

$$w_a \ll a_\infty. \quad (6-274)$$

Условие (6-274) позволяет нам после замены  $u_0$  на  $w_a(x, t)$  использовать уравнение (6-163) для определения мгновенного значения давления на верхнюю поверхность профиля, создаваемого в одномерном потоке. Из антисимметрии по отношению к координате  $z$  следует, что

$$p_U - p_L = 2\rho_\infty a_\infty w_a(x, t). \quad (6-275)$$

Отправляясь от этой однозначной зависимости, можно приближенно оценить аэродинамические коэффициенты, как, например,

$$L_1 \simeq M'_1 \simeq 0, \quad (6-276a)$$

$$L_2 \simeq L'_4 \simeq M'_2 \simeq \frac{1}{Mk}, \quad (6-276b)$$

$$L'_3 \simeq M'_3 \simeq \frac{1}{Mk^2}, \quad (6-276c)$$

$$M'_4 \simeq \frac{4}{3Mk}, \quad (6-276d)$$

для  $Mk \gg 1$ . Исследуя асимптотическое поведение функций  $f_\lambda$ , можно без труда показать, что справедливость этих выражений сохраняется и в соответствии с более точной теорией, когда члены, удерживаемые в уравнениях, имеют порядок вплоть до  $1/k^2$ . Мы можем получить некоторое представление о практическом значении требования, чтобы произведение  $Mk$  было велико, путем сравнения уравнений (6-276a)—(6-276d) с таблицами Гаррика и Рубинова. Например, при числе Маха, равном 2.5, эти формулы оказываются достаточно точными для инженерных целей (все коэффициенты, не равные нулю, отличаются от своих точных значений не более, чем на 5%), если приведенная частота имеет значение, превышающее 2. Между прочим, „поршневая теория“ Лайтхилла позволяет учитывать влияние толщины при расчете на флаттер. Таким способом при сохранении членов второго порядка в выражении для  $w_a$  было установлено, что скорости флаттера, рассчитанные для больших сверхзвуковых чисел Маха, должны быть весьма значительно уменьшены.

В нижней части диапазона приведенных частот, когда

$$\bar{\omega} \ll 1 \quad (6-277)$$

для любого числа Маха, не слишком близкого к единице, возможно и другое, еще более важное упрощение теории сверхзвукового движения. Оно основано на наблюдении того факта, что аргумент функции  $J_0$  в равенстве (6-256) всегда меньше, чем  $\bar{\omega}$ , а сама функция  $J_0$  при значении аргумента, меньшем 0,2, отличается от своего предельного значения, т. е. единицы, не более, чем на 1%. Пользуясь возможностью разложения в ряд экспоненциального множителя, мы можем написать

$$f_\lambda(M, \bar{\omega}) \simeq \int_0^1 u^\lambda [1 - i\bar{\omega}u + \dots] \cdot 1 \cdot du = \frac{1}{\lambda+1} - \frac{i\bar{\omega}}{\lambda+2} - \frac{\bar{\omega}^2}{2(\lambda+3)} + \dots \quad (6-278)$$

Для вычислений достаточно иметь три первых члена. Равенство (6-278) представляет  $f_\lambda$  как функцию одной переменной  $\bar{\omega}$  и чрезвычайно упрощает табулирование аэродинамических коэффициентов в интервале своей применимости. Так как значительная доля случаев сверхзвукового флаттера относится к значениям приведенных частот, меньшим 0,1, то формулы, основанные на равенстве (6-278), будут становиться все более полезными при увеличении числа Маха флаттера и соответственном уменьшении  $\bar{\omega}$ .

Последнее из приложений общей теории колебаний профиля в сверхзвуковом потоке дается нами потому, что оно имеет большое значение при рассмотрении задачи о порыве. Рассмотрим нагрузку, создаваемую синусоидальным порывом, для которого, как указывалось в п. 5-7, требуется следующее распределение нормальной скорости:

$$\omega_a(x^*, t) = -\bar{\omega}_G e^{-ikx^*} e^{i\omega t}. \quad (5-375)$$

Введя выражение (5-375) в формулу (6-241), получим

$$\begin{aligned} \varphi'_G(x^*, 0^+, t) &= \frac{b\bar{\omega}_G e^{i\omega t}}{\pi \sqrt{M^2-1}} \int_{-1}^{x^*} e^{-ik\xi^*} e^{-i(\bar{\omega}/2)(x^*-\xi^*)} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{2M}(x^*-\xi^*)\right) d\xi^* = \\ &= \frac{2b\bar{\omega}_G e^{i\omega t}}{\pi \sqrt{M^2-1}} e^{-ikx^*} \int_0^{(x^*+1)/2} e^{-i(\bar{\omega}u/M^2)} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M}u\right) du, \quad (6-279) \end{aligned}$$

где  $u$  определяется равенством (6-246). Для нахождения подъемной силы и момента величина (6-279) подставляется сначала в формулу (6-243), а затем в формулы (5-106) и (5-107). Подробности вычисления текущей подъемной силы указаны в равенствах

$$\begin{aligned} L_c(t) &= 2\rho_\infty U \varphi'_G(1, 0^+, t) + 2\rho_\infty b \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^1 \varphi'_G dx^* = \\ &= \frac{4\rho_\infty U b \bar{\omega}_G e^{i\omega t}}{\sqrt{M^2-1}} \left\{ e^{-ik} \int_0^1 e^{-i(\bar{\omega}/M^2)u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M}u\right) du + \right. \\ &\quad \left. + 2ik \int_0^1 e^{ik} e^{-2iku'} \int_0^{u'} e^{-i(\bar{\omega}/M^2)u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M}u\right) du du' \right\} = \\ &= \frac{4\rho_\infty U b \bar{\omega}_G e^{i\omega t}}{\sqrt{M^2-1}} \left\{ e^{-ik} \int_0^1 e^{-i(\bar{\omega}/M^2)u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M}u\right) du + \right. \\ &\quad \left. + e^{ik} \int_0^1 e^{-i(\bar{\omega}/M^2)u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M}u\right) [e^{-2iku} - e^{-2ik}] du \right\} = \\ &= \frac{4\rho_\infty U b \bar{\omega}_G e^{i\omega t}}{\sqrt{M^2-1}} e^{ik} \int_0^1 e^{-i\bar{\omega}u} J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M}u\right) du = \\ &= \frac{4\rho_\infty U b \bar{\omega}_G e^{i\omega t}}{\sqrt{M^2-1}} e^{ik} f_0(M, \bar{\omega}). \quad (6-280) \end{aligned}$$

Здесь после введения переменной  $u' = (x^* + 1)/2$  и перемены порядка интегрирования во втором интеграле мы установили, что весь первый член в фигурной скобке сокращается с частью второго члена, имеющей множителем  $e^{-2ik}$ .

Другое вычисление, проведенное таким же образом, как в равенствах (6-280), дает выражение момента тангажа относительно оси, проходящей через точку  $x = ba$ , отнесенного к единице длины размаха,

$$M_{yG}(t) = \frac{2\rho_{\infty} U b^2 \bar{w}_G e^{i\omega t}}{\sqrt{M^2 - 1}} e^{ik} [(2a + 1) f_0(M, \bar{\omega}) - f_1(M, \bar{\omega})]. \quad (6-281)$$

Первый член в формуле (6-281) можно рассматривать как характеризующий действие подъемной силы, приложенной на расстоянии одной четверти хорды от передней кромки,  $a = 1/4$ . Однако наличие функции  $f_1$  указывает на то, что порыв не создает какого-либо фиксированного центра давления независимо от частоты, как это имеет место в случае несжимаемого потока.

В заключение этого пункта, посвященного колебаниям профиля при сверхзвуковых скоростях, было бы поучительно дать обзор замечательных упрощений, которые могут достигаться с помощью преобразования Лапласа. Пусть мы имеем простое гармоническое колебательное движение

$$\varphi'(x, z, t) = \bar{\varphi}'(x, z) e^{i\omega t}; \quad (6-118)$$

такое предположение позволяет переписать дифференциальное уравнение (6-1) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}'}{\partial z^2} = M^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}'}{\partial x^2} + \frac{2Mi\omega}{a_{\infty}} \frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial x} - \frac{\omega^2}{a_{\infty}^2} \bar{\varphi}'. \quad (6-282)$$

Основное граничное условие (5-225) запишем в виде

$$\frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial z} = \bar{w}_a(x) \quad \text{для } z = 0, \quad 0 \leq x \leq 2b, \quad (6-283)$$

где для удобства преобразования Лапласа начало координат помещено у передней кромки профиля.

Как указал Стюартсон [6-48], уравнение (6-282) при применении к функциональной зависимости от  $x$  преобразования (5-401) сводится к дифференциальному уравнению, содержащему экспоненциальные функции. С этой целью введем определение

$$\bar{\varphi}^*(p, z) = \mathcal{L} \{ \bar{\varphi}'(x, z) \} = \int_0^{\infty} e^{-px} \bar{\varphi}'(x, z) dx. \quad (6-284)$$

При значениях  $x$ , меньших нуля, и  $\bar{\varphi}' = \partial \bar{\varphi}' / \partial x = 0$  вышеуказанное преобразование дает хорошо известные следствия

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{\varphi}'}{\partial x^2} \right\} = p^2 \bar{\varphi}^*, \quad (6-285)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial x} \right\} = p \bar{\varphi}^*. \quad (6-286)$$

С помощью уравнений (6-284) и (6-286) уравнение (6-282) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}^*}{\partial z^2} = \left[ p^2 (M^2 - 1) + 2p \frac{Mi\omega}{a_{\infty}} - \frac{\omega^2}{a_{\infty}^2} \right] \bar{\varphi}^* = \mu^2 \bar{\varphi}^*, \quad (6-287)$$

где

$$\mu = \sqrt{p^2 (M^2 - 1) + 2p \frac{Mi\omega}{a_{\infty}} - \frac{\omega^2}{a_{\infty}^2}}. \quad (6-288)$$

В то же время граничное условие (6-283) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\varphi}^*}{\partial z} = \bar{w}_a^*(p) \quad \text{для } z = 0. \quad (6-289)$$

При вычислении получающейся в результате преобразования Лапласа функции  $\bar{w}_a^*(p)$  для распределения вертикальной скорости безразлично, какие значения будут приписаны функции  $\bar{w}_a(x)$  позади задней кромки  $x = 2b$ . Любое верное решение описывает течение, которое в указанной области не влияет на аэродинамическую нагрузку на крыло.

О том, насколько подходит эта задача к преобразованию Лапласа, можно судить на основании двух ее особенностей, общих с задачами о переходных, зависящих от времени, процессах в линейных системах с одним определяющим параметром. Во-первых,  $\bar{\varphi}'$  обращается в нуль при  $x < 0$ , так как начало переходного процесса принято относить к моменту  $t = 0$ . Во-вторых, значения  $\bar{w}_a(x)$  позади некоторой точки неспособны повлиять на  $\bar{\varphi}'(x, z)$  впереди этой точки аналогично тому, как предстоящее в будущем изменение входного параметра системы не может повлиять на реакцию системы в моменты времени, предшествующие этому изменению.

Общее решение уравнения (6-287) выражается следующим образом (действительная часть  $\mu$  всегда положительна):

$$\bar{\varphi}^* = Ae^{\mu z} + Be^{-\mu z}. \quad (6-290)$$

Если мы ограничимся построением решения для точек, находящихся над профилем,  $z \geq 0^+$ , то член с коэффициентом  $A$  нужно будет опустить, чтобы не получить результата, неограниченно возрастающего в бесконечности. В нижнем полупространстве справедливо обратное утверждение, и мы можем написать

$$\bar{\varphi}^* = \begin{cases} Ae^{-\mu z}, & z \geq 0^+, \\ Be^{\mu z}, & z \leq 0^-. \end{cases} \quad (6-291)$$

В первом случае мы имеем

$$\frac{\partial \bar{\varphi}^*}{\partial z} = -\mu Ae^{-\mu z}, \quad (6-292)$$

так что из уравнения (6-289) получим

$$A = -\frac{\bar{w}_a^*(p)}{\mu} \quad (6-293)$$

и

$$\bar{\varphi}^*(p, z) = -\frac{\bar{w}_a^*(p)}{\mu} e^{-\mu z} \quad \text{для } z \geq 0^+. \quad (6-294)$$

Преобразование уравнения (6-294), обратное преобразованию Лапласа, для произвольных значений  $z$  затруднительно. Если, однако, мы интересуемся только точками, находящимися на поверхности профиля, то заметим, что функция

$$\bar{\varphi}^*(p, 0^+) = -\frac{\bar{w}_a^*(p)}{\mu} \quad (6-295)$$

представляет собой произведение двух простых функций  $p$ . Обращение этой функции достигается с помощью так называемой теоремы свертывания, которая дает

$$\bar{\varphi}'(x, 0^+) = -\int_0^x \bar{w}_a(\xi) \xi^{-1} \left\{ \frac{1}{\mu} \right\} d\xi. \quad (6-296)$$

Функция, получающаяся из  $1/\mu$  в результате обратного преобразования Лапласа, должна считаться здесь зависящей от аргумента  $(x - \xi)$ . Так как

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} \sqrt{\left[p + \frac{iM\omega}{a_\infty(M^2 - 1)}\right]^2 + \frac{\omega^2}{a_\infty^2(M^2 - 1)^2}}}, \quad (6-297)$$

то можно использовать две формулы из таблиц, помещенных в конце работы [6-49],

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}} \right\} = J_0(ax) \quad (6-298)$$

и

$$\mathcal{L}^{-1} \{F(p + a)\} = e^{-ax} f(x), \quad (6-299a)$$

где

$$F = \mathcal{L} \{f\}; \quad (6-299b)$$

в результате получим

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\mu} \right\} = \frac{e^{-i \frac{M\omega x}{a_\infty(M^2 - 1)}}}{\sqrt{M^2 - 1}} J_0 \left( \frac{\omega x}{a_\infty(M^2 - 1)} \right). \quad (6-300)$$

Подстановка выражения (6-300)  $\bar{\omega}$  и безразмерных переменных, связанных с  $x$ , в уравнение (6-296) дает

$$\bar{\varphi}'(x^*, 0^+) = - \frac{b}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_0^{x^*} \bar{\omega}_a(\xi^*) e^{-i(\bar{\omega}/2)(x^* - \xi^*)} J_0 \left( \frac{\bar{\omega}}{2M}(x^* - \xi^*) \right) d\xi^*. \quad (6-301)$$

Если не считать сдвига начала координат, то очевидно, что формула (6-301) идентична формуле (6-241), однако вывод последней с помощью метода пульсирующих источников отнимает значительно больше места и усилий.

**6-7. Переходные движения профиля в сверхзвуковом потоке.** Приемы для определения аэродинамических нагрузок, возникающих при произвольном неустановившемся движении профиля, недеформируемого в направлении хорды, были описаны в начальной части п. 6-5. Имея уже в своем распоряжении такие формулы, как (6-151) и (6-152), мы должны лишь вывести новые выражения для каждой из переходных функций, чтобы распространить их применимость на диапазон сверхзвуковых скоростей. Эта задача оказывается значительно более легкой, чем в случае дозвукового течения, поскольку при необходимом здесь интегрировании в формуле (6-236) можно воспользоваться подробно затабулированными функциями.

Во избежание несогласованности с нашими предшествующими выкладками сохраним те определения функций  $\varphi_c(s)$ ,  $\varphi_{cM}(s)$ ,  $\varphi_{cq}(s)$  и  $\varphi_{cMq}(s)$ , которые даны формулами (6-147) — (6-150). Наши рассуждения, касающиеся давлений, мгновенно возникающих в момент начала движения, не ограничены предположением о дозвуковой скорости движения, так что начальные значения функций для сверхзвукового движения определяются формулами (6-175) и (6-178). Асимптотические значения подъемных сил и моментов вычисляются на основании свойств сверхзвуковых профилей в установившемся движении, описанных в п. 6-3. В соответствии со сказанным, формулы (6-59) и (6-60) приводят к следующим выражениям для коэффициентов подъемной силы и момента, обусловленных изменением угла атаки  $\dot{h}_0/U$ :

$$c_l = \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\dot{h}_0}{U}, \quad (6-302)$$

$$c_m = \frac{2a}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\dot{h}_0}{U}. \quad (6-303)$$



Отсюда по аналогии с формулами (6-147) и (6-148) следует, что

$$\varphi_c(\infty) = \frac{2}{\pi \sqrt{M^2 - 1}}, \quad (6-304)$$

$$\varphi_{cM}(\infty) = \frac{-1}{\pi \sqrt{M^2 - 1}}. \quad (6-305)$$

Аналогичный вывод, основанный на подстановке выражения

$$z_a = \frac{-q_0(x+b)^2}{2U} \quad (6-306)$$

в формулы (6-56) и (6-57), дает результаты

$$\varphi_{cq}(\infty) = \frac{1}{\pi \sqrt{M^2 - 1}}, \quad (6-307)$$

$$\varphi_{cMq}(\infty) = \frac{-2}{3\pi \sqrt{M^2 - 1}}. \quad (6-308)$$

В действительности равенства (6-304), (6-305), (6-307) и (6-308) не представляют собой асимптотических формул. Они определяют подъемную силу и момент для всех моментов времени, следующих за тем, когда возмущение, обусловленное неустановившимся движением при  $t=0$ , относится сверхзвуковым потоком дальше задней кромки. Так как граница области этого возмущения определяется положением ближайшей к передней кромке точки поверхности расширяющегося цилиндра, начинающего свое движение в момент  $t=0$  от передней кромки ( $x=-b$ ), то она движется вниз по течению со скоростью  $(U - a_\infty)$  относительно профиля и для прохождения всей хорды требует интервала времени

$$\Delta t = \frac{2b}{U - a_\infty}. \quad (6-309a)$$

Соответствующее значение  $s$ , равное

$$s = \frac{U \Delta t}{b} = \frac{2M}{M-1}, \quad (6-309b)$$

указывает на тот предел, за которым все переходные функции принимают свои конечные значения.

В качестве иллюстрации математических приемов, связанных с переходными задачами для сверхзвуковых скоростей, рассмотрим случай вертикального движения профиля, для которого

$$\omega_a(x, t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -\dot{h}_0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (6-310)$$

Чтобы ввести эти значения в формулу (6-236), перепишем условия (6-310) в виде

$$\omega_a(\xi, t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ -\dot{h}_0, & t \geq \tau. \end{cases} \quad (6-311)$$

При вычислении внутреннего интеграла  $I$  в правой части формулы (6-236) мы должны рассмотреть три различных интервала изменения  $l$ . Используя для

упрощения интегрирования переменную  $\theta$ , определяемую уравнением (6-232), и полагая  $z = 0$ , находим:

$$(1) \text{ для } t < \tau_1 = \frac{x - \xi}{a_\infty (M + 1)}$$

$$I_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{w_a(\xi, t - \tau) d\tau}{V(\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)} = 0; \quad (6-312a)$$

$$(2) \text{ для } \frac{x - \xi}{a_\infty (M + 1)} = \tau_1 \leq t \leq \tau_2 = \frac{x - \xi}{a_\infty (M - 1)}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{w_a(\xi, t - \tau) d\tau}{V(\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)} = -\dot{h}_0 \int_{\tau_1}^t \frac{d\tau}{V(\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)} = \\ &= -\dot{h}_0 \int_0^{\arccos\left(\frac{\tau_2 + \tau_1 - 2t}{\tau_2 - \tau_1}\right)} d\theta = -\dot{h}_0 \arccos\left[M - \frac{a_\infty t (M^2 - 1)}{(x - \xi)}\right] \end{aligned} \quad (6-312b)$$

$$\text{и (3) для } \frac{x - \xi}{a_\infty (M - 1)} = \tau_2 \leq t$$

$$I_3 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{w_a(\xi, t - \tau) d\tau}{V(\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)} = -\dot{h}_0 \int_0^\pi d\theta = -\dot{h}_0 \pi. \quad (6-312c)$$

В итоге величина  $I$ , которую мы рассматриваем теперь как функцию  $\xi$ , принимает следующие значения:

$$I = \begin{cases} 0 & \text{для } \xi \leq x - a_\infty t (M + 1), \\ -\dot{h}_0 \arccos\left[M - \frac{a_\infty t (M^2 - 1)}{(x - \xi)}\right] & \text{для } x - a_\infty t (M + 1) \leq \xi \leq x - a_\infty t (M - 1), \\ -\dot{h}_0 \pi & \text{для } \xi \geq x - a_\infty t (M - 1). \end{cases} \quad (6-312d)$$

Как видно из равенства (6-312d), при вычислении внешнего интеграла, который дает потенциал возмущения, следует учитывать четыре возможности. В общем случае

$$\varphi'(x, 0^+, t) = -\frac{1}{\pi \sqrt{M^2 - 1}} \int_{-b}^{\infty} I(\xi, x, t) d\xi. \quad (6-313)$$

Поэтому:

$$(1) \text{ для } x \leq x - a_\infty t (M + 1) \text{ (т. е. для } t \leq 0)$$

$$\varphi'_1(x, 0^+, t) = 0; \quad (6-314a)$$

$$(2) \text{ для } -b \leq x - a_\infty t (M + 1) \text{ (т. е. для } 0 \leq t \leq \frac{x + b}{a_\infty (M + 1)})$$

$$\begin{aligned} \varphi'_2(x, 0^+, t) &= \frac{\dot{h}_0}{\pi \sqrt{M^2 - 1}} \int_{x - a_\infty t (M + 1)}^{x - a_\infty t (M - 1)} \arccos\left[M - \frac{a_\infty t (M^2 - 1)}{(x - \xi)}\right] d\xi + \\ &+ \frac{\dot{h}_0}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_{x - a_\infty t (M - 1)}^{\infty} d\xi; \end{aligned} \quad (6-314b)$$

(3) для  $-b \geq x - a_\infty t(M+1)$ , но  $-b \leq x - a_\infty t(M-1)$  (т. е. для  $\frac{x+b}{a_\infty(M+1)} \leq t \leq \frac{x+b}{a_\infty(M-1)}$ )

$$\varphi'_3(x, 0^+, t) = \frac{\dot{h}_0}{\pi \sqrt{M^2-1}} \int_{-b}^{x-a_\infty t(M-1)} \arccos \left[ M - \frac{a_\infty t(M^2-1)}{(x-\xi)} \right] d\xi + \frac{\dot{h}_0}{\sqrt{M^2-1}} \int_{x-a_\infty t(M-1)}^x d\xi \quad (6-314c)$$

и (4) для  $-b \geq x - a_\infty t(M-1)$  (т. е. для  $t \geq \frac{x+b}{a_\infty(M-1)}$ )

$$\varphi'_4(x, 0^+, t) = \frac{\dot{h}_0}{\sqrt{M^2-1}} \int_{-b}^x d\xi = \frac{\dot{h}_0 x}{\sqrt{M^2-1}}. \quad (6-314d)$$

Мы не приводим здесь детальных результатов интегрирования каждого из членов в формулах (6-314). Когда  $t \geq 0$ , распределения давлений, соответствующие формуле (6-243), выражаются так:

$$\frac{(p_U - p_L)_2}{\left(\frac{1}{2} \rho_\infty\right) U^2} = -\frac{4}{M} \frac{\dot{h}_0}{U}, \quad (6-315a)$$

$$\frac{(p_U - p_L)_3}{\left(\frac{1}{2} \rho_\infty\right) U^2} = \frac{-4\dot{h}_0/U}{\sqrt{M^2-1}} \left\{ \frac{1}{\pi} \arccos \left[ \frac{Mx + a_\infty t}{x + Ut} \right] + \frac{\sqrt{M^2-1}}{\pi M} \arccos \left[ \frac{-x}{a_\infty t} \right] \right\}, \quad (6-315b)$$

$$\frac{(p_U - p_L)_4}{\left(\frac{1}{2} \rho_\infty\right) U^2} = -\frac{4}{\sqrt{M^2-1}} \frac{\dot{h}_0}{U}. \quad (6-315c)$$

Заметим, что в правой части формулы (6-315c) стоит выражение для давления при установившемся движении. Кроме того, как и в случае дозвукового потока, давление во всей области 2 равно давлению, связанному с мгновенно возникающим движением поршня со скоростью  $\dot{h}_0$ .

Выражения для конечных значений подъемной силы и момента определяются как обычно, путем подстановки выражений для  $(p_U - p_L)$  из уравнений (6-315) в формулы (5-106) и (5-107). После приведения этих выражений к формам безразмерных переходных функций, определяемых уравнениями (6-147) и (6-148), они принимают следующий вид:

$$\varphi_c(s) = \begin{cases} \frac{2}{\pi M} & \text{для } 0 \leq s \leq \frac{2M}{M+1}, \\ \frac{2}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{M} \arccos \left[ M - \frac{2M}{s} \right] + \frac{\arccos \left[ \frac{s}{2M} + M - \frac{sM}{2} \right]}{\sqrt{M^2-1}} + \frac{1}{M} \sqrt{\frac{s^2}{4M^2} - \left(1 - \frac{s}{2}\right)^2} \right\} & \text{для } \frac{2M}{M+1} \leq s \leq \frac{2M}{M-1}, \\ \frac{2}{\pi \sqrt{M^2-1}} & \text{для } \frac{2M}{M-1} \leq s. \end{cases} \quad (6-316)$$

$$\varphi_{cM}(s) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi M} \left(2 - \frac{s^2}{4M^2}\right) & \text{для } 0 \leq s \leq \frac{2M}{M+1}, \\ -\frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{M} \left(1 - \frac{s^2}{8M^2}\right) \arccos \left[M - \frac{2M}{s}\right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{M^2-1}} \arccos \left[\frac{s}{2M} + M - \frac{sM}{2}\right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4M} (2+s) \sqrt{\frac{s^2}{4M^2} - \left(1 - \frac{s}{2}\right)^2} \right\} \\ \text{для } \frac{2M}{M+1} \leq s \leq \frac{2M}{M-1}, \\ -\frac{1}{\pi \sqrt{M^2-1}} & \text{для } \frac{2M}{M-1} \leq s. \end{cases} \quad (6-317)$$

Ломэкс и др. [6-37] получили формулы (6-316) и (6-317), применяя метод сверхзвуковой аналогии (см. п. 6-5), особенно удобный для определения переходных функций при сверхзвуковом движении. С помощью последовательности выкладок, аналогичных описанным выше, они вывели следующие формулы, справедливые для изменения угла тангажа при повороте относительно передней кромки профиля:

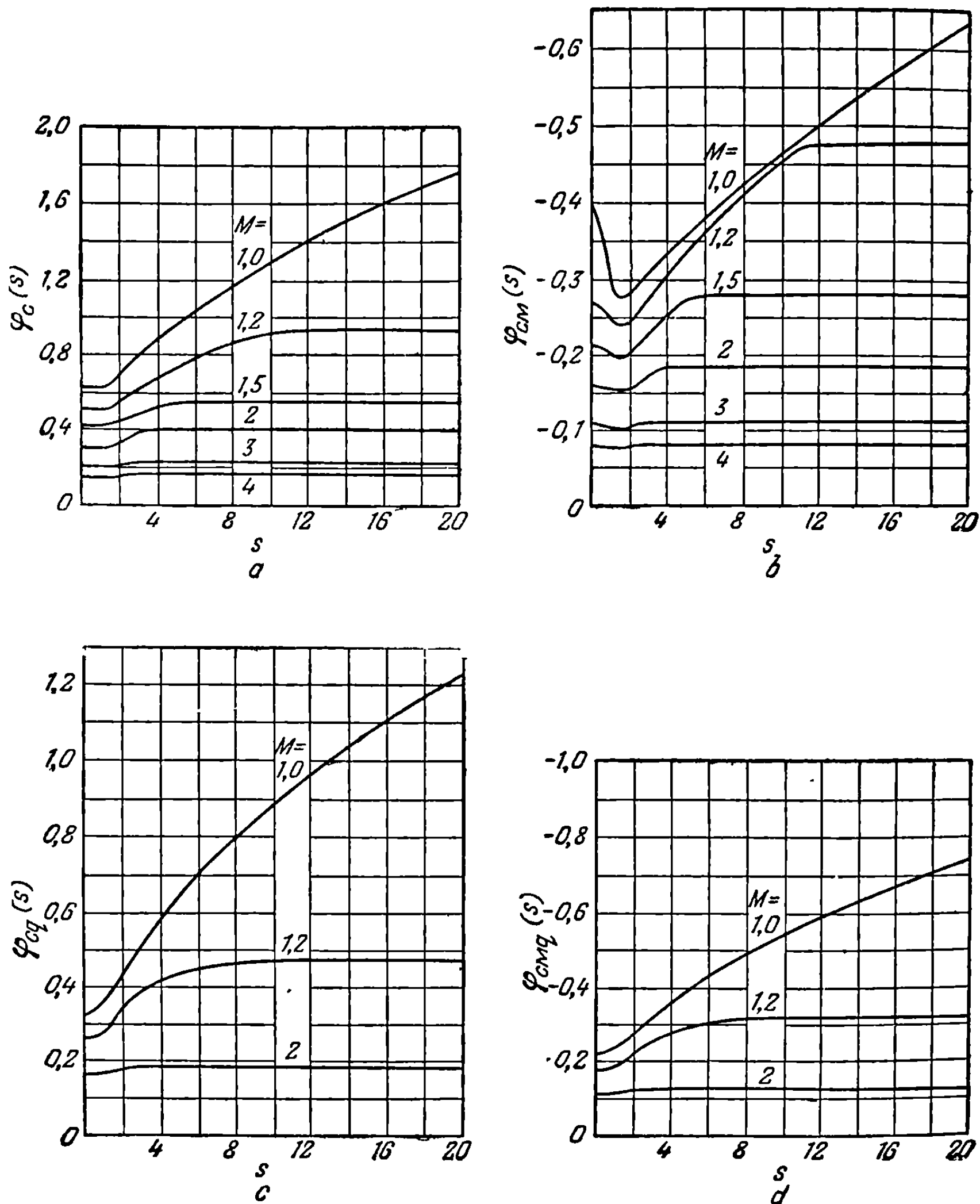
$$\varphi_{cq}(s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi M} \left[1 + \frac{s^2}{8M^2}\right] & \text{для } 0 \leq s \leq \frac{2M}{M+1}, \\ \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{M} \left(1 + \frac{s^2}{8M^2}\right) \arccos \left[M - \frac{2M}{s}\right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{M^2-1}} \arccos \left[\frac{s}{2M} + M - \frac{sM}{2}\right] + \frac{(6-s)}{4M} \sqrt{\frac{s^2}{4M^2} - \left(1 - \frac{s}{2}\right)^2} \right\} \\ \text{для } \frac{2M}{M+1} \leq s \leq \frac{2M}{M-1}, \\ \frac{1}{\pi \sqrt{M^2-1}} & \text{для } \frac{2M}{M-1} \leq s. \end{cases} \quad (6-318)$$

$$\varphi_{cMq}(s) = \begin{cases} -\frac{2}{3\pi M} \left[1 + \frac{s^3}{16M^2}\right] & \text{для } 0 \leq s \leq \frac{2M}{M+1}, \\ -\frac{2}{3\pi^2} \left\{ \frac{1}{M} \left[1 + \frac{s^3}{16M^2}\right] \arccos \left[M - \frac{2M}{s}\right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{M^2-1}} \arccos \left[\frac{s}{2M} + M - \frac{sM}{2}\right] + \right. \\ \left. + \frac{\left[8 - \frac{s}{2} - \frac{s^2}{2M^2} - \frac{s^2}{4}\right]}{6M} \sqrt{\frac{s^2}{4M^2} - \left(1 - \frac{s}{2}\right)^2} \right\} \\ \text{для } \frac{2M}{M+1} \leq s \leq \frac{2M}{M-1}, \\ -\frac{2}{3\pi \sqrt{M^2-1}} & \text{для } \frac{2M}{M-1} \leq s. \end{cases} \quad (6-319)$$

Напомним читателю, что выражения для моментов тангажа в формулах (6-317) и (6-319) выведены в предположении, что ось моментов проходит через переднюю кромку профиля и момент считается положительным, если он заставляет заднюю кромку опускаться. В соответствии с работой [6-37] на фиг. 6—15, показывающей изменение переходных функций в зависимости от  $s$  при различных значениях  $M$ , ясно заметна тенденция к более быстрому затуханию влияния переходных процессов при больших числах Маха. Это происходит не только потому, что пределы области неустановившегося течения при значениях  $s$ , меньших  $2M(M-1)$ , сужаются до одной длины хорды, но также и потому, что с увеличением  $M$  начальные и конечные значения различных функций сближаются одно с другим. Например, как можно рассчитать, применяя упрощение Лайтхилла, функция

$\varphi_c(s)$  при достаточно большом  $M$  должна в течение всего времени маневра равняться  $2/\pi M$ .

Переходные функции  $\psi_c(s)$  и  $\psi_{cm}(s)$  для входа в зону резко ограниченного порыва при сверхзвуковом движении были, по-видимому, впервые вычислены



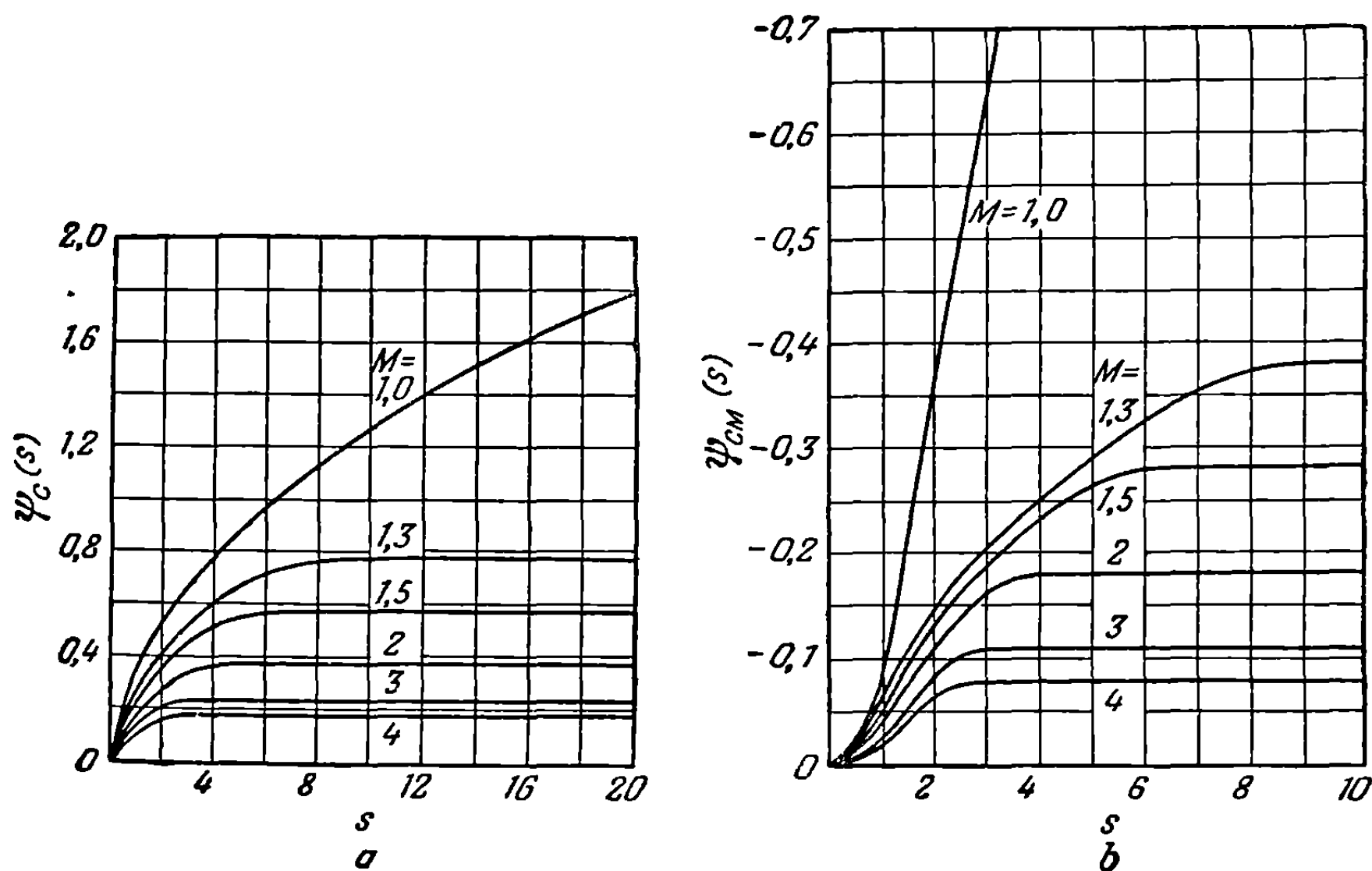
Фиг. 6-15. Переходная функция подъемной силы и момента при вертикальном перемещении и изменении угла тангажа профиля в звуковом и сверхзвуковом потоке. Определения всех величин даны в тексте.

Бюо [6-50], применившим видоизмененный метод пульсирующих источников. В соответствии с определениями (6-218) и (6-219) эти функции имеют следующий вид:

$$\psi_c(s) = \begin{cases} \frac{s}{\pi M} & \text{для } 0 \leq s \leq \frac{2M}{M+1}, \\ \frac{2}{\pi \sqrt{M^2-1}} \left\{ \frac{1}{\pi} \arccos \left[ \frac{s}{2M} + M - \frac{sM}{2} \right] + \frac{s \sqrt{M^2-1}}{2\pi M} \arccos \left[ M - \frac{2M}{s} \right] \right\} & \text{для } \frac{2M}{M+1} \leq s \leq \frac{2M}{M-1}, \\ \frac{2}{\pi \sqrt{M^2-1}} & \text{для } \frac{2M}{M-1} \leq s. \end{cases} \quad (6.320)$$

$$\psi_{cM}(s) = \begin{cases} -\frac{s^2}{4\pi M} & \text{для } 0 \leq s \leq \frac{2M}{M+1}, \\ -\frac{1}{\pi \sqrt{M^2-1}} \left\{ \frac{1}{\pi} \arccos \left[ \frac{s}{2M} + M - \frac{sM}{2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{s^2 \sqrt{M^2-1}}{4\pi M} \arccos \left[ M - \frac{2M}{s} \right] + \right. \\ \left. + \frac{s \sqrt{M^2-1}}{2\pi M} \sqrt{\frac{s^2}{4M^2} - \left(1 - \frac{s}{2}\right)^2} \right\} & \text{для } \frac{2M}{M+1} \leq s \leq \frac{2M}{M-1}, \\ -\frac{1}{\pi \sqrt{M^2-1}} & \text{для } \frac{2M}{M-1} \leq s. \end{cases} \quad (6-321)$$

Формулы (6-320) и (6-321) взяты в несколько видоизмененном виде из работы Ченга [6-51]. Его статья содержит подробный разбор задач о переходных движениях при сверхзвуковых скоростях. В нее включены расчеты переходных функций для закрылка, укрепленного на задней кромке; связь этих расчетов с расчетами для целого профиля такая же, как и для коэффициентов, соответствующих простому гармоническому движению.



Фиг. 6-16. Переходная функция подъемной силы для случая входа в зону резкоограниченного порыва в звуковом и сверхзвуковом потоке. Определения символов даны в тексте.

На фиг. 6-16 показаны кривые изменения функций  $\psi_c(s)$  и  $\psi_{cM}(s)$  для нескольких чисел Маха.

6-8. Неустановившееся движение профилей при числе Маха, равном единице. При решении задач, связанных с околозвуковым движением, очень интересной с точки зрения специалиста по аэроупругости является следующая возможность. Если теория установившегося движения профиля в околозвуковом интервале скоростей является существенно нелинейной, то оказывается, что для неустановившегося движения результаты линеаризованной теории имеют смысл и в этом интервале, если только при маневре оказывается превышенной некоторая степень нестационарности. Мы исследуем сначала случай простых гармонических колебаний, для которого значение  $k$  приведенной частоты служит

четко выраженной мерой отклонения от стационарного состояния. Впервые изучением этой задачи занимался Ротт [6-52]. Он показал, что можно получить имеющие смысл решения дифференциального уравнения (6-282), если положить  $M$  тождественно равным единице. Мы можем получить это решение несколькими способами, например, используя преобразование Лапласа так, как это описано в конце п. 6-6.

Другая, столь же ясная, хотя и менее строгая, схема решения состоит в видоизменении полученной по методу пульсирующих источников формулы (6-241) путем предельного приближения к звуковому числу Маха. С физической точки зрения такой процесс не может вызывать возражений, так как при допущениях линеаризированной теории верхняя и нижняя поверхности профиля остаются независимыми одна от другой. Более того, если местная скорость течения незначительно отличается от  $a_\infty$ , то нет надобности применять гипотезу Кутта. При приближении числа  $M$  к единице сверху параметр  $\bar{\omega}$  становится бесконечно большим, вызывая тем самым аналогичное увеличение аргумента функции Бесселя и показателя степени в формуле (6-241). Во всем интервале интегрирования, за исключением бесконечно малой его части, функцию  $J_0$  можно заменить ее асимптотическим представлением

$$J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{2M}(x^* - \xi^*)\right) \sim \sqrt{\frac{2(M^2 - 1)}{\pi M k (x^* - \xi^*)}} \cos\left(\frac{kM}{M^2 - 1}(x^* - \xi^*) - \frac{\pi}{4}\right). \quad (6-322)$$

Если, кроме того, произвести такую же операцию со всем подинтегральным выражением, то получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} e^{-i\left(\frac{kM^2}{M^2 - 1}\right)(x^* - \xi^*)} J_0\left(\frac{kM}{M^2 - 1}(x^* - \xi^*)\right) \sim \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \times \\ & \times \sqrt{\frac{2(M^2 - 1)}{\pi M k (x^* - \xi^*)}} \left\{ \cos\left(\frac{kM}{M^2 - 1}(x^* - \xi^*) - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{kM^2}{M^2 - 1}(x^* - \xi^*)\right) - \right. \\ & \left. - i \cos\left(\frac{kM}{M^2 - 1}(x^* - \xi^*) - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{kM^2}{M^2 - 1}(x^* - \xi^*)\right) \right\} = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi M k (x^* - \xi^*)}{2}}} \{ [\cos(A + B) + \cos(A - B)] - \\ & \quad - i [\sin(A + B) - \sin(A - B)] \}, \quad (6-323) \end{aligned}$$

где

$$A + B = \frac{kM}{M^2 - 1}(x^* - \xi^*) - \frac{\pi}{4} + \frac{kM^2}{M^2 - 1}(x^* - \xi^*) = \frac{kM}{M - 1}(x^* - \xi^*) - \frac{\pi}{4} \quad (6-324a)$$

и

$$A - B = -\frac{kM}{M + 1}(x^* - \xi^*) - \frac{\pi}{4}. \quad (6-324b)$$

При приближении  $M$  к единице величина  $(A + B)$  становится бесконечно большой, так что члены подинтегрального выражения, содержащие множителями  $\cos(A + B)$  и  $\sin(A + B)$ , имеют все возрастающую тенденцию ко взаимному уничтожению. В пределе, используя величину  $(x^* - \xi^*)(M - 1)$  в качестве новой переменной интегрирования, можно показать, что доля указанных членов в формуле (6-241) становится равной нулю. В оставшихся членах можно непосредственно приравнять  $M$  единице, что дает

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi M k (x^* - \xi^*)}{2}}} [\cos(A - B) + i \sin(A - B)] = \frac{e^{-i(k/2)(x^* - \xi^*)}}{e^{i\pi/4} \sqrt{2\pi k (x^* - \xi^*)}}. \quad (6-325)$$



Так как значение показательной функции, стоящей в знаменателе, в точности равно  $\sqrt{i}$ , то предельная форма формулы (6-241) будет

$$\bar{\varphi}'(x^*, 0^+, t) = -b \int_{-1}^{x^*} \omega_a(\xi^*, t) \frac{e^{-i(k/2)(x^* - \xi^*)}}{\sqrt{2\pi ik(x^* - \xi^*)}} d\xi^*. \quad (6-326)$$

В оставшихся выкладках нет никакой разницы со случаем сверхзвукового движения, так что функцию (6-326) можно рассматривать как полное решение дифференциального уравнения колебательного движения при  $M = 1$ .

Различные аэродинамические коэффициенты при  $M = 1$  были подсчитаны и затабулированы Нельсоном и Берманом [6-53]. Их обозначения совпадают с обозначениями Гаррика и Рубинова, определения которых даны нами в формулах (6-262) — (6-264). Значительное упрощение в вычислениях по сравнению со сверхзвуковым случаем является результатом того, что все интегралы могут быть отождествлены с интегралами Френеля (см. [6-27]).

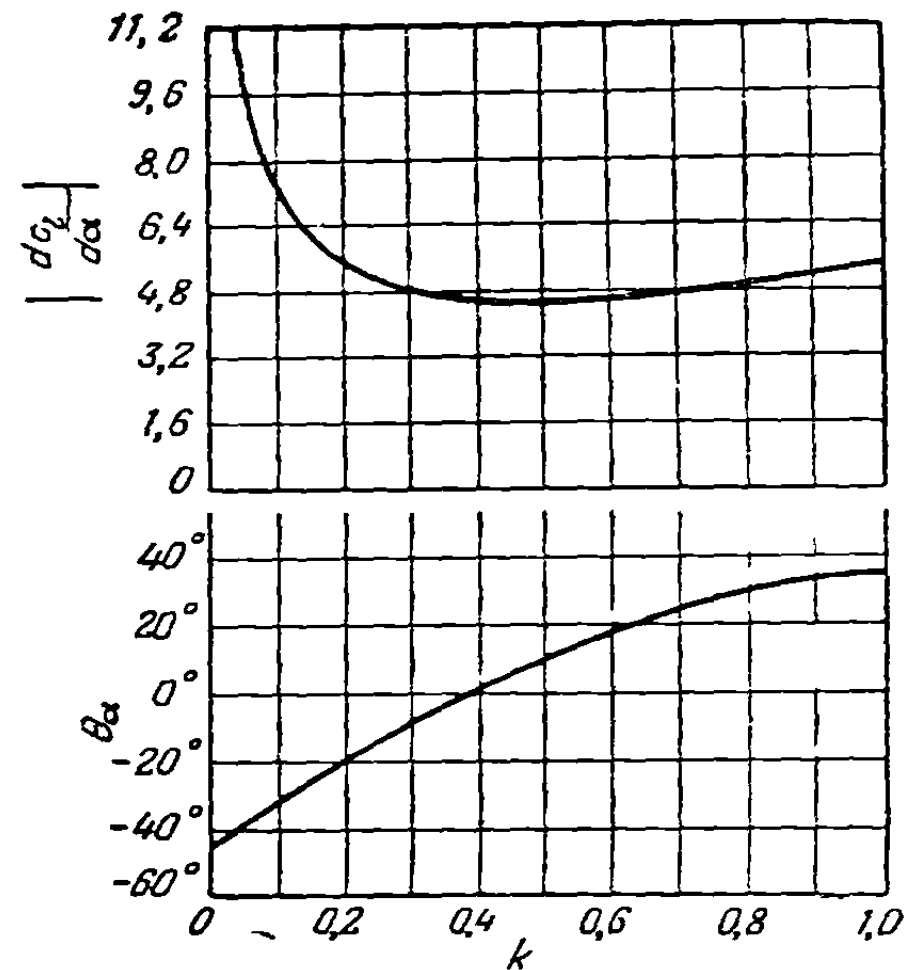
Величины аэродинамических нагрузок при звуковой скорости становятся бесконечно большими при приближении  $k$  к нулю. Чтобы показать характер их изменения, на фиг. 6—17 даны графики амплитуды и фазового угла безразмерной подъемной силы, обусловленной вращательным движением относительно передней кромки,

$$4k^2 [L'_3 + iL'_4] = \left| \frac{dc_l}{d\alpha} \right| e^{i\theta_\alpha}. \quad (6-327)$$

Было бы затруднительно дать точную оценку минимального значения приведенной частоты, для которого еще справедливы эти результаты. Можно, однако, утверждать, что кривая изменения фазового угла на фиг. 6-17 при значениях  $k$ , превышающих приблизительно 0,15, характеризует плавный переход от дозвуковых скоростей, через звуковую, к сверхзвуковым. Изменение с числом Маха безразмерной расчетной скорости флаттера для характерных видов крыльев также, по-видимому, имеет реальный смысл при переходе через околозвуковую область.

Обращаясь к переходным функциям для  $M = 1$ , мы сталкиваемся с очевидным затруднением, выражающимся в том, что все их асимптотические (соответствующие установившемуся движению) значения бесконечно велики. Однако, как подметили впервые Хизлет, Ломэкс и Шпрейтер [6-5], это не исключает возможности использования указанных функций в том промежутке изменения переменного  $s$ , где их поведение не противоречит поведению соответствующих функций для дозвукового и сверхзвукового движения. В каждом случае, отпрываясь от простых выражений, выведенных нами прежде для  $M > 1$ , мы можем с помощью непрерывного процесса осуществлять предельный переход к числу Маха, соответствующему скорости звука. Можно, конечно, получить те же формулы, применяя метод пульсирующих источников, однако предыдущий вариант их вывода значительно более привлекателен.

Изучая формулы (6-316) — (6-321), можно обнаружить, что затруднения с переходом к пределу возникают только для членов, содержащих арк синус величины  $[s 2M + M - sM 2]$  и имеющих в знаменателе величину  $M^2 - 1$ . Так



Фиг. 6-17. Амплитуда и фазовый угол подъемной силы, обусловленной вращательным движением профиля относительно передней кромки при  $M = 1$ .

как значение аргумента в любом случае приближается к единице, то с помощью простого преобразования можно осуществить разложение в степенной ряд в окрестности точки, соответствующей  $M=1$ , и получить

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow 1} \left\{ \frac{\arccos \left[ \frac{s}{2M} + M - \frac{sM}{2} \right]}{\sqrt{M^2 - 1}} \right\} &= \lim_{M \rightarrow 1} \left\{ \frac{\arcsin \sqrt{1 - \left[ M - \frac{s}{2} \left( \frac{M^2 - 1}{M} \right) \right]^2}}{\sqrt{M^2 - 1}} \right\} = \\ &= \lim_{M \rightarrow 1} \left\{ \frac{\sqrt{(1 - M^2) + s(M^2 - 1) - \frac{s^2}{4M^2}(M^2 - 1)^2}}{\sqrt{M^2 - 1}} \right\} = \sqrt{s - 1}. \quad (6-328) \end{aligned}$$

Число интервалов изменения  $s$  в формулах (6-316) — (6-321) уменьшается до двух, так как верхняя граница  $2M(M-1)$  среднего интервала обращается в бесконечность. Поэтому, как мы и предвидели, вместо стремления различных функций к предельным значениям, соответствующим установившемуся движению, происходит их постепенное или быстрое беспредельное увеличение. Например, график изменения функции  $\varphi_c(s)$ , которая при больших  $s$  пропорциональна  $\sqrt{s}$ , принимает вид параболы с горизонтальной осью симметрии.

Предельные выражения, которые мы получаем для функций  $\varphi_c(s)$ ,  $\varphi_{cM}(s)$  и т. п., таковы:

$$\varphi_c(s) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{для } 0 \leq s \leq 1, \\ \frac{2}{\pi^2} \left\{ \arccos \left[ 1 - \frac{2}{s} \right] + 2\sqrt{s-1} \right\} & \text{для } 1 \leq s; \end{cases} \quad (6-329)$$

$$\varphi_{cM}(s) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \left[ 2 - \frac{s^2}{4} \right] & \text{для } 0 \leq s \leq 1, \\ -\frac{1}{\pi^2} \left\{ \left( 1 - \frac{s^2}{8} \right) \arccos \left[ 1 - \frac{2}{s} \right] + \left( \frac{3}{2} + \frac{s}{4} \right) \sqrt{s-1} \right\} & \text{для } 1 \leq s; \end{cases} \quad (6-330)$$

$$\varphi_{cq}(s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[ 1 + \frac{s^2}{8} \right] & \text{для } 0 \leq s \leq 1, \\ \frac{1}{\pi^2} \left\{ \left( 1 + \frac{s^2}{8} \right) \arccos \left[ 1 - \frac{2}{s} \right] + \left( \frac{5}{2} - \frac{s}{4} \right) \sqrt{s-1} \right\} & \text{для } 1 \leq s; \end{cases} \quad (6-331)$$

$$\varphi_{cMq}(s) = \begin{cases} -\frac{2}{3\pi} \left[ 1 + \frac{s^3}{16} \right] & \text{для } 0 \leq s \leq 1, \\ -\frac{2}{3\pi^2} \left\{ \left( 1 + \frac{s^3}{16} \right) \arccos \left[ 1 - \frac{2}{s} \right] + \left( \frac{7}{3} - \frac{s}{12} - \frac{s^2}{8} \right) \sqrt{s-1} \right\} & \text{для } 1 \leq s; \end{cases} \quad (6-332)$$

$$\psi_c(s) = \begin{cases} \frac{s}{\pi} & \text{для } 0 \leq s \leq 1, \\ \frac{2}{\pi^2} \left\{ \frac{s}{2} \arccos \left[ 1 - \frac{2}{s} \right] + \sqrt{s-1} \right\} & \text{для } 1 \leq s; \end{cases} \quad (6-333)$$

$$\psi_{cM}(s) = \begin{cases} -\frac{s^2}{4\pi} & \text{для } 0 \leq s \leq 1, \\ -\frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{s^2}{4} \arccos \left[ 1 - \frac{2}{s} \right] + \left( 1 + \frac{s}{2} \right) \sqrt{s-1} \right\} & \text{для } 1 \leq s. \end{cases} \quad (6-334)$$

Заметим, что выражения (6-329) — (6-334) во всех случаях согласуются с соответствующими переходными функциями для дозвукового движения, приведенными в п. 6-5 для значений  $s$  вплоть до  $2M(M+1)$ . Поэтому оказывается, что на этапе движения, соответствующем прохождению первой половины длины хорды, мы получаем совершенно плавный переход через область

околозвуковых скоростей. Эти формулы остаются, конечно, без какого бы то ни было экспериментального подтверждения, что имеет место и почти для всех других переходных функций. Их важность для приложений к задачам аэроупругости как раз и объясняется отсутствием какой-либо другой надежной информации, тогда как сами переходные функции представляют средство для исследования многих интересных маневров. Если принять во внимание, что максимальные нагрузки и напряжения, вызываемые действием порыва или внезапным вертикальным движением, создаются часто через очень короткое время после начала движения, то нереальные значения сил и моментов при  $M=1$  для больших значений  $s$  не играют такой роли, как это можно было бы предположить.

Для полноты графического представления переходных функций во всем интервале чисел Маха на фиг. 6-15 и 6-16 даются кривые, построенные по формулам (6-329) — (6-334).

## Глава 7

### КРЫЛЬЯ И ТЕЛА В ТРЕХМЕРНОМ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ПОТОКЕ

**7-1. Введение.** Большинство практических расчетов в аэроупругости, особенно расчетов, связанных с неустановившимися движениями, выполняются в соответствии с теорией двумерного движения профиля. К счастью, это обстоятельство чаще всего дает успешные результаты, что объясняется двумя причинами. Во-первых, аэродинамическая теория двумерных движений весьма хорошо разработана и подкреплена табличными данными; существуют, например, полные таблицы коэффициентов флаттера для всех практически важных чисел Маха, за исключением узкого околозвукового промежутка, для которого экспериментальное определение аэродинамических нагрузок становится почти обязательным в силу наличия вибрирующих скачков на поверхностях профиля. Во-вторых, теория неустановившегося обтекания трехмерных крыльев при любом числе Маха является чрезвычайно громоздкой и трудной для применения.

Как известно каждому специалисту по аэроупругости, относительное количество задач, для которых предположение о двумерности течения становится непригодным, день ото дня возрастает. В качестве важного примера задач, для практически целесообразного исследования которых с самого начала необходимо учитывать преобладающее влияние конечности размаха, мы можем привести задачу об изгибно-элеронном флаттере дельтавидных крыльев и задачу об определении динамических нагрузок за счет нарушения симметрии при запуске снарядов с несущими поверхностями малого удлинения. Как показывает использование преобразования Прандтля—Глауэрта, возможности применения методов несущих полос для любого крыла при околозвуковых скоростях являются сомнительными.

Для того чтобы существующие и разрабатываемые теории получили всеобщее признание и были практически пригодны, необходимо следовать определенным принципам. Кратко говоря, эти принципы требуют, чтобы во всех случаях имелось стремление любой ценой достигнуть максимальной систематизации и широты применимости теории. Общее количество числовых операций, потребных для получения решения в связи с данной теорией, практически не существенно в современную эпоху, когда почти каждое авиационное предприятие или аэронавигационная исследовательская лаборатория имеет в своем распоряжении полный комплект высокоскоростных цифровых вычислительных машин. Однако жизненно важной является возможность проведения этих вычислений сравнительно малоквалифицированным оператором, познания которого в аэроупругости могут быть ограничены знакомством с определенными таблицами, основами матричного исчисления и алгеброй комплексных чисел. Наша работа должна вестись в таком направлении, чтобы в будущем каждая новая задача не требовала широкого участия опытных специалистов-аэродинамиков.

Затруднение, связанное с узостью применимости аэродинамических теорий для трехмерных крыльев, наиболее очевидно при сверхзвуковых скоростях. Не будет преувеличением сказать, что каждая новая геометрическая форма срединной поверхности влечет за собой пересмотр теории. Если и будут изо-

бретены универсальные методы, сравнимые по своему охвату хотя бы с уравнением несущей линии в дозвуковом потоке, то, как мы ожидаем, подходы к решению будут заметно отличаться от тех, какими мы пользовались в прошлом. Весьма возможно, что, следуя сформулированным выше принципам, придется в значительной мере пожертвовать математическим изяществом выводов.

7-2. Колебания крыльев конечного размаха в потоке несжимаемой жидкости. Если не считать некоторых весьма специальных случаев, вроде тех, какие описаны в работах [7-1]—[7-2], то кажется маловероятным, чтобы задача о простом гармоническом движении несущих поверхностей в трехмерном потоке жидкости могла когда-либо поддаться точному решению. В связи с этим создается положение, когда имеется около двадцати различных трактовок этого вопроса, среди которых не найдется двух, дающих совершенно одинаковые результаты. В связи с малочисленностью экспериментальных данных по колебаниям крыльев конечного размаха дать оценку сравнительных достоинств тех физических аппроксимаций, которые лежат в основе этих различных теорий, затруднительно. Поэтому выбор теории для применения в конкретных условиях основан обычно на сочетании простоты, систематичности и субъективного предпочтения.

Из числа теорий, применяемых чаще, чем другие, большинство рассматривают крылья от умеренного до большого размаха, причем делается попытка получить такую систему формул, которая была бы точной в пределе при увеличении размаха до бесконечности, а для установившегося течения сводилась бы к чему-то напоминающему уравнение несущей линии. Первая публикация в этом направлении принадлежит Чикала [7-3]. Из дальнейших многочисленных исследований мы опишем в этом пункте вывод интегрального уравнения Рейснера [7-4], для которого имеются экспериментальные результаты, дающие удовлетворительное подтверждение вплоть до малых, порядка двух, значений удлинения. Применение этого метода вполне систематизировано, и для упрощения наиболее часто повторяющихся расчетов могут быть использованы таблицы.

Рассмотрим колебания крыла, изображенного на фиг. 7-1 и мало отличающегося от плоского, и ограничимся анализом движения, создающего подъемную силу. При этих ограничениях мы получим линеаризованное граничное условие [ср. с уравнением (5-316)]

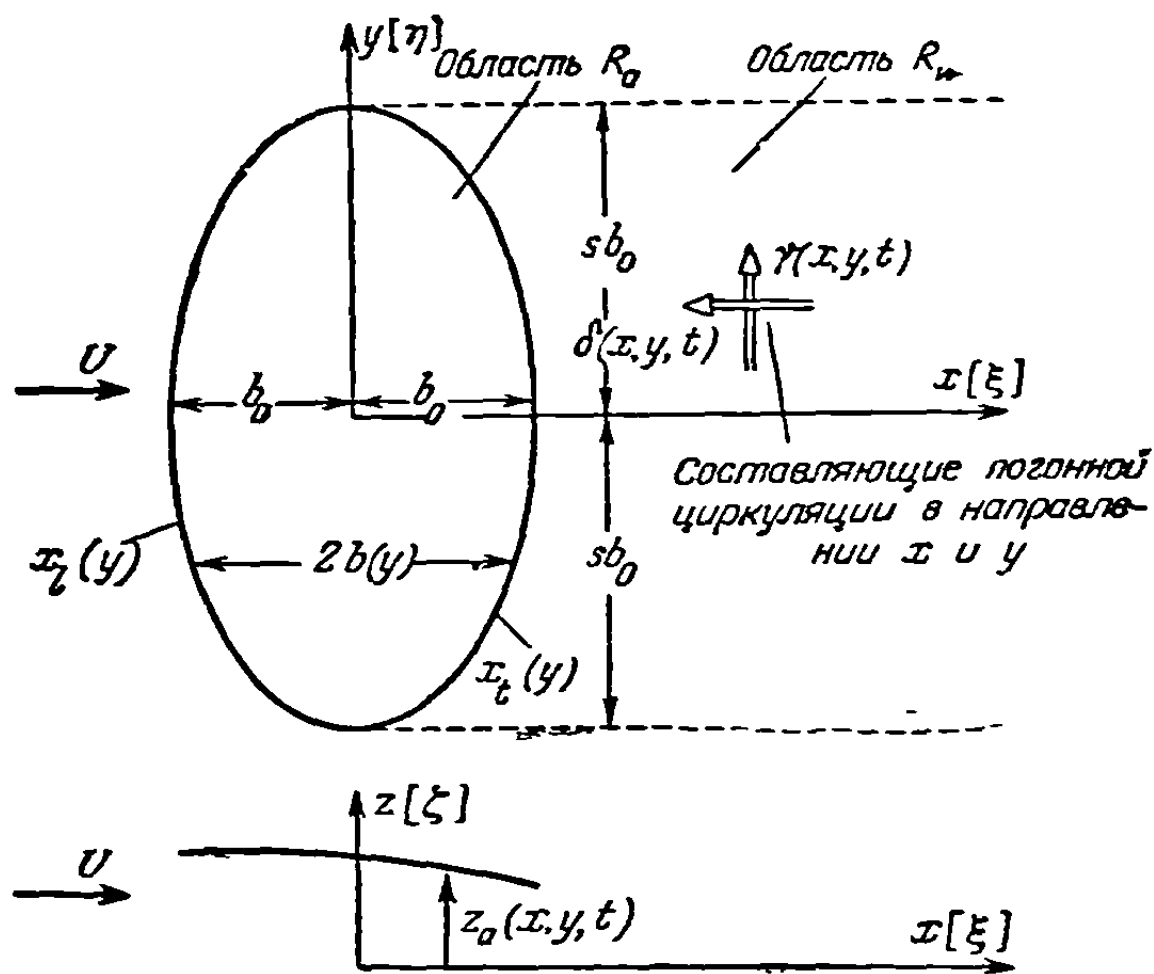
$$\frac{\partial \varphi'(x, y, 0, t)}{\partial z} = \bar{w}_a(x, y) e^{i\omega t} = \left[ i\omega \bar{z}_a(x, y) + U \frac{\partial \bar{z}_a}{\partial x} \right] e^{i\omega t} \quad \text{для} \quad (7-1)$$

$$z = 0, (x, y) \text{ в области } R_a,$$

где

$$z_a(x, y, t) = \bar{z}_a(x, y) e^{i\omega t} \quad (7-2)$$

представляет собой изменяющуюся с временем вертикальную координату вибрирующей срединной поверхности.



Фиг. 7-1. Обобщенная несущая поверхность, показанная в плане и сбоку.

Как и в аналогичных задачах для установившегося течения, мы заменяем поверхность, воспринимающую нагрузку, и ее спутную струю вихревым слоем, распределенным в областях  $R_a$  и  $R_w$  плоскости  $x, y$ . Так как для описания неустановившегося движения служит уравнение Лапласа, то значения скоростей, индуцируемых этим слоем в данный момент времени, можно определить из закона Био и Савара. Фактически единственное несоответствие между условиями данной задачи и тем, что описывает формула (5-128), заключается в том, что здесь циркуляция вокруг крыла непрерывно изменяется и все зависимые переменные являются функциями времени. В силу линейности для случая простых гармонических колебаний можно написать

$$\gamma_a(\xi, \eta, t) = \bar{\gamma}_a(\xi, \eta) e^{i\omega t}, \quad \delta_a(\xi, \eta, t) = \bar{\delta}_a(\xi, \eta) e^{i\omega t}, \quad (7-3a, b)$$

$$\gamma_w(\xi, \eta, t) = \bar{\gamma}_w(\xi, \eta) e^{i\omega t}, \quad \delta_w(\xi, \eta, t) = \bar{\delta}_w(\xi, \eta) e^{i\omega t}. \quad (7-3c, d)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (5-128) и сокращая на множитель  $e^{i\omega t}$ , получаем

$$\begin{aligned} \bar{w}_a(x, y) = & -\frac{1}{4\pi} \oint_{R_a} \frac{\bar{\gamma}_a(\xi, \eta) [x - \xi] + \bar{\delta}_a(\xi, \eta) [y - \eta]}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta + \\ & -\frac{1}{4\pi} \int_{R_w} \frac{\bar{\gamma}_w(\xi, \eta) [x - \xi] + \bar{\delta}_w(\xi, \eta) [y - \eta]}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \quad (7-4) \end{aligned}$$

для точки  $(x, y)$ , расположенной в области  $R_a$ , представляющей собой проекцию крыла.

Связь между циркуляцией вокруг крыла и циркуляцией в спутной струе можно получить с помощью тех же рассуждений, которые в случае двумерного движения привели к уравнениям (5-320). Для определенного сечения, характеризуемого отсчитываемой в направлении размаха координатой  $\eta$ , требование о соответствии между любым изменением полной циркуляции вокруг крыла и вихревым элементом равной и противоположной интенсивности, стекающим с задней кромки вниз по течению со скоростью  $U$ , приводит к соотношению

$$\bar{\gamma}_w(\xi, \eta) = -ik_0 \bar{\Omega}(\eta) e^{-i(\omega\xi/U)}, \quad (7-5)$$

где

$$k_0 = \frac{\omega b_0}{U} \quad (7-6)$$

и

$$\bar{\Omega}(\eta) = \frac{\bar{\Gamma}(\eta)}{b_0} e^{i(\omega x_t/U)} = \frac{e^{i(\omega x_t/U)}}{b_0} \int_{x_l(\eta)}^{x_t(\eta)} \bar{\gamma}_a(\xi, \eta) d\xi \quad (7-7)$$

представляет собой удобную функцию, называемую приведенной циркуляцией. Уравнение непрерывности вихрей помогает рассчитать направленную вдоль потока составляющую циркуляции спутной струи из уравнения (7-5). Так как  $\bar{\gamma}$  обращается в нуль впереди передней кромки, то в силу соотношения

$$\frac{\partial \bar{\delta}_w}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{\gamma}_w}{\partial \eta} \quad (7-8)$$

получим

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_w(\xi, \eta) &= \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial \bar{\gamma}(\xi', \eta)}{\partial \eta} d\xi' = \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{\xi} \bar{\gamma}(\xi', \eta) d\xi' = \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{x_l(\eta)}^{x_t(\eta)} \bar{\gamma}_a(\xi', \eta) d\xi' + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ -ik_0 \bar{\Omega}(\eta) \int_{x_t(\eta)}^{\xi} e^{-i(\omega \xi'/U)} d\xi' \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} [b_0 \bar{\Omega}(\eta) e^{-i(\omega x_t/U)}] + \frac{\partial}{\partial \eta} [b_0 \bar{\Omega}(\eta) e^{-i(\omega \xi/U)} b_0 \bar{\Omega}(\eta) e^{-i(\omega x_t/U)}] = b_0 \frac{d\bar{\Omega}}{d\eta} e^{-i(\omega \xi/U)}. \end{aligned} \quad (7-9)$$

Здесь предполагается, что нижний предел интегрирования лежит несколько впереди от передней кромки  $x_l(\eta)$  и при перемене порядков интегрирования и дифференцирования принимается во внимание непрерывность функции  $\bar{\gamma}(\xi, \eta)$  у задней кромки.

Если величины (7-5) и (7-9) ввести в формулу (7-4) и подставить точные пределы интегрирования, то получим

$$\begin{aligned} \bar{w}_a(x, y) &= -\frac{1}{4\pi} \oint_{-sb_0}^{sb_0} \oint_{x_l(\eta)}^{x_t(\eta)} \frac{\bar{\gamma}_a(\xi, \eta) [x - \xi] + \bar{\delta}_a(\xi, \eta) [y - \eta]}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta - \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-sb_0}^{sb_0} \int_{x_l(\eta)}^{\infty} e^{-i(\omega \xi/U)} \frac{\left\{ -ik_0 \bar{\Omega}(\eta) [x - \xi] + b_0 \frac{d\bar{\Omega}}{d\eta} [y - \eta] \right\}}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (7-10)$$

Так как  $\bar{\gamma}_a$  и  $\bar{\delta}_a$  связаны между собой уравнением (7-8), то уравнение (7-10) можно рассматривать как интегральное уравнение с неизвестной функцией под знаком двойного интеграла, устанавливающее связь между известной функцией  $\bar{w}_a$  и неизвестной  $\bar{\gamma}_a$ . Оно не может быть решено точно для крыла произвольной формы в плане и для произвольного вида движения, но почти все интегральные уравнения с однократными интегралами, фигурирующие в упомянутых выше приближенных теориях, могут быть выведены из него путем различных видоизменений физической модели или функции, являющейся ядром уравнения.

Математическая цель аппроксимаций Рейсснера состоит в получении интеграла, содержащего  $\bar{\gamma}_a$ , который может быть обращен с помощью формул Зэнгена (5-103) и (5-104). В процессе упрощения различаются по существу три разных этапа. Мы можем дать их словесную формулировку и оценку их влияния на члены уравнения (7-10) в следующем виде:

(1) Если касаться только их связи с функцией  $\bar{w}_a(x, y)$ , то можно рассматривать присоединенные вихри так, как если бы крыло было заменено профилем в двумерном потоке, имеющим такое же распределение нагрузки в направлении хорды, какое существует в сечении с координатой  $y$ . Это предположение эквивалентно следующим соотношениям:

$$\bar{\delta}_a(\xi, \eta) \cong 0, \quad (7-11)$$

$$\bar{\gamma}_a(\xi, \eta) \cong \bar{\gamma}_a(\xi, y), \quad (7-12)$$

и первый интеграл правой части уравнения (7-10) заменяется выражением

$$I_1 \cong -\frac{1}{2\pi} \oint_{x_l(y)}^{x_t(y)} \frac{\bar{\gamma}_a(\xi, y)}{x - \xi} d\xi. \quad (7-13)$$



Точно такая же физическая аппроксимация фигурирует в теории несущей линии для установившегося течения. Она теряет силу в тех областях, где  $\bar{\gamma}_a$  претерпевает быстрые изменения в направлении размаха, создавая тем самым значительные по величине компоненты циркуляции, направленные вдоль хорды. Аналогичная картина наблюдается только вблизи концов сплошных крыльев большого удлинения.

(2) Область существования концевых вихрей, создающих спутную струю, можно продолжить от задней кромки  $x_t(\eta)$  вперед, до прямой линии, направленной вдоль размаха и проходящей через ту точку  $(x, y)$ , в которой нужно определить вертикальную скорость. В связи с этим второй член во втором интеграле правой части уравнения (7-10) изменяется и принимает вид

$$I_3 \cong -\frac{b_0}{4\pi} \oint_{-sb_0}^{sb_0} \int_x^\infty \frac{(d\bar{\Omega}/d\eta) [y-\eta] e^{-i(\omega\xi/U)}}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta =$$

$$= -\frac{b_0 e^{-i(\omega x/U)}}{4\pi} \oint_{-sb_0}^{sb_0} \frac{d\bar{\Omega}}{d\eta} \int_0^\infty \frac{e^{-i(\omega\lambda/U)} [y-\eta] d\lambda}{[\lambda^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\eta, \quad (7-14)$$

где

$$\lambda = \xi - x. \quad (7-15)$$

Это предположение совпадает со второй из аппроксимаций, составляющих основу теории несущей линии. В указанной теории мы получали, таким образом, скос потока, постоянный вдоль хорды крыла. Очевидно, что эта аппроксимация наименее пригодна вблизи передней кромки крыла, имеющего относительно большие размеры в направлении хорды.

(3) Рассматривая область существования стекающих вихрей погонной интенсивности  $\gamma_w$ , можно те ее части, которые характеризуют отклонения от двумерного потока в каждом из перпендикулярных к размаху сечений, продолжить вплоть до линии, проходящей через точку  $(x, y)$ , так же, как это делалось с вихрями погонной интенсивности  $\delta_w$ . На этом этапе в первом члене второго интеграла уравнения (7-10) необходимо выделить следующую часть:

$$I_2^{(2)} = \frac{ik_0 \bar{\Omega}(y)}{2\pi} \int_{x_t(y)}^\infty \frac{e^{-i(\omega\xi/U)}}{x-\xi} d\xi. \quad (7-16)$$

Это выражение соответствует виду упомянутого члена в условиях, когда крыло имеет бесконечный размах и нагружено везде так же, как в сечении  $y$ ; оставшаяся часть определяет поправочный член, учитывающий влияние трехмерности. После соответствующего видоизменения последнего члена получим:

$$I_2 \cong \frac{ik_0 \bar{\Omega}(y)}{2\pi} \int_{x_t(y)}^\infty \frac{e^{-i(\omega\xi/U)}}{x-\xi} d\xi + \frac{ik_0}{4\pi} e^{-i(\omega x/U)} \oint_{-sb_0}^{sb_0} \frac{d\bar{\Omega}}{d\eta} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{y-\eta}{\sqrt{\lambda^2 + (y-\eta)^2}} - \frac{|y-\eta|}{(y-\eta)} \right] e^{-i(\omega\lambda/U)} d\lambda \right\} d\eta. \quad (7-17)$$

Хотя оценить характер ошибок, появляющихся в связи с использованием уравнения (7-17), значительно труднее, но, по-видимому, для тех значений удлинения, для которых пригодна данная теория, это уравнение влечет за собой упрощения, менее грубые, чем аппроксимации на этапах (1) и (2).

Если подставить выражения (7-13), (7-14) и (7-17) в интегральное уравнение (7-10), то упрощенный результат имеет вид

$$\bar{w}_a(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{x_l(y)}^{x_t(y)} \frac{\bar{\gamma}_a(\xi, y)}{x-\xi} d\xi + \frac{ik_0\bar{Q}(y)}{2\pi} \oint_{x_l(y)}^{\infty} \frac{e^{-i(\omega\xi/U)}}{x-\xi} d\xi - \frac{e^{-i(\omega x/U)}}{4\pi} \int_{-sb_0}^{sb_0} \frac{d\bar{Q}}{d\eta} K\left(\frac{\omega}{U}(y-\eta)\right) d\eta. \quad (7-18)$$

Функция, представляющая собой ядро третьего члена в уравнении (7-18), выражается так (при замене точного вида ее аргумента  $\omega(y-\eta)/U$  сокращенным обозначением  $q$ ):

$$K(q) = \frac{k_0}{q} - \frac{ik_0}{q} \oint_0^{\infty} e^{-i\lambda} \left[ 1 + \frac{|q| - \sqrt{\lambda^2 + q^2}}{\lambda} \right] d\lambda. \quad (7-19)$$

Интеграл в этом выражении известен под названием функции Чикала, что связано с его появлением в более ранней теории колебаний крыла конечного размаха. Он табулирован в работах [7-3] и [7-4].

Уравнение (7-18) приводится к форме, подходящей для его обращения, с помощью преобразования:

$$x^* = \frac{2x - x_t - x_l}{2b}, \quad y^* = \frac{y}{b_0}, \quad (5-135a, b)$$

$$k_m = \frac{k_0}{2b} [x_t + x_l]. \quad (7-20)$$

Параметр  $k_m$  представляет собой меру стреловидности, обращаясь в нуль для крыла, геометрическое место середин хорд которого представляет собой прямую линию. После введения новых обозначений получим:

$$\bar{w}_a(x^*, y^*) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_a(\xi^*, y^*)}{x^* - \xi^*} d\xi^* + \frac{ik_0 e^{-ik_m}}{2\pi} \bar{Q}(y^*) \int_1^{\infty} \frac{e^{-ik\xi^*}}{x^* - \xi^*} d\xi^* - \frac{e^{-ikx^*} e^{-ik_m}}{4\pi} \oint_{-s}^s \frac{d\bar{Q}}{d\eta^*} K(k_0(y^* - \eta^*)) d\eta^*. \quad (7-21)$$

Между прочим, при наличии этих новых символов приведенная циркуляция в формуле (7-7) принимает такой вид:

$$\bar{Q}(y^*) = \frac{b}{b_0} e^{i(k+k_m)} \int_{-1}^1 \bar{\gamma}_a(\xi^*, y^*) d\xi^*. \quad (7-22)$$

Соотношение (5-336) представляет собой формулу, пригодную для вычисления распределения перепада давлений на срединной поверхности; это объясняется тем, что уравнение Бернулли при переходе от двумерного течения к трехмерному остается неизменным. При новых обозначениях вышеупомянутое уравнение записывается так:

$$\frac{\Delta \bar{p}_a(x^*, y^*)}{\rho U} = -\bar{\gamma}_a(x^*, y^*) - ik \int_{-1}^{x^*} \bar{\gamma}_a(\xi^*, y^*) d\xi^*. \quad (7-23)$$

Если обратиться к формулам (5-103) и (5-104), то увидим, что для решения уравнения (7-21) относительно неизвестной  $\bar{\gamma}_a$  можно в качестве функции

$g(x^*)$  взять  $(-\bar{w}_a)$  плюс два интеграла правой части уравнения. Переменная  $y^*$  и различные функции, зависящие от нее, вроде функций  $\bar{Q}$  и  $k_m$ , фигурируют при этой операции в качестве параметров. Результат обращения с помощью перемены порядка интегрирования может быть приведен к следующей форме (подробности см. в [7-4]):

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_a(x^*, y^*) = & \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \left\{ \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{\bar{w}_a(\xi^*, y^*)}{(x^*-\xi^*)} d\xi^* + \right. \\ & + \frac{ik_0 e^{-ik_m}}{2} \bar{Q}(y^*) \int_1^\infty \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \frac{e^{-ik\lambda}}{(x^*-\lambda)} d\lambda + \\ & \left. + \frac{e^{-ik_m}}{4\pi} \left[ \oint_{-s}^s \frac{d\bar{Q}}{d\eta^*} K(k_0(y^*-\eta^*)) d\eta^* \right] \left[ \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{e^{-ik\xi^*}}{(x^*-\xi^*)} d\xi^* \right] \right\}. \quad (7-24) \end{aligned}$$

Уравнение (7-24) представляет собой первый из важных результатов, являющихся следствием аппроксимаций Рейсснера. Если размах становится бесконечным и удаляются все члены, содержащие  $y^*$  и  $\eta^*$ , то оно непосредственно сводится к уравнению (5-330), соответствующему теории двумерного профиля, а для случая установившегося течения из него получается уравнение (5-105). Процесс вычисления аэродинамической нагрузки следует очень близко к схеме, описанной в заключительной части п. 5—6. Этот процесс проводится в два этапа: во-первых, выводится соотношение, определяющее циркуляцию  $\bar{Q}(y^*)$ ; во-вторых, уравнение (7-23) разрешается относительно распределения давления и интегрируется с целью определения изменения подъемной силы и момента вдоль размаха.

Формула для определения циркуляции получается путем интегрирования уравнения (7-24) по переменной  $x^*$  в пределах от  $-1$  до  $1$ , исключения  $\bar{\gamma}_a$  с помощью уравнения (7-7) и установления тождества некоторых интегралов с функциями Бесселя. В результате этих операций мы получаем интегро-дифференциальное уравнение типа уравнения несущей линии:

$$\bar{Q}(y^*) + \mu(k) \frac{b}{b_0} \oint_{-s}^s \frac{d\bar{Q}}{d\eta^*} K(k_0(y^*-\eta^*)) d\eta^* = \bar{Q}^{(2)}(y^*). \quad (7-25)$$

Величина  $\mu(k)$  в уравнении (7-25) служит обозначением следующей комбинации:

$$\mu(k) = \frac{-[J_0(k) - iJ_1(k)]}{\pi ik [H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)]}. \quad (7-26)$$

Она затабулирована в работе [7-4]. Функция  $\bar{Q}^{(2)}(y^*)$  представляет собой приведенную циркуляцию при квазидвумерном течении, которая порождается бы движением в сечении  $y^*$  при условии отсутствия индукционных эффектов в направлении размаха:

$$\bar{Q}^{(2)}(y^*) = 4 \frac{b}{b_0} e^{ik_m} \frac{\int_{-1}^1 \sqrt{(1+\xi^*)/(1-\xi^*)} \bar{w}_a(\xi^*, y^*) d\xi^*}{\pi ik [H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)]}. \quad (7-27)$$

Можно сравнить это уравнение с уравнением (5-334), если положить  $b = b_0$  и приравнять нулю параметр стреловидности  $k_m$ .

Используя тот факт, что при  $k = 0$  величина  $\mu(k) = \frac{1}{2}$ , легко доказать также, что уравнение (7-27) в установившемся течении совпадает с уравнением несущей линии (5-147). Наклону кривой подъемной силы  $a_0$  в последнем уравнении нужно приписать его теоретическое значение  $2\pi$ .

Возможно, наиболее важное из упрощений, достигаемых с помощью теории Рейсснера, выявляется после подстановки величины (7-24) в уравнение (7-23). После многочисленных преобразований оказывается, что выражение для давления принимает следующий вид:

$$\frac{\Delta \bar{p}_a(x^*, y^*)}{\rho U} = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \frac{1}{(x^*-\xi^*)} - ik\Lambda_1 \right] \bar{w}_a(\xi^*, y^*) d\xi^* +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}} \bar{w}_a(\xi^*, y^*) d\xi^* \left\{ [C(k) - 1] + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{\bar{Q}(y^*)}{\bar{Q}^{(2)}(y^*)} - 1 \right] \left[ C(k) + \frac{iJ_1(k)}{J_0(k) - iJ_1(k)} \right] \right\}, \quad (7-28)$$

где функции  $\Lambda_1$  и  $C(k)$  — те же самые, которые фигурируют в задаче о колебаниях профиля:

$$\Lambda_1(x^*, \xi^*) = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 - x^*\xi^* + \sqrt{1-x^{*2}} \sqrt{1-\xi^{*2}}}{1 - x^*\xi^* - \sqrt{1-x^{*2}} \sqrt{1-\xi^{*2}}} \right], \quad (5-336b)$$

$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)}. \quad (5-309)$$

Все члены в уравнении (7-28), за исключением одного, содержащего функцию

$$\sigma(y^*) = \left[ \frac{\bar{Q}(y^*)}{\bar{Q}^{(2)}(y^*)} - 1 \right] \left[ C(k) + \frac{iJ_1(k)}{J_0(k) - iJ_1(k)} \right], \quad (7-29)$$

совпадают с результатами, полученными в теории двумерного движения. При пренебрежении индукционными эффектами функция  $\sigma(y^*)$  обращается в нуль, так как отношение приведенных циркуляций в первом сомножителе ее выражения при этих условиях равно единице. Но, если сохранить функцию  $\sigma(y^*)$ , то еще более интересным является то обстоятельство, что она зависит только от координаты, отсчитываемой вдоль размаха, и формы колебаний крыла. Она не создает помехи операциям интегрирования величины  $\Delta \bar{p}_a$  вдоль хорды, дающим значения текущих подъемной силы и момента; при этих операциях функция  $\sigma(y^*)$  фигурирует в качестве аддитивной поправки к  $C(k)$ . Мы обнаруживаем, что нет необходимости выводить совершенно заново формулы, подобные формулам для  $L$ ,  $M_y$  и  $M_z$  в теории двумерного движения; все, что мы должны сделать, это заменить функцию  $C(k)$  там, где она входит, на  $C(k) + \sigma$ , причем последняя добавка определяется положением сечения  $y^*$  и [посредством уравнений (7-25) — (7-27)] частным типом движения, создающего искомую силу или момент.

Порядок операций при решении задачи о распределении нагрузки вдоль размаха с помощью теории Рейсснера будет вкратце следующим:

(1) Полностью устанавливается форма колебаний. Например, они могут быть чисто изгибными

$$h(y^*, t) = \bar{h}_R e^{i\omega t} f_h(y^*); \quad (7-30)$$

здесь  $\bar{h}_R$  представляет собой комплексную амплитуду в некотором начальном сечении, где функция распределения амплитуд  $f_h(y^*)$  равна единице; или это могут быть крутильные колебания относительно определенной оси

$$\alpha(y^*, t) = \bar{\alpha}_R e^{i\omega t} f_\alpha(y^*). \quad (7-31)$$

(2) Определяется вид функции  $\bar{Q}^{(2)}(y^*)$ , а интегро-дифференциальное уравнение (7-25) разрешается относительно  $\bar{Q}(y^*)$ . Так как этот этап требует наибольшего расхода времени, то в дальнейшем мы разберем его более подробно.

(3) С помощью формулы (7-23) вычисляется функция  $\sigma(y^*)$ . Анализируя различные виды движения крыла, мы будем различать функции  $\sigma$  с помощью соответствующих индексов. Так, в случае крутильных колебаний можно было бы написать

$$\sigma_a(y^*) = \left[ \frac{\bar{u}_a(y^*)}{\bar{u}_a^{(2)}(y^*)} - 1 \right] H(k), \quad (7-32)$$

где

$$H(k) = C(k) + \frac{iJ_1(k)}{J_0(k) - iJ_1(k)}. \quad (7-33)$$

(4) Доли, выделенные из функций  $L(y^*, t)$ ,  $M_y(y^*, t)$  и  $M_z(y^*, t)$  и соответствующие двумерному движению, определяются по формулам, подобным формулам (5-300) — (5-302), в которых параметрам  $k$ ,  $a$  и безразмерной координате, характеризующей положение передней кромки закрылка, приписываются значения, принимаемые ими в сечении  $y^*$ . В ходе операций можно использовать существующие таблицы для аэродинамических коэффициентов при двумерном движении.

(5) Поправочные члены  $\Delta L(y^*, t)$ ,  $\Delta M_y(y^*, t)$  и  $\Delta M_z(y^*, t)$ , учитывающие влияние конечности размаха, определяются по найденной на этапе (3) функции  $\sigma(y^*)$  и добавляются к нагрузкам, найденным на этапе (4). Выражения для каждой из этих поправок выводятся путем выделения всех членов, содержащих  $C(k)$ , в формуле для текущей нагрузки в двумерном случае, обусловленной частным типом рассматриваемого движения, и замены величины  $C(k)$  в этих членах значением  $\sigma(y^*)$  для того же сечения. Например, из формулы (5-311) можно видеть, что дополнительная подъемная сила в случае вертикального перемещения  $h(y^*, t)$  и поворота  $\alpha(y^*, t)$  будет выражаться так:

$$\Delta L_h(y^*, t) = 2\pi\rho U^2 b_0 [ik\sigma_h(y^*)] \frac{h(y^*, t)}{b_0} \quad (7-34)$$

и

$$\Delta L_a(y^*, t) = 2\pi\rho U^2 b \left[ 1 + ik \left( \frac{1}{2} - a \right) \right] \sigma_a(y^*) \alpha(y^*, t). \quad (7-35)$$

Вычисления на этапах (2), (3) и (5) значительно упрощаются при использовании таблиц, составленных Рейсснером и Стивенсом [7—5]. В их статье даются полные выражения для подъемной силы, момента тангажа, шарнирного момента закрылка и шарнирного момента триммера при трехмерном обтекании, а также рассматривается возможность систематического видоизменения расчетов на флаттер при использовании результатов работы [7—4] для улучшения исследования с помощью теории несущей полосы. В гл. 9 этот процесс проиллюстрирован для случая изгибно-крутильного флаттера.

В теории двумерного течения члены, содержащие  $C(k)$ , относятся целиком к циркуляционной части потока и, как показывает соотношение (7-28), только эти члены изменяются под влиянием конечности размаха. Следовательно, нам приходится считать, что в пределах аппроксимаций Рейсснера бесциркуляционная часть потока остается неизменной<sup>1)</sup>. Так как эта часть движения жидкости не образует спутной струи, то связанные с ней эффекты аэродинамической индукции оказываются сравнительно малыми. Это, конечно, справедливо везде, кроме областей, непосредственно примыкающих к концам крыла. Однако другие теории указывают на изменение бесциркуляционного потока, так что, оценивая справедливость выводов Рейсснера, мы должны полагаться на сравнение с экспериментальными данными. Наиболее детальными измерениями аэродинамических

<sup>1)</sup> О том, что этот факт имеет место, можно судить также по виду равенства (7-13), содержащего интеграл, являющийся при  $\bar{Q} = 0$  единственным членом интегрального уравнения.

нагрузок на крыльях конечного размаха, совершающих один из известных видов колебательного движения, являются измерения Эшли, Зартаряна и Нейльсона [7—6]. Ни одно из этих измерений не дает указаний на какие-либо существенные неточности в методе Рейсснера для крыльев прямоугольной формы в плане, в интервале удлинений вплоть до минимального значения, равного двум.

Один из важных результатов теории крыла конечного размаха касается относительной несущественности индукционных эффектов при больших значениях приведенной частоты и увеличения точности определения аэродинамических нагрузок по формулам теории несущей полосы в двумерном движении при том же условии. Это явление имеет место в связи с тем, что при быстрых вибрациях преобладающее влияние имеет бесциркуляционный поток, так как слагаемые сил и моментов, зависящие от приведенной массы, пропорциональны  $k^2$ . Экспериментального подтверждения этого явления мы не имеем вследствие затруднительности одновременного достижения высоких приведенных частот и таких чисел Рейнольдса, при которых не сказывалось бы нежелательное влияние вязкости. Однако с физической точки зрения существуют веские причины, заставляющие верить в правильность сделанного вывода. На основании большого количества подробных расчетов Рейсснер и Стивенс указывают, что влияние конечности размаха пренебрежимо мало для крыльев с удлинением, равным 6, если  $k$  превышает значение 1,0, и для крыльев с удлинением, равным 3, если  $k$  превышает значение 2,0. С другой стороны, имеются значительные отклонения от теории двумерного движения при  $k$ , меньшем 0,5, для удлинения, равного 6, и при  $k$ , меньшем 1,0, для удлинения, равного 3.

Так как мы уже подчеркивали желательность систематизации тех трудоемких вычислений, которые необходимы для исследования колебаний крыльев в трех измерениях, то укажем, что решение уравнения Рейсснера (7-25) для определения циркуляции представляет собой весьма систематический процесс. Все необходимые таблицы приводятся в работе [7-5]. Следуя методике, примененной в теории несущей линии, неизвестную  $\bar{Q}$  выражают в виде суммы некоторого числа членов синусоидального ряда Фурье

$$\bar{Q}_j(y^*) = \sum_{n=1}^N K_{nj} \frac{\sin n\varphi}{n}, \quad (7-36)$$

где

$$y^* = s \cos \varphi, \quad \eta^* = s \cos \theta \quad (7-37)$$

и индекс  $j$  заменяется на  $h, \alpha, \beta$  и т. п. в зависимости от рассматриваемого типа движения крыла. Подстановка (7-36) обеспечивает падение циркуляции до нуля на концах крыла, хотя естественно, что она не может сделать равной нулю разность давлений на протяжении всей длины концевых хорд.

После введения суммы (7-36) в уравнение (7-25) получим алгебраическое уравнение относительно коэффициентов Фурье  $K_{nj}$ :

$$\sum_{n=1}^N K_{nj} \left\{ \frac{\sin n\varphi}{n} + \frac{b}{b_0} \frac{\pi}{s} \mu(k) \left[ \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} + \frac{ik_0 s}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi - \cos \theta}{|\cos \varphi - \cos \theta|} F(k_0 s |\cos \varphi - \cos \theta|) \cos n\theta d\theta \right] \right\} = \bar{Q}_j^{(2)}(s \cos \varphi). \quad (7-38)$$

Здесь через  $F$  обозначена функция Чикала:

$$F(q) = \int_0^\infty e^{-i\lambda} \left[ \frac{1}{q} + \frac{1}{\lambda} - \frac{\sqrt{\lambda^2 + q^2}}{\lambda q} \right] d\lambda \quad \text{для } q \geq 0 \quad (7-39)$$

С помощью функции циркуляции для квазидвумерного движения в уравнении (7-38) учитываются граничные условия. Для случаев вертикального перемещения и поворота относительно оси, проходящей через точку  $x^* = a$ , эта функция записывается так <sup>1)</sup>:

$$\frac{\bar{\Omega}_h^{(2)}}{U} = \frac{4iC(k)}{kH_1^{(2)}(k)} e^{ikm} \frac{h(y^*, t)}{b_0 e^{i\omega t}} \quad (7-40)$$

и

$$\frac{\bar{\Omega}_a^{(2)}}{U} = \frac{4iC(k)}{k_0 H_1^{(2)}(k)} e^{ikm} \left[ 1 + ik \left( \frac{1}{2} - a \right) \right] \frac{a(y^*, t)}{e^{i\omega t}}. \quad (7-41)$$

Указанные выражения можно получить из формулы (7-27).

При необходимости частого повторения процесса решения уравнения (7-38) используются приведенные в работе [7-5] таблицы функции

$$S_n(k_0 s, \varphi) = \frac{\sin n\varphi}{n} + i \frac{k_0 s}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi - \cos \theta}{|\cos \varphi - \cos \theta|} F(k_0 s |\cos \varphi - \cos \theta|) \cos n\theta d\theta. \quad (7-42)$$

Введение этой функции сокращает запись уравнения (7-38), приводя его к виду:

$$\sum_{n=1}^N K_{nj} \left\{ \frac{\sin n\varphi}{n} + \frac{\pi b}{s b_0} \mu(k) S_n(k_0 s, \varphi) \right\} = \bar{\Omega}_j^{(2)}(s \cos \varphi). \quad (7-43)$$

Используя симметричность (нечетные  $n$ ) или антисимметричность (четные  $n$ ) распределения нагрузки в направлении размаха для сведения данной задачи к задаче о нагрузке на половину размаха,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ , мы можем написать уравнение (7-43) для числа сечений, равного потребному числу постоянных  $K_{nj}$ ,

$$\left( \left[ \frac{\sin n\varphi}{n} \right] + \frac{\pi b}{s} \left[ \frac{b}{b_0} \mu(k) \right] [S_n] \right) \{K_{nj}\} = \{\bar{\Omega}_j^{(2)}\}. \quad (7-44)$$

Пусть  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  представляют собой значения  $\varphi$  в тех точках, где должно удовлетворяться уравнение (7-44). Диагональная матрица содержит значения  $b\mu(k)/b_0$  в этих точках, а две прямоугольные матрицы имеют для случая симметричной нагрузки следующий развернутый вид:

$$\left[ \frac{\sin n\varphi}{n} \right] = \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 & \frac{\sin 3\varphi_1}{3} & \dots & \frac{\sin (2N-1)\varphi_1}{(2N-1)} \\ \sin \varphi_2 & \frac{\sin 3\varphi_2}{3} & \dots & \frac{\sin (2N-1)\varphi_2}{(2N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin \varphi_N & \frac{\sin 3\varphi_N}{3} & \dots & \frac{\sin (2N-1)\varphi_N}{(2N-1)} \end{bmatrix}, \quad (7-45)$$

$$[S_n] = \begin{bmatrix} S_1(k_0 s, \varphi_1) & S_3(k_0 s, \varphi_1) & \dots & S_{2N-1}(k_0 s, \varphi_1) \\ S_1(k_0 s, \varphi_2) & S_3(k_0 s, \varphi_2) & \dots & S_{2N-1}(k_0 s, \varphi_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_1(k_0 s, \varphi_N) & S_3(k_0 s, \varphi_N) & \dots & S_{2N-1}(k_0 s, \varphi_N) \end{bmatrix}. \quad (7-46)$$

<sup>1)</sup> В окрестности узловой линии, соответствующей данной форме колебаний, необходимо применять специальную методику, так как там функция циркуляции для квазидвумерного движения равна нулю (см. [7-5]).



Уравнение (7-44) представляет собой ряд совместных уравнений с комплексными коэффициентами для определения  $N$  комплексных чисел  $K_{nj}$ . Связь между дополнительными нагрузками в трехмерном движении  $\Delta L$ ,  $\Delta M_y$ ,  $\Delta M_z$  в ряде сечений и коэффициентами  $K_{nj}$  также может быть выражена в виде матричного уравнения. Имеется возможность исключить один столбец коэффициентов  $K_{nj}$  путем использования такого уравнения совместно с уравнением (7-44) и получения новой матрицы для неустановившегося движения, аналогичной матрице  $[A]$  в уравнении (5—157) теории несущей линии.

Если хорда крыла постоянна по величине, то  $k$  не зависит от  $y^*$ . Поэтому при определенном значении частоты и определенной форме движения функция  $\bar{Q}_j^{(2)}(y^*)$  прямо пропорциональна распределению амплитуды вдоль размаха. Например, мы могли бы подставить выражение (7-30) в уравнение (7-40) и получить (предполагая, что геометрическое место середин хорд представляет собой прямую линию):

$$\frac{\bar{Q}_h^{(2)}}{U} = \frac{4iC(k_0)}{k_0 H_1^{(2)}(k_0)} \frac{\bar{h}_R}{b_0} f_h(y^*). \quad (7-47)$$

Это дает значительное упрощение, так как позволяет заменить неизвестные коэффициенты  $K_{nj}$  в уравнении (7-43) другим рядом постоянных констант, который сводит правую часть к ряду действительных чисел. В том случае, который представлен уравнением (7-47), мы используем подстановку

$$K_{nh} = \frac{K_{nh}}{\frac{4iUC(k_0)}{k_0 H_1^{(2)}(k_0)} \frac{\bar{h}_R}{b_0}}. \quad (7-48)$$

Подставив выражение  $K_{nh}$  из формулы (7-48) в уравнение (7-43), найдем

$$\sum_{n=1}^N K'_{nh} \left\{ \frac{\sin n\varphi}{n} + \frac{\pi}{s} \mu(k_0) S_n(k_0 s, \varphi) \right\} = f_h(s \cos \varphi). \quad (7-49)$$

Циркуляция для трехмерного движения представляется в виде

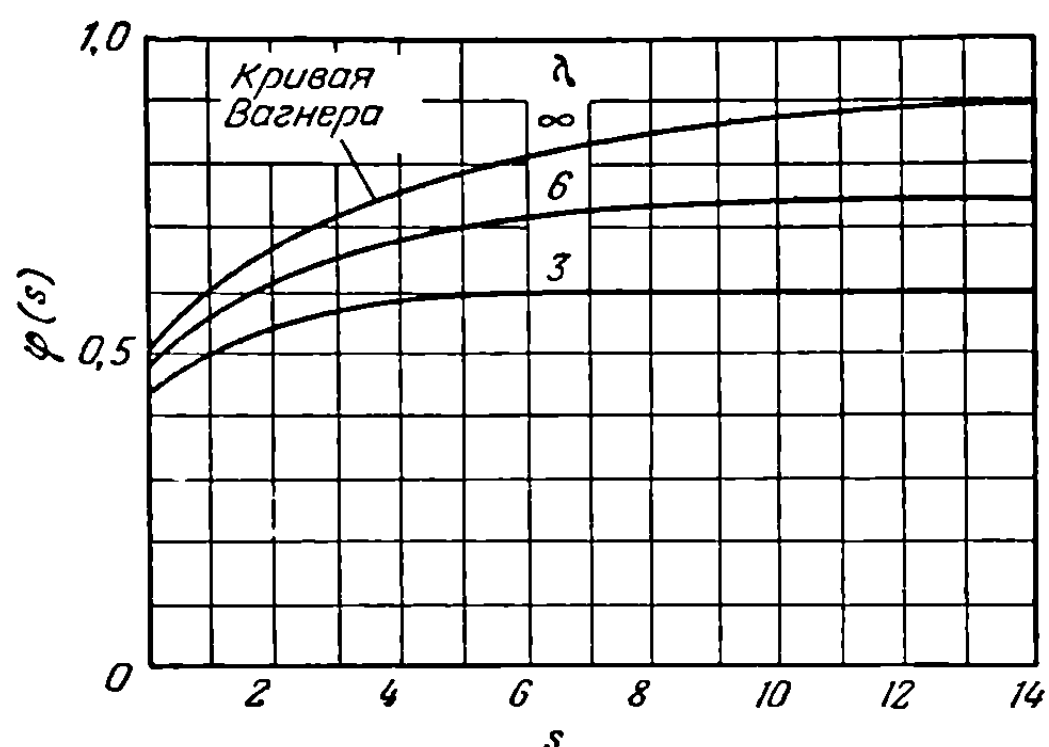
$$\bar{Q}_h = \frac{4iUC(k_0) \bar{h}_R}{k_0 H_1^{(2)}(k_0) b_0} \sum_{n=1}^N K'_{nh} \frac{\sin n\varphi}{n}, \quad (7-50)$$

так что, переходя к вычислению отношения этой функции к  $\bar{Q}_h^{(2)}$ , которое как раз и нужно нам для определения функции  $\sigma_h$  и распределения нагрузки, мы можем использовать элементарную формулу

$$\frac{\bar{Q}_h}{\bar{Q}_h^{(2)}} = \frac{1}{f_h(s \cos \varphi)} \sum_{n=1}^N K'_{nh} \frac{\sin n\varphi}{n}. \quad (7-51)$$

С задачей о простых гармонических колебаниях трехмерных крыльев тесно связана задача о их произвольном неустановившемся движении. Мы можем сказать, что в общем случае недостаточно вывести выражения для переходных функций, характеризующих вертикальное перемещение и изменение угла тангажа недеформируемого тела, так как с помощью этих функций нельзя рассматривать антисимметричные маневры самолета или нагрузки, вызываемые деформациями конструкции. Решение для общего случая требует расчета распределения давления, обусловленного внезапными изменениями параметров, характеризующих все существенные степени свободы, включая все формы вибраций, потребные для описания специфических эффектов, исследуемых в аэроупругости. В свете существующих теорий такая задача практически невыполнима. Нетрудно понять, почему такие нагрузки определялись почти исключительно с помощью методов несущей полосы из теории двумерного движения.

Если для случая простых гармонических колебаний разработана приемлемая теория, то методы Фурье могут быть, в принципе, приспособлены к вычислению любой переходной функции. Однако этот процесс неудобен для выполнения и требует много времени; мы знаем только об одном примере (гл. 5 книги [7-7]), где этот метод был успешно применен к имеющему практическое значение крылу. Более прямые теории неустановившегося движения в несжимаемом потоке были в числе других предложены Джонсом [7-8] и Шенем [7-9]. Разработанные в работе [7-8] переходные функции для внезапного изменения угла атаки и входа в зону порыва эллиптических крыльев представляют наилучший источник информации о характере трехмерного течения. Некоторые из кривых Джонса воспроизведены на фиг. 7-2. Они показывают, что начальное значение циркуляционной подъемной силы при вертикальном перемещении или движении с изменением угла атаки превышает половину своего конечного значения, причем это превышение все возрастает по мере того, как мы переходим от двумерного профиля к наиболее низким значениям удлинения. Объяснение этого поведения можно связать с тем обстоятельством, что влияние



Фиг. 7-2. Изменение подъемной силы после внезапного изменения угла атаки эллиптического крыла, имеющего удлинение  $\lambda$ . График отношения подъемной силы к ее конечному значению в установившемся течении построен в зависимости от расстояния до начальной точки, измеренного в полухордах корневого сечения крыла.

конечности размаха в начальный переходный период движения сказывается меньше, чем в условиях установившегося движения, создающихся с течением времени.

Таблица 7-1

Коэффициенты экспоненциальных приближений переходных функций для случаев вертикального перемещения и входа в зону порыва при эллиптических крыльях

Переходная функция	Удлинение	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
$\varphi(s)$	$\infty$	1,000	-0,165	-0,335	0	0,0455	0,300	—
	6	0,750	-0,217	0	0	0,381	—	—
	3	0,600	-0,170	0	0	0,540	—	—
$\psi(s)$	$\infty$	1,000	-0,236	-0,513	-0,171	0,058	0,364	2,42
	6	0,750	-0,336	-0,204	-0,145	0,290	0,725	3,00
	3	0,600	-0,407	-0,136	0	0,558	3,20	—

Удобные приближения с помощью экспоненциальных функций для двух видов переходных функций при удлинениях, равных 3 и 6, указаны в работе [7-8]. Мы используем обозначения суммарной подъемной силы, принятые в гл. 5 и 6,

$$L(s) = 2\pi \frac{\rho}{2} U^2 S \alpha_0 \varphi(s), \quad (7-52)$$

$$L_g(s) = 2\pi \frac{\rho}{2} U^2 S \frac{w_0}{U} \psi(s), \quad (7-53)$$

где  $s$  характеризует расстояние от начального положения, измеренное в долях полухорды, соответствующей середине размаха. При использовании этих символов приближения Джонса имеют следующий вид:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{array} \right\} = b_0 + b_1 e^{-\beta_1 s} + b_2 e^{-\beta_2 s} + b_3 e^{-\beta_3 s}. \quad (7-54)$$

Различные коэффициенты приведены в табл. 7-1.

**7-3. Влияние стреловидности.** Не может быть сомнения в важности достижения полного понимания вопросов аэродинамики неустановившегося движения стреловидных крыльев. Специалисты по аэроупругости, обслуживающие авиационные компании, то и дело сталкиваются с задачей теоретического определения условий флаттера для поверхностей с большой стреловидностью, имеющих удлинения вплоть до минимального значения порядка двух, зачастую в интервале больших дозвуковых или околосзвуковых скоростей. Не существует ни одной теории трехмерного движения, которая не основывалась бы или на весьма сомнительных физических предположениях, или на трудоемких, плохо систематизированных вычислительных схемах. К сожалению, аэродинамический расчет колеблющегося стреловидного крыла связан с особыми, специфическими трудностями даже при пренебрежении влиянием конечности размаха. Поэтому мы посвятим настоящий пункт рассмотрению вопроса об использовании теории несущей полосы при наличии стреловидности.

В связи с задачей о трехмерном движении следует упомянуть о том, что в литературе приводится несколько вариантов приближенных теорий. Из их числа одна из наиболее приемлемых теорий развита Тёрнером [7-10] в качестве обобщения ряда его собственных исследований, а также работ Рейсснера и Хильдебранда (см., например, [7-11]). Функции, необходимые при применении метода Тёрнера, не были полностью затабулированы. Другие подходы к решению той же задачи предложены Денглером и Голендом [7-12], У. П. Джонсом [7-13], а также Эшли, Зартаряном и Нейльсоном ([7-6]), стр. 24-39). В случае прямого крыла формулы работы [7-6] хотя и не представляют больших трудностей, чем формулы Рейсснера, однако основаны на таком предельном искажении характеризующего движение крыла вихревого слоя, что при больших углах стреловидности и средних и малых удлинениях их справедливость является сомнительной.

Переходя к вопросу о применении аэродинамической теории несущей полосы к крылу стреловидной формы в плане, мы можем сделать лишь одно вполне определенное утверждение: аэродинамические нагрузки, обусловленные простым гармоническим движением стреловидного крыла постоянной хорды и бесконечного размаха, могут быть получены непосредственно из формул для профиля без стреловидности, если движение таково, что в каждом сечении распределение скоростей  $w_\alpha$  частиц в направлении хорды одинаково. Рассмотрим, например, крыло, имеющее угол стреловидности  $\Delta$  и хорду длиной  $2b$  в направлении течения и совершающее вертикальные колебания по закону

$$h = h_0 e^{i\omega t}, \quad (7-55)$$

а также изменяющее свой угол тангажа следующим образом:

$$\alpha = \alpha_0 e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad (7-56)$$

где угол  $\alpha$  измеряется в поперечном сечении, параллельном направлению скорости  $U$ . Поворот совершается относительно оси, расположенной на определенном расстоянии  $ba$ , отсчитываемом в направлении полета вниз по потоку от середины хорды данного сечения. Эти предположения обеспечивают одинаковый характер давления во всех сечениях. Угол тангажа  $\bar{\alpha}$ , измеряемый в сечении,

перпендикулярном к размаху, определяется соотношением

$$\bar{\alpha} = \frac{a}{\cos \Lambda}. \quad (7-57)$$

Подъемная сила (положительная при направлении вверх) и момент тангажа (относительно оси, перпендикулярной к направлению полета и проходящей через точку  $ba$ ), отнесенные к единице длины в направлении, перпендикулярном к  $U$ , выражаются в виде

$$L(t) = \pi \rho b^2 \cos \Lambda [\ddot{h} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}] + \\ + 2\pi \rho U b \cos \Delta C(k) [\dot{h} + U\alpha + b(\frac{1}{2} - a)\dot{\alpha}], \quad (7-58)$$

$$M_y(t) = \pi \rho b^3 \cos \Delta [a\ddot{h} - (\frac{1}{2} - a)U\dot{\alpha} - b(\frac{1}{8} + a^2)\ddot{\alpha}] + \\ + 2\pi \rho U b^2 (\frac{1}{2} + a) \cos \Delta C(k) [\dot{h} + U\alpha + b(\frac{1}{2} - a)\dot{\alpha}], \quad (7-59)$$

где

$$k = \frac{\omega b \cos \Lambda}{U \cos \Lambda} = \frac{\omega b}{U}. \quad (7-60)$$

Формулы (7-58) и (7-59) выводятся из формул (5-311) и (5-312) с помощью того же физического рассуждения, какое использовалось для установившегося движения в конце п. 5-5. Эти формулы, при частоте, равной нулю, сводятся к таким результатам теории установившегося движения, как соотношение (5-222а).

Такая же последовательность рассуждений справедлива и для течения сжимаемой жидкости. Значения всех аэродинамических нагрузок просто умножаются на косинус угла стреловидности и все величины, за исключением числа Маха, измеряются в направлении полета. Так как влияние сжимаемости определяется составляющей потока, направленной перпендикулярно к размаху, то вместо числа Маха мы должны всегда использовать

$$\frac{U \cos \Lambda}{a_\infty} = M \cos \Lambda. \quad (7-61)$$

Подъемная сила  $L(t)$  связана с силой, отнесенной к единице длины в направлении имеющего стреловидность размаха, следующим соотношением:

$$\bar{L}(t) = L(t) \cos \Lambda, \quad (7-62)$$

так как единица длины в направлении размаха соответствует  $\cos \Lambda$  в направлении, перпендикулярном к направлению полета. Момент  $M_y(t)$ , определение которого, быть может, и удобно для исследования задач динамической устойчивости самолета, но неудобно для расчета конструкций, связан с моментом, отнесенным к единице длины в направлении размаха и отсчитываемым относительно направленной вдоль размаха оси, расположенной ниже по потоку от середины хорды, на расстоянии  $ba \cos \Lambda$ , следующим соотношением<sup>1)</sup>:

$$\bar{M}_y(t) = M_y(t) \cos^2 \Lambda. \quad (7-63)$$

<sup>1)</sup> Так как  $M_y$  есть момент относительно оси, перпендикулярной к направлению  $U$ , то единственная ясная физическая картина, пригодная для его характеристики, такова:  $M_y dy$  представляет собой интеграл разности давлений с весом, равным плечу этой разности относительно указанной оси, взятый вдоль полосы шириной  $dy$ , ориентированной в направлении полета.  $\bar{M}_y$  есть действительный поддающийся измерению момент относительно направленной вдоль размаха оси, отнесенный к единице длины в направлении имеющего стреловидность размаха. Дальнейший разбор этого вопроса см. в п. 8-4.

С помощью интегрального уравнения для пространства двух измерений, данного в работе [7-10], можно вывести формулы (7-58) и (7-59), не прибегая к рассмотрению физической картины движения. Если использовать неортогональную систему координат с осью  $x$  ( $x = bx^*$ ), направленной параллельно  $U$ , и осью  $y$ , идущей вдоль линии середин хорд, то

$$\bar{w}_a(x^*) = -\frac{1}{2\pi \cos \Lambda} \left\{ \oint_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_a(\xi^*)}{x^* - \xi^*} d\xi^* - \frac{ik\bar{\Gamma}}{b} \int_1^\infty \frac{e^{-ik\xi^*}}{x^* - \xi^*} d\xi^* \right\}, \quad (7-64)$$

где  $\bar{\gamma}_a$  представляет собой комплексную амплитуду направленной перпендикулярно к  $U$  и отнесенной к единице расстояния по оси  $x$  компоненты циркуляции. Суммарный вектор завихренности в такой двумерной задаче направлен, конечно, параллельно размаху. Обращение уравнения (7-64) можно получить с помощью формул Зенгена (5-103) и (5-104). После подстановки результата в соответствующую форму уравнения Бернулли

$$-\Delta \bar{p}_a(x^*) = \rho U \left[ \bar{\gamma}_a(x^*) + ik \int_{-1}^{x^*} \bar{\gamma}_a(\xi^*) d\xi^* \right] \quad (5-336)$$

единственным отличием полученного решения от решения для прямого крыла будет присутствие множителя  $\cos \Lambda$ . С помощью соответствующих процессов интегрирования вдоль хорды мы приходим к формулам (7-58) и (7-59).

Если вертикальные перемещения и характеристики закрутки стреловидного крыла конечного размаха изменяются вдоль размаха, как это имеет место при флаттере, то вопрос о том, как применять теорию несущей полосы, становится менее ясным, чем для случая прямого крыла. Были сделаны попытки использовать два общих метода подхода. Первый из них связан в основном с использованием формул (7-58) и (7-59), где  $h$  и  $\alpha$  заменяются значениями вертикального смещения и угла поворота, обусловленными предполагаемой формой движения в каждом сечении крыла, параллельном направлению потока. Эта схема была предложена Феттисом [7-14] и опробована Шпильбергом, Феттисом и Тони при расчетах на флаттер [7-15]. Различные формулы для определения текущих подъемной силы и момента, фигурирующие в этих двух работах, для приведения в соответствие с формулами (7-58) и (7-59) должны быть умножены на  $\cos \Lambda$ .

В связи с практическим применением этой теории несущей полосы (полоса выделяется в направлении потока) заметим, что некоторые конструкции стреловидных крыльев имеют нервюры, ориентированные в направлении полета, тогда как у других они почти перпендикулярны к линии середин хорд или к упругой оси крыла (если таковая имеется). При первом варианте логично предположить, что сечения, параллельные направлению потока, при изгибе и кручении остаются недеформированными, так что простой метод полос является здесь особенно подходящим. Конструкции последнего варианта по характеру их работы на кручение ближе к поверхности, образованной прямыми линиями, перпендикулярными к упругой оси, так как сечения, перпендикулярные к этой оси, не деформируются при изгибе. Поэтому в плоскостях, параллельных направлению  $U$ , имеются изменения кривизны дужек, подчиняющиеся простому гармоническому закону, причем величина этих изменений пропорциональна произведению  $\sin \Lambda (d\alpha/dy)$ . Представляется целесообразным добавить в формулы (7-58) и (7-59) члены, учитывающие изгибные колебания в направлении хорды по параболическому закону, наподобие тех, которые затабулированы в работе [7-16]. В другом случае может оказаться более подходящей теория несущей полосы, основывающаяся на компонентах скорости; описание этой теории мы даем ниже.

Сосредоточивая свое внимание на сечениях, перпендикулярных к некоторой оси отсчета, направленной вдоль размаха, мы приходим ко второй схеме, позволяющей применить методы аэродинамики двумерного движения к крылу конечного размаха со стреловидностью. Эта схема предложена также в работе [7-15]. Бродбент кратко описывает ее в работе [7-17], приписывая идею Минхиннику; подробный вывод всех уравнений (в видоизмененной форме) дан в работе [7-18].

Предположим, что прямолинейная ось отсчета направлена вдоль размаха под углом стреловидности  $\Lambda$ . Сечения, перпендикулярные к этой оси, не деформируются. Ее изгибная деформация характеризуется функцией  $h(\bar{y}, t)$  (положительной при направлении вниз), а кручение относительно этой оси — углом  $\bar{\alpha}(\bar{y}, t)$  (положительным при движении носка крыла вверх), где  $\bar{y}$  — координата, отсчитываемая вдоль оси. Если через  $z_a(\bar{x}, \bar{y}, t)$  обозначим направленное вверх вертикальное смещение точек средней линии, то получим

$$z_a(\bar{x}, \bar{y}, t) = -h - \bar{\alpha}\bar{x} \text{ для } (\bar{x}, \bar{y}) \text{ в области } R_a, \quad (7-65)$$

причем  $\bar{x}$  отсчитывается в направлении, перпендикулярном к оси  $\bar{y}$ , и считается положительным при перемещении от передней кромки к задней. Вертикальная скорость частиц жидкости, создаваемая движением крыла, выражается в виде

$$\begin{aligned} \omega_a(\bar{x}, \bar{y}, t) &= \frac{\partial z_a}{\partial t} + U \frac{\partial z_a}{\partial x} = \frac{\partial z_a}{\partial t} + \frac{\partial z_a}{\partial \bar{x}} U \cos \Lambda + \frac{\partial z_a}{\partial \bar{y}} U \sin \Lambda = \\ &= -\dot{h} - U\bar{\alpha} \cos \Lambda - \dot{\bar{\alpha}}\bar{x} - U(\sigma + \bar{\tau}\bar{x}) \sin \Lambda \\ &\text{для } z=0, (x, y) \text{ в области } R_a, \end{aligned} \quad (7-66)$$

где

$$\sigma = \frac{\partial h}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{\tau} = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \bar{y}} \quad (7-67)$$

характеризуют скорости изменения характеристик изгиба и кручения.

Крыло, ось отсчета которого не имеет стреловидности, двигаясь со скоростью  $U$ , создавало бы следующую вертикальную скорость:

$$\omega_a(x, y, t) = -\dot{h} - U\alpha - \dot{\alpha}x. \quad (7-68)$$

Если пренебречь влиянием направленной вдоль размаха компоненты скорости  $U \sin \Lambda$  на вид дифференциального уравнения и геометрию вихревого слоя, вводя эту компоненту только в граничное условие (7-66), то, чтобы написать выражения подъемной силы и момента стреловидного крыла, можно непосредственно использовать формулы п. 5—6. Члены, составляющие группу  $-(\dot{h} + U\alpha)$  в уравнении (7-68), должны быть заменены аналогичными членами, содержащими комбинацию  $-(\dot{h} + U\bar{\alpha} \cos \Lambda + U\sigma \sin \Lambda)$ . Члены, соответствующие  $-(\dot{\alpha}x)$  в уравнении (7-68), представляют собой теперь комбинацию  $-(\dot{\bar{\alpha}} + U\bar{\tau} \sin \Lambda)x$ . Скорость  $U$ , длина хорды  $2b$  и величина  $ba$ , характеризующая сдвиг оси моментов вниз по потоку от линии середин хорд, преобразуются в соответствующие величины  $U \cos \Lambda$ ,  $2\bar{b}$  и  $\bar{b}a$  для сечения, перпендикулярного к оси отсчета. Имея дело с членами, содержащими  $\alpha$ , необходимо быть особенно внимательным при разделении этих членов на группы, соответствующие двум частям уравнения (7-68), так как производная  $\partial \varphi / \partial t$ , входящая в уравнение Бернулли, содержит величину  $\dot{\alpha}$ , полученную за счет  $-(U\alpha)$  в граничном условии. Как мы уже упоминали прежде, влияние члена  $-(U\alpha)$  неизменно сопровождается аналогичным влиянием члена  $-(\dot{h})$ , входящего в те же выражения. Эти выражения не заменяются на  $-(\dot{\bar{\alpha}} + U\bar{\tau} \sin \Lambda)$ , как это делается с другими членами, содержащими  $\dot{\alpha}$ , и со всеми членами, содержащими  $\bar{\alpha}$ .



Результаты применения этих законов подобия к формулам (5-311) и (5-312) оказываются следующими:

$$\bar{L}(\bar{y}, t) = \pi \rho \bar{b}^2 \{ \ddot{h} + U \dot{\alpha} \cos \Lambda + U \dot{\sigma} \sin \Lambda - \bar{b} a \ddot{\alpha} - \bar{b} a U \dot{\tau} \sin \Lambda \} + \\ + 2 \pi \rho \bar{b} U \cos \Lambda C(k) \{ \dot{h} + U \bar{\alpha} \cos \Lambda + U \sigma \sin \Lambda + \bar{b} \left( \frac{1}{2} - a \right) [\dot{\alpha} + U \tau \sin \Lambda] \}, \quad (7-69)$$

$$\bar{M}_y(\bar{y}, t) = - \pi \rho \bar{b}^3 \left\{ U \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \cos \Lambda + \frac{1}{2} U^2 \tau \cos \Lambda \sin \Lambda - \right. \\ \left. - a \ddot{h} - U a \dot{\sigma} \sin \Lambda + \bar{b} \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) [\ddot{\alpha} + U \dot{\tau} \sin \Lambda] \right\} + \\ + 2 \pi \rho \bar{b}^2 U \cos \Lambda \left( \frac{1}{2} + a \right) C(k) \left\{ \dot{h} + U \bar{\alpha} \cos \Lambda + \right. \\ \left. + U \sigma \sin \Lambda + \bar{b} \left( \frac{1}{2} - a \right) [\dot{\alpha} + U \tau \sin \Lambda] \right\}. \quad (7-70)$$

Между прочим, при  $\sigma$  и  $\tau$ , равных нулю, эти формулы переходят в формулы (7-58) и (7-59). Как показано в работе [7-15], для облегчения пользования существующими таблицами формулы (7-69) и (7-70) могут быть записаны в таком виде:

$$\bar{L}(\bar{y}, t) = - \pi \rho \omega^2 \bar{b}^3 \left\{ \frac{h}{b} L_{hh} + \sigma L_{hh'} + \bar{\alpha} L_{h\alpha} + \bar{b} \tau L_{h\alpha'} \right\}, \quad (7-71)$$

$$\bar{M}_y(\bar{y}, t) = \pi \rho \omega^2 \bar{b}^4 \left\{ \frac{h}{b} M_{ah} + \sigma M_{ah'} + \bar{\alpha} M_{a\alpha} + \bar{b} \tau M_{a\alpha'} \right\}. \quad (7-72)$$

Восемь безразмерных коэффициентов вычисляются по известным функциям одного только  $k$ , определяемым равенствами (5-350) и (5-351), с помощью следующих соотношений:

$$L_{hh} = L_h, \quad (7-73a)$$

$$L_{hh'} = -i \frac{\operatorname{tg} \Lambda}{k} L_h, \quad (7-73b)$$

$$L_{h\alpha} = L_\alpha - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right), \quad (7-73c)$$

$$L_{h\alpha'} = -i \frac{\operatorname{tg} \Lambda}{k} \left[ -\frac{1}{2} + L_h \left( \frac{1}{2} - a \right) \right], \quad (7-73d)$$

$$M_{ah} = M_h - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right), \quad (7-73e)$$

$$M_{ah'} = -i \frac{\operatorname{tg} \Lambda}{k} \left[ M_h - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right], \quad (7-73f)$$

$$M_{a\alpha} = M_\alpha - [M_h + L_\alpha] \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2, \quad (7-73g)$$

$$M_{a\alpha'} = -i \frac{\operatorname{tg} \Lambda}{k} \left[ \frac{3}{8} - \frac{i}{2k} - L_h \left( \frac{1}{4} - a^2 \right) \right]. \quad (7-73h)$$

Из сказанного выше должно быть ясно, каким образом можно применить метод компонент скорости к другим видам движений в поперечных сечениях стреловидных крыльев. Например, для исследования колебаний установленного у задней кромки крыла закрылка можно заменить  $\beta$  в формулах для двумерного профиля величиной

$$\bar{\beta} = \frac{\beta}{\cos \Lambda}, \quad (7-74)$$



которая практически равна углу поворота закрылка вокруг оси его подвеса, наклоненной под углом стреловидности. Как и выше, величины  $U$ ,  $b$  и характеристика положения шарнира  $be$  заменяются на  $U \cos \Lambda$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{be}$ . Эти идеи без труда распространяются также и на другие виды неустановившегося движения.

В заключение этого пункта обратим внимание читателя на некоторые недостатки теории несущих полос, основывающейся на компонентах скорости; указания на эти недостатки имеются в работе Барби, Каннингема и Гаррика [7-18]. Даже если пренебречь влиянием концов, то имеется все же существенное различие между тем вихревым слоем спутной струи, на свойствах которого основываются формулы (7-69) и (7-70), и слоем, который в действительности стекает со стреловидного крыла конечного размаха. Вихри отнюдь не движутся вниз по потоку со скоростью  $U \cos \Lambda$  в направлении, перпендикулярном к размаху стреловидного крыла. Их движение значительно ближе к направлению результирующего потока  $U$ . Только в том случае, если движение одинаково во всех поперечных сечениях, можно сказать с уверенностью, что распределения скоростей, индуцируемых при этих двух схемах движения, совпадают.

Второй недостаток теории связан со способом применения уравнения Бернулли. В действительности при вычислении аэродинамических нагрузок различаются два основных этапа, первый из которых состоит в определении потенциала скоростей возмущения, а второй — в выводе из полученных данных формулы для распределения давления. На последнем этапе мы предполагали в сущности, что

$$\bar{p}_U - \bar{p}_L = -2\rho \left[ \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + U \cos \Lambda \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right]. \quad (7-75)$$

Однако правильная форма этого соотношения такова:

$$\begin{aligned} \bar{p}_U - \bar{p}_L &= -2\rho \left[ \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right] = \\ &= -2\rho \left[ \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + U \cos \Lambda \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + U \sin \Lambda \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (7-76)$$

Последний член в правой части уравнения (7-76) не равен нулю при любом способе определения  $\varphi'$ , так как зависимость основных параметров задачи от  $y$  проявляется в каждом элементе уравнения (7-66). Вычисление  $\partial \varphi' / \partial y$  оказывается нелегким; циркуляционная часть этой производной содержит  $C(k)$ , а  $k$  есть функция  $y$ , если крыло суживающееся. В работе [7—18] это затруднение обойдено путем сохранения только бесциркуляционных частей производной  $\partial \varphi' / \partial y$ , что, по общему признанию, является некорректным. Несколько более точной и вместе с тем не более сложной схемой могла бы быть схема, учитывающая циркуляционные члены, но пренебрегающая наличием сужения крыла, так что

$$\frac{dk}{dy} \cong 0. \quad (7-77)$$

Ни одна из указанных схем не является вполне удовлетворительной, но, к счастью, если совершенно не вводить в расчеты  $\partial \varphi' / \partial y$ , то это незначительно изменяет значения  $\bar{L}$  и  $\bar{M}_y$  для представляющих практический интерес крыльев и форм колебаний.

**7-4. Неустановившееся движение крыльев очень малого удлинения.** При определении аэродинамических нагрузок на крылья умеренного или большого удлинения вполне естественно, что основное внимание уделяется изменениям подъемной силы и момента в направлении размаха. По этой причине в течение долгого времени наибольшее распространение имели методы аэро-

динамического исследования, подобные теории несущей линии; лишь в последнее время в связи с появлением крыльев большой стреловидности и других форм в плане, характеризующих малым удлинением, возникла необходимость в методах другого типа. Для крыльев, размеры которых в направлении размаха и в направлении хорды почти одинаковы, нужно определить распределение нагрузки скорее по всей площади, нежели вдоль линии, а в предельном случае можно представить себе крылья настолько узких форм в плане, что наиболее важными для них будут данные о распределении сил вдоль хорды.

Что касается теории несущей поверхности для неустановившегося движения, то в настоящее время научные данные в этой области слишком неполны для возможности ее широкого развития и применения. Мы, однако, обращаем внимание читателя на многообещающие методы Лоуренса—Гербера (7-19) и Лейдлоу (7-20) применительно к течению несжимаемой жидкости. Вопрос о крыльях малого удлинения в дозвуковом и сверхзвуковом полете кратко разбирается в п. 7-5.

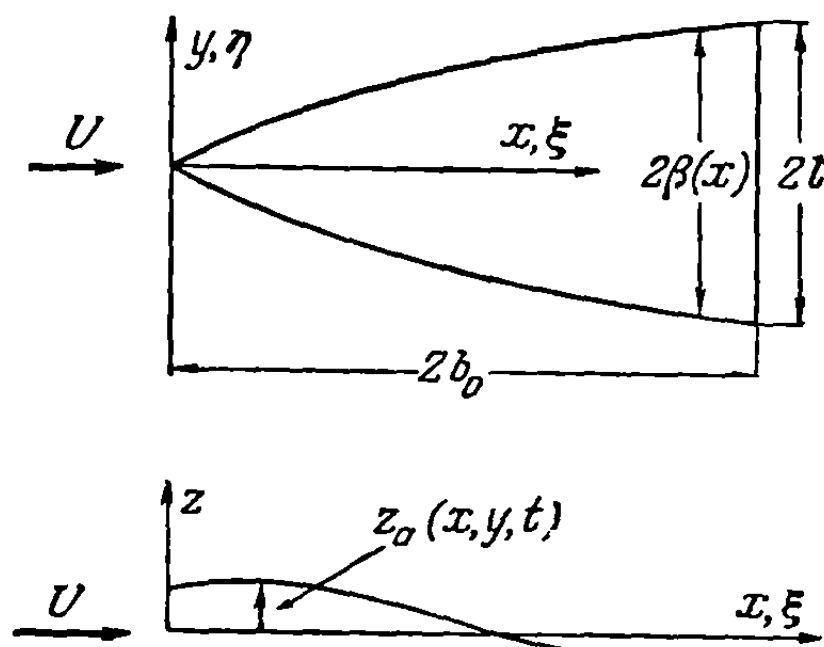
Определение нагрузки вдоль хорды представляет собой сравнительно простую задачу, если величина удлинения выражается малым дробным числом. В п. 5-5 (с) мы уже описывали методы Р. Т. Джонса, представляющие собой существенный вклад в решение задачи об установленном обтекании крыла. Его метод импульсов может быть использован также и для задач о неустановившемся движении, но, если с помощью некоторых допущений упростить интегральное уравнение теории несущей поверхности, то получаемое решение оказывается несколько более общим. Такой прием был предложен Ломаксом и Сладером [7-21], а данная здесь его разработка соответствует работе Фосса и Хассига [7-22]. При этом учитываются произвольные малые деформации в направлениях хорды и размаха, любым образом зависящие от времени; крыло должно быть тонким и иметь заостренную форму в плане с прямой задней кромкой, а единственное ограничение, касающееся формы передней кромки, состоит в том, что она ни в одной точке не должна быть наклонена под слишком большим углом к направлению полета.

Мы рассмотрим крыло, тип которого показан на фиг. 7-3. Из соотношения (5-128) можно вывести, что в пределах допущений теории малых возмущений потенциал скоростей возмущения, характеризующий течение несжимаемой жидкости, обусловленное движением  $z = z_a(x, y, t)$ , имеет следующую точную форму:

$$\varphi'(x, y, z, t) = \frac{z}{4\pi} \int_0^\infty \int_{-\beta(\xi)}^{\beta(\xi)} \frac{\gamma(\xi, \eta, t)}{[(y-\eta)^2 + z^2]} \left\{ 1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \right\} d\eta d\xi. \quad (7-78)$$

Здесь, как и в различных приложениях гл. 5,  $\gamma$  представляет собой циркуляцию, отнесенную к единице расстояния в направлении хорды.

Теперь введем то же самое допущение, которое было принято в п. 5-5 (с) для установленного течения. Заметим, что почти во всей области интегрирования в формуле (7-78) расстояния  $|y-\eta|$ , отсчитываемые в направлении размаха, малы по величине по сравнению с расстояниями  $|x-\xi|$  в направлении хорды. Если это верно и если, кроме того, мы заметим, что нас интересует решение в области, близкой к поверхности крыла, так что  $z$  является малой



Фиг. 7-3. Вид в плане и вид сбоку крыла с удлинением, меньшим 1.

величиной, то выражение в фигурных скобках формулы (7-78) аппроксимируется в следующем виде:

$$\left[1 + \frac{x - \xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}}\right] \cong \left[1 + \frac{(x - \xi)}{|x - \xi|}\right] = \begin{cases} 2 & \text{для } \xi \leq x, \\ 0 & \text{для } \xi > x. \end{cases} \quad (7-79)$$

Подстановка выражения (7-79) в формулу (7-78) приводит к тому же выводу, что и для установившегося течения, а именно, что на условия в данной точке крыла оказывают влияние только те явления, которые имеют место вверх по течению от этой точки:

$$\varphi'(x, y, z, t) = \frac{z}{2\pi} \int_0^x \int_{-\beta(\xi)}^{\beta(\xi)} \frac{\gamma(\xi, \eta, t)}{[(y - \eta)^2 + z^2]} d\eta d\xi. \quad (7-80)$$

Если применить часто используемые безразмерные независимые переменные

$$x^* = \frac{x}{b_0}, \quad y^* = \frac{y}{b_0}, \quad z^* = \frac{z}{b_0}, \quad (7-81)$$

то формула (7-80) записывается в виде

$$\varphi'(x^*, y^*, z^*, t) = \frac{z^* b_0}{2\pi} \int_0^{x^*} \int_{-\beta b_0}^{\beta b_0} \frac{\gamma(\xi^*, \eta^*, t)}{[(y^* - \eta^*)^2 + z^{*2}]} d\eta^* d\xi^*. \quad (7-82)$$

Чтобы облегчить решение путем понижения порядка математических особенностей, дадим следующее определение частного распределения подъемной силы в направлении размаха [сравнить с уравнением (5-199)]:

$$\Delta\varphi'(x^*, y^*, t) = b_0 \int_{x_1(y^*)}^{x^*} \gamma(\xi^*, y^*, t) d\xi^*. \quad (7-83)$$

Подставив  $\Delta\varphi'$  в соотношение (7-82) и изменив порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \varphi'(x^*, y^*, z^*, t) &= \frac{z^*}{2\pi} \int_{-\beta/b_0}^{\beta/b_0} \frac{\Delta\varphi'(x^*, \eta^*, t)}{[(y^* - \eta^*)^2 + z^{*2}]} d\eta^* = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta/b_0}^{\beta/b_0} \frac{\partial \Delta\varphi'}{\partial \eta^*} \operatorname{arctg} \left( \frac{y^* - \eta^*}{z^*} \right) d\eta^*. \end{aligned} \quad (7-84)$$

При интегрировании по частям, приводящем к выражению в последней строчке равенства (7-84), подинтегральная часть обращается в нуль вследствие равенства нулю самой функции  $\Delta\varphi'$  в точках передней кромки. Это имеет место, несмотря на наличие интегрируемой особенности, которую имеет там функция  $\gamma$ .

Граничное условие, которому должна удовлетворять функция  $\varphi'$  в области  $R_a$ , соответствующей поверхности крыла, представляет собой хорошо известное соотношение, связывающее вертикальную скорость частиц жидкости с движением крыла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} &= \frac{1}{b_0} \frac{\partial \varphi'}{\partial z^*} = \omega_a(x^*, y^*, t) = \\ &= \frac{\partial z_a}{\partial t} + U \frac{\partial z_a}{\partial x}; \quad \text{для } z^* = 0, (x^*, y^*) \text{ в области } R_a. \end{aligned} \quad (7-85)$$

Считая  $\omega_a$  известной функцией, подставим выражение (7-84) в уравнение (7-85), положим  $z^* = 0$  и выведем следующее интегральное уравнение:

$$\omega_a(x^*, y^*, t) = -\frac{1}{2\pi b_0} \oint_{-\beta(x^*)/b_0}^{\beta(x^*)/b_0} \frac{\partial \Delta\varphi'}{\partial \eta^*} \frac{d\eta^*}{y^* - \eta^*}. \quad (7-86)$$

Уравнение (7-86) решается непосредственно с помощью двух должным образом выбранных формул обращения Зенгена из п. 5-5(с). Эти формулы показывают, что, если

$$g(y^*) = \oint_{-1}^1 \frac{f(\eta^*)}{y^* - \eta^*} d\eta^*, \quad (5-204)$$

при выполнении вспомогательного условия

$$\int_{-1}^1 f(\eta^*) d\eta^* = 0, \quad (5-205)$$

то неизвестная функция  $f$  определяется формулой

$$f(y^*) = -\frac{2}{\pi \sqrt{1-y^{*2}}} \oint_{-1}^1 g(\eta^*) \frac{\sqrt{1-\eta^{*2}}}{(y^* - \eta^*)} d\eta^*. \quad (5-206)$$

Будучи применены к уравнению (7-86), эти формулы дают

$$\frac{\partial \Delta\varphi'(x^*, y^*, t)}{\partial y^*} = \frac{-2b_0}{\pi \sqrt{\beta^2(x^*) - b_0^2 y^{*2}}} \oint_{-\beta(x^*)/b_0}^{\beta(x^*)/b_0} \omega_a(x^*, \eta^*, t) \frac{\sqrt{\beta^2(x^*) - b_0^2 \eta^{*2}}}{(y^* - \eta^*)} d\eta^*. \quad (7-87)$$

Полное распределение нагрузки по поверхности крыла вычисляется из уравнения (7-87) с помощью непосредственных операций дифференцирования и интегрирования. Так, из уравнения (5-263) имеем

$$\Delta p_a = p_U - p_L = -\rho \left[ \frac{\partial \Delta\varphi'}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta\varphi'}{\partial x} \right] = -\rho \left[ \frac{\partial \Delta\varphi'}{\partial t} + \frac{U}{b_0} \frac{\partial \Delta\varphi'}{\partial x^*} \right], \quad (7-88)$$

где

$$\Delta\varphi'(x^*, y^*, t) = \int_{-\beta(x^*)/b_0}^{y^*} \frac{\partial \Delta\varphi'}{\partial \eta^*} d\eta^*. \quad (7-89)$$

Зависимость движения от времени является произвольной, но если ограничиться рассмотрением простых гармонических колебаний, то уравнение (7-88) принимает вид

$$\Delta \bar{p}_a e^{i\omega t} = -\rho \left[ i\omega \Delta \bar{\varphi}' + \frac{U}{b_0} \frac{\partial \Delta \bar{\varphi}'}{\partial x^*} \right] e^{i\omega t}. \quad (7-90)$$

В работе [7-22] показано, как представление деформаций крыла в направлении размаха с помощью ряда Фурье позволяет выразить все решение в алгебраической форме. Если ввести определение

$$\theta = \arccos \left[ \frac{y}{\beta(x)} \right] = \arccos \left[ \frac{b_0 y^*}{\beta(x)} \right] \quad (7-91)$$

и предположить, что

$$\omega_a(x^*, y^*, t) = f(x^*, t) \sum_{n=0}^N a_n \cos n\theta, \quad (7-92)$$

то уравнение (7-87) может быть проинтегрировано; в результате получим

$$\frac{\partial \Delta\varphi'}{\partial y^*} = -b_0 f(x^*, t) \left\{ 2a_0 \operatorname{ctg} \theta + a_1 \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} - 2 \sum_{n=2}^N a_n \sin n\theta \right\}. \quad (7-93)$$

Такое представление позволяет нам также с помощью уравнения (7-89) дать оценку  $\Delta\varphi'$ :

$$\Delta\varphi'(x^*, y^*, t) = f(x^*, t) \beta(x^*) \left\{ 2a_0 \sin \theta + a_1 \sin \theta \cos \theta + \right. \\ \left. + 2 \frac{\beta(x^*)}{b_n} \sin \theta \sum_{n=2}^N \frac{a_n}{n^2 - 1} [n \sin \theta \cos n\theta - \cos \theta \sin n\theta] \right\}. \quad (7-94)$$

При вычислении распределения давления с помощью уравнений (7-88) и (7-94) не следует забывать, что переменная  $\theta$  сама является функцией от  $x^*$ .

В случае установившегося движения крыла вышеприведенное решение остается справедливым независимо от числа Маха сжимаемого потока (см., например, [7-22]). Оно представляет собой также достаточно точное приближение простого гармонического движения при малых приведенных частотах. Однако, если колебания при движении становятся более быстрыми, то основным дифференциальным уравнением задачи будет волновое уравнение и сама задача оказывается значительно труднее (см., например, Мербт и Ландаль [7-23]). По аналогии с рассмотренным выше решением метод импульсов был распространен на систему крыло — корпус в числе других исследователей Брайсоном [7-24], а на неустановившийся сверхзвуковой поток — Майлсом [7-25].

Имеются большие сомнения в вопросе о пределах интервала удлинений, в котором справедлива теория тонкого крыла. Известно, что она дает завышенные оценки для аэродинамических нагрузок на треугольное крыло с углом при вершине в  $60^\circ$  как в установившемся, так и в неустановившемся движении, но величина удлинения в этом случае превышает 2. Такие попытки применения этой теории к исследованию флаттера, как в работе [7-22], имели лишь частичный успех. По-видимому, основная трудность состоит в том, что гипотеза Кутта о равенстве нулю разрыва давлений у задней кромки в общем случае не выполняется, тогда как данные экспериментов даже для крыльев очень узкой формы в плане демонстрируют явную тенденцию величины  $\Delta p_a$  к обращению в нуль в этой области. Чтобы преодолеть этот недостаток и достигнуть большего соответствия с своими собственными измерениями, Лейдло [7-20] предлагает ввести для всех выражений распределения давления в направлении хорды эмпирический поправочный множитель. График изменения этого множителя имеет форму полл-эллипса, а его выражение, в координатах фигуры 7-3, записывается в виде

$$F(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{(2b_0)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} x^{*2}}. \quad (7-95)$$

Результатом такой поправки явилось заметное улучшение точности расчета по меньшей мере одного значения скорости флаттера [7-26].

**7-5. Влияние сжимаемости на колебания крыльев конечного размаха.** Во введении было сделано несколько замечаний относительно теории неустановившегося трехмерного течения сжимаемой жидкости. В последнее время был достигнут существенный прогресс в теоретическом исследовании дозвукового, околозвукового и сверхзвукового диапазонов скорости, однако по степени систематизации и общности имеющиеся для каждого диапазона методы еще далеки от поставленных требований. В данном пункте, по необходимости кратком, мы даем, без подробных выводов, обзор некоторых из наиболее успешных методов подхода.

(а) *Случай дозвукового движения.* Исследование дозвукового обтекания связано с наибольшими трудностями. Отсутствие независимых верхней и нижней поверхностей крыла не позволяет использовать элементарное решение типа пульсирующего источника, а тот факт, что основное дифференциальное уравнение является гиперболическим, почти исключает возможность введения поправки

на сжимаемость, играющей столь важную роль при установившемся полете. Майлс [7-27] предложил такую поправку, но ее справедливость ограничивается только членами первой степени в выражении приведенной частоты, и она может применяться только при исследовании динамической устойчивости и низкочастотного флаттера. Рейсснер ([7-28]) в числе других опубликовал более полную теорию для крыльев относительно большого удлинения. Однако для применения метода Рейсснера требуется составить столь большое количество таблиц, что принятие этого метода для практических расчетов аэроупругости становится маловероятным.

Более систематичный и поэтому подающий большие надежды путь исследования дозвукового течения основан на численном решении интегрального уравнения, связывающего вертикальную скорость с распределением давления на срединную поверхность. Это уравнение, будучи составлено непосредственно на основании соответствующего представления потенциала ускорений или потенциала скоростей, имеет следующий вид:

$$\bar{w}_a(x^*, y^*) = \frac{e^{i\bar{\omega}x^*}}{4\pi\rho_\infty U} \lim_{z^* \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z^*} \int_{R_a} \Delta \bar{p}_a(\xi^*, \eta^*) e^{ik\xi^*} \times \\ \times \int_{\xi^*}^{\infty} e^{-i(kz^*/\beta^2)} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{e^{-i(\bar{\omega} M) r}}{r} \right) d\xi^* d\eta^*. \quad (7-96)$$

Здесь

$$r^2 = (x^* - \xi^*)^2 + \beta^2 (y^* - \eta^*)^2 + \beta^2 z^{*2}, \quad (7-97)$$

а остальные обозначения, как, например,

$$\beta = \sqrt{1 - M^2} \quad (7-98)$$

и

$$\bar{\omega} = \frac{kM^3}{\beta^2} = \frac{\omega b M^3}{U(1 - M^2)}, \quad (7-99)$$

мы уже вводили при рассмотрении теории двумерного движения в гл. 6.

Уравнение (7-96) можно записать в символической форме следующим образом:

$$4\pi\rho_\infty U \bar{w}_a(x^*, y^*) = \int_{R_a} \int \Delta \bar{p}_a(\xi^*, \eta^*) K(x^*, y^*, \xi^*, \eta^*; k, M) d\xi^* d\eta^*, \quad (7-100)$$

где функция  $K$  известна как ядро интегрального уравнения в теории неустановившегося трехмерного движения крыла (между прочим, такое представление уравнения можно использовать для любого диапазона скоростей полета, в котором существует линейная зависимость между давлением и вертикальной скоростью). К сожалению, ядро  $K$  имеет столь сильные особенности, что уравнение (7-100) не поддается численному решению. Интегрирование по частям члена с наиболее сильной особенностью по отсчитываемой вдоль размаха координате  $\eta^*$  позволяет в уравнении (7-96) положить  $z^*$  равным нулю и переписать это уравнение в виде

$$4\pi\rho_\infty U \bar{w}_a(x^*, y^*) = \oint_{R_a} \oint \frac{\partial \Delta \bar{p}_a}{\partial \eta^*} D(x^* - \xi^*, y^* - \eta^*) d\xi^* d\eta^* + \\ + \oint_{R_a} \oint \Delta \bar{p}_a(\xi^*, \eta^*) [F(x^* - \xi^*, y^* - \eta^*) + H(x^* - \xi^*, y^* - \eta^*)] d\xi^* d\eta^*. \quad (7-101)$$



Дважды сингулярными частями видоизмененного ядра в уравнении (7-101) являются

$$D(\alpha, \delta) = \frac{e^{-ik\alpha}}{|\delta|} \left[ 1 + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \delta^2}}{\alpha} \right] \quad (7-102)$$

и

$$F(\alpha, \delta) = ik e^{-ik\alpha} \left[ \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \delta^2}} + \frac{ik}{2} \ln(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \delta^2} - \alpha) \right]. \quad (7-103)$$

Часть ядра  $H$ , не содержащая особенностей и обращающаяся в установившемся течении в нуль вместе с  $k^2$ , имеет вид <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} H(\alpha, \delta) = e^{-ik\alpha} \left\{ -\frac{k}{|\delta|} K_1(k|\delta|) + \frac{1}{\delta^2} + \frac{i\pi k}{2|\delta|} [L_1(k|\delta|) - I_1(k|\delta|)] + \right. \\ \left. + \frac{ik}{\beta|\delta|} e^{-i(kM|\delta|/\beta)} + \frac{1}{M\delta^2} e^{-i(kM|\delta|/\beta)} - k^2 \int_0^{M/\beta} \sqrt{\zeta^2 + 1} e^{-ik|\delta|\zeta} d\zeta - \right. \\ \left. - \frac{\alpha [e^{i(k/\beta^2)[\alpha - M\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \delta^2}]} - 1]}{\delta^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \delta^2}} - \frac{ik}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \delta^2}} + \right. \\ \left. + \frac{k^2}{2} \ln(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \delta^2} - \alpha) - \frac{1}{M\delta^2} e^{i(k/\beta^2)[\alpha - M\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \delta^2}]} + \right. \\ \left. + \frac{ik}{M\delta^2} \int_0^{\infty} e^{i(k/\beta^2)[\lambda - M\sqrt{\lambda^2 + \beta^2 \delta^2}]} d\lambda \right\}. \quad (7-104) \end{aligned}$$

Часто повторяющиеся расчеты аэродинамических нагрузок с помощью соотношения (7-101) будут в значительной степени зависеть от наличия удовлетворительных таблиц функции  $H$ . Два способа расчета были уже успешно опробованы. Первый из них разработан секцией динамических нагрузок Авиационной лаборатории Лэнгли Национального совещательного комитета по авиации (НАСА) и основан на первоначальной публикации, описывавшей свойства интегрального уравнения (Уоткинс, Раньян и Вулстон, [7-29]). В основе схемы расчета для получения результата, определяющего, по существу, колеблющийся подковообразный вихрь в сжимаемом потоке, лежит интегрирование функции ядра в направлении размаха. Вихри должным образом распределяются по поверхности крыла, и значения их интенсивности определяются с помощью требования, чтобы вертикальная скорость удовлетворяла граничному условию в контрольных точках, число которых равно числу неизвестных. При использовании метода НАСА выяснилось, что основное внимание в этом методе уделяется распределению нагрузки вдоль размаха, и поэтому он более подходит для крыльев сравнительно большого удлинения. Однако это ограничение не является необходимым. Результаты некоторых типовых расчетов описаны Гарриком [7-30].

Второй прием решения уравнения (7-101) был предложен Фоссом [7-31]. Этот прием состоит в непосредственном численном интегрировании каждого из трех элементов правой части, выражаемых через значения  $\Delta \bar{p}_\alpha$  в центрах ряда прямоугольных отсеков, распределенных по срединной поверхности. Таким образом, получается система алгебраических уравнений, с помощью которых значения  $\Delta \bar{p}_\alpha$  могут быть вычислены по известным значениям  $\bar{w}_\alpha$  в тех же контрольных точках. Этот метод требует большего числа математических операций, чем метод НАСА, но он очень хорошо разработан и, как подтвердила проверка, является весьма подходящим для вычислений на цифровых машинах. Он предназначен специально для крыльев малого удлинения, конструктивные свойства которых или их формы колебаний могут быть описаны

<sup>1)</sup> Функции  $I_1$ ,  $K_1$  и  $L_1$  представляют собой модифицированные функции Бесселя и Струве первого порядка.



с помощью ряда конечных изменений наклона поверхности в центрах аэродинамических отсеков. Примеры вычислений для установившегося течения даются Фоссом, Зартаряном и Сюем [7-32].

(b) *Случай сверхзвукового движения.* Как было замечено в п. 7-1, вычисление нагрузок как при установившемся, так и при неустановившемся сверхзвуковом движении крыльев конечного размаха затрудняется тем, что большинство методов предназначается для определенного ограниченного класса форм в плане. Но, к счастью, для целей исследования флаттера по методу Рэлея—Ритца аэродинамическая теория несущей полосы оказывается значительно более точной и широко применимой, чем можно было ожидать на основании опыта исследования дозвукового движения крыльев. Этот факт обсуждался Уэлшем, Фоссом и Зартаряном [7-33], изучавшими форму выражений для обобщенных сил, входящих в уравнения флаттера, подобные уравнениям, выводимым в п. 9-5. Для крыла с чисто сверхзвуковыми передними кромками и прямой задней кромкой они подтвердили в числе прочих результатов точность теории несущей полосы при вычислении любой обобщенной силы, соответствующей деформации, произвольной в направлении хорды, но не зависящей от более высоких степеней отсчитываемой вдоль размаха переменной  $y$ , чем первая.

При необходимости учета трехмерности в неустановившемся сверхзвуковом течении оказались плодотворными два способа теоретического рассмотрения: способ наложения элементарных решений дифференциального уравнения в частных производных типа источника или диполя и способ применения преобразования Лапласа или Фурье, аналогичный способу, который часто применяется при изучении распространения световых и звуковых волн. Мы дадим здесь краткое описание первого способа и укажем литературу, касающуюся второго.

Основное дифференциальное уравнение для всех случаев было выведено в п. 5-1:

$$\nabla^2 \varphi' - \frac{1}{a_\infty^2} \left[ \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial \varphi'}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} \right] = 0. \quad (5-44)$$

Основное граничное условие для задачи об обтекании несущего тела имеет вид [ср. с уравнением (5-225) или (7-85)]

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial z} = w_a(x, y, t) = \frac{\partial z_a}{\partial t} + U \frac{\partial z_a}{\partial x} \quad \text{для } z = 0, (x, y) \text{ в области } R_a. \quad (7-105)$$

Дополнительное условие заключается в том, что  $\varphi'$  должно обращаться в нуль впереди передней кромки и впереди конусов Маха, идущих от концов крыла. Все возмущения должны излучаться во внешнее пространство, уходя в бесконечность. Большинство крыльев имеет сверхзвуковые задние кромки, а при наличии таких кромок нет нужды упоминать о гипотезе Кутта или об условиях в спутной струе, поскольку сигналы не могут распространяться вверх по потоку и достигать крыла.

По аналогии с формулой (6-226) для двумерного течения Гаррик и Рубинов [7-34] используют следующее решение уравнения (5-44), принадлежащее к типу трехмерного пульсирующего источника:

$$\varphi'_{,p} = \frac{A(\xi, \eta, \zeta)}{r} [f(t - \tau_2) + f(t - \tau_1)]. \quad (7-106)$$

Здесь

$$r = \frac{1}{\beta} \sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2 [(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]} \quad (7-107)$$

и

$$\tau_{2,1} = \frac{M(x - \xi)}{a_\infty(M^2 - 1)} \pm \frac{r}{a_\infty}. \quad (7-108)$$

Функция  $\varphi'_{sp}$  отличается от двумерного пульсирующего источника тем, что она характеризует непрерывный процесс образования возмущений в точке  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Их интенсивность, зависящая от времени, определяется величиной  $A(\xi, \eta, \zeta) f(t)$ . То обстоятельство, что в формуле (7-106) фигурируют  $f(t - \tau_1)$  и  $f(t - \tau_2)$ , является отражением того факта, что возмущение, вышедшее в любой момент из точки  $(\xi, \eta, \zeta)$ , воспринимается в точке  $(x, y, z)$  дважды: через промежуток времени  $\tau_1$  и через промежуток времени  $\tau_2$ . Величина  $\tau_1$  равна времени, необходимому для того, чтобы расширяющаяся сферическая волна впервые достигла точки  $(x, y, z)$ , а  $\tau_2$  характеризует время, проходящее до того момента, когда эта волна снова проходит через ту же точку, будучи относимой вниз по течению. В связи с этими особенностями функция  $\varphi'_{sp}$  называется иногда запаздывающим потенциалом. Величины запаздывания  $\tau_1$  и  $\tau_2$  равны друг другу на поверхности конуса Маха  $r = 0$ , направленного вниз по потоку от точки  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Вне этого конуса функция  $\varphi'_{sp}$  из физических соображений полагается равной нулю.

Если трехмерные пульсирующие источники распределены в некотором слое, то они, подобно двумерным источникам, являются однозначными функциями нормальной составляющей скорости. Так, мы распределяем источники по некоторой площади в плоскости  $\xi\eta$ :

$$\varphi'(x, y, z, t) = \int_S \int A(\xi, \eta) \frac{f(t - \tau_2) + f(t - \tau_1)}{r} d\xi d\eta, \quad (7-109)$$

где  $S$  — часть площади слоя, пересекаемая направленным вперед конусом Маха с вершиной в точке  $(x, y, z)$ . Можно показать, что

$$\frac{\partial \varphi'(x, y, 0, t)}{\partial z} = -2\pi\beta^2 A(x, y) f(t). \quad (7-110)$$

Принимая во внимание граничное условие (7-105) и имея в виду, что функция  $w_a$  известна во всей области интегрирования, мы можем написать:

$$\varphi'(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \int \frac{w_a(\xi, \eta, t - \tau_2) + w_a(\xi, \eta, t - \tau_1)}{\sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2[(y - \eta)^2 + z^2]}} d\xi d\eta. \quad (7-111)$$

В случае движения по простому гармоническому закону

$$\begin{aligned} w_a(\xi, \eta, t - \tau_2) + w_a(\xi, \eta, t - \tau_1) &= \bar{w}_a(\xi, \eta) e^{i\omega t} [e^{-i\omega\tau_2} + e^{-i\omega\tau_1}] = \\ &= \bar{w}_a(\xi, \eta) e^{i\omega t} \left[ 2e^{-i\omega \left(\frac{\tau_2 + \tau_1}{2}\right)} \cos\left(\omega \frac{\tau_2 - \tau_1}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (7-112)$$

Тогда при  $z = 0^+$  определения величин  $\tau_1$  и  $\tau_2$  сводят формулу (7-111) к виду

$$\varphi'(x, y, 0^+, t) = -\frac{e^{i\omega t}}{\pi} \int_S \int \bar{w}_a(\xi, \eta) \frac{e^{-i\bar{\omega} \left(\frac{x - \xi}{b}\right)} \cos\left(\frac{\bar{\omega}}{M} \frac{r_0}{b}\right)}{r_0} d\xi d\eta, \quad (7-113)$$

где

$$r_0 = \sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2(y - \eta)^2}, \quad (7-114)$$

а параметр  $\bar{\omega}$  определяет приведенную частоту для случая сжимаемого потока. Для нижней поверхности ( $z = 0^-$ ) следует только изменить знак функции  $\varphi'$ .

Решение (7-113) может быть непосредственно использовано для описания движения крыльев, имеющих совершенно независимые верхние и нижние поверх-

ности. Майлс называет их „крыльями простой формы в плане“. Примерами их служат широкое треугольное или дельтавидное крыло (передние кромки лежат за пределами линий Маха, проходящих через вершину) и его различные модификации вроде серповидных крыльев и крыльев в форме наконечника стрелы. Нельсон [7-35] использовал метод пульсирующих источников для определения сил и моментов, действующих на недеформируемые крылья указанных типов, которые совершают колебания с изменением угла тангажа и вертикальным перемещением. Некоторые интегралы, встречающиеся в его выкладках, не могут быть выражены через табулированные функции. Чтобы преодолеть это затруднение, Нельсон разлагает ядро в ряд по степеням параметра  $\bar{\omega}$  и получает результаты, справедливые с точностью до третьего порядка. Другие исследования этого типа были опубликованы Майлсом [7-36] и Фрелихом [7-37].

Другими примерами применения метода пульсирующих источников служат работы Стюарта и Ли ([7-38] — [7-40]) по обтеканию крыльев прямоугольной формы в плане и работа Чжана [7-41] по обтеканию стреловидных крыльев. Эти авторы исходят из справедливости теоремы Эварда об эквивалентных областях интегрирования на крыле и за его пределами (п. 6-3), так что применимость их формул ограничена малыми значениями приведенной частоты.

Рассматривая обтекание прямоугольного крыла, Уоткинс [7-42] модифицировал применение метода пульсирующих источников. В этом случае имеет место взаимодействие между верхней и нижней поверхностями в областях, ограниченных линиями Маха, идущими внутрь крыла от концов передних кромок. В такой области Уоткинс располагает слой распределенных диполей, полученный с помощью вычисления нормальной производной по слою источников. Он устанавливает связь между решениями задачи о колебательном движении и соответствующей задачи об установившемся движении. Его выкладки связаны с разложением по степеням  $\bar{\omega}$  вплоть до третьей степени, но Нельсон, Рейни и Уоткинс [7-43] продолжили это разложение до седьмой степени. Диполи были также успешно использованы для представления колебаний дельтавидных крыльев с дозвуковыми кромками ([7-44] и [7-45]). С помощью преобразования дифференциального уравнения и применения методов теории комплексного переменного та же задача была решена Хаскинсом и Фальковичем [7-46].

Обзор методов наложения при исследовании колебаний крыльев в сверхзвуковом потоке был бы неполным без ссылки на широкоохватывающие работы Красильщиковой [7-47] и Франкля и Карповича [7-48]. Упомянем также о решении Ротта [7-49] для случая прямоугольного крыла. Множество задач о переходном движении, аналогичных перечисленным, изучалось Ломэксом и другими авторами [7-50], использовавшими идею о представлении срединной поверхности крыла как поверхности акустической волны.

Так как в каждой из упомянутых выше работ затрагивается довольно узкий класс форм крыльев, то в заключение этой части нашего обзора обратим внимание читателя на схему использования уравнения (7-113), предложенную группой Пайнса в Республиканской авиационной корпорации ([7-51] и [7-52]). По-видимому, этот метод может дать возможность рассмотреть при наличии некоторых численных приближений колебательное движение крыльев произвольной формы в плане с дозвуковыми или сверхзвуковыми кромками. Поверхность крыла и прилегающая к ней область возмущенного течения в плоскости  $xu$  разделяются некоторым удобным образом на элементарные площадки. Предполагается, что  $\bar{\omega}_a$  или имеет постоянную величину на каждой из этих площадок, или изменяется известным образом по сравнению с своим значением в центре площадки. Тогда потенциал скоростей возмущения (или связанное с ним простым соотношением давление) в какой-либо точке  $(x, y)$  определяется с помощью вычисления двойного интеграла от известных значений  $\bar{\omega}_a$  в центрах всех площадок, лежащих внутри той области, которая может оказывать влияние на

точку  $(x, y)$ . Таким образом, мы приходим к матричному уравнению вида

$$\{\bar{\varphi}'\} = [A_\varphi] \{\bar{\omega}_a\} \quad (7-115)$$

или

$$\{\Delta\bar{p}_a\} = [A_p] \{\bar{\omega}_a\}, \quad (7-116)$$

где столбцевые матрицы в левых частях уравнений составлены из значений функции  $\bar{\varphi}'$  или амплитуды давления  $\Delta\bar{p}_a$  в центрах всех интересующих нас элементарных площадок. Комплексные числа, входящие в матрицы  $[A_\varphi]$  или  $[A_p]$ , известны под названием аэродинамических коэффициентов влияния. Каждый из них является функцией числа Маха, приведенной частоты, зависящей от характерного размера элементарной площадки, и двух координат, определяющих расстояния вдоль осей  $x$  и  $y$  между теми точками, которым соответствуют данные значения  $\bar{\omega}_a$ , и точками, в которых вычисляются значения  $\bar{\varphi}'$  или  $\Delta\bar{p}_a$ . Подробности определения коэффициентов влияния будут изменяться в зависимости от исследуемого случая движения. Для малых значений приведенных частот и больших размеров площадок эти коэффициенты могут быть аппроксимированы значением функции ядра

$$\frac{e^{-i\bar{\omega} \left(\frac{x-\xi}{b}\right)} \cos\left(\frac{\bar{\omega}}{M} \frac{r_0}{b}\right)}{r_0}$$

в центре  $(\xi, \eta)$  соответствующей площадки.

В случае крыльев с чисто сверхзвуковыми кромками каждое значение  $\bar{\omega}_a$  для столбцевой матрицы в правых частях уравнений (7-115) и (7-116) задается. Тогда вычисление распределения давления сводится просто к численному интегрированию и, как показано в работе [7-51], при малых  $k$  этот процесс оказывается достаточно точным и систематичным. Если области возмущенного движения встречаются за пределами формы крыла в плане, то в них  $\bar{\omega}_a$  неизвестно, но может быть приближенно вычислено при использовании верного для уравнения (7-116) условия, что  $\Delta\bar{p}_a$  должно обращаться в нуль в центре каждой элементарной площадки, лежащей в такой области. Между прочим, метод Пайнса оказывается полезным для изучения установившегося сверхзвукового обтекания произвольно деформируемых крыльев. Он особенно пригоден для исследования задач, подобных задачам о продольной и поперечной дивергенции, если конструкционные коэффициенты влияния известны для той же последовательности точек, с которой связаны аэродинамические коэффициенты влияния.

В п. 6-6 для случая колебаний двумерного профиля в сверхзвуковом потоке было уже продемонстрировано применение преобразования Лапласа по отсчитываемой в направлении потока координате. Тот же прием в сочетании с преобразованием Фурье по координате  $y$  оказался весьма эффективным при рассмотрении крыльев конечного размаха с прямыми передними кромками, а также крыльев других форм, которые, однако, могут быть легко приведены к вышеуказанной форме путем поворота кромок. Майлс опубликовал несколько статей, посвященных технике преобразований (см., например, работы [7-53] и [7-54]). Другие применения этого метода охарактеризованы Стюартсоном в работе [7-55]. Раздел книги „Modern Developments in Fluid Dynamics — High Speed Flow“<sup>1)</sup>, написанный Темплом, содержит ценные соображения общего характера, связанные с рассматриваемым здесь методом. Недостаток места не позволяет нам воспроизвести здесь какие-либо результаты этих авторов.

1) См. „Современное состояние аэродинамики больших скоростей“ под общей редакцией Л. Хсуарта, т. 1, ИЛ, Москва, 1955. — Прим. ред.

(с) *Теорема об обращении течения.* При неустановившемся движении несущих поверхностей в сжимаемом газе имеют место определенные соотношения взаимности. Хотя в прошлом они использовались на практике сравнительно мало, но, бесспорно, сыграют свою роль в деле упрощения аэродинамической трактовки задач аэроупругости. Большинство этих соотношений устанавливает равенство между некоторыми интегралами с весом от нагрузки, возникающей за счет движения крыла в определенном направлении, и, с другой стороны, за счет движения того же крыла в противоположном направлении. В некоторых случаях эти соотношения связаны еще с каким-либо качеством потока, например с циркуляцией. Соотношения взаимности выводятся с помощью применения теоремы Грина к дифференциальному уравнению (5-44) и соответствующим граничным условиям. В соответствии с этим их справедливость основана на предположении о малости возмущений, приводящем к линейризации. Весьма подробный разбор этого вопроса с интересными примерами дают Хислет и Шпрейтер [7-57].

Для исследователя флаттера наиболее полезным из соотношений взаимности является так называемая теорема об обращении течения при простом гармоническом движении. Флэкс [7-58] выражает эту теорему следующей формулой:

$$\iint_{R_a} \Delta \bar{p}_{aF}(x, y) \bar{w}_{aR}(x, y) dx dy = \iint_{R_a} \Delta \bar{p}_{aR}(x, y) \bar{w}_{aF}(x, y) dx dy. \quad (7-117)$$

Здесь, как и выше,  $R_a$  обозначает часть плоскости  $x, y$ , занятую проекцией почти плоского крыла. Функция  $\Delta \bar{p}_{aF} e^{i\omega t}$  характеризует распределение разности давлений, обусловленной колебаниями крыла при распределении вертикальной скорости, соответствующем функции  $\bar{w}_{aF} e^{i\omega t}$ , когда невозмущенный поток движется в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $U$  (фиг. 7-4); функция  $\Delta \bar{p}_{aR} e^{i\omega t}$  — нагрузка, вызываемая движением  $\bar{w}_{aR} e^{i\omega t}$ , когда невозмущенный поток движется с той же скоростью в отрицательном направлении оси  $x$ , то есть при обратном направлении полета. Указанное равенство справедливо в любом диапазоне скорости — при течении несжимаемой жидкости, дозвуковом или сверхзвуковом течении — во всех случаях, когда задача описывается уравнением (5-44) или некоторой его упрощенной формой.

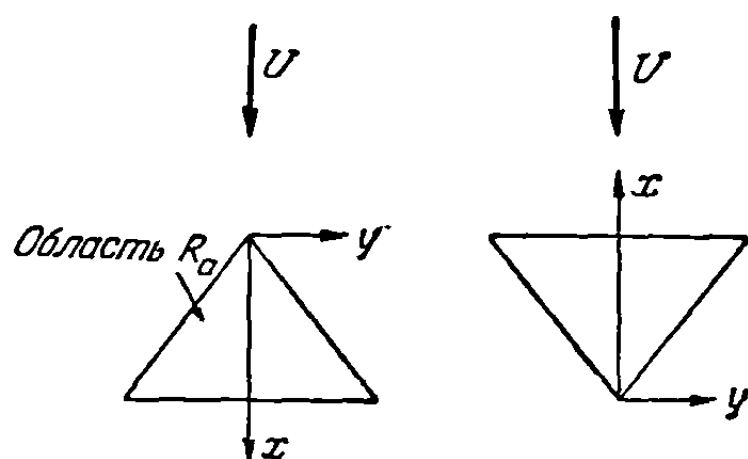
Один элементарный вывод, который можно сейчас же сделать из уравнения (7-117), состоит в том, что в установившемся течении ( $\omega = 0$ ) дополнительная подъемная сила или подъемная сила, обусловленная изменениями угла атаки, инвариантна по отношению к направлению движения крыла. Для доказательства этого положим, что

$$w_{aR}(x, y) = w_{aF}(x, y) = U\alpha; \quad (7-118)$$

тогда после сокращения на постоянный множитель  $U\alpha$  получим:

$$L_F = - \iint_{R_a} \Delta p_{aF}(x, y) dx dy = - \iint_{R_a} \Delta p_{aR}(x, y) dx dy = L_R. \quad (7-119)$$

Так как площади крыльев и значения динамического давления полета одинаковы, то уравнение (7-119) показывает, что наклоны кривых изменения подъемной силы для прямого и обратного течения равны между собой. Аналогичные результаты получаются без труда для момента тангажа, момента крена и т. п.



Фиг. 7-4. Одно и то же дельта-видное крыло в прямом и обратном потоке.



Специалист по аэроупругости, исследующий уравнения движения крыла при флаттере, может применить один из двух вариантов использования уравнения (7-117). Первый из них описывается в п. 9-9 и связан с заменой аэродинамического члена в уравнении флаттера крыла малого удлинения интегралом, содержащим характеристику функции формы движения  $\bar{z}_a(x, y)$  и умноженным на отношение известной функции распределения давления (которую Фосс называет аэроупругой функцией влияния) к функции влияния конструкции крыла, характеризующей связь между нагрузкой и прогибом.

Второй, более прямой вариант использования уравнения (7-117) состоит в упрощении с его помощью расчета обобщенных сил, входящих в уравнения флаттера Рэля — Ритца, подобные тем, которые выведены в п. 9-5. Если мы будем рассматривать  $\bar{\psi}_{an}(x, y)$  как известную характеристику формы движения, то каждая из обобщенных сил в точности выражается в форме левой части уравнения (7-117). Если бы расчет требуемых аэродинамических данных для обращенного обтекания исследуемой формы крыла был проще, нежели для прямого, то, как показывает теорема об обращении течения, оценку искомой обобщенной силы можно было бы с тем же успехом делать на основании данных о распределении давления, обусловленном заданным колебательным движением в новом направлении. Хороший пример, подтверждающий полезность этого результата, дает сверхзвуковой полет дельтавидного крыла, показанного на фиг. 7-4. Если все кромки являются сверхзвуковыми, то крыло обращенной формы в плане имеет прямую переднюю кромку и сверхзвуковую заднюю кромку. Вычисления интегралов, которые надо провести в этом случае для определения давлений, не намного труднее, чем для чисто двумерного движения, и намного легче вычислений для стреловидной передней кромки исходного крыла. Уолш, Фосс и Зартарян [7-33] воспользовались этим обстоятельством при исследовании точности аэродинамической теории несущей полосы в приложении к расчетам сверхзвукового флаттера.

(d) *Упрощение дифференциального уравнения и граничных условий в специальных случаях.* Линь, Рейсснер и Цянь [7-59], проводя систематическое изучение условий, при которых различные члены становятся пренебрежимо малыми и могут быть выпущены из дифференциального уравнения и граничных условий потенциального течения с малыми возмущениями, открыли новую область исследований в аэродинамической теории неустановившихся движений. Майлс [7-60] дал обобщение первоначальной работы указанных выше авторов, посвященной двумерным профилям, на крылья конечного размаха. Существуют четыре безразмерных параметра, относительные величины которых определяют те области, где задача может быть упрощена: число Маха, приведенная частота (или постоянная, выражающая характеристику изменения неустановившегося движения во времени), удлинение крыла и относительная толщина или безразмерная амплитуда колебаний.

Как и следовало ожидать, легко поддаются классификации такие хорошо известные специальные случаи, как случай несжимаемого потока ( $M \ll 1$ ) и случай установившегося течения ( $k \ll 1$ ). Имеется, однако, ряд значительно менее известных случаев, когда дифференциальное уравнение (5-44) может быть заменено соотношениями, математически более простыми. Один из них, а именно случай крыла очень малого удлинения, совершающего быстрые колебания, использовали Мербт и Ландаль в упоминавшейся работе [7-23]. „Поршневая теория“, описанная нами в гл. 6, является примером очень сильного упрощения, когда при очень больших значениях приведенной частоты дифференциальное уравнение переходит в одномерное волновое уравнение.

**7-6. Неустановившееся движение тел с нулевой подъемной силой.** В аэроупругости, как и в других сферах приложения аэродинамической теории к самолетостроению, часто встречаются такие задачи, в которых вместе с движе-

нием несущей поверхности происходит движение массивного тела, характеризующегося нулевой подъемной силой. При изучении флаттера, дивергенции и т. п. аэродинамическими нагрузками на такие тела в прошлом зачастую пренебрегали. Однако размеры корпусов реактивных двигателей, наружных топливных баков и тому подобных вместилищ становятся столь большими, что допущение о пренебрежимости указанных нагрузок не всегда справедливо; кроме того, за счет таких степеней свободы, как изменение угла тангажа для фюзеляжа, в уравнения флаттера могут войти существенные силы и моменты. Простейший способ учета влияния такого тела состоит в приложении к крылу и хвостовому оперению добавочных нагрузок, равных той нагрузке на тело, которую оно воспринимало бы, совершая то же самое движение в отсутствии остальных элементов самолета. При этой процедуре пренебрегают аэродинамической интерференцией — дополнительным течением около тела, индуцируемым крылом или хвостовым оперением, и наоборот. Желая учесть интерференцию при неустойчивом движении, мы сталкиваемся со значительно большими теоретическими трудностями, которые были преодолены только в нескольких специальных случаях (см., например, Брайсон [7-24]). Разбор приближенной теории интерференции дали Эшли, Зартарян и Нейлсон [7-6].

Обращаясь к исследованию неустойчивого течения около изолированного обтекаемого тела, можно выделить три общих метода, применявшихся к изучению различных примеров.

(1) Точное удовлетворение дифференциальному уравнению и граничным условиям; подобный метод применил Ламб [7-61] для произвольных эллипсоидов в несжимаемой жидкости.

(2) Линеаризация задачи в предположении, что поперечные размеры малы в сравнении с длиной в направлении полета (см. Майлс [7-62]).

(3) Пренебрежение отклонением от картины двумерного течения на основании физических соображений и использование метода импульсов для плоскостей, перпендикулярных к направлению полета. Этот процесс был впервые применен Мунком к телам, характеризующимся нулевой подъемной силой.

В настоящем пункте мы дадим краткий обзор первого и третьего методов. Что касается результатов линеаризованной теории, то многие из них с тем же успехом могут быть получены по методу импульсов. Следует, однако, сформулировать один из важных выводов более строгой теории: до тех пор пока скорости потока в поперечном направлении малы в сравнении со скоростью полета, вычисленные в первом приближении силы и моменты не зависят от числа Маха сжимаемого потока.

Как расчет, так и эксперимент показывают, что линеаризованные решения не являются точными для тел типа мотогондолы, имеющих удлинение, меньшее примерно семи. Бесплезно, однако, применять точную трехмерную теорию в случае объекта произвольной формы, и поэтому мы часто заменяем заданную внешнюю поверхность тела эквивалентным эллипсоидом. По-видимому, в случае неустойчивого движения такая процедура дает в результате удовлетворительные данные об аэродинамических нагрузках при докритических числах Маха, если только удлинение не настолько мало, что позади тела создается большая, отделившаяся от поверхности спутная струя.

В п. 5-2 мы коротко разобрали случай вытянутого эллипсоида вращения. Обращаясь к рассмотрению эллипсоида общего вида с тремя неравными между собой главными осями  $2a > 2b > 2c$ , напишем выражение для полной кинетической энергии, обусловленной его движением в массе жидкости, неподвижной в бесконечности [7-61]:

$$T = \frac{\rho}{2} (\text{объем}) [k_1 U_1^2 + k_2 U_2^2 + k_3 U_3^2] + \frac{\rho}{2} [k'_1 J_1 \Omega_1^2 + k'_2 J_2 \Omega_2^2 + k'_3 J_3 \Omega_3^2], \quad (7-120)$$



где  $U_1, U_2, U_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  представляют собой абсолютные линейные скорости вдоль главных осей, проходящих через центр, и угловые скорости относительно тех же осей, а  $J_1, J_2$  и  $J_3$  — главные моменты инерции эллипсоида. Здесь

$$(\text{объем}) = \frac{4}{3} \pi abc, \quad (7-121a)$$

$$J_1 = \frac{1}{5} (b^2 + c^2) (\text{объем}). \quad (7-121b)$$

Выражения для шести инерционных коэффициентов таковы:

$$k_1 = \frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0}, \quad k_2 = \frac{\beta_0}{2 - \beta_0}, \quad k_3 = \frac{\gamma_0}{2 - \gamma_0}, \quad (7-122a, b, c)$$

$$k'_1 = \frac{(b^2 - c^2)(\gamma_0 - \beta_0)}{(b^2 + c^2)[2(b^2 - c^2) + (b^2 + c^2)(\beta_0 - \gamma_0)]}, \quad (7-122d)$$

причем выражения для  $k'_2$  и  $k'_3$  получаются из формулы (7-122d) путем циклической перестановки. Величины  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ , входящие в эти выражения, представляют собой некоторые определенные интегралы, которые можно выразить через эллиптические интегралы:

$$\alpha_0 = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}, \quad (7-123a)$$

$$\beta_0 = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}, \quad (7-123b)$$

$$\gamma_0 = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}. \quad (7-123c)$$

Например, выражение для  $\gamma_0$  можно написать так:

$$\gamma_0 = \frac{2abc}{(b^2 - c^2) \sqrt{a^2 - c^2}} \left[ \frac{b}{ac} \sqrt{a^2 - c^2} - E(\varphi, \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}) \right], \quad (7-124a)$$

где

$$\varphi = \text{arctg} \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}. \quad (7-124b)$$

В соответствии с уравнением (7-120) мы получим следующие составляющие количества движения и кинетического момента жидкости, вызванные движением эллипсоида:

$$\begin{aligned} (a) I_1 &= k_1 \rho U_1 \times (\text{объем}), & (d) H_1 &= k'_1 \rho \Omega_1 J_1, \\ (b) I_2 &= k_2 \rho U_2 \times (\text{объем}), & (e) H_2 &= k'_2 \rho \Omega_2 J_2, \\ (c) I_3 &= k_3 \rho U_3 \times (\text{объем}), & (f) H_3 &= k'_3 \rho \Omega_3 J_3. \end{aligned} \quad (7-125)$$

Используя обозначения, применявшиеся прежде в связи с рассмотрением неустановившегося движения тонких крыльев, предположим, что эллипсоид движется вперед с постоянной скоростью  $U$  и вертикально вниз со скоростью  $\dot{h}(t)$ , в то время как наибольшая из главных осей 1 наклонена под переменным малым углом  $\alpha(t)$  к направлению скорости  $U$  (фиг. 7-5). Общее количество движения жидкости в векторной форме выражается так:

$$\begin{aligned} I_{\text{общ.}} &= I_1 \mathbf{i}_1 + I_2 \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_1 k_1 \rho \times (\text{объем}) \times [U \cos \alpha - \dot{h} \sin \alpha] + \\ &\quad + \mathbf{i}_2 k_2 \rho \times (\text{объем}) \times [U \sin \alpha + \dot{h} \cos \alpha], \end{aligned} \quad (7-12b)$$

причем  $i$  характеризует единичный вектор, направление которого определяется его индексом. Уравнение (7-126) можно записать также с составляющими по фиксированным в пространстве направлениям  $U$  и  $h$ :

$$I_{\text{общ.}} = I_U i_U + I_h i_h, \quad (7-127)$$

где

$$I_U = I_1 \cos \alpha + I_2 \sin \alpha = \\ = \rho \times (\text{объем}) \times \{k_1 [U \cos^2 \alpha - \dot{h} \sin \alpha \cos \alpha] + k_2 [U \sin^2 \alpha + \dot{h} \sin \alpha \cos \alpha]\} \quad (7-128)$$

и

$$I_h = \rho \times (\text{объем}) \times \{ -k_1 [U \cos \alpha \sin \alpha - \dot{h} \sin^2 \alpha] + \\ + k_2 [U \sin \alpha \cos \alpha + \dot{h} \cos^2 \alpha] \}. \quad (7-129)$$

Горизонтальные и вертикальные силы, с которыми жидкость действует на эллипсоид, являются реакциями на субстанциальные скорости изменения составляющих  $I_U$  и  $I_h$ :

$$D = \frac{D I_U}{D t} = (k_2 - k_1) \times (\text{объем}) \times \rho U \dot{\alpha} \sin 2\alpha + \\ + \frac{1}{2} (k_2 - k_1) \times (\text{объем}) \times \rho [\ddot{h} \sin 2\alpha + 2\dot{h} \dot{\alpha} \cos 2\alpha], \quad (7-130)$$

$$L = \frac{D I_h}{D t} = (k_2 - k_1) \times (\text{объем}) \times \rho [U \dot{\alpha} \cos 2\alpha - \dot{h} \dot{\alpha} \sin 2\alpha] + \\ + (k_2 \cos^2 \alpha + k_1 \sin^2 \alpha) \times (\text{объем}) \times \rho \ddot{h}. \quad (7-131)$$

Описываемое здесь движение является симметричным (продольным в том смысле, в каком этот термин применяется в авиации), так что суммарный вектор кинетического момента всегда направлен вдоль оси 3. Общий момент, характеризующий действие жидкости на тело, представляет собой поэтому момент тангажа и равен взятой с обратным знаком абсолютной скорости изменения кинетического момента, измеренного относительно оси, закрепленной в пространстве и совпадающей в данный момент времени с осью 3.

Если момент  $M_3$  считать положительным при отклонении носовой части тела вверх, то

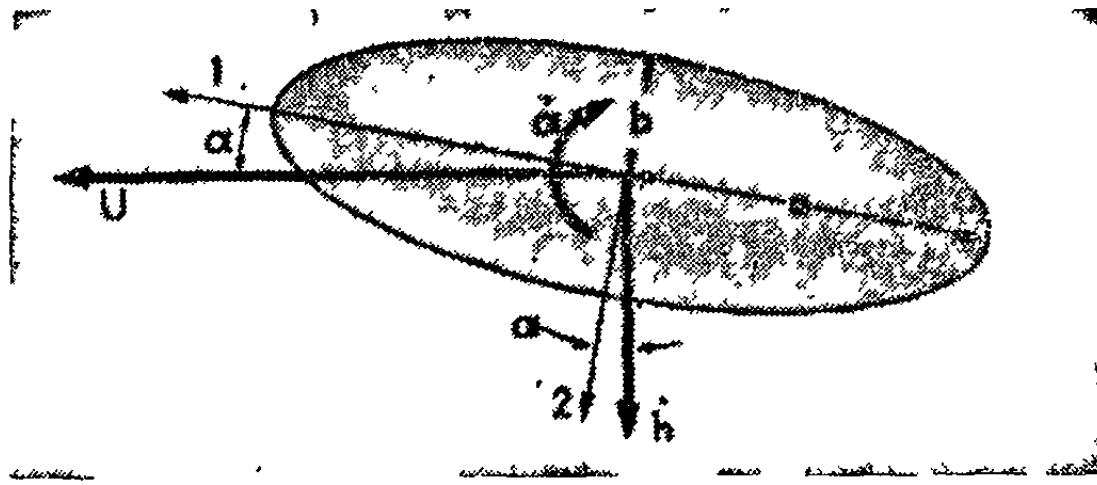
$$M_3 = \frac{D H_3}{D t} = \frac{\partial H_3}{\partial t} + I_h U - I_U \dot{h} = -\frac{\partial}{\partial t} [k'_3 \rho J_3 \dot{\alpha}] + I_h U - I_U \dot{h} = \\ = -k'_3 \rho J_3 \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} (k_2 - k_1) \times (\text{объем}) \times \rho (U^2 - \dot{h}^2) \sin 2\alpha + \\ + \frac{1}{2} (k_2 - k_1) \times (\text{объем}) \times \rho U \dot{h} \cos 2\alpha. \quad (7-132)$$

Формулы (7-130) — (7-132) содержат члены, нелинейные по отношению к малым величинам  $h$  и  $\alpha$ . В указанных формулах они стоят в совершенно точном виде, но для расчетов по аэроупругости удобнее провести их линеаризацию:

$$D = 0, \quad (7-133)$$

$$L = (k_2 - k_1) \times (\text{объем}) \times \rho U \dot{\alpha} + k_2 \times (\text{объем}) \times \rho \ddot{h}, \quad (7-134)$$

$$M_3 = -k'_3 \rho J_3 \ddot{\alpha} + (k_2 - k_1) \times (\text{объем}) \times \rho [U^2 \alpha + U \dot{h}]. \quad (7-135)$$



Фиг. 7-5. Эллипсоид, движущийся с постоянной горизонтальной скоростью и с переменными вертикальной  $\dot{h}(t)$  и угловой  $\alpha(t)$  скоростями.

Второй член в правой части формулы (7-135) можно сравнить с правой частью формулы (5-53); он выражает собой дестабилизирующий момент, действующий на тело при поступательном перемещении с малым углом атаки  $\alpha + \dot{h} U$ . Этот момент представляет собой единственную суммарную аэродинамическую нагрузку при установившемся полете, если не считать очень небольшой подъемной силы, обусловленной отрывом пограничного слоя. Для использования формул (7-134) и (7-135) в приложениях к задачам аэроупругости в работе [7-6] приведена таблица необходимых инерционных коэффициентов.

В связи с проведенным выше разбором движения жидкости во внешнем по отношению к эллипсоиду пространстве стоит упомянуть, что теория Ламба охватывает также случай эллипсоидальной оболочки, наполненной несжимаемой жидкостью. Поэтому можно использовать данные результаты для расчета нагрузок, обусловленных движением жидкости внутри большого бака, форма которого может быть достаточно точно аппроксимирована эллипсоидом. Это явление может оказать существенное влияние на некоторые виды флаттера крыла. Частично заполненные баки с внутренними перегородками нельзя рассматривать таким же методом, и теоретическая задача получается в этих случаях более трудной.

Если обтекаемое тело или фюзеляж достаточно тонки, то мы можем воспользоваться методом импульсов, основанным на следующем допущении Мунка и Р. Т. Джонса: возмущенное течение является двумерным в плоскостях, перпендикулярных к направлению полета. Эта схема была кратко описана в п. 5-5 (с). Для учета возможности изгибных деформаций предположим, что однородное течение со скоростью  $U$  происходит параллельно оси  $x$  и что поперечное движение продольной оси тела определяется произвольной функцией  $z_a(x, t)$ . Такое движение сводится к специальному случаю вертикального перемещения и изменения угла тангажа твердого тела, когда

$$z_a = -h(t) - \alpha(t)[x - x_B], \quad (7-136)$$

где  $x_B$  характеризует точку на оси  $x$ , через которую проходит ось поворота.

Если местный угол атаки оси остается малым, то направленная вдоль оси  $z$  скорость любого поперечного сечения по отношению к покоящейся жидкости будет такова:

$$w_a(x, t) = U \frac{\partial z_a}{\partial x} + \frac{\partial z_a}{\partial t}. \quad (7-137)$$

Соответствующая составляющая количества движения жидкости, содержащейся между двумя плоскостями  $yz$ , разделенными расстоянием  $dx$ , выражается в виде

$$dl_z = \rho_\infty S dx \left[ U \frac{\partial z_a}{\partial x} + \frac{\partial z_a}{\partial t} \right]. \quad (7-138)$$

Здесь  $\rho_\infty S(x)$  характеризует отнесенную к единице длины присоединенную массу цилиндра, имеющего ту же площадь сечения и ту же форму, что и данное тело, т. е., в случае кругового сечения радиуса  $R$ ,

$$\rho_\infty S = \rho_\infty \pi R^2. \quad (7-139)$$

Сила, действующая в направлении оси  $z$  в сечении  $x$ , отнесенная к единице длины тела, является реакцией на субстанциальную скорость изменения величины  $dl_z/dx$ , т. е. на скорость, с которой увеличивается  $dl_z/dx$ , относящаяся к определенному поперечному слою жидкости,

$$\frac{dL}{dz} = - \frac{D}{Dt} \left[ \frac{dl_z}{dx} \right] = - \rho_\infty \frac{DS}{Dt} \left[ U \frac{\partial z_a}{\partial x} + \frac{\partial z_a}{\partial t} \right] - \rho_\infty S \left[ U \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial z_a}{\partial x} \right) + \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial z_a}{\partial t} \right) \right]. \quad (7-140)$$

Мы воспользуемся тем обстоятельством, что

$$\frac{D}{Dt} = U \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (7-141)$$

и

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{dS}{dx} \frac{Dx}{Dt} = \frac{dS}{dx} U, \quad (7-142)$$

и из уравнения (7-140) получим

$$\frac{dL}{dx} = -\rho_{\infty} \frac{dS}{dx} \left[ U^2 \frac{\partial z_a}{\partial x} + U \frac{\partial z_a}{\partial t} \right] - \rho_{\infty} S \left[ U^2 \frac{\partial^2 z_a}{\partial x^2} + 2U \frac{\partial^2 z_a}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 z_a}{\partial t^2} \right]. \quad (7-143)$$

При интегрировании уравнения (7-143) по  $x$  для определения суммарной поперечной силы и момента тангажа, действующих на тело, не удастся ввести никаких специальных упрощений. Некоторые члены обращаются в нуль в результате того, что для тел замкнутой формы

$$\int_{\text{тело}} \frac{dS}{dx} dx = 0. \quad (7-144)$$

Если движение описывается уравнением (7-136), то результирующие аэродинамические нагрузки в линеаризованном виде выражаются так:

$$L = \rho_{\infty} K_V \times (\text{объем}) \times (U\dot{\alpha} + \ddot{h}) + \rho_{\infty} K_M \bar{M} \ddot{\alpha}, \quad (7-145)$$

$$M_y = \rho_{\infty} U K_V \times (\text{объем}) \times (U\alpha + \dot{h}) - \rho_{\infty} K_M \bar{M} \ddot{h} - \rho_{\infty} K_J J_3 \ddot{\alpha}. \quad (7-146)$$

Формулы (7-145) и (7-146) содержат некоторые инерционные коэффициенты, приводящие объем, характеристику статической неуровновешенности объема  $\bar{M}$  и момент инерции объема  $J_3$  в соответствие с формулами

$$K_V \times (\text{объем}) = \int_{\text{тело}} S dx, \quad (7-147a)$$

$$K_M \bar{M} = \int_{\text{тело}} S(x - x_B) dx, \quad (7-147b)$$

$$K_J J_3 = \int_{\text{тело}} S(x - x_B)^2 dx. \quad (7-147c)$$

Принимая во внимание соотношение (7-139), мы видим, что коэффициенты  $K_V$  и  $K_J$  равны единице для любого тела вращения или для тела другой формы, но имеющего круговые поперечные сечения.

Поскольку применение понятия присоединенной массы ограничено случаем несжимаемого потока, то соотношения (7-144) — (7-146) справедливы только при условии, что сжимаемость не оказывает существенного влияния на движение жидкости в плоскостях уз. Это условие выполняется даже вплоть до небольших сверхзвуковых скоростей полета, если только тело является достаточно тонким, а неустойчившееся движение — не слишком быстрым.

Большая часть из доступных нам ограниченных сведений указывает на неплохое совпадение экспериментальных данных с расчетами по теории потенциального течения для тел удлиненной формы (см., например, Цам [7-63]). Однако все эти данные получены для установившегося течения, и распространение выведенных на их основании эмпирических поправок на задачи о неустойчившемся течении едва ли оправдано. Имеется значительное число данных, заставляющих предполагать, что неустойчившийся характер движения задерживает развитие отрыва течения, обусловленного вязкостью, и приближает тип

течения к течению идеальной жидкости. Этот вывод поддерживается авторами работы [7-6], где приводятся данные о результирующей подъемной силе и моменте тангажа для колеблющегося эллипсоида вращения с удлинением, равным 10. Результаты теории Ламба в отношении всех величин, кроме дестабилизирующей пары, обусловленной наличием угла атаки, подтверждаются. Последняя величина должна умножаться на корректирующий множитель, который возрастает от значения 0,85 в установившемся течении до 1,0 при колебаниях высокой частоты. В работе [7-6] показано, что эта теория значительно менее пригодна для тупоносого тела с удлинением, равным 5. Оба этих тела испытывались как сами по себе, так и с присоединенными крыльями. Было сделано предположение, что когда тело помещается вблизи крыла, то последнее стремится выровнять поток вдоль тела, уменьшая тем самым влияние вязкости. Удовлетворительного подтверждения этой гипотезы для неустановившегося течения получено не было.

## Глава 8

# СТАТИЧЕСКАЯ АЭРОУПРУГОСТЬ

**8-1. Введение.** Задачи статической аэроупругости характеризуются несколькими упрощающими их чертами. По определению, время не входит в эти задачи в качестве независимой переменной, и поэтому силы инерции исключаются из уравнений равновесия. Аэродинамические силы определяются на основе хорошо известных результатов для установившегося потока, а не на основе более сложных теорий неустановившегося течения.

В гл. 1 мы видели, что большинство задач статической аэроупругости делится на два основных класса. Первый класс включает задачи о распределении нагрузки и дивергенции. Эти задачи представляют основной интерес для конструктора самолета. Второй включает задачи об эффективности органов управления, реверсе и влиянии аэроупругости на устойчивость самолета. Последние задачи касаются главным образом конструкторов системы управления и исследователей вопросов устойчивости, но важны также и для проектировщика, занимающегося вопросами конструкции (при определении потребной жесткости).

Методы анализа, развитые в этой главе, предполагается, вообще говоря, применять ко всем диапазонам скоростей; единственное ограничение состоит в требовании линейности аэродинамической теории.

**8-2. Кручение простого двумерного крыла с элероном.** Для того чтобы понять основные явления статической аэроупругости, полезно, перед тем как браться за более сложные случаи, относящиеся к крылу конечного размаха, рассмотреть поведение жесткого упруго закрепленного элемента крыла в двумерном потоке. Некоторые из ранних работ по аэроупругости, в сущности, были основаны на таких упрощенных двумерных представлениях действительных несущих поверхностей. Теодорсен [8-1] пользовался моделью подобного рода при анализе задачи о флаттере, называя ее „характерным сечением“ и выбирая ее свойства таким образом, чтобы они соответствовали свойствам того поперечного сечения действительного крыла, которое находится на расстоянии 70—75% полуразмаха от корневого сечения. Иногда такая модель называется „полужестким крылом“. Однако этот термин здесь не употребляется, потому что другие авторы применяют его к крылу конечного размаха, ограниченному в своем движении таким образом, что форма кривой распределения угла закручивания по размаху крыла не зависит от способа нагружения.

Рассмотрим фиг. 8-1, изображающую жесткий профиль крыла с прикрепленной к нему рулевой поверхностью. Крыло имеет постоянную хорду  $c$  и площадь  $S$ . Закручиванию крыла препятствует спиральная пружина, закрепленная на упругой оси крыла, находящейся на расстоянии  $e$  позади аэродинамического центра крыла. Принимается, что все угловые перемещения крыла малы. Суммарный угол атаки, измеряемый от линии нулевой подъемной силы, рассматривается как сумма первоначального угла  $\alpha'$  и угла упругого закручивания  $\theta$ :

$$\alpha = \alpha' + \theta. \quad (8-1)$$

а) Крыло. Сначала мы рассмотрим поведение крыла, когда отклонение элерона  $\beta = 0$ . Угол упругого закручивания пропорционален моменту относительно упругой оси

$$\theta = C^{\theta\theta} T, \quad (8-2)$$

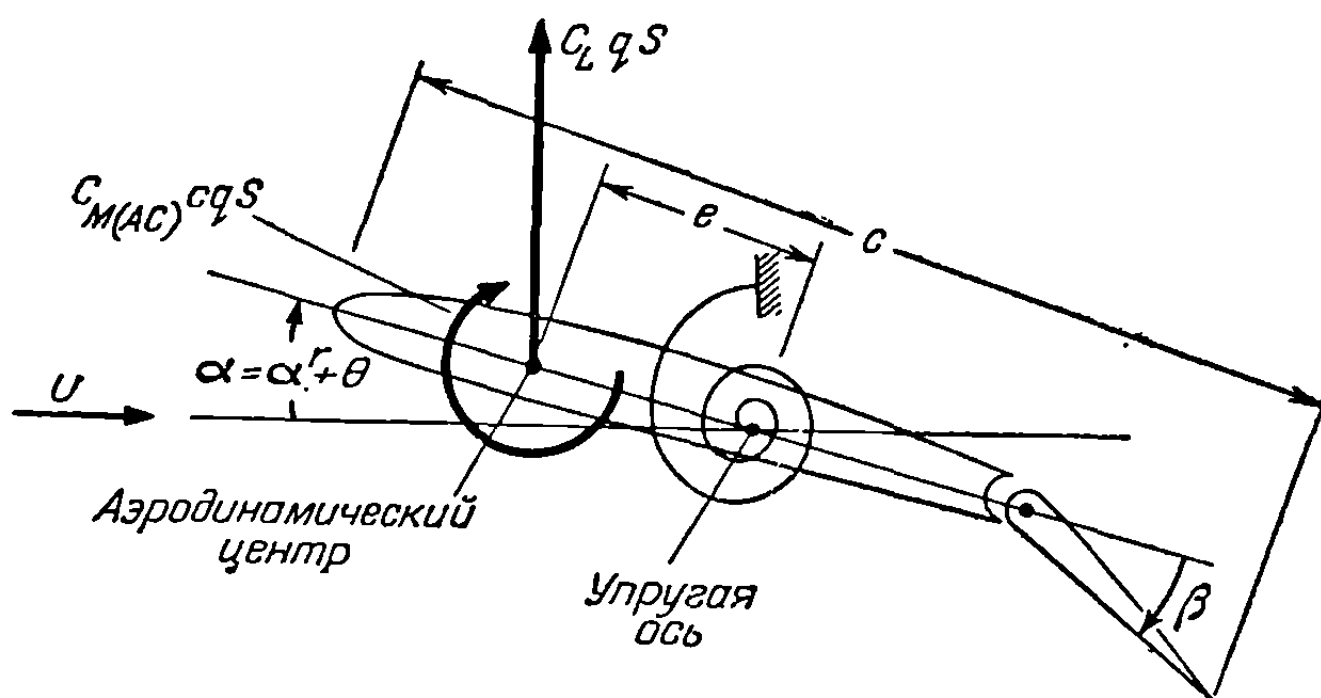
где  $C^{\theta\theta}$  — коэффициент упругого влияния пружины.

Суммарный аэродинамический скручивающий момент относительно упругой оси равен

$$T = (C_L e + C_{M_{AC}} c) q S, \quad (8-3)$$

где

$C_L$  — коэффициент подъемной силы крыла,  
 $C_{M_{AC}}$  — коэффициент момента относительно поперечной оси, проходящей через аэродинамический центр,  
 $q$  — динамическое давление,  
 $S$  — площадь жесткого элемента крыла.



Фиг. 8-1. Уруго-опертый жесткий профиль крыла.

Коэффициент полной подъемной силы связан с углом атаки, измеряемым от линии нулевой подъемной силы, с помощью соотношения

$$C_L = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} (\alpha^r + \theta), \quad (8-4a)$$

где  $\partial C_L / \partial \alpha$  — наклон кривой подъемной силы. Подставляя выражение (8-4a) в (8-3) и исключая из полученного уравнения и уравнения (8-2)  $T$ , можно определить угол упругого закручивания крыла:

$$\theta = \frac{C^{\theta\theta} [(\partial C_L / \partial \alpha) e \alpha^r + C_{M_{AC}} c] q S}{1 - C^{\theta\theta} (\partial C_L / \partial \alpha) q S e}. \quad (8-4b)$$

Заметим, что знаменатель в формуле (8-4b) для некоторого значения  $q$  может сделаться равным нулю. В этом случае угол упругого закручивания  $\theta$  будет равен бесконечности. Этот случай известен как явление дивергенции при кручении. Положив знаменатель равным нулю, получим

$$1 - C^{\theta\theta} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} q S e = 0. \quad (8-5)$$

Это соотношение определяет динамическое давление дивергенции

$$q_D = \frac{1}{C^{\theta\theta} (\partial C_L / \partial \alpha) S e} \quad (8-6)$$



и скорость дивергенции

$$U_D = \sqrt{\frac{1}{C^{90} (\partial C_L / \partial \alpha) (\rho/2) S e}}. \quad (8-7)$$

Как показано на фиг. 8-1, положительные значения  $e$  соответствуют положению аэродинамического центра впереди упругой оси. Таким образом, из уравнения (8-7) видно, что скорость дивергенции заметно зависит от величины  $e$ , и, если аэродинамический центр лежит на упругой оси или позади нее, крыло будет устойчивым на всех скоростях.

Исследование формулы (8-4b) показывает, что угол закручивания, обусловленный аэродинамическими нагрузками, есть функция первоначального угла атаки  $\alpha^r$ . Однако формула (8-7) указывает, что скорость дивергенции не зависит от первоначального угла атаки и кривизны профиля (которая влияет на  $C_{MAC}$ ). Поэтому очевидно, что дивергенция крыла соответствует такому физическому состоянию, при котором увеличение аэродинамического момента относительно упругой оси, обусловленное произвольным изменением угла атаки, равно соответствующему увеличению упругого восстанавливающего момента. Для произвольного конечного изменения  $\Delta\alpha$  угла атаки изменение упругого восстанавливающего момента равно

$$\Delta M_e = \frac{\Delta\alpha}{C^{90}}, \quad (8-8)$$

а изменение аэродинамического момента может быть выражено в виде

$$\Delta M_a = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \Delta\alpha q S e. \quad (8-9)$$

Если, как показано на фиг. 8-2, построить эти изменения момента в зависимости от  $q$ , то окажется, что упругий восстанавливающий момент остается постоянным с изменением  $q$ , тогда как аэродинамический момент линейно увеличивается с увеличением  $q$  до точки пересечения с прямой, соответствующей постоянному значению  $\Delta M_e / \Delta\alpha$ . Точка пересечения соответствует состоянию дивергенции.

Задачи о закручивании упругого крыла и дивергенции при кручении аналогичны задаче бокового выпучивания стержня с начальным эксцентриситетом [8-2]. Когда закручивание не вводит дополнительной аэродинамической нагрузки, то для угла упругого закручивания, положив  $\alpha = \alpha^r$ , можно получить выражение

$$\theta_r = C^{90} \left( \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} e \alpha^r + C_{MAC} \right) q S. \quad (8-10)$$

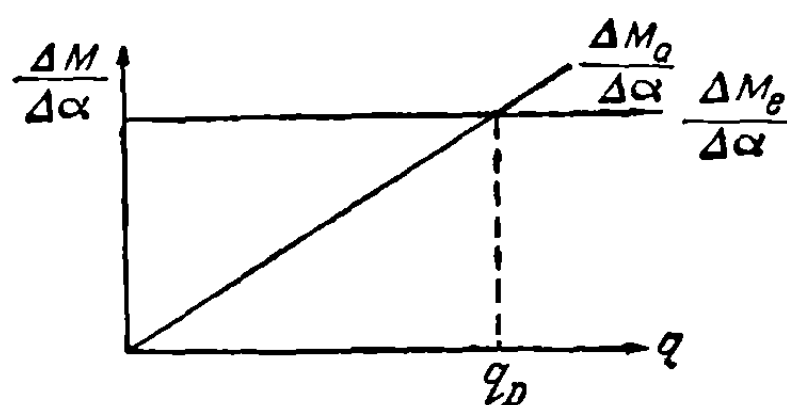
Разделив почленно равенство (8-4b) на (8-10), будем иметь

$$\frac{\theta}{\theta_r} = \frac{1}{1 - C^{90} (\partial C_L / \partial \alpha) q S e}. \quad (8-11)$$

Подставив сюда выражение (8-6), получим

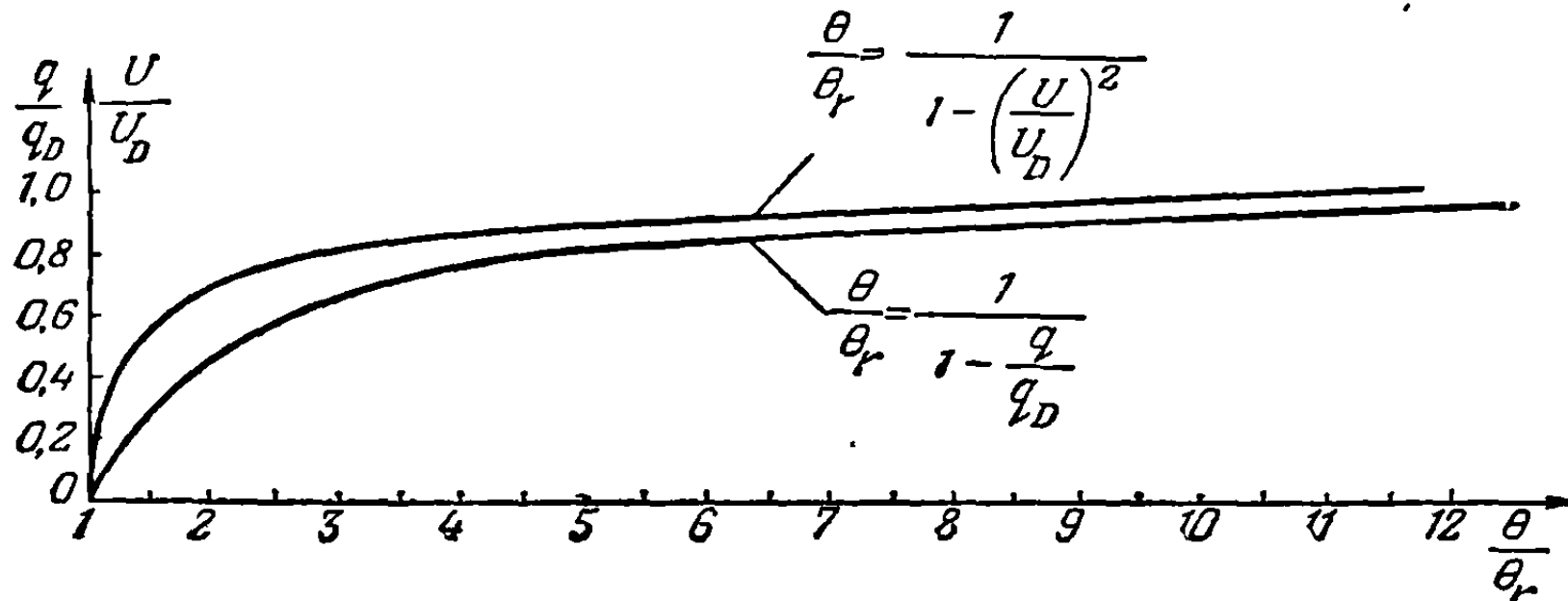
$$\frac{\theta}{\theta_r} = \frac{1}{1 - (q/q_D)} = \frac{1}{1 - (U/U_D)^2}. \quad (8-12)$$

Выражение (8-12) представляет собой отношение действительного угла закручивания к углу закручивания, подсчитанному при условии пренебрежения дополнительным аэродинамическим моментом, обусловленным упругим закручиванием. Необходимо заметить, что соотношение (8-12) применимо, строго говоря,



Фиг. 8-2. Изменения аэродинамического и упругого восстанавливающего моментов, приходящиеся на единицу изменения угла атаки.

только для диапазона скоростей, в котором не сказывается влияние сжимаемости воздуха и где можно считать, что наклон кривой подъемной силы не зависит от числа Маха. Поскольку напряжение в крыле пропорционально углу упругого закручивания, из соотношения (8-12) следует, что при подсчете напряжений необходимо учитывать закручивание крыла. На фиг. 8-3 приведен график зависимости (8-12), иллюстрирующий быстрый рост прогибов крыла по мере приближения скорости потока к скорости дивергенции.



Фиг. 8-3. Изменение угла закручивания крыла со скоростью полета.

(b) *Крыло с элероном.* Рассмотрим теперь явления аэроупругости, имеющие место при присоединении к крылу рулевой поверхности. Предположим (фиг. 8-1), что элерон отклонен вниз на угол  $\beta$ . Если опора элемента крыла жесткая, то перемещение элерона вниз сопровождается увеличением, а перемещение вверх — уменьшением подъемной силы. Однако при упругой опоре профиля крыла перемещение элерона вниз приводит к закручиванию носка элемента крыла вниз, а перемещение вверх — к закручиванию носка вверх. С увеличением скорости воздуха около элемента крыла аэродинамические скручивающие моменты растут пропорционально квадрату скорости, тогда как упругие восстанавливающие моменты остаются постоянными. В результате эффективность элерона в создании подъемной силы уменьшается с ростом скорости воздуха, пока, наконец, не достигается скорость, при которой элерон становится совершенно неэффективным. Эта скорость известна под названием скорости реверса элеронов.

В последующем мы будем рассматривать изменение перемещений, сил и моментов от тех значений, которые соответствуют установившимся условиям, предшествующим перемещению элерона. Изменения коэффициентов подъемной силы и момента упруго-опертого профиля крыла, обусловленные отклонением элерона, равны соответственно

$$C_L = \left( \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \theta \right), \quad (8-13a)$$

$$C_{MAC} = \frac{\partial C_{MAC}}{\partial \beta} \beta, \quad (8-13b)$$

где

$\partial C_L / \partial \beta$  — изменение коэффициента подъемной силы крыла, приходящееся на единицу отклонения элерона,

$\partial C_{MAC} / \partial \beta$  — изменение коэффициента момента крыла около аэродинамического центра, приходящееся на единицу отклонения элерона.

Изменение крутящего момента относительно упругой оси, обусловленное отклонением элерона  $\beta$ , определяется из уравнений (8-3) и (8-13) в виде

$$T = qS \left\{ e \left( \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \theta \right) + c \frac{\partial C_{MAC}}{\partial \beta} \beta \right\}. \quad (8-14)$$

Подставив выражение (8-14) в уравнение (8-2), получим следующее условие равновесия:

$$\theta = C^{\theta\theta} T = C^{\theta\theta} q S \left\{ e \left( \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \theta \right) + c \frac{\partial C_{MAC}}{\partial \beta} \beta \right\}. \quad (8-15)$$

Это условие может быть выражено также через отношение угла упругого закручивания к углу отклонения элерона следующим образом:

$$\frac{\theta}{\beta} = \frac{e (\partial C_L / \partial \beta) + c (\partial C_{MAC} / \partial \beta)}{(1/C^{\theta\theta} q S) - e (\partial C_L / \partial \alpha)}. \quad (8-16)$$

Из уравнений (8-13а) и (8-16) получаем коэффициент полной подъемной силы элемента крыла в виде линейной функции угла отклонения элерона:

$$C_L = \frac{\left( \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \frac{1}{(\partial C_L / \partial \alpha) C^{\theta\theta} q S e} + \frac{c}{e} \frac{\partial C_{MAC}}{\partial \beta} \right) \beta}{\frac{1}{(\partial C_L / \partial \alpha) C^{\theta\theta} q S e} - 1}. \quad (8-17)$$

Элерон совершенно неэффективен, когда  $C_L = 0$ , так что, полагая в уравнении (8-17) числитель равным нулю, получим следующее условие для реверса элерона:

$$\frac{\partial C_L}{\partial \beta} \frac{1}{(\partial C_L / \partial \alpha) C^{\theta\theta} q_R S} + c \frac{\partial C_{MAC}}{\partial \beta} = 0, \quad (8-18)$$

где  $q_R$  — динамическое давление, соответствующее реверсу элеронов. Решая уравнение (8-18) относительно скорости реверса элерона, имеем:

$$U_R = \sqrt{\frac{-\frac{\partial C_L}{\partial \beta}}{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{\partial C_{MAC}}{\partial \beta} C^{\theta\theta} \frac{\rho}{2} S e}}. \quad (8-19)$$

Эффективность элерона на двумерном крыле при скоростях ниже скорости реверса определяется соотношением:

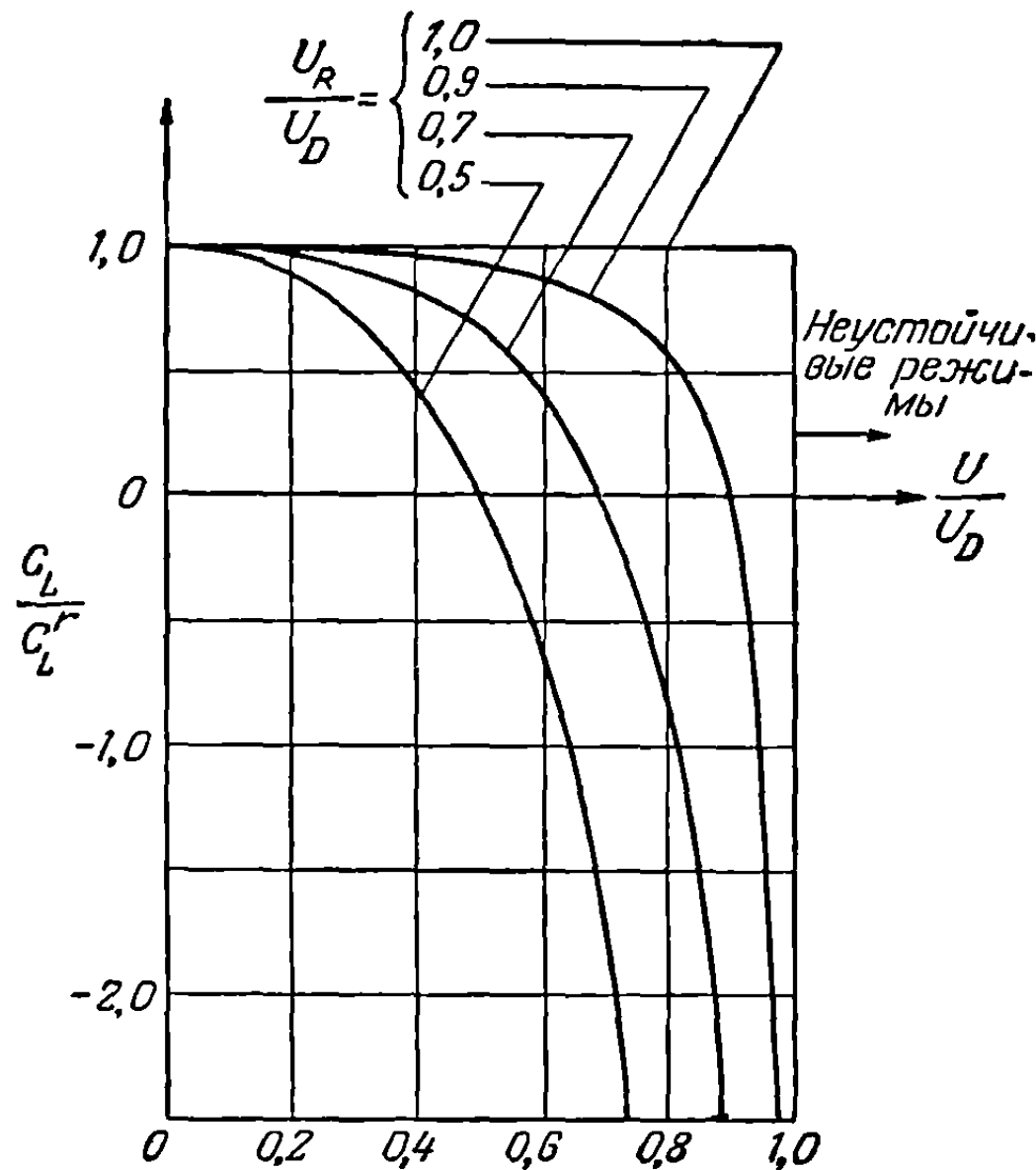
$$\frac{C_L}{C_L^r} = \frac{\frac{\partial C_L}{\partial \beta} \frac{1}{(\partial C_L / \partial \alpha) C^{\theta\theta} q S e} + \frac{c}{e} \frac{\partial C_{MAC}}{\partial \beta}}{\frac{\partial C_L}{\partial \beta} \left( \frac{1}{(\partial C_L / \partial \alpha) C^{\theta\theta} q S e} - 1 \right)} = 1 - \frac{U^2}{U_R^2} \left( \frac{U_D^2 - U_R^2}{U_D^2 - U^2} \right), \quad (8-20)$$

где  $C_L^r$  — коэффициент подъемной силы жесткого крыла,  $U_R$  — скорость реверса и  $U_D$  — скорость дивергенции, определяемая уравнением (8-7). Последняя формула (8-20) применима только к диапазону скоростей, где не сказывается влияние сжимаемости воздуха, так как при выводе ее было принято, что наклон кривой подъемной силы не зависит от скорости. Можно видеть, что эффективность и скорость реверса элеронов зависят от аэродинамических величин  $\partial C_L / \partial \alpha$ ,  $\partial C_L / \partial \beta$  и  $\partial C_{MAC} / \partial \beta$ . Вдобавок скорость реверса не зависит от расстояния  $e$  до упругой оси. Этот интересный результат обусловлен тем фактом, что аэродинамический момент, закручивающий крыло на скорости реверса, представляет собой чистую пару сил и не зависит от положения упругой оси.

При сравнении формул для  $U_R$  и  $U_D$ , приведенных выше, мы видим, что в том случае, когда

$$\frac{\partial C_L}{\partial \beta} = -\frac{c}{e} \frac{\partial C_{MAC}}{\partial \beta}, \quad (8-21)$$

а этот случай возможен, — скорости реверса и дивергенции одинаковы. В случае, когда  $U_R = U_D$ , уравнение (8-21) указывает на аномальное положение, при котором элерон сохраняет полную эффективность на всех скоростях. Это происходит потому, что пикирующий момент, обусловленный отклонением элерона и опускающий носок крыла, погашается кабрирующим моментом, обусловленным подъемной силой крыла и поднимающим носок крыла. Условие это выполняется тогда, когда удовлетворено уравнение (8-20). Фиг. 8-4 иллюстрирует изменение  $C_L/C_L^r$  в зависимости от изменения отношения  $U_R/U_D$ , согласно уравнению (8-20). Из этой формулы видно, что для малых значений отношения  $U_R/U_D$  эффективность элерона быстро изменяется со скоростью.



Фиг. 8-4. Изменение эффективности элеронов со скоростью полета.

крыльями с прямыми упругими осями, перпендикулярными к центральной линии фюзеляжа. Задача о вычислении угла упругого закручивания и скорости дивергенции прямых крыльев была впервые рассмотрена Хансом Рейсснером [8-3] в 1926 г. Шесть лет спустя в Англии началось интенсивное исследование явлений аэроупругости прямых крыльев. Кокс и Пагсли изучили задачи о реверсе и эффективности элеронов и дивергенции крыла [8-4, 8-5 и 8-6]. Они рассмотрели как случай монопланного свободнесущего крыла, сопротивляющегося скручиванию за счет различного изгиба двух параллельных лонжеронов, так и более сложный случай, при котором сопротивление скручиванию происходит как за счет различного изгиба лонжеронов, так и за счет крутильной жесткости крыла. В обоих случаях жесткость лонжеронов считалась переменной вдоль размаха. При определении аэродинамических сил учитывалось влияние размаха крыла. Однако Кокс и Пагсли получили решение, рассматривая задачи реверса и дивергенции упрощенным методом, который называется методом «полужесткого» крыла. При этом методе на крыле выбирается расчетное сечение и считается, что упругий восстанавливающий момент связан с угловой деформацией в этом сечении.

Примерно в то же время аналогичные исследования упругого закручивания двухлонжеронного крыла были опубликованы в Швейцарии Дэтвиллером [8-7, 8-8].

Начиная с 1930 г. до второй мировой войны авиаконструкторы концентрировали свое внимание главным образом на том, чтобы установить критерий

быстро изменяется со скоростью.

Угол упругого закручивания, обусловленный отклонением элерона  $\beta$ , определяется из уравнения (8-15):

$$\theta = \frac{C^{\theta\theta} q S [e (\partial C_L / \partial \beta) + c (\partial C_{MAC} / \partial \beta)] \beta}{1 - (\partial C_L / \partial \alpha) C^{\theta\theta} q S e} \quad (8-22)$$

Результаты упрощенных теорий, подобных описанной выше, часто применяются для того, чтобы получить приближенные ответы в практических задачах (см. [8-1]). В этих приложениях теория применяется к характерному сечению крыла в произвольном месте размаха и в формулы вводятся параметры, соответствующие этому сечению.

**8-3. Тонкие прямые крылья.** Простейшие задачи статической аэроупругости, представляющие практический интерес, возникают в связи с тонкими

жесткости крыла и предотвратить флаттер. При подсчете распределений нагрузки вдоль размаха для целей расчета конструкции упругими деформациями часто пренебрегали. К счастью, запасы прочности были таковы, что ошибка в распределении подъемной силы по размаху компенсировалась пренебрежением упругими деформациями.

Если самолет предназначен для полетов на большой скорости, то пренебрежение упругостью конструкции при подсчете распределения воздушной нагрузки на прямом крыле ведет к неприятным последствиям, так как влияние упругости конструкции сказывается в перемещении центра давления к концам крыльев. Вдобавок упругость конструкции является причиной заметного снижения эффективности органов поперечного управления. Необходимость лучших методов исследования прямых крыльев в период второй мировой войны привела к дальнейшему обобщению первоначальных работ Рейсснера, Кокса и Пагсли. Флакс [8-9], используя метод Рэля — Ритца, сформулировал задачу аэроупругости для прямого крыла, выразив распределение угла закручивания с помощью наложения заданных форм с неопределенными коэффициентами. Известные коэффициенты определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений, составленной с помощью принципа возможной работы. При такой постановке задачи можно объяснить эффекты взаимного аэродинамического влияния. Позднее Хильдебранд и Е. Рейсснер [8-10] создали метод, в котором при расчете скоростей дивергенции прямых крыльев учитывается влияние конечности размаха. Решения, полученные в явной форме, указывают на важность учета этого влияния при расчете дивергенции.

Более современные исследования проблемы аэроупругости прямого крыла связаны с техникой представления уравнений равновесия в матричной форме. Подобные методы полезны при исследовании крыльев с неоднородными свойствами; они нашли широкое применение при проектировании самолета: Работы Лоуренса и Сирса [8-11] и Пайнса [8-12] создали основу для применения матриц к задачам аэроупругости прямого крыла.

а) *Уравнения равновесия.* В последующих рассуждениях принимается, что прямые крылья характеризуются главным образом упругой осью, которая почти перпендикулярна к плоскости симметрии самолета, а элементы крыла в направлении хорды не деформируются, так как изгиб дужки не рассматривается. Связывая скорость закручивания с приложенным крутящим моментом по теории кручения Сен-Венана, получим дифференциальное уравнение аэроупругого равновесия при кручении прямого крыла около упругой оси [ср. уравнение (2-118)]

$$\frac{d}{dy} \left( GJ \frac{d\theta}{dy} \right) = -t(y), \quad (8-23a)$$

где  $\theta(y)$  — распределение угла упругого закручивания. Из фиг. 8-5 можно видеть, что приложенный крутящий момент  $t(y)$ , приходящийся на единицу размаха, равен

$$t(y) = (ecc_l + c^2 c_{mAC}) q - Nmgd, \quad (8-23b)$$

где

$c_l$  — местный коэффициент подъемной силы,

$c_{mAC}$  — местный коэффициент момента около аэродинамического центра,

$N$  — коэффициент перегрузки, нормальной к поверхности крыла ( $N = 1$  для горизонтального полета),

$mg$  — весовая нагрузка, приходящаяся на единицу размаха.

Подставляя выражение (8-23b) в уравнение (8-23a), получим дифференциальное уравнение равновесия:

$$\frac{d}{dy} \left( GJ \frac{d\theta}{dy} \right) + qecc_l = -qc^2 c_{mAC} + Nmgd. \quad (8-23c)$$

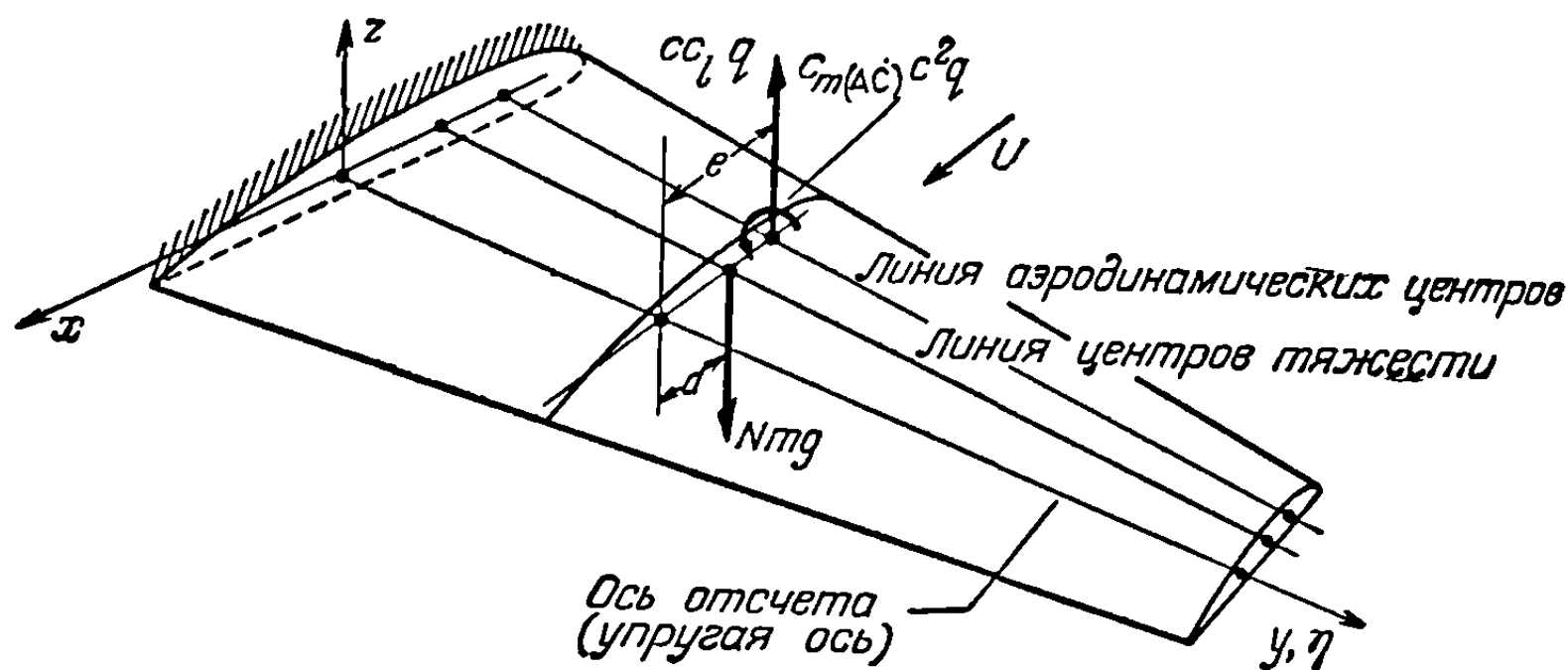
Граничные условия имеют следующий вид:

$$\theta(0) = \theta'(l) = 0.$$

Интегральное уравнение статического равновесия при кручении получим, подставляя выражение (8-23b) в уравнение (2-69):

$$\theta(y) = \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) [(ecc_1 + c^2 c_{mAC}) q - Nm g d] d\eta. \quad (8-24)$$

Граничные условия по  $\theta$  неявно содержатся в функции влияния  $C^{\theta\theta}(y, \eta)$  и не требуют отдельной формулировки.



Фиг. 8-5. Тонкое прямое крыло.

Следуя методу, использованному в упрощенном анализе, изложенном в п. 8-2, суммарный угол атаки можно рассматривать как результат наложения угла атаки недеформируемого крыла и угла упругого закручивания

$$\alpha(y) = \alpha^r(y) + \theta(y), \quad (8-25)$$

и соответственно местный коэффициент подъемной силы — как сумму

$$c_l(y) = c_l^r(y) + c_l^e(y), \quad (8-26)$$

где

$\alpha^r(y)$  — местный угол атаки, измеряемый от линии нулевой подъемной силы, без учета угла упругого закручивания и индуктивного угла, обусловленного влиянием конечности размаха; сюда могут входить члены, подобные геометрическому углу атаки, геометрическому углу закручивания, аэродинамической крутке, обусловленной отклонением рулевых поверхностей, или индуктивному углу атаки, обусловленному порывом ветра;

$c_l^r(y)$  — местный коэффициент подъемной силы, обусловленный углом атаки недеформируемого крыла  $\alpha^r(y)$ ;

$c_l^e(y)$  — местный коэффициент подъемной силы, обусловленный углом упругого закручивания  $\theta(y)$ .

Подстановка выражения (8-26) в уравнения (8-23c) и (8-24) приводит к следующим дифференциальной и интегральной формам уравнения равновесия:

$$\frac{d}{dy} \left( GJ \frac{d\theta}{dy} \right) + q e c c_l^e = - q e c c_l^r - q c^2 c_{mAC} + N m g d \quad (8-27)$$



и

$$\theta(y) = q \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) e c c_i^e d\eta + f(y), \quad (8-28)$$

где

$$f(y) = \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) (q e c c_i^r + q c^2 c_{mAC} - N m g d) d\eta. \quad (8-28a)$$

Дифференциальная форма уравнения равновесия находит наиболее широкое применение при отыскании точных решений некоторых простейших задач. Интегральная форма уравнения служит удобной основой численных решений сложных практических задач. В обоих уравнениях  $\theta(y)$  и  $c_i^e(y)$  рассматриваются как неизвестные функции, а все другие члены считаются известными. Задача становится математически определенной тогда, когда сформулировано второе соотношение между неизвестными функциями, что достигается соответствующим выбором аэродинамической теории. Обычно принимается, что аэродинамическая теория приводит к линейному соотношению между углом атаки и распределением подъемной силы, которое символически можно представить в виде:

$$\alpha(y) = \mathfrak{A}[c c_l], \quad (8-29)$$

где  $\mathfrak{A}$  есть линейный оператор, действующий на распределение подъемной силы  $c c_l(y)$  таким образом, чтобы получить потребное распределение угла атаки  $\alpha(y)$ . Например, в случае теории несущей полосы  $\mathfrak{A}$  просто равно

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{a_0 c}, \quad (8-30)$$

где  $a_0$  — местный наклон кривой подъемной силы сечения.

Уравнение (8-27) вместе с уравнением (8-29), или иначе уравнение (8-28) вместе с уравнением (8-29), образуют основу для определения угла упругого закручивания и распределения подъемной силы тонкого нестреловидного крыла с прямолинейной упругой осью. Вследствие линейности этих уравнений и симметрии крыльев относительно продольной оси самолета случай несимметричного нагружения можно истолковать как наложение симметричной и антисимметричной нагрузок.

*б) Дивергенция при кручении.* Скорость дивергенции при кручении трехмерного крыла определяется наименьшим собственным значением динамического давления  $q$ , определяемым из однородного дифференциального или интегрального уравнений равновесия. Следовательно, она представляет собой скорость, при которой крыло, сконструированное таким образом, что в незакрученном состоянии оно не нагружено никакими аэродинамическими моментами, теоретически способно закрутиться на произвольный угол и оставаться при этом уже в нейтральном состоянии равновесия за счет аэродинамических сил, обусловленных только закручиванием крыла. Поскольку решение неоднородного уравнения для собственных значений соответствующего однородного уравнения становится бесконечно большим, можно заключить, что действительное крыло (которое никогда не может быть отрегулировано таким образом, чтобы воздушные нагрузки, соответствующие абсолютно жесткому крылу, в точности были равны нулю) должно было бы скрутиться и разрушиться при соответствующей ему скорости дивергенции. Однородные уравнения, соответствующие уравнениям (8-27) и (8-28), имеют вид

$$\frac{d}{dy} \left( GJ \frac{d\theta}{dy} \right) + q e c c_i^e = 0, \quad (8-31)$$

$$\theta(y) = q \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) e c c_i^e d\eta. \quad (8-32)$$



Уравнение (8-31) или (8-32) в соединении с уравнением (8-29) можно использовать для вычисления скорости дивергенции. Эти уравнения оба удовлетворяются одной и той же бесконечной последовательностью собственных значений и собственных функций. Наименьшее собственное значение является динамическим давлением  $q_D$ , соответствующим дивергенции при кручении. Соответствующая собственная функция  $\Theta_D(y)$  представляет собой распределение угла закручивания по размаху при скорости дивергенции.

(1) Решения в конечной форме, основывающиеся на теории несущей полосы. При использовании теории несущей полосы в немногих частных случаях решения дифференциального уравнения [уравнение (8-31) можно получить в замкнутой форме. Простейшим из этих случаев является случай свободно несущего крыла с постоянной хордой и постоянной жесткостью. Для этого случая однородное дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2\theta = 0, \quad (8-33)$$

где

$$\lambda^2 = qcea_0/GJ.$$

Общее решение уравнения (8-33) равно

$$\theta(y) = A \sin \lambda y + B \cos \lambda y. \quad (8-34)$$

Граничные условия для этого уравнения имеют вид

$$\theta(0) = 0, \quad (8-35)$$

$$\theta'(l) = 0. \quad (8-36)$$

Подставив выражение (8-34) в граничные условия, получим

$$B = 0, \quad (8-37)$$

$$\cos \lambda l = 0. \quad (8-38)$$

Из уравнения (8-38) следует, что решение существует только тогда, когда

$$\lambda = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty). \quad (8-39)$$

Наименьшее из этих значений  $\lambda = \pi/2l$  соответствует скорости дивергенции при кручении

$$q_D = \frac{GJ\pi^2}{4cea_0l^2} \quad (8-40)$$

и

$$U_D = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{GJ}{cea_0(\rho/2)}}. \quad (8-41)$$

Соответствующее дивергенции распределение угла закручивания имеет вид

$$\Theta_D(y) = A \sin \frac{\pi y}{2l}. \quad (8-42)$$

Легко показать, что выражения (8-41) и (8-42) можно вывести также и из интегрального уравнения (8-32) для частного случая крыла с постоянной хордой и жесткостью.

Следует отметить, что уравнение (8-7), выведенное для случая жесткого элемента крыла, совершенно аналогично уравнению (8-41). На самом деле, если соответствующим образом определить  $C^{96}$ , уравнение (8-7) могло бы быть использовано для вычисления скорости дивергенции однородного трехмерного крыла.

Имеются другие явные решения, в которых собственные значения однородного дифференциального уравнения представлены в конечном виде [8-10]. Наиболее полезное из этих решений построено на следующих допущениях

$$\frac{c(y)}{c_R} = \frac{e(y)}{e_R} = \left(1 - \beta \frac{y}{l}\right)^{\gamma_1} = y_1^{\gamma_1}, \quad (8-43)$$

$$\frac{GJ}{GJ_R} = \left(1 - \beta \frac{y}{l}\right)^{\gamma_2} = y_1^{\gamma_2}, \quad (8-44)$$

где индекс  $R$  означает величину, относящуюся к корневому сечению крыла, а  $y_1$  — безразмерная координата вдоль размаха, заменяющая координату  $y$ . Если выражения (8-43) и (8-44) подставить в уравнение (8-31) и использовать допущение теории несущей полосы, то в результате получим

$$\frac{d}{dy_1} \left( y_1^{\gamma_2} \frac{d\theta}{dy_1} \right) + \left( \frac{\lambda_R l}{\beta} \right)^2 y_1^{2\gamma_1} \theta = 0, \quad (8-45)$$

где

$$\lambda_R^2 = \frac{qc_R e_R a_0}{CJ_R} \quad (8-46)$$

и  $a_0$  принимается постоянным.

Согласно Карману и Био [8-13], решение уравнения (8-45) имеет вид

$$\theta = y_1^{\nu \delta} \left[ A J_\nu \left( y_1^{1/\delta} \frac{\lambda_R l \delta}{\beta} \right) + B Y_\nu \left( y_1^{1/\delta} \frac{\lambda_R l \delta}{\beta} \right) \right], \quad (8-47)$$

где

$$\frac{1}{\delta} = \frac{2\gamma_1 - \gamma_2 + 2}{2}, \quad (8-48)$$

$$\frac{\nu}{\delta} = \frac{1 - \gamma_2}{2}, \quad (8-49)$$

$J_\nu$  и  $Y_\nu$  — функции Бесселя первого и второго рода порядка  $\nu$ ; за исключением случаев, когда  $\nu$  есть целое число,  $Y_\nu = J_{-\nu}$ . Собственные значения и собственные функции для любой частной комбинации  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\beta$  определяются с помощью подстановки граничных условий (8-35) и (8-36) в уравнение (8-47). Обе постоянные  $A$  и  $B$  обычно остаются конечными и  $\lambda_R$  являются корнями трансцендентного уравнения.

Особенно важен тот случай уравнения (8-45), когда  $\gamma_2 = 2(\gamma_1 + 1)$ . Например,  $\gamma_1 = 1$  и  $\gamma_2 = 4$  описывают прямое трапециевидное крыло с сужением  $(1 - \beta)$  и геометрически подобными поперечными сечениями, линейные размеры которых уменьшаются пропорционально местной хорде. Поскольку теперь выражения (8-48) и (8-49) приводят к бесконечно большим величинам  $\delta$  и  $\nu$ , для получения решения нужно возвратиться к основному дифференциальному уравнению. Как показано в [8-10], замена переменного в уравнении (8-45) вида

$$z_1 = \ln y_1$$

приводит к более общему результату:

$$\theta = y_1^{-\left(\frac{1+2\gamma_1}{2}\right)} [A \sin(\mu \ln y_1) + B \cos(\mu \ln y_1)], \quad (8-50)$$

где

$$\mu = \sqrt{\left(\frac{\lambda_R l}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{2\gamma_1 + 1}{2}\right)^2}. \quad (8-51)$$

Из граничного условия (8-35) следует, что  $B = 0$ . Тогда, подставляя выражение (8-50) в (8-36), получаем

$$A y_1^{-\left(\frac{1+2\gamma_1}{2}\right)} \left[ -\left(\frac{1+2\gamma_1}{2}\right) \frac{\sin(\mu \ln y_1)}{y_1} + \frac{\mu}{y_1} \cos(\mu \ln y_1) \right] = 0. \quad (8-52)$$

Преобразование уравнения (8-52) при одит к соотношению

$$\operatorname{tg} [\mu \ln (1 - \beta)] = \frac{2\mu}{1 + 2\gamma_1}, \quad (8-53)$$

из которого простым графическим построением определяются наименьшее собственное значение  $\mu$  и соответствующая скорость дивергенции  $U_D$ . Собственные функции  $\Theta_D(y)$  определяются из формулы (8-50), в которой полагают  $B$  равным нулю. Легко, например, видеть, что для прямого трапециевидного крыла с сужением, равным  $1/2$  ( $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 4$ ,  $\beta = 0,5$ ), наименьшее собственное значение равно

$$\lambda_R = 1,653 l,$$

что соответствует скорости дивергенции, равной

$$U_D = \frac{1,653}{l} \sqrt{\frac{GJ_R}{c_R e_R a_0 (\rho/2)}}. \quad (8-53a)$$

Последняя величина несколько выше соответствующего значения для прямого крыла, которое дается выражением (8-41).

Хотя решения, соответствующие условиям (8-39) и (8-53), редко применяются при инженерных расчетах действительного крыла или хвостового оперения, они часто представляют интерес с точки зрения оценки порядка величины  $U_D$ . Когда в уравнение (8-53a) подставлена величина  $a_0$ , соответствующая двумерному потоку, то получающиеся результаты оказываются явно завышенными. Однако было показано, что, когда вместо  $a_0$  подставлена величина наклона кривой подъемной силы крыла конечного размаха в трехмерном потоке, величины  $U_D$ , подсчитанные по упрощенным уравнениям, часто оказываются весьма близкими к тем, которые определяются из более строгой постановки задачи, опирающейся на более точные аэродинамические теории.

(2) *Решение задачи с помощью матриц с использованием теории несущей полосы.* Когда рассматриваются практические самолетные задачи, в которых требуется определенная точность расчетов, обычно бывает необходимо использовать численные решения. В подобных случаях интегральное уравнение (8-32) в соединении с матричными методами обладает заметными преимуществами. Применяя теорию несущей полосы, можно записать уравнение (8-32) в форме

$$\frac{c_i^e}{dC_L/d\alpha} = q \int_0^l C^{90}(y, \eta) e c c_i^e d\eta. \quad (8-54)$$

По причинам, указанным выше,  $a_0(y)$  в уравнении (8-54) заменено постоянной  $dC_L/d\alpha$ , представляющей собой эффективный наклон кривой подъемной силы, исправленный на влияние удлинения. Матричная форма уравнения (8-54) имеет следующий вид:

$$[A] \{c c_i^e\} = q [E] \{c c_i^e\}, \quad (8-55)$$

где

$$[A] = \frac{1}{dC_L/d\alpha} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} c \begin{bmatrix} \bar{\quad} \\ \bar{\quad} \\ \bar{\quad} \end{bmatrix}, \quad [E] = [C^{90}] \begin{bmatrix} e & \bar{\quad} \\ & \bar{\quad} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\quad} \\ \bar{\quad} \\ \bar{\quad} \end{bmatrix}. \quad (8-55a)$$

Уравнение (8-55) имеет ту же форму, что и характеристические уравнения, выведенные в гл. 4 для задач о свободных колебаниях. Основное требование для ненулевого решения состоит в равенстве нулю детерминанта, составленного из коэффициентов  $c c_i^e$ :

$$|[A] - q [E]| = 0. \quad (8-56)$$

При разложении этот детерминант приводится к полиному относительно  $q$ , наименьший корень которого соответствует условию дивергенции. Здесь применимы различные приближенные решения, описанные в п. 4—5. В частности,

оказалась полезной матричная итерация, поскольку она автоматически сходится при наименьшем собственном значении.

(3) *Решение задачи с помощью матриц с учетом аэродинамического влияния конечности размаха.* Когда учитывается аэродинамическое влияние конечности размаха, скорость дивергенции можно определить по наименьшему собственному значению однородного интегрального уравнения, образованного из уравнений (8-32) и (8-29):

$$\mathfrak{A}[cc_l^e(y)] = q \int_0^l C^{00}(y, \eta) ecc_l^e d\eta. \quad (8-57)$$

Если эффекты индукции вычисляются согласно теории несущей линии Прандтля, то функциональную связь  $\mathfrak{A}[cc_l^e(y)]$  можно вывести из уравнения (5-147):

$$\Gamma(y) = a_0 U \frac{c}{2} \left[ \alpha(y) - \frac{1}{4\pi U} \oint_{-l}^l \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y-\eta} \right]. \quad (5-147)$$

Если ввести сюда выражение

$$cc_l = 2\Gamma/U$$

и произвести перестановку членов, то в результате будем иметь:

$$\alpha(y) = \mathfrak{A}[cc_l(y)] = \frac{cc_l(y)}{a_0 c} + \frac{1}{8\pi} \oint_{-l}^l \frac{d}{d\eta} (cc_l) \frac{d\eta}{y-\eta}. \quad (8-58)$$

Из уравнений (8-57) и (8-58) получим

$$\frac{cc_l^e}{a_0 c} + \frac{1}{8\pi} \oint_{-l}^l \frac{d}{d\eta} (cc_l^e) \frac{d\eta}{y-\eta} = q \int_0^l C^{00}(y, \eta) ecc_l^e d\eta. \quad (8-59)$$

В этом соотношении местный наклон кривой коэффициента подъемной силы  $a_0$  считается постоянным.

Уравнению (8-59) удовлетворяет бесконечное число собственных значений  $q_j$  и собственных функций  $(cc_l^e)_j$ . Они соответствуют решениям уравнения (8-54), за исключением того, что в этом случае учтено влияние конечности размаха на аэродинамические силы. Наименьшее собственное значение  $q_D$  является динамическим давлением, соответствующим дивергенции при кручении. Собственные функции уравнения (8-59) могут быть четными или нечетными по  $y$  в зависимости от того, будет ли связанное с ними распределение угла закручивания крыла симметричным или антисимметричным. Эти функции соответствуют вообще различным скоростям дивергенции. Процесс решения уравнения (8-59) требует отдельного рассмотрения симметричного и антисимметричного решений. Первое обозначается через  $(cc_l^{es})$ , второе через  $(cc_l^{ea})$ . Поскольку наиболее общее решение  $(cc_l^e)$  может быть представлено как сумма  $(cc_l^{es})$  и  $(cc_l^{ea})$ , то эту сумму можно подставить в уравнение (8-59), при этом результат распадется на две независимые части. Если для вычисления интегралов воспользоваться приближенными формулами, то получим следующие матричные уравнения:

$$[A^s] \{cc_l^{es}\} = q [E] \{cc_l^{es}\}, \quad (8-60)$$

$$[A^a] \{cc_l^{ea}\} = q [E] \{cc_l^{ea}\}, \quad (8-61)$$

где

$$[E] = [C^{00}] \begin{bmatrix} e \\ \bar{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{W} \\ W \end{bmatrix}.$$

Аэродинамические матрицы  $[A^s]$  и  $[A^a]$ , представляющие соответственно симметричную и антисимметричную зависимости между  $cc_l(y)$  и  $\alpha(y)$ , построены на основе уравнения (8-58). В явном виде  $[A^s]$  выражается через уравнение (5-157).

Когда  $[A^s]$  подставлено в уравнение (8-60), то умножение на  $[A^s]^{-1}$  приводит к форме уравнения, удобной для итерации матриц при определении симметричных форм дивергенции.

Аналогичная итерация уравнения (8-61) приводит к определению антисимметричных форм дивергенции. В каждом случае форма, соответствующая наименьшей величине динамического давления  $q$ , определенного без учета сноса за счет ветра, представляет наибольший практический интерес.

Пример 8-11). Подсчитать скорость дивергенции крыла транспортного реактивного самолета, указанного в примере 2-1. Сравнить скорости дивергенции симметричной и антисимметричной форм, вычисленных с применением теории несущей линии, с результатами теории несущей полосы.

Решение. (а) Теория несущей полосы. В случае применения теории несущей полосы скорость дивергенции вычисляется с помощью соотношения

$$[A] \{cc_l^e\} = q [E] \{cc_l^e\}, \quad (8-55)$$

где

$$[A] = \frac{1}{dC_L/d\alpha} \begin{bmatrix} 1/c \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (8-55a)$$

$$[E] = [C^{\theta\theta}] \begin{bmatrix} e \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{W} \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

На полуразмахе крыла, как показано на фиг. 8-6, проводятся четыре сечения. Эти специальные сечения, называемые сечениями Мультхоппа (ср. приложение В), выбираются для удобства вычисления аэродинамических матриц.

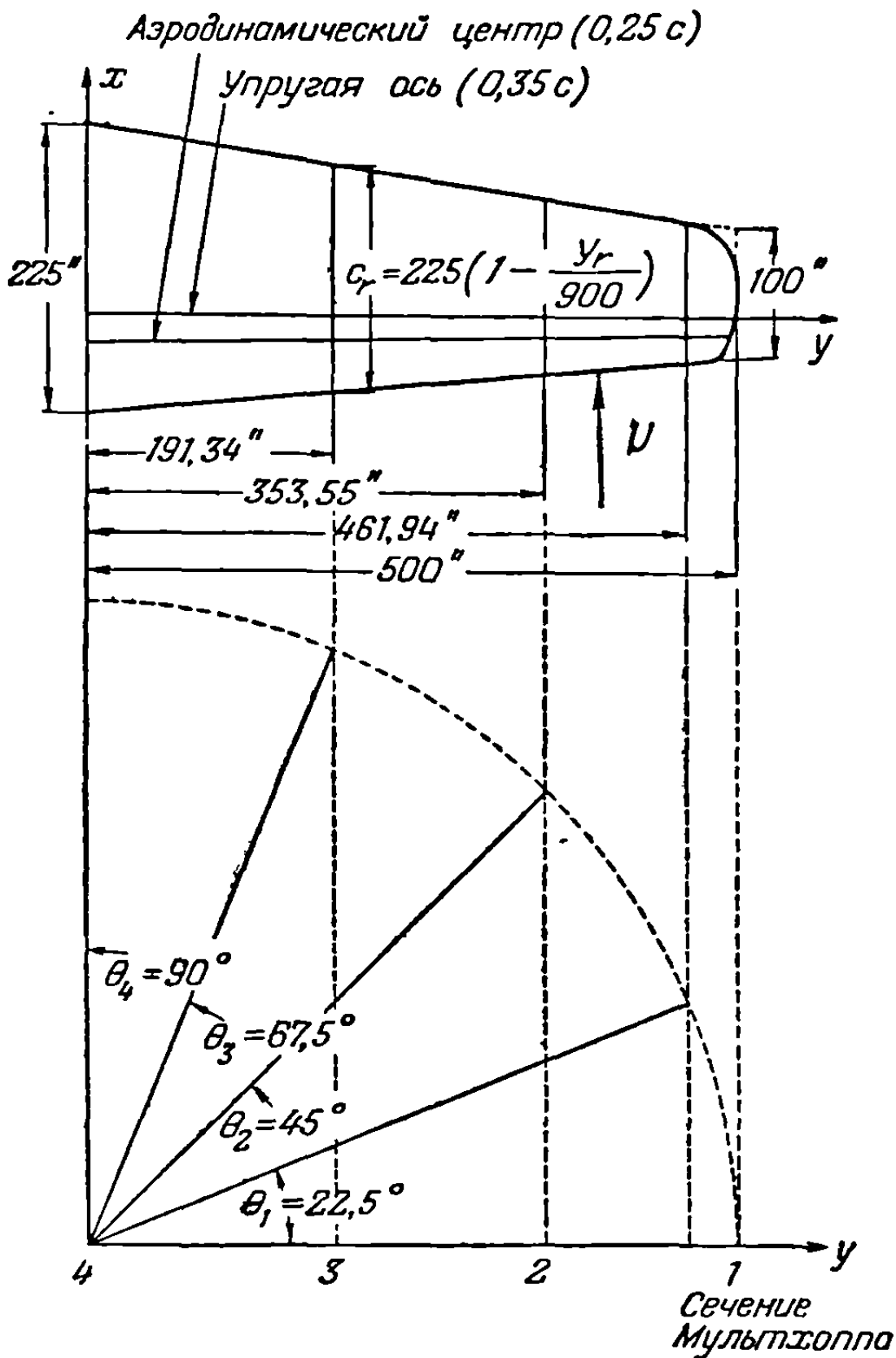
Упругие свойства крыла даны в примере 2-1. Считая упругую ось прямолинейной, из уравнений (2-120) и (2-121) можно вычислить матрицу коэффициентов влияния при кручении, связанную с сечениями, показанными на фиг. 8-6:

$$[C^{\theta\theta}] = \begin{bmatrix} 424,3 & 424,3 & 424,3 & 0 \\ 424,3 & 186,6 & 186,6 & 0 \\ 424,3 & 186,6 & 78,45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-10} \text{ рад/дюйм} \cdot \text{фунт.} \quad (a)$$

Из геометрических свойств крыла, изображенного на фиг. 8-6, следует, что матрицы  $\begin{bmatrix} e \\ \vdots \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} c \\ \vdots \end{bmatrix}$  имеют следующие численные значения:

$$\begin{bmatrix} e \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,95 \\ 13,66 \\ 17,72 \\ 22,50 \end{bmatrix} \text{ дюймов,} \quad (b)$$

1) Здесь и дальше см. таблицу перевода английских мер в метрические, стр. 000. — Прим. ред.



Фиг. 8-6. Сечения Мультхоппа на крыле реактивного транспортного самолета.

$$[\underline{c}] = \begin{bmatrix} 109,515 & & & \\ & 136,612 & & \\ & & 177,165 & \\ & & & 225 \end{bmatrix} \text{ дюймов.} \quad (c)$$

В настоящем примере матрица весовых чисел  $[\underline{W}]$  будет получена с помощью интегральной формулы Мультихуппа. Применение этой формулы подробно рассмотрено в приложении В, где показано, что для этого частного случая четырех сечений матрица весовых чисел имеет вид

$$[\underline{W}] = \frac{\pi l}{8} \begin{bmatrix} \sin \pi/8 & & & \\ & \sin \pi/4 & & \\ & & \sin 3\pi/8 & \\ & & & \frac{1}{2} \sin \pi/2 \end{bmatrix} \text{ дюймов.} \quad (d)$$

Для настоящего примера  $l = 500$  дюймов (полуразмах). Матрица  $[E]$  определяется по матрицам (a), (b) и (d) следующим образом:

$$[E] = [C^{00}] [\underline{c}] [\underline{W}] = \begin{bmatrix} 34,9105 & 35,3897 & 25,2175 & 0 \\ 15,3531 & 35,3897 & 25,2175 & 0 \\ 6,4547 & 14,8785 & 25,2175 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \frac{\text{рад} \cdot \text{дюйм}}{\text{фунт}}. \quad (e)$$

Матрица, которую следует подвергнуть итерации для того, чтобы получить результат, соответствующий теории несущей полосы, выводится из уравнения (8-55) следующим образом:

$$\frac{1}{q(dC_L/d\alpha)} \{cc_i^e\} = [\underline{c}] [E] \{cc_i^e\}. \quad (f)$$

Подставляя в уравнение (f) численные выражения  $[\underline{c}]$  и  $[E]$  из матриц (c) и (e) соответственно, получаем

$$\frac{1}{q(dC_L/d\alpha)} \{cc_i^e\} = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 0,3823 & 0,3875 & 0,2762 & 0 \\ 0,2097 & 0,4835 & 0,3445 & 0 \\ 0,1143 & 0,2636 & 0,4467 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{cc_i^e\}. \quad (g)$$

В результате процесса итерации матриц уравнения (g) получим

$$\frac{1}{q_D(dC_L/d\alpha)} \{cc_i^e\} = 0,00957 \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9684 \\ 0,7237 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (h)$$

Столбцевая матрица в уравнении (h) представляет нормированную форму дивергенции при кручении для случая теории несущей полосы. Скорость дивергенции определяется по собственному значению и равна

$$U_D = \sqrt{\frac{1}{(\rho/2)(0,00957)(dC_L/d\alpha)}}. \quad (i)$$

В конце примера для различных принятых значений  $dC_L/d\alpha$  подсчитаны численные значения  $U_D$ .

(b) *Определение скорости симметричной формы дивергенции по теории несущей линии.* Скорость симметричной формы дивергенции, согласно теории несущей линии, определяется из следующего соотношения:

$$[A^s] \{cc_i^{es}\} = q [E] \{cc_i^{es}\}. \quad (8-60)$$

Матрица  $[E]$  в выражении (8-60) была определена выше и дается соотношением (e). Матрица  $[A^s]$  выводится из уравнения (5-157) и имеет вид

$$[A^s] = \begin{bmatrix} 4,2733 & -0,95711 & 0 & -0,07322 \\ -0,51798 & 2,7451 & -0,59724 & 0 \\ 0 & -0,45711 & 2,10866 & -0,42677 \\ -0,05604 & 0 & -0,78858 & 1,80808 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \text{ рад/дюйм.} \quad (j)$$

Матрица, которая должна подвергнуться процессу итерации, выводится из уравнения (8-60) следующим образом:

$$\frac{1}{q} \{cc_i^{es}\} = [A^s]^{-1} [E] \{cc_i^{es}\}. \quad (k)$$

Обращая уравнение (j), получаем

$$[A^s]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,24525 & 0,09089 & 0,03231 & 0,01756 \\ 0,04919 & 0,40238 & 0,12582 & 0,03169 \\ 0,01338 & 0,09629 & 0,55029 & 0,13043 \\ 0,01344 & 0,04482 & 0,24100 & 0,61050 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ рад/дюйм.} \quad (l)$$

Подставляя матрицы (e) и (l) в уравнение (k), получаем

$$\frac{1}{q} \{cc_i^{es}\} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 10,1660 & 12,3768 & 9,2915 & 0 \\ 8,7072 & 17,8530 & 14,5604 & 0 \\ 5,4976 & 12,0690 & 16,6427 & 0 \\ 2,7128 & 5,6474 & 7,5466 & 0 \end{bmatrix} \{cc_i^e\}. \quad (m)$$

В результате процесса итерации матриц уравнения (m) имеем

$$\frac{1}{q_D} \{cc_i^{es}\} = 0,036439 \begin{bmatrix} 0,7615 \\ 1 \\ 0,8211 \\ 0,3817 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (n)$$

Ординаты кривой симметричной формы дивергенции даются элементами столбцовой матрицы, а скорость дивергенции определяется по формуле

$$U_D = \sqrt{\frac{1}{(p/2)(0,036439)}}. \quad (o)$$

(с) *Определение скорости антисимметричной формы дивергенции по теории несущей линии.* Скорость дивергенции антисимметричной формы, согласно теории несущей линии, определяется из следующего соотношения:

$$[A^a] \{cc_i^{ea}\} = q [E] \{cc_i^{ea}\}, \quad (8-61)$$

где  $[E]$  выражается через приведенную выше матрицу (e). Матрица  $[A^a]$  получается из соотношения (5-157) для четных значений  $r$ , когда члены, соответствующие середине размаха, равны нулю. Таким образом, для настоящего примера получим

$$[A^a] = \begin{bmatrix} 4,2733 & -0,92387 & 0 & 0 \\ -0,5000 & 2,7451 & -0,5000 & 0 \\ 0 & -0,38268 & 2,10865 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,80808 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \text{ рад/дюйм.} \quad (p)$$

Матрица, которая должна быть подвергнута процессу итераций, получается из уравнения (8-61) следующим образом:

$$\frac{1}{q} \{cc_i^{ea}\} = [A^a]^{-1} [E] \{cc_i^{ea}\}. \quad (q)$$

Обращение уравнения (p) приводит к соотношению

$$[A^a]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,24394 & 0,08491 & 0,02013 & 0 \\ 0,04595 & 0,39273 & 0,09312 & 0 \\ 0,00834 & 0,07127 & 0,49113 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ рад/дюйм.} \quad (r)$$



Подставляя матрицы (е) и (г) в уравнение (q), находим

$$\frac{1}{q} \{cc_i^{ea}\} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 9,9497 & 11,9374 & 8,8004 & 0 \\ 8,2348 & 16,9103 & 13,4107 & 0 \\ 4,5555 & 10,1248 & 14,3928 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{cc_i^{ea}\}. \quad (s)$$

Итерируя уравнение (s), получаем

$$\frac{1}{q_D} \{cc_i^{ea}\} = 0,033198 \begin{bmatrix} 0,78966 \\ 1 \\ 0,72968 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (t)$$

Ординаты кривой антисимметричной формы дивергенции даются элементами столбцевой матрицы, а скорость дивергенции определяется из соотношения

$$U_D = \sqrt{\frac{1}{(p/2)(0,033198)}}. \quad (u)$$

(d) *Резюме.* Результаты приведенных выше вычислений суммированы в помещаемой ниже таблице для случая горизонтального полета на уровне моря.

Метод анализа	Скорость дивергенции $U_D$ фут/сек
Теория несущей полосы (без поправки на конечность размаха): $\frac{dC_L}{d\alpha} = a_0 = 5,5$	1516,6
Теория несущей полосы [с поправкой по уравнению (5-166)]: $\frac{dC_L}{d\alpha} = a_0 \frac{\lambda}{\lambda + 2} = 4,1497$	1745,9
Теория несущей полосы [с поправкой по уравнению (5-219)]: $\frac{dC_L}{d\alpha} = a_0 \frac{\lambda}{\lambda + 4} = 3,3325$	1948,2
Теория несущей линии: симметричная форма	1823,1
Теория несущей линии: антисимметричная форма	1910,0

Хотя скорости дивергенции, затабулированные выше, не имеют реального физического значения, поскольку они определялись на основе теории несжимаемой жидкости, в настоящем примере мы не будем пытаться исправить их на влияние числа Маха. Однако можно сделать заключение, что скорость дивергенции, очевидно, находится выше диапазона скоростей рассмотренного реактивного транспортного самолета.

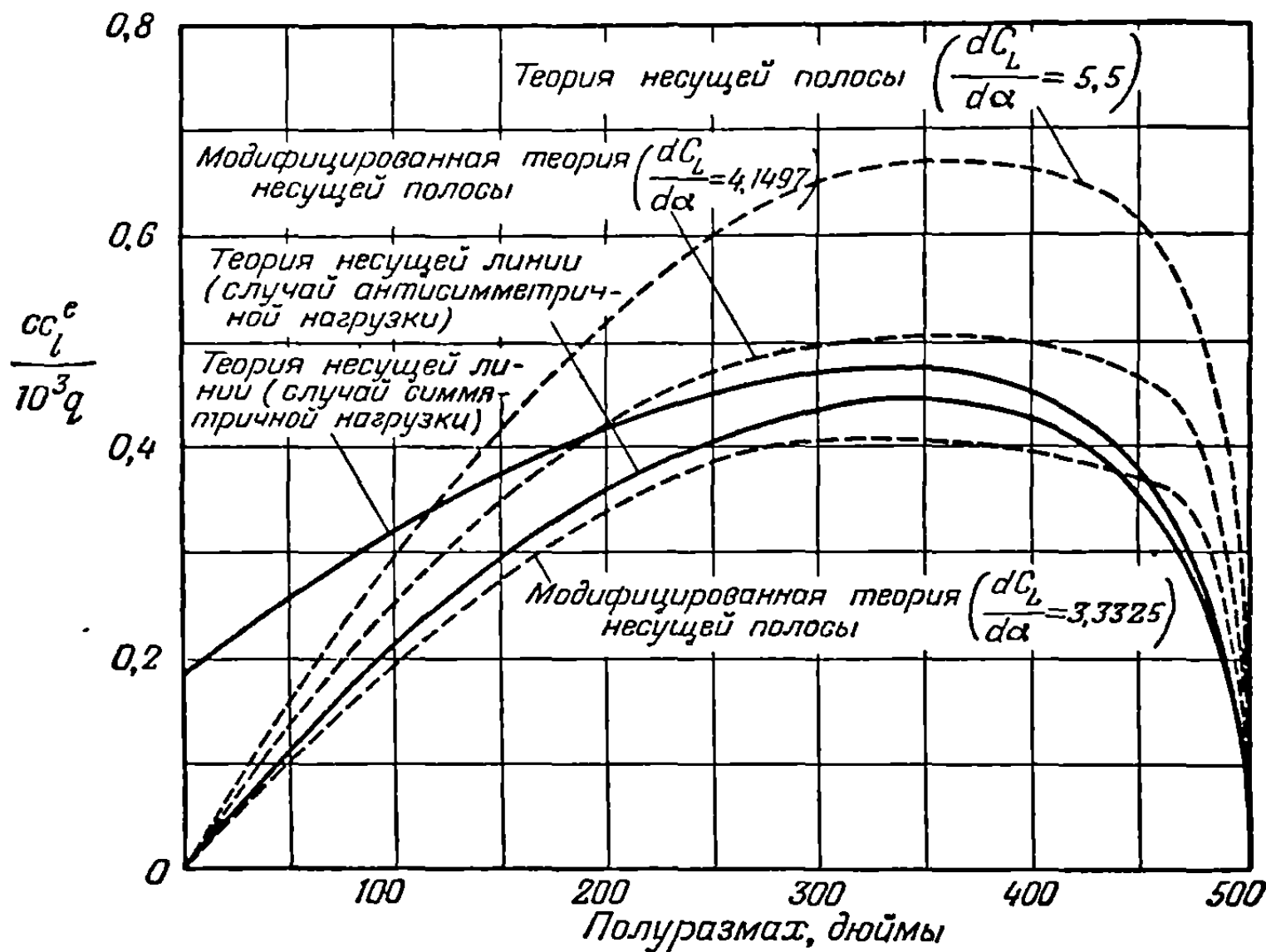
При сравнении результатов, помещенных в таблице, для случая теории несущей линии видно, что скорость антисимметричной формы дивергенции выше скорости дивергенции симметричной формы. Это всегда справедливо для прямых крыльев, и поэтому практически обычно нет необходимости вычислять скорости антисимметричной дивергенции. Величина скорости дивергенции, вычисленная по теории несущей полосы при  $dC_L/d\alpha = a_0$ , меньше скорости симметричной дивергенции, найденной по теории несущей линии. Как нашли Хильдебранд и Е. Рейсснер [8—10], это также всегда справедливо для прямых крыльев. Величина скорости дивергенции, вычисленная с использованием модифицированной теории несущей полосы с внесением поправки в величину наклона кривой подъемной силы на влияние конечности размаха, приближается к величине скорости

симметричной дивергенции, вычисленной по теории несущей линии. В этом частном примере результат вычислений с использованием зависимости

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = a_0 \frac{\lambda}{\lambda + 2}$$

дает лучшую (хотя и завышенную) аппроксимацию теории несущей линии<sup>1)</sup>.

Эти выводы могут быть получены также из следующих физических соображений. Допустим, что при всех методах исследования крыло имеет приблизительно одинаковое распределение углов закручивания по размаху. Если крылу с подобным распределением углов закручивания сообщить некоторое конечное перемещение от его исходного положения, то возникшие на нем в результате такого перемещения аэродинамические силы создадут аэродинамические крутящие моменты. Величины этих аэродинамических крутящих моментов в различных сечениях крыла зависят, конечно, от распределения аэродинамических сил по размаху крыла. Тогда следовало бы ожидать, что крутящий момент



Фиг. 8-7. Распределение подъемной силы для заданного угла закручивания  $\theta_D = \sin(\pi y/2l)$ .

в некотором произвольном сечении по размаху будет наибольшим, а скорость дивергенции наименьшей для тех распределений подъемной силы, при которых большие значения подъемной силы концентрируются вблизи конца крыла. На фиг. 8-7 сравниваются различные распределения подъемной силы для определенного заданного распределения углов закручивания по размаху

$$\theta_D = \sin \frac{\pi y}{2l}.$$

Сопоставляя распределения подъемной силы по размаху, полученные по теории несущей полосы и по теории несущей линии и помещенные на фиг. 8-7, мы должны ожидать, что скорость дивергенции, подсчитанная по теории несущей полосы, будет наименьшей, поскольку нагрузка на конец крыла по этой теории получается наибольшей. Аналогично, сравнивая симметричные и антисимметричные распределения подъемной силы по теории несущей линии, можно было бы заключить, что симметричной форме дивергенции соответствует меньшая скорость дивергенции. На этой основе из фиг. 8-7 можно сделать аналогичные заключения, касающиеся относительной величины данных, получающихся по теории несущей полосы и по модифицированной теории несущей полосы.

1) В п. 5-5 мы видели, что формула

$$dC_L/d\alpha = a_0 [\lambda/(\lambda + 2)]$$

выводится из теории несущей линии, тогда как формула

$$dC_L/d\alpha = a_0 [\lambda/(\lambda + 4)]$$

является эмпирической.

(4) *Решения с помощью энергетических методов.* Иногда полезно исследовать явление дивергенции тонкого прямого крыла элементарным энергетическим методом. Поскольку рассматриваемая задача о собственных значениях идентична задаче о собственных значениях в случае колеблющейся балки или задаче Эйлера для стержня, следует ожидать, что метод Рэля, весьма полезный в этих задачах, можно с равным успехом применить к исследованию дивергенции при кручении. Если у крыла, движущегося с определенной скоростью, произвольно увеличить угловую деформацию и если при этом изменение энергии упругих деформаций будет больше, нежели работа, совершаемая аэродинамическими силами, то крыло является статически устойчивым. Однако, если работа, совершаемая аэродинамическими силами, превышает изменение энергии деформации, то крыло будет статически неустойчивым. Таким образом, пограничный случай нейтральной устойчивости определяется условием, что изменение энергии деформации равно работе, совершаемой аэродинамическими силами при произвольном конечном увеличении угла закручивания.

Допустим, что угол закручивания крыла увеличен на произвольную конечную величину, определяемую функцией  $\Theta(y)$ . Приравнявая изменение энергии деформации работе, совершаемой аэродинамическими силами, получим

$$\int_0^l \frac{GJ}{2} \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 dy = \frac{1}{2} q_D \int_0^l cc_i^e e\Theta dy, \quad (8-62)$$

где  $q_D$  — динамическое давление, соответствующее режиму дивергенции. Оно определяется соотношением

$$q_D = \frac{\int_0^l GJ (d\Theta/dy)^2 dy}{\int_0^l cc_i^e e\Theta dy}. \quad (8-63)$$

Уравнение (8-63) по форме аналогично хорошо известной формуле Рэля для собственных частот колеблющихся балок [уравнение (4-17)]. Динамическое давление дивергенции можно рассчитать, если учесть форму кривой деформации при дивергенции  $\Theta(y)$ . Кривая, соответствующая в точности кривой деформации при дивергенции, дает минимальную величину  $q_D$ , а кривая любой другой формы соответствует большей величине  $q_D$ . Уравнение (8-63) полезно в том отношении, что любая, должным образом выбранная функция, которая удовлетворяет граничным условиям  $\Theta(0) = \Theta(l) = 0$ , будет давать хорошее приближение к  $q_D$ . Например, случай неоднородных крыльев можно легко и с достаточной точностью исследовать, если ввести основную форму дивергенции свободнонесущего однородного крыла [см. уравнение (8-42)] и произвести численную оценку интегралов. Аэродинамическое влияние упругой крутки по размаху можно учесть, вычисляя распределение  $cc_i^e$ , соответствующее принятому распределению  $\Theta(y)$ . Это является отдельной задачей и требует решения уравнения

$$\Theta(y) = \mathfrak{A}[cc_i^e(y)]. \quad (8-64)$$

Для того чтобы получить приближенное выражение  $q_D$ , распределение  $cc_i^e(y)$  и принятое распределение  $\Theta(y)$  нужно подставить в уравнение (8-63). Когда используется теория несущей полосы, уравнение (8-63) принимает следующую

упрощенную форму, полезную для быстрых оценок скорости дивергенции прямого крыла:

$$q_D = \frac{\int_0^l GJ (d\theta/dy)^2 dy}{\int_0^l a_0 \theta^2 c e dy}. \quad (8-65)$$

Пример 8-2. Используя приближенную форму выражения кривой деформации

$$\theta = 2 \frac{y}{l} - \left(\frac{y}{l}\right)^2,$$

вычислить скорость дивергенции при кручении однородного крыла, используя метод Рэлея и теорию несущей полосы, и сравнить результат с точным решением.

*Решение.* Выбранная функция удовлетворяет граничным условиям и приближенно представляет точную кривую распределения угла закручивания. Из уравнения (8-65) имеем

$$q_D = \frac{GJ \int_0^l \left(\frac{2}{l} - 2\frac{y}{l^2}\right)^2 dy}{c e a_0 \int_0^l \left(2\frac{y}{l} - \left(\frac{y}{l}\right)^2\right)^2 dy} = \frac{15}{6} \frac{GJ}{c e a_0 l^2}.$$

Сравнивая результат вычислений с точным решением, которое дается формулой (8-40), найдем, что ошибка составляет 1,4%.

(с) *Симметричное распределение подъемной силы.* Влияние аэроупругости на распределение подъемной силы по размаху прямых крыльев при симметричных условиях полета важно для конструкторов из-за смещения центра давления по размаху к концам крыла, обусловленного закручиванием, и протекающего вследствие этого увеличения изгибающих моментов по размаху.

(1) *Решения в конечной форме для однородных крыльев, основанные на теории несущей полосы.* Решение в конечной форме для распределения подъемной силы по размаху однородного крыла с использованием теории несущей полосы можно легко получить из решения дифференциального уравнения равновесия. В случае теории несущей полосы и однородного крыла уравнение (8-27) переходит в следующее:

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2\theta = K^r, \quad (8-66)$$

где

$$K^r = -\frac{1}{GJ} (q c e c_i^r + q c_{mAC} c^2 - m N g d), \quad \lambda^2 = \frac{q c e a_0}{GJ}.$$

Общее решение уравнения (8-66) имеет вид

$$\theta(y) = A \sin \lambda y + B \cos \lambda y + (K^r/\lambda^2), \quad (8-67)$$

где постоянные  $A$  и  $B$  должны определяться из граничных условий. При введении граничных условий следует рассмотреть два типа практических задач.

*Положение жесткого крыла известно.* Когда положение жесткого крыла известно, то остается вычислить суммарную подъемную силу и распределение подъемной силы по размаху. В практической задаче это было бы эквивалентно фиксированию положения фюзеляжа самолета в полете или положения державки модели в аэродинамической трубе. Рассмотрим решение уравнения (8-66) для случая полета самолета с однородным крылом при определенном положении корневого сечения крыла  $\alpha(0)$ . При этом должны выполняться следующие условия:

$$c_i^r = a_0 \alpha(0), \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(l) = 0. \quad (8-68)$$

Вычисляя постоянные  $A$  и  $B$  согласно условиям (8-68), получим

$$\theta(y) = \frac{K^r}{\lambda^2} (1 - \operatorname{tg} \lambda l \sin \lambda y - \cos \lambda y), \quad (8-69)$$

где

$$K^r = -\frac{1}{GJ} (qce a_0 \alpha(0) + qc_{mAC} c^2 - mN gd). \quad (8-69a)$$

Коэффициент полной подъемной силы является суммой коэффициента подъемной силы жесткого крыла и дополнительного коэффициента подъемной силы, обусловленного упругим закручиванием,

$$c_l = a_0 \alpha(0) + a_0 \theta(y). \quad (8-70)$$

Однако распределение подъемной силы в явном виде не известно до тех пор, пока не определено численное значение коэффициента перегрузки  $N$ . Величину этого коэффициента получим, подставив выражение (8-70) в следующее условие:

$$N = \frac{2q}{W} \int_0^l c c_l dy, \quad (8-70a)$$

где  $W$  — вес самолета. Отсюда имеем

$$N = \frac{a_0 \alpha(0) \frac{\operatorname{tg} \lambda l}{\lambda} + \frac{c}{e} c_{mAC} \left( \frac{\operatorname{tg} \lambda l}{\lambda} - 1 \right)}{\frac{1}{qc} \left\{ \frac{W}{2l} - \frac{mgd}{e} \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \lambda l}{\lambda} \right) \right\}}. \quad (8-70b)$$

Величина  $N$ , приведенная выше, является тем значением, которое требуется для равновесия самолета, когда угол атаки корневого сечения крыла равен  $\alpha(0)$ . Таким образом, распределение подъемной силы, обусловленное упругим закручиванием однородного крыла самолета в полете при заданном его положении, определяется соотношением

$$c_l^e(y) = a_0 \frac{K^r}{\lambda^2} (1 - \operatorname{tg} \lambda l \sin \lambda y - \cos \lambda y), \quad (8-70c)$$

где  $K^r$  определяется равенством (8-69a), а  $N$  дается соотношением (8-70b).

Особенно простой результат получится, если пренебречь инерционными крутящими моментами и допустить, что профиль крыла симметричный. Для этого в полученных выше результатах полагают  $c_{mAC} = d = 0$ . Распределение коэффициента подъемной силы жесткого крыла, обусловленное определенным положением крыла, будет таким же, как и прежде:

$$c_l^r = a_0 \alpha(0); \quad (8-71a)$$

однако распределение коэффициента подъемной силы, возникающее вследствие упругого закручивания, имеет более простую форму:

$$c_l^e(y) = a_0 \alpha(0) [\cos \lambda y + \operatorname{tg} \lambda l \sin \lambda y - 1]. \quad (8-71b)$$

Полезно рассмотреть отношение

$$\frac{c_l}{c_l^r} = \frac{c_l^e + c_l^r}{c_l^r} = \cos \lambda y + \operatorname{tg} \lambda l \sin \lambda y. \quad (8-72)$$

На фиг. 8-8 для различных значений  $\lambda l$ , меньших  $\pi/2$ , приведены кривые изменения этого отношения. По этим кривым видно, что с увеличением значений  $\lambda l$  упругое закручивание оказывает большое влияние на распределение подъемной силы по размаху. Хотя эти кривые построены только до значения  $\lambda l = \pi/3$ , ранее, из уравнения (8-39), мы уже видели, что, когда  $\lambda l = \pi/2$ , имеет место дивергенция крыла и отношение  $c_l/c_l^r$  стремится к бесконечности.

Полная подъемная сила крыла известна. В условиях проектирования коэффициенты перегрузки и скорости часто задаются в виде диаграммы  $V-n$ . Таким образом, полная подъемная сила крыла известна, и нужно определить положение крыла и распределение подъемной силы. В этом случае используется следующее дополнительное условие:

$$q \int_0^l c c_i^r dy + q \int_0^l c c_i^e dy = \frac{WN}{2}, \quad (8-73)$$

где  $N$  — известный коэффициент перегрузки. Распределение подъемной силы жесткого крыла удобно вычислить согласно предположению, что

$$q \int_0^l c c_i^r dy = \frac{WN}{2}, \quad (8-74)$$

а добавочное упругое распределение — исходя из соотношения

$$\int_0^l c c_i^e dy = 0. \quad (8-75)$$

С этими допущениями распределение подъемной силы на жестком крыле подсчитывается обычным способом, и на него накладывается добавочное распределение подъемной силы, которое не дает дополнительной подъемной силы. Распределение коэффициента подъемной силы жесткого крыла определяется сразу с помощью соотношения

$$c_i^r = \frac{WN}{2qcl}, \quad (8-76a)$$

где  $N$  — известный коэффициент перегрузки. Подставляя в (8-67) величину (8-76a) и вводя граничные условия

$$\theta(0) = 0, \quad \theta'(l) = 0, \quad (8-76b)$$

получим угол закручивания крыла, измеряемый относительно корневого сечения

$$\theta(y) = \frac{K^r}{\lambda^2} (1 - \operatorname{tg} \lambda \sin \lambda y - \cos \lambda y), \quad (8-76c)$$

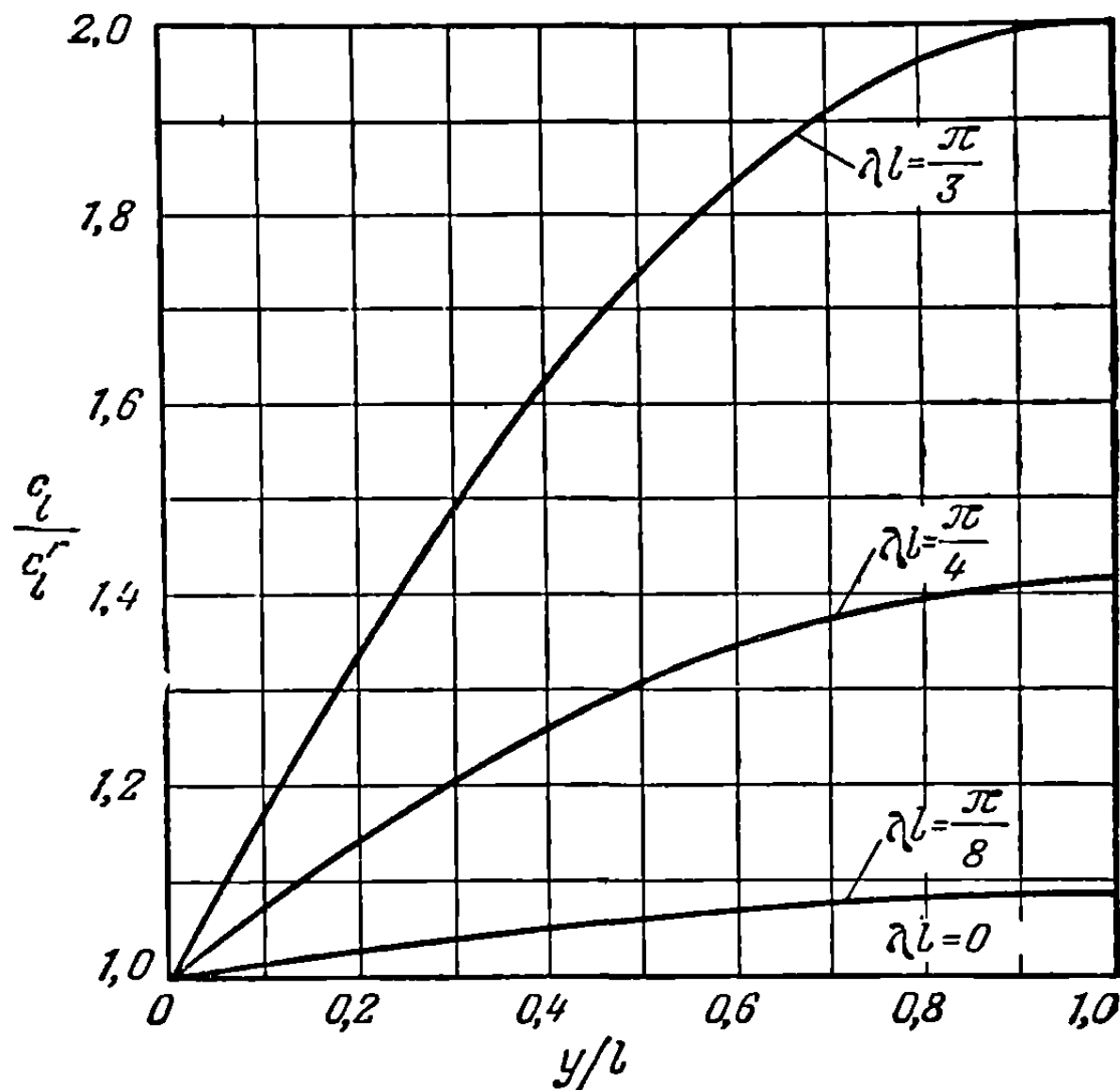
где

$$K^r = -\frac{1}{GJ} \left( \frac{WNe}{2l} + qc_{m\Delta} c^2 - mNgd \right),$$

Прибавив относительную величину  $\alpha^e(0)$  к углу упругого закручивания  $\theta(y)$ , получим исправленное распределение угла атаки  $\alpha^e(y)$ , соответствующее истинному распределению подъемной силы:

$$\alpha^e(y) = \alpha^e(0) + \frac{K^r}{\lambda^2} (1 - \operatorname{tg} \lambda \sin \lambda y - \cos \lambda y). \quad (8-77)$$

Величину  $\alpha^e(0)$  физически можно истолковать как угол, на который должен быть опущен носок корневого сечения, чтобы полная подъемная сила, обуслов-



Фиг. 8-8. Изменение распределения подъемной силы однородного крыла с параметром  $\lambda = l \sqrt{\frac{qca_0}{GJ}}$  (положение крыла задано).

ленная упругим закручиванием, равнялась нулю. Умножив уравнение (8-77) на  $a_0$  (что дает  $c_i^e$ ) и подставив результат в уравнение (8-75), получим

$$\alpha^e(0) = \frac{K^r}{\lambda^2} \left( \frac{\operatorname{tg} \lambda l}{\lambda} - 1 \right). \quad (8-78)$$

Подставив выражение (8-78) в (8-77) и умножив на  $a_0$ , получим выражение для распределения исправленного коэффициента подъемной силы в виде:

$$c_i^e = \frac{a_0 K^r}{\lambda^2} \left[ 1 - \lambda \sin \lambda y - \frac{\lambda \cos \lambda y}{\operatorname{tg} \lambda l} \right] \frac{\operatorname{tg} \lambda l}{\lambda}. \quad (8-79)$$

Распределение коэффициента полной подъемной силы получим, суммируя  $c_i^r$ , даваемое уравнением (8-76а), и  $c_i^e$ , определяемое уравнением (8-79). Когда известен коэффициент полной перегрузки, то можно легко проиллюстрировать влияние упругости на распределение подъемной силы, если опять принять, что  $c_{\text{мас}} = d = 0$ . В этом случае отношение  $c_i/c_i^r$  приобретает простой вид:

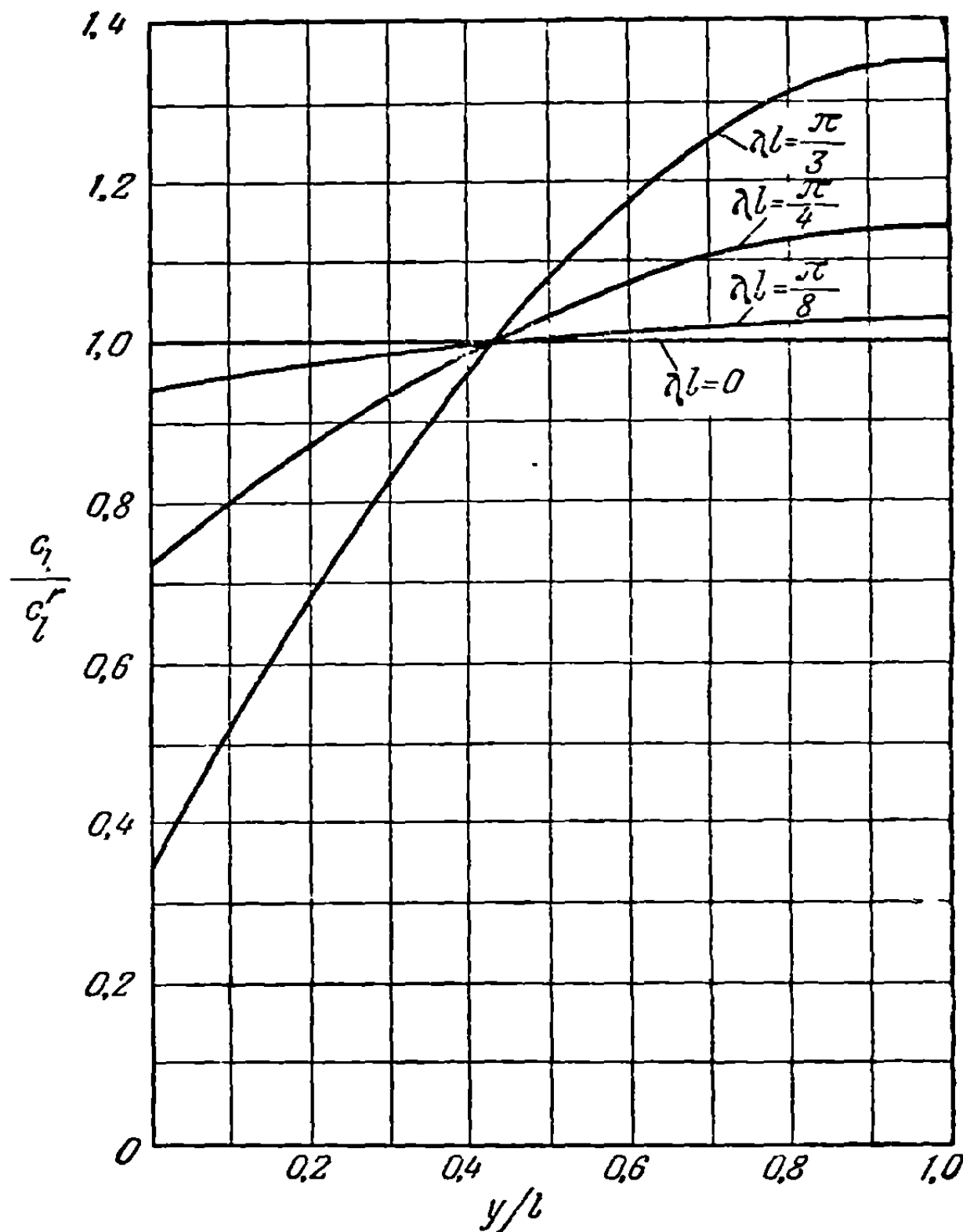
$$\frac{c_i}{c_i^r} = \frac{c_i^r + c_i^e}{c_i^r} = 1 - \frac{\operatorname{tg} \lambda l}{\lambda} + \sin \lambda y \operatorname{tg} \lambda l + \cos \lambda y. \quad (8-80)$$

На фиг. 8-9 приведены кривые этого отношения для различных значений  $\lambda l$ . Из этой фигуры можно заметить, что площади под различными кривыми распределения нагрузки остаются одинаковыми. Это, конечно, находится в соответствии с условием, налагаемым уравнением (8-73).

Можно отметить, что пренебрежение инерционными крутящими моментами, вероятно, мало влияет на кривые фиг. 8-8 и 8-9. Это обусловлено тем обстоятельством, что отношение инерционных крутящих моментов к аэродинамическим крутящим моментам имеет такой же порядок, как и отношение веса крыла к весу самолета. Для обычных схем самолета это отношение мало, но для случая летающего крыла приближается, конечно, к единице.

(2) *Решение при помощи матриц.* Рассмотрим теперь метод решения практической задачи для крыла, свойства которого меняются по размаху сложным образом. В этом случае лучше использовать интегральное уравнение задачи о распределении подъемной силы [уравнение (8-28)]

$$\theta(y) = q \int_0^l C^{00}(y, \eta) \operatorname{ess}_i^2 d\eta + f(y). \quad (8-28)$$



Фиг. 8-9. Изменение распределения подъемной силы однородного крыла с параметром  $\lambda l = l \sqrt{\frac{q c e a_0}{GJ}}$  (полная подъемная сила задана).



Пользуясь соотношением (8-29), получаем

$$\mathfrak{A} [cc_i^e] = q \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) e c c_i^e d\eta + f(y), \quad (8-81)$$

где  $cc_i^e$  — распределение подъемной силы, соответствующее упругому закручиванию  $\theta(y)$ .

Для того чтобы получить практические численные решения уравнения (8-81), запишем его в следующей матричной форме:

$$[A^s] \{cc_i^e\} = q [E] \{cc_i^e\} + \{f\}, \quad (8-82)$$

где

$[A^s]$  — матрица аэродинамических коэффициентов влияния для случая симметричного нагружения [уравнение (5-157)],

$$\{f\} = q [E] \{cc_i^r\} + q [F] \{c_{mAC}\} - N [G] \{mg\},$$

$$[E] = [C^{\theta\theta}] \begin{bmatrix} e \\ \bar{w} \end{bmatrix},$$

$$[F] = [C^{\theta\theta}] \begin{bmatrix} c^2 \\ \bar{w} \end{bmatrix},$$

$$[G] = [C^{\theta\theta}] \begin{bmatrix} d \\ \bar{w} \end{bmatrix}.$$

Следует заметить, что первая компонента матрицы  $\{f\}$ , равная  $q [E] \{cc_i^r\}$ , представляет только столбцевую матрицу закручивания крыла, вызванного распределением подъемной силы по жесткому крылу. Аналогично вторая и третья компоненты представляют соответственно закручивание крыла под действием аэродинамических моментов относительно аэродинамического центра и закручивание крыла за счет сил инерции. Другую форму уравнения (8-82) можно вывести, положив в уравнении (8-82)

$$\{cc_i^e\} = \{cc_i\} - \{cc_i^r\}.$$

В результате получим

$$[A^s] \{cc_i\} = q [E] \{cc_i\} + \{\alpha^r\} + q [F] \{c_{mAC}\} - N [G] \{mg\}, \quad (8-83)$$

где

$$\{\alpha^r\} = [A^s] \{cc_i^r\}.$$

В уравнении (8-82) неизвестной величиной является столбцевая матрица  $\{cc_i^e\}$ , а в уравнении (8-83) — величина  $\{cc_i\}$ . Предполагается, что все другие величины определяются свойствами крыла и условием задачи. Характеристики рассматриваемого режима полета служат для определения  $\{\alpha^r\}$ ,  $\{cc_i^r\}$  и  $N$ . Как было указано, режимы полета распадаются обычно на две основные категории.

*Режим, при котором задано положение жесткого крыла.* Когда положение самолета в полете с ускорением задано, то известна матрица  $\{\alpha^r\}$  и остается вычислить полную подъемную силу или коэффициент перегрузки  $N$  и распределение подъемной силы. Коэффициент перегрузки  $N$  вычисляется из дополнительного условия, согласно которому полная подъемная сила самолета уравнивается силами тяжести и силами инерции. В матричной форме это условие имеет вид

$$q \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{w} \end{bmatrix} \{cc_i\} = \frac{1}{2} WN, \quad (8-84)$$

где  $\begin{bmatrix} 1 \\ \bar{w} \end{bmatrix}$  — строчная матрица, каждый элемент которой равен единице. Следовательно, используя известную матрицу  $\{\alpha^r\}$  вместе с условием, которое дается равенством (8-84), из уравнения (8-83) можно определить распределение полной

подъемной силы. Разрешив уравнение (8-84) относительно  $N$  и подставив результат в уравнение (8-83), получим

$$[A^s] \{cc_i\} = q \left( [E] - \frac{2}{W} [G] \{mg\} \lfloor 1 \rfloor \lfloor \bar{W} \rfloor \right) \{cc_i\} + \{\alpha^r\} + q [F] \{c_{mAC}\}. \quad (8-85)$$

Уравнения (8-85) представляют систему совместных уравнений, неизвестные которой являются ординатами кривых распределения полной подъемной силы. Если положение крыла  $\{\alpha^r\}$  известно, то уравнение (8-85) может быть разрешено относительно столбцевой матрицы  $\{cc_i\}$ . Возможно, что в некоторых задачах для определенного положения желательнее непосредственно вычислить распределение подъемной силы, обусловленное упругим закручиванием. Для этого перепишем уравнение (8-84) в форме

$$N = N^r + \frac{2q}{W} \lfloor 1 \rfloor \lfloor \bar{W} \rfloor \{cc_i^e\}, \quad (8-86)$$

где  $N^r$  — коэффициент перегрузки, соответствующий матрице жесткого угла атаки  $\{\alpha^r\}$ . Если подставить теперь величину  $N$ , определяемую уравнением (8-86), в уравнение (8-82), то получим систему совместных уравнений, которую можно разрешить непосредственно относительно распределения подъемной силы, обусловленной упругим закручиванием:

$$[A^s] \{cc_i^e\} = q \left( [E] - \frac{2}{W} [G] \{mg\} \lfloor 1 \rfloor \lfloor \bar{W} \rfloor \right) \{cc_i^e\} + q [E] \{cc_i^r\} + q [F] \{c_{mAC}\} - N^r [G] \{mg\}. \quad (8-87)$$

Когда положение крыла  $\{\alpha^r\}$  и коэффициент перегрузки заданы, уравнение (8-87) можно разрешить в явном виде относительно столбцевой матрицы  $\{cc_i\}$ .

*Полная подъемная сила крыла известна.* Рассмотрим теперь интегральное уравнение и те матричные формы, которые следует применять в том случае, когда известна полная подъемная сила или коэффициент перегрузки  $N$ . При разборе решений дифференциального уравнения в замкнутой форме было выгодно предположить, что  $N$  обуславливается целиком распределением подъемной силы по жесткому крылу и что интеграл по размаху от дополнительного распределения подъемной силы, обусловленной упругой деформацией, равен нулю. Распределение угла атаки  $\alpha^e(y)$ , соответствующее распределению подъемной силы от упругой деформации, определяется равенством

$$\alpha^e(y) = \alpha^e(0) + \theta(y), \quad (8-88)$$

где  $\alpha^e(0)$  — постоянная, определяемая из условия равенства нулю интеграла по размаху от распределения подъемной силы, обусловленной упругой деформацией. Подставив выражение (8-88) в равенство (8-28), получим

$$\alpha^e(y) = q \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) e c c_i^e d\eta + f(y) + \alpha^e(0), \quad (8-89a)$$

где  $c c_i^e$  соответствует теперь распределению углов атаки  $\alpha^e(y)$ . Подставив сюда выражение (8-29), получим

$$\mathfrak{A} \{c c_i^e\} = q \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) e c c_i^e d\eta + f(y) + \alpha^e(0). \quad (8-89b)$$

Это уравнение сводится к уравнению в матричной форме

$$[A^s] \{c c_i^e\} = q [E] \{c c_i^e\} + \{f\} + \alpha^e(0) \{1\}. \quad (8-89c)$$

Условие равенства нулю полной подъемной силы, вызванной упругим закручиванием, может быть выражено в матричной форме:

$$[ -1 ] [ \bar{W} ] \{ cc_i^e \} = 0. \quad (8-89d)$$

Уравнения (8-89с) и (8-89d) можно решить совместно и найти распределение подъемной силы, обусловленной упругим закручиванием, и постоянную  $\alpha^e(0)$ :

$$\begin{bmatrix} [A^s] - q[E] & \{-1\} \\ [ -1 ] [ \bar{W} ] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{cc_i^e\} \\ \alpha^e(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{f\} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8-89e)$$

Таким образом, когда известен коэффициент полной перегрузки  $N$ , распределение  $\{cc_i^e\}$  подъемной силы, вызванное упругими деформациями, и постоянную  $\alpha^e(0)$  можно вычислить непосредственно, решая совместные уравнения, вытекающие из матричного уравнения (8-89е).

Матричные уравнения (8-85), (8-87) и (8-89е) могут быть формально разрешены с помощью обращения матриц. Если размах крыла разделен на  $n$  участков, то в случае уравнений (8-85) и (8-87) требуется обращение квадратной матрицы порядка  $n$ , а в случае уравнения (8-89е) — порядка  $n + 1$ . В качестве метода решения задачи можно также использовать метод итерации матриц. Если  $q \ll q_D$ , процесс итераций быстро сходится.

Распределения подъемной силы, соответствующие жесткому крылу, можно получить либо экспериментальным, либо аналитическим путем. Для расчета крыла без изломов применяются различные аналитические методы. Основой большинства подобных методов, применяемых к расчету прямых крыльев, является теория несущей линии Прандтля, изложенная в гл. 5. В качестве средства определения распределений подъемной силы по жесткому крылу широко используются испытания жестких моделей в аэродинамических трубах. Подобные испытания часто оказываются необходимыми, если очертания самолета включают сложные комбинации мотогондол и наружных топливных баков.

**Пример 8—3.** Определить влияние упругого закручивания на распределение нагрузки по размаху для реактивного транспортного самолета, указанного в примере 2-1. Примем, что самолет совершает симметричный выход из пикирования с перегрузкой  $N = 4$  при скорости 450 миль в час.

*Решение.* Форма крыла в плане изображена на фиг. 8-6. Основные данные, необходимые для вычислений в этом примере, будут взяты из примеров 2-1 и 8-1. Дополнительно необходимы следующие данные:

полный полетный вес  $W = 83\,838$  фунтов;

динамическое давление на скорости 450 миль в час,  $q = 3,596$  фунт/дюйм<sup>2</sup>;

наклон кривой подъемной силы  $a_0 = 5,5$ .

Коэффициент момента около аэродинамического центра для всех сечений равен  $c_{mac} = -0,015$ . В настоящем примере, как показано на фиг. 8-6, используются также сечения Мультхоппа, которые были использованы в примере 8-1. Поскольку в настоящем примере коэффициент перегрузки задан, то для подсчета распределения подъемной силы, обусловленной упругим закручиванием, применяем уравнение (8-89е):

$$\begin{bmatrix} [A^s] - q[E] & \{-1\} \\ [ -1 ] [ \bar{W} ] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{cc_i^e\} \\ \alpha^e(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{f\} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8-89e)$$

Матрицы  $[A^s]$ ,  $[E]$  и  $[ \bar{W} ]$ , входящие в уравнение (8-89е), были ранее затабулированы в примере 8-1. Для того чтобы составить уравнение, остается вычислить столбцовую матрицу  $\{f\}$  [см. уравнение (8-82)]. Для вычисления  $\{f\}$  нужно найти распределение подъемной силы по жесткому крылу при  $N = 4$ . Если предполагается, что крыло не имеет ни геометрической, ни аэродинамической кривки, то для случая жесткого крыла можно написать

$$[A^s] \{cc_i^r\} = \alpha^r \{1\}, \quad (a)$$

где  $\alpha^r$  — угол атаки жесткого крыла. Так как интеграл по размаху от распределения подъемной силы по жесткому крылу должен соответствовать коэффициенту перегрузки  $N = 4$ , то имеем дополнительное условие

$$q \int_{-1}^1 \int_{-\bar{W}}^{\bar{W}} \{cc_i^r\} = \frac{1}{2} WN. \quad (b)$$

Из уравнений (a) и (b) получаем угол атаки жесткого крыла

$$\alpha^r = \frac{WN}{2q} \frac{1}{\int_{-1}^1 \int_{-\bar{W}}^{\bar{W}} [A^s]^{-1} \{1\}}. \quad (c)$$

Подставив числовые данные и матрицы, приведенные выше в примере (8-1), получим величину угла атаки жесткого крыла

$$\alpha^r = 0,1346 \text{ рад.} \quad (d)$$

Распределение нагрузки по размаху жесткого крыла  $\{cc_i^r\}$  имеет вид

$$\{cc_i^r\} = 0,1346 [A^s]^{-1} \{1\} = \begin{bmatrix} 51,9704 \\ 82,0027 \\ 106,4141 \\ 122,4845 \end{bmatrix} \text{ дюймов} \quad (e)$$

Первая компонента матрицы  $\{f\}$ , равная  $q [E] \{cc_i^r\}$ , является столбцевой матрицей угла закручивания крыла, обусловленного распределением нагрузки по жесткому крылу:

$$q [E] \{cc_i^r\} = \{0\} \text{ распределение подъемн. силы для жесткого крыла} = \begin{bmatrix} 0,026615 \\ 0,022959 \\ 0,015246 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ рад.} \quad (f)$$

Второе слагаемое матрицы  $\{f\}$ , матрица  $q [F] \{c_{mAC}\}$ , является столбцевой матрицей угла закручивания крыла, обусловленного аэродинамическим моментом относительно аэродинамического центра. Для определения этого слагаемого найдем сначала матрицу  $[F]$ :

$$[F] = [C^{90}] \int_{-1}^1 c^2 \int_{-\bar{W}}^{\bar{W}} = \begin{bmatrix} 0,038237 & 0,048351 & 0,044667 & 0 \\ 0,016816 & 0,048351 & 0,044667 & 0 \\ 0,007069 & 0,020327 & 0,044667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\text{рад} \cdot \text{дюйм}^2}{\text{фунт}}, \quad (g)$$

и подставим результат в следующее выражение:

$$q [F] \{c_{mAC}\} = -0,015q [F] = \{0\} \text{ соотв. аэродинам. моменту} = \begin{bmatrix} -0,00708 \\ -0,00592 \\ -0,00388 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ рад.} \quad (h)$$

Третья компонента матрицы  $\{f\}$ , равная  $N [G] \{mg\}$ , является столбцевой матрицей угла закручивания крыла, обусловленного инерционными нагрузками на крыло. Его можно получить непосредственно из данных по неуравновешенным массам, приведенных в примере 4-7. Эти вычисления здесь воспроизводиться не будут: они включают только пересчет углов закручивания, рассчитанных для сечений крыла с сосредоточенными массами примера 4-7, на углы закручивания для сечений, используемых в настоящем примере.

$$N [G] \{mg\} = 4 [G] \{mg\} = \{0\} \text{ соотв. силам инерции} = \begin{bmatrix} -0,003894 \\ -0,003943 \\ -0,004354 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ рад.} \quad (i)$$

Матрица  $\{f\}$  определяется как сумма матриц (f), (h) и (i), приведенных выше

$$\{f\} = \begin{bmatrix} 0,026615 \\ 0,022959 \\ 0,015246 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,00708 \\ 0,00592 \\ 0,00388 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,003894 \\ 0,003943 \\ 0,004354 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,015639 \\ 0,013090 \\ 0,00700 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ рад.} \quad (j)$$

Подставив эту величину  $\{f\}$  вместе с затабулированными прежде результатами в уравнение (8-89e), получим

$$\begin{bmatrix} 0,0041477 & -0,001084 & -0,0000907 & -0,0000732 & -1 \\ -0,0005732 & 0,0026178 & -0,0006879 & 0 & -1 \\ -0,0000232 & -0,0005106 & 0,002018 & -0,000427 & -1 \\ -0,0000560 & 0 & -0,0007885 & 0,001808 & -1 \\ 75,139 & 13,840 & 181,43 & 98,173 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (cc_l^e)_1 \\ (cc_l^e)_2 \\ (cc_l^e)_3 \\ (cc_l^e)_4 \\ \alpha^e(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,015639 \\ 0,013090 \\ 0,00700 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (k)$$

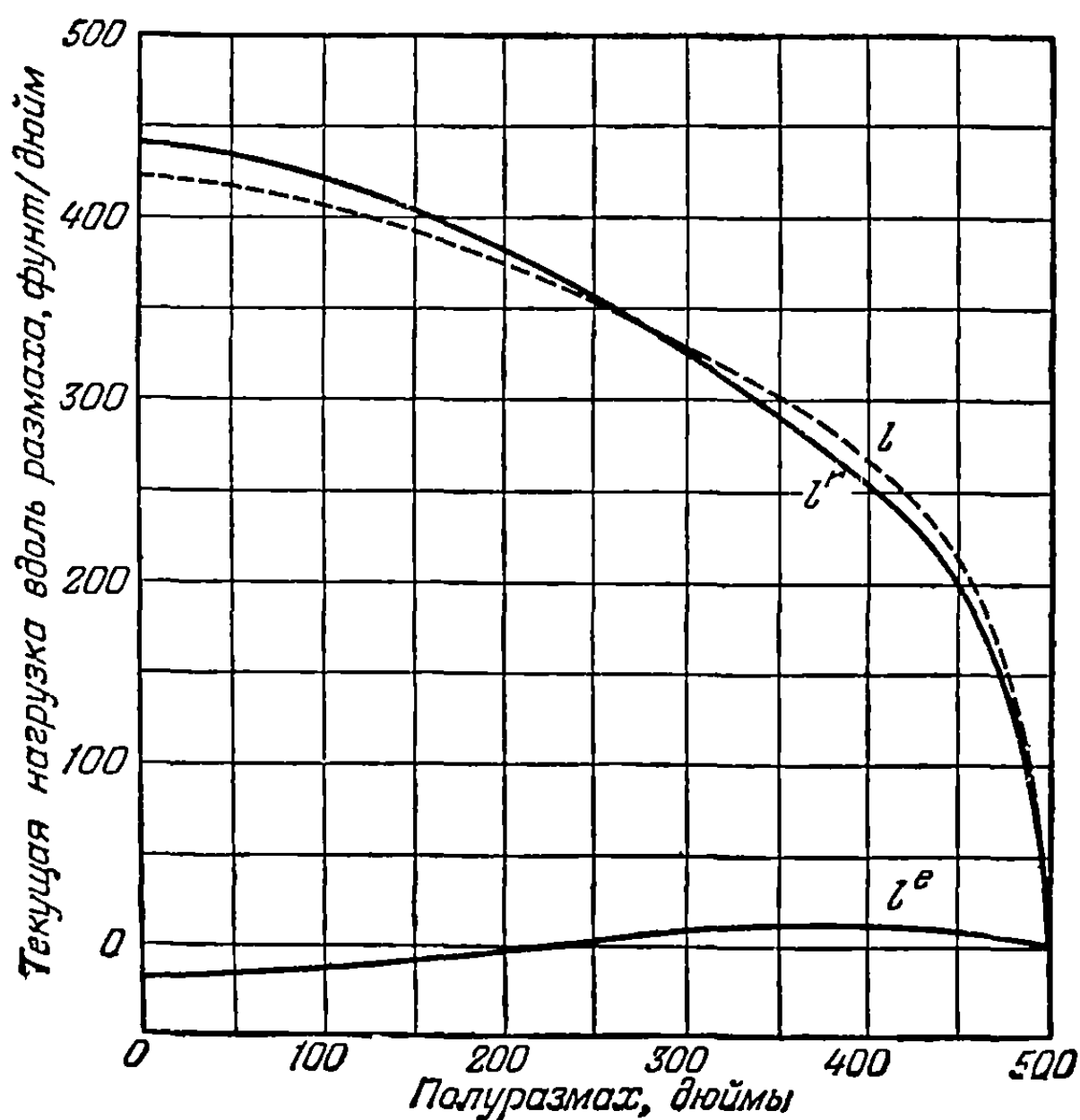
Решая уравнение (k) с помощью обращения матриц, получаем

$$\begin{bmatrix} \{cc_l^e\} \\ \alpha^e(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,4966 \\ 2,4899 \\ -0,56894 \\ -4,3808 \\ -0,007612 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{дюймы} \\ \text{радианы} \end{bmatrix}. \quad (l)$$

Распределение полной подъемной силы получим, складывая  $\{cc_l^e\}$  и  $\{cc_l^r\}$  и умножая результат на динамическое давление,

$$q \{cc_l\} = q \{cc_l^r\} + q \{cc_l^e\} = \begin{bmatrix} 186,9234 \\ 294,9414 \\ 382,7422 \\ 440,5431 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8,9796 \\ 8,9555 \\ -2,0463 \\ -15,7565 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 195,9030 \\ 303,8969 \\ 380,6959 \\ 424,7866 \end{bmatrix} \frac{\text{фунт}}{\text{дюйм}}. \quad (m)$$

Результаты нанесены на фиг. 8-10, изображающей распределение подъемной силы для упругого и жесткого крыла; здесь же приведена кривая полной подъемной силы. Если сравнить распределение полной подъемной силы  $l$  и распределение подъемной силы по



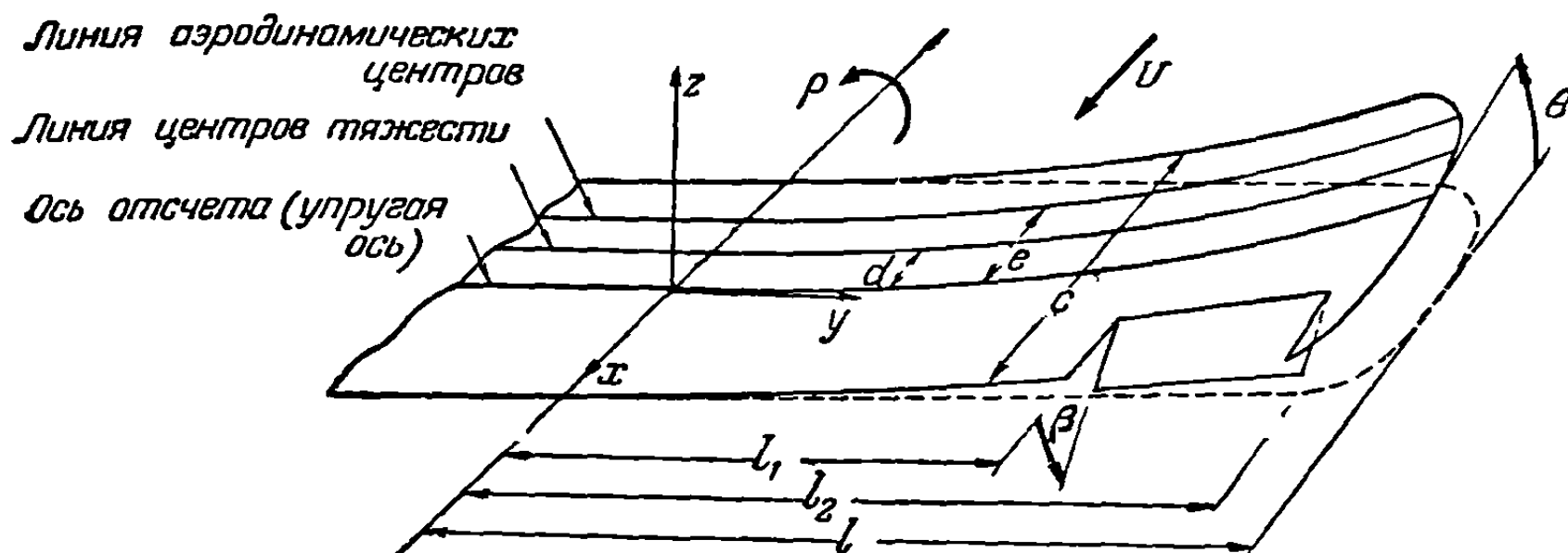
Фиг. 8-10. Распределение подъемной силы по крылу реактивного транспортного самолета.

жесткому крылу  $l_r$ , то можно заметить смещение центра давления по размаху к концу крыла, обусловленное упругостью крыла. Из этих данных очевидно, что для рассматриваемого самолета влияние упругости на распределение нагрузки по размаху мало. Основная причина такого незначительного влияния обусловлена малым расстоянием между аэродинамическим центром и упругой осью для этого частного примера крыла ( $e/c = 0,1$ ). Следует также отметить ту роль, которую играют аэродинамические моменты относительно аэродинамического центра и силы инерции. Моменты относительно упругой оси, вызванные как аэродинамическими моментами относительно аэродинамического центра, так и силами инерции, таковы, что стремятся закрутить носок крыла вниз. Таким образом, они стремятся уменьшить угол закручивания крыла и, следовательно, уменьшить влияние упругости на распределение нагрузки по размаху.

Угол  $\alpha^e(0)$  физически означает угол, на который закручен нос фюзеляжа вниз. Он равен  $-0,007612 \text{ рад.}$ , или  $-0,436^\circ$ .

(d) *Антисимметричное распределение подъемной силы.* В п. 8-3 (a) были выведены уравнения равновесия прямого крыла, которые применимы к общему случаю несимметричного нагружения. Было указано, что благодаря

линейности задачи такой случай может быть получен сложением симметричной и антисимметричной составляющих. Антисимметричные нагрузки проистекают главным образом от отклонения элеронов. Допустим, что элероны отклонены таким образом, что крыло, если на него смотреть сзади, вращается против часовой стрелки (см. фиг. 8-11). В результате отклонения элеронов у крыла появится угловая скорость относительно продольной оси  $p$  (радиан в единицу



Фиг. 8-11. Упругое прямое крыло с отклоненным элероном.

времени) и получится некоторое распределение углов закручивания  $\theta(y)$ . Антисимметричное распределение угла атаки вдоль крыла может быть выражено в виде

$$\alpha(y) = \frac{\partial \alpha^r}{\partial \beta} \beta - \frac{py}{U} + \theta(y), \quad (8-90)$$

где

$\partial \alpha^r / \partial \beta$  — аэродинамическое закручивание жесткого крыла, приходящееся на единицу отклонения элерона  $\beta$ ,

$py/U$  — индуцированный угол атаки, обусловленный скоростью  $p$  около продольной оси.

(1) Уравнения равновесия. Обращаясь к общим — дифференциальной и интегральной — формам уравнений [см. уравнения (8-27) и (8-28)], легко видеть, что можно ввести следующие величины

$$c_{mAC}(y) = \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} \beta, \quad (8-91a)$$

$$c_i^r(y) = \frac{\partial c_i^r}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial c_i^r}{\partial (pl/U)} \left( \frac{pl}{U} \right), \quad (8-91b)$$

$$N(y) = \frac{yp}{q}. \quad (8-91c)$$

Подставив эти величины в уравнение (8-27), получим следующее дифференциальное уравнение, применимое к задаче антисимметричного нагружения:

$$\frac{d}{dy} \left[ GJ \frac{d\theta}{dy} \right] + q e c c_i^e = -q \left( e c \frac{\partial c_i^r}{\partial \beta} + \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} c^2 \right) \beta - q e c \frac{\partial c_i^r}{\partial (pl/U)} \left( \frac{pl}{U} \right) + m \dot{p} y d. \quad (8-92)$$

Аналогично, подставив величины (8-91) в уравнение (8-28), получим соответствующее интегральное уравнение в виде

$$\theta(y) = q \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) e c c_i^e d\eta + f_a(y), \quad (8-93)$$

где

$$f_a(y) = \int_0^l C^{90}(y, \eta) \left[ q e c \left( \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial c_l^r}{\partial (pl/U)} \left( \frac{pl}{U} \right) \right) + qc^2 \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} \beta - m \eta \dot{p} d \right] d\eta. \quad (8-93a)$$

В приведенных выше дифференциальном и интегральном уравнениях все члены, за исключением распределения углов закручивания  $\theta(y)$  и распределения подъемной силы, обусловленной упругими деформациями  $cc_l^e$ , считаются известными величинами, определяющимися физическими свойствами крыла и условиями задачи.

Для того чтобы вычислить антисимметричное распределение подъемной силы, можно объединить либо дифференциальное, либо интегральное уравнение с соответствующим линейным соотношением между углом атаки и распределением подъемной силы.

(2) *Символическая форма решения.* Антисимметричное распределение углов закручивания, определяющееся из решения либо уравнения (8-92), либо уравнения (8-93), является линейной функцией угла отклонения элерона  $\beta$ , угла поворота конца крыла  $pl/U$  и углового ускорения относительно продольной оси  $\dot{p}$ . Для целей исследования примем, что антисимметричное распределение углов закручивания может быть выражено в виде

$$\theta(y) = C_1(y) \beta + C_2(y) \frac{pl}{U} + C_3(y) \dot{p}, \quad (8-94)$$

где функции  $C_1(y)$ ,  $C_2(y)$  и  $C_3(y)$  представляют соответственно распределения углов закручивания, приходящиеся на единицы  $\beta$ ,  $pl/U$  и  $\dot{p}$ . Каждая из этих функций углов закручивания удовлетворяет граничному условию

$$\theta(0) = \theta'(l) = 0.$$

Распределение подъемной силы, обусловленное упругим закручиванием, определяется из уравнения (8-94). Для целей исследования его можно представить в следующей символической форме<sup>1)</sup>:

$$cc_l^e = \mathfrak{F}[\theta(y)] = \mathfrak{F}[C_1(y)] \beta + \mathfrak{F}[C_2(y)] \frac{pl}{U} + \mathfrak{F}[C_3(y)] \dot{p}. \quad (8-95)$$

(3) *Распределение подъемной силы, обусловленное внезапным отклонением элерона.* Обычным случаем, возникающим при исследовании нагрузки на самолетную конструкцию, является случай внезапного отклонения элеронов. Цель заключается в определении ускорения около продольной оси и антисимметричного распределения подъемной силы в начале движения, когда скорость движения крена  $p$  мала и может быть принята равной нулю. Полагая  $p=0$ , получим уравнение равновесия моментов крена

$$I_x \dot{p} = 2q \int_0^l cc_l y dy = 2q\beta \int_0^l c \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} y dy + 2q \int_0^l cc_l^e y dy. \quad (8-97)$$

<sup>1)</sup> Символ  $\mathfrak{F}$  применяется для обозначения линейного аэродинамического оператора, который может воздействовать на распределение углов атаки таким образом, что получается соответствующее распределение подъемной силы

$$cc_l = \mathfrak{F}[\alpha(y)], \quad (8-96)$$

Оператор  $\mathfrak{F}$  можно рассматривать как операцию, обратную операции  $\mathfrak{X}$ , определяемой уравнением (8-29).



Подставив сюда выражение (8-95) и разрешив относительно  $\dot{p}$ , получим

$$\dot{p} = \beta \frac{\int_0^l \left( c \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} + \mathfrak{F}[C_1(y)] \right) y dy}{\frac{I_x}{2q} - \int_0^l \mathfrak{F}[C_3(y)] y dy}. \quad (8-98)$$

Если вычисленную таким образом величину  $\dot{p}$  подставить в уравнение (8-95), то, учитывая, что  $p=0$  и величина  $\beta$  задана, получим распределение дополнительной подъемной силы. Последнее, вместе с распределением подъемной силы по жесткому крылу, обусловленным отклонением элеронов, дает полное антисимметричное распределение подъемной силы. Анализ, подобный приведенному, не учитывает неустановившихся колебаний крыла или движения рыскания самолета, которые могут оказывать второстепенное влияние на результаты.

(4) *Распределение подъемной силы в процессе установившегося движения крена.* Часто желательно знать распределение нагрузки по размаху крыла в процессе установившегося движения крена самолета с заданной величиной  $pl/U$ . Условие равновесия для установившегося движения крена является условием равновесия моментов крена, обусловленных отклонением элеронов, закручиванием крыла и демпфированием:

$$\int_0^l cc_l y dy = \int_0^l cc_l^r y dy + \int_0^l cc_l^e y dy = 0. \quad (8-99)$$

Подставляя выражения (8-91b) и (8-95) в уравнение (8-99), полагая  $\dot{p}=0$  и разрешая относительно  $\beta$ , получаем

$$\beta = -\frac{pl_0}{U} \frac{\int_0^l \left( c \frac{\partial c_l^r}{\partial (pl/U)} + \mathfrak{F}[C_2(y)] \right) y dy}{\int_0^l \left( c \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} + \mathfrak{F}[C_1(y)] \right) y dy}. \quad (8-100)$$

Если величина  $pl/U$  задана, то с помощью соотношения (8-100) можно вычислить  $\beta$ . Таким образом, из уравнения (8-95) можно получить дополнительное распределение подъемной силы, если подставить туда заданную величину  $pl/U$ ,  $\dot{p}=0$  и величину  $\beta$ , даваемую соотношением (8-100).

(5) *Эффективность элеронов.* Эффективность органов поперечного управления часто измеряется углом отклонения конца крыла, приходящимся на единицу угла отклонения элерона. Эта величина, называемая эффективностью элеронов, определяется равенством

$$\frac{\partial \left( \frac{pl}{U} \right)}{\partial \beta} = \frac{\int_0^l \left( c \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} + \mathfrak{F}[C_1(y)] \right) y dy}{\int_0^l \left( c \frac{\partial c_l^r}{\partial (pl/U)} + \mathfrak{F}[C_2(y)] \right) y dy}. \quad (8-101)$$

Эффективность элеронов сильно зависит от угла закручивания крыла и, следовательно, от скорости самолета. Скорость, при которой закручивание крыла приводит к тому, что эффективность элеронов становится равной нулю, называется скоростью реверса элеронов. Скорость реверса можно получить из выражения (8-101), если положить числитель дроби в правой части равным

нулю. Иногда эффективность элеронов (8-101) удобно выразить в зависимости от коэффициента момента крена жесткого самолета в следующем виде:

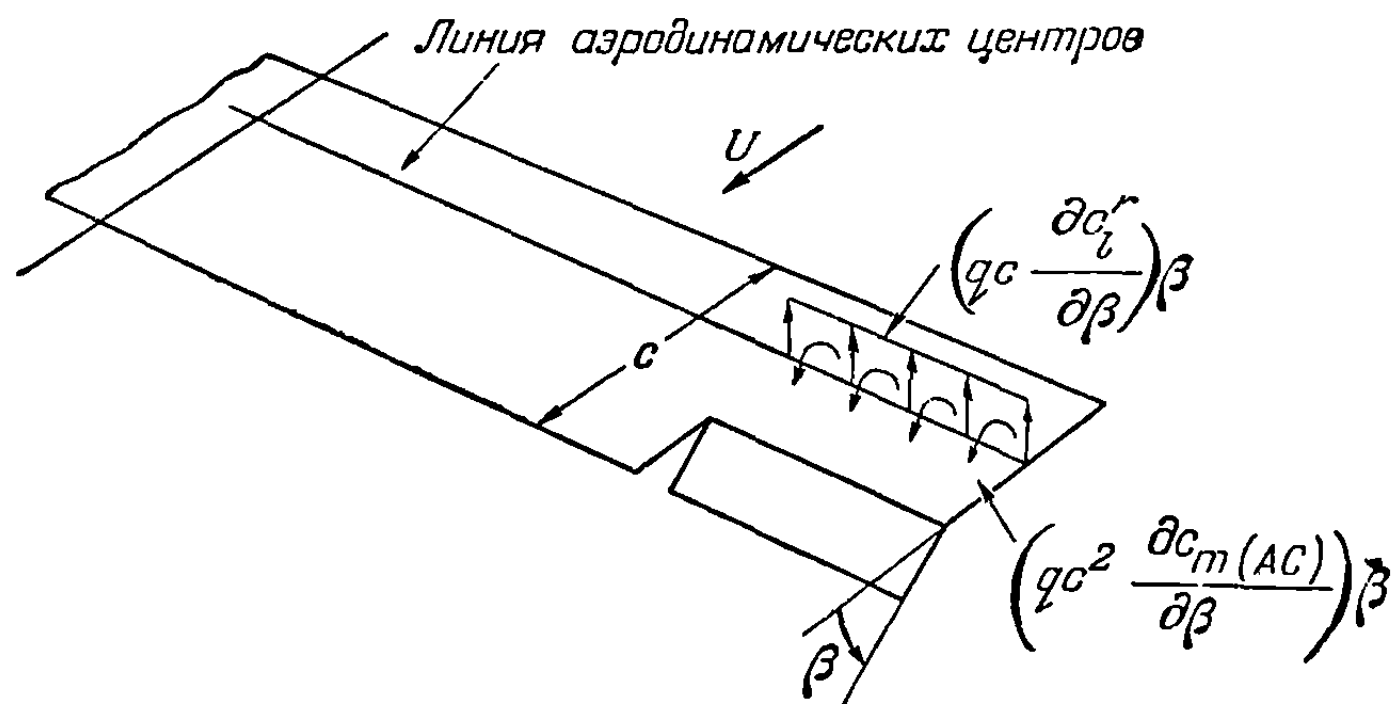
$$\frac{\partial \left( \frac{pl}{U} \right)}{\partial \beta} = - \frac{C_{l\beta} + \frac{1}{Sl} \int_0^l \mathfrak{P} [C_1(y)] y dy}{C_{lp} + \frac{1}{Sl} \int_0^l \mathfrak{P} [C_2(y)] y dy}, \quad (8-101a)$$

где

$$C_{l\beta} = \frac{1}{Sl} \int_0^l c \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} y dy \text{ — производная коэффициента момента крена жесткого самолета по углу отклонения элерона } \beta,$$

$$C_{lp} = \frac{1}{Sl} \int_0^l c \frac{\partial c_l^r}{\partial (pl/U)} y dy \text{ — производная коэффициента момента крена жесткого самолета по углу поворота конца крыла } pl/U.$$

(6) Решения в конечной форме для однородного крыла, основанные на теории несущей полосы. Прежде чем переходить к более сложным случаям, полезно сначала рассмотреть простой случай однородного крыла, для которого



Фиг. 8-12. Силы и моменты, обусловленные отклонением элерона.

можно получить решения в замкнутой форме. Когда элерон отклоняется, то принимается, что силы и моменты на жестком крыле действуют так, как показано на фиг. 8-12 на части размаха крыла, соответствующей элерону. В результате действия этих сил и моментов крыло начинает вращаться около продольной оси и закручиваться. На фиг. 8-13 изображено принятое распределение сил аэродинамического демпфирования и сил инерции. Упругое закручивание определяется из решения следующего дифференциального уравнения, выведенного из уравнения (8-92):

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} + \lambda^2 \theta = \left( \lambda^2 \frac{p}{U} + k_1 \dot{p} \right) y - k_2 \lambda^2 \beta 1_a(y), \quad (8-102)$$

где

$$k_1 = \frac{md}{GJ}, \quad k_2 = \frac{1}{ea_0} \left( e \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} + c \frac{\partial c_{m(AC)}}{\partial \beta} \right), \quad \lambda^2 = \frac{q c e a_0}{GJ}.$$

Функция  $1_a(y)$  равна единице на протяжении размаха элерона и равна нулю на остальной части размаха крыла (см. фиг. 8-14).

Можно легко проверить, что решение уравнения (8-102) в замкнутой форме, удовлетворяющее граничным условиям  $\theta(0) = \theta'(l) = 0$ , имеет вид

$$\theta(y) = \frac{1}{\lambda^2} \left( \lambda^2 \frac{p}{U} + k_1 \dot{p} \right) \left( y - \frac{\sin \lambda y}{\lambda \cos \lambda l} \right) - k_2 \left[ 1_a(y) (1 - \cos \lambda (y - l_1)) - \frac{\sin \lambda (l - l_1)}{\cos \lambda l} \sin \lambda y \right] \beta, \quad (8-103)$$

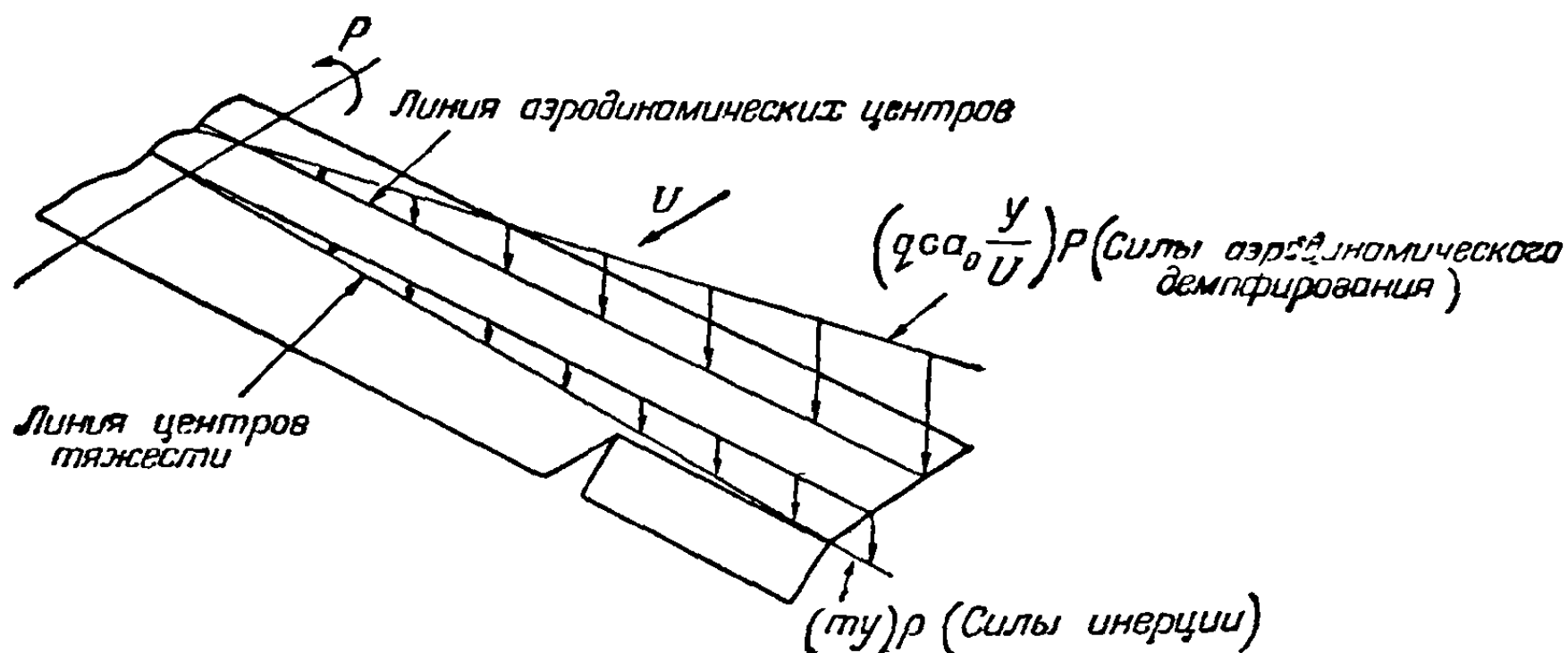
где  $\cos \lambda (y - l_1) = 0$ , когда  $y < l_1$ . Следовательно, для однородного крыла, в обозначениях уравнения (8-94), имеем следующие соотношения

$$C_1(y) = -k_2 \left[ 1_a(y) (1 - \cos \lambda (y - l_1)) - \frac{\sin \lambda (l - l_1)}{\cos \lambda l} \sin \lambda y \right], \quad (8-104)$$

$$C_2(y) = \left( \frac{y}{l} - \frac{\sin \lambda y}{\lambda \cos \lambda l} \right), \quad (8-105)$$

$$C_3(y) = \frac{k_1}{\lambda^2} \left( y - \frac{\sin \lambda y}{\lambda \cos \lambda l} \right). \quad (8-106)$$

Антисимметричное распределение подъемной силы, обусловленное упругим закручиванием, определяется из уравнения (8-95). Для случая, когда теория

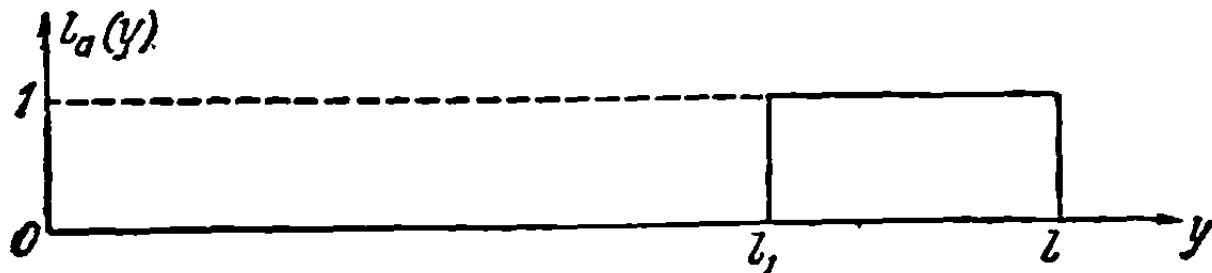


Фиг. 8-13. Силы демпфирования и силы инерции на крыле, совершающем движение крена

несущей полосы применена к однородному крылу, уравнение (8-95) упрощается:

$$c c_i^r(y) = a_0 c C_1(y) \beta + a_0 c C_2(y) \frac{p l}{U} + a_0 c C_3(y) \dot{p}, \quad (8-107)$$

где  $C_1(y)$ ,  $C_2(y)$  и  $C_3(y)$  определяются соответственно равенствами (8-104), (8-105) и (8-106). Уравнение (8-107) может быть использовано для расчета



Фиг. 8-14. Ступенчатая функция, используемая при представлении сил и моментов, действующих на элерон.

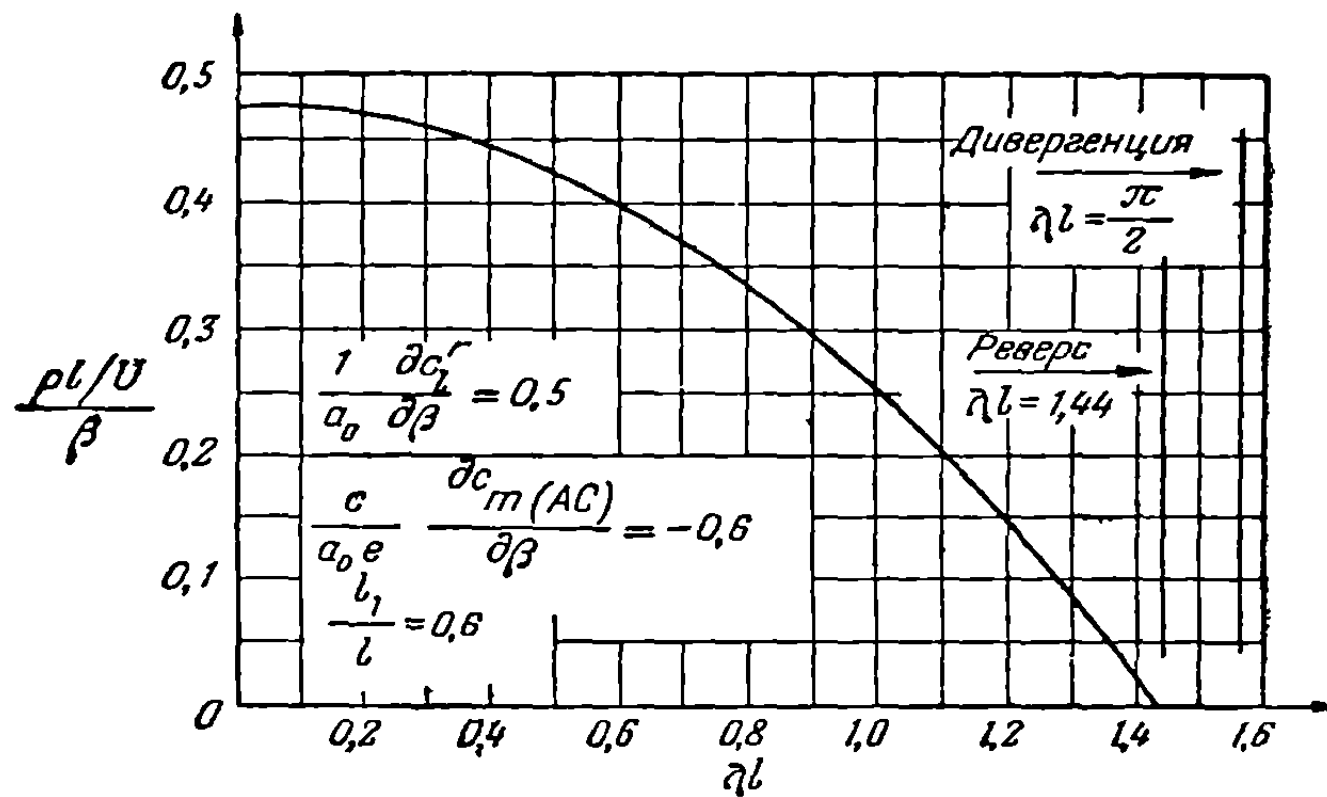
распределения нагрузки по размаху, обусловленной упругим закручиванием для любых заданных значений  $\beta$ ,  $p l / U$  и  $\dot{p}$ .

**Внезапное отклонение элерона.** Предположим, например, что хотят найти распределение подъемной силы на однородном крыле в результате внезапного отклонения элерона на угол  $\beta$ . Возникающее в начале движения ускорение до

того, как будет достигнута заметная скорость вращения около продольной оси, определяется из уравнения (8-98):

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \beta \frac{\int_0^l \left( \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} + a_0 C_1(y) \right) c y dy}{\frac{I_x}{2q} - a_0 \int_0^l C_3(y) c y dy} = \\ &= \beta \frac{\frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} \left( \frac{\cos \lambda l_1}{\cos \lambda} - 1 \right) + \frac{c}{e} \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} \left( \frac{\cos \lambda l_1}{\cos \lambda} - 1 - \lambda^2 \frac{l^2 - l_1^2}{2} \right)}{\frac{ea_0}{2GJ} \left[ I_x - 2m \frac{d}{e} \left( \frac{l^3}{3} + \frac{l}{\lambda^2} - \frac{\lg \lambda l}{\lambda^3} \right) \right]}. \end{aligned} \quad (8-108)$$

Подставляя приведенную выше величину  $\dot{p}$  вместе с заданным значением  $\beta$  в уравнение (8-107) и полагая  $p=0$ , получим распределение подъемной силы,



Фиг. 8-15. Эффективность элерона однородного крыла как

$$\text{функция } \lambda = l \sqrt{\frac{q c e a_0}{GJ}}.$$

обусловленное упругим закручиванием. Распределение полной подъемной силы можно получить, складывая этот результат с распределением подъемной силы по жесткому крылу:

$$c c_l(y) = c c_l^r(y) + c c_l^e(y) = c \left( \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} 1_a(y) \right) \beta + c c_l^e(y). \quad (8-109)$$

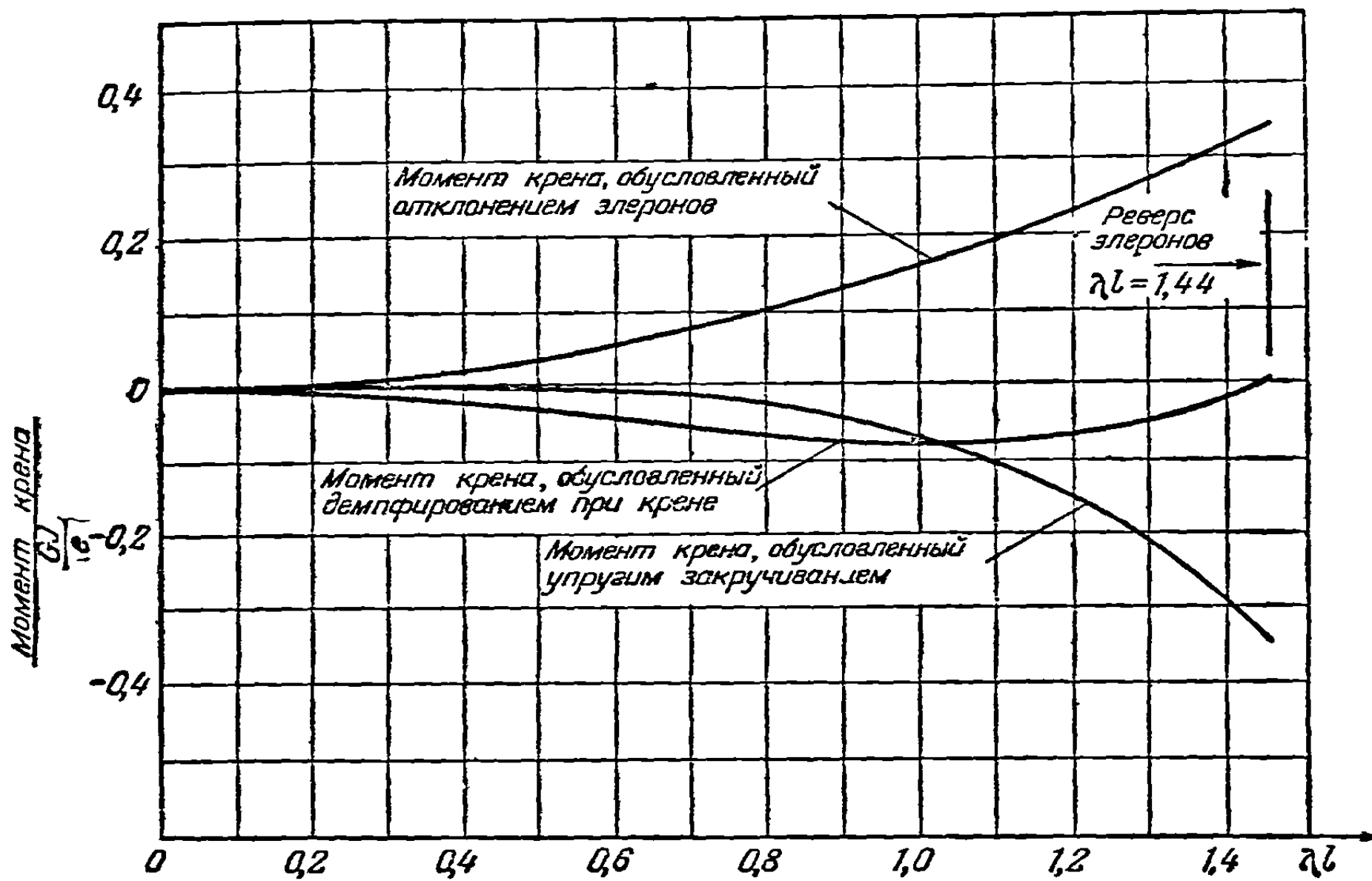
**Эффективность элеронов.** Подставляя выражения (8-104) и (8-105) в уравнение (8-101) и используя теорию несущей полосы, определим эффективность элеронов

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( \frac{p l}{U} \right)}{\partial \beta} &= \frac{\int_0^l \left( \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} + a_0 C_1(y) \right) c y dy}{a_0 \int_0^l \left( \frac{y}{l} - C_2(y) \right) c y dy} = \\ &= \frac{\left( \frac{\cos \lambda l_1}{\cos \lambda} - 1 \right) \frac{1}{a_0} \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} + \left( \frac{\cos \lambda l_1}{\cos \lambda} - 1 - \lambda^2 \frac{l^2 - l_1^2}{2} \right) \frac{c}{ea_0} \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta}}{\left( \frac{\lg \lambda l}{\lambda} - 1 \right)}. \end{aligned} \quad (8-110)$$

Уравнение (8-110) определяет эффективность элеронов как функцию параметров  $\lambda$ ,  $(c e a_0) (\frac{\partial c_{m \Delta C}}{\partial \beta})$ ,  $(1 a_0) (\frac{\partial c_l^r}{\partial \beta})$  и  $l_1/l$ . На фиг. 8-15 изображена зависимость эффективности элеронов от  $\lambda$  в том случае, когда три последние параметра принимают определенные численные значения. Эффективность элеронов при  $\lambda=0$  является максимальной эффективностью, которая может быть достигнута, и соответствует эффективности элеронов на жестком крыле:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\partial (pl U)}{\partial \beta} = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{l_1^2}{l^2} \right] \frac{1}{a_0} \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta}. \quad (8-111)$$

По мере роста  $\lambda$  абсолютная величина отрицательного момента крена, обусловленного упругим закручиванием, приближается к абсолютной величине положитель-



Фиг. 8-16. Синтез момента крена однородного крыла.

ного момента крена, обусловленного отклонением элеронов, до тех пор, пока не будет достигнута скорость реверса, при которой они полностью погашают друг друга. Фиг. 8-16 указывает на характер изменения трех моментов крена, обусловленных отклонением элеронов, упругим закручиванием и аэродинамическим демпфированием, от величины  $\lambda$  вплоть до скорости реверса. На фиг. 8-15 и 8-16 для рассматриваемого частного вида однородного крыла указана величина  $\lambda$  при скорости реверса  $\lambda = 1,44$ . Эту величину можно вычислить независимо, решая трансцендентное уравнение, получаемое в результате приравнивания нулю числителя правой части уравнения (8-110):

$$\left( \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} + \frac{c}{e} \frac{\partial c_{m \Delta C}}{\partial \beta} \right) (\cos \lambda - \cos \lambda_1) + \left( \lambda^2 \frac{l^2 - l_1^2}{2} + \frac{c}{e} \frac{\partial c_{m \Delta C}}{\partial \beta} \right) \cos \lambda = 0. \quad (8-112)$$

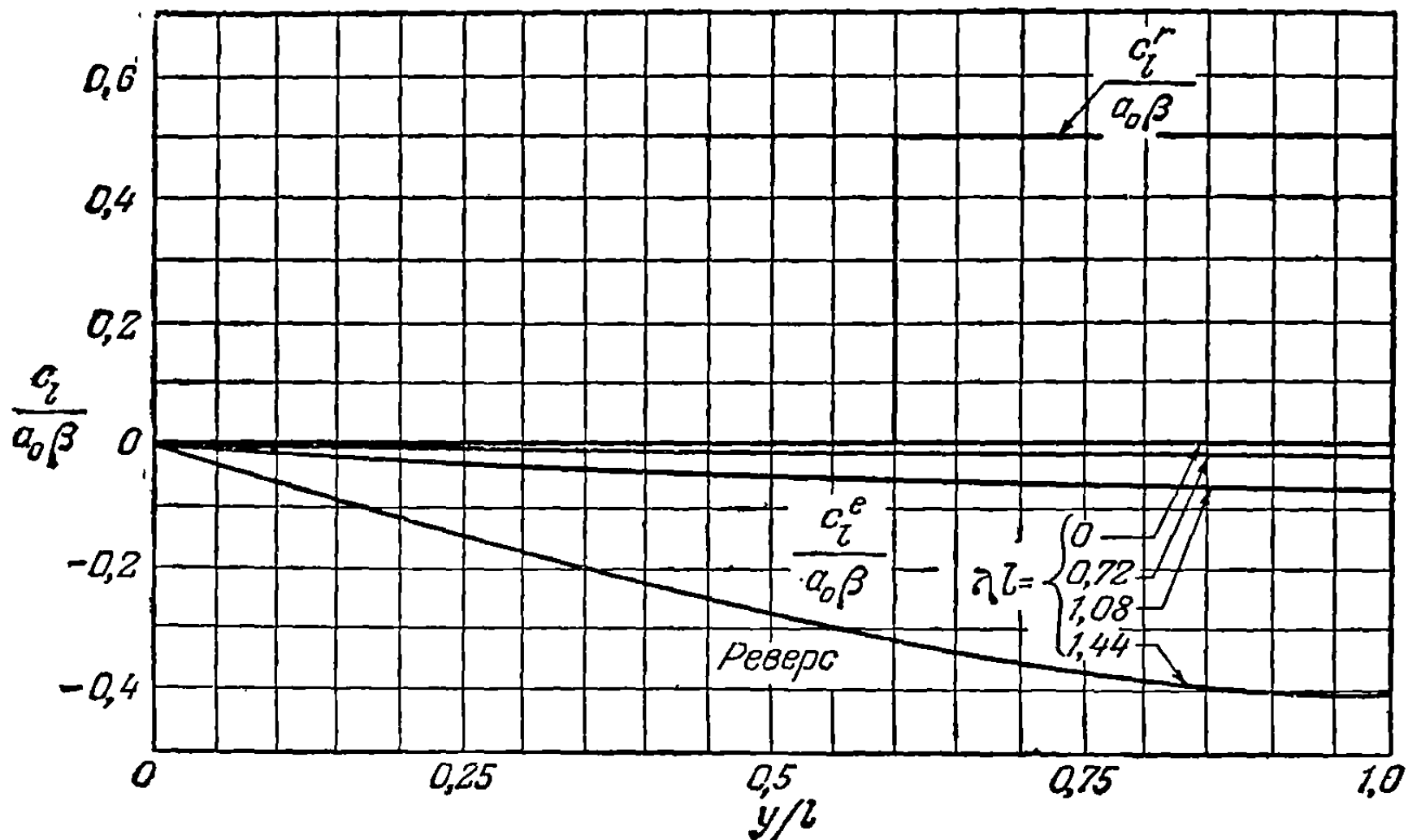
**Установившееся движение крена.** В случае установившегося движения крена распределение дополнительной подъемной силы, обусловленное упругим закручиванием, может быть получено из уравнения (8-107), если положить  $p=0$  и подставить заданную величину  $\beta$ . Угол наклона спирали, описываемой крылом,  $pl U$ , соответствующий этому значению  $\beta$ , определяется из уравнения (8-110). На фиг. 8-17 изображено распределение подъемной силы, обусловленной упругим закручиванием, для частного примера рассматриваемого

однородного крыла в процессе установившегося движения крена, вызванного отклонением элерона на угол, равный единице.

Этот анализ предполагает, что скорость реверса ниже скорости дивергенции. Для прямых крыльев это условие обычно выполняется. Из уравнения (8-112) можно видеть, что когда

$$\frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} = - \frac{c}{e} \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta},$$

эти две скорости идентичны. Условие это, конечно, аналогично условию, ранее сформулированному с помощью уравнения (8-21) для случая профиля жесткого крыла.



Фиг. 8-17. Распределение подъемной силы однородного крыла в процессе установившегося движения крена.

(7). *Решение с помощью матриц.* Рассмотрим далее те аналитические операции, которые необходимо применить к задачам с несимметричным распределением подъемной силы на крыльях с нерегулярными свойствами по размаху. Как и в случае симметричного нагружения, в качестве основы используем интегральное уравнение, которое в данном случае имеет вид (8-93). Введя аэродинамический оператор уравнения (8-29) в уравнение (8-93), получим

$$\mathfrak{A} [cc_i^e] = q \int_0^l C^{99}(y, \eta) e c c_i^e d\eta + f_a(y), \quad (8-113)$$

где

$$f_a(y) = \int_0^l C^{99}(y, \eta) \left[ q e c \left( \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial c_l^r}{\partial (pl/U)} \left( \frac{pl}{U} \right) \right) + q c^2 \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} \beta - m \eta \dot{p} d \right] d\eta.$$

Уравнение (8-113) может быть записано в следующей матричной форме:

$$[A^a] \{cc_i^e\} = q [E] \{cc_i^e\} + \{f_a\}, \quad (8-114)$$

где

$[A^a]$  — матрица аэродинамических коэффициентов влияния для антисимметричного нагружения прямого крыла; эта матрица выводится из уравнения (5-157)

с использованием четных значений  $r$ , причем члены, соответствующие сечению на середине размаха, полагаются равными нулю,

$$\{f_a\} = q [E] \left( \left\{ c \frac{\partial c_i^r}{\partial \beta} \right\} \beta + \left\{ c \frac{\partial c_i^r}{\partial (pl/U)} \right\} \frac{pl}{U} \right) + q [F] \left\{ \frac{\partial c_{m \Delta C}}{\partial \beta} \right\} \beta - [G] \lfloor y \rfloor \{m\} \dot{p},$$

$$[E] = [C^{00}] \lfloor e \rfloor \lfloor \bar{W} \rfloor,$$

$$[F] = [C^{00}] \lfloor c^2 \rfloor \lfloor \bar{W} \rfloor,$$

$$[G] = [C^{00}] \lfloor d \rfloor \lfloor \bar{W} \rfloor.$$

Другую форму уравнения (8-114), в которой используется антисимметричное распределение полной подъемной силы, можно получить, если подставить

$$\{cc_i^e\} = \{cc_i\} - \{cc_i^r\} = \{cc_i\} - \left\{ c \frac{\partial c_i^r}{\partial \beta} \right\} \beta - \left\{ c \frac{\partial c_i^r}{\partial (pl/U)} \right\} \frac{pl}{U} \quad (8-115)$$

в уравнение (8-114). В результате такой подстановки получим

$$[A^a] \{cc_i\} = q [E] \{cc_i\} + \{f_a'\}, \quad (8-116)$$

где

$$\{f_a'\} = \left\{ \frac{\partial \alpha^r}{\partial \beta} \right\} \beta + \left\{ \frac{y}{l} \right\} \frac{pl}{U} + q [F] \left\{ \frac{\partial c_{m \Delta C}}{\partial \beta} \right\} \beta - [G] \lfloor y \rfloor \{m\} \dot{p},$$

$$\left\{ \frac{\partial \alpha^r}{\partial \beta} \right\} = [A^a] \left\{ c \frac{\partial c_i^r}{\partial \beta} \right\}, \quad \left\{ \frac{y}{l} \right\} = [A^a] \left\{ c \frac{\partial c_i^r}{\partial (pl/U)} \right\}.$$

Величины  $\beta$ ,  $p$  и  $\dot{p}$  считаются известными и должны быть определены условиями задачи. Уравнения (8-114) и (8-116) могут быть решены с помощью обращения или итерации матриц. Например, в первом случае столбцевая матрица коэффициентов дополнительной подъемной силы равна [см. уравнение (8-114)]

$$\{cc_i^e\} = ([A^a] - q [E])^{-1} \{f_a\}. \quad (8-117)$$

*Внезапное отклонение элеронов.* Если величины  $\beta$ ,  $p$  и  $\dot{p}$  не заданы независимо и между ними существует взаимная связь, то требуются дополнительные соотношения. Например, когда элероны внезапно отклонены на угол  $\beta$  и  $p$  принимается равным нулю, ускорение около продольной оси определяется уравнением (8-97) в матричной форме

$$\dot{p} = \frac{2q}{I_x} \lfloor H \rfloor \{cc_i\} = \frac{2q}{I_x} \lfloor H \rfloor \left( \{cc_i^e\} + \left\{ c \frac{\partial c_i^r}{\partial \beta} \right\} \beta \right), \quad (8-118a)$$

где  $\lfloor H \rfloor$  — строчная матрица, имеющая следующий вид:

$$\lfloor H \rfloor = \lfloor 1 \rfloor \lfloor y \rfloor \lfloor \bar{W} \rfloor. \quad (8-118b)$$

Для случая внезапного отклонения элеронов решение можно получить, если объединить уравнение (8-118a) с уравнением (8-114) или с уравнением (8-116) и положить величину  $p$  равной нулю.

*Установившееся движение крена и эффективность элеронов.* В случае установившегося движения крена условие равновесия в матричной форме записывается просто:

$$\lfloor H \rfloor \{cc_i\} = 0. \quad (8-119)$$

Из этого соотношения и уравнения (8-116) получаем следующее выражение для эффективности элеронов:

$$\frac{\partial (pl/U)}{\partial \beta} = \frac{\lfloor H \rfloor ([A^a] - q [E])^{-1} (\{ \partial \alpha^r / \partial \beta \} + q [F] \{ \partial c_{m \Delta C} / \partial \beta \})}{\lfloor H \rfloor ([A^a] - q [E])^{-1} \{y/l\}}. \quad (8-120)$$



Распределение подъемной силы в условиях установившегося движения крена можно вычислить из уравнений (8-114) или (8-116), положив  $\dot{p} = 0$ . Величины  $pl/U$  и  $\beta$  не могут обе задаваться независимо, так как они связаны соотношением (8-120). При расчетах обычно задают величину  $pl/U$ . В таком случае соответствующее значение  $\beta$  вычисляется по уравнению (8-120).

*Реверс элеронов.* Реверс элеронов имеет место на скорости, при которой эффективность элеронов равна нулю. Это условие будет выполнено, если числитель дроби в уравнении (8-120) положить равным нулю. Таким образом, условие реверса элеронов можно записать в форме

$$q_R = - \frac{\underline{H} \{ [A^a] - q_R [E] \}^{-1} \{ \partial \alpha^r / \partial \beta \}}{\underline{H} \{ [A^a] - q_R [E] \}^{-1} [F] \{ \partial c_{mAC} / \partial \beta \}}. \quad (8-120a)$$

Для того чтобы разрешить уравнение (8-120a) относительно динамического давления реверса, Лоуренсом и Сирсом [8-11] был разработан полезный метод итерации, состоящий в следующем. Задают величину  $q$  и вычисляют правую часть уравнения (8-120a). Результат принимают за новое значение  $q$ . Новую величину  $q$  подставляют в правую часть, и процесс повторяется до тех пор, пока не получится совпадения двух соседних значений  $q$ . Следует заметить, что умножение матриц в числителе должно осуществляться слева направо так, что каждый шаг включает умножение на строчную матрицу. Результирующая строчная матрица до умножения на  $\{ \partial \alpha^r / \partial \beta \}$  может быть также использована для вычисления числителя. Таким образом, численные расчеты оказываются не слишком громоздкими.

*Другие формы выражения соотношений, характеризующих эффективность и реверс элеронов.* Уравнения (8-120) и (8-120a) могут быть написаны в другой форме, когда коэффициенты момента крена жесткого самолета входят в соотношения в явном виде. Эту форму уравнений можно получить, преобразуя уравнения (8-120) и (8-120a), или проще, написав уравнение (8-119) в следующем виде:

$$\underline{H} \{ c c_l^e \} + \underline{H} \{ c c_l^r \} = 0 \quad (8-121)$$

и подставив соответствующие распределения подъемной силы, обусловленной упругим закручиванием и подъемной силой жесткого самолета в процессе установившегося движения крена. Таким образом, получим следующие выражения для эффективности и реверса элеронов:

$$\frac{\partial (pl/U)}{\partial \beta} = \frac{C_{l\beta} + \frac{q}{Sl} \underline{H} \{ [A^a] - q [E] \}^{-1} \left( [E] \left\{ c \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} \right\} + [F] \left\{ \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} \right\} \right)}{C_{lp} + \frac{q}{Sl} \underline{H} \{ [A^a] - q [E] \}^{-1} [E] \left\{ c \frac{\partial c_l^r}{\partial (pl/U)} \right\}}, \quad (8-122)$$

$$q_R = - \frac{C_{l\beta}}{\frac{1}{Sl} \underline{H} \{ [A^a] - q_R [E] \}^{-1} \left( [E] \left\{ c \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} \right\} + [F] \left\{ \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} \right\} \right)}, \quad (8-122a)$$

где

$$C_{l\beta} = \frac{1}{Sl} \underline{H} \left\{ c \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} \right\},$$

$$C_{lp} = \frac{1}{Sl} \underline{H} \left\{ c \frac{\partial c_l^r}{\partial (pl/U)} \right\}.$$

Следует заметить, что величины

$$\left( [E] \left\{ c \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} \right\} + [F] \left\{ \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} \right\} \right)$$

и

$$[E] \left\{ c \frac{\partial c_l^r}{\partial (pl/U)} \right\}$$

являются просто столбцовыми матрицами угла закручивания крыла, обусловленного аэродинамическими силами, приходящимися соответственно на единицу величин  $\beta$  и  $pl/U$ .

Когда в задачах об антисимметричном распределении подъемной силы желательно получить надежные численные результаты, необходимо учесть аэродинамическое влияние конечности размаха. Некоторые данные указывают на то, что для определения дополнительной подъемной силы, обусловленной упругим закручиванием, можно использовать теорию несущей полосы, если основное распределение подъемной силы жесткого крыла, возникающее за счет отклонения элеронов, получено с соответствующим учетом аэродинамического влияния конечности размаха. Величины  $\partial c_l^r / \partial \beta$  или  $\partial \alpha^r / \partial \beta$  и  $\partial c_{mAC} / \partial \beta$  оказывают наибольшее влияние на антисимметричное распределение подъемной силы. В общем случае они изменяются в первую очередь в зависимости от отношения хорды закрывка к хорде крыла и числа Маха и во вторую очередь — за счет других переменных, таких, как форма носка, форма щели, форма профиля элеронов и угол атаки. Для того чтобы получить точные значения этих аэродинамических коэффициентов и распределение их по размаху крыла, необходимо использовать результаты испытания в аэродинамической трубе, проведенные на конструкции исследуемой формы.

(8). *Приближенные решения интегрального уравнения.* Решения интегрального уравнения (8-93), основанные на упрощающих предположениях, нашли широкое применение при вычислении эффективности элеронов и характеристик реверса прямых крыльев. Для случая установившегося движения крена уравнение (8-93) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \theta(y) = q \int_0^l C^{00}(y, \eta) e c c_l^e d\eta + q\beta \int_0^l C^{00}(y, \eta) \left( e \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} + c \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} \right) c d\eta + \\ + q \left( \frac{pl}{U} \right) \int_0^l C^{00}(y, \eta) \frac{\partial c_l^r}{\partial (pl/U)} c e d\eta. \end{aligned} \quad (8-123)$$

Упрощающее предположение, которое часто делается при решении уравнения (8-123) для определения эффективности элеронов, состоит в том, что следует учитывать только закручивание, обусловленное отклонением элеронов [8-14 и 8-15]. Это предположение одинаково с предположением о совпадении линии аэродинамических центров с упругой осью. В уравнении (8-123) это предположение эквивалентно условию  $e = 0$ . Таким образом, из уравнения (8-123) тотчас же можно получить явное выражение для угла закручивания крыла, приходящегося на единицу отклонения элерона:

$$\frac{\theta(y)}{\beta} = q \int_0^l C^{00}(y, \eta) \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} c^2 d\eta. \quad (8-124)$$

В обозначениях уравнения (8-94) имеем

$$C_1(y) = q \int_0^l C^{00}(y, \eta) \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} c^2 d\eta, \quad C_2(y) = 0. \quad (8-125)$$

Подставляя выражения (8-125) в уравнение (8-101а), получим следующую приближенную формулу для эффективности элеронов:

$$\frac{\partial \left( \frac{pl}{U} \right)}{\partial \beta} = \frac{C_{l\beta} + \frac{q}{Sl} \int_0^l \mathfrak{P} \left[ \int_0^l C^{00}(y, \eta) \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} c^2 d\eta \right] y dy}{C_{lp}}. \quad (8-126)$$

Динамическое давление, соответствующее реверсу элеронов, можно вычислить, положив числитель дроби правой части уравнения (8-126) равным нулю:

$$q_R = - \frac{C_{l\beta}}{\frac{1}{Sl} \int_0^l \mathfrak{P} \left[ \int_0^l C^{00}(y, \eta) \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} c^2 d\eta \right] y dy}. \quad (8-127)$$

В уравнениях (8-126) и (8-127) на все величины оказывают влияние конечность размаха и число Маха. Для того чтобы получить точные результаты для крыла заданной формы, величину  $C_{l\beta}$  нужно брать из экспериментов в высокоскоростной аэродинамической трубе. Величину  $C_{lp}$  можно получить расчетным путем по теории несущей линии [8-14] или из экспериментов в аэродинамической трубе малых скоростей. Интегралы, входящие в уравнения (8-126) и (8-127), обычно должны определяться численно. В работе [8-14] помещены кривые и таблицы, полезные при вычислении аэродинамических величин, входящих в уравнения (8-126) и (8-127).

Если используется теория несущей полосы и если коэффициенты  $\frac{\partial c_r}{\partial \beta}$  и  $\frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta}$  считаются конечными только на части размаха крыла, на которой находится элерон, то уравнения (8-126) и (8-127) сводятся к следующим:

$$\frac{\partial \left( \frac{pl}{U} \right)}{\partial \beta} = \frac{C_{l\beta} + \frac{q}{Sl} \int_0^l a_0 \int_{l_1}^{l_2} C^{00}(y, \eta) \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} c^2 d\eta c y dy}{C_{lp}} \quad (8-128)$$

и

$$q_R = - \frac{C_{l\beta}}{\frac{1}{Sl} \int_0^l a_0 \int_{l_1}^{l_2} C^{00}(y, \eta) \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} c^2 d\eta c y dy}, \quad (8-129)$$

где

$$C_{l\beta} = \frac{1}{Sl} \int_{l_1}^{l_2} a_0 \frac{\partial a^r}{\partial \beta} c y dy,$$

$$C_{lp} = - \frac{1}{Sl} \int_0^l a_0 \frac{y^2}{l} c dy.$$

Уравнения (8-128) и (8-129) можно объединить и получить следующее простое соотношение, применимое в диапазоне скоростей, в котором не сказывается влияние сжимаемости:

$$\frac{\partial (pl/U)}{\partial \beta} = \left( \frac{\partial (pl/U)}{\partial \beta} \right)_{\text{жестк.}} \left( 1 - \frac{q}{q_R} \right), \quad (8-130)$$

где

$$\left( \frac{\partial (pl/U)}{\partial \beta} \right)_{\text{жестк.}} = - \frac{C_{l\beta}}{C_{lp}}.$$

В уравнении (8-130) величина  $[1 - (q/q_R)]$  играет роль коэффициента уменьшения эффективности поперечного управления. Величина этого коэффициента зависит от скорости реверса. Поэтому последняя при оценке характеристик поперечной управляемости играет полезную роль сравнительного критерия.

**Пример 8-4.** Определить эффективность элеронов как функцию числа Маха для реактивного транспортного самолета, приведенного в примере 2-1. В частности, определить эффективность элеронов при предельной скорости пикирования и скорости реверса элеронов.

*Решение.* Для решения задачи требуются следующие данные:

Предельная скорость пикирования на уровне моря равна 553 милям в час.

Число Маха = 0,728.

Динамическое давление при предельной скорости пикирования =  $782,8 \frac{\text{фунт}}{\text{фут}^2}$

$$\frac{\partial \alpha^r}{\partial \beta} = 0,40, \quad \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} = -0,45.$$

Полуразмах крыла = 41,66 фута.

Удлинение = 6,15.

Расстояние от корневого сечения крыла до внутреннего края элерона  $l_1 = 30,83$  фута

Расстояние от корневого сечения крыла до внешнего края элерона  $l_2 = 40,58$  фута

Для определения эффективности элеронов используется уравнение 8-128). Если в правую часть на число Маха в виде  $1/\sqrt{1-M^2}$  вносится в каждую аэродинамическую производную то с поправкой на число Маха уравнение (8-128) запишется в виде

$$\frac{\partial (plU)}{\partial \beta} = \frac{C_{l\beta} + \frac{q}{Sl} \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \int_0^l a_0 \int_{l_1}^{l_2} C^{(a)}(y, \eta) \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} c^2 d\eta cy dy}{C_{lp}}. \quad a$$

Для формы крыла в плане, изображенной на фиг. 8-18, а, можно легко вычислить следующие интегралы:

$$C_{l\beta} = \frac{a_0}{Sl} \frac{\partial \alpha^r}{\partial \beta} \int_{l_1}^{l_2} cy dy = 1328,04 \left( \frac{a_0}{Sl} \right), \quad (b)$$

$$C_{lp} = -\frac{a_0}{Sl} \int_0^l \frac{y^2}{l} c dy = -6655,4 \left( \frac{a_0}{Sl} \right). \quad (c)$$

Двойной интеграл в уравнении (а) можно вычислить с помощью матриц весовых чисел. Крыло (см. фиг. 8-18, а) рассекается пятью сечениями и применяется правило трапеций

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{Sl} \left( \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} \int_0^l \int_{l_1}^{l_2} C^{(a)}(y, \eta) c^2 d\eta cy dy = \right. \\ \left. = \left( \frac{a_0}{Sl} \right) \left( \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} \right) \{f\} = -0,80913 \left( \frac{a_0}{Sl} \right), \quad (d) \right. \end{aligned}$$

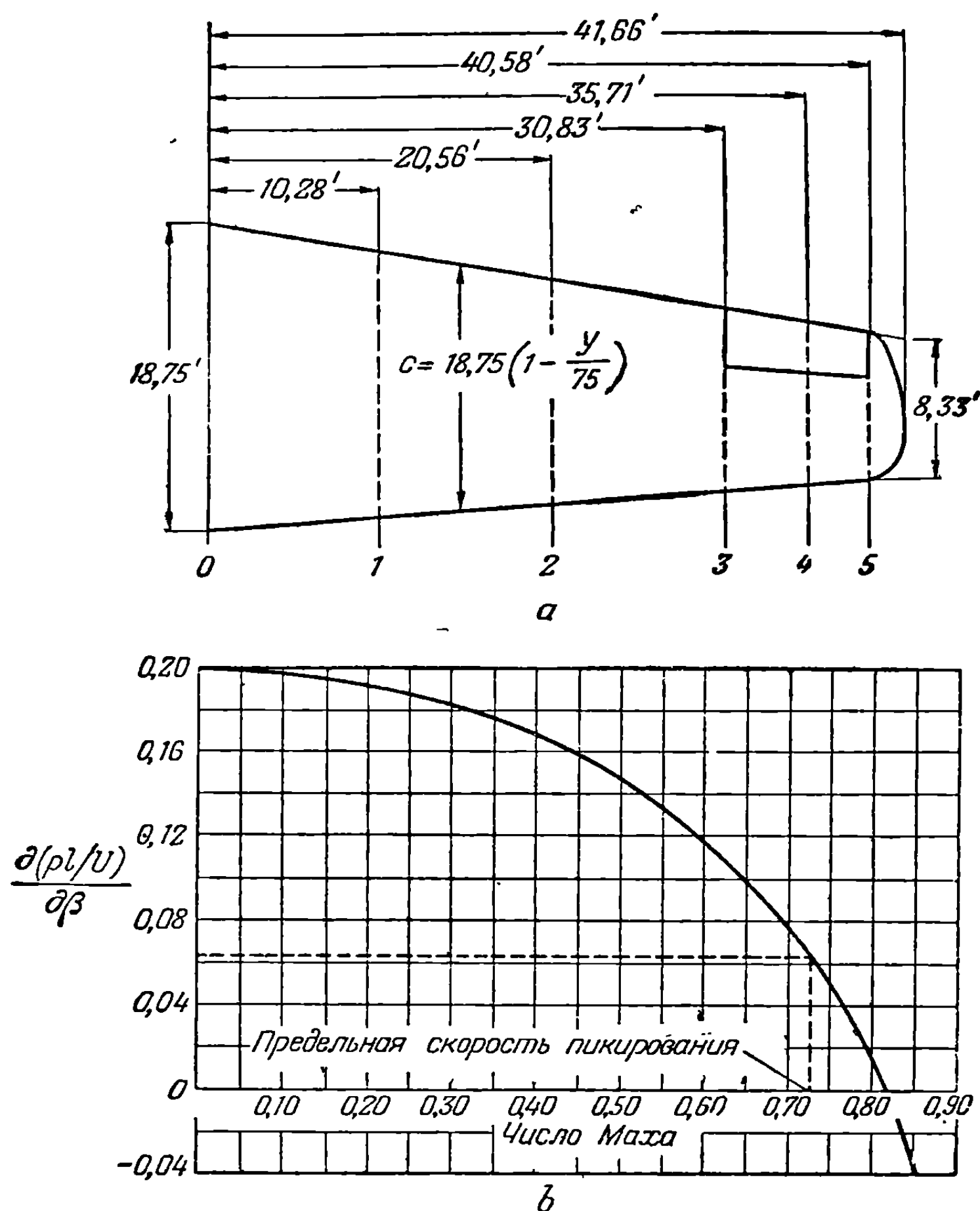
где

$$\{f\} = [C^{(a)}] \{ \bar{W} \} \{ c^2 \} = \begin{bmatrix} 5255 \\ 10834 \\ 22075 \\ 3178 \\ 3605 \end{bmatrix} \times 10^{-4}. \quad (e)$$

Подставив соотношения (b), (c) и (d) в уравнение (а), получим эффективность элеронов в виде функции от динамического давления и числа Маха

$$\frac{\partial (plU)}{\partial \beta} = \frac{1328,04 - (q \sqrt{1-M^2}) (8091)}{6655,4}. \quad (f)$$

Кривая, соответствующая уравнению (f), нанесена на фиг. 8-18, б. Из фиг. 8-18, б видно, что эффективность элеронов на предельной скорости пикирования равна приблизительно 0,061, а полная эффективность равна 0,20. Таким образом, при предельной скорости пикирования благодаря влиянию аэроупругости эффективность элеронов падает на 70%.



Фиг. 8-18.

а — форма в плане крыла реактивного транспортного самолета; б — эффективность элеронов как функции числа Маха для реактивного транспортного самолета.

Скорость реверса элеронов получим, положив числитель уравнения (а) равным нулю:

$$\frac{q_R}{\sqrt{1-M^2}} = - \frac{C_{l\beta}}{\frac{a_0}{Sl} \frac{dc_{mAC}}{d\beta} \int_0^{l_1} \int_{l_1}^{l_2} C^{0\beta}(y, \eta) c^2 d\eta c dy} = 1641,3 \frac{\text{фунт}}{\text{фут}^2}. \quad (g)$$

Решая уравнение

$$\frac{q_R}{\sqrt{1-M_R^2}} = 1641,3 \quad (h)$$

относительно скорости воздуха получим, переходя к милям в час, что скорость реверса на уровне моря  $U_R$  будет равна 615 милям в час.

(е) Решение задач для тонких нестреловидных крыльев в обобщенных координатах. В гл. 2, 3 и 4 в связи с приближенными решениями статических и динамических задач мы видели, что понятие обобщенных координат играет

полезную роль. Рассмотрим аналогичные приложения к задачам статической аэроупругости прямых крыльев. Допустим, во-первых, что распределение углов закручивания по размаху можно разложить в ряд вида

$$\theta(y) = \sum_{j=1}^n \Theta_j(y) q_j, \quad (8-131)$$

где  $\Theta_j(y)$  — известные функции, удовлетворяющие граничным условиям  $\Theta(0) = \Theta'(l) = 0$ , и  $q_j$  — обобщенные координаты. Функции  $\Theta_j(y)$  суть явные функции  $y$ , которые задаются, а обобщенные координаты  $q_j$  являются подлежащими определению постоянными.

(1) *Метод Рэлея — Ритца*. Способ получения решения задачи статической аэроупругости для прямого крыла методом Рэлея — Ритца был разработан Флаксом в работе [8-9]. В гл. 2 мы видели, что метод Рэлея — Ритца основан на принципе возможной работы. Когда деформации конструкции могут быть выражены через обобщенные координаты, принцип возможной работы может быть записан в следующей простой форме:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i. \quad (2-97)$$

Для прямого крыла энергия деформации, согласно теории кручения Сен-Венана, может быть выражена в виде

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l GJ(\theta')^2 dy. \quad (8-132)$$

Подставив выражение (8-131) в уравнение (8-132), получим

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l GJ \left( \sum_{j=1}^n \Theta_j' q_j \right)^2 dy. \quad (8-132a)$$

Дифференцируя, как это требует выражение (2-97), уравнение (8-132a) по  $q_i$  находим

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^l GJ \Theta_j' \Theta_i' dy \right\} q_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8-133)$$

Обобщенная сила  $Q_i$  определяется равенством

$$Q_i = \int_0^l t(y) \Theta_i(y) dy = \int_0^l (qecc_i^e + t^*(y)) \Theta_i(y) dy \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (8-134)$$

где

$$t^*(y) = qecc_i^r + qc_{mAC} c^2 - mNgd \quad (8-134a)$$

для симметричной нагрузки и

$$t^*(y) = qec \left( \frac{\partial c_i^r}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial c_i^r}{\partial (pl/U)} \left( \frac{pl}{U} \right) \right) + qc^2 \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} \beta - mpyd \quad (8-134b)$$

для антисимметричной нагрузки.

Для учета аэродинамических эффектов по размаху удобно положить

$$c_i^e(y) = \sum_{j=1}^n c_{ij}(y) q_j, \quad (8-135)$$

где  $c_{ij}(y)$  — распределение коэффициента подъемной силы по размаху, которое имело бы место, если бы закручивание крыла по размаху было равно  $\Theta_j(y)$ .

Введя выражение (8-135) в равенства (8-134) и подставив результат вместе с выражениями (8-133) в уравнения (2-97), получим

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^l GJ\theta'_i\theta'_j dy - q \int_0^l c_{lj}\theta_i ce dy \right\} q_j = \int_0^l t^*\theta_i dy \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (8-136)$$

Заставляя  $i$  и  $j$  пробегать  $n$  значений, получаем из уравнений (8-136)  $n$  совместных уравнений относительно неизвестных  $q_1 \dots q_n$ :

$$\begin{aligned} A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + \dots + A_{1n}q_n &= B_1, \\ A_{21}q_1 + A_{22}q_2 + \dots + A_{2n}q_n &= B_2, \\ &\vdots \\ A_{n1}q_1 + A_{n2}q_2 + \dots + A_{nn}q_n &= B_n, \end{aligned} \quad (8-136a)$$

где

$$A_{ij} = \int_0^l (GJ\theta'_i\theta'_j - qc_{lj}\theta_i ce) dy, \quad B_i = \int_0^l t^*\theta_i dy.$$

Другую форму выражения величин  $A_{ij}$  можно получить, интегрируя эти соотношения по частям следующим образом:

$$\int_0^l GJ\theta'_i\theta'_j dy = [GJ\theta'_j\theta_i]_0^l - \int_0^l [GJ\theta'_j]' \theta_i dy = - \int_0^l [GJ\theta'_j]' \theta_i dy. \quad (8-137)$$

При выводе этих соотношений были использованы граничные условия  $\theta(0) = \theta'(l) = 0$ . Таким образом,  $A_{ij}$  можно записать в виде

$$A_{ij} = - \int_0^l \{ [GJ\theta'_j]' + qc_{lj}ce \} \theta_i dy. \quad (8-138)$$

В результате решения уравнений (8-136a) получим численные значения  $q_1, \dots, q_n$ , которые можно подставить в равенство (8-131) и получить распределение угла упругого закручивания или подставить в равенство (8-135) и получить распределение подъемной силы, обусловленное упругим закручиванием. Можно видеть, что коэффициенты  $A_{ij}$  включают динамическое давление, которое имеет особое значение в задаче о распределении подъемной силы. Уравнения (8-136a) можно использовать также для определения скорости дивергенции (полагая  $B_i = 0$  и приравнявая нулю детерминант, составленный из величин  $A_{ij}$ ). В этом случае динамическое давление  $q$  должно, конечно, рассматриваться в качестве переменной величины, и для того чтобы определить динамическое давление дивергенции, нужно разложить на множители полином степени  $n$  от  $q$ , аналогичный полиному (8-56).

Следует отметить, что случай трехмерной аэродинамики может быть легко исследован описанным выше методом. Вычисление членов  $c_{lj}(y)$  в уравнении (8-135) можно рассматривать как отдельную задачу (любым способом учитывая аэродинамическую индукцию по размаху).

(2). *Метод Галеркина.* Если к дифференциальному уравнению равновесия при кручении прямого упругого крыла применить метод Галеркина, то результат будет тождественен результату, полученному в предыдущем пункте методом Рэлея—Ритца. Однако, если применить метод Галеркина к интегральному уравнению, получим другой результат, который отчасти более удобен для применения к практическим задачам и быстрее сходится. Преимущества применения метода Галеркина к интегральному уравнению по сравнению с применением его



к дифференциальному уравнению в настоящей задаче аналогичны преимуществам модифицированного метода Рэлея — Ритца перед методом Рэлея — Ритца в задаче о колебаниях (см. гл. 4).

Из уравнений (8-28) и (8-93) было видно, что для тонких прямых крыльев интегральное уравнение имеет вид

$$\theta(y) = q \int_0^l C^{00}(y, \eta) e c c_i^e d\eta + f(y), \quad (8-139)$$

где  $f(y)$  в случае симметричного нагружения определяется равенством (8-28а), а в случае антисимметричного нагружения равенством (8-93а). Подставим разложения (8-131) и (8-135) в равенство (8-139). В результате получим функцию ошибки  $\mathcal{E}(y)$ , равную

$$\mathcal{E}(y) = \sum_{j=1}^n \left\{ \Theta_j - q \int_0^l C^{00}(y, \eta) c_{i_j} c e d\eta \right\} q_j - f(y). \quad (8-140)$$

Согласно методу Галеркина, требуем, чтобы функция  $\mathcal{E}(y)$  была ортогональна к  $\Theta_i c e$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), т. е. чтобы среднее значение по отношению к функции веса было равно нулю:

$$\int_0^l \mathcal{E}(y) \Theta_i c e dy = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8-140a)$$

Таким образом, из равенства (8-140) получим

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^l \Theta_i \Theta_j c e dy - q \int_0^l \Theta_i c e \int_0^l C^{00}(y, \eta) c_{i_j} c e d\eta dy \right\} q_j = \int_0^l f(y) \Theta_i c e dy \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8-140b)$$

Заставляя  $i$  и  $j$  пробегать  $n$  значений, получим  $n$  совместных уравнений, идентичных по форме уравнениям (8-136а), за исключением того, что теперь коэффициенты  $A_{ij}$  и  $B_i$  определяются соотношениями

$$A_{ij} = \int_0^l \Theta_i \Theta_j c e dy - q \int_0^l \Theta_i c e \int_0^l C^{00}(y, \eta) c_{i_j} c e d\eta dy, \quad (8-141a)$$

$$B_i = \int_0^l f(y) \Theta_i c e dy. \quad (8-141b)$$

В результате решения уравнений (8-136а), коэффициенты которых определяются соотношениями (8-141а) и (8-141б), найдем величины обобщенных координат  $q_1, \dots, q_n$ . Подставив эти значения в равенство (8-131), получим распределение углов закручивания, а внеся их в равенство (8-135), найдем распределение коэффициентов подъемной силы.

Особенно простой результат можно получить в том случае, если в разложении (8-131) удержать только один член

$$\theta(y) = \Theta_D(y) q_1, \quad (8-142)$$

где  $\Theta_D(y)$  — распределение углов закручивания, соответствующее скорости дивергенции. Из решения следует, что

$$\Theta_D(y) = q_D \int_0^l C^{00}(y, \eta) c_{i_D} c e d\eta, \quad (8-142a)$$

где  $c_{iD}$  — распределение коэффициентов подъемной силы, соответствующее распределению углов закручивания  $\Theta_D(y)$ . Используя равенства (8-141a) и (8-142a), получаем следующее единственное значение  $A_{ij}$ :

$$A = \left(1 - \frac{q}{q_D}\right) \int_0^l \Theta_D^2 c_{iD} dy. \quad (8-142b)$$

Единственное значение  $B_i$  получим, положив в уравнении (8-141b)  $\Theta_i = \Theta_D$ ,

$$B = \int_0^l (f(y) \Theta_D c_{iD} dy. \quad (8-142c)$$

Подставляя эти значения  $A$  и  $B$  в уравнения (8-136a) и разрешая их относительно  $q_1$ , находим распределение углов закручивания:

$$\theta(y) = \Theta_D(y) q_1 = \Theta_D(y) \frac{\int_0^l f(y) \Theta_D c_{iD} dy}{[1 - (q/q_D)] \int_0^l \Theta_D^2 c_{iD} dy}. \quad (8-142d)$$

Выражение (8-142d) можно записать в другой эквивалентной форме:

$$\theta(y) = \Theta_r(y) \frac{1}{1 - (q/q_D)}, \quad (8-142e)$$

где

$$\Theta_r(y) = \frac{\Theta_D(y) \int_0^l f(y) \Theta_D c_{iD} dy}{\int_0^l \Theta_D^2 c_{iD} dy} \quad (8-142f)$$

является приближенным выражением для угла упругого закручивания, вычисляемого исходя из предположения, что закручивание не вызывает дополнительных аэродинамических сил. Уравнение (8-142e) аналогично уравнению (8-12), которое было выведено для случая упруго подвешенного жесткого профиля крыла. Следует заметить, что уравнение (8-142e) строго соблюдается только в диапазоне скоростей, где не сказывается влияние сжимаемости и где можно принять, что наклон кривой подъемной силы не зависит от скорости.

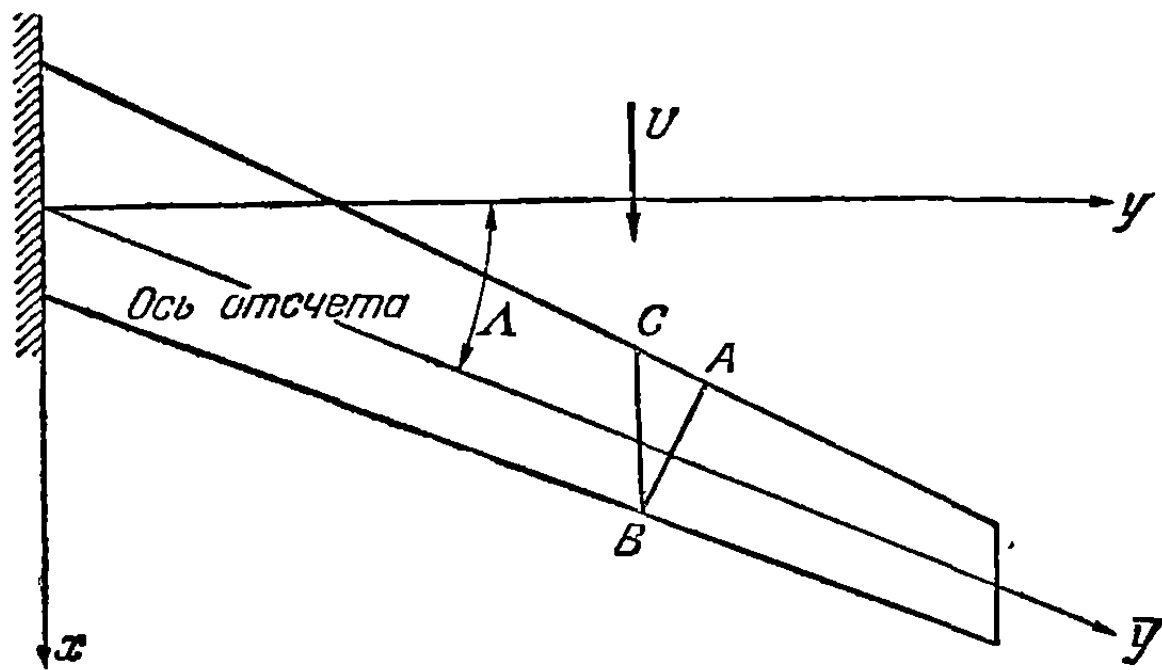
Отношение

$$\frac{1}{1 - (q/q_D)}$$

играет роль коэффициента усиления и аналогично понятию этого рода в теории колебаний. Величина коэффициента усиления зависит от отношения скорости потока воздуха к скорости дивергенции. Скорость дивергенции играет, таким образом, полезную роль в качестве сравнительной величины даже тогда, когда скоростные возможности самолета лежат гораздо ниже этой скорости.

8-4. Стреловидные крылья. Прямое крыло, которое исследовалось в предыдущем пункте, характеризуется главным образом наличием упругой оси и приблизительной перпендикулярностью упругой оси к плоскости симметрии самолета. У таких крыльев явления аэроупругости зависят всецело от закручивания крыла относительно упругой оси, и изгиб крыла не оказывает на них ни-

какого влияния. Рассмотрим теперь стреловидные крылья, в которых оси, направленные вдоль размаха, не являются более перпендикулярными к центральной оси самолета. В этом случае изгиб крыла оказывает существенное и сложное влияние на аэроупругие свойства самолета. Рассмотрим, например, фиг. 8-19. Из этой фигуры видно, что при изгибе стреловидного крыла его угол атаки в направлении набегающего потока уменьшается. Если направленная вверх сила прикладывается к оси системы отсчета, точки  $A$  и  $B$  переместятся приблизительно на одинаковые расстояния, которые будут, очевидно, больше расстояния, на которое переместится точка  $C$ . Поэтому угол атаки сечения  $BC$ , расположенного в плоскости набегающего потока, будет меньше и появится отрицательное приращение подъемной силы. Эта отрицательная подъемная сила оказывает стабилизирующее влияние, так как стремится уменьшить подъемную силу, возникающую от закручивания элемента  $BC$ , при котором его носок перемещается вверх. В результате этого изгиб стреловидного крыла со стреловидностью назад ведет к смещению центра давления аэродинамической нагрузки к корневому сечению крыла, а изгиб стреловидного крыла со стреловидностью вперед ведет к смещению центра давления от корневого сечения. Вероятность наступления дивергенции для крыла со стреловидностью назад уменьшается, тогда как вероятность наступления реверса органов управления повышается. Для крыльев с передней стреловидностью имеет место обратный случай, и фактически эти крылья исключаются из употребления по соображениям дивергенции. Кроме того, упругие деформации стреловидных крыльев приводят к большим смещениям центра давления как вперед, так и назад, которые оказывают большое влияние на статическую продольную устойчивость.



Фиг. 8-19. Сечения крыла, направленные по потоку и вдоль хорды.

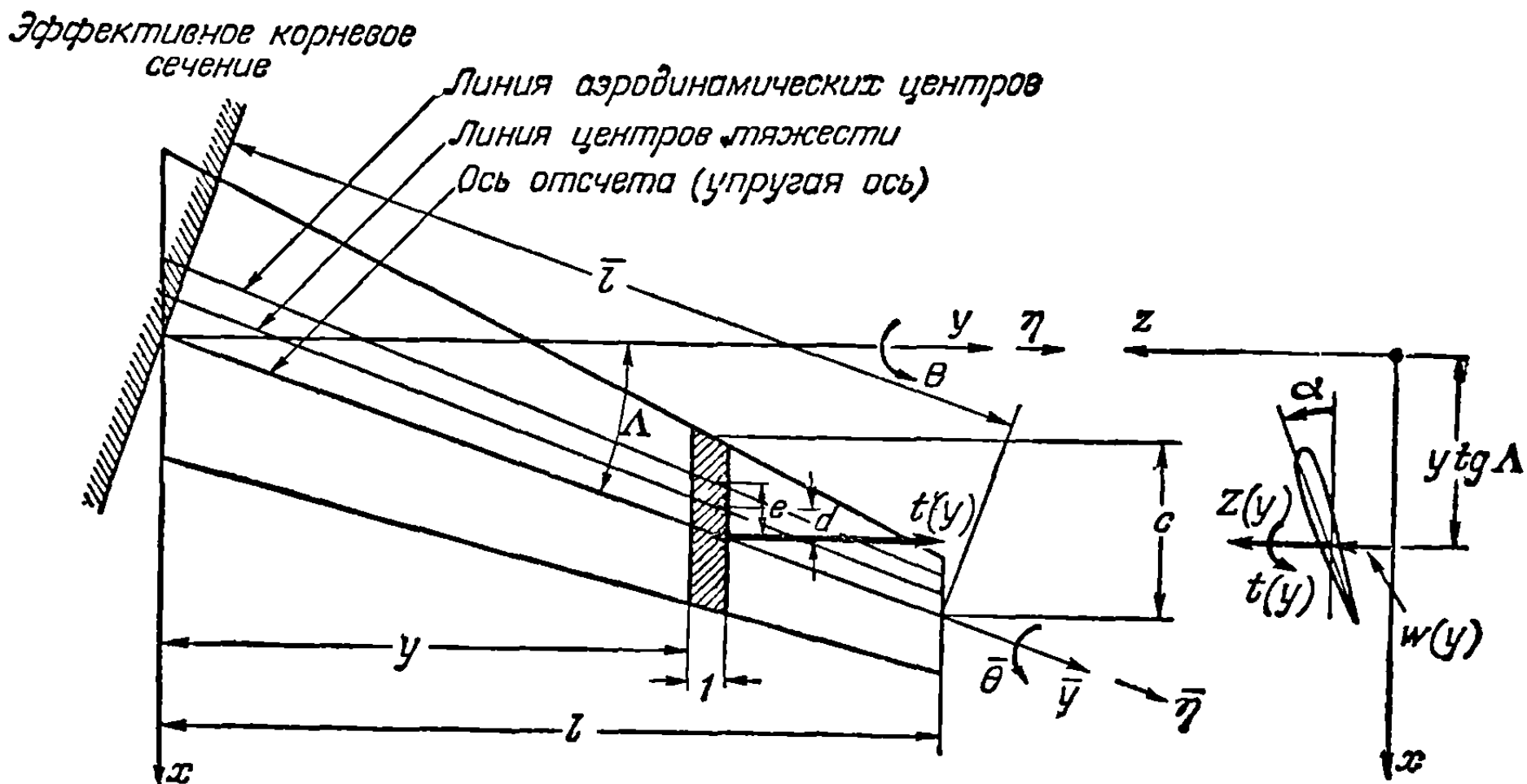
До периода, последовавшего после второй мировой войны, к явлениям аэроупругости на стреловидных крыльях не было проявлено достаточно серьезного внимания. В 1947 г. Коллар [8-16], анализируя явления аэроупругости при больших скоростях, впервые качественно описал некоторые явления аэроупругости на крыльях со стреловидностью назад. В 1948 г. Дидерих и Будянский [8-17] впервые дали исчерпывающее объяснение явлению дивергенции тонких стреловидных крыльев. Согласно полученным ими результатам, скорость дивергенции быстро падает с увеличением стреловидности вперед, а крылья с умеренной или большой задней стреловидностью не могут быть подвержены дивергенции. В последующих работах Бая и Сирса [8-18] и Майлса [8-19] описаны методы расчета симметричной и антисимметричной нагрузок на упругие стреловидные крылья. Бай и Сирс показали, как записать интегральное уравнение равновесия в матричной форме, которая удобна в приложении к неоднородным крыльям. Для того чтобы получить приближенные решения для тонких стреловидных крыльев с прямыми упругими осями, Майлс применил метод Галеркина. В более поздней работе Бяня и Линя [8-20] в дополнение к формулировке задачи, применимой к различным условиям проектирования самолетной конструкции, содержится прекрасное резюме задач статической аэроупругости.

В нижеследующем изложении для решения задач аэроупругости будут применяться как дифференциальные, так и интегральные уравнения равновесия.

В нижеследующем изложении для решения задач аэроупругости будут применяться как дифференциальные, так и интегральные уравнения равновесия.

Вообще применение дифференциальных уравнений ограничивается тонкими стреловидными крыльями, где можно предположить существование упругой оси. В подобных случаях ось отсчета  $\bar{y}$  на фиг. 8-19 можно направить вдоль упругой оси, и деформация крыла может определяться по элементарным инженерным теориям изгиба и кручения упругой оси. Интегральное уравнение задачи не ограничено подобным допущением и может применяться к крыльям произвольной формы в плане и произвольной жесткости, если только сечения крыла в направлении набегающего потока могут считаться жесткими.

(а) Дифференциальные уравнения равновесия тонких стреловидных крыльев (профили крыла параллельны набегающему потоку). Рассмотрим тонкое стреловидное крыло с такими упругими свойствами, что ось  $\bar{y}$  на фиг. 8-20 можно рассматривать в качестве упругой оси. Таким образом, допускается, что упругие свойства крыла такие же, как у тонкой балки с несимметричным эффективным корневым сечением. На фиг. 8-20 изображен также



Фиг. 8-20. Тонкое стреловидное крыло с сечениями, направленными по потоку.

элемент крыла, направленный по потоку; размер этого элемента вдоль оси  $y$  равен единице, и хорда в направлении набегающего потока равна  $c$ . Полная сила, действующая на элемент, равна

$$Z(y) = qcsc_l - mNg, \quad (8-143)$$

где

$c_l$  — местный коэффициент подъемной силы расположенного по потоку профиля крыла,

$m$  — масса, приходящаяся на единицу длины крыла вдоль оси  $y$ .

Момент сил, действующих на элемент относительно оси, параллельной оси  $y$  и проходящей через точку пересечения упругой оси с сечением крыла по потоку (положение этого сечения на хорде определяется координатой  $x = y \operatorname{tg} \Lambda$ ), равен (см. фиг. 8-20)

$$t(y) = qecsc_l + qc^2c_{m\Delta c} - mNgd, \quad (8-144)$$

где величины  $e$  и  $d$  измеряются в направлении набегающего потока (положительным считается направление вперед). При составлении дифференциальных уравнений равновесия относительно оси  $\bar{y}$  необходимо величины, определяемые уравнениями (8-143) и (8-144), преобразовать в силы и моменты кручения, при-

ходящиеся на единицу длины вдоль оси  $\bar{y}$ . Это достигается умножением этих уравнений на  $\cos \Lambda$ :

$$\begin{aligned} Z(\bar{y}) &= Z(y) \cos \Lambda = (qcc_l - mNg) \cos \Lambda, \\ t(\bar{y}) &= t(y) \cos \Lambda = (qecc_l + qc^2c_{m\Delta 0} - mNgd) \cos \Lambda. \end{aligned} \quad (8-145)$$

Все величины, относящиеся к сечению крыла, направленному вдоль хорды, подобно сечению  $AB$  на фиг. 8-19, будут записываться с черточками наверху. Например,  $\bar{c}$ ,  $\bar{c}_l$  и  $\bar{c}_{m\Delta 0}$  представляют соответственно хорду, коэффициент подъемной силы и коэффициент момента сечения крыла, направленного вдоль хорды. Все величины, относящиеся к сечениям, направленным по скорости набегающего потока, подобно сечению  $BC$  на фиг. 8-19, будут записываться без черточек. Например,  $c$ ,  $c_l$  и  $c_{m\Delta 0}$  представляют величины, аналогичные вышеуказанным и относящиеся к сечениям крыла, направленным по потоку. Зависимости между этими величинами существуют во всех случаях. Зависимости, основанные только на геометрических соотношениях, очевидны, а основанные на аэродинамических соображениях берутся из гл. 5.

Текущий момент кручения  $t(\bar{y})$ , как это проиллюстрировано на векторной диаграмме фиг. 8-21, можно разложить на момент кручения относительно упругой оси и изгибающий момент относительно линии, перпендикулярной к упругой оси.

Текущий крутящий момент относительно упругой оси равен

$$\bar{t}(\bar{y}) = t(\bar{y}) \cos \Lambda, \quad (8-146)$$

а текущий изгибающий момент будет

$$\bar{m}(\bar{y}) = t(\bar{y}) \sin \Lambda. \quad (8-147)$$

Полный изгибающий момент равен сумме изгибающих моментов сил  $Z(\bar{y})$ , расположенных по одну сторону текущего сечения и текущего изгибающего момента  $\bar{m}(\bar{y})$ . Следовательно,

$$EI \frac{d^2 w(\bar{y})}{d\bar{y}^2} = M(\bar{y}) = \int_y^l Z(\bar{\eta})(\bar{\eta} - \bar{y}) d\bar{\eta} - \int_y^l \bar{m}(\bar{\eta}) d\bar{\eta}. \quad (8-148)$$

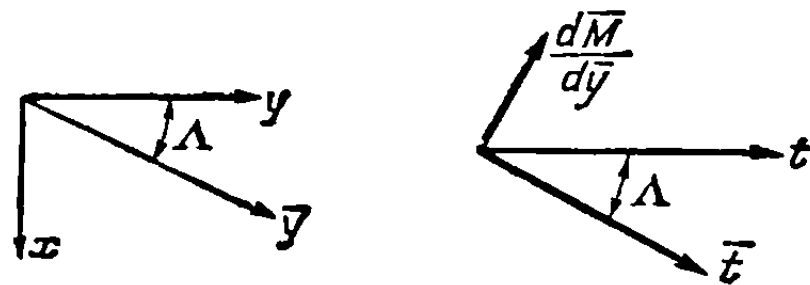
Дифференцируя уравнение (8-148) два раза по  $\bar{y}$  и подставляя затем выражение (8-147), получаем дифференциальное уравнение, описывающее изгиб крыла

$$\frac{d^2}{d\bar{y}^2} \left( EI \frac{d^2 w}{d\bar{y}^2} \right) = Z(\bar{y}) + \frac{dt(\bar{y})}{d\bar{y}} \sin \Lambda. \quad (8-149a)$$

Соответствующее дифференциальное уравнение кручения выводится из теории кручения Сен-Венана:

$$\frac{d}{d\bar{y}} \left( GJ \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{y}} \right) = -\bar{t}(\bar{y}) = -t(\bar{y}) \cos \Lambda. \quad (8-149b)$$

Здесь  $\bar{\theta}$  — угол закручивания и крыла около оси  $\bar{y}$ . Подставляя выражения (8-145) в уравнения (8-149a) и (8-149b), получаем следующие совместные дифферен-



Фиг. 8-21. Векторная диаграмма текущего крутящего и изгибающего моментов, действующих на стреловидное крыло.

циальные уравнения:

$$\frac{1}{\cos \Lambda} \frac{d^2}{dy^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dy^2} \right) = qcc_l - mNg + \frac{d}{dy} (qecc_l + qc^2 c_{mAC} - mNgd) \sin \Lambda, \quad (8-150)$$

$$\frac{d}{dy} \left( GJ \frac{d\bar{\theta}}{dy} \right) = - (qecc_l + qc^2 c_{mAC} - mNgd) \cos^2 \Lambda. \quad (8-151)$$

Если принять, что  $c_l$  представляет собой сумму жесткой и упругой составляющих, то уравнения (8-150) и (8-151) примут вид

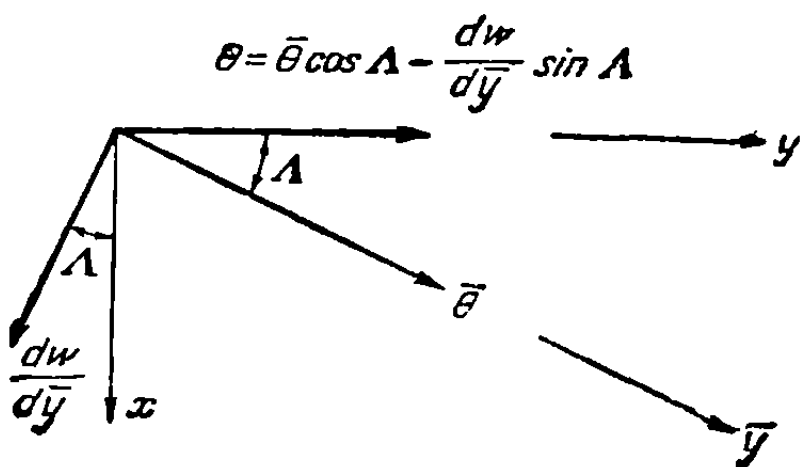
$$\frac{1}{\cos \Lambda} \frac{d^2}{dy^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dy^2} \right) - \frac{d}{dy} (ecc_l^e) q \sin \Lambda - qcc_l^e = qcc_l^r - mNg + \sin \Lambda \frac{d}{dy} f(\bar{y}), \quad (8-152)$$

$$\frac{d}{dy} \left( GJ \frac{d\bar{\theta}}{dy} \right) + qecc_l^e \cos^2 \Lambda = - f(\bar{y}) \cos^2 \Lambda, \quad (8-153)$$

где

$$f(\bar{y}) = qecc_l^r + qc^2 c_{mAC} - mNgd.$$

Для того чтобы связать угол атаки в плоскости набегающего потока с деформацией крыла, рассмотрим векторную диаграмму на фиг. 8-22. Так как



малые угловые перемещения можно рассматривать как векторы, то из фиг. 8-22 видно, что угол атаки в направлении набегающего потока, обусловленный упругой деформацией, складывается из компоненты, обусловленной углом закручивания, и компоненты, определяемой углом наклона, и выражается в виде

$$\theta = \bar{\theta} \cos \Lambda - \frac{dw}{dy} \sin \Lambda. \quad (8-154)$$

Фиг. 8-22. Векторная диаграмма угла атаки в плоскости течения, обусловленного упругой деформацией.

При составлении уравнения (8-154) было, конечно, принято, что сечения крыла, направленные по потоку, являются жесткими. Если ли-

нейное соотношение между углом атаки в плоскости течения и распределением подъемной силы записать в символической форме, то уравнение (8-154) примет вид

$$\bar{\theta} \cos \Lambda - \frac{dw}{dy} \sin \Lambda = \mathfrak{A} [cc_l^e], \quad (8-155)$$

где  $\mathfrak{A}$  — линейный оператор, зависящий от принятой аэродинамической теории. Например, в случае теории несущей полосы оператор  $\mathfrak{A}$  просто равен

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{a_0 c \cos \Lambda}, \quad (8-156)$$

где  $a_0$  — наклон кривой подъемной силы сечения крыла в двумерном потоке. Поскольку сечения крыла, направленные по потоку, считаются жесткими, деформации крыла не оказывают влияния на коэффициент  $c_{mAC}$ .

Два совместных дифференциальных уравнения (8-152) и (8-153) определяют вместе с вспомогательным уравнением (8-155) поведение стреловидных крыльев с прямыми упругими осями. Для того чтобы получить решения этих уравнений, нужно сформулировать граничные условия. Угол наклона и угол закручивания в корневом сечении равны нулю, т. е.

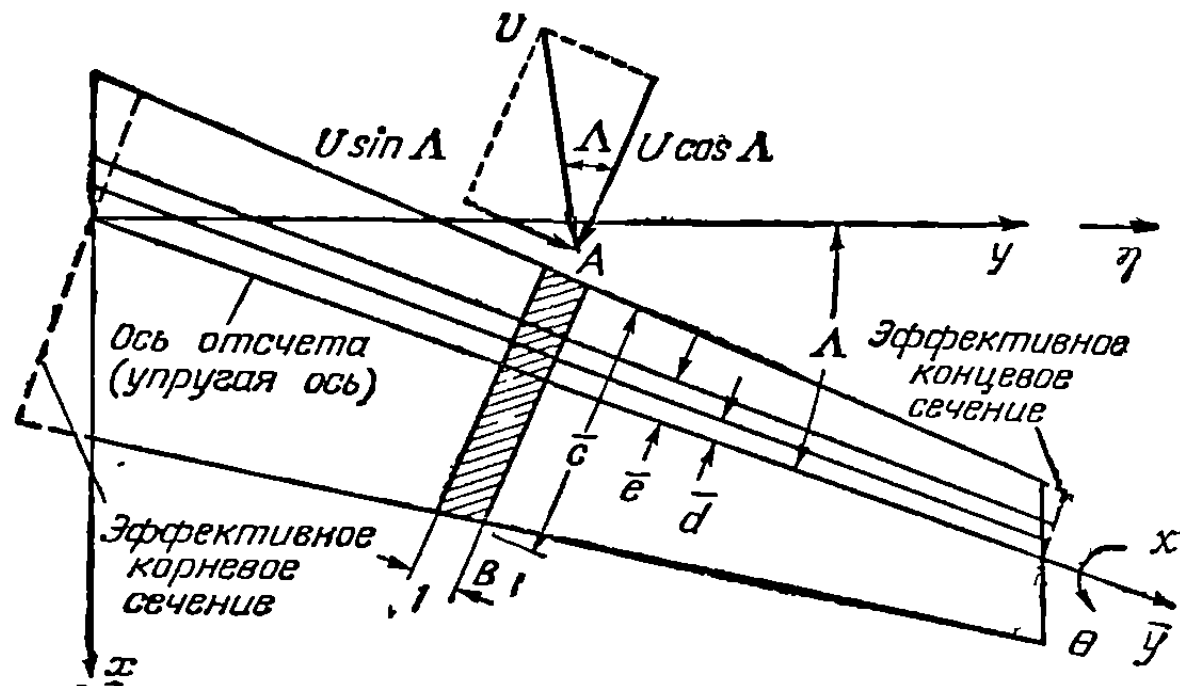
$$\frac{dw(0)}{dy} = \bar{\theta}(0) = 0. \quad (8-157)$$

Изгибающий и крутящий моменты, а также поперечная сила равны нулю на конце крыла:

$$EI \frac{d^2 \bar{w}(\bar{l})}{d\bar{y}^2} = GJ \frac{d\bar{\theta}(\bar{l})}{d\bar{y}} = 0, \quad (8-158)$$

$$\frac{d}{d\bar{y}} \left( EI \frac{d^2 \bar{w}(\bar{l})}{d\bar{y}^2} \right) = 0. \quad (8-159)$$

(b) Дифференциальные уравнения равновесия тонких прямых крыльев (элементы крыла направлены вдоль хорды). Дифференциальные уравнения равновесия тонкого стреловидного крыла можно получить также, если вычислить аэродинамические силы и моменты, действующие на сечения крыла, нормальные к упругой оси (см. фиг. 8-23). Необходимо сделать допущение о наличии эффективного корневого и концевого сечений. Хотя это допущение и ведет к некоторой ошибке, но зато получаются простые уравнения, которые для больших удлинений дают удовлетворительные результаты.



Фиг. 8-23. Тонкое стреловидное крыло с сечениями, направленными вдоль хорды.

Полная сила, действующая на элемент крыла, расположенный вдоль хорды, с шириной по оси  $\bar{y}$ , равной единице (см. фиг. 8-23), равна

$$Z(\bar{y}) = \bar{c}_l q \cos^2 \Lambda - \bar{m} N g, \quad (8-160)$$

где

$\bar{c}_l$  — местный коэффициент подъемной силы на элементе крыла вдоль хорды,  
 $\bar{c}$  — хорда крыла, измеренная в направлении, перпендикулярном к оси  $\bar{y}$ ,  
 $\bar{m}$  — масса, приходящаяся на единицу длины крыла вдоль оси  $\bar{y}$ .

Момент сил, действующих на элемент, расположенный вдоль хорды, около оси  $\bar{y}$ , равен

$$\bar{t}(\bar{y}) = \bar{c}_l \bar{e} q \cos^2 \Lambda + \bar{c}_{mAC} \bar{c}^2 q \cos^2 \Lambda - \bar{m} N g \bar{d}, \quad (8-161)$$

где  $\bar{c}_{mAC}$  — местный коэффициент момента сечения крыла, направленного вдоль хорды; величины  $\bar{e}$  и  $\bar{d}$  измерены в направлении, перпендикулярном к упругой оси.

Составляя дифференциальные уравнения изгиба и кручения, получаем

$$\frac{d^2}{d\bar{y}^2} \left( EI \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{y}^2} \right) = \frac{d^2}{d\bar{y}^2} \int_{\bar{y}}^{\bar{l}} Z(\bar{\eta}) (\bar{\eta} - \bar{y}) d\bar{\eta} = \bar{c}_l q \cos^2 \Lambda - \bar{m} N g, \quad (8-162)$$

$$\frac{d}{d\bar{y}} \left( GJ \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{y}} \right) = -\bar{t}(\bar{y}) = -\bar{c}_l \bar{e} q \cos^2 \Lambda - \bar{c}_{mAC} \bar{c}^2 q \cos^2 \Lambda + \bar{m} N g \bar{d}. \quad (8-163)$$

Рассматривая  $\bar{c}_l$  как сумму жесткой и упругой компонент, можно записать уравнения (8-162) и (8-163) в виде

$$\frac{d^2}{d\bar{y}^2} \left( EI \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{y}^2} \right) - \bar{c}_l \bar{e} q \cos^2 \Lambda = \bar{c}_l \bar{e} q \cos^2 \Lambda - \bar{m} N g, \quad (8-164)$$

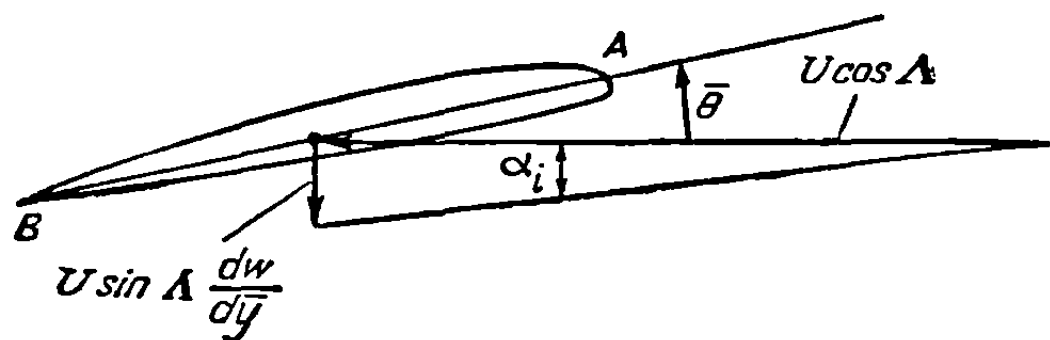
$$\frac{d}{d\bar{y}} \left( GJ \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{y}} \right) + \bar{c}_l \bar{e} q \cos^2 \Lambda = -\bar{c}_l \bar{e} q \cos^2 \Lambda - \bar{c}_{mAC} \bar{c}^2 q \cos^2 \Lambda + \bar{m} N g \bar{d}. \quad (8-165)$$



К уравнениям (8-164) и (8-165) нужно присоединить дополнительное соотношение, связывающее  $\bar{c}_l$  с деформацией крыла. Если учитывать влияние аэродинамической индукции, то вид этого соотношения неясен. Однако в случае теории несущей полосы эффективный угол атаки  $\bar{\alpha}$ , обусловленный деформацией конструкции, связан с местным коэффициентом подъемной силы  $\bar{c}_l^e$  с помощью соотношения

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{c}_l^e}{a_0}. \quad (8-166)$$

Зависимость  $\bar{\alpha}$  от местных деформаций крыла  $\bar{\theta}$  и  $d\bar{w}/d\bar{y}$  можно получить, разложив скорость невозмущенного потока  $U$  на составляющую  $U \cos \Lambda$ , перпендикулярную к оси  $\bar{y}$  (см. фиг. 8-23), и составляющую  $U \sin \Lambda$ , параллельную оси  $\bar{y}$ . Ось  $\bar{y}$  изображает положение упругой оси крыла в плоскости  $xu$  до деформации. Допустим, что крыло деформируется за счет изгиба и кручения упругой оси. Компонента скорости  $U \cos \Lambda$  встречает теперь сечение крыла  $AB$  под геометрическим углом атаки  $\bar{\theta}$ . В добавление к этому в результате деформации компонента скорости  $U \sin \Lambda$  индуцирует скорость  $U \sin \Lambda (d\bar{w}'/d\bar{y})$ , перпендикулярную к поверхности крыла. Таким



Фиг. 8-24. Компонента индуцированной скорости профиля стреловидного крыла, направленного вдоль хорды.

образом, полный угол атаки сечения крыла  $AB$ , как показано на фиг. 8-24, представляет сумму геометрического и индуцированного углов атаки

$$\bar{\alpha} = \bar{\theta} - \bar{\alpha}_i = \bar{\theta} - \frac{d\bar{w}}{d\bar{y}} \operatorname{tg} \Lambda. \quad (8-167)$$

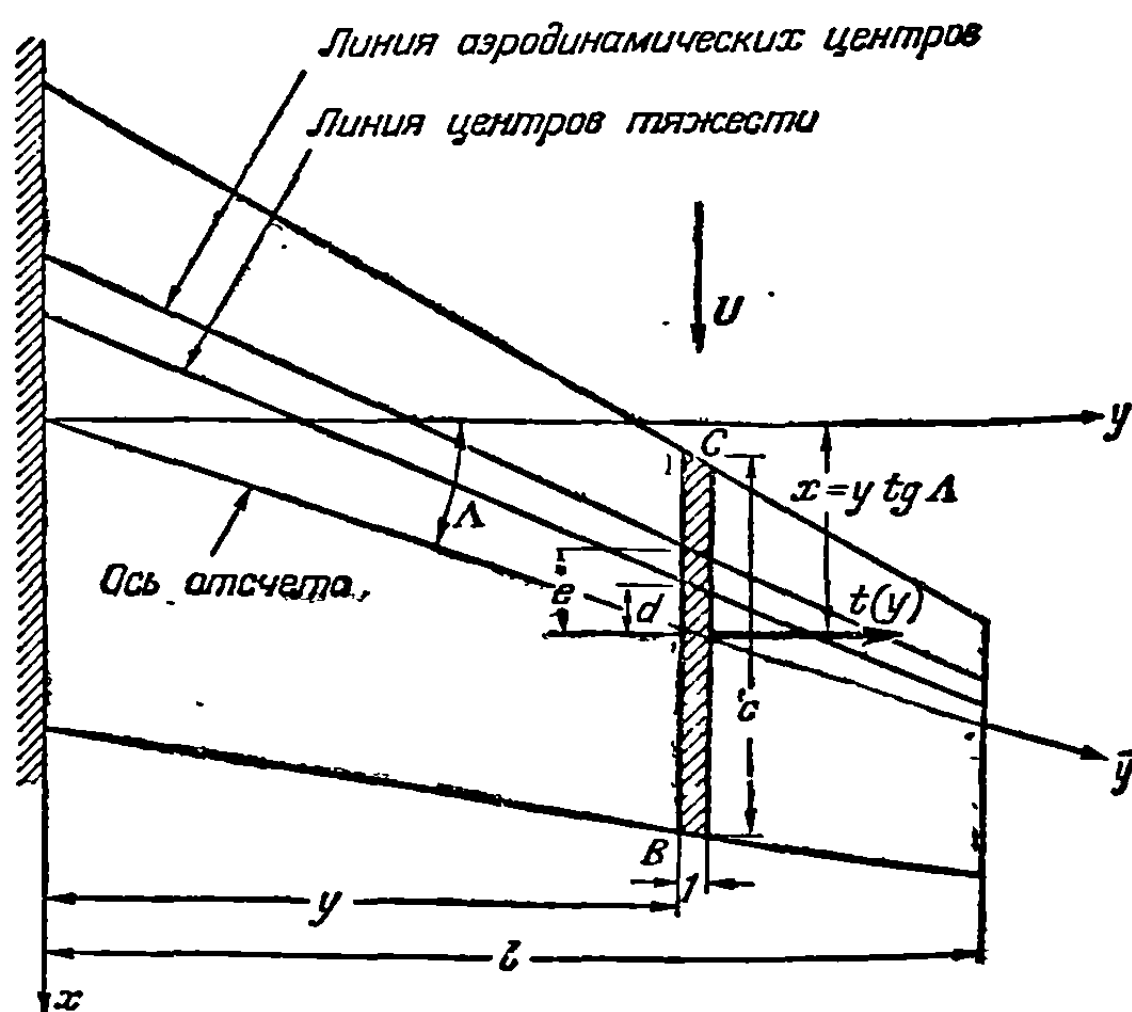
Исключая  $\alpha$  из равенств (8-166) и (8-167), получаем необходимое дополнительное соотношение между коэффициентом подъемной силы и деформацией крыла в виде

$$\frac{\bar{c}_l^e}{a_0} = \bar{\theta} - \frac{d\bar{w}}{d\bar{y}} \operatorname{tg} \Lambda. \quad (8-168)$$

Для того чтобы получить упрощенные решения для стреловидных крыльев большого удлинения, нужно решить дифференциальные уравнения (8-164) и (8-165) вместе с уравнением (8-168) и удовлетворить граничным условиям (8-157), (8-158) и (8-159). Можно заметить, что уравнения (8-152) и (8-153) по форме похожи на уравнения (8-164) и (8-165), за исключением того, что последние не содержат члена с первой производной.

(с) *Интегральное уравнение равновесия стреловидного крыла произвольной формы в плане и произвольной жесткости.*

Рассмотрим теперь интегральное уравнение равновесия в применении к стреловидному крылу произвольной формы в плане и произвольной жесткости (см. фиг. 8-25). Допустим,



Фиг. 8-25. Стреловидное крыло с произвольной формой в плане и произвольной жесткостью.

что сечения, направленные по потоку, подобно сечению  $BC$  на фиг. 8-25, в основном не подвергаются деформации. Хотя это допущение и предполагает известную степень гибкости, однако крыло может иметь любую форму в плане и жесткость. Уравнение равновесия получим с помощью уравнения (2-64):

$$\theta(y) = \int_0^l C^{\theta z}(y, \eta) Z(\eta) d\eta + \int_0^l C^{\theta \theta}(y, \eta) t(\eta) d\eta. \quad (2-64)$$

При составлении равенства (2-64), как было указано в п. 2-9, за ось координат принимается ось  $y$ , т. е. функции влияния определены таким образом, что текущий скручивающий момент  $t(y)$  может рассматриваться как момент кручения в каждом сечении крыла, направленном по потоку, относительно оси, параллельной оси  $y$ . Читатель может проверить место приложения и направление текущего крутящего момента  $t(y)$  по фиг. 8-25. Выражения для текущей силы  $Z(y)$  и текущего крутящего момента  $t(y)$ , входящих в уравнение (2-64), подобны тем, которые даются соответственно равенствами (8-143) и (8-144).

Подставляя выражения (8-143) и (8-144) в равенство (2-64), получаем

$$\theta(y) = \int_0^l C^{\theta z}(y, \eta) (qcc_l - mNg) d\eta + \int_0^l C^{\theta \theta}(y, \eta) (qecc_l + qc^2c_{mAC} - mNgd) d\eta. \quad (8-169)$$

Подставляя сюда

$$c_l = c_l^r + c_l^e$$

и вводя сокращенные обозначения, получаем

$$\theta(y) = q \int_0^l \bar{C}(y, \eta) cc_l^e d\eta + \bar{f}(y), \quad (8-170)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}(y) = & q \int_0^l \bar{C}(y, \eta) cc_l^r d\eta + q \int_0^l C^{\theta \theta}(y, \eta) c_{mAC} c^2 d\eta - \\ & - g \int_0^l [C^{\theta z}(y, \eta) + C^{\theta \theta}(y, \eta) d(\eta)] mN d\eta, \end{aligned} \quad (8-171)$$

$$\bar{C}(y, \eta) = C^{\theta z}(y, \eta) + e(\eta) C^{\theta \theta}(y, \eta). \quad (8-172)$$

В уравнении (8-170) все величины, кроме  $c_l^e$  и  $\theta$ , считаются известными. Известные величины зависят от физических свойств крыла и вида рассматриваемого маневра. Характер функций влияния  $C^{\theta z}(y, \eta)$  и  $C^{\theta \theta}(y, \eta)$  определяется упругими свойствами исследуемого крыла.

Если в уравнение (8-170) подставить функциональное соотношение, связывающее распределение углов атаки и распределение подъемной силы, то его можно использовать для определения статических аэроупругих свойств стреловидного крыла. Это функциональное соотношение имеет вид

$$\theta(y) = \mathcal{A}[cc_l^e]. \quad (8-173)$$

Интегральное уравнение стреловидного крыла имеет одно важное отличие от соответствующего уравнения прямого крыла [уравнение (8-28)]. Функция влияния  $\bar{C}(y, \eta)$  не будет симметричной, так как одна из ее составляющих  $C^{\theta z}(y, \eta)$  является несимметричной функцией. Исследуемая здесь математическая задача известна под названием задачи несамосопряженного типа, тогда как задача

статической аэроупругости прямого крыла и задачи о колебаниях, разобранные в гл. 3 и 4, являются задачами самосопряженного типа. Ниже из этой главы будет видно, что несамосопряженность оказывает значительное влияние на математическую природу решения.

(d) *Дивергенция.* Скорость дивергенции стреловидного крыла вычисляется по наименьшему характеристическому значению системы однородных совместных дифференциальных уравнений или однородного интегрального уравнения. В случае стреловидных крыльев, в отличие от случая прямого крыла, изгиб оказывает большое влияние на окончательные результаты. Поэтому явление дивергенции стреловидных крыльев более правильно называть изгибно-крутильной дивергенцией в отличие от дивергенции при кручении прямых крыльев. Из рассуждений, излагаемых ниже, становится ясным, что скорости дивергенции крыльев со стреловидностью назад настолько высоки, что дивергенция сама по себе не является вопросом первостепенной важности. Наоборот, передняя стреловидность, как будет видно, оказывает чрезвычайно вредное влияние на скорости дивергенции крыльев с передней стреловидностью, так что такие крылья по соображениям дивергенции практически исключаются из употребления. Поэтому читатель, естественно, может выразить недоумение по поводу практической ценности проблемы дивергенции стреловидных крыльев. На этот вопрос частично будет дан ответ в п. 8-4 (g), где изложен полезный приближенный метод исследования задач о распределении нагрузки по крылу со стреловидностью назад. По этому методу деформация нагруженного крыла со стреловидностью назад выражается через деформацию при дивергенции того же самого крыла с передней стреловидностью. Здесь скорость дивергенции крыла с передней стреловидностью играет важную роль сравнительной величины, определяющей уменьшение упругого закручивания крыла со стреловидностью назад.

(1) *Решения дифференциальных уравнений тонких стреловидных крыльев в замкнутой форме.* В нескольких частных случаях, когда используется теория несущей полосы, можно получить решения совместных дифференциальных уравнений в замкнутой форме. Возможно, что наипростейшим случаем, имеющим некоторое практическое значение, является случай однородного тонкого крыла с упругой осью, совпадающей с линией аэродинамических центров. В этом случае  $e$  равно нулю и закручивание относительно упругой оси отсутствует. Соответствующее дифференциальное уравнение получим, положив в однородной форме уравнения (8-152)  $e = 0$ :

$$\frac{d^2}{dy^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dy^2} \right) - q c c_i^e \cos \Lambda = 0. \quad (8-174)$$

Подставляя выражение (8-156) в уравнение (8-155) и полагая  $\bar{\theta} = 0$ , получаем для случая теории несущей полосы

$$c_i^e = -a_0 \frac{dw}{dy} \sin \Lambda \cos \Lambda. \quad (8-175)$$

Напишем уравнение (8-174) для однородного крыла и подставим в него выражение (8-175):

$$\frac{d^4 w}{dy^4} + \frac{a_0 q c \sin \Lambda \cos^2 \Lambda}{EI} \frac{dw}{dy} = 0. \quad (8-176)$$

Уравнение (8-176) удобно записать в следующей форме:

$$\frac{d^3 \Gamma}{d\xi^3} - b \Gamma = 0, \quad (8-177)$$

где

$$\Gamma = \frac{dw}{dy}, \quad \xi = 1 - \frac{\bar{y}}{l}, \quad b = \frac{a_0 q c l^3}{EI} \sin \Lambda \cos^2 \Lambda.$$

Граничные условия для уравнения (8-177) вытекают из соотношений (8-157), (8-158) и (8-159):

$$\Gamma(1) = 0, \quad \frac{d\Gamma(0)}{d\zeta} = 0, \quad \frac{d^2\Gamma(0)}{d\zeta^2} = 0. \quad (8-178)$$

Уравнение (8-177) является линейным дифференциальным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами и имеет следующее решение:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^3 A_i e^{r_i \zeta}, \quad (8-179)$$

где  $r_1, r_2, r_3$  — корни характеристического уравнения

$$r^3 - b = 0. \quad (8-180)$$

Подставляя решение (8-179) в граничные условия (8-178), получаем

$$\begin{bmatrix} e^{r_1} & e^{r_2} & e^{r_3} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0. \quad (8-181)$$

Для того чтобы  $A$  были конечными величинами, детерминант, составленный из коэффициентов при этих величинах, должен быть равен нулю. Раскрывая этот детерминант, приходим к следующему уравнению:

$$1 + \frac{r_1}{r_2} \left( \frac{r_1 - r_3}{r_3 - r_2} \right) e^{r_3 - r_1} + \frac{r_1}{r_3} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} \right) e^{r_2 - r_1} = 0. \quad (8-182)$$

Допустим теперь, что крыло имеет переднюю стреловидность. В этом случае величина  $b$  отрицательна, так как угол стреловидности  $\Lambda$  отрицателен. Характеристическое уравнение

$$r^3 + |b| = 0 \quad (8-183)$$

имеет следующие корни:

$$r_1 = -\sqrt[3]{|b|}, \quad r_2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\sqrt[3]{|b|}, \quad r_3 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\sqrt[3]{|b|}. \quad (8-184)$$

Подставляя эти корни в уравнение (8-182), получаем трансцендентное уравнение относительно  $|b|$ :

$$e^{-\frac{3}{2}\sqrt[3]{|b|}} + 2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|b|}\right) = 0. \quad (8-185)$$

Решение уравнения (8-185) методом подбора дает для  $|b|$  минимальное значение, равное 6,33. Таким образом, динамическое давление дивергенции однородного крыла со стреловидностью назад, которое может испытывать только деформацию изгиба, равно

$$q_D = \frac{6,33EI}{a_0 c l^3 \cos^2 \Lambda |\sin \Lambda|}. \quad (8-186)$$

Согласно этому соотношению, скорости дивергенции увеличиваются по мере уменьшения передней стреловидности, т. е. по мере уменьшения абсолютной величины  $\Lambda$ , и, когда  $\Lambda$  приближается к нулю, скорость дивергенции приближается к бесконечности. Уравнение (8-186) не может, конечно, применяться к случаю крыльев со стреловидностью назад. Однако из физических соображений можно заключить, что крыло со стреловидностью назад, которое может испытывать только деформацию изгиба, будет иметь бесконечно большую скорость дивергенции.

Интересное и полезное решение уравнений (8-164) и (8-165), определяющих дивергенцию крыла, было получено Дидерихом и Будянским [8-17] для тонких трапециевидных крыльев. В этом случае принималось, что хорда крыльев менялась по размаху по линейному закону, а изгибная и крутильная жесткости были пропорциональны четвертой степени хорды. Согласно этим допущениям, можно принять

$$\bar{c} = \xi \bar{c}_R, \quad \bar{e} = \bar{e}_1 \bar{c}, \quad GJ = GJ_R \xi^4, \quad EI = EI_R \xi^4, \quad (8-187)$$

где

$$\xi = 1 - (1 - \lambda) \bar{y}/\bar{l},$$

$$\lambda = \bar{c}_T/\bar{c}_R, \text{ сужение,}$$

$\bar{c}_T$  — концевая хорда крыла,

$\bar{c}_R$  — корневая хорда крыла,

$GJ_R$  — крутильная жесткость у корня крыла,

$EI_R$  — изгибная жесткость у корня крыла.

Полагая правые части уравнений (8-164) и (8-165) равными нулю и подставляя туда  $\bar{c}_i^e$  из уравнения (8-168), получаем

$$\frac{d^2}{d\bar{y}^2} \left( EI \frac{d\Gamma}{d\bar{y}} \right) - a_0 q \bar{c} \cos^2 \Lambda (\bar{\theta} - \Gamma \operatorname{tg} \Lambda) = 0, \quad (8-188)$$

$$\frac{d}{d\bar{y}} \left( GJ \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{y}} \right) + a_0 q \bar{c} \bar{e} \cos^2 \Lambda (\bar{\theta} - \Gamma \operatorname{tg} \Lambda) = 0, \quad (8-189)$$

где

$$\Gamma = \frac{dw}{d\bar{y}}.$$

Переходя в уравнениях (8-188) и (8-189) к независимой переменной  $\xi$ , имеем

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left( EI \frac{d\Gamma}{d\xi} \right) + \frac{a_0 q \bar{c} \bar{l}^3 \cos^2 \Lambda}{(1 - \lambda)^3} (\bar{\theta} - \Gamma \operatorname{tg} \Lambda) = 0, \quad (8-190)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( GJ \frac{d\bar{\theta}}{d\xi} \right) + \frac{a_0 q \bar{e} \bar{c} \bar{l}^2 \cos^2 \Lambda}{(1 - \lambda)^2} (\bar{\theta} - \Gamma \operatorname{tg} \Lambda) = 0. \quad (8-191)$$

Если подставить сюда величины (8-187), определяющие свойства сужающегося крыла, то совместные дифференциальные уравнения можно записать в виде

$$\operatorname{tg} \Lambda \left[ \xi^3 \frac{d^3 \Gamma}{d\xi^3} + 8\xi^2 \frac{d^2 \Gamma}{d\xi^2} + 12\xi \frac{d\Gamma}{d\xi} - b\Gamma \right] + b\bar{\theta} = 0, \quad (8-192)$$

$$\xi^2 \frac{d^2 \bar{\theta}}{d\xi^2} + 4\xi \frac{d\bar{\theta}}{d\xi} + a\bar{\theta} - a\Gamma \operatorname{tg} \Lambda = 0, \quad (8-193)$$

где

$$a = \frac{q a_0 \bar{e}_1 \bar{c}_R^2 \bar{l}^2 \cos^2 \Lambda}{GJ_R (1 - \lambda)^2}, \quad b = \frac{q a_0 \bar{c}_R \bar{l}^3 \cos^2 \Lambda \operatorname{tg} \Lambda}{EI_R (1 - \lambda)^3}.$$

Эти два дифференциальных уравнения можно свести к одному уравнению. Для этого нужно уравнение (8-193) проинтегрировать по  $\xi$ , умножить его на  $\xi$  и объединить получающееся уравнение с уравнениями (8-192) и (8-193). В результате получим следующее дифференциальное уравнение Эйлера:

$$\xi^3 \frac{d^3 \bar{a}}{d\xi^3} + 8\xi^2 \frac{d^2 \bar{a}}{d\xi^2} + (12 + a)\xi \frac{d\bar{a}}{d\xi} + (2a - b)\bar{a} = 0, \quad (8-194)$$

где

$$\bar{a} = \bar{\theta} - \Gamma \operatorname{tg} \Lambda.$$

Так как дифференциальное уравнение Эйлера является однородным уравнением, то с помощью замены переменной  $\xi = e^t$  оно может быть преобразовано в линейное уравнение с постоянными коэффициентами, которое легко решается. Все преобразование совершается в один прием [8-21], если представить решение этого уравнения в виде следующей суммы:

$$\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^3 B_i \xi^{S_i}, \quad (8-195)$$

где  $S_i$  являются корнями уравнения

$$S^3 + 5S^2 + (6 + a)S + (2a - b) = 0 \quad (8-196)$$

и  $B_i$  — произвольные постоянные. Используя уравнения (8-157), (8-158) и (8-159), получаем граничные условия. Из уравнения (8-157)

$$\bar{\alpha}(1) = \bar{\theta}(1) - \Gamma(1) \operatorname{tg} \Lambda = 0. \quad (8-197)$$

Из уравнения (8-158)

$$\frac{d\bar{\alpha}(\lambda)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} (\bar{\theta}(\lambda) - \Gamma(\lambda) \operatorname{tg} \Lambda) = 0. \quad (8-198)$$

Из уравнений (8-158), (8-159) и (8-193)

$$\lambda^2 \frac{d^2 \bar{\alpha}(\lambda)}{d\xi^2} + a \bar{\alpha}(\lambda) = 0. \quad (8-199)$$

Подставляя решение (8-195) в эти три граничных условия, получаем

$$\sum_{i=1}^3 B_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 S_i B_i \lambda^{S_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 [S_i(S_i - 1) + a] B_i \lambda^{S_i} = 0. \quad (8-200)$$

Для того чтобы имела место дивергенция, детерминант, составленный из коэффициентов при  $B_i$ , должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ S_1 \lambda^{S_1} & S_2 \lambda^{S_2} & S_3 \lambda^{S_3} \\ (S_1^2 - S_1 + a) \lambda^{S_1} & (S_2^2 - S_2 + a) \lambda^{S_2} & (S_3^2 - S_3 + a) \lambda^{S_3} \end{vmatrix} = 0. \quad (8-201)$$

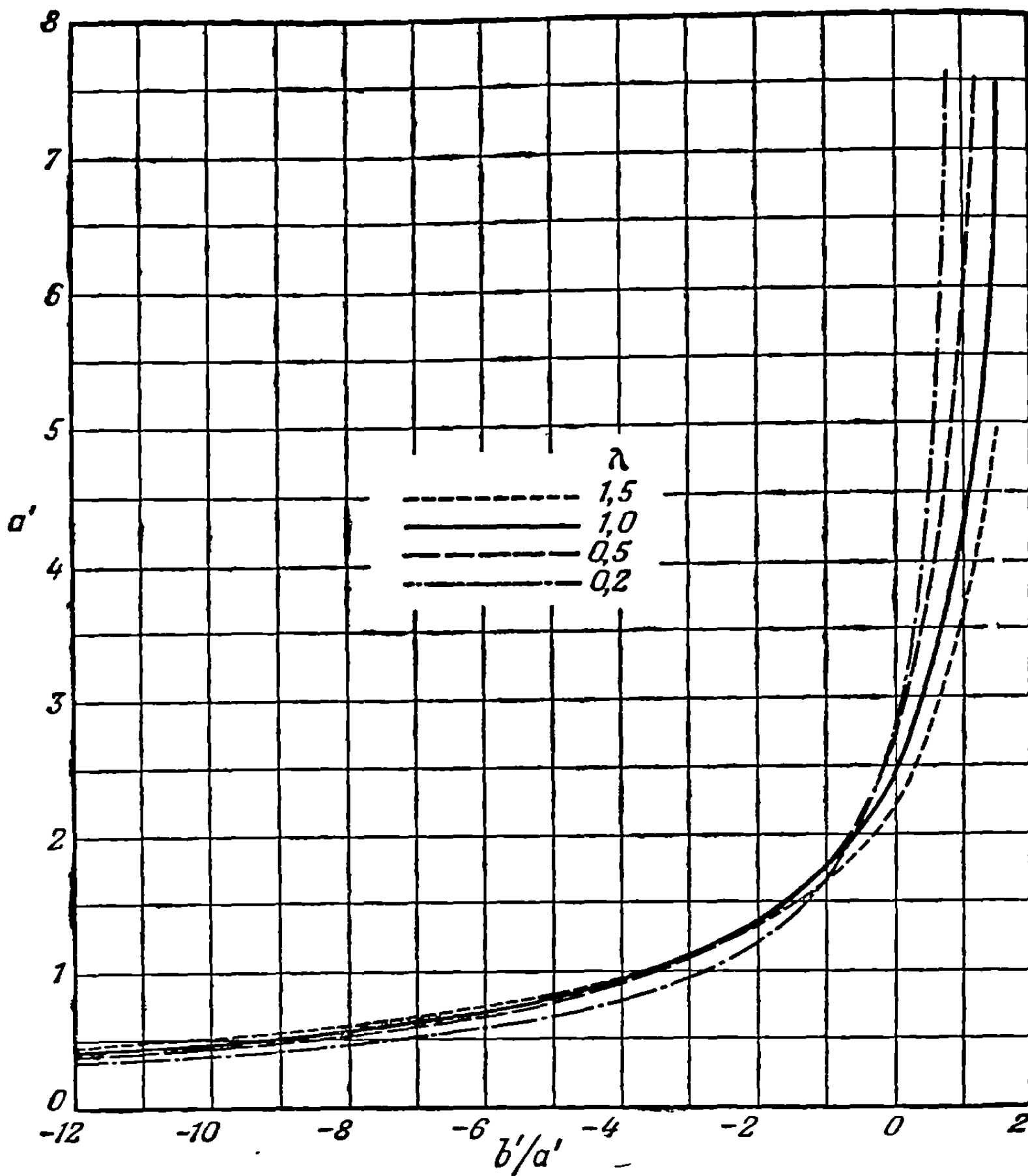
Комбинации параметров  $a$  и  $b$ , соответствующие условию дивергенции, являются комбинациями, соответствующими корням  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  уравнения (8-201). Система была численно решена Дидерихом и Будянским [8-17]. Выбирая значения сужения  $\lambda$ , они задавали значения  $a$  и определяли критические значения  $b$ . Результаты этих расчетов для сужений 0,2, 0,5, 1,0 и 1,5 воспроизведены на фиг. 8-26 а и 8-26 б. Для применения результатов, изображенных на фиг. 8-26 а, нужно вычислить отношение  $b'/a'$ , зависящее от физических характеристик крыла:

$$a' = \frac{q a_0 \bar{e}_1 \bar{c}_R^2 \bar{l}^2 \cos^2 \Lambda}{G J_R}, \quad b' = \frac{q a_0 \bar{c}_R \bar{l}^3 \cos^2 \Lambda \operatorname{tg} \Lambda}{E I_R}. \quad (8-202)$$

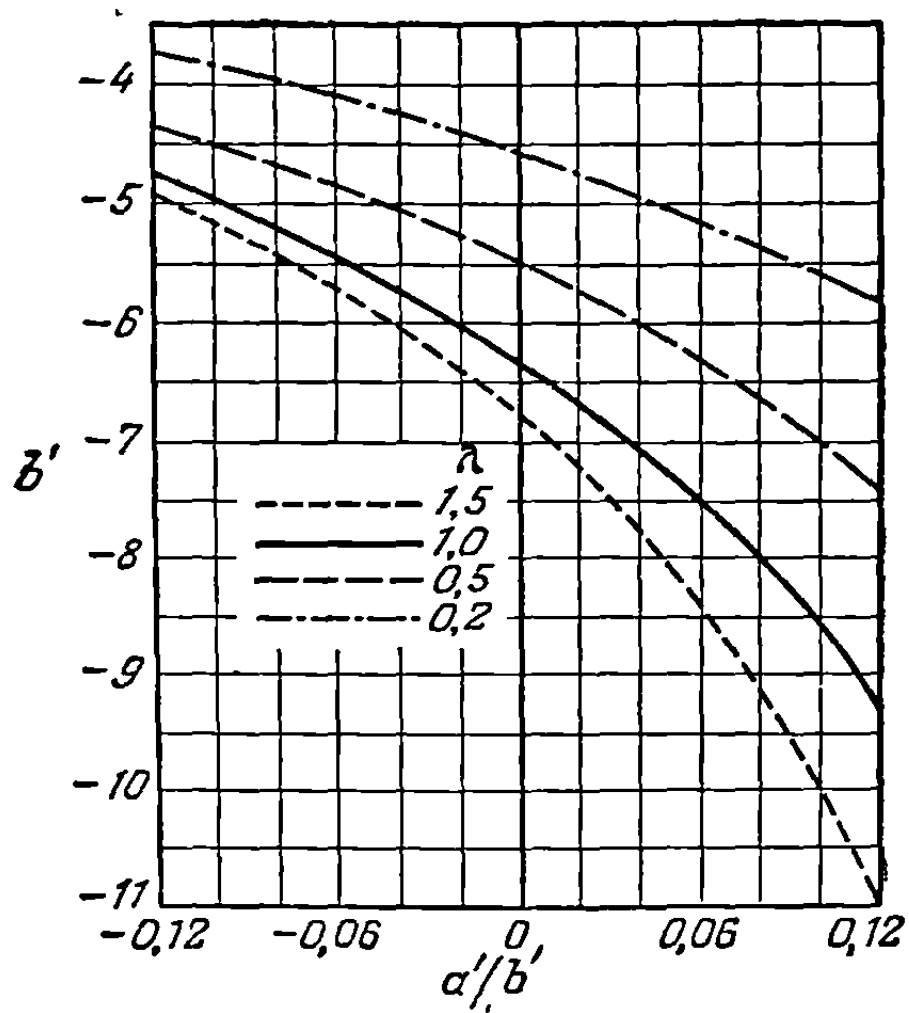
Зная величину  $b'/a'$ , по фиг. 8-26 а можно определить критическую величину  $a'$  и вычислить динамическое давление, соответствующее дивергенции,

$$q_D = \frac{a' G J_R (1 - \lambda)^2}{a_0 \bar{e}_1 \bar{c}_R^2 \bar{l}^2 \cos^2 \Lambda}. \quad (8-203)$$

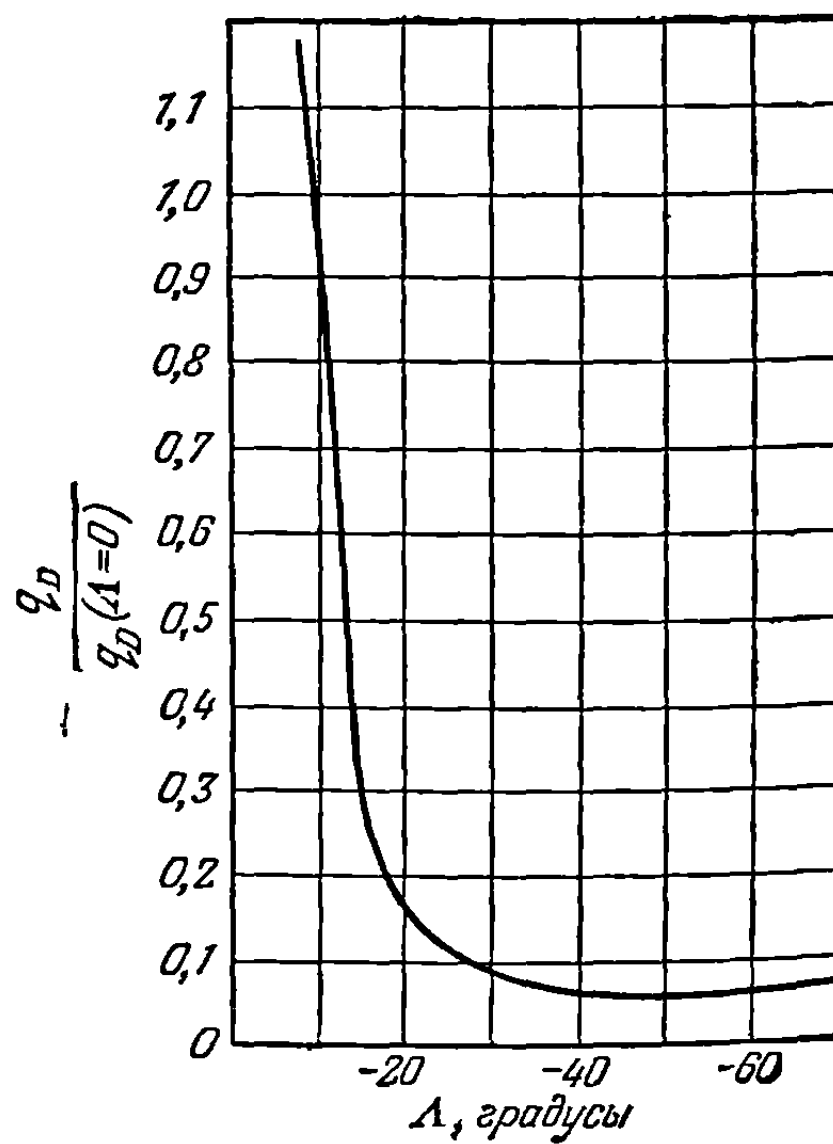
Кривые на фиг. 8-26 а даны в несколько ограниченном интервале переменного  $b'/a'$  применительно к случаю тонких крыльев. Поэтому для больших значений  $b'/a'$  вместо фиг. 8-26 а следует пользоваться фиг. 8-26 б. Если



Фиг. 8-26 а. Малые значения  $b'/a'$  (воспроизводится из NASA Techn. Note No 1680).



Фиг. 8-26 б. Большие значения  $b'/a'$  (воспроизводится из NASA Techn. Note No 1680).



Фиг. 8-26 с. Изменение скорости дивергенции в зависимости от угла стреловидности.



вычисленное значение  $q_D$  оказалось отрицательным, то крыло не может быть подвержено явлению дивергенции, так как отрицательное динамическое давление не соответствует какой-либо реальной скорости.

Из рассмотрения фиг. 8-26 а становится очевидным влияние стреловидности крыла. Увеличение угла передней стреловидности ведет к увеличению отрицательной величины параметра  $b'/a'$ . Это сопровождается быстрым уменьшением параметра  $a'$  и, следовательно, уменьшением скорости дивергенции в том случае, когда остальные параметры остаются постоянными. После определенного значения угла передней стреловидности скорость дивергенции благодаря присутствию члена с  $\cos^2 \Lambda$  в знаменателе уравнения (8-203) имеет тенденцию к увеличению. Если крыло имеет стреловидность назад, то параметр  $b'/a'$  положителен и соответствующее значение  $a'$  очень быстро увеличивается. Фиг. 8-26 а указывает, что при значениях  $b'/a'$ , больших 2, крыло при дозвуковых скоростях не может быть подвержено явлению дивергенции.

Полученные результаты можно уточнить, если использовать эффективный угол наклона касательной подъемной силы, исправленный на конечность размаха. Для дозвуковых и докритических чисел Маха Дидерих и Будянский [8-17] предложили следующую эмпирическую поправку, зависящую от удлинения и угла стреловидности:

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = a_0 \frac{\lambda}{\lambda + 4 \cos \Lambda}. \quad (8-203a)$$

Пример 8-5. Вычислить изменение скорости дивергенции от угла стреловидности сужающегося крыла со следующими свойствами:

$$\lambda = 0,5, \quad \frac{\bar{l}}{e_1 c_R} = 70, \quad \frac{GJ_R}{EI_R} = 1.$$

В качестве первого приближения пренебречь изменением  $a_0$  и  $\bar{e}_1$  со скоростью.

Решение. Применяя уравнение (8-203), можно вычислить скорость дивергенции в функции скорости дивергенции крыла при нулевой стреловидности

$$q_D = q_D (\Lambda = 0) \frac{a'(\Lambda)}{a'(\Lambda = 0)} \frac{1}{\cos^2 \Lambda}. \quad (a)$$

Из фиг. 8-26 а для сужения 0,5 получим  $a'(\Lambda = 0) = 2,7$ . Величина  $a'(\Lambda)$  определяется из фиг. 8-26 а по соответствующим значениям  $b'/a'$ :

$$\frac{b'}{a'} = \frac{l}{\bar{e}_1 c_R} \frac{GJ_R}{EI_R} \operatorname{tg} \Lambda = 70 \operatorname{tg} \Lambda. \quad (b)$$

Изменение скорости дивергенции от угла стреловидности изображено на фиг. 8-26 с. Из этой фигуры видно, что передняя стреловидность оказывает заметное влияние в смысле уменьшения скорости дивергенции. При угле передней стреловидности в  $45^\circ$  величина скорости дивергенции составляет только  $5\%$  от соответствующей скорости при нулевой стреловидности. С другой стороны, стреловидность назад в несколько градусов является причиной быстрого увеличения скорости дивергенции до бесконечности.

(2) Решения для стреловидных крыльев произвольной формы в плане и произвольной жесткости в интегральной и матричной форме. Интегральную форму уравнений, подходящую к задаче о дивергенции стреловидного крыла, можно получить, если взять однородную форму уравнения (8-170):

$$\theta(y) = q \int_0^l \bar{C}(y, \eta) c c_i^e d\eta, \quad (8-204)$$

где  $\bar{C}(y, \eta)$  определяется уравнением (8-172), а функциональная зависимость между углом атаки и коэффициентом подъемной силы представлена уравнением (8-173). Так как  $\bar{C}(y, \eta)$  не является симметричной функцией, то в данном случае нельзя с уверенностью сказать, что уравнение (8-204) имеет

действительные характеристические значения. Эти значения могут быть комплексными или могут вовсе не существовать. В несамосопряженных задачах нет полной ясности относительно условий существования действительных характеристических значений. Когда действительные характеристические значения существуют, то, как показывают эксперименты, решения краевой задачи, даваемые формулой (8-204), приводят к физически правильным результатам. В тех задачах, в которых рассматриваются неоднородные крылья, из уравнений (8-204) и (8-173) можно получить следующие характеристические уравнения в матричной форме:

$$[A] \{cc_i^e\} = q [\bar{E}] \{cc_i^e\}, \quad (8-205)$$

где

$[A]$  — матрица аэродинамических коэффициентов влияния для симметричной и антисимметричной нагрузки на стреловидное крыло,

$$[\bar{E}] = [\bar{C}] \left[ \frac{\bar{W}}{\bar{c}} \right],$$

$[C] = [C^{\theta z}] + [C^{\theta \theta}] \left[ \frac{e}{\bar{c}} \right]$  — матрица коэффициентов упругого влияния.

Поскольку форма дивергенции крыла может быть симметричной и антисимметричной, аэродинамическая матрица  $[A]$  может представлять симметричное и антисимметричное распределения подъемной силы. В гл. 5 мы видели, что с помощью уточненной теории несущей линии можно приближенно учесть аэродинамическую индукцию вдоль размаха крыла. Из таких уточненных теорий наиболее подходящей является теория Вейссингера, и поэтому матрица  $[A]$  вычисляется по уравнению (5-195). В результаты теории несущей полосы можно внести эмпирическую поправку. В этом случае аэродинамическая матрица равна

$$[A] = \frac{1}{dC_L/d\alpha} \left[ \frac{1}{c} \right], \quad (8-206)$$

где  $dC_L/d\alpha$  — эффективный наклон кривой подъемной силы для трехмерного течения, определяемый формулой (5-224). В этом последнем случае скорости симметричной и антисимметричной форм дивергенции не отличаются друг от друга.

(3) Решения, определяемые присоединенными интегральными уравнениями. При исследовании возможных решений уравнения (8-204) следует упомянуть о присоединенных интегральных уравнениях. Для того чтобы было проще использовать эту идею, преобразуем уравнение (8-204), применив теорию несущей полосы к случаю крыла с передней стреловидностью, которое может свободно изгибаться без закручивания. Другими словами, в выражении для  $\bar{C}(y, \eta)$ , определяемом равенством (8-172), положим

$$e = 0$$

и

$$c_i^e = a_0 \theta \cos \Lambda.$$

С учетом этих упрощающих допущений уравнение (8-204) примет вид

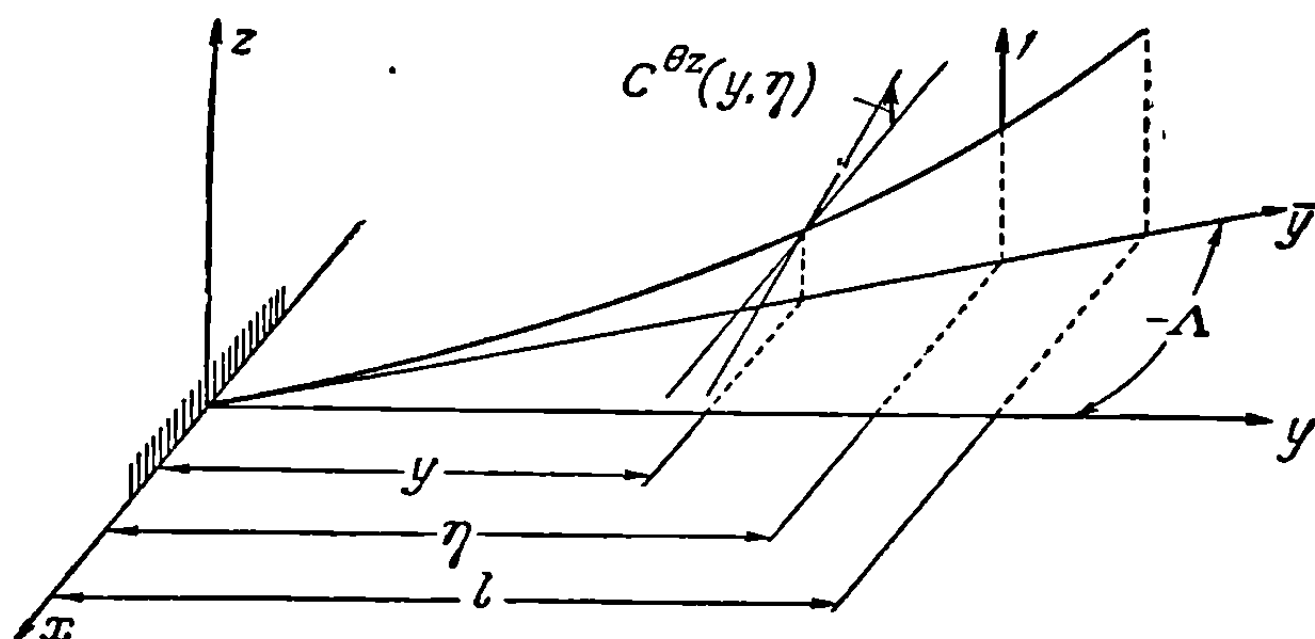
$$\theta(y) = qa_0 \cos \Lambda \int_0^l C^{\theta z}(y, \eta) \theta c d\eta, \quad (8-207)$$

где  $C^{\theta z}(y, \eta)$  определяется формулами (2-130) и (2-131).

Однородное уравнение

$$\omega(y) = qa_0 \cos \Lambda \int_0^l C^{\theta z}(\eta, y) \omega c d\eta \quad (8-208)$$

является интегральным уравнением, присоединенным к уравнению (8-207). Заметим, что ядро уравнения (8-208) получено из ядра уравнения (8-207) перемещением ролей аргументов  $y$  и  $\eta$ . Существуют полезные математические соотношения между решениями уравнений (8-207) и (8-208). Прежде чем вывести эти соотношения, желательно выяснить физический смысл уравнения (8-208) и его связь с уравнением (8-207). Для этого исследуем свойства ядра интегрального уравнения (8-207). Функция  $C^{\theta z}(y, \eta)$  в уравнении (8-207) дает угол закручивания в плоскости течения в сечении с координатой  $y$ , обусловленный единичной подъемной силой, приложенной в точке  $\eta$  упругой оси, что схематически



Фиг. 8-27. Схематическое представление функции влияния стреловидного крыла.

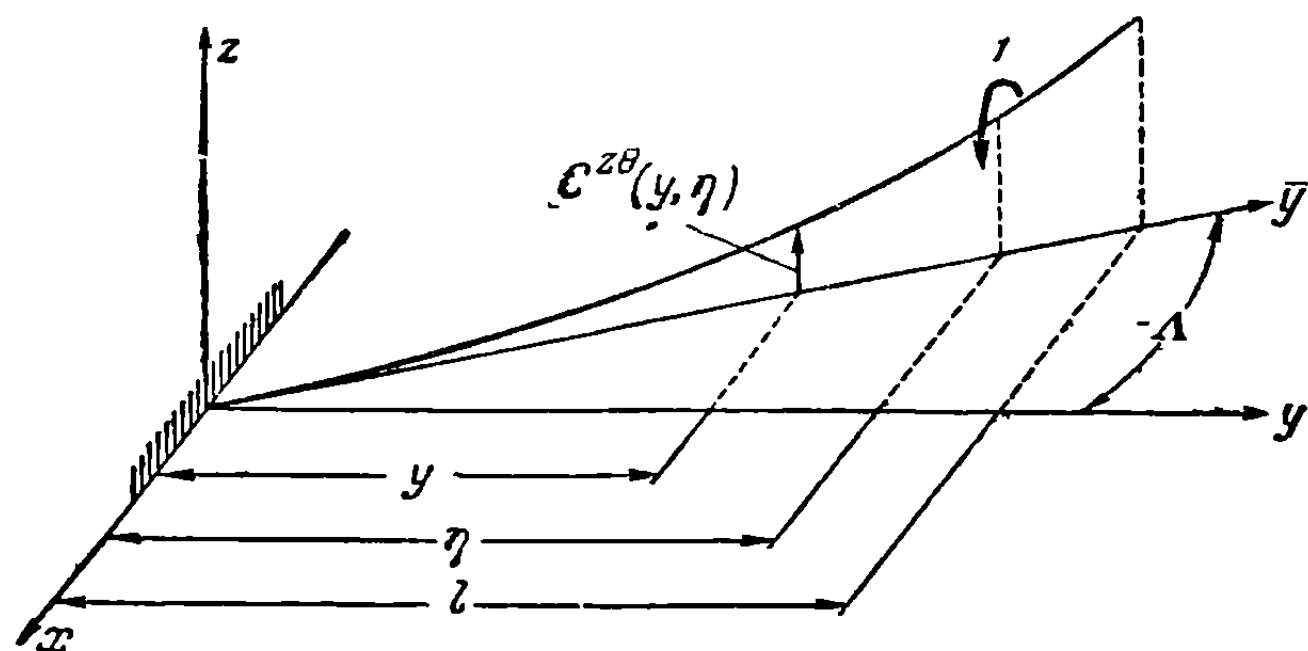
изображено на фиг. 8-27. Если в функции  $C^{\theta z}(y, \eta)$  поменять местами  $y$  и  $\eta$ , то, согласно свойству обратимости упругих систем, новое ядро может быть выражено в виде

$$C^{\theta z}(\eta, y) = C^{z\theta}(y, \eta). \quad (8-209)$$

Таким образом, присоединенное интегральное уравнение можно записать в форме

$$w(y) = qa_0 \cos \Lambda \int_0^l C^{z\theta}(y, \eta) w c d\eta, \quad (8-210)$$

где ядро  $C^{z\theta}(y, \eta)$  представляет линейное перемещение упругой оси в точке  $y$ , обусловленное единичным крутящим моментом, приложенным в плоскости течения в точке  $\eta$  упругой оси, что схематически изображено на фиг. 8-28.



Фиг. 8-28. Схематическое представление функции влияния присоединенной задачи.

Фиг. 8-27 и 8-28 иллюстрируют, таким образом, сопряженный характер интегрального уравнения и соответствующего ему присоединенного уравнения. При этом уравнение (8-207) определяет угол закручивания в плоскости течения, обусловленный текущей подъемной силой, пропорциональной местному

углу закручивания, а присоединенное уравнение (8-210) определяет линейную деформацию упругой оси за счет текущего крутящего момента, действующего в плоскости течения и пропорционального местной деформации упругой оси. Легко видеть, что если бы  $C^{\theta z}(y, \eta)$  была симметричной функцией, обе задачи были бы идентичны. В этом случае система называется самосопряженной.

Возможно, что самым важным математическим соотношением, связывающим уравнения (8-207) и (8-210), является связь их собственных значений. С помощью теории сопряженных интегральных уравнений можно показать [8-22], что если  $q_D$  есть динамическое давление дивергенции, вычисленное из уравнения (8-207), то то же самое значение для  $q_D$  получается из сопряженного уравнения (8-210). Такое соответствие имеет место не только для наименьшего собственного значения, но также и для всех других собственных значений.

Второе полезное математическое соотношение между двумя уравнениями касается ортогональности их собственных функций. Допустим, что два различных собственных значения  $\lambda_i$  и  $\lambda_j$  соответствуют собственным функциям  $\Theta_i$  и  $\Theta_j$  в уравнении (8-207) и  $W_i$  и  $W_j$  в уравнении (8-210). Так как  $C^{\theta z}(y, \eta)$  и  $C^{z\theta}(y, \eta)$  не являются симметричными функциями, то очевидно, что две различные собственные функции одного и того же уравнения не могут быть ортогональными, т. е.

$$\int_0^l \Theta_i \Theta_j c \, dy \neq 0 \quad (i \neq j), \quad (8-211a)$$

$$\int_0^l W_i W_j c \, dy \neq 0 \quad (i \neq j). \quad (8-211b)$$

Однако можно показать, что различные функции присоединенного уравнения являются ортогональными. Запишем уравнения (8-207) и (8-208) в следующей форме ( $\lambda_i$  и  $\lambda_j$  два различных собственных значения):

$$\Theta_i(y) = \lambda_i \int_0^l C^{\theta z}(y, \eta) \Theta_i c \, d\eta, \quad (8-212a)$$

$$W_j(y) = \lambda_j \int_0^l C^{z\theta}(y, \eta) W_j c \, d\eta. \quad (8-212b)$$

Умножим уравнение (8-212a) на  $W_j c$  и проинтегрируем от нуля до  $l$ , затем умножим уравнение (8-212b) на  $\Theta_i c$  и также проинтегрируем от нуля до  $l$ . Вычитая теперь второе уравнение из первого, получаем

$$\begin{aligned} (\lambda_j - \lambda_i) \int_0^l \Theta_i W_j c \, dy &= \lambda_i \lambda_j \int_0^l W_j c \int_0^l C^{\theta z}(y, \eta) \Theta_i c \, d\eta - \\ &\quad - \lambda_i \lambda_j \int_0^l \Theta_i c \int_0^l C^{z\theta}(y, \eta) W_j c \, d\eta. \end{aligned} \quad (8-213)$$

Если во втором члене поменять местами  $y$  и  $\eta$  и применить уравнение (8-209), то оба интеграла в правой части погашают друг друга. Таким образом, получим условие ортогональности

$$\int_0^l \Theta_i W_j c \, dy = 0 \quad (i \neq j). \quad (8-214)$$

Собственные функции, подобные  $\Theta(y)$  и  $W(y)$ , соответствующие некоторой системе уравнений и системе, сопряженной с ней, иногда называются биортонормальными функциями.

Если уравнения (8-207) и (8-210) записать в матричной форме, то получим следующую пару сопряженных матричных уравнений

$$\{\theta\} = qa_0 \cos \Lambda [C^{\theta z}] [\underline{c}] [\overline{W}] \{\theta\}, \quad (8-215a)$$

$$\{w\} = qa_0 \cos \Lambda [C^{z\theta}] [\underline{c}] [\overline{W}] \{w\}. \quad (8-215b)$$

Матрица коэффициентов упругого влияния  $[C^{z\theta}]$  в уравнении (8-215b) является матрицей, транспонированной из матрицы коэффициентов упругого влияния  $[C^{\theta z}]$ , входящей в уравнение (8-215a). Собственные значения обоих матричных уравнений являются идентичными. Однако собственные функции этих уравнений, как было указано выше, имеют различный физический смысл.

Несмотря на то, что сформулированные выше математические соотношения были выведены ради простоты для случая тонкого стреловидного крыла, которое может только изгибаться, те же самые методы можно распространить на более общий случай, в котором учитывается действие кручения.

**Пример 8-6.** По теории несущей полосы, применяя уравнения (8-215a) и (8-215b), вычислить динамическое давление дивергенции однородного крыла с передней стреловидностью.

**Решение.** К характеристическим значениям совместных уравнений (8-215a) и (8-215b) нужно применить метод итерации матриц. Так как хорда постоянна, уравнение (8-215a) можно записать в виде

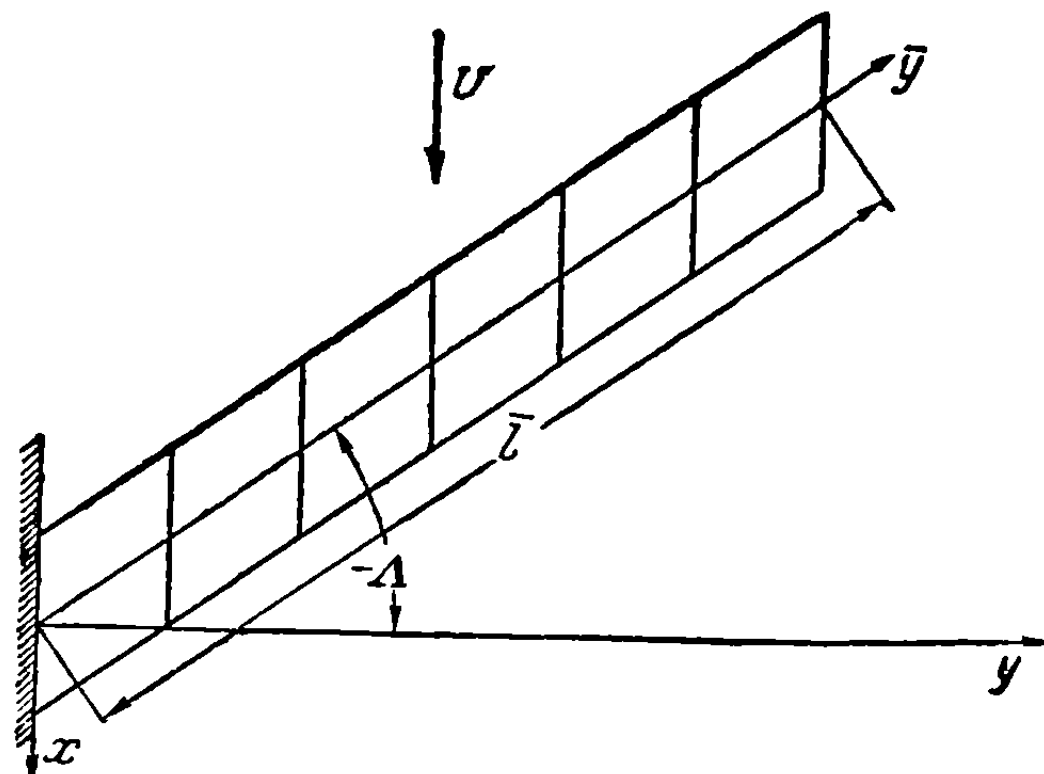
$$\{\theta\} = qa_0 c \cos \Lambda [C^{\theta z}] [\overline{W}] \{\theta\}. \quad (a)$$

Крыло, как показано на фиг. 8-29, разделено на шесть равных участков. Матрицу коэффициентов влияния  $[C^{\theta z}]$ , соответствующую семи сечениям крыла, можно вычислить по уравнениям (2-130) и (2-131). В результате получим

$$[C^{\theta z}] = \frac{\bar{l}^2}{EI} |\sin \Lambda| [n], \quad (b)$$

где

$$[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7 \cdot 2} & \frac{3}{7 \cdot 2} & \frac{5}{7 \cdot 2} & \frac{7}{7 \cdot 2} & \frac{9}{7 \cdot 2} & \frac{1}{7 \cdot 2} \\ 0 & & \frac{1}{1 \cdot 8} & \frac{2}{1 \cdot 8} & \frac{3}{1 \cdot 8} & \frac{4}{1 \cdot 8} & \frac{5}{1 \cdot 8} \\ 0 & & & \frac{3}{2 \cdot 4} & \frac{5}{2 \cdot 4} & \frac{7}{2 \cdot 4} & \frac{9}{2 \cdot 4} \\ 0 & & & & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & & & & & \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 2} & \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 2} \\ 0 & & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (c)$$



Фиг. 8-29. Однородное крыло с передней стреловидностью, разделенное на шесть равных участков.

Так как число равных участков четное, то для вычисления матриц весовых чисел можно использовать правило Симпсона (см. приложение В):

$$[\overline{W}] = \frac{\bar{l} \cos \Lambda}{18} [n'], \quad (d)$$

где

$$[n'] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 4 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 4 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 4 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (e)$$

Подставляя приведенные выше выражения для  $[C^{bz}]$  и  $[\overline{W}]$  в уравнение (а), получаем

$$\frac{18EI}{q a_0 c \bar{l}^3 \cos^2 \Lambda |\sin \Lambda|} \{\theta\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05555 & 0,08333 & 0,2778 & 0,1944 & 0,500 & 0,1528 \\ 0 & 0,05555 & 0,1111 & 0,4444 & 0,3333 & 0,8889 & 0,2778 \\ 0 & 0,05555 & 0,1111 & 0,5000 & 0,4167 & 1,167 & 0,3750 \\ 0 & 0,05555 & 0,1111 & 0,5000 & 0,4444 & 1,333 & 0,4444 \\ 0 & 0,05555 & 0,1111 & 0,5000 & 0,4444 & 1,389 & 0,4861 \\ 0 & 0,05555 & 0,1111 & 0,5000 & 0,4444 & 1,389 & 0,5000 \end{bmatrix} \{\theta\}. \quad (f)$$

В результате процесса итерации этого матричного уравнения получим следующее собственное значение и собственную функцию

$$\frac{18EI}{q_D a_0 c \bar{l}^3 \cos^2 \Lambda |\sin \Lambda|} = 2,843; \quad \{\theta_1\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4076 \\ 0,6923 \\ 0,8689 \\ 0,9610 \\ 0,9951 \\ 1,000 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, динамическое давление дивергенции будет равно

$$q_D = \frac{6,33EI}{a_0 c \bar{l}^3 \cos^2 \Lambda |\sin \Lambda|}, \quad (g)$$

что согласуется с результатами, полученными выше [см. выражение (8-186)].

Присоединенное матричное уравнение для случая крыла постоянной хорды выводится из уравнения (8-215b):

$$\{w\} = q a_0 c \cos \Lambda [C^{z\theta}] [\overline{W}] \{w\}. \quad (h)$$

Матрицу  $[C^{z\theta}]$  в уравнении (h) можно получить из матрицы, транспонированной из матрицы  $[C^{bz}]$  и приведенной выше. Матрица весовых чисел также определяется матрицей (с). Составляя присоединенное матричное уравнение и применяя метод итерации матриц, получим следующее собственное значение и собственную функцию:

$$\frac{18EI}{q_D a_0 c \bar{l}^3 \cos^2 \Lambda |\sin \Lambda|} = 2,843; \quad \{W_1\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,03099 \\ 0,1234 \\ 0,2753 \\ 0,4803 \\ 0,7281 \\ 1,000 \end{bmatrix}.$$

Мы видим, что численная величина собственного значения для самой системы и системы присоединенной является одинаковой. Собственные функции обеих систем, представленные столбцовыми матрицами, будут, очевидно, различными, поскольку они имеют различный физический смысл.

(е) *Симметричное распределение подъемной силы.* При симметричном распределении подъемной силы по размаху стреловидного крыла влияние аэроупругости при стреловидности назад проявляется в смещении центра давления к корневому сечению крыла и к передней кромке, а при стреловидности вперед — в смещении центра давления от корневого сечения и к передней кромке. Эти явления оказывают большое влияние на продольную устойчивость самолета со стреловидным крылом и важны также и для конструктора при расчете распределений нагрузки по размаху крыла. Аэроупругие свойства стреловидных крыльев в условиях симметричного нагружения можно определить из решений дифференциальных и интегральных уравнений, выведенных в п. 8-4 (а), (б) и (с).

(1) *Решение дифференциальных уравнений тонких стреловидных крыльев в замкнутой форме.* Полезная замкнутая форма решения задачи о симметричном нагружении однородных тонких стреловидных крыльев была дана Дидерихом и Фоссом в [8-23]. Они дали точное решение совместных неоднородных уравнений (8-164) и (8-165) для случая однородного крыла и теории несущей полосы. Если подставить выражение (8-168) в уравнения (8-164) и (8-165) и предположить, что изгибная и крутильная жесткости и хорда крыла постоянны, то в результате получим

$$\frac{d^3\bar{\Gamma}}{dy^3} - \frac{a_0 q \bar{c} \cos^2 \Lambda}{EI} (\bar{\theta} - \Gamma \operatorname{tg} \Lambda) = \frac{q \bar{c} \bar{c}_l^r \cos^2 \Lambda - \bar{m} N g}{EI}, \quad (8-216)$$

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dy^2} + \frac{a_0 q \bar{c} e \cos^2 \Lambda}{GJ} (\bar{\theta} - \Gamma \operatorname{tg} \Lambda) = - \frac{q \cos^2 \Lambda (\bar{c} \bar{c}_l^r e + \bar{c}_{m \Delta C} \bar{c}^2) - \bar{m} N g \bar{d}}{GJ}. \quad (8-217)$$

Умножив уравнение (8-216) на  $\operatorname{tg} \Lambda$  и произведя замену независимого переменного по формуле

$$\xi = 1 - \left( \frac{y}{l} \right),$$

получим дифференциальные уравнения в виде

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{d\xi^2} + a (\bar{\theta} - \Gamma \operatorname{tg} \Lambda) = f_1(\xi), \quad (8-218)$$

$$\frac{d^3\bar{\Gamma}}{d\xi^3} \operatorname{tg} \Lambda + b (\bar{\theta} - \Gamma \operatorname{tg} \Lambda) = f_2(\xi), \quad (8-219)$$

где

$$a = \frac{a_0 q \bar{c} e l^2 \cos^2 \Lambda}{GJ}, \quad b = \frac{a_0 q \bar{c} l^3 \sin \Lambda \cos \Lambda}{EI},$$

$$f_1(\xi) = - \frac{q \cos^2 \Lambda (\bar{c} \bar{c}_l^r e + \bar{c}_{m \Delta C} \bar{c}^2) - \bar{m} N g \bar{d}}{GJ l^2},$$

$$f_2(\xi) = - \frac{q \bar{c} \bar{c}_l^r \sin \Lambda \cos \Lambda - \bar{m} N g \operatorname{tg} \Lambda}{EI l^3}.$$

Дифференцируя уравнение (8-218) один раз по  $\xi$  и вычитая из полученного результата уравнение (8-219), получаем

$$\frac{d^3\bar{\alpha}}{d\xi^3} + a \frac{d\bar{\alpha}}{d\xi} - b\bar{\alpha} = f_1'(\xi) - f_2(\xi), \quad (8-220)$$

где

$$\bar{\alpha} = \bar{\theta} - \Gamma \operatorname{tg} \Lambda.$$

Граничные условия для уравнения (8-220) найдем из уравнений (8-157), (8-158) и (8-159). Из уравнения (8-157) имеем

$$\bar{\alpha}(1) = 0. \quad (8-221)$$



Из уравнения (8-158) получаем

$$\frac{d\bar{\alpha}(0)}{d\xi} = 0. \quad (8-222)$$

Из уравнений (8-159) и (8-218) следует:

$$\frac{d^2\bar{\alpha}(0)}{d\xi^2} = -\bar{\alpha}(0) + f_1(0). \quad (8-223)$$

Решения уравнения (8-220) в замкнутой форме могут быть получены для различных случаев заданных распределений подъемной силы по жесткому крылу. Если, например, жесткое крыло не закручено и положение его задано, то функции  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\xi)$  являются постоянными (обозначаемыми соответственно через  $f_1$  и  $f_2$ ), а  $f_1'(\xi)$  равна нулю. В этом случае, как можно проверить [8-23], общее решение уравнения (8-220), удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\bar{\alpha}(\xi) = \frac{f_2}{b} \left[ 1 - \frac{f_3(\xi)}{f_3(1)} \right], \quad (8-224)$$

где

$$f_3(\xi) = \left( \frac{4\beta^2}{9\beta^2 + \gamma^2} \right) e^{-2\beta\xi} + e^{\beta\xi} \left\{ \left( \frac{5\beta^2 + \gamma^2}{9\beta^2 + \gamma^2} \right) \cos \gamma\xi + \left( \frac{3\beta^3 - \beta\gamma^2}{9\beta^2\gamma + \gamma^3} \right) \sin \gamma\xi \right\} \quad (8-225)$$

и  $-2\beta$  и  $\beta \pm i\gamma$  являются корнями характеристического уравнения

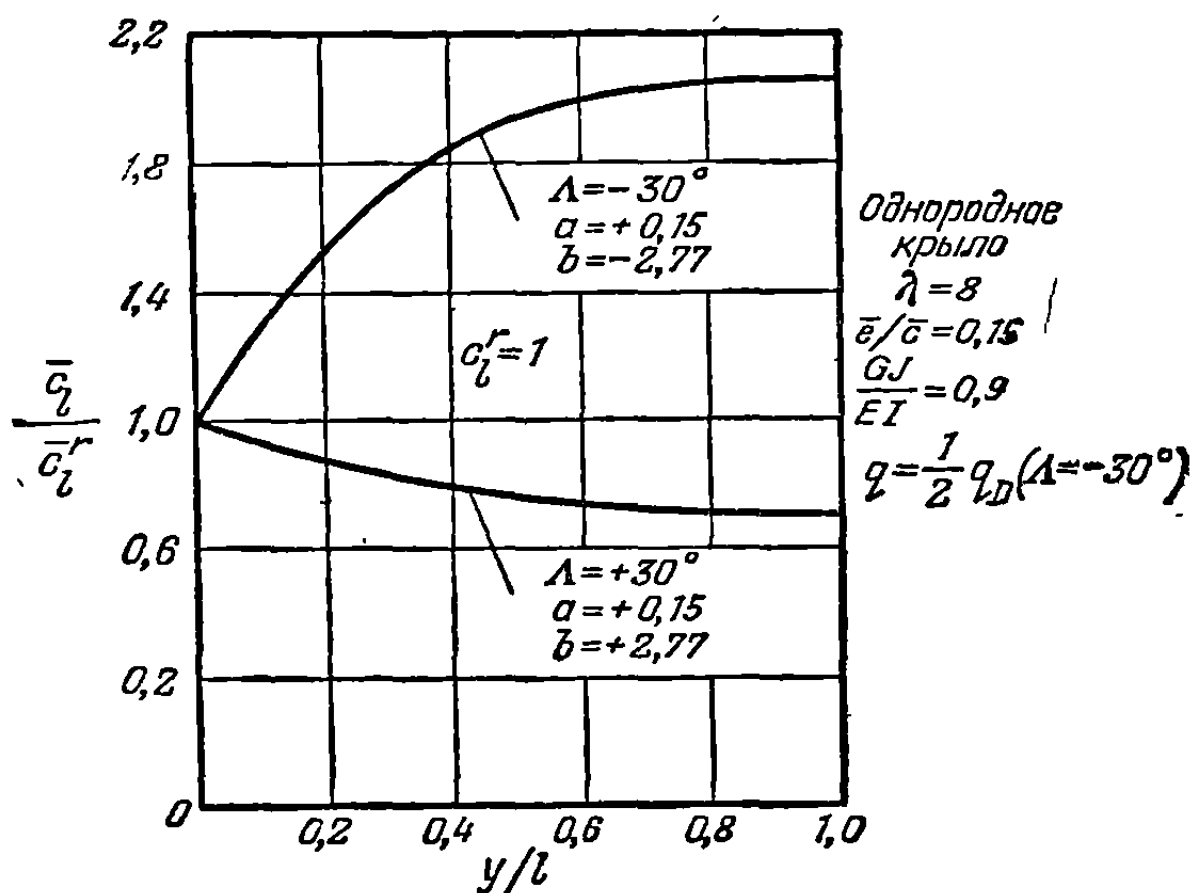
$$r^3 + ar - b = 0. \quad (8-226)$$

Характер результата, определяемого равенством (8-224), можно легко увидеть, если пренебречь инерционными силами. В этом случае коэффициент полной

подъемной силы, отнесенный к коэффициенту подъемной силы жесткого крыла, просто равен

$$\frac{\bar{c}_l}{c_l^r} = \frac{f_3(\xi)}{f_3(1)}. \quad (8-227)$$

Очевидно, что отношение, определяемое равенством (8-227), будет зависеть от корней характеристического уравнения, которые в свою очередь определяются абсолютными величинами постоянных  $a$  и  $b$ . На фиг. 8-30 нанесены для сравнения кривые уравнения (8-227) для гипотетического однородного крыла с углами задней и передней стреловидности в  $30^\circ$ .



Фиг. 8-30. Распределение нагрузки по гипотетическим крыльям с передней и задней стреловидностью.

Предполагается, что в каждом случае динамическое давление на крыло равно половине динамического давления дивергенции крыла с передней стреловидностью. Из этой фигуры становится очевидной роль задней стреловидности в уменьшении аэродинамических нагрузок, обусловленных деформациями, и влияние передней стреловидности на увеличение этих нагрузок.

(2) Матричные формы решений для стреловидных крыльев с произвольной формой в плане и произвольной жесткостью. С помощью интегрального уравнения в форме (8-170) задача о симметричном распределении подъемной

силы может быть сформулирована в матричной форме. Из уравнений (8-170) и (8-173) имеем

$$\mathfrak{A} [cc_i^e] = q \int_0^l \bar{C}(y, \eta) cc_i^e d\eta + \bar{f}(y), \quad (8-228)$$

где  $cc_i^e$  — распределение подъемной силы, соответствующее углу упругого закручивания  $\theta(y)$ , и  $\mathfrak{A}$  — соответствующий линейный аэродинамический оператор, учитывающий аэродинамические эффекты по размаху. В матричной форме уравнение (8-228) будет иметь вид

$$[A^s] \{cc_i^e\} = q [\bar{E}] \{cc_i^e\} + \{\bar{f}\}, \quad (8-229)$$

где

$[A^s]$  — матрица коэффициентов аэродинамического влияния для случая симметричного нагружения стреловидного крыла,

$$\{\bar{f}\} = q [\bar{E}] \{cc_i^r\} + q [\bar{F}] \{c_{mAC}\} - N [\bar{G}] \{mg\},$$

$$[\bar{E}] = ([C^{\theta z}] + [C^{\theta\theta}] \lfloor e \rfloor) \lfloor \bar{W} \rfloor,$$

$$[\bar{F}] = [C^{\theta\theta}] \lfloor c^2 \rfloor \lfloor \bar{W} \rfloor,$$

$$[\bar{G}] = ([C^{\theta z}] + [C^{\theta\theta}] \lfloor d \rfloor) \lfloor \bar{W} \rfloor.$$

Матрица коэффициентов аэродинамического влияния  $[A^s]$ , согласно теории Вейссингера, определяется уравнением (5-195).

Следуя методу, использованному в случае прямого крыла, можно вывести другую форму уравнения (8-229), положив в уравнении (8-229)

$$\{cc_i^e\} = \{cc_i\} - \{cc_i^r\}.$$

В результате получим

$$[A^s] \{cc_i\} = q [\bar{E}] \{cc_i\} + \{\alpha^r\} + q [\bar{F}] \{c_{mAC}\} - N [\bar{G}] \{mg\}, \quad (8-230)$$

где

$$\{\alpha^r\} = [A^s] \{cc_i^r\}.$$

Неизвестными величинами в уравнениях (8-229) и (8-230) являются соответственно столбцевые матрицы  $\{cc_i^e\}$  и  $\{cc_i\}$ . Предполагается, что все остальные величины в каждом уравнении определяются физическими свойствами крыла и условиями задачи точно таким же образом, как и в случае прямого крыла, который описан в п. 8-3 (с) (2). В самом деле, результат п. 8-3 (с) (2) целиком можно перенести также на случай стреловидного крыла, если матрицы  $\{f\}$ ,  $[E]$ ,  $[F]$  и  $[G]$  заменить соответствующими матрицами  $\{\bar{f}\}$ ,  $[\bar{E}]$ ,  $[\bar{F}]$  и  $[\bar{G}]$ , которые были определены в этом параграфе. Например, если положение крыла задано, из уравнения (8-85) следует, что

$$[A^s] \{cc_i\} = q \left( [\bar{E}] - \frac{2}{\bar{W}} [\bar{G}] \{mg\} \lfloor 1 \rfloor \lfloor \bar{W} \rfloor \right) \{cc_i\} + \{\alpha^r\} + q [\bar{F}] \{c_{mAC}\}. \quad (8-231)$$

Уравнение (8-231) можно решить с помощью обращения матриц, а в некоторых случаях с помощью итерации матриц таким же образом, как и уравнение для прямого крыла. Опыт показал, что в том случае, когда угол задней стреловидности значителен, процесс итераций сходится плохо, а в некоторых случаях процесс итераций в действительности может быть даже расходящимся. В общем случае метод обращения матриц является наиболее подходящим методом, который можно применить для вычисления распределения нагрузки по размаху крыла со стреловидностью назад.

Матричное уравнение (8-231) полезно в практических приложениях для определения влияния упругого крыла со стреловидностью назад на характеристики

продольной статической устойчивости. Рассмотрим теперь вопрос о том, как применить уравнение (8-231) для вычисления  $\partial C_L/\partial\alpha$  и  $\partial C_M/\partial\alpha$ . Допустим, что самолет находится в полете и угол атаки крыла получил приращение  $\Delta\alpha$ . Согласно уравнению (8-231), соответствующее изменение в распределении подъемной силы определяется выражением

$$\{\Delta c_{cl}\} = \left( [A^s] - q[\bar{E}] + \frac{2q}{W}[\bar{G}] \{mg\} |_{-1} |_{-} |_{-} [\bar{W}] \right)^{-1} \{\Delta\alpha\}. \quad (8-232)$$

Соответствующее изменение коэффициента подъемной силы крыла получается численным интегрированием

$$\Delta C_L = \frac{2}{S} |_{-1} |_{-} |_{-} [\bar{W}] \{\Delta c_{cl}\}. \quad (8-233)$$

Соответствующее изменение коэффициента момента крыла равно

$$\Delta C_M = - \frac{2 \operatorname{tg} \Lambda}{S(\text{MAC})} |_{-y} |_{-} |_{-} [\bar{W}] \{\Delta c_{cl}\}, \quad (8-234)$$

где  $S$  — площадь крыла и  $\text{MAC}$  — средняя аэродинамическая хорда крыла. В этом случае ради удобства коэффициент момента отнесен к оси  $y$ . Комбинируя уравнения (8-232) и (8-233), получим наклон кривой подъемной силы упругого крыла:

$$\frac{\partial C_L}{\partial\alpha} = \frac{2}{S} |_{-1} |_{-} |_{-} [\bar{W}] \left( [A^s] - q[\bar{E}] + \frac{2q}{W}[\bar{G}] \{mg\} |_{-1} |_{-} |_{-} [\bar{W}] \right)^{-1} \{1\}. \quad (8-235a)$$

Подставляя выражение (8-232) в (8-234), получаем наклон кривой момента упругого крыла:

$$\frac{\partial C_M}{\partial\alpha} = - \frac{2 \operatorname{tg} \Lambda}{S(\text{MAC})} |_{-y} |_{-} |_{-} [\bar{W}] \left( [A^s] - q[\bar{E}] + \frac{2q}{W}[\bar{G}] \{mg\} |_{-1} |_{-} |_{-} [\bar{W}] \right)^{-1} \{1\}. \quad (8-235b)$$

В общем случае влияние аэроупругости проявляется в уменьшении  $\partial C_L/\partial\alpha$  и в дестабилизирующем влиянии на  $\partial C_M/\partial\alpha$ . Последнее обусловлено, конечно, перемещением центра давления вперед, которое сопровождается направленными вверх прогибы крыла со стреловидностью назад. Из формул (8-235a) и (8-235b) видно, что величины  $\partial C_L/\partial\alpha$  и  $\partial C_M/\partial\alpha$  для жесткого крыла можно получить, если положить  $[\bar{E}] = [\bar{G}] = 0$ . Члены, относящиеся к  $[\bar{E}]$  и  $[\bar{G}]$ , входят в уравнения с противоположными знаками, следовательно, эффекты аэроупругости, обусловленные воздушными нагрузками и силами инерции, противоположны друг другу. Отсюда можно заключить, что инерционные нагрузки стремятся уменьшить влияние аэроупругих эффектов на наклон кривых подъемной силы и момента крыла со стреловидностью назад. На это явление было указано Баем и Сирсом в работе [8-18], где приведено несколько иллюстративных численных примеров.

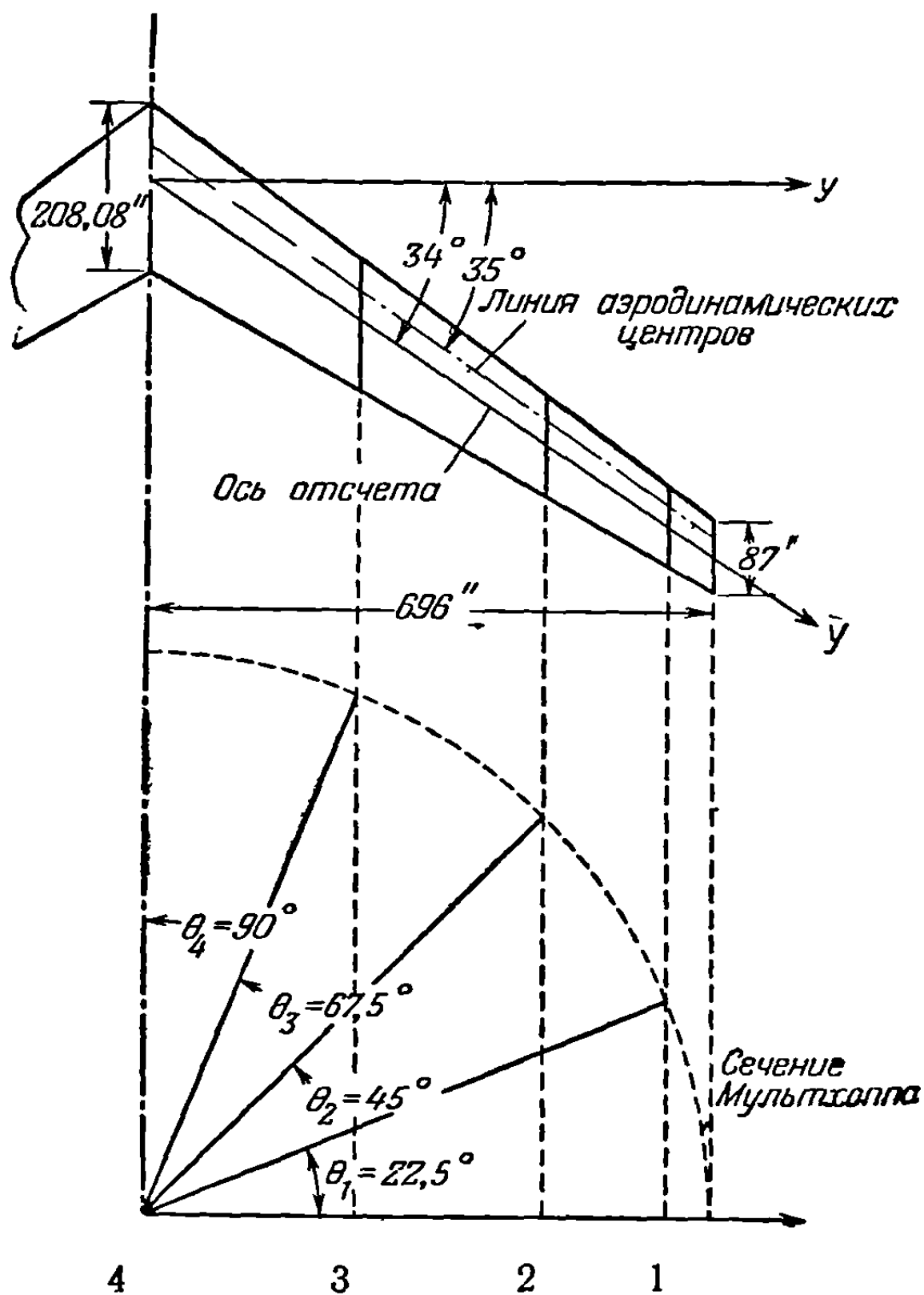
**Пример 8-7.** Самолет с крылом, имеющим заднюю стреловидность, осуществляет симметричный выход из пикирования с перегрузкой  $3g$  при числе Маха 0,8 на высоте 27 000 футов. Рассчитать распределение подъемной силы по размаху крыла. Для подсчета распределения подъемной силы по жесткому крылу и распределения подъемной силы за счет упругих свойств использовать метод Вейссингера.

**Решение.** Чертеж крыла в плане приведен на фиг. 8-31. Необходимо знание следующих основных характеристик самолета:

размах крыла . . . . .	$2l = 1392$ дюйма;
удлинение . . . . .	$\lambda = 9,43$ ;
полный полетный вес . . . . .	$W = 125\,000$ фунтов;
динамическое давление, соответствующее $M = 0,8$ на высоте 27 000 футов . . . . .	$q = 2,277$ фунт/дюйм <sup>2</sup> ;
угол стреловидности $\Lambda = 34^\circ$ по упругой оси и $35^\circ$ по линии четвертой хорд;	
наклон кривой подъемной силы во всех сечениях равен . . .	$\alpha_0 = 6$ на 1 радиан;
коэффициент момента в плоскости течения для всех сечений $c_{mAC} = -0,01$ .	

Как показано на фиг. 8-31, на размахе крыла выбрано четыре сечения Мультхоппа. Соответствующие данные для этих сечений приведены в таблице:

Сечение Мультхоппа	1	2	3	4
Положение сечения по размаху крыла	0,9239	0,7071	0,3827	0
$EI$ (фунт · дюйм <sup>2</sup> × 10 <sup>9</sup> )	6 998	11,99	41,04	160,1
$GJ$ (фунт · дюйм <sup>2</sup> × 10 <sup>9</sup> )	6,005	10 01	27,50	100 1
$mg$ (фунт/дюйм)	12,562	20,382	31,264	43,45
$c$ (дюйм)	96,24	122,5	161,8	208,1
$e$ (дюйм)	12,50	15,92	21 02	27,05
$d$ (дюйм)	0	0	0	0



Фиг. 8-31. Сечения Мультхоппа для крыла со стреловидностью назад.

Так как коэффициент полной перегрузки на самолет известен, применяем следующую формулу:

$$\begin{bmatrix} [A^s] - q[\bar{E}] & \{-1\} \\ | \_1 \_ | \lfloor \bar{W} \rfloor & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{cc_i^e\} \\ a^e(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\bar{f}\} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (a)$$

где

$$\{\bar{f}\} = q[\bar{E}]\{cc_i^e\} + q[\bar{F}]\{c_{mAC}\} - N[\bar{G}]\{mg\},$$

$$[\bar{E}] = ([C^{0z}] + [C^{00}]\lfloor e \rfloor)\lfloor \bar{W} \rfloor,$$

$$[\bar{F}] = [C^{00}]\lfloor c^2 \rfloor\lfloor \bar{W} \rfloor,$$

$$[\bar{G}] = ([C^{0z}] + [C^{00}]\lfloor d \rfloor)\lfloor \bar{W} \rfloor.$$

Крыло является достаточно тонким для того, чтобы матрицы коэффициентов упругого влияния можно было вычислить с помощью соотношений (2-128) — (2-131):

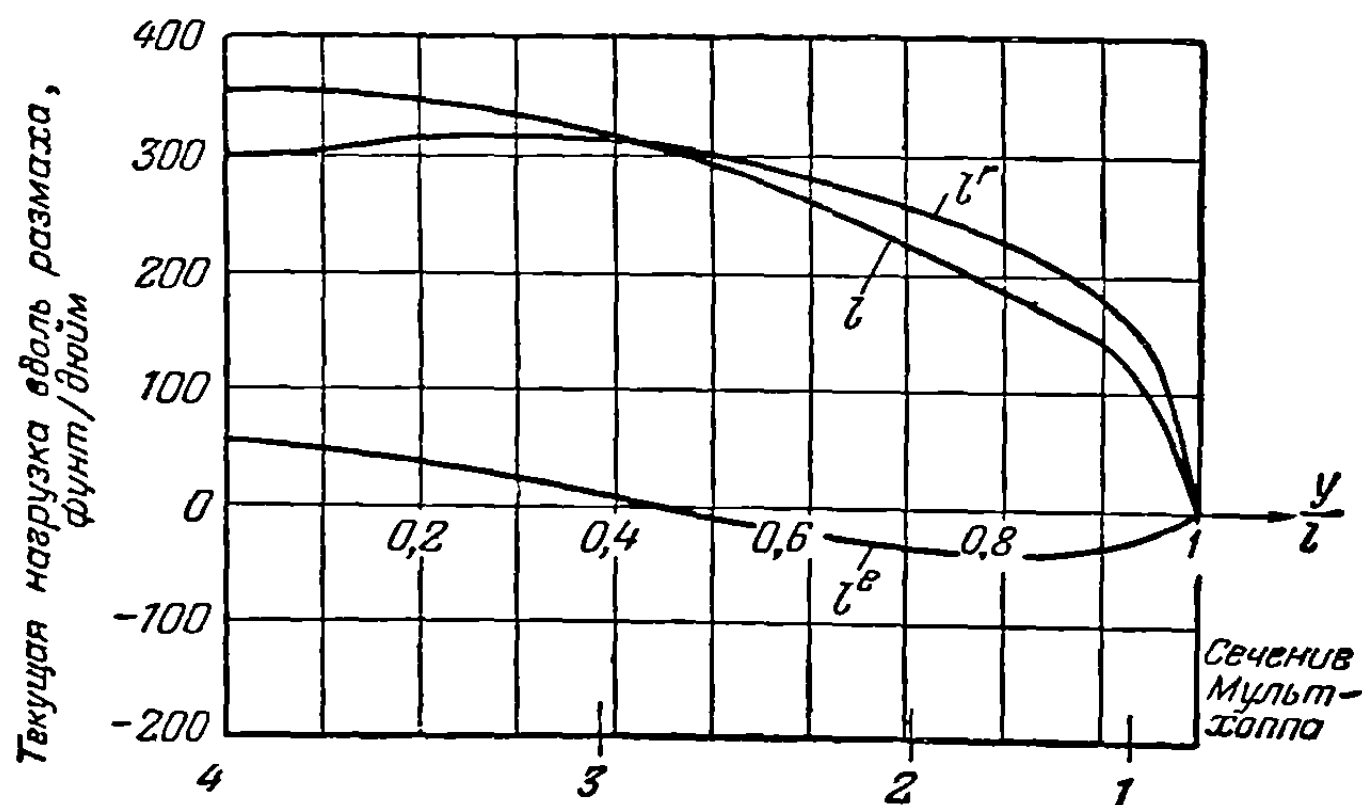
$$[C^{\theta z}] = \begin{bmatrix} -0,4093 & -0,1584 & -0,02586 & 0 \\ -0,3178 & -0,1584 & -0,02586 & 0 \\ -0,1290 & -0,0877 & -0,02586 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \text{ рад/фунт}, \quad (b)$$

$$[C^{\theta \theta}] = \begin{bmatrix} 0,004111 & 0,001897 & 0,000453 & 0 \\ 0,001897 & 0,001897 & 0,000453 & 0 \\ 0,000453 & 0,000453 & 0,000453 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \text{ рад/дюйм} \cdot \text{фунт} \quad (c)$$

Согласно теории Вейссингера, матрицу коэффициентов аэродинамического влияния получим, подставив данные настоящей задачи в равенство (5 195) Поскольку число Маха равно 0,8, необходимо, как это было указано в гл. 5 и 6, сделать соответствующую поправку к матрице Вейссингера

$$[A^s] = \begin{bmatrix} 419,971 & -141,681 & 17,0941 & -16,0165 \\ -27,3168 & 250,158 & -99,4217 & 12,1300 \\ -1,1782 & -23,9116 & 185,711 & -65,5280 \\ -3,1070 & 3,4591 & -59,4864 & 171,074 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \text{ рад/дюйм}. \quad (d)$$

Необходимую матрицу весовых чисел  $[\bar{W}]$  получим, применяя интегральную формулу Мультхоппа. Применение этой формулы исследовано в приложении В, где пока-



Фиг. 8-32. Распределение подъемной силы по крылу со стреловидностью назад.

зано что для частного случая четырех сечений, приведенного на фиг. 8-32, матрица весовых чисел имеет вид

$$[\bar{W}] = \frac{\pi l}{8} \begin{bmatrix} \sin \pi/8 & & & \\ & \sin \pi/4 & & \\ & & \sin 3\pi/8 & \\ & & & \frac{1}{2} \sin \pi/2 \end{bmatrix}, \quad (e)$$

причем для настоящего примера полуразмах  $l = 696$  дюймов.

Матрицы  $[\bar{E}]$ ,  $[\bar{F}]$  и  $[\bar{G}]$ , вычисленные по приведенным выше данным, имеют следующий вид.

$$[\bar{E}] = \begin{bmatrix} -37,434 & -24,7764 & -4,1232 & 0 \\ -30,7608 & -24,7764 & -4,1232 & 0 \\ -12,8964 & -15,5472 & -4,1232 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \text{ рад} \cdot \text{дюйм/фунт}, \quad (f)$$

$$[\bar{F}] = \begin{bmatrix} 3982,32 & 5504,544 & 2995,20 & 0 \\ 1838,16 & 5504,544 & 2995,20 & 0 \\ 439,20 & 1315,152 & 2995,20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \text{ рад} \cdot \text{дюйм}^2 \text{ фунт}, \quad (g)$$

$$[\bar{G}] = \begin{bmatrix} -42,8100 & -30,6120 & -6,5292 & 0 \\ -33,2388 & -30,6120 & -6,5292 & 0 \\ -13,4928 & -16,9488 & -6,5292 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \text{ рад} \cdot \text{дюйм} \text{ фунт}. \quad (h)$$

Для того чтобы вычислить матрицу  $\{\bar{f}\}$ , необходимо установить распределение подъемной силы по жесткому крылу для  $N=3$ . При отсутствии экспериментальных данных для модели жесткого крыла следует использовать теорию Вейссингера. Если принять, что крыло не имеет геометрической и аэродинамической крутки, то можно написать

$$[A^s] \{cc_i^r\} = \alpha^r \{1\}, \quad (i)$$

где  $\alpha^r$  — угол атаки жесткого крыла. Так как интеграл от распределения подъемной силы жесткого крыла должен соответствовать перегрузке, равной 3, то получаем дополнительное условие

$$q \int_1 \int \bar{W} \{cc_i^r\} = \frac{WN}{2}. \quad (j)$$

Из уравнений (i) и (j), исключая  $\{cc_i^r\}$ , получаем выражение для угла атаки

$$\alpha^r = \frac{W'V}{2q} \times \frac{1}{\int_1 \int \bar{W} [A^s]^{-1} \{1\}}. \quad (k)$$

Подставляя сюда значения приведенных выше матриц и численных величин, находим величину угла атаки жесткого крыла

$$\alpha^r = 0,1432 \text{ радиана}. \quad (l)$$

Распределение подъемной силы жесткого крыла определяется по уравнению (i):

$$\{cc_i^r\} = 0,1432 [A^s]^{-1} \{1\} = \begin{bmatrix} 71,818 \\ 113,74 \\ 138,36 \\ 130,83 \end{bmatrix} \text{ дюйма}. \quad (m)$$

Теперь можно определить матрицу  $\{\bar{f}\}$  в виде

$$\{\bar{f}\} = q [\bar{E}] \{cc_i^r\} + q [\bar{F}] \{c_{mAC}\} - N [\bar{G}] \{mg\}, \quad (n)$$

$$\{\bar{f}\} = 2,277 [\bar{E}] \begin{bmatrix} 71,818 \\ 113,74 \\ 138,36 \\ 130,83 \end{bmatrix} + 2,277 [\bar{F}] \begin{bmatrix} -0,01 \\ -0,01 \\ -0,01 \\ -0,01 \end{bmatrix} - 3 [\bar{G}] \begin{bmatrix} 12,562 \\ 20,382 \\ 31,264 \\ 43,450 \end{bmatrix} \quad (o)$$

Подставляя численные значения  $[\bar{E}]$ ,  $[\bar{F}]$  и  $[\bar{G}]$ , приведенные выше, и производя соответствующие вычисления, находим

$$\{\bar{f}\} = \begin{bmatrix} -0,13843 \\ -0,12751 \\ -0,07437 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,00284 \\ -0,00235 \\ -0,00108 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,04097 \\ 0,03737 \\ 0,02157 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1003 \\ -0,09249 \\ -0,05388 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ рад}. \quad (p)$$

Подставляя полученные выше данные в уравнение (a), приходим к следующему матричному уравнению.

$$\begin{bmatrix} 0,005052 & -0,0008525 & 0,000265 & -0,000160 & -1 \\ 0,0004275 & 0,003072 & -0,00090 & 0,0001217 & -1 \\ 0,0002817 & 0,0001150 & 0,00195 & -0,000655 & -1 \\ -0,0000308 & 0,0000342 & -0,000595 & 0,001708 & -1 \\ 104,59 & 193,26 & 252,50 & 136,66 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (cc_i^e)_1 \\ (cc_i^e)_2 \\ (cc_i^e)_3 \\ (cc_i^e)_4 \\ \alpha^e(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1003 \\ -0,09249 \\ -0,05388 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (q)$$

Решая это уравнение методом обращения матриц, получаем

$$\begin{bmatrix} \{cc_i^e\} \\ \alpha^e(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13,948 \\ -15,046 \\ 3,9444 \\ 24,664 \\ 0,039754 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{дюйма} \\ \text{радиана} \end{bmatrix}. \quad (r)$$

Полное распределение подъемной силы получим, сложив  $\{cc_i^e\}$  и  $\{cc_i^r\}$  и умножив результат на динамическое давление  $q$ ,

$$q \{cc_i\} = \begin{bmatrix} 163,58 \\ 259,09 \\ 315,17 \\ 298,02 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -31,768 \\ -34,270 \\ 8,983 \\ 56,177 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 131,81 \\ 224,82 \\ 324,15 \\ 354,20 \end{bmatrix} \text{ фунт/дюйм.} \quad (s)$$

На фиг. 8-32 изображены кривые распределения подъемной силы, обусловленной упругостью крыла, подъемной силы жесткого крыла и распределение полной подъемной силы. Из этих кривых становится очевидным смещение центра давления по размаху к корневому сечению крыла. В настоящем примере, так как взято только 7 сечений Мультхоппа, кривая на фиг. 8-32 вследствие малого числа точек заключает в себе графическую ошибку. Однако отдельное исследование с использованием 15 сечений показало, что приведенные выше результаты близко подходят к точным и вполне удовлетворительным для инженерных целей. Можно отметить, что в настоящем примере  $\alpha^e(0)$  является положительным в противоположность задаче о реактивном транспортном самолете с прямым крылом в примере 8-3, где  $\alpha^e(0)$  было отрицательным.

**Пример 8-8.** Определить влияние упругого крыла со стреловидностью назад на наклоны кривой подъемной силы и кривой момента относительно поперечной оси. Принять, что крыло однородное, и, исходя из теории несущей полосы, вычислить отношения

$$\frac{(\partial C_L / \partial \alpha)_{\text{упругое}}}{(\partial C_L / \partial \alpha)_{\text{жесткое}}} \quad \text{и} \quad \frac{(\partial C_M / \partial \alpha)_{\text{упругое}}}{(\partial C_M / \partial \alpha)_{\text{жесткое}}}$$

при значениях динамического давления, равных половине, и двойной величине динамического давления дивергенции того же самого крыла со стреловидностью вперед. Принять, что крыло может только изгибаться и что инерционные эффекты пренебрежимо малы.

**Решение.** Для того чтобы вычислить отношение наклонов кривых подъемной силы упругого и жесткого крыла, можно использовать уравнение (8-235a) в виде

$$\frac{(\partial C_L / \partial \alpha)_{\text{упругое}}}{(\partial C_L / \partial \alpha)_{\text{жесткое}}} = \frac{\underline{1} \underline{1} \underline{|\Sigma \bar{W} \Sigma|} ([A^s] - q [E])^{-1} \{1\}}{\underline{1} \underline{1} \underline{|\Sigma \bar{W} \Sigma|} [A^s]^{-1} \{1\}}. \quad (a)$$

Аналогично отношение наклонов кривых моментов упругого и жесткого крыльев определяется из уравнения (8-235b):

$$\frac{(\partial C_M / \partial \alpha)_{\text{упругое}}}{(\partial C_M / \partial \alpha)_{\text{жесткое}}} = \frac{\underline{y} \underline{y} \underline{|\Sigma \bar{W} \Sigma|} ([A^s] - q [E])^{-1} \{1\}}{\underline{y} \underline{y} \underline{|\Sigma \bar{W} \Sigma|} [A^s]^{-1} \{1\}}. \quad (b)$$

Так как рассматривается однородное крыло со стреловидностью назад и используется теория несущей полосы, то можно положить

$$[A^s] - q [E] = \frac{1}{a_0 c \cos \Lambda} \underline{1} \underline{1} \underline{|\Sigma \bar{W} \Sigma|} - q_D \left( \frac{q}{q_D} \right) [C^{\theta z}] \underline{|\Sigma \bar{W} \Sigma|}, \quad (c)$$

где  $q_D$  — динамическое давление дивергенции того же самого крыла со стреловидностью вперед.

Если, как показано на фиг. 8-29, крыло по размаху разделено на шесть равных участков, то можно использовать результаты расчета примера 8-6. Таким образом, матрица коэффициентов влияния тонкого крыла со стреловидностью назад, могущего испытывать только деформацию изгиба, равна (со знаком минус) матрице коэффициентов влияния того же самого крыла со стреловидностью вперед, вычисляемой по уравнению (b) в примере 8-6:

$$[C^{\theta z}] = - \frac{\bar{l}^2}{EI} |\sin \Lambda| [n], \quad (d)$$



где матрица чисел  $[n]$  равна матрице  $(c)$  в примере 8-6. Матрица весовых чисел  $[\bar{W}]$ , согласно правилу Симпсона, равна

$$[\bar{W}] = \frac{\bar{l} \cos \Lambda}{18} [n'] \quad (e)$$

где матрица  $[n']$  равна матрице  $(e)$  в примере 8-6.

Подставляя выражения  $(c)$ ,  $(d)$  и  $(e)$  в уравнение  $(a)$  и исключая  $q_D$  с помощью уравнения (8-186), получаем следующее отношение наклонов кривых подъемной силы упругого и жесткого крыльев:

$$\frac{(\partial C_L / \partial \alpha)_{\text{упругое}}}{(\partial C_L / \partial \alpha)_{\text{жесткое}}} = \frac{[1] [n'] \left( [1] + \frac{q/q_D}{2,843} [n] [n'] \right)^{-1} \{1\}}{[1] [n'] [1] \{1\}} \quad (f)$$

Аналогично, подставляя выражения  $(c)$ ,  $(d)$  и  $(e)$  в уравнение  $(b)$  и исключая  $q_D$  с помощью уравнения (8-186), получаем отношение наклонов кривой моментов упругого и жесткого крыльев:

$$\frac{(\partial C_M / \partial \alpha)_{\text{упругое}}}{(\partial C_M / \partial \alpha)_{\text{жесткое}}} = \frac{[y] [n'] \left( [1] + \frac{q/q_D}{2,843} [n] [n'] \right)^{-1} \{1\}}{[y] [n'] [1] \{1\}} \quad (g)$$

Матрица  $[y]$  в уравнении  $(g)$  для семи сечений, изображенных на фиг. 8-29, равна

$$[y] = l \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad (h)$$

Вычисляя отношения  $(f)$  и  $(g)$  последовательно для значений  $q/q_D = \frac{1}{2}$  и 2, получаем следующую таблицу:

	$q/q_D=0$	$q/q_D=\frac{1}{2}$	$q/q_D=2$
$\frac{(\partial C_L / \partial \alpha)_{\text{упругое}}}{(\partial C_L / \partial \alpha)_{\text{жесткое}}}$	1	0,7355	0,4671
$\frac{(\partial C_M / \partial \alpha)_{\text{упругое}}}{(\partial C_M / \partial \alpha)_{\text{жесткое}}}$	1	0,6831	0,3648

Из таблицы становится очевидным уменьшение отношений, обусловленное влиянием аэроупругости. Если принять во внимание инерционные нагрузки, то, как указывалось в предыдущем пункте, это снижающее влияние будет ослаблено.

*(f) Антисимметричное распределение подъемной силы, эффективность и реверс элеронов.* В п. 8-4  $(a)$ ,  $(b)$  и  $(c)$  были выведены уравнения, применимые к общему случаю несимметричного нагружения стреловидного крыла. Если заменить  $c_l^r$ ,  $c_{mAC}$  и  $N$  соответствующими величинами, то эти уравнения могут быть приспособлены к случаю антисимметричного нагружения. Рассмотрим, например, интегральную форму уравнения, которая применяется в случае антисимметричного нагружения стреловидных крыльев произвольной формы в плане и произвольной жесткости. Если в уравнение (8-169) подставить следующие выражения:

$$c_l^r = \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial c_l^r}{\partial (pl/U)} \left( \frac{pl}{U} \right), \quad c_{mAC} = \frac{\partial c_{mAC}}{\partial \beta} \beta, \quad N = \frac{y \dot{p}}{g}, \quad (8-236)$$

то в результате получим

$$\theta(y) = q \int_0^l \bar{C}(y, \eta) c c_l^e d\eta + \bar{f}_a(y), \quad (8-237)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}_a(y) = & q \int_0^l \bar{C}(y, \eta) \left[ c \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} \beta + c \frac{\partial c_l^r}{\partial (pl/U)} \left( \frac{pl}{U} \right) \right] d\eta + \\ & + q \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) \frac{\partial c_{m\Delta O}}{\partial \beta} \beta c^2 d\eta - \dot{p} \int_0^l [C^{\theta z}(y, \eta) + C^{\theta\theta}(y, \eta) d] m \eta d\eta. \end{aligned} \quad (8-238)$$

Если ввести соответствующее соотношение между антисимметричным распределением подъемной силы и распределением углов закручивания, то уравнение (8-237) примет следующий вид:

$$\mathfrak{A} [cc_i^e] = q \int_0^l \bar{C}(y, \eta) cc_i^e d\eta + \bar{f}_a(y), \quad (8-239)$$

где  $\mathfrak{A}$  — линейный аэродинамический оператор.

Мы видели, что метод, которому необходимо следовать при отыскании численных решений, заключается в замене уравнения (8-239) его приближенной матричной формой

$$[A^a] \{cc_i^e\} = q [\bar{E}] \{cc_i^e\} + \{\bar{f}_a\}, \quad (8-240)$$

где

$[A^a]$  — матрица коэффициентов аэродинамического влияния для антисимметричного нагружения стреловидного крыла,

$$\{\bar{f}_a\} = q [\bar{E}] \left( \left\{ c \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} \right\} \beta + \left\{ c \frac{\partial c_l^r}{\partial (pl/U)} \right\} \left( \frac{pl}{U} \right) \right) + q [\bar{F}] \left\{ \frac{\partial c_{m\Delta O}}{\partial \beta} \right\} \beta - [\bar{G}] [\underline{y}] \{m\} \dot{p},$$

$$[\bar{E}] = ([C^{\theta z}] + [C^{\theta\theta}] [\underline{e}]) [\underline{W}],$$

$$[\bar{F}] = [C^{\theta\theta}] [\underline{c}^2] [\underline{W}],$$

$$[\bar{G}] = ([C^{\theta z}] + [C^{\theta\theta}] [\underline{d}]) [\underline{W}].$$

Матрица коэффициентов аэродинамического влияния  $[A^a]$ , соответствующая теории Вейссингера, определяется равенством (5-195). Матричное уравнение (8-240) в качестве неизвестной величины содержит столбцевую матрицу  $\{cc_i^e\}$ . Предполагается, что все остальные величины определяются физическими свойствами крыла и условиями задачи. Уравнение (8-240) идентично по форме уравнению (8-114) для соответствующего случая прямого крыла. В действительности то, что изложено в п. 8-3 (d) (7), целиком применимо также и к случаю стреловидного крыла. Например, матричные уравнения, определяющие эффективность элеронов и условия реверса элеронов для стреловидного крыла произвольной формы в плане и с произвольным распределением жесткости, могут быть написаны сразу по аналогии с уравнениями (8-122) и (8-122а). Эффективность элеронов определяется в явном виде с помощью выражения

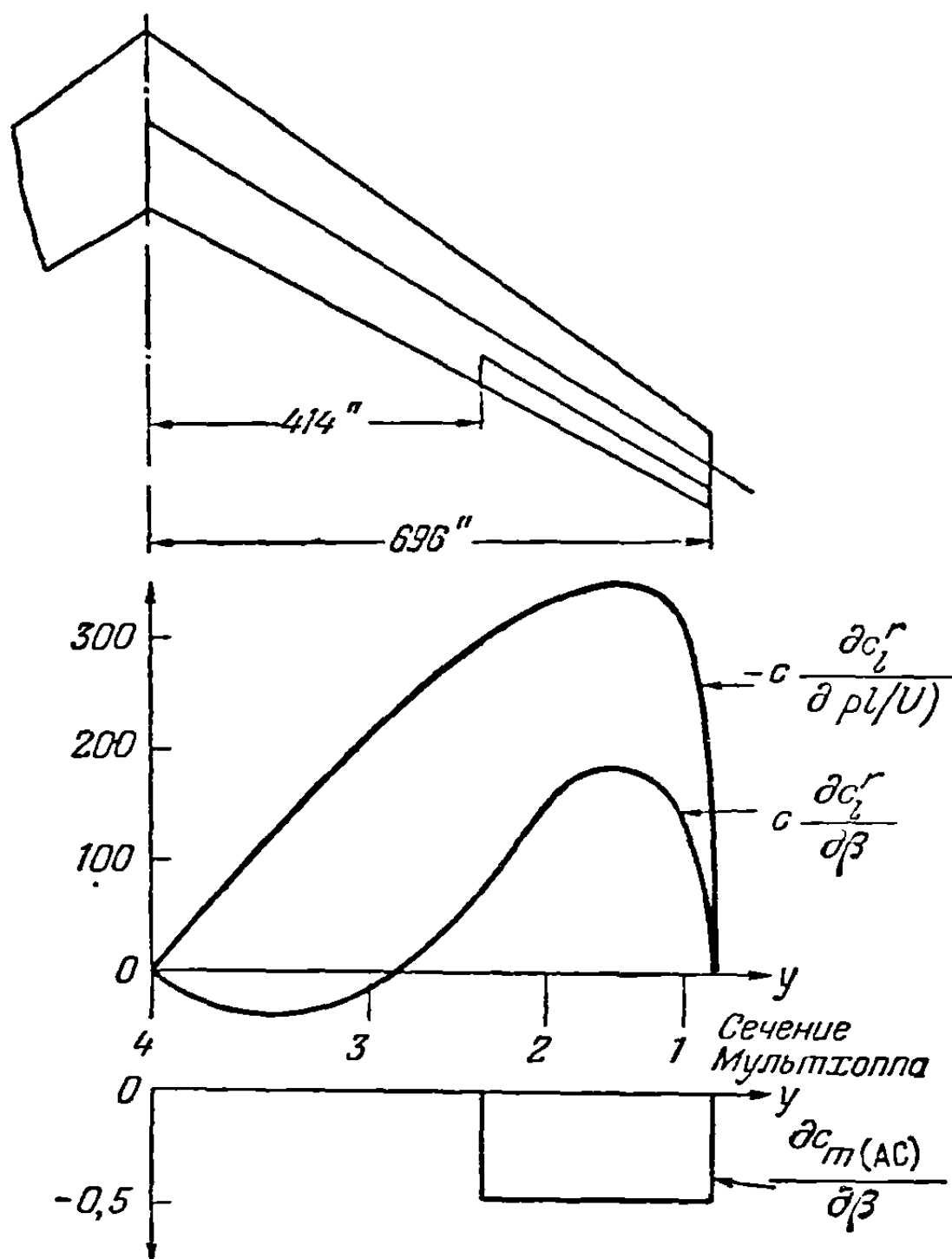
$$\frac{\partial \left( \frac{pl}{U} \right)}{\partial \beta} = \frac{C_{l\beta} + \frac{q}{Sl} \underline{H} ([A^a] - q [\bar{E}])^{-1} \left( [\bar{E}] \left\{ c \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} \right\} + [\bar{F}] \left\{ \frac{\partial c_{m\Delta O}}{\partial \beta} \right\} \right)}{C_{l\beta} + \frac{q}{Sl} \underline{H} ([A^a] - q [\bar{E}])^{-1} [\bar{E}] \left\{ c \frac{\partial c_l^r}{\partial (pl/U)} \right\}}, \quad (8-241)$$

а динамическое давление реверса можно определить из решения уравнения

$$q_R = \frac{C_{l\beta}}{\frac{1}{Sl} \underline{H} ([A^a] - q_R [\bar{E}])^{-1} \left( [\bar{E}] \left\{ c \frac{\partial c_l^r}{\partial \beta} \right\} + [\bar{F}] \left\{ \frac{\partial c_{m\Delta O}}{\partial \beta} \right\} \right)}, \quad (8-241a)$$

где  $[N]$  — строчная матрица, определяемая соотношением (8-118b), а  $C_{l\beta}$  и  $C_{l_p}$  — производные коэффициентов момента крена жесткого самолета, определяемые равенствами (8-101a).

Возможно, что самым важным проявлением стреловидности в связи с антисимметричным распределением подъемной силы является влияние стреловидности на эффективность элеронов. В общем можно сказать, что крыло с передней стреловидностью имеет высокую скорость реверса, тогда как у крыла со стреловидностью назад скорость реверса элеронов низкая. Рассмотрим кратко работу крыла с передней стреловидностью при отклонении элерона вниз. В результате изгиба крыла от направленной вверх нагрузки, обусловленной отклоненным элероном, носки элементов крыла, направленные по потоку, отклоняются вверх в противоположность закручиванию, обусловленному моментами тангажа от отклоненного вниз элерона. Так как эти два явления стремятся погасить друг друга, закручивание крыла, обусловленное отклонением элерона, оказывается малым и элероны остаются эффективными. Наоборот, в случае крыльев со стреловидностью назад углы закручивания в плоскости течения, обусловленные изгибом крыла и моментом тангажа от отклоненного элерона, складываются, что приводит к большим углам закручивания вниз носков элементов сечений крыла и как следствие — к малой эффективности элеронов.



Фиг. 8-33. Распределения параметров на жестком крыле, обусловленные отклонением элерона и установившимся движением крена.

**Пример 8-9.** Вычислить эффективность элеронов и скорость реверса элеронов на уровне моря для самолета со стреловидным крылом, указанного в примере 8-7. Для расчета распределения подъемной силы за счет упругих деформации и распределения подъемной силы жесткого крыла применить метод Вейссингера.

**Решение.** Эффективность элеронов можно вычислить, применяя уравнение (8-241). Примем что распределения величин

$$c \frac{\partial C_l^r}{\partial \beta}, \quad c \frac{\partial C_l^r}{\partial (\rho l U)}, \quad \frac{\partial C_{mAC}}{\partial \beta}$$

для жесткого крыла вычислены методом, подобным методам, изложенным в [8-24], и имеют такой вид, как это изображено на фиг. 8-33. В матричной форме эти величины, вычисленные для сечения Мультхоппа (фиг. 8-33), имеют вид

$$\left\{ c \frac{\partial C_l^r}{\partial \beta} \right\} = \begin{bmatrix} 144,98 \\ 153,18 \\ -15,59 \end{bmatrix}, \quad \left\{ c \frac{\partial C_l^r}{\partial (\rho l U)} \right\} = \begin{bmatrix} -294,75 \\ -329,52 \\ -207,05 \end{bmatrix}, \quad \left\{ \frac{\partial C_{mAC}}{\partial \beta} \right\} = \begin{bmatrix} -0,4532 \\ -0,453 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Применение формул для  $C_{l\beta}$  и  $C_{l_p}$  приводит к следующим величинам для жесткого самолета:

$$C_{l\beta} = 0,16, \quad C_{l_p} = -0,454.$$

Матрицу аэродинамических коэффициентов влияния для антисимметричного нагружения, согласно теории Вейссингера, получим, подставив данные, соответствующие настоящей задаче, в равенство (5-195). Для упрощения примера поправки на число Маха здесь опущены

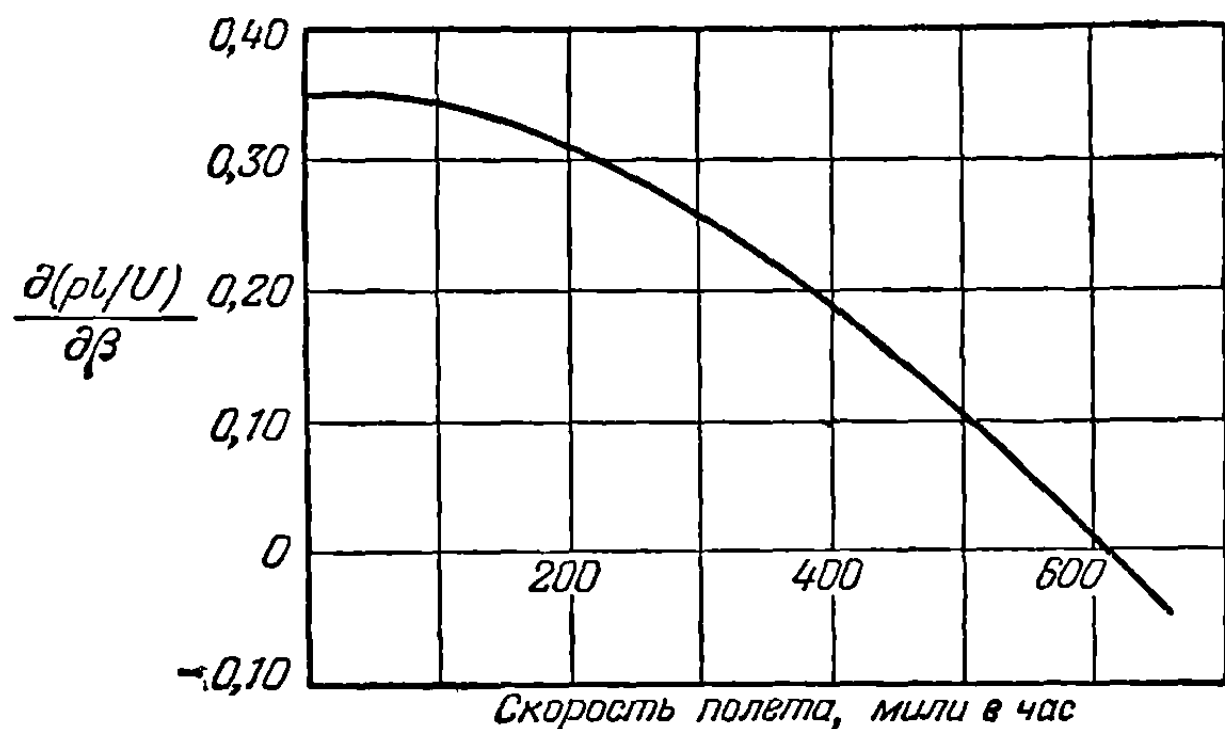
$$[A^a] = \begin{bmatrix} 45,679 & -13,221 & 0,63610 \\ -2,1228 & 28,004 & -7,3948 \\ -0,63000 & -0,78920 & 20,636 \end{bmatrix} \times 10^{-4}.$$

Строчная матрица  $[H]$  в уравнении (8-241) вычисляется по равенству (8-118b):

$$[H] = [1] [y] [\bar{W}] = [96,634 \quad 131,736 \quad 96,635],$$

где  $[\bar{W}]$  матрица весовых чисел Мультхолпа, определяемая равенством (e) в примере 8-7.

Подставив в уравнение (8-241) приведенные выше данные и численные значения матриц  $[\bar{E}]$  и  $[\bar{F}]$ , указанные в примере 8-7, получим явное выражение эффективности элеронов в зависимости от  $q$ .



Фиг. 8-34. Эффективность элеронов для крыла со стреловидностью назад как функция скорости полета.

годами при отыскании приближенных решений могут оказаться методы, основанные на идее представления решения в форме разложения по заданным формам смещений, удовлетворяющим граничным условиям. Подобные методы можно применить также и к стреловидному крылу. Однако математическая законность этих методов до настоящего времени еще не обоснована так строго, как это сделано в случае прямого крыла.

Интуитивно можно ожидать, что подобные методы дадут хорошие результаты в тех случаях, когда заданные формы смещений можно наложить и получить при этом хорошее приближение к действительной картине деформации крыла под нагрузкой.

(1) *Метод Рэлея — Ритца.* В предыдущем пункте было указано, что задача статической аэроупругости стреловидного крыла не является самосопряженной краевой задачей, тогда как сравнимая с ней задача о прямом крыле является самосопряженной задачей. Хорошо известно, что принцип минимальной потенциальной энергии строго применим только тогда, когда получающееся дифференциальное или интегральное уравнение является самосопряженным [8-25]. Условию самосопряженности удовлетворяет огромное большинство задач в теории упругости и механике, и часто в таких задачах применение принципа минимальной потенциальной энергии оправдывается только на основе чисто физических соображений. Однако при более строгом подходе применение условия в вариациях для вывода данного дифференциального или интегрального уравнения равновесия требует, чтобы функция, предназначенная для минимизирования, определялась отдельно для каждой задачи или класса задач. Например, в случае консервативной упругой системы имеет место такое положение, когда функция, предназначенная для минимизирования, является потенциальной энер-

элеронов в зависимости от  $q$ . На фиг. 8-34 приведен график результатов расчета, показывающий изменение эффективности элеронов со скоростью набегающего на самолет воздуха. В результаты расчетов, изображенные на фиг. 8-34, можно ввести приближенную поправку на число Маха, вычисляемую на основе теории несущей полосы (ср. п. 6-2).

$$U_{\text{сжим.}} = U_{\text{несжим.}} \sqrt[4]{1 - M^2}.$$

(g) *Решения задач о стреловидных крыльях в обобщенных координатах.* В п. 8-3 (e) мы видели, что в случае прямых крыльев полезными ме-

гней системы [ср. п. 2-11 (a)]. В других системах, подобных, например, стреловидному крылу, эта функция не допускает простой физической интерпретации. Читатель, интересующийся этим вопросом, может обратиться к работе Флакса [8-26], в которой обычный метод Рэля—Ритца формально распространен на задачу о стреловидном крыле.

(2) *Метод Галеркина.* Метод Галеркина представляет прямой подход к приближенному решению задач для стреловидных крыльев. В гл. 4 мы видели, что метод Галеркина, используемый обычно в механике при применении к самосопряженным задачам, целиком эквивалентен методу Рэля—Ритца. Несмотря на то, что строгого доказательства применимости метода Галеркина к несамосопряженным системам еще не имеется, практические численные расчеты задач для стреловидных крыльев дали удовлетворительные результаты. На основе теории несущей полосы рассмотрим сначала применение метода Галеркина к задаче о вычислении деформации при нагрузке тонкого стреловидного крыла, которое может свободно изгибаться, не закручиваясь. Соответствующее интегральное уравнение можно вывести из уравнения (8-169), положив  $C^{\theta\theta}(y, \eta) = 0$  и  $c_l^e = a_0 \theta \cos \Lambda$ .

В результате получим

$$\theta(y) = qa_0 \cos \Lambda \int_0^l C^{\theta z}(y, \eta) c \theta d\eta + \bar{f}(y), \quad (8-242)$$

где  $f(y)$  для симметричного нагружения определяется равенством (8-171), а для антисимметричного — равенством (8-238).

Хотя уравнение (8-242) применимо к крыльям с передней и с задней стреловидностью, задача о нагружении крыла со стреловидностью назад представляет большой практический интерес и поэтому последующие замечания относятся к этому случаю. Так как функция влияния в уравнении (8-242) для крыльев со стреловидностью назад является величиной отрицательной, то для таких крыльев уравнение (8-242) можно записать в следующем виде

$$\theta(y) = -qa_0 \cos \Lambda \int_0^l |C^{\theta z}(y, \eta)| c \theta d\eta + \bar{f}(y). \quad (8-243)$$

Представляя решение в форме

$$\theta(y) = \sum_{j=1}^n \Theta_j q_j, \quad (8-244)$$

где  $\Theta_j(y)$  — функции, удовлетворяющие граничному условию  $\theta(0) = \theta'(l) = 0$ , получим функцию ошибки

$$\mathcal{E}(y) = \sum_{j=1}^n \left\{ \Theta_j(y) + qa_0 \cos \Lambda \int_0^l |C^{\theta z}(y, \eta)| \Theta_j(\eta) c d\eta \right\} q_j - \bar{f}(y). \quad (8-245)$$

Применяя способ Галеркина, т. е. умножая на  $\Theta_i(y) c(y)$  и интегрируя от 0 до  $l$ , и требуя, чтобы  $\int_0^l \mathcal{E} \Theta_i c dy = 0$ , получаем следующую систему совместных линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} q_j = B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (8-246)$$

где

$$A_{ij} = \int_0^l \theta_i \theta_j c dy + q a_0 \cos \Lambda \int_0^l \theta_i c \int_0^l |C^{\theta z}(y, \eta)| \theta_j c d\eta dy,$$

$$B_i = \int_0^l \bar{f}(y) \theta_i c dy.$$

Распределение углов закручивания сечений в плоскости течения можно получить, решая уравнение (8-246) относительно  $q_1, \dots, q_n$  и подставляя результат в уравнение (8-244).

Если используется только единственный член  $\theta_1$  разложения в выражении для  $\theta$ , то обобщенную координату можно тотчас же определить из уравнений (8-246)

$$q_1 = \frac{\int_0^l \bar{f}(y) \theta_1 c dy}{\int_0^l \theta_1^2 c dy + q a_0 \cos \Lambda \int_0^l \theta_1 c \int_0^l |C^{\theta z}(y, \eta)| \theta_1 c d\eta dy}. \quad (8-247)$$

Следуя предложению Флакса [8-26], можно еще упростить уравнение (8-247), выбирая в выражении для угла закручивания единственный член разложения  $\theta_1(y)$ , т. е. кривую дивергенции того же самого крыла со стреловидностью вперед. Такой выбор осуществляется с помощью собственной функции, соответствующей наименьшему собственному значению выражения

$$\theta_1(y) = q_D a_0 \cos \Lambda \int_0^l |C^{\theta z}(y, \eta)| \theta_1 c d\eta, \quad (8-248)$$

где  $q_D$  — скорость дивергенции крыла с передней стреловидностью. Подставляя выражение (8-248) в равенство (8-247), получаем более простое выражение для единственной обобщенной координаты:

$$q_1 = \frac{\int_0^l \bar{f}(y) \theta_1 c dy}{[1 + (q q_D)] \int_0^l \theta_1^2 c dy}. \quad (8-249)$$

Таким образом, распределение углов закручивания при аппроксимации только одним членом имеет вид

$$\theta(y) = \theta_1(y) q_1, \quad (8-250)$$

где  $q_1$  определяется уравнением (8-247), если  $\theta_1$  задается произвольно, и уравнением (8-249), если  $\theta_1$  является кривой дивергенции того же самого крыла со стреловидностью вперед.

Совместные уравнения (8-246) могут быть преобразованы в диагональную форму с помощью представления решения через биортогональные собственные функции. Допустим, что существует ряд биортогональных собственных функ-

ций  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$  и  $W_1, \dots, W_n$ , которые удовлетворяют соответственно следующим однородным интегральным уравнениям:

$$\Theta_j = \lambda_j a_0 \cos \Lambda \int_0^l |C^{\theta z}(y, \eta)| \Theta_j c d\eta, \quad (8-251)$$

$$W_j = \lambda_j a_0 \cos \Lambda \int_0^l |C^{z\theta}(y, \eta)| W_j c d\eta. \quad (8-252)$$

Для данного крыла со стреловидностью назад уравнение (8-251) с физической точки зрения представляет интегральное уравнение для того же самого крыла со стреловидностью вперед. Представим решение уравнения (8-243) в форме

$$\theta(y) = \sum_{j=1}^n \Theta_j(y) q_j, \quad (8-253)$$

где  $\Theta_j(y)$  — собственные функции уравнения (8-251). Подставляя выражение (8-253) в уравнение (8-243), получаем функцию ошибки:

$$\mathcal{E}(y) = \sum_{j=1}^n \left\{ \Theta_j + q a_0 \cos \Lambda \int_0^l |C^{\theta z}(y, \eta)| \Theta_j c d\eta \right\} q_j - \bar{f}(y). \quad (8-254)$$

Переходя к следующему этапу расчета по методу Галеркина, умножим уравнение (8-254) на  $W_i(y)c(y)$  и проинтегрируем от 0 до  $l$ . Приравняв результат нулю, получим

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^l \Theta_j W_i c dy + q a_0 \cos \Lambda \int_0^l W_i c \int_0^l |C^{\theta z}(y, \eta)| \Theta_j c d\eta dy \right\} q_j - \int_0^l \bar{f}(y) W_i c dy = 0. \quad (8-255)$$

Уравнение (8-255) можно упростить с помощью уравнения (8-251) и условия ортогональности (8-214) между  $\Theta_i$  и  $W_i$ :

$$q_i = \frac{\int_0^l \bar{f}(y) W_i c dy}{[1 + (q/\lambda_i)] \int_0^l \Theta_i W_i c dy}. \quad (8-256)$$

Таким образом, окончательно распределение угла закручивания крыла со стреловидностью назад может быть выражено в виде

$$\theta(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\Theta_i(y) \int_0^l \bar{f}(y) W_i c dy}{[1 + (q/\lambda_i)] \int_0^l \Theta_i W_i c dy}, \quad (8-257)$$

где  $\Theta_i$  — собственные функции того же самого крыла со стреловидностью вперед, определяемые уравнением (8-251),  $W_i$  — собственные функции присоединенного уравнения [определяемые уравнением (8-252)] и  $\lambda_i$  — собственные значения обоих уравнений. Полезные данные можно получить из уравнения (8-257).



если взять только первый член ряда. В этом случае получим

$$\theta(y) = \frac{\theta_1(y) \int_0^l \bar{f}(y) W_1 c dy}{[1 + (q/q_D)] \int_0^l \theta_1 W_1 c dy}, \quad (8-258)$$

где  $q_D$  — скорость дивергенции того же самого крыла со стреловидностью вперед. Величина  $[1 + (q/q_D)]$  играет роль ослабляющего фактора при определении угла упругого закручивания крыла со стреловидностью назад. В этом случае скорость дивергенции  $q_D$  крыла с передней стреловидностью играет важную роль сравнительной величины. Можно заметить, что если бы мы выполнили тот же анализ для случая крыла с передней стреловидностью, то в знаменателе получили бы величину  $[1 - (q/q_D)]$ , которая играла бы роль усиливающего фактора.

Читатель, заинтересованный в дальнейшем и более строгом исследовании математической законности представления решения задачи аэроупругости для крыла со стреловидностью назад в виде ряда ортогональных собственных функций, отсылается к работе Сейферта [8-27].

Метод Галеркина, примененный выше к случаю чистого изгиба тонкого крыла со стреловидностью назад, может быть обобщен на случай, включающий также и кручение. В этом последнем случае решение задачи начинается с уравнения (8-170)

$$\theta(y) = q \int_0^l \bar{C}(y, \eta) c c_i^e d\eta + \bar{f}(y). \quad (8-170)$$

Здесь  $\bar{f}(y)$  определяется равенством (8-171) для симметричных и равенством (8-238) для антисимметричных случаев. Подставим в уравнение (8-170) следующие разложения:

$$\theta(y) = \sum_{j=1}^n \Theta_j(y) q_j, \quad (8-259)$$

$$c_i^e(y) = \sum_{j=1}^n c_{ij}(y) q_j, \quad (8-260)$$

где  $\Theta_j(y)$  — произвольно заданные функции, удовлетворяющие граничным условиям <sup>1)</sup>  $\theta(0) = \theta'(l) = 0$ , и  $c_{ij}(y)$  — распределения коэффициентов подъемной силы, соответствующие распределениям углов закручивания  $\Theta_j(y)$  по размаху

<sup>1)</sup> Эти граничные условия можно проверить, заметив, что

$$\theta(y) = \bar{\theta} \cos \Lambda - \frac{dw}{dy} \sin \Lambda.$$

Так как

$$\bar{\theta}(0) = \frac{dw(0)}{dy} = 0,$$

то можно заключить, что

$$\theta(0) = 0.$$

Поскольку

$$\frac{d\bar{\theta}}{dy} = \frac{d^2w}{dy^2} = 0 \quad \text{при } y = l,$$

то отсюда следует, что

$$\theta'(l) = 0.$$

крыла. Подставляя разложения (8-259) и (8-260) в уравнение (8-170) и применяя метод Галеркина, получаем следующую систему совместных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $q_1, \dots, q_n$ :

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} q_j = B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (8-261)$$

где

$$A_{ij} = \int_0^l \Theta_i \Theta_j c dy - q \int_0^l \Theta_i c \int_0^l \bar{C}(y, \eta) c c_{ij} d\eta dy, \quad (8-262)$$

$$B_i = \int_0^l \bar{f}(y) \Theta_i c dy. \quad (8-263)$$

Распределение углов закручивания  $\theta(y)$  в направлении течения и распределение коэффициентов подъемной силы  $c_i^e(y)$  по размаху можно получить, если решить совместную систему уравнений (8-261) относительно  $q_1, \dots, q_n$  и результат подставить соответственно в равенства (8-259) и (8-260).

Несмотря на то, что в настоящем пункте метод Галеркина применялся к интегральному уравнению равновесия, его, конечно, можно применить также и к дифференциальным уравнениям, выведенным в п. 8-4(a) и (b). Майлс в [8-19] применил метод Галеркина к дифференциальным уравнениям в форме (8-164) и (8-165). Другое видоизменение техники решения задач статической аэроупругости по методу наложения заранее выбранных выражений для деформаций описано Брауном, Холтби и Мартином в работе [8-28]. Их метод был создан главным образом для использования в расчетах конструкций, включающих в себя тонкие крылья со стреловидностью назад, где простота и быстрота решения имеют большое значение.

**Пример 8-10.** С помощью биортогональных функций вычислить распределение углов закручивания однородного крыла со стреловидностью назад, могущего испытывать только деформацию изгиба и работающего при некотором заданном угле атаки жесткого крыла  $\alpha^r$ . Считая справедливой теорию несущей полосы и пренебрегая силами инерции, сравнить результаты расчетов с точными результатами для значений динамического давления: а) равных половине динамического давления дивергенции того же крыла с передней стреловидностью и б) в два раза больших этого давления.

*Решение.* Решение задачи получим, применяя равенство (8-258),

$$\theta(y) = \frac{\Theta_1(y) \int_0^l \bar{f}(y) W_1 c dy}{[1 + (q/q_D)] \int_0^l \Theta_1 W_1 c dy}, \quad (8-258)$$

где

$$\bar{f}(y) = q a_0 \alpha^r c \cos \Lambda \int_0^l C^{\theta_2}(y, \eta) d\eta. \quad (a)$$

Для  $\Theta_1$  и  $W_1$  мы будем пользоваться результатами численных расчетов, проведенных в примере 8-6. Для этого необходимо записать равенства (8-258) и (a) в матричной форме:

$$\{\theta\} = \frac{[\bar{f}] [\bar{W}] \{W_1\}}{[\Theta_1] [\bar{W}] \{W_1\}} \times \frac{\{\Theta_1\}}{[1 + (q/q_D)]}, \quad (b)$$

$$\{\bar{f}\} = q a_0 \alpha^r c \cos \Lambda [C^{\theta_2}] [\bar{W}] \{1\}. \quad (c)$$

Подставляя в равенство (с) величины  $[C^{\theta z}]$  <sup>1)</sup> и  $[\bar{W}]$  из примера 8-6 и производя соответствующие вычисления, получаем

$$\{\bar{f}\} = - \frac{qa_0 c l^3 \cos^2 \Lambda |\sin \Lambda| \alpha^r}{18EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1,26378 \\ 2,11095 \\ 2,62485 \\ 2,88875 \\ 2,98595 \\ 2,99975 \end{bmatrix}. \quad (d)$$

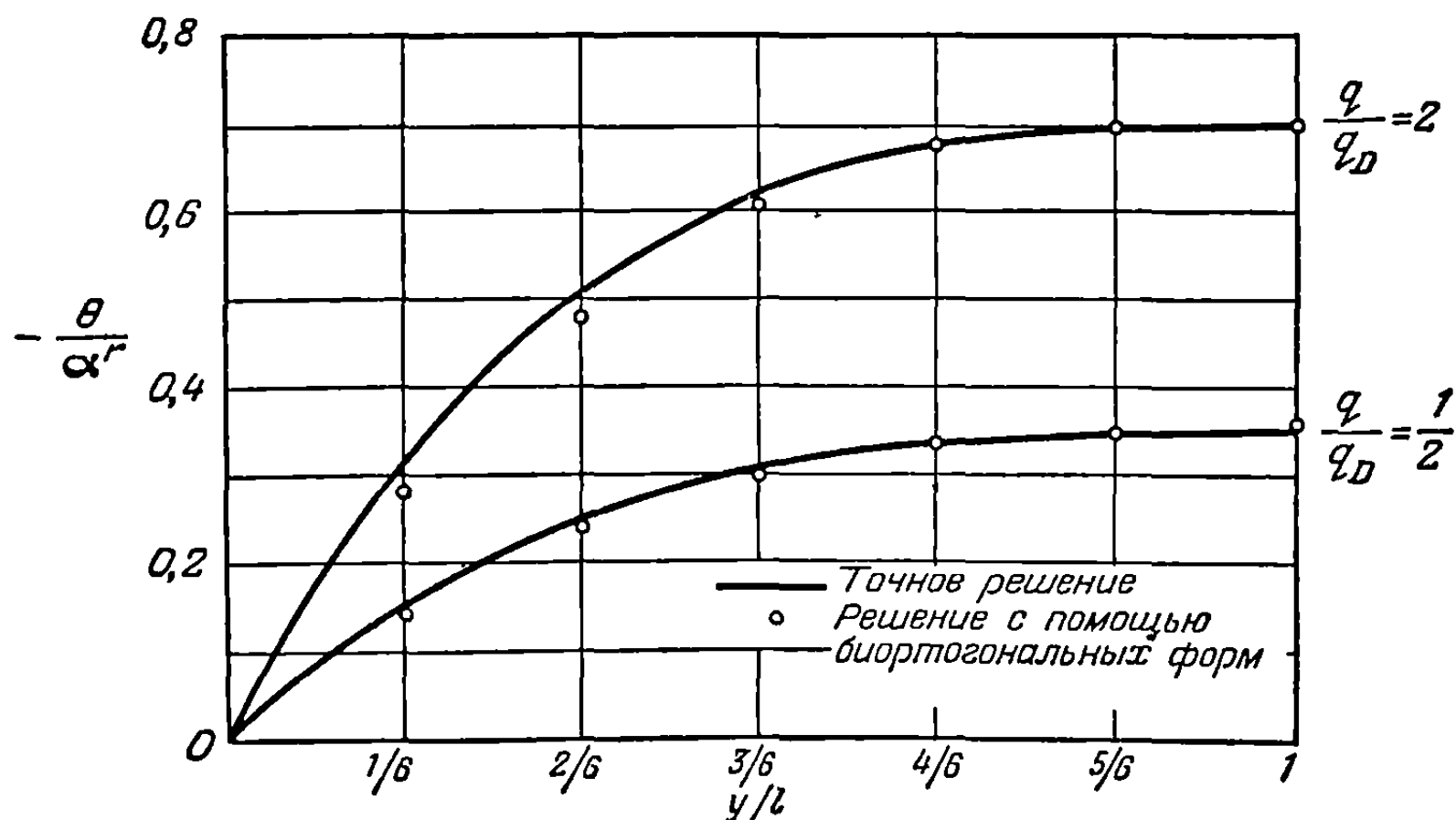
Вводя в равенство (b) эту величину и численные значения  $[\bar{W}]$ ,  $\{W_1\}$  и  $\{\theta_1\}$  из примера 8-6, найдем после соответствующих преобразований:

$$\left\{ \frac{\theta}{\alpha^r} \right\} = - \frac{qa_0 c l^3 \cos^2 \Lambda |\sin \Lambda|}{18EI} \times \frac{18,0398}{5,9997} \times \frac{\{\theta_1\}}{[1 + (q/q_D)]}. \quad (e)$$

Подставив сюда выражение (8-186) и численные значения, для  $\{\theta_1\}$ , получим окончательное решение

$$\left\{ \frac{\theta}{\alpha^r} \right\} = - \frac{q/q_D}{1 + (q/q_D)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4311 \\ 0,7322 \\ 0,9189 \\ 1,0164 \\ 1,0524 \\ 1,0576 \end{bmatrix}. \quad (f)$$

На фиг. 8-35 нанесены результаты вычислений по этой формуле для отношений  $q/q_D = 1/2$  и 2 и произведено сравнение с точным решением. Совпадение приближенного



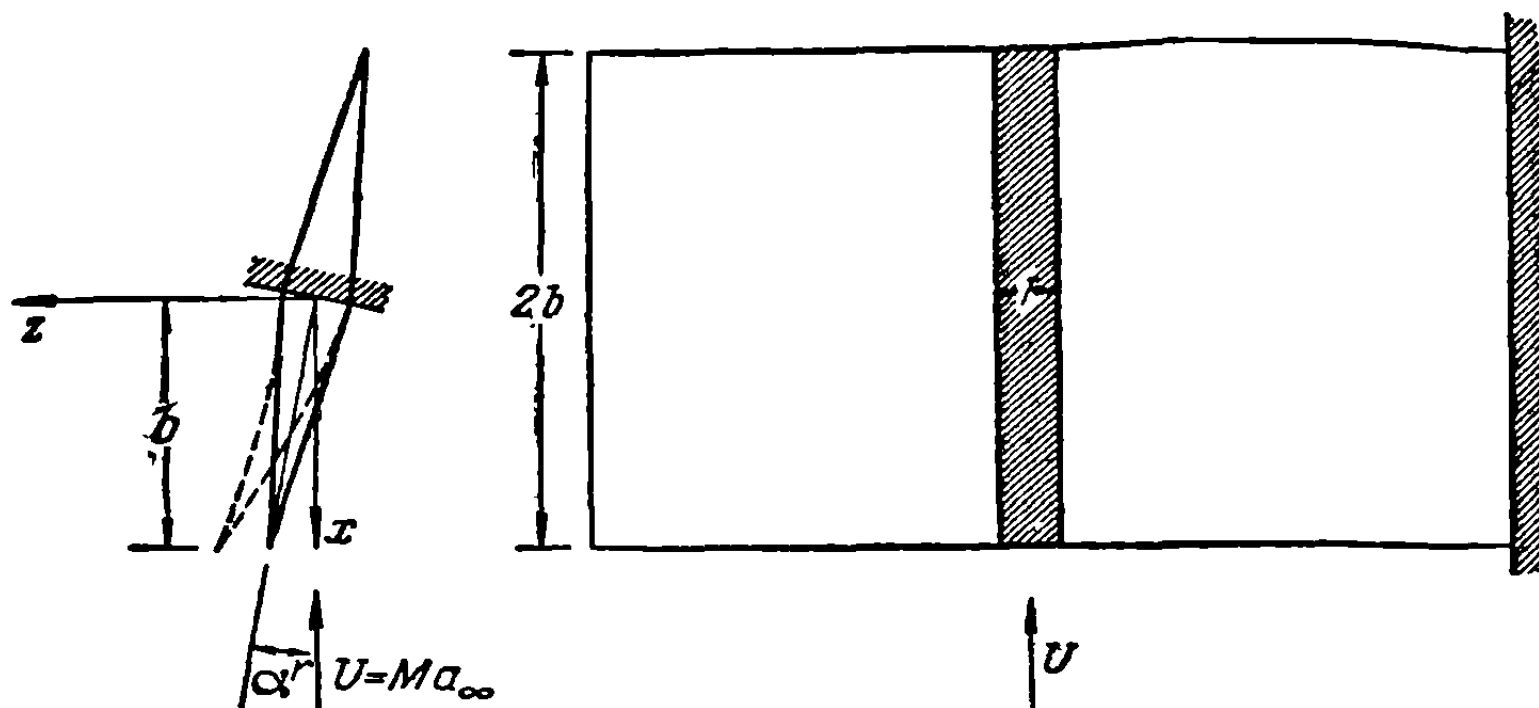
Фиг. 8-35. Сравнение решения, полученного с помощью биортогональных форм, с точным решением.

и точного решения в этом случае превосходное, за исключением сечений, лежащих вблизи корня крыла для  $q/q_D = 2$ . Плохое совпадение обоих результатов в этом случае объясняется, возможно, тем фактом, что при больших скоростях более значительную роль начинают играть высшие гармоники.

**8-5. Несущие поверхности малого удлинения произвольной формы в плане и произвольной жесткости.** В предыдущих пунктах этой главы исследовались такие крылья, в которых можно было пренебречь изгибом дужки крыла плоскости течения. В этих исследованиях имеется известная доля допущений, которая позволяет применить достаточно хорошо разработанные аэро-

<sup>1)</sup> Заметим, что величину  $[C^{\theta z}]$ , соответствующую крылу со стреловидностью назад, получим из матрицы  $[C^{\theta z}]$ , приведенной в примере 8-6, поставив перед ней знак минус.

динамические теории и теории прочности. Такое благополучное положение дел обусловлено главным образом неявными упрощающими допущениями, состоящими в том, что компоненты, характеризующие течение вдоль размаха, малы по сравнению с компонентами вдоль хорды, и нормальные напряжения вдоль размаха велики по сравнению с нормальными напряжениями вдоль хорды. Таким



Фиг. 8-36. Деформация элемента прямоугольного сверхзвукового крыла, направленного по хорде.

образом, задача статической аэроупругости характеризуется единственной независимой переменной, отсчитываемой по оси, направленной вдоль размаха. Исследуем теперь случай крыла малого удлинения, в котором нельзя более пренебрегать изгибом дужки в плоскости течения. Размеры такого крыла в направлении размаха и в направлении хорды могут быть величинами одного порядка. Здесь мы встречаемся с задачей, когда параметры течения вдоль размаха и хорды и нормальные напряжения по размаху и хорде почти одинаковы. Едва ли необходимо говорить о том, что трудностей, стоящих на пути решения задачи аэроупругости в подобном случае, оказывается больше, а возможностей получения практических решений имеется меньше. Однако можно сказать, что подобное сочетание обстоятельств является, может быть, благоприятным, поскольку явления аэроупругости на относительно тонких крыльях в общем случае выражены более резко, нежели на несущих поверхностях малого удлинения. Обычно справедливо также такое положение, что самое важное явление аэроупругости на несущих поверхностях малого удлинения имеет место при сверхзвуковых скоростях.

а) *Аэроупругие свойства элемента крыла, направленного вдоль хорды, при сверхзвуковых скоростях.* Для того чтобы представить явление изгиба дужки, рассмотрим поведение элемента крыла, направленного вдоль хорды, с шириной, равной единице, изображенного на фиг. 8-36. Сначала допустим, что крыло не может изгибаться в направлении размаха или скручиваться около оси, направленной вдоль размаха. При этих упрощающих допущениях элемент крыла, направленный вдоль хорды, можно рассматривать как консольную балку с шириной, равной единице, жестко заделанную по линии середин хорд. Начало координат выбираем в середине хорды (см. фиг. 8-36). Представленная здесь упрощенная задача впервые была подробно исследована Био [8-29], и производимые ниже рассуждения в основном базируются на его исследовании.

*Дифференциальное уравнение равновесия.* Если допустить, что наклон  $d\varpi/dx$  кривой прогибов мал, то, согласно линеаризованной теории крыла в сверхзвуковом потоке, местная подъемная сила, приходящаяся на единицу площади, определяется из уравнения (6-55) в виде

$$\Delta p_a = \frac{4M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{2} \frac{d\varpi}{dx}, \quad (8-264)$$

где

$\Delta p_a$  — разность давлений, действующих сверху и снизу дужки,

$\rho_\infty$  — плотность воздуха,

$M = U/a_\infty$  — число Маха,

$a_\infty$  — скорость звука.

Дифференциальное уравнение прогиба единичного элемента крыла, направленного вдоль хорды, может быть записано в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( E_1 I(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = \frac{4M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{2} \frac{dw}{dx}, \quad (8-265)$$

где

$I(x)$  — момент инерции площади элемента крыла,

$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}$  — приведенный модуль упругости для случая плоского деформированного состояния<sup>1)</sup>,

$E$  — модуль упругости материала крыла,

$\nu$  — коэффициент Пуассона материала крыла.

Если первоначальный угол атаки жесткого элемента равен  $\alpha^r$ , то

$$\frac{dw}{dx} = \alpha^r + \alpha^e(x), \quad (8-266)$$

где  $\alpha^e(x)$  — местный наклон, обусловленный упругой деформацией. Таким образом, уравнение (8-265) принимает вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( E_1 I \frac{d\alpha^e}{dx} \right) - \frac{4M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{2} \alpha^e = \frac{4M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{2} \alpha^r. \quad (8-267)$$

Уравнение (8-267) является уравнением самосопряженного типа. По форме оно аналогично дифференциальным уравнениям, выведенным ранее для случая изгиба стреловидных крыльев.

*Пластика постоянной толщины.* Если принять, что толщина крыла  $t$  постоянна, то уравнение (8-267) можно представить в более простой форме. Положив

$$I = \frac{t^3}{12} \quad \text{и} \quad \xi = 1 - \frac{x}{b},$$

приведем уравнение (8-267) к виду

$$\frac{d^3 \alpha^e}{d\xi^3} + k \alpha^e = -k \alpha^r, \quad (8-268)$$

где

$$k = \frac{24M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \times \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{E_1} \left( \frac{b}{t} \right)^3. \quad (8-269)$$

Общее решение уравнения (8-268) имеет вид

$$\alpha^e(x) = C_1 e^{\lambda_1 \xi} + C_2 e^{\lambda_2 \xi} + C_3 e^{\lambda_3 \xi} - \alpha^r. \quad (8-270)$$

Характеристические корни этого уравнения  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  равны соответственно

$$\lambda_1 = -\sqrt[3]{k}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} (1 + i\sqrt{3}) \sqrt[3]{k}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{3}) \sqrt[3]{k}; \quad (8-271)$$

постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  определяются из граничных условий

$$\alpha^e(1) = \frac{d\alpha^e(0)}{d\xi} = \frac{d^2 \alpha^e(0)}{d\xi^2} = 0. \quad (8-272)$$

<sup>1)</sup> В первом приближении мы предполагаем, что элемент крыла, расположенный вдоль хорды, находится в плоском деформированном состоянии.

Подставляя решение (8-270) в граничные условия (8-272), приходим к совместным уравнениям

$$\begin{aligned} C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_3 &= 0, \\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + C_3\lambda_3^2 &= 0, \\ C_1e^{\lambda_1} + C_2e^{\lambda_2} + C_3e^{\lambda_3} &= \alpha^r. \end{aligned} \quad (8-273)$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2)\alpha^r}{\Delta}, \\ C_2 &= \frac{\lambda_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3)\alpha^r}{\Delta}, \\ C_3 &= \frac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)\alpha^r}{\Delta}, \end{aligned} \quad (8-274)$$

где

$$\Delta = e^{\lambda_1}\lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) + e^{\lambda_2}\lambda_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3) + e^{\lambda_3}\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения дается выражением (8-270), в котором  $\lambda$  и  $C$  определяются соответственно формулами (8-271) и (8-274).

Био [8-31] исследовал зависимость решения от отношения, показывающего увеличение моментов при переходе от жесткого крыла к упругому

$$\frac{M(b)}{M_r(b)} = - \frac{(E_1/12)(t^3/b)(da^e/d\xi)_{\xi=1}}{(M^2/\sqrt{M^2-1})\rho_\infty a_\infty^2 b^2 \alpha^r}, \quad (8-275)$$

где  $M(b)$  — действительный изгибающий момент при  $\xi = 1$  и  $M_r(b)$  — изгибающий момент жесткого элемента крыла при  $\xi = 1$ . Подставляя выражение (8-270) и упрощая, получаем

$$\frac{M(b)}{M_r(b)} = - \frac{2}{k\alpha^r} (\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2} + \lambda_3 C_3 e^{\lambda_3}). \quad (8-276)$$

Вводя величины  $\lambda$  и  $C$ , определяемые формулами (8-271) и (8-274), и преобразуя, приходим к следующему выражению:

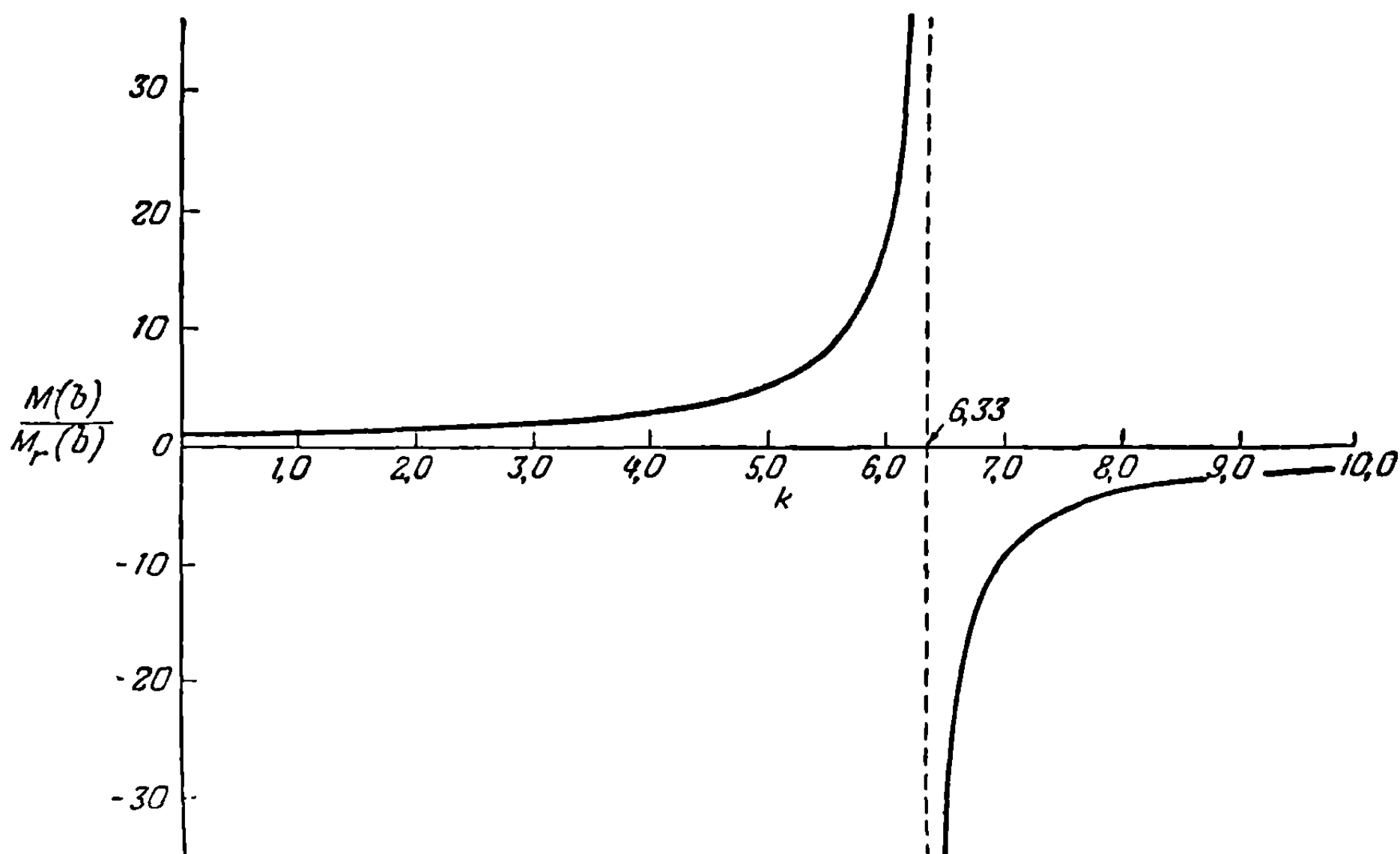
$$\frac{M(b)}{M_r(b)} = \frac{2}{k^{\frac{2}{3}}} \times \frac{e^{-\frac{3}{2}\sqrt[3]{k}} + \sqrt[3]{3} \sin\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\sqrt[3]{k}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\sqrt[3]{k}\right)}{e^{-\frac{3}{2}\sqrt[3]{k}} + 2 \cos\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\sqrt[3]{k}\right)}. \quad (8-277)$$

Равенство (8-277), связывающее отношение, определяющее увеличение изгибающего момента при переходе от жесткого крыла к упругому, с параметром  $k$ , изображено графически на фиг. 8-37. Из этой фигуры видно, что критическое значение  $k$ , равное 6,33, обращает в нуль знаменатель выражения (8-277). Это соответствует критической скорости дивергенции элемента крыла, направленного вдоль хорды<sup>1)</sup>.

*Интегральное уравнение равновесия.* Когда элемент крыла, расположенный вдоль хорды, неоднороден, то для простейших случаев фактически не исключается возможность получить решение дифференциального уравнения. В таких случаях предпочтительнее численные решения интегрального уравнения равновесия. На фиг. 8-38 изображена затупленная пластинка с произвольным

<sup>1)</sup> Величина 6,33 представляет также наименьшее собственное значение однородного дифференциального уравнения однородного крыла с передней стреловидностью [ср. уравнение (8-185)].

распределением толщины в сверхзвуковом потоке, скорость которого равна  $U$ . Так как Био в [8-29] показал, что острая передняя кромка ведет к математической особенности<sup>1)</sup>, предположим, что профиль обрезан на некотором расстоянии от передней кромки так, что пластинка имеет тупую переднюю кромку

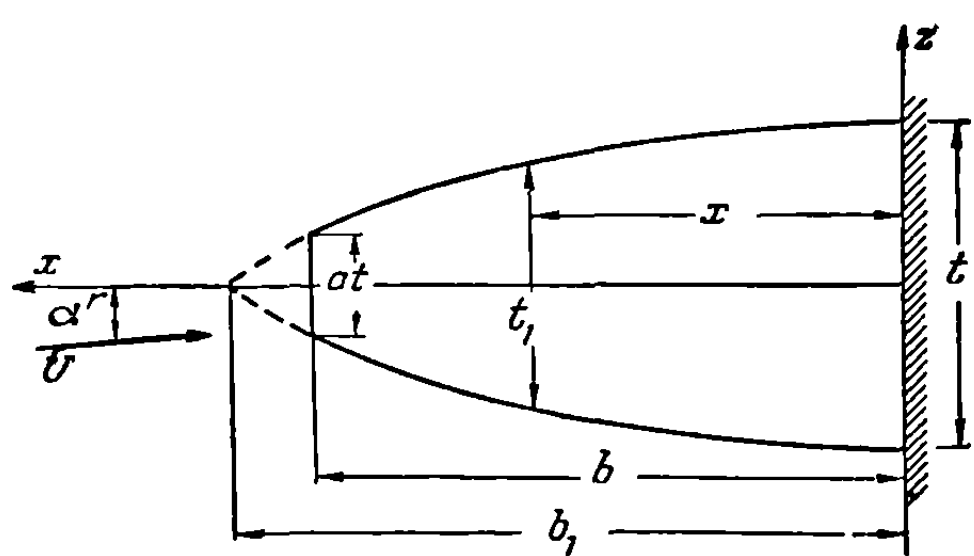


Фиг. 8-37. Коэффициент увеличения изгибающего момента.

толщиной  $at$ . Если ввести допущение о малости толщины и прогиба, то интегральное уравнение равновесия может быть написано в виде

$$\alpha^e(x) = \frac{4M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{2} \int_0^b C(x, \xi) [\alpha^e(\xi) + \alpha^r(\xi)] d\xi, \quad (8-278)$$

где  $C(x, \xi)$  — функция влияния, определяющая наклон пластинки в сечении  $x$ , обусловленный единичной нагрузкой в сечении  $\xi$ ;  $b$  — полухорда.



Фиг. 8-38. Затупленная симметричная стойка произвольной толщины.

Симметричная дwoяковыпуклая пластинка. Допустим, что неоднородная пластинка имеет симметричное дwoяковыпуклое поперечное сечение, такое, что верхняя и нижняя поверхности профиля являются дугами парабол, а толщина  $t_1$  в точке  $x$  на хорде выражается в виде

$$t_1 = t \left[ 1 - \left( \frac{x}{b_1} \right)^2 \right], \quad (8-279)$$

где  $t$  — максимальная толщина профиля и  $b_1$  — расстояние гипотетического носика от начала координат (см. фиг. 8-38). Для такого закона изменения толщины

<sup>1)</sup> Предположение о бесконечно острой передней кромке вместе с использованием линеаризированной теории сверхзвуковой аэродинамики ведет к затруднениям, обусловленным природой некоторых математических результатов. Эти результаты указывают на неустойчивость бесконечно острой кромки на всех сверхзвуковых скоростях. Исследованием поведения бесконечно острых передних кромок занимался также Фын [8-32]. Его результаты указывают на то, что бесконечно острая передняя кромка неустойчива на всех скоростях как до-, так и сверхзвуковых.



Био [8-33], проинтегрировав дифференциальное уравнение изгиба балки, показал, что для элемента крыла, ширина которого равна единице, коэффициенты влияния имеют следующий вид:

$$C(\xi, \eta) = \frac{12}{b_1 E_1} \left(\frac{b_1}{t}\right)^3 \gamma(\xi, \eta), \quad (8-280)$$

где для  $\xi < \eta$

$$\gamma(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \frac{\xi\eta}{(1-\xi^2)^2} + \frac{3}{8} \frac{\xi\eta}{(1-\xi^2)} + \frac{3}{16} \eta \ln \left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) - \frac{1}{4} \frac{1}{(1-\xi^2)^2} + \frac{1}{4}$$

и для  $\xi > \eta$   $\gamma(\xi, \eta) = \gamma(\eta, \xi)$ . В этих выражениях переменные  $\xi$  и  $\eta$  обозначают расстояния от начала координат в долях хорды  $b_1$ .

Переходя в уравнении (8-278) к переменным в безразмерной форме и подставляя (8-279) и (8-280), получаем

$$\alpha^e(\xi) = k_1 \int_0^{\sqrt{1-a}} \gamma(\xi, \eta) \alpha^e(\eta) d\eta + f(\xi), \quad (8-281)$$

где

$$k_1 = 24 \frac{M^2}{\sqrt{M^2-1}} \times \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{E_1} \left(\frac{b_1}{t}\right)^3,$$

$$f(\xi) = k_1 \int_0^{\sqrt{1-a}} \gamma(\xi, \eta) \alpha^r(\eta) d\eta.$$

Характеристический параметр, отнесенный к действительной хорде  $b$ , равен

$$k = 24 \frac{M^2}{\sqrt{M^2-1}} \times \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{E_1} \left(\frac{b}{t}\right)^3$$

и связан с параметром  $k_1$  выражением вида

$$k = k_1 (\sqrt{1-a})^3. \quad (8-282)$$

Уравнение (8-281) можно использовать для определения формы деформированного элемента крыла, расположенного вдоль хорды, или, если положить  $\alpha^r$  равным нулю, для определения (по наименьшему характеристическому значению скорости дивергенции элемента крыла, направленного вдоль хорды).

Био [8-33] применил для вычисления скорости дивергенции метод коллокаций, используя для этого интерполяционные функции Лагранжа. Положим, что пластинка разделена на две такие части, что

$$\begin{aligned} \alpha^e(\xi) &= \alpha_0 = 0 & \text{для } \xi &= 0, \\ \alpha^e(\xi) &= \alpha_1 & \text{для } \xi &= \xi_1, \\ \alpha^e(\xi) &= \alpha_2 & \text{для } \xi &= \xi_2. \end{aligned} \quad (8-283)$$

Применяя интерполяционную формулу Лагранжа [приложение В, уравнения (5) и (9)], получаем

$$\alpha^e(\xi) = \alpha_1 \frac{\xi(\xi-\xi_2)}{\xi_1(\xi_1-\xi_2)} + \alpha_2 \frac{\xi(\xi-\xi_1)}{\xi_2(\xi_2-\xi_1)}. \quad (8-284)$$

Если пластинка разделена на равные части, такие, что

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \sqrt{1-a} \quad \text{и} \quad \xi_2 = \sqrt{1-a},$$

то выражение (8-284) примет вид

$$\alpha^e(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1-a}} (4\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\xi^2}{1-a} (-4\alpha_1 + 2\alpha_2). \quad (8-285)$$

Если подставить выражение (8-285) в уравнение (8-281) и положить  $f(\xi) = 0$ , то, применяя метод коллокаций для случая  $a = 0,5$ , получим следующие характеристические уравнения:

$$\frac{1}{k_1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,03532 & 0,02907 \\ 0,04096 & 0,03460 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (8-286)$$

Решение уравнения (8-286) для наименьшего характеристического значения дает

$$\frac{1}{k_1} = 0,0664 \quad \text{и} \quad k = k_1 (\sqrt{1-a})^3 = 5,324.$$

Число Маха, соответствующее дивергенции элемента крыла, направленного вдоль хорды, получим, решая следующее уравнение:

$$M^4 - \left[ \frac{k}{24 (\rho_\infty a_\infty^2 / E_1) (b/t)^3} \right]^2 (M^2 - 1) = 0. \quad (8-287)$$

При исследовании более острого профиля нужно использовать полиномы более высокой степени.

(b) *Общее исследование аэроупругих свойств несущих поверхностей малого удлинения.* Рассмотрим теперь несколько более общую формулировку задачи статической аэроупругости для несущих поверхностей малого удлинения. Из уравнения (2-55) вытекало, что поперечное перемещение  $w(x, y)$  упругой поверхности связано с интенсивностью поперечной нагрузки  $Z(x, y)$ , приходящейся на единицу площади, с помощью соотношения

$$w(x, y) = \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2-55)$$

Следуя методам п. 8—5 (а), по аэродинамическим причинам, удобно исследовать деформацию крыла в функции местного угла атаки в плоскости течения. Дифференцируя равенство (2-55) по  $x$ , получаем

$$\alpha^e(x, y) = - \int_S \int C^{az}(x, y; \xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (8-288)$$

(где  $\alpha^e(x, y) = -\partial w / \partial x$  — местный угол атаки в плоскости течения, обусловленный деформациями крыла, и  $C^{az}(x, y; \xi, \eta) = \partial C(x, y; \xi, \eta) / \partial x$  — функция влияния, определяющая местный наклон в направлении  $x$  в точке  $(x, y)$ , обусловленный единичной нагрузкой в точке  $(\xi, \eta)$ ). Поперечное усилие  $Z(x, y)$  возникает за счет аэродинамических давлений и сил инерции и равно

$$Z(x, y) = \Delta p_a - \rho N g, \quad (8-289)$$

где  $\Delta p_a$  — направленное вверх аэродинамическое давление на крыло и  $\rho$  — масса крыла, приходящаяся на единицу площади.

Если  $\Delta p_a$  разложить на составляющую  $\Delta p_a^r$ , возникающую за счет первоначального угла атаки жесткого недеформированного крыла, и составляющую  $\Delta p_a^e$ , обусловленную упругой деформацией, то равенство (8-289) примет вид

$$Z(x, y) = \Delta p_a^e + \Delta p_a^r - \rho N g. \quad (8-290)$$

Равенства (8-288) и (8-290) приводят к следующему интегральному уравнению равновесия:

$$-\alpha^e(x, y) = \int_S \int C^{az}(x, y; \xi, \eta) \Delta p_a^e(\xi, \eta) d\xi d\eta + f(x, y), \quad (8-291)$$

где

$$f(x, y) = \int_S \int C^{az}(x, y; \xi, \eta) (\Delta p_a^r - \rho N g) d\xi d\eta. \quad (8-292)$$

Неизвестными величинами в уравнении (8-291) являются  $\alpha^e(x, y)$  и  $\Delta p_a^e(x, y)$ . Задача решения уравнения (8-291) становится математически определенной при условии привлечения дополнительного соотношения, связывающего неизвестные величины и основанного на аэродинамической теории. Это соотношение, согласно обозначениям гл. 5, можно, например, записать в следующей символической форме:

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{U} \mathfrak{A}(\gamma_a) = \frac{1}{\rho U^2} \mathfrak{A}(\Delta p_a), \quad (8-293)$$

где  $\Delta p_a = \rho U \gamma_a$ . Уравнения (8-291) и (8-293) являются основой для описания явлений статической аэроупругости несущей поверхности. Например, скорость дивергенции получим по наименьшему собственному значению однородного уравнения, получающегося из уравнения (8-291) при  $f(x, y) = 0$ . Симметричные и антисимметричные условия нагружения получим, подставляя соответствующие значения  $\Delta p_a^r$  и  $N$ .

При рассмотрении возможных решений следует руководствоваться тем, насколько существующие теории аэродинамических и упругих явлений подходят для целей нашего исследования. В гл. 2 и 5 мы видели, что хотя для описания задачи о несущих поверхностях произвольной формы в плане и имеются соответствующие теории (теория установившихся аэродинамических движений и строительная механика упругих конструкций), они настолько сложны, что следует признать безусловную необходимость тщательно разработанных численных методов решения.

*Решение методом коллокаций.* Одним из методов решений является метод коллокаций, при котором уравнение (8-291) должно удовлетворяться в  $n$  различных точках на поверхности крыла. Таким образом, для  $i$ -й точки уравнение (8-291) будет иметь вид

$$-\alpha_i^e = \int_S \int C^{az}(x_i, y_i; \xi, \eta) \Delta p_a^e(\xi, \eta) d\xi d\eta + f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8-294)$$

Проинтегрировав уравнение (8-294) численным методом с помощью весовых чисел, получим следующую сумму:

$$-\alpha_i^e = \sum_{j=1}^n C_{ij}^{az} \bar{W}_j \Delta p_{aj}^e + f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8-295)$$

Записывая правую и левую части уравнения (8-295) в матричной форме, имеем

$$-\frac{1}{\rho U^2} [A] \{\Delta p_a^e\} = [C^{az}] [\bar{W}] \{\Delta p_a^e\} + \{f\}, \quad (8-296)$$

где

$$\{f\} = [C^{az}] [\bar{W}] (\{\Delta p_a^r\} - N \{\rho g\}).$$

Если коэффициенты аэродинамического влияния  $[A]$  и коэффициенты упругого влияния  $[C^{az}]$  определены в явном виде, уравнение (8-296) может быть решено теми же методами, которые применялись при решении матричных уравнений для случая тонких крыльев. Исключительная трудность задачи как раз и обусловлена необходимостью определения этих матриц. Вопросы, связанные с упругими и аэродинамическими матрицами коэффициентов влияния, подробно рассмотрены в гл. 2, 5, 6 и 7.

*Представление решения в зависимости от обобщенных координат.* Второй метод решения основывается на использовании обобщенных координат и заранее заданных формах деформации и очень напоминает метод, уже изложенный в п. 8-3(e) и 8-4(g). Примем, что углы атаки в плоскости течения,

обусловленные деформацией крыла, можно представить в виде суммы известных функций следующим образом:

$$\alpha^e(x, y) = \sum_{k=1}^n \gamma_k(x, y) q_k, \quad (8-297)$$

где  $\gamma_k(x, y)$  — известные функции деформации, удовлетворяющие граничным условиям  $\gamma_k(x, 0) = \partial \gamma_k(x, l) / \partial y = 0$ . Если теперь предположить, что для каждой из этих функций деформации с помощью подходящей аэродинамической теории можно получить соответствующее распределение давления  $\Delta p_k(x, y)$ , то распределение давления  $\Delta p_a^e$  приближенно можно представить с помощью соотношения

$$\Delta p_a^e = \sum_{k=1}^n \Delta p_k(x, y) q_k. \quad (8-298)$$

Подставляя выражения (8-297) и (8-298) в уравнение (8-291), получаем

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \gamma_k(x, y) + \int_S \int C^{zz}(x, y; \xi, \eta) \Delta p_k d\xi d\eta \right\} q_k = -f(x, y). \quad (8-299)$$

Решение уравнения (8-299) можно получить методом Галеркина или с помощью простого процесса коллокаций, при котором уравнение удовлетворяется на сетке из  $n$  точек на поверхности крыла. Если, например, уравнение (8-299) удовлетворяется в  $n$  сечениях на поверхности крыла, то в результате получаем  $n$  совместных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \gamma_k(x_i, y_i) + \int_S \int C^{zz}(x_i, y_i; \xi, \eta) \Delta p_k d\xi d\eta \right\} q_k = -f(x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8-300)$$

Если с помощью матрицы весовых чисел вычислить интеграл, стоящий в левой части, то уравнение (8-300) перейдет в следующее:

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \gamma_{ki} + \sum_{j=1}^n C_{ij}^{zz} \bar{W}_j \Delta p_{kj} \right\} q_k = -f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8-301)$$

Подставив в уравнение (8-298) обобщенные координаты, определенные из решения уравнения (8-301), получим решение для распределения давления, обусловленного упругой деформацией.

При выборе функций деформации исследователь должен руководствоваться фактами существования соответствующих распределений давления  $\Delta p_k(x, y)$ . Исходя из этого важного соображения, Линь и Бянь [8-34] предлагают следующую форму уравнения (8-297):

$$\alpha^e(x, y) = yq_1 + xyq_2 + y^2q_3 + x^2yq_4 + xy^2q_5 + y^3q_6 + \dots \quad (8-302)$$

Вопрос предсказания распределений давления, соответствующих этим функциям деформации, явился предметом обширных исследований. В случае крыльев очень малого удлинения и, конечно, крыльев большого удлинения для вычисления распределений давления существуют ясные и сравнительно простые методы. При средних значениях удлинения (вблизи единицы или двух) теории, которую было бы легко применить для вычисления подобного распределения, не существует. Эти и другие вопросы, связанные с распределениями давления по крыльям произвольной формы в плане, рассматриваются в гл. 5, 6 и 7.

## Глава 9

### ФЛАТТЕР

**9-1. Введение. Природа флаттера.** Флаттер можно определить как динамическую неустойчивость упругого тела в потоке воздуха. Наиболее часто явление флаттера наблюдается у тел, подверженных большим поперечным аэродинамическим нагрузкам типа подъемной силы подобно крыльям самолетов, хвостовым оперениям и рулевым поверхностям. Возможно, что задача о флаттере больше, нежели какая-либо другая, является характерной задачей аэроупругости. Так же как в случае дивергенции, единственными воздушными нагрузками, необходимыми для возбуждения флаттера, являются те, которые возникли вследствие отклонений упругой конструкции от недеформированного состояния.

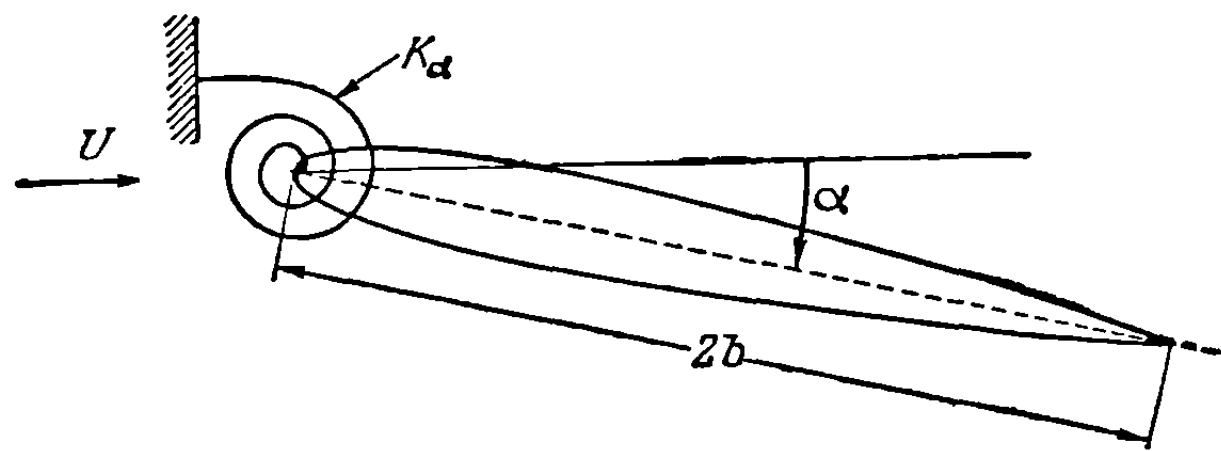
В большом числе случаев надлежащее представление о свойствах флаттера системы можно получить, исследуя устойчивость ее бесконечно малых движений. При этом достаточно проанализировать только колебание системы с экспоненциальной зависимостью от времени  $e^{pt}$  ( $p$  — комплексное число), так как все прочие малые движения системы могут быть построены из этого движения с помощью метода наложения. Если малые деформации системы динамически неустойчивы, то подобное положение независимо от устойчивости больших деформаций является нежелательным для любого пилотируемого летчиком или автоматически управляемого самолета. На практике большие перемещения системы являются обычно устойчивыми, если устойчивы малые перемещения. В действительности они могут обладать даже гораздо большей устойчивостью, как например в случае ограничения амплитуды, обусловленного срывом потока при флаттере, который часто наблюдается в аэродинамической трубе на очень гибких моделях. Существует возможность значительного улучшения характеристик флаттера, заключающаяся в том, что на конструкции тем или иным способом устанавливается соответствующим образом спроектированная, быстро реагирующая система автоматического регулирования, находящаяся в обратной связи с тем движением, которое необходимо стабилизировать. Однако рассчитывать на пилота в смысле компенсации флаттера нельзя потому, что частоты слишком высоки для того, чтобы он мог обеспечить эффективную реакцию.

Флаттер, или критическая скорость,  $U_F$  и частота  $\omega_F$ , определяются соответственно как *наименьшая* скорость и соответствующая ей круговая частота, при которой данная конструкция, совершающая полет при определенных плотности и температуре воздуха, будет испытывать простые гармонические колебания. Скорость полета  $U_F$  определяет граничную линию, или границу нейтральной устойчивости, потому что все малые движения должны быть устойчивыми на скоростях ниже  $U_F$ , тогда как расходящиеся колебания обычно могут иметь место в диапазоне скоростей (или на всех скоростях) выше  $U_F$ . Так как описание аэродинамических нагрузок, обусловленных простым гармоническим движением, математически проще, чем описание нагрузок другого вида, то теоретически анализ флаттера часто состоит в том, что заранее принимают все зависимые переменные пропорциональными  $e^{i\omega t}$  ( $\omega$  — действительное число) и ищут комбинации  $U$  и  $\omega$ , для которых это в действительности имеет место.

Таким образом, приходят к комплексной или двойной задаче о краевых значениях, когда два характеристических числа определяют скорость и частоту, в противоположность задаче о свободных колебаниях линейной системы в вакууме, являющейся действительной или одинарной задачей о краевых значениях.

Методы расчета флаттера весьма разнообразны. Флаттер может рассчитываться с помощью чисто теоретических методов, вычислительных устройств, испытаний динамически подобных моделей в аэродинамической трубе или на ракетах и путем испытаний полноразмерного самолета в полете. Решение вопроса о том, какой из этих способов в данном случае наиболее экономичен, зависит от множества факторов, таких, как вероятная граница безопасности от флаттера, диапазон чисел Маха и число различных масс и конструктивных конфигураций, предназначенных для исследования. Иногда быстрый расчет, основанный на весьма упрощающих задачу допущениях, достаточен для того, чтобы показать, что конструктору нечего бояться флаттера. С другой стороны, аэроупругист, поставленный перед необходимостью исследования нескольких сотен комбинаций масс, смонтированных снаружи весьма гибкого крыла, нашел бы, что динамическая модель была бы в этом случае наиболее экономичным и точным имитирующим вычислительным устройством. Некоторые из этих вопросов более подробно освещены в гл. 12 и 13. Настоящая глава ограничивается обзором теоретических методов решения задачи о флаттере.

Так как флаттер является одним из сложных явлений, которые встречаются на практике, то очень легко потерять из виду его физический смысл. По этой



Фиг. 9-1. Жесткое симметричное крыло, вращающееся около передней кромки в двумерном потоке.

причине мы начнем изучение систем со многими степенями свободы и типичных самолетных конструкций с изучения очень простой системы, обладающей многими из тех свойств, которые в дальнейшем встретятся нам в более сложных задачах. Рассмотрим двумерный жесткий профиль с размахом, равным единице, подвешенный на шарнире у передней кромки и упруго ограниченный в своем вращении относительно этой оси за счет спиральной пружины с постоянной  $K_\alpha$  фунт  $\times$  фут/рад. Профиль помещен в поток воздуха с малой скоростью так, что ненапряженное состояние пружины соответствует углу атаки  $\alpha$ , равному нулю (фиг. 9-1). Если момент инерции профиля относительно передней кромки равен  $I_\alpha$ , то уравнение движения этой системы с одной степенью свободы имеет вид

$$I_\alpha \ddot{\alpha} + K_\alpha \alpha = M_y, \quad (9-1)$$

где  $M_y$  — аэродинамический момент, обусловленный углом атаки  $\alpha(t)$ . Для целей настоящего примера допустим, что плотность воздуха  $\rho$  настолько мала и профиль настолько тяжел, что имеет место равенство

$$\frac{I_\alpha}{\pi \rho b^4} = 1000. \quad (9-2)$$

(Эта цифра нереальна, так как на уровне моря это грубо соответствует профилю с относительной толщиной  $12\%$ , изготовленному из сплошного куска стали. Она в 25—50 раз превышает значения для этой величины, обычно встречающиеся, когда мы имеем дело с самолетом. Однако в нашем простом примере такая величина необходима для того, чтобы имел место флаттер рассматриваемой конструкции.)

Как указано в гл. 5, ось вращения проходит через точку  $a = -1$ . Определим сначала условие флаттера. Положив

$$\alpha = \bar{\alpha}_0 e^{i\omega t} \quad (9-3)$$

и подставив выражение (9-3) в уравнение (9-1), после деления на  $\pi\rho b^4\omega^2\alpha_0 e^{i\omega t}$  получим

$$\frac{I_\alpha}{\pi\rho b^4} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 \right] + m_y = 0. \quad (9-4)$$

Здесь  $\omega_\alpha$  означает собственную частоту крутильных колебаний в вакууме

$$\omega_\alpha = \sqrt{\frac{K_\alpha}{I_\alpha}}, \quad (9-5)$$

и  $m_y$  — сокращенное обозначение безразмерных аэродинамических коэффициентов, которые в обозначении, использованном в [9-1], можно записать в виде (ср. п. 5—6)

$$m_y = \frac{M_y}{\pi\rho b^4\omega^2\alpha_0 e^{i\omega t}} = M_\alpha - \left( L_\alpha + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2. \quad (9-6)$$

Так как  $a = -1$ , то  $m_y$  является функцией приведенной частоты колебаний  $k = \frac{\omega b}{U}$ .

Коэффициент  $m_y$  представляет собой комплексное число, и поэтому уравнение (9-4) можно разбить на действительную и мнимую части:

$$\operatorname{Re} \{m_y\} = \frac{I_\alpha}{\pi\rho b^4} \left[ \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 - 1 \right] = 1000 \left[ \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 - 1 \right], \quad (9-7a)$$

$$\operatorname{Im} \{m_y\} = 0. \quad (9-7b)$$

Мы видим, что флаттер имеет место при том значении приведенной частоты, при котором обращается в нуль компонента аэродинамического момента, не совпадающая по фазе с углом атаки, если соответствующая компонента, совпадающая по фазе с углом атаки, достигает такой величины, что по уравнению (9-7a) можно определить действительную частоту флаттера  $\omega$ . Как показал Смиг [9-2], последнее условие имеет место для вышеуказанного расположения оси до тех пор, пока величина  $I_\alpha/\pi\rho b^4$  превышает ориентировочно 550. Для нашего крыла  $k_F$  оказывается равным примерно 0,038 и  $\omega/\omega_F = 0,68$ . Если, например, хорда крыла равна 1 футу и к крылу прикреплена работающая на кручение пружина, для сообщения ему колебаний с собственной частотой, равной 1 цикл/сек, то флаттер такого крыла имел бы место при скорости  $U_F = 120$  фут/сек, а частота была бы равна 1,47 цикл/сек.

Для того чтобы выяснить причины этой неустойчивости, вообразим опыт, при котором скорость воздуха  $U$  постепенно в процессе исследования движения профиля увеличивается от нуля. Предполагается, что на любой скорости можно возбудить собственные колебания, частота которых будет медленно увеличиваться примерно от 1 цикл/сек при скорости  $U = 0$  до 1,47 цикл/сек при скорости флаттера. Частота при скорости  $U = 0$  определяется из того условия, что малый присоединенный момент инерции  $\left(\frac{9}{8}\right)\pi\rho b^4$  от покоящегося воздуха пренебрежим по сравнению с  $I_\alpha$ , так что практически крыло колеблется в вакууме. На любой скорости частоту колебаний можно вполне удовлетворительно оценить, если к пружине  $K_\alpha$ , работающей на кручение, добавить эффективную аэродинамическую пружину, жесткость которой определяется восстанавливающим моментом  $(M_y)_{k \rightarrow 0}$  за счет установившегося перемещения профиля:

$$(M_y)_{k \rightarrow 0} = -\pi\rho U^2 b^2 \alpha. \quad (9-8)$$

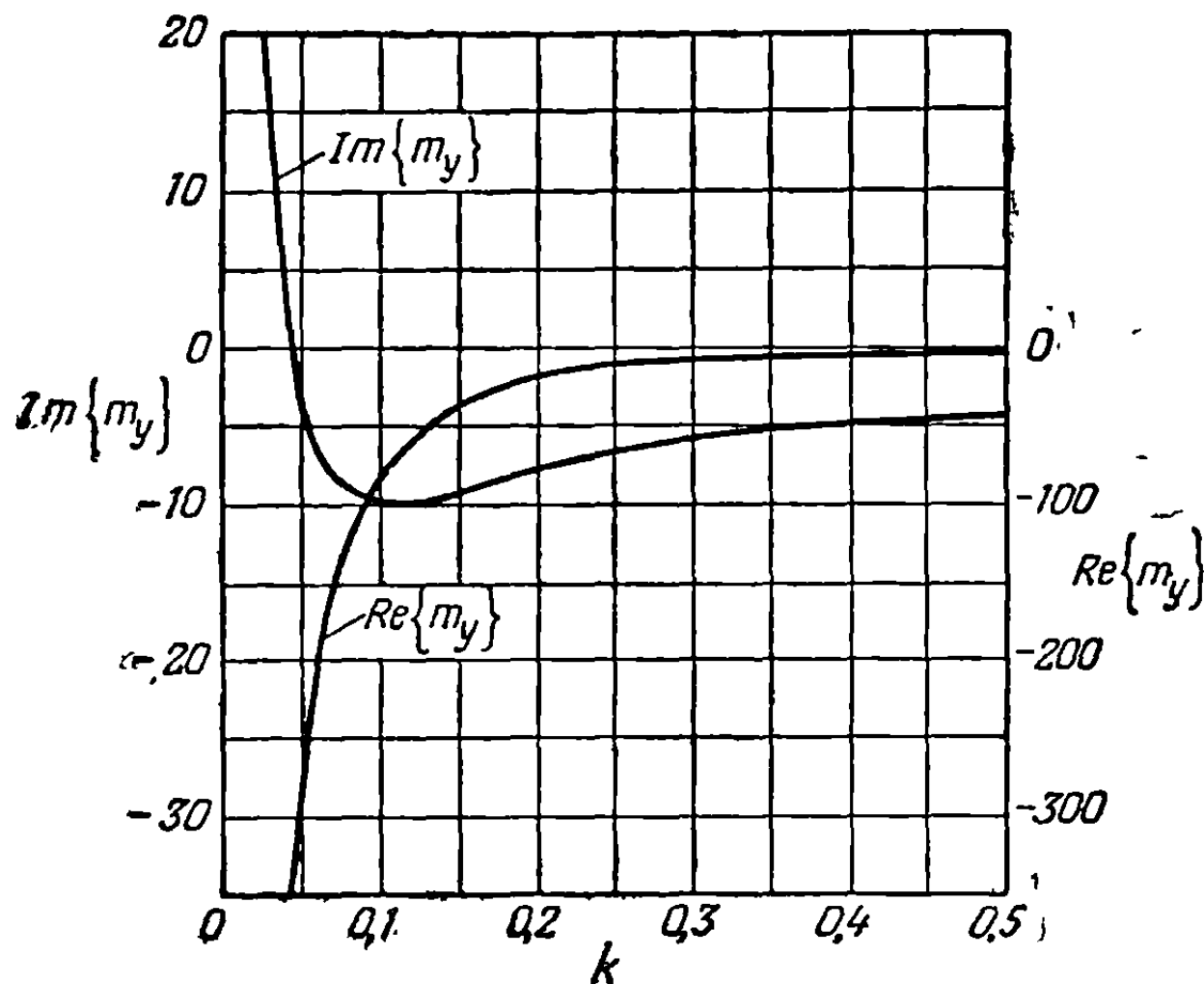
Подставив выражение (9-8) в уравнение (9-1), найдем частоту аппроксимирующей системы пружина — масса:

$$\omega^2 = \frac{K_\alpha}{I_\alpha} + \frac{\pi\rho U^2 b^2}{I_\alpha} = \omega_\alpha^2 + \frac{\pi\rho b^4}{I_\alpha} \cdot \frac{U^2}{b^2} = (2\pi)^2 + \frac{U^2}{1000b^2}. \quad (9-9)$$



Уравнение (9-9) определяет частоту свободных колебаний, или, другими словами, величину  $\omega$ , при которой вынужденное простое гармоническое движение системы пройдет через резонанс.

Постепенное увеличение  $\omega$  с ростом воздушной скорости сопровождается быстрым падением (от  $\infty$  при  $U=0$ ) приведенной частоты  $k$ . Поскольку мы имеем дело с вопросом устойчивости движения, нас интересует *демпфирование*, имеющее место у реальной системы. Это демпфирование имеет всецело аэродинамическую природу и зависит только от  $k$ . Вообразим, что профиль искусственно поддерживается в состоянии гармонического колебательного движения



Фиг. 9-2. Изменение действительной и мнимой частей безразмерного аэродинамического момента  $m_y$ , обусловленного вращением крыла около передней кромки в несжимаемом потоке при изменении приведенной частоты  $k$ .

единице, для пяти значений  $U$ . Для скоростей воздуха, меньших  $U_F$  (относительно высокое  $k$ ),  $Im\{M_y\}$  отрицательно. При  $U_F$  величина  $Im\{M_y\}$  проходит через нуль и при скорости, большей  $U_k$ , где  $k$  меньше значения 0,038, соответствующего флаттеру, становится положительной. Эта сдвинутая по фазе составляющая  $Im M_y$  является единственным источником демпфирования или неустойчивости для системы. Можно легко показать, что работа, совершаемая воздухом за каждый цикл простого гармонического движения профиля, равна

$$W = \pi \bar{\alpha}_0 \operatorname{Im} \left\{ \frac{M_y}{e^{i\omega t}} \right\}. \quad (9-10)$$

Таким образом,  $M_y$ , замедляющий это движение ( $Im\{M_y\} < 0$ ), отбирает энергию у колебательного движения, порождая демпфирование, и наоборот. Моменты, сдвинутые по фазе, невелики по сравнению с другими моментами, действующими в системе (ср. фиг. 9-2), но они полностью определяют ее устойчивость. Очень малый сдвиг  $M_y$  по фазе (сильно зависящий от скорости воздуха) ведет к флаттеру.

Таким образом, раскрыт смысл функции  $U_F$  как границы устойчивости, за которой будут иметь место расходящиеся колебания. Когда скорость воздуха становится очень большой, по уравнению (9-9) можно, пренебрегая сжимаемостью, оценить асимптотические величины частоты и приведенной частоты. Наконец, можно пренебречь членом, зависящим от жесткости пружины, по сра-

с частотой, определяемой уравнением (9-9). Тогда можно применить уравнение (9-6) и получить изменение компонент  $m_y$ , совпадающих и сдвинутых по фазе относительно угла атаки в зависимости от  $k$  (см. фиг. 9-2). Скручивающие моменты сил инерции, пружины и аэродинамических сил в уравнении (9-1) можно рассматривать как вращающиеся комплексные векторы фиксированной длины, угловая координата которых увеличивается со скоростью  $\omega t$ . На фиг. 9-3, на которой вектор положения  $\alpha = \bar{\alpha}_0 e^{i\omega t}$  использован в качестве линии отсчета, нанесено относительное расположение (при  $t=0$ ) трех векторов скручивающих моментов, действующих на систему с частотой крутильных колебаний, равной

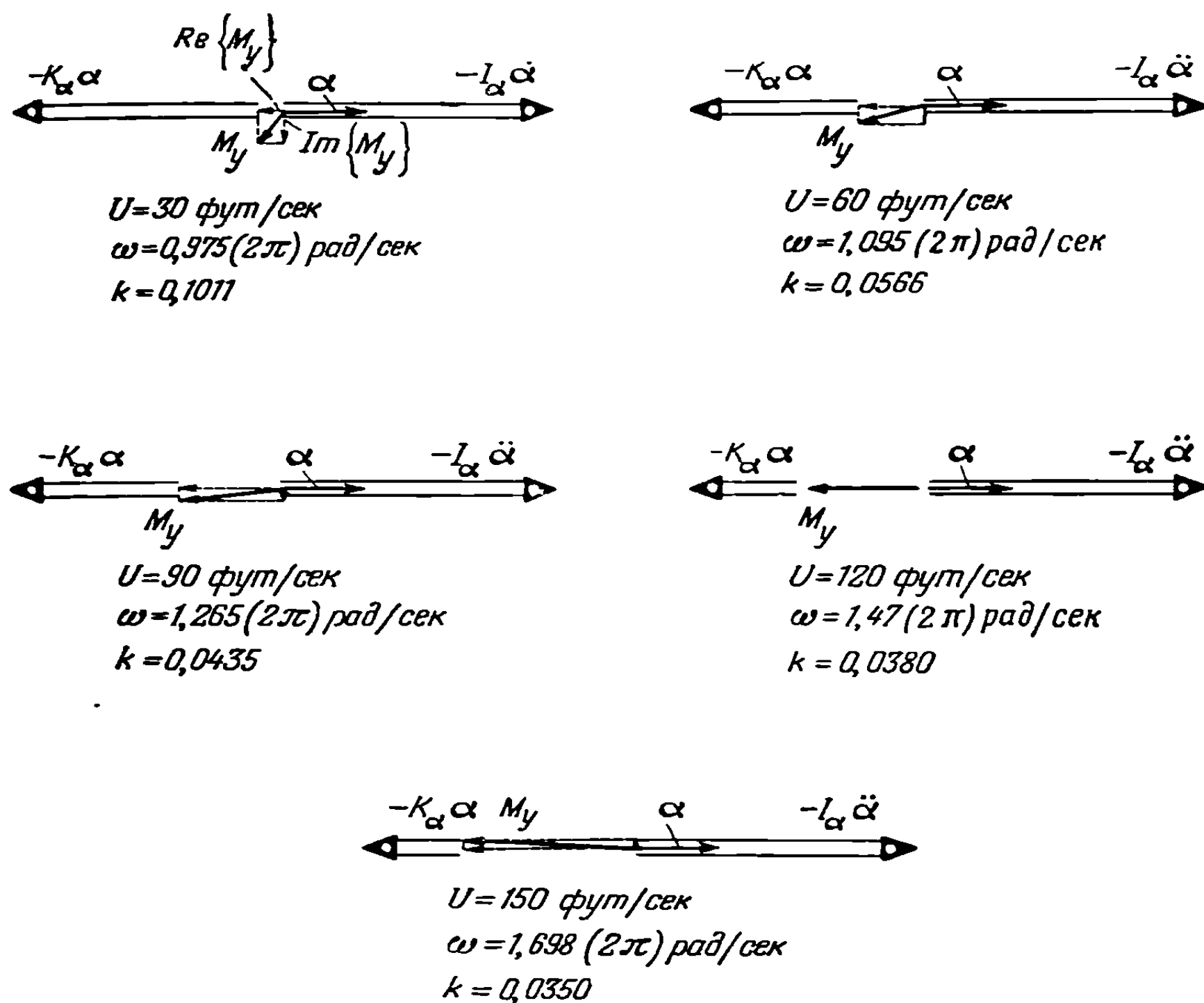
внению с членом, содержащим  $U^2$ , так что

$$\omega^2 \cong \frac{U^2}{1000b^2}, \quad (9-11a)$$

или

$$k = \frac{\omega b}{U} \cong \sqrt{\frac{1}{1000}} = 0,0316. \quad (9-11b)$$

Это значение  $k$  находится в неустойчивом диапазоне  $\text{Im}\{M_y\}$ ; таким образом, можно ожидать, что флаттерная неустойчивость будет сохраняться неограниченно долго. Между прочим, векторы моментов на фиг. 9-3 вследствие намеренного пренебрежения искусственным возбуждающим моментом, необходимым



Фиг. 9-3. Аэродинамический крутящий момент  $M_y$ , момент кручения пружины  $-K_\alpha\alpha$  и инерционный крутящий момент  $-I_\alpha\dot{\alpha}$ , действующие на крыло, совершающее простые гармонические колебания с частотой резонанса  $\omega$ , по мере увеличения воздушной скорости  $U$ . Крутящие моменты представлены в виде вращающихся комплексных векторов в момент  $t=0$ . (Примечание: значения  $\text{Im}\{M_y\}$  увеличены в 10 раз.)

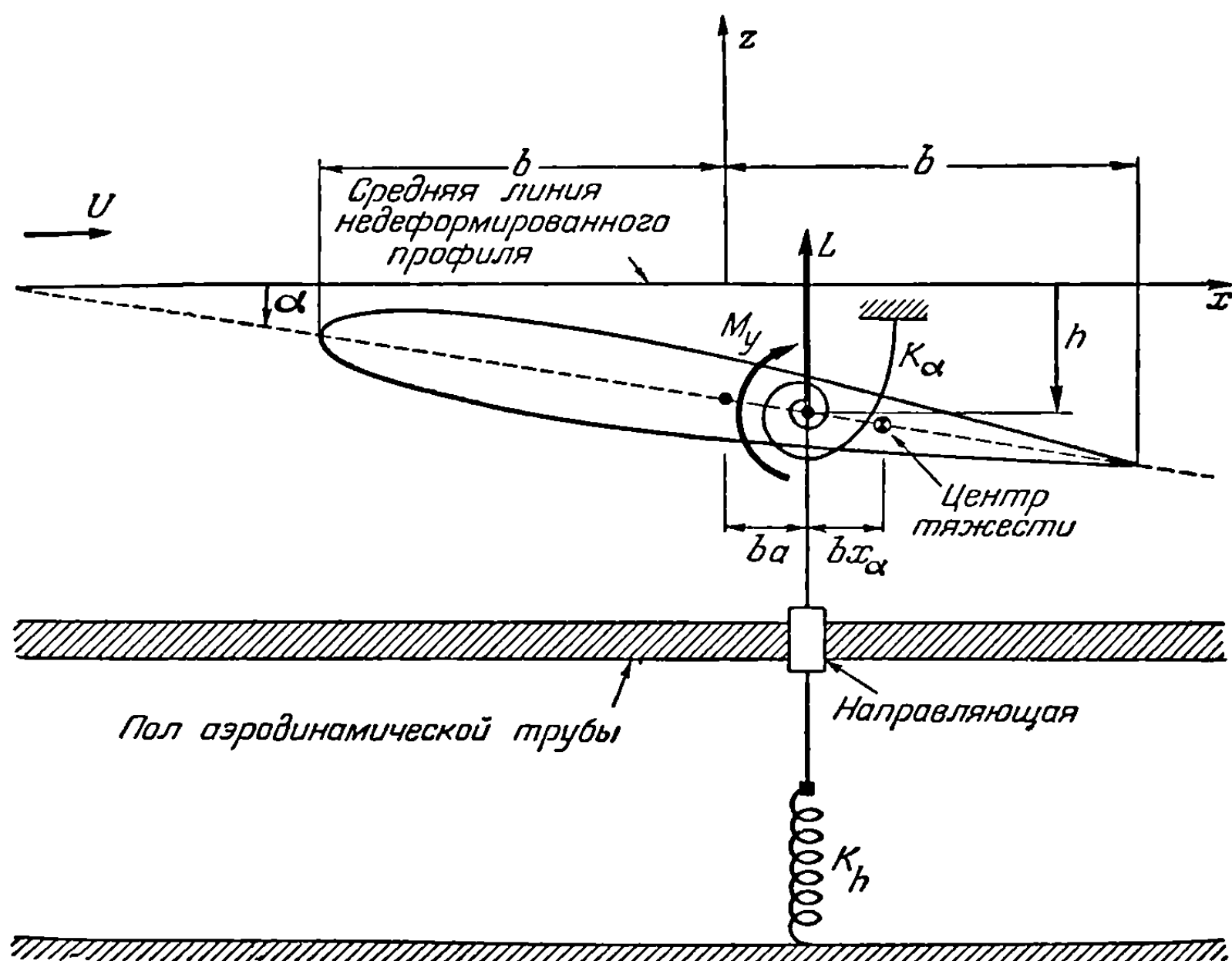
для поддержания синусоидального движения, за исключением режима флаттера, не находятся в равновесии. Основное назначение такого дисбаланса заключается в том, чтобы с помощью  $\text{Im}\{M_y\}$  пополнять расходуемую энергию или поглощать избыток ее.

Заметим, что, как показывает этот пример, неустановившиеся аэродинамические эффекты являются основой регулирования скорости флаттера даже при весьма низких частотах, имеющих место в данном случае. Если бы мы подставили вместо  $M_y$  выражение для квазиустановившегося аэродинамического момента

$$M_{yQS} = -\pi\rho U^2 b^2 \alpha - 3\pi\rho U b^3 \dot{\alpha} - \frac{9}{8}\pi\rho b^4 \ddot{\alpha}, \quad (9-12)$$

то нашли бы член, определяющий положительное демпфирование и пропорциональный скорости воздуха, и поэтому получили бы совершенно устойчивую систему. Хотя крутильный флаттер с одной степенью свободы и не встречается в основных конструкциях на малых скоростях, он представляет собой вполне реальное явление. Этот тип флаттера наблюдается на небольших относительно массивных деталях, подобных, например, крылышкам указателя рыскания. В сверхзвуковом потоке он может иметь также место и на обычных крыльях.

9-2. Флаттер простой системы с двумя степенями свободы. Вероятно, что наиболее опасным, хотя и не наиболее часто встречающимся типом флаттера



Фиг. 9-4. Крыло в потоке воздуха, удерживаемое от движений изгиба и кручения пружинами  $K_h$  и  $K_\alpha$ , действующими на крыло в точке, находящейся на расстоянии  $b\alpha$  позади середины хорды. Здесь же показаны также подъемная сила  $L$  и момент тангажа  $M_y$  около оси кручения.

самолета, является флаттер, получающийся в результате взаимодействия изгибных и крутильных движений крыла и хвостового оперения сравнительно большого удлинения. Массу качественных результатов, касающихся влияния различных параметров системы на этот тип флаттера, можно получить, изучая устойчивость простого профиля, изображенного на фиг. 3-22. На фиг. 9-4, повторяющей фиг. 3-22, показано положение координатной системы и приведены некоторые величины, представляющие основной интерес с точки зрения аэродинамики. Этот профиль представляет собой „изображающее сечение“ Теодорсена и Гаррика [9-3], [9-4], обладающее степенями свободы изгиба и кручения. Эти авторы показали, а последующий эксперимент подтвердил, что для целей расчета флаттера это сечение может быть сконструировано таким образом, чтобы достаточно хорошо представлять прямое крыло большого размаха. Для этого сечению придаются геометрические и инерционные свойства сечения крыла, находящегося на три четверти полуразмаха от центральной оси.

В п. 3-8 (с) показано применение уравнения Лагранжа для вывода уравнений свободных колебаний подобного изображающего сечения. Если вследствие обтекания тонкого профиля потоком воздуха на него действует распределение

давлений ( $p_U - p_L$ ), то в уравнения движения следует включить обобщенные внешние силы:

$$m\ddot{h} + S_a\ddot{\alpha} + m\omega_h^2 h = Q_h, \quad (9-13a)$$

$$S_a\ddot{h} + I_a\ddot{\alpha} + I_a\omega_a^2 \alpha = Q_a. \quad (9-13b)$$

Написав уравнение (3-210) для работы  $\delta W_e$ , совершаемой силой давления воздуха на бесконечно малых возможных перемещениях  $\delta h$  и  $\delta \alpha$ , получим выражения для  $Q_h$  и  $Q_a$  на единицу размаха крыла:

$$\delta W_e = Q_h \delta h + Q_a \delta \alpha = \int_{-b}^b \{ (p_U - p_L) dx \delta h + (p_U - p_L) [x - ba] dx \delta \alpha \}. \quad (9-14)$$

Из уравнения (9-14) следует, что

$$Q_h = \int_{-b}^b (p_U - p_L) dx = -L \quad (9-15a)$$

$$Q_a = \int_{-b}^b (p_U - p_L) [x - ba] dx = M_y, \quad (9-15b)$$

где  $L$  — текущая подъемная сила (положительна в направлении оси  $z$ ) и  $M_y$  — текущий момент (положителен для положительного направления вращения относительно оси  $y$ , направленной вдоль размаха и проходящей через  $x = ba$ )<sup>1</sup>). Для непосредственного их использования мы предполагаем, что длина элемента крыла в направлении оси  $y$  равна единице. Суммируем теперь все постоянные, входящие в уравнения (9-13):

$m$  — масса, приходящаяся на единицу размаха крыла;

$I_a$  — массовый момент инерции, приходящийся на единицу размаха крыла, около оси  $x = ba$ ;

$S_a = mbx_a$  — статический массовый момент инерции, приходящийся на единицу размаха крыла, около оси  $x = ba$  (положителен, когда центр тяжести по отношению к оси находится со стороны хвостового оперения);

$\omega_h = \sqrt{K_h/m}$  — собственная частота чистых изгибных колебаний;

$\omega_a = \sqrt{K_a/I_a}$  — собственная частота чистых крутильных колебаний.

Для определения режима флаттера представляют интерес только динамические вариации  $h$  и  $\alpha$  от установившихся значений, которые они принимают. Возможно, что крыло при рассматриваемом режиме полета будет иметь положительный угол атаки и, кроме того, у  $L$  и  $M_y$  могут появиться также слагаемые за счет кривизны профиля. Вопрос о статических деформациях, связанных с подобной нагрузкой, исследуется в гл. 8. Исходя из наших целей, вычтем из уравнений (9-13) уравновешенную систему сил и моментов, соответствующих установившемуся состоянию, и оставим только члены, зависящие от времени.

Стандартная схема исследования флаттера напоминает схему исследования свободных колебаний, если только заранее задать простое гармоническое движение, положив

$$h = \bar{h}_0 e^{i\omega t}, \quad (9-16a)$$

$$\alpha = \alpha_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = \bar{\alpha}_0 e^{i\omega t}. \quad (9-16b)$$

<sup>1</sup>) Для читателя не представит, конечно, никакого затруднения вывести уравнения (9-13) и (9-15) с помощью непосредственного применения к этой системе второго закона движения Ньютона.

Такое комплексное представление  $h$  и  $\alpha$  оправдывается линейностью уравнений движения, а согласно используемым аэродинамическим теориям, все зависимые переменные задачи содержат время в виде множителя  $e^{i\omega t}$ . Мы молчаливо принимаем, что действительные величины определяются действительными частями соответствующих им комплексных выражений, сознавая, что простота алгебраических выражений, достигаемая за счет введения комплексных обозначений, перевешивает некоторую потерю ясности их физического смысла. Поскольку сдвиг фаз в аэродинамических нагрузках порождает разность в фазах между  $h$  и  $\alpha$ , то это будет учитываться тем, что одна или обе амплитуды  $\bar{h}_0$  и  $\bar{\alpha}_0$  будут считаться комплексными величинами. Если начало отсчета времени выбрано так, чтобы  $\bar{h}_0$  было действительным, угол, на который  $\alpha$  опережает  $h$ , обозначается в уравнении (9-16b) через  $\varphi$  и является аргументом  $\bar{\alpha}_0$ .

Допущение о простом гармоническом движении позволяет переписать уравнения (9-13) в виде

$$-\omega^2 mh - \omega^2 S_\alpha \alpha + \omega_h^2 mh = -L, \quad (9-17a)$$

$$-\omega^2 S_\alpha h - \omega^2 I_\alpha \alpha + \omega_\alpha^2 I_\alpha \alpha = M_y. \quad (9-17b)$$

Выбор вида аэродинамических выражений для замены  $L$  и  $M_y$  зависит от диапазона чисел Маха, в котором ожидается возникновение флаттера. Различные формы таких выражений выведены в гл. 5 и 6, где сделаны ссылки также на источники, в которых имеются затабулированные данные. В настоящем параграфе мы упрощаем исследование, считая скорость потока малой; это позволяет записать  $L$  и  $M_y$  в форме, предложенной в [9-1]:

$$L = -\pi \rho b^3 \omega^2 \left\{ L_h \frac{h}{b} + \left[ L_\alpha - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \alpha \right\}, \quad (9-18a)$$

$$M_y = \pi \rho b^4 \omega^2 \left\{ \left[ M_h - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \frac{h}{b} + \left[ M_\alpha - (L_\alpha + M_h) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right] \alpha \right\}, \quad (9-18b)$$

где  $L_h$ ,  $L_\alpha$  и  $M_\alpha$  — сложные функции приведенной частоты  $k$ , а  $M_h$  для случая несжимаемого потока равно в точности  $1/2$ . Подставляя выражения (9-18) в уравнения (9-17) и деля на  $\pi \rho b^3 \omega^2 e^{i\omega t}$  и  $\pi \rho b^4 \omega^2 e^{i\omega t}$ , получим безразмерные уравнения флаттера

$$\frac{\bar{h}_0}{b} \left\{ \frac{m}{\pi \rho b^2} \left[ 1 - \frac{\omega_h^2}{\omega^2} \right] + L_h \right\} + \bar{\alpha}_0 \left\{ x_\alpha \frac{m}{\pi \rho b^2} + \left[ L_\alpha - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \right\} = 0, \quad (9-19a)$$

$$\frac{\bar{h}_0}{b} \left\{ x_\alpha \frac{m}{\pi \rho b^2} + \left[ \frac{1}{2} - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \right\} + \bar{\alpha}_0 \left\{ r_\alpha^2 \frac{m}{\pi \rho b^2} \left[ 1 - \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} \right] + \right. \\ \left. + M_\alpha - \left( L_\alpha + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right\} = 0. \quad (9-19b)$$

Поскольку уравнения (9-19) являются однородными уравнениями, они определяют алгебраическую задачу о собственных значениях с конечными решениями при тех комбинациях скорости и частоты, для которых равен нулю характеристический детерминант:

$$\begin{vmatrix} \left\{ \frac{m}{\pi \rho b^2} \left[ 1 - \frac{\omega_h^2}{\omega_\alpha^2} \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} \right] + L_h \right\} & \left\{ x_\alpha \frac{m}{\pi \rho b^2} + L_\alpha - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right\} \\ \left\{ x_\alpha \frac{m}{\pi \rho b^2} + \frac{1}{2} - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right\} & \left\{ r_\alpha^2 \frac{m}{\pi \rho b^2} \left[ 1 - \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} \right] + M_\alpha - \right. \\ & \left. - \left( L_\alpha + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right\} \end{vmatrix} = 0. \quad (9-20)$$

Уравнение (9-20), рассмотренное в свете анализа размерностей (ср. гл. 11), показывает, что отношение частот флаттера  $\omega_\alpha/\omega$  и приведенная частота  $k$  (или приведенная скорость  $1/k = U/b\omega$ ) неявно зависят от системы пяти следующих безразмерных параметров:

$a$  — положение оси;

$\omega_h/\omega_\alpha$  — отношение частот чисто изгибных и чисто крутильных колебаний;

$x_\alpha = S_\alpha/mb$  — безразмерный статический дисбаланс;

$r_\alpha = \sqrt{I_\alpha/mb^2}$  — безразмерный радиус инерции;

$m/\pi\rho b^2$  — относительная плотность.

Для частного случая крыла все эти пять параметров известны, однако для целей параметрических исследований более удобно считать известными только четыре, а пятый в процессе решения детерминанта искусственно считать вместе с  $\omega_\alpha/\omega$  неизвестной величиной.

Здесь мы только кратко остановимся на деталях решения уравнения (9-20), так как этот вопрос разбирается в следующем параграфе. Однако следует указать, что комплексная форма аэродинамических коэффициентов приводит к распадению детерминанта на действительное и мнимое уравнения, содержащие все параметры, за исключением приведенной частоты  $k$  в последнем. Вследствие характера этих аэродинамических членов оба уравнения включают сложные трансцендентные функции от  $k$ . Для того чтобы разрешить эти уравнения относительно  $k$  и  $\omega_\alpha/\omega$ , требуется, задавая физические параметры системы, применить метод подбора, который не является широко известным. Если задаться заранее величиной  $k$  и в качестве неизвестных взять  $\omega_\alpha/\omega$  и один из остальных параметров, то предстоит решить самое большее два совместных квадратных уравнения. Пока в качестве неизвестного параметра не используется  $a$ , то по крайней мере одно из этих уравнений является линейным в отношении обоих неизвестных, что позволяет с помощью простых алгебраических методов найти решения в явной форме.

Независимо от метода определения собственных значений  $U_F$  и  $\omega_F$ , характеризующих флаттер упругоопертого профиля крыла, по уравнению (9-19) можно затем найти форму колебаний при флаттере. Это достигается с помощью подстановки величины параметров крыла  $\omega_\alpha/\omega_F$  и  $k_F$  так, чтобы заключенные в скобки коэффициенты стали комплексными числами. Затем можно решить любое из двух уравнений относительно комплексного отношения  $\bar{\alpha}_0/\bar{h}_0$ , которое дает относительные амплитуды крутильных и изгибных колебаний и фазовый угол, на который кручение опережает изгиб. Как и в случае свободных колебаний (гл. 3), форма колебаний при флаттере находится с точностью до амплитуды одной степени свободы. Обычно в большинстве исследований не заботятся об определении точной формы колебания, поскольку наиболее важной характеристикой флаттера является существование и положение границы устойчивости при скорости потока воздуха  $U_F$ .

Главная задача настоящего пункта заключается в том, чтобы отыскать характерные значения основных параметров и показать влияние изменения каждого параметра в отдельности на характеристики изгибно-крутильного флаттера. Воспроизводящиеся здесь кривые взяты из работы [9-3], представляющей исключительно ценный источник параметрических данных по флаттеру с двумя степенями свободы (с тем ограничением, что диапазон изменения  $m/\pi\rho b^2$  меньше, нежели у типичного скоростного самолета).

В различных частях фиг. 9-5 показано изменение безразмерной скорости  $U_F/b\omega_\alpha$  в зависимости от  $\omega_h/\omega_\alpha$ ,  $m/\pi\rho b^2$ ,  $a$  и  $x_\alpha$  для ряда фиксированных значений других величин, характеризующих флаттер. На фиг. 9-5 (А) каждой серии кривых приписывается соответствующая ей безразмерная скорость дивергенции



при кручении  $U_D/b\omega_\alpha$ . Как показано в гл. 8,  $U_D$  определяется по формуле

$$U_D = \sqrt{\frac{K_\alpha}{2\pi\rho b^2 \left[\frac{1}{2} + a\right]}}, \quad (8-7)$$

в которой величина  $1/C^{00}$  заменена через  $K_\alpha$ , наклон кривой подъемной силы заменен своим теоретическим значением  $2\pi$  и расстояние от аэродинамического центра до оси вращения взято равным  $b\left(\frac{1}{2} + a\right)$ . Если разделить обе части уравнения (8-7) на  $b\omega_\alpha$  и использовать уравнение (9-5) и известную систему параметров, то в результате получим

$$\frac{U_D}{b\omega_\alpha} = \frac{1}{b\omega_\alpha} \sqrt{\frac{K_\alpha b^2}{I_\alpha}} \sqrt{\frac{I_\alpha}{mb^2} \frac{m}{\pi\rho b^2 [1+2a]}} = \sqrt{\frac{m}{\pi\rho b^2} \frac{r_\alpha^2}{[1+2a]}}. \quad (9-21)$$

Как уравнение (9-21), так и величины скоростей флаттера, приведенные на фиг. 9-5, дают одинаково однородные консервативные оценки<sup>1)</sup>, что обычно обуславливается допущением двумерной аэродинамической теории. Таким образом, можно заключить, что когда рассчитанная величина  $U_F$  существенным образом превышает  $U_D$ , то для рассматриваемой конфигурации на практике флаттера наблюдаться не будет.

Вследствие общности, достигаемой за счет безразмерных переменных, из фиг. 9-5 можно сделать большое количество выводов. Для многих практических форм крыльев можно даже произвести грубые оценки изгибно-крутильного флаттера в несжимаемом потоке. Хотя мы и не будем пытаться подробно объяснять полученные результаты, но все же обратим внимание читателя на некоторые особенно важные факты. Одним из таких фактов является заметное падение кривых на фиг. 9-5 (А) и 9-5 (С) для больших значений  $x_\alpha$  вблизи отношения частот  $\omega_h/\omega_\alpha$ , равного единице. Это падение будет наблюдаться в кривых зависимостей  $U_F$  от  $\omega_h/\omega_\alpha$  для крыльев самолетов с самыми высокими летными качествами, имеющих сравнительно большие относительные плотности и положительные статические дисбалансы. Следует только опасаться случая, когда необычно низкая крутильная жесткость и высокая изгибная жесткость приводят к резонансу. Впрочем, этот случай не является характерным. Более того, небольшое конструктивное трение может привести к увеличению минимальной величины  $U_F$  (ср. [9-3]) или даже совершенно уничтожить падение кривых.

Увеличение относительной плотности, как показано на фиг. 9-5 (В), обычно повышает скорость флаттера. Эти кривые можно интерпретировать как кривые зависимости скорости флаттера от высоты для рассматриваемого крыла. Таким образом, если максимальная скорость самолета не слишком увеличивается с высотой, критический режим обычно имеет место при полете на уровне моря. Несколько легких отдельных самолетов и планеров попадают в тот диапазон  $m/\pi\rho b^2$ , где  $U_F$  уменьшается с высотой. Однако испытания моделей, подобных тем, которые описываются в [9-7], указывают на то, что теория может быть неконсервативной в той области, в которой аэродинамические силы доминируют над инерционными силами системы.

1) В понятии аэроупругих термин „консервативный“ в применении к теории означает, что предсказываемая величина некоторой критической скорости почти всегда оказывается меньше той скорости, при которой соответствующая неустойчивость в действительности имеет место на самолете. Теория обычно считается консервативной, если она систематически завышает аэродинамические нагрузки. Хотя иногда и требуются более точные результаты, теории с известной долей „консерватизма“, проверенной многими опытами, могут быть очень ценными при предварительных исследованиях аэроупругих свойств.



Что касается массовых характеристик крыла, то из фиг. 9-5 (А) и 9-5 (В) видно, что как увеличение  $x_a$ , так и уменьшение  $r_a$  приводят к снижению  $U_F/b\omega_a$ , хотя в практическом диапазоне этих параметров скорость более чувствительна к изменению первого. Эти факты привели к мысли, что для предотвращения флаттера нужно создать такие крылья и оперения, у которых массы были бы уравновешены так, как это обычно делается по отношению к рулевым поверхностям. Обычно для того, чтобы сместить центр тяжести сечения крыла ближе к конструктивной его оси, необходимо увеличить вес крыла за пределы возможного. Однако, к счастью, для предотвращения изгибно-крутильного флаттера такое сильное уравновешивание не требуется. Одновременно необходимо тщательно исследовать влияние добавленной массы на другие параметры конструкции. Например, увеличение нагрузки на крыло с целью увеличения  $r_a^2$  без одновременного увеличения крутильной жесткости приводит к уменьшению скорости  $U_F$  вследствие уменьшения частоты.

Когда отношение частот близко к нулю, что может иметь место для очень тонких поверхностей, фиг. 9-5 (D), часть *a*, показывает интересное явление, заключающееся в том, что при фиксированной величине трех других параметров флаттер зависит только от комбинации  $(a + x_a)$ .

Последняя является безразмерной характеристикой, определяющей положение центра тяжести на хорде крыла; чем дальше назад по хорде располагается центр тяжести, тем ниже  $U_F$ , хотя для центров тяжести, располагающихся позади середины хорды, это влияние мало заметно. По аналогии с уравнением (9-21), в работе [9-3] предлагается следующая эмпирическая формула:

$$\frac{U_F}{b\omega_a} \cong \sqrt{\frac{m}{\pi r b^2} \frac{r_a^2}{[1 + 2(a + x_a)]}}, \quad (9-22)$$

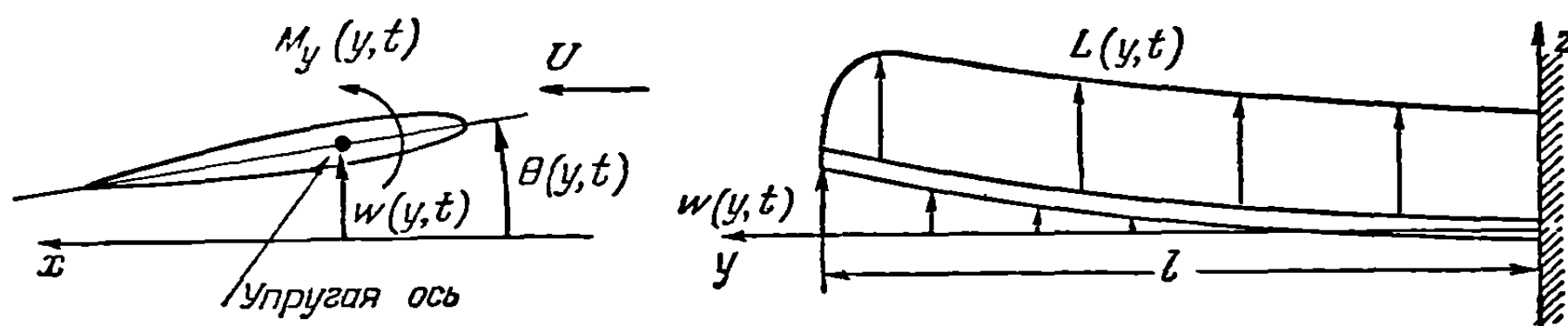
которую можно применять при очень малых  $\omega_h/\omega_a$  и относительной плотности, не превышающей 10. Уравнение (9-22) изображено на фиг. 9-5 (D) пунктирной кривой. Скобка в знаменателе выражения (9-22) равна расстоянию, на котором центр тяжести расположен позади аэродинамического центра. Когда эта скобка положительна, свободное крыло в полете статически неустойчиво. Довольно любопытным является тот факт, что когда центр тяжести лежит впереди точки, находящейся на четверти хорды, скорость флаттера в уравнении (9-22) становится мнимой. С другой стороны, пример, разобранный в п. 9-1 и соответствующий отношению частот, равному *бесконечности*, касается системы, которая может быть подвержена флаттеру только в том случае, если ось ее вращения располагается впереди точки, лежащей на четверти хорды. В подобном случае статическая неустойчивость свободного крыла сопровождается неустойчивостью по флаттеру, что является иллюстрацией одной из опасностей обобщения задачи флаттера.

В заключение этого пункта заметим, что частота изгибно-крутильного флаттера лежит где-то между  $\omega_h$  и  $\omega_a$  ( $\omega_h$  — наименьшая из двух частот). Однако теоретически могут иметь место случаи, когда  $\omega$  превышает  $\omega_a$ .

**9-3. Точное решение задачи об изгибно-крутильном флаттере однородного свободнонесущего крыла.** Как будет видно из последующих пунктов, большинство практических расчетов на флаттер основаны на допущении, что движение системы может быть представлено с помощью наложения конечного числа заданных функций деформаций. Этот метод описан в пп. 3-6—3-10, поскольку он используется для общего исследования колебаний, порождаемых внешними причинами. Исследователь почти принужден прибегать к этому методу, когда он встречается со сложной конструкцией, инерционные и упругие свойства которой обычно заданы в ряде точек и не могут быть удобным образом представлены в виде простых математических функций. Поэтому очень удачным является то обстоятельство, что существует несколько простых классов крыльев,

для которых можно в пределах линеаризованных аэродинамики и теории упругости точно решить задачу о флаттере; эти решения могут рассматриваться в качестве эталонов, позволяющих оценить точность приближенных методов.

Один из таких классов включает системы с суммарными характеристиками, подобными тем, которые исследовались в пп. 9-1 и 9-2. Сюда включаются также изображающие сечения, имеющие закрылки или триммеры, и аппроксимации крыльев большого удлинения системой, состоящей из отдельных масс, подобные тем аппроксимациям, которые использовались Майклстэдом [9-5]. Если в этом последнем случае аппроксимации число степеней свободы недостаточно велико, то вряд ли можно воспроизвести правдивую картину действительной конструкции, годную для целей расчета флаттера. Поэтому для сравнения с приближенными методами обратимся к известным точным решениям для однородных крыльев. Эти решения замечательны тем, что в них рассматривается случай распределенных параметров, для которого может быть составлено дифференциальное уравнение в частных производных, и форма флаттера дается



Фиг. 9-6. Две проекции однородного заземленного крыла, испытывающего деформации изгиба и кручения под действием аэродинамических нагрузок  $L(y, t)$  и  $M_y(y, t)$ .

в виде функции координаты вдоль размаха. Первый результат подобного рода был получен Голендом [9-6], исследовавшим задачу об изгибно-крутильном флаттере заземленного (свободнонесущего) крыла без надстроек с постоянной хордой и равномерным распределением массы и упругих свойств. Допустим, что конструкция деформируется как тонкая балка с изгибной жесткостью  $EI$  и крутильной жесткостью  $GJ$ . В направлении хорды жесткость произвольного сечения принимается бесконечной, а упругая ось крыла считается прямой линией. Окончательное деформированное состояние будет известно, если заданы нормальное перемещение  $w(y, t)$  упругой оси (положительное при отклонении крыла вверх) и угол закручивания  $\theta(y, t)$  около оси (положительный при закручивании носка крыла вверх). Деформированное крыло, находящееся в потоке воздуха, нагруженное аэродинамической силой  $L(y, t)$  и моментом  $M_y(y, t)$ , изображено на фиг. 9-6.

Динамические уравнения этой системы можно взять из проведенного в гл. 3 исследования вынужденного движения свободнонесущих крыльев. Таким образом, уравнения (3-155) и (3-156) описывают состояние неоднородной балки под обобщенной нагрузкой. Если подставить в правые части этих уравнений аэродинамические нагрузки и считать  $EI$ ,  $GJ$ ,  $m$  и т. д. постоянными, то в результате будем иметь

$$m\ddot{w}(y, t) - S_y\ddot{\theta}(y, t) + EI\frac{\partial^4 w(y, t)}{\partial y^4} = L(y, t), \quad (9-23)$$

$$I_y\ddot{\theta}(y, t) - S_y\ddot{w}(y, t) - GJ\frac{\partial^2 \theta(y, t)}{\partial y^2} = M_y(y, t), \quad (9-24)$$

где точки наверху означают дифференцирование по  $t$ . Допустим, что имеют место простые гармонические колебания, однако не будем прибегать к комплексному представлению этого движения:

$$w(y, t) = W_1(y) \cos \omega t + W_2(y) \sin \omega t, \quad (9-25)$$

$$\theta(y, t) = \Theta_1(y) \cos \omega t + \Theta_2(y) \sin \omega t, \quad (9-26)$$

где  $W_1(y)$ ,  $W_2(y)$  и  $\Theta_1(y)$ ,  $\Theta_2(y)$  — подлежащие определению функции, описывающие соответственно деформации изгиба и кручения крыла.

Скорость полета считается достаточно малой для того, чтобы было оправдано применение теории несжимаемой жидкости, а большое удлинение оправдывает применение двумерной теории несущей полосы. При этих условиях подъемная сила и момент, как известно из п. 5-6, могут быть записаны в символической форме (следуя [9-6]):

$$L(y, t) = \omega^2 L_w \varpi + \omega L'_w \dot{\varpi} + \omega^2 L_\theta \theta + \omega L'_\theta \dot{\theta}, \quad (9-27)$$

$$M_y(y, t) = \omega^2 M_w \varpi + \omega M'_w \dot{\varpi} + \omega^2 M_\theta \theta + \omega M'_\theta \dot{\theta}. \quad (9-28)$$

Восемь коэффициентов этих уравнений  $L_w$ ,  $L'_w$ , и т. д. являются функциями плотности воздуха, положения упругой оси и хорды крыла  $2b$ ; они зависят также сложным образом от приведенной частоты  $k$ . Эти коэффициенты можно отождествить с безразмерными затабулированными величинами  $L_h$ ,  $L_\alpha$ ,  $M_h$  и  $M_\alpha$ , если в равенства (5-350) и (5-351) подставить комплексные эквиваленты  $\varpi(y, t)$  и  $\theta(y, t)$  для  $(-h)$  и  $\alpha$ , а затем приравнять действительные части этих двух формул выражениям (9-27) и (9-28).

Если подставить выражения (9-25)—(9-28) в уравнения движения (9-23) и (9-24), то каждое из полученных в результате соотношений можно представить в виде суммы одной скобки, умноженной на  $\cos \omega t$ , и другой скобки, умноженной на  $\sin \omega t$ . Так как эти суммы равны нулю во все моменты времени, то отдельные скобки должны быть также равны нулю. В результате получим четыре независимых уравнения

$$EI \frac{d^4 W_1}{dy^4} - m \omega^2 W_1 - \omega^2 L_w W_1 - \omega^2 L'_w W_2 + S_y \omega^2 \Theta_1 - \omega^2 L_\theta \Theta_1 - \omega^2 L'_\theta \Theta_2 = 0, \quad (9-29)$$

$$\omega^2 L'_w W_1 + EI \frac{d^4 W_2}{dy^4} - m \omega^2 W_2 - \omega^2 L_w W_2 + \omega^2 L'_\theta \Theta_1 + S_y \omega^2 \Theta_2 - \omega^2 L_\theta \Theta_2 = 0, \quad (9-30)$$

$$- \omega^2 S_y W_1 + \omega^2 M_w W_1 + \omega^2 M'_w W_2 + GJ \frac{d^2 \Theta_1}{dy^2} + I_y \omega^2 \Theta_1 + \omega^2 M_\theta \Theta_1 + \omega^2 M'_\theta \Theta_2 = 0, \quad (9-31)$$

$$- \omega^2 M'_w W_1 - \omega^2 S_y W_2 + \omega^2 M_w W_2 - \omega^2 M'_\theta \Theta_1 + GJ \frac{d^2 \Theta_2}{dy^2} + I_y \omega^2 \Theta_2 + \omega^2 M_\theta \Theta_2 = 0. \quad (9-32)$$

Граничные условия для уравнений (9-29)—(9-32) заключаются в том, что на защемленном конце крыла  $y=0$  должны быть равны нулю деформации кручения и изгиба, а на свободном конце  $y=l$  должны быть равны нулю крутящий момент, поперечное усилие и изгибающий момент. Пользуясь функциями  $W$  и  $\Theta$ , эти условия можно записать в виде

$$W_1(0) = W_2(0) = \frac{dW_1(0)}{dy} = \frac{dW_2(0)}{dy} = \Theta_1(0) = \Theta_2(0) = 0, \quad (9-33)$$

$$\frac{d^2 W_1(l)}{dy^2} = \frac{d^2 W_2(l)}{dy^2} = \frac{d^3 W_1(l)}{dy^3} = \frac{d^3 W_2(l)}{dy^3} = \frac{d\Theta_1(l)}{dy} = \frac{d\Theta_2(l)}{dy} = 0. \quad (9-34)$$

Метод решения этой задачи не отличается заметным образом от обычно применяемого метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (например, дифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания однородной балки). Некоторое повышение эффективности вычислений может быть достигнуто за счет использования комплексного представления простых гармонических колебаний и преобразования Лапласа относительно переменного  $x$  (ср. [9-8] и [9-9]). Однако, по нашему мнению, в настоящем простом примере эти математические улучшения вряд ли будут способствовать лучшему пониманию физического смысла явлений.

Что касается всех методов исследования флаттера, то сложная зависимость аэродинамических коэффициентов от  $k$  вынуждает применять метод подбора. Этот метод делится на два этапа. Сначала для частного вида крыла и частных значений частоты и приведенной частоты находят общее решение системы дифференциальных уравнений (9-29) — (9-32), полагая

$$W_1 = Ae^{\lambda y}, \quad (9-35)$$

$$W_2 = Be^{\lambda y}, \quad (9-36)$$

$$\Theta_1 = Ce^{\lambda y}, \quad (9-37)$$

$$\Theta_2 = De^{\lambda y}. \quad (9-38)$$

Так как множители при всех неизвестных функциях и их производных в уравнениях (9-29) — (9-32) имеют численное выражение, то в результате получим четыре совместных алгебраических уравнения относительно  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Так как правые части всех уравнений равны нулю, то нетривиальные решения могут существовать только тогда, когда детерминант, составленный из коэффициентов при неизвестных в этих уравнениях, обращается в нуль. Это условие приводит к полиному шестой степени относительно неизвестного  $\lambda^2$ , получаемого в результате раскрытия детерминанта в уравнении:

$$\begin{vmatrix} \left[ \frac{EI}{\omega^2} \lambda^4 - m - L_w \right] & -L'_w & [S_y - L_\theta] & -L'_\theta \\ L'_w & \left[ \frac{EI}{\omega^2} \lambda^4 - m - L_w \right] & L'_\theta & [S_y - L_\theta] \\ [M_w - S_y] & M'_w & \left[ \frac{GJ}{\omega^2} \lambda^2 + I_y + M_\theta \right] & M'_\theta \\ -M'_w & [M_w - S_y] & -M'_\theta & \left[ \frac{GJ}{\omega^2} \lambda^2 + I_y + M_\theta \right] \end{vmatrix} = 0. \quad (9-39)$$

Все коэффициенты этого полинома являются действительными величинами, и в самом общем случае он имеет шесть комплексных корней  $\lambda^2$ , образующих три сопряженные комплексные пары значений. Любое частное значение  $\lambda_r^2$  дает два сопряженных комплексных значения  $\lambda$ , которые обозначаются следующим образом:

$$\lambda_r = \xi_r + i\eta_r, \quad (9-40a)$$

$$(\lambda_r)_{\text{сопр.}} = \xi_r - i\eta_r. \quad (9-40b)$$

Каждому значению  $\lambda_r$  можно поставить в соответствие в уравнении для  $W_1$  комплексную постоянную  $A_r$ , в уравнении для  $W_2$  — постоянную  $B_r$  и т. д. Однако, для того чтобы гарантировать, что полученные таким образом функции действительны, постоянная, соответствующая  $(\lambda_r)_{\text{сопр.}}$ , должна быть равна  $(A_r)_{\text{сопр.}}$ . Это приводит к объединению каждой сопряженной пары значений в следующем выражении:

$$A_r e^{(\xi_r + i\eta_r)y} + (A_r)_{\text{сопр.}} e^{(\xi_r - i\eta_r)y} = e^{\xi_r y} [a_r \cos \eta_r y + a'_r \sin \eta_r y], \quad (9-41)$$

где

$$a_r = A_r + (A_r)_{\text{сопр.}} \quad (9-42a)$$

$$a'_r = i [A_r - (A_r)_{\text{сопр.}}] \quad (9-42b)$$

являются действительными постоянными. Самое общее решение системы (9-29)—(9-32) мы получим, суммируя все возможные члены вида (9-41):

$$W_1(y) = \sum_{r=1}^6 e^{\xi_r y} [a_r \cos \eta_r y + a'_r \sin \eta_r y], \quad (9-43)$$

$$W_2(y) = \sum_{r=1}^6 e^{\xi_r y} [b_r \cos \eta_r y + b'_r \sin \eta_r y], \quad (9-44)$$

$$\Theta_1(y) = \sum_{r=1}^6 e^{\xi_r y} [c_r \cos \eta_r y + c'_r \sin \eta_r y], \quad (9-45)$$

$$\Theta_2(y) = \sum_{r=1}^6 e^{\xi_r y} [d_r \cos \eta_r y + d'_r \sin \eta_r y]. \quad (9-46)$$

Тридцать шесть величин  $b_r$ ,  $b'_r$ ,  $c_r$ ,  $c'_r$ ,  $d_r$  и  $d'_r$  связаны с двенадцатью величинами  $a_r$  и  $a'_r$ . Это можно обнаружить, если подставить любую систему решений (9-35)—(9-38) в уравнения (9-29)—(9-32) и вычислить отношения  $B_r/A_r$ ,  $C_r/A_r$  и  $D_r/A_r$ . Этот процесс приводит к ряду соотношений, подобных следующему:

$$\frac{B_r}{A_r} = a_r + i\beta_r, \quad \frac{(B_r)_{\text{сопр.}}}{(A_r)_{\text{сопр.}}} = a_r - i\beta_r, \quad (9-47)$$

из которых в свою очередь получим

$$b_r = a_r a_r + \beta_r a'_r, \quad b'_r = -\beta_r a_r + a_r a'_r. \quad (9-48)$$

Таким образом, в формулах (9-43)—(9-46) остается двенадцать действительных независимых постоянных  $a_r$  и  $a'_r$ , которые должны определяться из двенадцати граничных условий (9-33)—(9-34).

Второй этап в этом методе решения заключается в приспособлении общего решения к частному виду рассматриваемой балки. Здесь имеется отличие от задач, рассматривающих свободные колебания, где граничные условия дают характеристическое уравнение для собственных значений частоты  $\omega$ . Характер аэродинамических коэффициентов вынуждает задавать эту частоту заранее, причем нужно испробовать ряд значений  $\omega$  и  $k$ , пока не найдутся такие, которые удовлетворяют всем условиям (9-33)—(9-34). Коэффициенты в суммах (9-43)—(9-46) нужно выразить через двенадцать коэффициентов  $a_r$  и  $a'_r$  и полученные выражения подставить в уравнения (9-33)—(9-34). В результате будем иметь двенадцать действительных совместных однородных уравнений. Все коэффициенты этих уравнений будут действительными числами, но в общем случае детерминант, составленный из этих коэффициентов, не равен нулю. Все этапы расчета повторяются до тех пор, пока не получатся такие значения для  $k_F$  и  $\omega_F$ , которые обращают в нуль указанный выше детерминант. Таким образом, критическое условие оказывается выполненным, поскольку все физические условия задачи удовлетворяются при простом гармоническом флаттере с частотой  $\omega_F$  и скоростью

$$U_F = \frac{b\omega_F}{k_F}. \quad (9-49)$$

Между прочим, вид функций изгибной и крутильной деформации при флаттере определяется подстановкой соответствующего ряда значений  $a_r$  и  $a'_r$  при посредстве равенств (9-43)—(9-46) в уравнения (9-25) и (9-26). Величина одной из этих постоянных остается неопределенной, так как суммарную амплитуду любого автоколебания линейной системы можно брать произвольно, задавая количество энергии, затрачиваемой в начале колебания. Отметим одно

важное различие между формами флаттера и характеристическими колебаниями в вакууме. Так как отношения  $W_1/W_2$ ,  $\Theta_1/\Theta_2$  и  $\omega/\theta$  не являются независимыми от  $y$ , то величины, выражающие изгиб и кручение в различных сечениях, не проходят через нуль одновременно. Поэтому движения, соответствующие этим степеням свободы, не совпадают по фазе друг с другом и даже движения одного вида не совпадают по фазе в различных точках вдоль размаха. Колебательное движение такого вида в его наиболее общей форме представляло бы движущиеся волны изгиба и кручения. Такие колебания, когда недемпфирующая система, составленная только из масс и жесткостей, колеблется без воздействия внешних сил, еще никогда не наблюдались. Если такие волны присутствуют во флаттере, то появление их должно быть всецело отнесено за счет сдвига фаз между аэродинамическими нагрузками и движениями, которые они порождают.

Голенд в [9—6] применяет описанный выше метод к типичному свободно-несущему крылу с хордой 6 футов и полуразмахом 20 футов. Ниже помещаются другие характеристики этого крыла, входящие в уравнения (9-23) и (9-24):

$$\begin{aligned} m &= 0,746 \text{ слаг/фут}, & I_y &= 1,943 \text{ слаг} \cdot \text{фут}^2/\text{фут} \\ S_y &= 0,447 \text{ слаг} \cdot \text{фут/фут}, & EI &= 23,6 \times 10^6 \text{ фунт} \cdot \text{фут}^2, \\ & & GJ &= 2,39 \times 10^6 \text{ фунт} \cdot \text{фут}^2. \end{aligned} \quad (9-50)$$

Голенд сравнивает результаты точных расчетов флаттера с расчетами флаттера, основанными на допущении, что формы изгибных и крутильных колебаний идентичны основным тонам свободных колебаний той же самой балки при  $S_y$ , равном нулю. Последнее сравнение постоянно делается в практике расчетов изгибно-крутильного флаттера и описывается в п. 9-5. Собственные значения флаттера получаются следующие:

	Точное решение	Приближенное решение
$U_F$	393 миль в час	385 миль в час
$\omega_F$	$66,2 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$	$67,4 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$
$1/k_F$	2,90	2,80

Хотя согласие между двумя решениями хорошее, наиболее интересным является сравнение форм колебаний при флаттере. Расчет, основанный на задании функций деформаций, приводит к следующим результатам

$$\omega(y, t) = W_b(y) \cos \omega t, \quad (9-51a)$$

$$\theta(y, t) = 0,17 \Theta_t(y) \cos(\omega t - 56^\circ 51'), \quad (9-51b)$$

где две нормированные формы колебаний свободнонесущей балки имеют вид (ср. гл. 3)

$$W_b(y) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{ch} \frac{0,597 \pi y}{l} - 0,734 \operatorname{sh} \frac{0,597 \pi y}{l} - \cos \frac{0,597 \pi y}{l} + \right. \\ \left. + 0,734 \sin \frac{0,597 \pi y}{l} \right\}, \quad (9-52a)$$

$$\Theta_t(y) = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{l}. \quad (9-52b)$$

По этим уравнениям нельзя обнаружить явление перемещения волны, несмотря на то, что изгиб опережает кручение по фазе на  $57^\circ$ . Голенд обнаружил, что



точные формы колебаний можно очень хорошо аппроксимировать с помощью выражений

$$\omega(y, t) = W_E(y) \cos \omega t, \quad (9-53a)$$

$$\theta(y, t) = \Theta_E(y) \cos(\omega t - 56^\circ 57'). \quad (9-53b)$$

Более того, функция  $W_E(y)$  не отличается от  $W_b(y)$ , а  $\Theta_E(y)$  отличается от  $0,17 \Theta_t(y)$  только тем, что амплитуда конца крыла будет равна примерно 0,15 вместо 0,17. Мы видим, что разница между фазовыми углами в равенствах (9-51b) и (9-53b), возможно, будет меньше ошибки вычисления. При выводе равенства (9-53) в расчет принималась возможность появления перемещающихся волн при кручении, однако в действительности такие волны не появляются.

Мы имеем полное основание заключить, что сравнительно простой анализ флаттера, основанный на задании вида функций деформаций, будет точным для гладких прямых крыльев большого удлинения. Нет и причин для того, чтобы не распространить это заключение на суживающиеся крылья с неоднородными жесткостными и массовыми характеристиками до тех пор, пока нет сильных разрывов непрерывности в их распределении. Опыт, однако, показывает, что такая точность обычно не достигается, если конструкция включает большие сосредоточенные массы, подобные моторным гондолам и внешним нагрузкам. То же самое можно сказать о флаттере рулевых поверхностей сложных конфигураций.

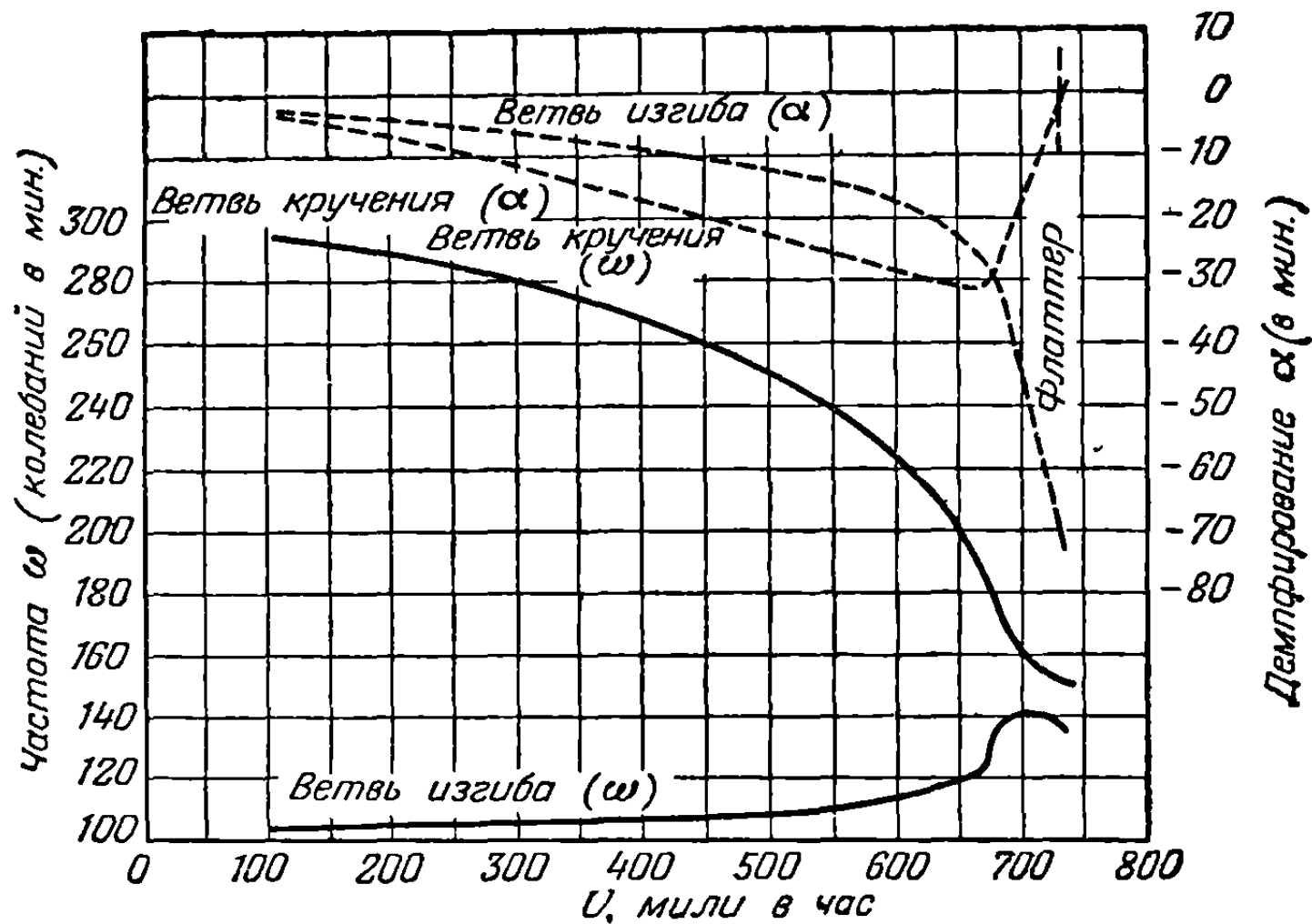
**9-4. Формы аэроупругих колебаний.** В п. 9-1 был исследован вопрос о колебаниях простого двумерного профиля в потоке воздуха при произвольной скорости, причем как скорость затухания, так и дивергенция определялись неустановившимися аэродинамическими нагрузками, обусловленными колебаниями. Это справедливо также для упругого самолета в полете, за исключением того обстоятельства, что в этом случае можно теоретически вообразить бесконечное число „аэроупругих форм“ вследствие бесконечного числа степеней свободы. Эти формы находятся во взаимно-однозначном соответствии с соответствующими формами свободных колебаний покоящейся конструкции. Можно поставить в аэродинамической трубе такой эксперимент, при котором скорость воздуха постепенно увеличивается от нуля и измеряется частота и демпфирование каждой важной формы некоторых характерных значений. При малых скоростях воздух отнимает энергию от всех форм колебаний, и коэффициенты демпфирования или логарифмические декременты затухания этих колебаний увеличиваются с увеличением  $U$ . Наконец, скорость затухания одной формы меняет направление и обращается в нуль при минимальной скорости флаттера самолета  $U_F$ .

На некоторых самолетах даже в самых низких аэроупругих формах колебаний участвует вся конструкция. Крылья, хвостовое оперение и фюзеляж движутся в унисон, и ни один элемент их не обладает сравнительно большей по сравнению с другими амплитудой и не отдает больше энергии воздуху, чем другие. К счастью для исследователей флаттера, обычно частные формы флаттера наблюдаются на несущих поверхностях соответствующей формы. В таком случае можно изучать эти формы, совершенно игнорируя присутствие остальных частей самолета или (что более обычно) рассматривая узлы соединения частей конструкции, подобные, например, узлам крепления крыла в том месте, где оно входит в фюзеляж, как жесткие консольные опоры. Независимо от того, возможно или невозможно такое упрощение, общее правило состоит в том, что формы колебаний с наименьшими частотами являются как раз теми формами, которые следует исследовать при расчете на флаттер. Допустим, что наиболее важными деформациями конструкции являются деформации изгиба и кручения крыла или хвостового оперения сравнительно большого удлинения, которые можно представить укрепленными на недеформирующемся фюзеляже. Тогда формы аэроупругих колебаний, которые необходимо исследовать, оказываются такими, которые при скорости воздуха, равной нулю, переходят в свя-



занные формы колебаний консольной балки с наименьшей частотой. В большинстве случаев одной из таких форм колебаний в покое в воздухе, обычно имеющей наименьшую частоту, являются преимущественно колебания изгиба, другой — обычно колебания кручения. Опыт показал, что либо первая изгибная, либо первая крутильная форма колебаний приводит к критической форме флаттера.

Вследствие того что аэродинамическая теория неустановившегося движения сложнее теории простых гармонических колебаний, типичный анализ флаттера не определяет устойчивость форм аэроупругих колебаний как функцию  $U$ .



Фиг. 9-7. Зависимость частоты и демпфирования основных аэроупругих форм колебаний в зависимости от скорости полета для самолета, имеющего частоты собственных изгибных и крутильных колебаний соответственно 103,5 колебания в минуту и 304 колебания в минуту.

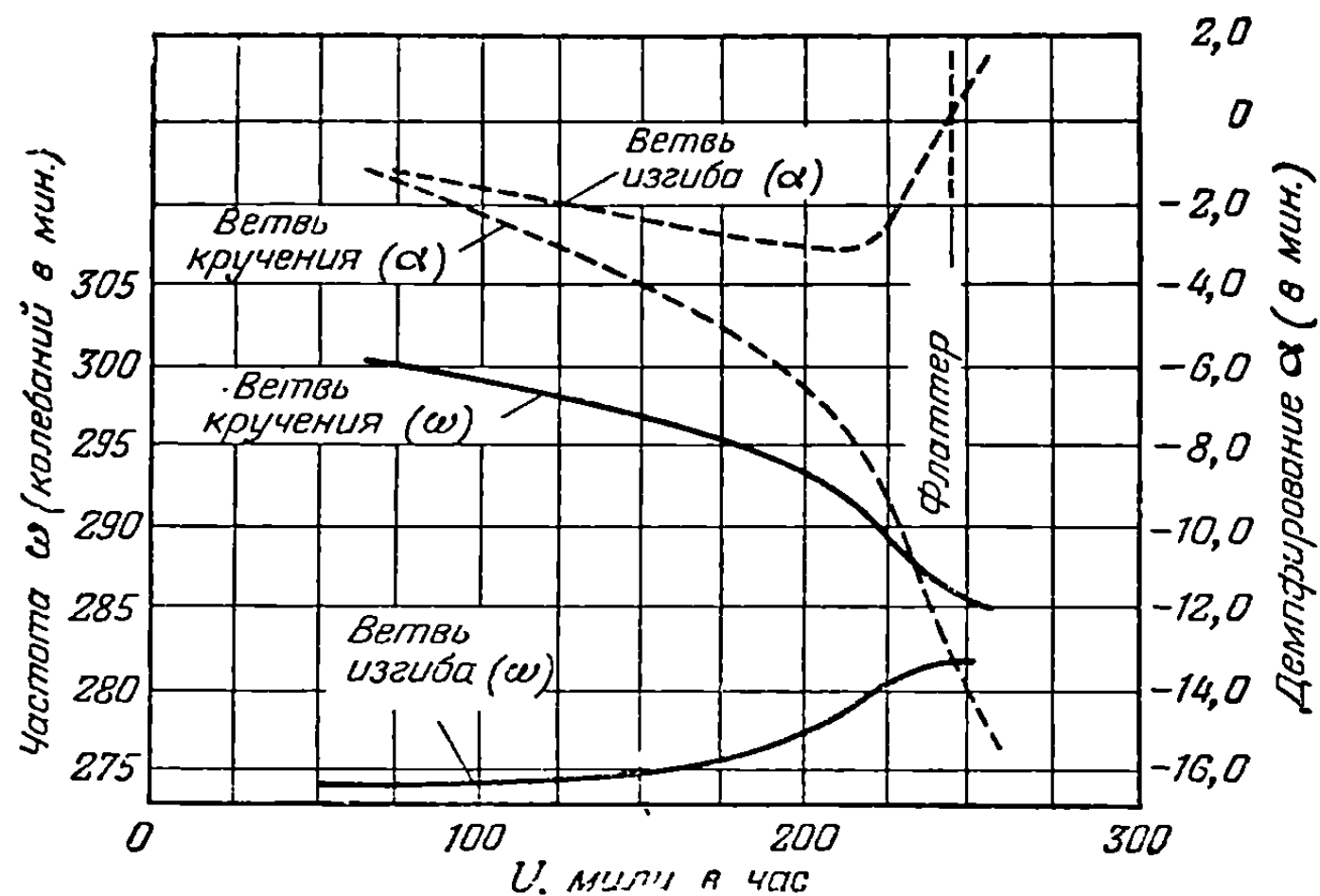
Однако подобный расчет оказывается возможным для простых систем, подобных прямым свободнонесущим крыльям, где воздушные нагрузки могут быть определены по теории несущей полосы. Голенд и Льюк [9-10] провели исследование такого рода на крыле большого удлинения с массой на конце крыла. Подъемная сила и момент определялись приближенно по соответствующим функциям для несжимаемого потока (см. п. 5-7). Упругие и инерционные свойства крыла введены, как в методе Рэля—Ритца, с помощью задаваемых функций деформаций. На фиг. 9-7 и 9-8 воспроизведены результаты работы [9-10] для двух значений отношений частот изгиба и кручения в вакууме.

Здесь мы не будем перечислять всех свойств самолета, поскольку для наших целей представляет интерес только поведение форм аэроупругих колебаний. Ординаты на обеих фигурах являются действительной частью  $\alpha$  и мнимой частью  $\omega$  комплексной функции времени  $e^{(-\alpha+i\omega)t}$  обеих форм; абсциссы равны скоростям полета в милях в час. Степень демпфирования измеряется величиной  $\alpha$ , связанной с коэффициентом демпфирования колебаний соотношением

$$\text{Коэфф. демпф.} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}. \quad (9-54)$$

Фиг. 9-7 соответствует собственной частоте изгибных колебаний, равной 103,5 колебаниям в минуту, и частоте крутильных колебаний, равной 304 колебаниям

в минуту. Отношение этих двух величин именно и является характеристикой цельнометаллических крыльев с работающей обшивкой. В этом примере форма аэроупругих колебаний, начинающихся при  $U=0$  и возникающих из первой формы колебаний кручения (обозначенной как „ветвь кручения“), является формой, соответствующей флаттеру. Демпфирование обеих форм как функция скорости вполне удовлетворительно вплоть до скорости, отличающейся на несколько процентов от  $U_F$ . Демпфирование ветви изгиба численно меньше, хотя коэффициент демпфирования оказывается больше, нежели для ветви кручения, до тех пор, пока вблизи флаттера ветвь изгиба начинает затухать с очень большой скоростью. Частоты обеих форм, как это обычно имеет место, по мере приближения к критическому состоянию стремятся слиться.



Фиг. 9-8. Зависимость частоты и демпфирования основных аэроупругих форм колебаний в зависимости от скорости полета для самолета, имеющего частоты собственных изгибных и крутильных колебаний соответственно 276 колебаний в минуту и 304 колебания в минуту.

Фиг. 9-8 иллюстрирует менее типичный случай, когда собственные частоты для изгиба и кручения равны соответственно 276 и 304 колебаниям в минуту. В этом случае скорость флаттера много ниже, так как начинает сказываться влияние резонанса частот, исследованного в п. 9-2. В этом случае становится неустойчивой ветвь изгиба, и демпфирование этой ветви на всем диапазоне скоростей меньше, нежели демпфирование ветви кручения.

Из обеих фигур можно сделать интересное наблюдение, состоящее в том, что из скорости затухания каждой из аэроупругих форм нельзя вывести никакого заключения о неизбежности флаттера до тех пор, пока  $U$  не подойдет сравнительно близко к  $U_F$ . С одной стороны, это означает, что можно летать на скорости, близкой к  $U_F$ , не опасаясь появления нежелательной границы устойчивости колебаний конструкции самолета. С другой стороны, видно, как внезапно и бурно в процессе ускоренного полета может возникнуть изгибно-крутильный флаттер. При скорости, превышающей  $U_F$  на 5 миль в час, крылья разрушаются после двух-трех колебаний. Эти факты следует очень тщательно исследовать при планировании испытательных полетов для исследования ожидаемого режима флаттера, в особенности тогда, когда в наличии нет заранее известных надежных оценок. Общая проблема летных испытаний на флаттер и сравнительные преимущества различных схем по определению близости к критической скорости рассматриваются в гл. 13.

На самолетах с высокими летными качествами, подобных средним или тяжелым бомбардировщикам, конструкции которых предназначены для восприятия сравнительно малых ускорений, невозможно провести ясное различие между формами аэроупругих колебаний и теми колебаниями, которые связаны с динамической устойчивостью. Первая частота изгибных колебаний крыла может быть приблизительно равна первой частоте коротко-периодических продольных колебаний самолета при скорости 500 или 800 миль в час. Как очевидно для исследователя устойчивости, это означает, что производные, характеризующие устойчивость, должны быть исправлены на влияние аэроупругости; динамические характеристики самолета изменяются со скоростью полета как за счет влияния сжимаемости, так и за счет влияния деформации конструкции. Для аэроупругости — это тот случай, когда важные формы флаттера захватывают весь самолет. При этом при расчетах следует учитывать так называемые степени свободы твердого тела. Иногда критическая форма флаттера может оказаться продолжением не первых форм колебаний изгиба или кручения, а формы колебаний в покоящемся воздухе, имеющей частоту собственных колебаний, равную нулю.

При таких условиях многое говорит в пользу проведения полного динамического исследования упругого самолета на единой основе. Точность и действительность результатов только повысятся за счет сопоставления противоположных, но дополняющих друг друга инженерных точек зрения. Почти всегда ценным дополнением к теоретической работе будет служить изготовленная в определенном масштабе аэроупругая модель. Польза подобной модели для исследования проблемы флаттера полностью подтвердилась. Решение вопроса о том, что еще можно дополнительно сделать на пути определения динамического поведения неограниченной в своем движении машины, зависит от добросовестности и умения тех, кто проводит эксперимент в аэродинамической трубе. Задачи, касающиеся поддержания модели в нейтрально-устойчивых движениях при низких частотах, полностью еще не решены.

Большинство самолетов не требует только что описанного всестороннего анализа. С точки зрения флаттера наличие довольно больших несущих поверхностей, прикрепленных к массивным телам, ведет к такому положению, при котором единственной степенью свободы твердого тела, обычно заслуживающей внимания, является вращение.

**9-5. Анализ флаттера с помощью методов заданных функций деформаций.** Обычно принятым методом вывода уравнений флаттера самолетной конструкции является метод Рэлея — Ритца, при котором принимается, что движение можно представить в виде наложения конечного числа заранее заданных функций деформаций. Применение метода для случая вынужденного движения несвободного и свободного самолета описано в гл. 3. Там была рассмотрена почти плоская конструкция, лежащая настолько близко к плоскости  $xu$ , насколько это возможно. При рассмотрении деформаций конструкции в этой плоскости жесткость ее считалась весьма значительной. Деформированное и напряженное состояния полностью могут быть рассчитаны, если известна функция  $w(x, y, t)$ , определяющая нормальное перемещение конструкции (положительное вверх, если смотреть от летчика в направлении оси  $z$ ) от ее начального положения. Есть два способа расчета с помощью заданных функций деформации, которые лежат в основе почти всех практических исследований флаттера. В более строгом и классическом из них используются нормальные формы колебаний, а способ, который часто является более эффективным с аэродинамической точки зрения, основан на использовании заранее заданных функций деформации, или на „простейших формах“.

Используя ортогональные нормальные колебания конструкции, получаем

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x, y) \xi_i(t). \quad (3-145)$$

Уравнение (3-145) приводит к следующему:

$$M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = E_j \quad (j=1, 2, \dots, \infty), \quad (3-147a)$$

где  $\varphi_j(x, y)$  и  $\omega_j$  — форма и собственная частота  $j$ -го колебания.  
Обобщенная  $j$ -я масса равна

$$M_j = \int_S \int \varphi_j^2 \rho(x, y) dx dy. \quad (3-147b)$$

Обобщенную силу можно записать в виде

$$E_j = \int_S \int F_z(x, y, t) \varphi_j(x, y) dx dy, \quad (3-147c)$$

где  $F_z(x, y, t)$  — внешняя сила, приходящаяся на единицу площади плоскости  $x, y$  и действующая в направлении оси  $z$ . Интегралы берутся по проекции всего самолета. В рассматриваемом случае  $F_z$  представляет распределение разности давлений между нижней и верхней поверхностями конструкции, обусловленной движением воздуха. Согласно нашим обозначениям аэродинамических величин,  $F_z$  можно записать в виде

$$F_z(x, y, t) = (p_L - p_U) = -\Delta p_a(x, y, t). \quad (9-55)$$

Когда самолет не закреплен, первыми тремя формами являются движение в вертикальной плоскости, вращение около поперечной оси и вращение около продольной оси. Собственная частота этих движений равна нулю, и для них имеют место зависимости

$$\varphi_1(x, y) = 1, \quad (3-189)$$

$$\varphi_2(x, y) = -x, \quad \varphi_3(x, y) = y. \quad (3-203)$$

Отсюда следует, что обобщенными массами при этих движениях являются соответственно полная масса самолета, момент инерции относительно оси  $y$  и момент инерции около оси  $x$ . Обобщенными силами являются подъемная сила и моменты относительно поперечной и продольной осей самолета.

Если для построения формы колебаний при флаттере используются заранее заданные функции деформаций, то расчет начинают с конечного числа аппроксимирующих функций  $\gamma_i(x, y)$ :

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x, y) q_i(t). \quad (3-251)$$

В результате получатся следующие уравнения движения:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j = Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3-256)$$

Здесь обобщенные силы, массы и жесткости определяются с помощью соотношений

$$Q_i = \int_S \int F_z(x, y, t) \gamma_i(x, y) dx dy = - \int_S \int \Delta p_a(x, y, t) \gamma_i(x, y) dx dy, \quad (3-258)$$

$$m_{ij} = \int_S \int \gamma_i(x, y) \gamma_j(x, y) \rho(x, y) dx dy, \quad (3-253b)$$

$$k_{ij} = \int_S \int \gamma_i(x, y) \int_S \int k(x, y; \xi, \eta) \gamma_j(\xi, \eta) d\xi d\eta dx dy, \quad (3-255)$$

где  $k_{x, y; \xi, \eta}$  обозначает функцию влияния жесткости. Выражения для кинетической и потенциальной энергий, которые подставляются в уравнения Лагранжа при выводе уравнений (3-256), имеют вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3-253a)$$

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j. \quad (3-254)$$

Можно, конечно, по примеру равенств (3-189) и (3-203) заменить одну или большее число величин  $\gamma_i$  степенями свободы твердого тела; соответствующие коэффициенты жесткости  $k_{ij}$  будут равны нулю.

В зависимости от того, какое уравнение используется при расчете флаттера [уравнение (3-147a) или (3-256)], простое гармоническое движение представляется либо в форме

$$\xi_j(t) = \bar{\xi}_j e^{i\omega t}, \quad (9-56)$$

либо в форме

$$q_j(t) = \bar{q}_j e^{i\omega t}, \quad (9-57)$$

где  $\bar{\xi}_j$  и  $\bar{q}_j$  — комплексные постоянные. Так как задача является линейной, внешние силы принимают следующий вид:

$$F_z(x, y, t) = \bar{F}_z(x, y) e^{i\omega t} = -\Delta \bar{p}_a(x, y) e^{i\omega t}, \quad (9-58)$$

и переменная времени может быть исключена из всех формул. Разность  $\Delta \bar{p}_a(x, y)$  является линейной функцией амплитуд различных колебаний, так что  $\bar{E}_j$  и  $Q_j$  связаны с этими амплитудами одинаковым образом. Поэтому уравнения движения однородны относительно конечного ряда чисел  $\bar{\xi}_j$  или  $\bar{q}_j$ , и мы приходим к алгебраической задаче о собственных значениях. Условие для ненулевых решений заключается в равенстве нулю детерминанта, составленного из коэффициентов уравнений, который называется детерминантом флаттера. Необычным свойством этого детерминанта является то обстоятельство, что элементы его суть комплексные числа, появление которых обусловлено разницей фаз между движениями и аэродинамическими нагрузками. Как и в более простых системах, исследованных в пп. 9-2 и 9-3, все элементы конструкции движутся не в одной фазе друг с другом. Действительная форма флаттера

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^n \gamma_j(x, y) \bar{q}_j \right\}$$

может быть очень сложна, и ее весьма трудно определить экспериментально.

Когда анализируется флаттер конструкции, деформирующейся, как пластина, то, вероятно, наиболее эффективным методом является метод нормальных колебаний. Это обусловлено заметной экономией в расчете вследствие обращения в нуль инерционных и упругих взаимодействующих членов  $m_{ij}$  и  $k_{ij}$  ( $i \neq j$ ). Трудности, встречающиеся при вычислении обобщенных сил как в форме  $\bar{E}_j$ , так и в форме  $Q_j$ , одинаковы.

С другой стороны, когда несущие поверхности обладают жесткими сечениями по хорде, часто оказывается более экономичным вести расчет на основе заранее заданных форм колебаний. Этот метод наиболее известен аэроупругим-практикам, так как с помощью его можно исследовать большинство существующих крыльев. Типичными примерами, в которых почти исклю-

чительно используется указанный метод, являются изгибно-крутильный флаттер и изгибно-крутильный рулевой флаттер прямых крыльев и хвостовых оперений большого удлинения. Этим методом можно исследовать также лопасти воздушных винтов и лопасти свободнонесущих роторов и статоров в таких машинах, как турбореактивные двигатели. В последнем случае, при наличии поля центробежных сил, следует позаботиться об увеличении эффективной изгибной жесткости конструкции. Кроме того, аэродинамические нагрузки в компрессорах и турбинах должны допускать внесение поправок на присутствие соседних лопаток и решеток лопаток.

Остальная часть этого пункта посвящена применению метода заданных форм колебаний к простым примерам и численным расчетам.

(а) *Исследование изгибно-крутильного флаттера с помощью заданных форм колебаний: конструктивное демпфирование.* Рассмотрим крыло, хвостовое оперение и т. п. с прямой упругой осью, нормальной к направлению полета. Для простоты примем, что при  $y=0$  корневое сечение крыла считается закрепленным, хотя можно легко учесть и такие эффекты, как влияние степеней свободы твердого тела или движений хвостового оперения, обусловленных изгибом и кручением<sup>1)</sup> фюзеляжа. Деформации изгиба и кручения будут такими же, какие изображены на фиг. 9—6, однако в настоящем случае мы уже не будем более предполагать, что свойства крыла однородны. Каждый тип деформации рассматривается как наложение ряда заданных независимых форм колебаний

$$\omega_B(y, t) = \sum_{i=1}^r f_{w_i}(y) \omega_i(t), \quad (9-59)$$

$$\theta_T(y, t) = \sum_{i=1}^{(n-r)} f_{\theta_i}(y) \theta_i(t). \quad (9-60)$$

Формы  $f_{w_i}$  и соответствующие частоты можно вычислить, размещая, например, всю массу крыла вдоль упругой оси и определяя для получившейся в результате балки  $r$  низших форм колебаний. Если, для того чтобы исключить всякий изгиб, закрепить вдоль оси жесткий стержень, то можно определить  $f_{\theta_i}$ .

Деформации поверхности, согласно уравнению (3-251), равны

$$\omega(x, y, t) = \sum_{i=1}^r f_{w_i}(y) \omega_i(t) - \sum_{i=1}^{(n-r)} x f_{\theta_i}(y) \theta_i(t), \quad (9-61)$$

где  $x$  измеряется от местной упругой оси, так что

$$\gamma_i(x, y) = f_{w_i}(y) \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (9-62a)$$

$$\gamma_{(r+i)}(x, y) = -x f_{\theta_i}(y) \quad i = 1, 2, \dots, (n-r), \quad (9-62b)$$

и вместо  $q_i(t)$  подставлены  $\omega_i(t)$  и  $\theta_i(t)$ . Для того чтобы определить коэффициенты инерции  $m_{ij}$ , заметим, что для полуразмаха между 0 и  $l$  имеем следующие

<sup>1)</sup> Для читателя должно быть очевидно, что вертикальное хвостовое оперение является исключением из предположения о том, что вся конструкция лежит в плоскости  $xu$ . Киль и руль направления мы помещаем в плоскости  $xz$  и допускаем, что для аэродинамических целей существенно важными являются перемещения в направлении оси  $y$ . Причиной движения вертикального оперения относительно крыла является кручение и боковой изгиб фюзеляжа. Последний представляет другой тип деформации в плоскости  $xu$ , который может оказаться важным для аэроупругости.



щие равенства: <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2b} [\dot{w}(x, y, t)]^2 \rho(x, y) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2b} [\dot{w}_B(y, t) - x \dot{\theta}_T(y, t)]^2 \rho(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^l \left[ \frac{1}{2} m \dot{w}_B^2 - S_y \dot{w}_B \dot{\theta}_T + \frac{1}{2} I_y \dot{\theta}_T^2 \right] dy, \end{aligned} \quad (9-63)$$

где  $m(y)$ ,  $S_y(y)$  и  $I_y(y)$  суть соответственно масса, статический дисбаланс около упругой оси (положителен для массы, расположенной позади центра тяжести) и момент инерции относительно упругой оси; все величины отнесены к единице размаха. Подставив выражения (9-59) и (9-60) в равенство (9-63), получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \dot{w}_i \dot{w}_j \int_0^l m f_{w_i} f_{w_j} dy - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{(n-r)} \dot{w}_i \dot{\theta}_j \int_0^l S_y f_{w_i} f_{\theta_j} dy + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(n-r)} \sum_{j=1}^{(n-r)} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \int_0^l I_y f_{\theta_i} f_{\theta_j} dy. \end{aligned} \quad (9-64)$$

Отсюда легко получить выражения для  $m_{ij}$ , если обратить внимание на аналогичное выражение (3-253b). Составив выражение для полной потенциальной энергии упругой деформации, найдем  $k_{ij}$ .

Как часто делается, в настоящем примере мы опустим все колебания, кроме одного основного тона изгибных колебаний  $f_w(y)$  и основного тона крутильных колебаний  $f_\theta(y)$ . Эта операция не приводит к потере каких-либо существенных черт настоящего исследования. Из равенства (9-64) можно выразить кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{1}{2} \dot{w}_R^2 \int_0^l m f_w^2 dy - \dot{w}_R \dot{\theta}_R \int_0^l S_y f_w f_\theta dy + \frac{1}{2} \dot{\theta}_R^2 \int_0^l I_y f_\theta^2 dy. \quad (9-65)$$

Здесь индекс  $R$  у  $w_R$  и  $\theta_R$  указывает, что эти величины представляют действительные деформации изгиба и кручения в некотором подходящем образом выбранном изображающем сечении. Так как конструкция представляет собой простую балку, то, чтобы написать выражение для внутренней энергии деформации, мы можем воспользоваться вместо функций влияния равенством (3-259):

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[ \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} \right]^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^l GJ \left[ \frac{\partial \theta_T}{\partial y} \right]^2 dy = \\ &= \frac{1}{2} w_R^2 \int_0^l EI \left[ \frac{d^2 f_w}{dy^2} \right]^2 dy + \frac{1}{2} \theta_R^2 \int_0^l GJ \left[ \frac{df_\theta}{dy} \right]^2 dy. \end{aligned} \quad (9-66)$$

Во избежание необходимости вычислять производные от приближений  $f_w$  и  $f_\theta$ , определим частоты свободных колебаний  $\omega_w$  и  $\omega_\theta$  для этих форм таким образом, чтобы

$$U_E = \frac{1}{2} \omega_w^2 w_R^2 \int_0^l m f_w^2 dy + \frac{1}{2} \omega_\theta^2 \theta_R^2 \int_0^l I_y f_\theta^2 dy. \quad (9-67)$$

<sup>1)</sup> Внутренний интеграл берется вдоль хорды крыла. — Прим. ред.



Эти частоты являются как раз теми частотами, которые можно определить с помощью искусственного разделения двух типов деформации. Например, если распределить массу  $m(y)$  вдоль упругой оси и допустить наличие колебаний вида

$$w_B(y, t) = f_w(y) \cos \omega_w t, \quad (9-68)$$

то получим кинетическую и потенциальную энергии для свободных колебаний:

$$T_{\text{своб. колеб.}} = \frac{1}{2} \int_0^l m \dot{w}_B^2 dy = \frac{1}{2} \omega_w^2 \sin^2 \omega_w t \int_0^l m f_w^2 dy, \quad (9-69)$$

$$U_{\text{своб. колеб.}} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[ \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} \right]^2 dy = \frac{1}{2} \cos^2 \omega_w t \int_0^l EI \left[ \frac{d^2 f_w}{dy^2} \right]^2 dy. \quad (9-70)$$

Условие равенства максимальных величин  $T_{\text{своб. колеб.}}$  и  $U_{\text{своб. колеб.}}$  запишется в виде

$$\frac{1}{2} \int_0^l EI \left[ \frac{d^2 f_w}{dy^2} \right]^2 dy = \frac{1}{2} \omega_w^2 \int_0^l m f_w^2 dy. \quad (9-71)$$

Если умножить обе части уравнения (9-71) на  $\omega_R^2$ , то при указанном выше определении  $\omega_w$  мы обнаружим идентичность первых членов выражений (9-66) и (9-67).

Так как  $F_z(x, y, t)$  равно разности давлений  $\Delta p_a(x, y, t)$ , взятой с обратным знаком, то, согласно формуле (3-258), обобщенные силы определяются как интегралы с весом от известных аэродинамических характеристик

$$Q_w = - \int_0^l \int_0^{2b} \Delta p_a(x, y, t) f_w(y) dx dy = \int_0^l L(y, t) f_w(y) dy, \quad (9-72)$$

$$Q_\theta = - \int_0^l \int_0^{2b} \Delta p_a(x, y, t) [-x f_\theta(y)] dx dy = \int_0^l M_y(y, t) f_\theta(y) dy, \quad (9-73)$$

где  $L(y, t)$  — подъемная сила на единицу размаха (положительна вверх) и  $M_y(y, t)$  — текущий момент тангажа около упругой оси (положителен, когда носок крыла поднимается вверх).

Для вывода уравнений (3-256), описывающих движение системы, можно воспользоваться уравнениями Лагранжа в соединении с уравнениями (9-65) и (9-67). В процессе получения уравнений мы приближенно учитываем влияние конструктивного трения. Как указали Теодерсен и Гаррик [9-3], это явление имеет гораздо более сильное регулирующее влияние в задачах устойчивости, подобных флаттеру, чем, например, в задачах вынужденного движения. Существо явления состоит всегда в диссипации энергии, главным образом за счет трения между соприкасающимися частями узлов конструкции. Наличие трения уменьшает размеры любой области неустойчивости.

Наблюдение показывает, что энергия, рассеиваемая в течение каждого цикла за счет внутреннего трения, грубо говоря, пропорциональна квадрату амплитуды, но зависит и от частоты колебания. Этот факт указывает на значительное отличие рассматриваемого случая от более простого случая вязкого трения. Таким образом, в случае простых гармонических колебаний

$$x = x_0 \sin \omega t \quad (9-74)$$

сила вязкого демпфирования имеет вид

$$F_{\text{демпф. колеб.}} = -f \frac{dx}{dt} = -f \omega x_0 \cos \omega t = \mp f \omega \sqrt{x_0^2 - x^2}, \quad (9-75)$$

где знак определяется из того условия, что направление  $F_{\text{демпф. колеб.}}$  всегда противоположно направлению мгновенной скорости. Работа за цикл

$$W_{\text{демпф. колеб.}} = \int_{t=0}^{t=2\pi/\omega} F_{\text{демпф. колеб.}} dx, \quad (9-76)$$

совершаемая силой  $F_{\text{демпф. колеб.}}$ , равна площади эллипса, образованного кривой, представляющей зависимость  $F_{\text{демпф. колеб.}}$  от  $x$ . Так как полуоси эллипса равны  $f\omega x_0$  и  $x_0$ , то работа, совершаемая за цикл, пропорциональна как  $x_0^2$ , так и  $\omega$ .

В противоположность этому сила демпфирования, оказывающая то же действие, что и конструктивное трение, была бы равна

$$F_{\text{констр. демпф.}} = -gx_0 \cos \omega t = \mp g \sqrt{x_0^2 - x^2}. \quad (9-77)$$

Для этого случая работа за цикл опять равна площади эллипса, но с полуосями  $gx_0$  и  $x_0$ . Когда с этой силой сталкиваются при циклических испытаниях материалов, ее называют гистерезисом. Если используется комплексное представление простого гармонического колебательного движения, то так как  $F_{\text{констр. демпф.}}$  отстает от вектора положения на  $90^\circ$ , то движение изображается вектором  $-igx$ .

Точный механизм конструктивного трения в самолете трудно описать математически. Однако до тех пор, пока величина этого трения очень мала, его можно точно аппроксимировать с помощью некоторого источника диссипации энергии. Можно, например, представить, что различным упругим деформациям противопоставлена система внешних сил и моментов, получаемых в результате умножения местной упругой восстанавливающей силы (которая всегда противоположна перемещению) на  $i$  и на малый коэффициент конструктивного демпфирования  $g_j$ . Величина этого коэффициента меняется от одного вида деформации к другому, однако, замечая из уравнений движения, что этот коэффициент пропорционален скорости затухания свободных колебаний, его можно определить экспериментально, наблюдая изменение этой скорости. Поскольку все приближенные представления конструктивного трения совершенно искусственны, не следует делать попыток приписать какое-либо конкретное физическое значение любому из них. Необходимо осознать, что роль этих приближенных представлений заключается в том, что они являются только способами удаления энергии, дающими правильную зависимость от амплитуды и частоты.

В исследуемом здесь случае изгиба и кручения коэффициенты  $g_\omega$  и  $g_\theta$  могут быть определены следующим образом. Упругая восстанавливающая сила и момент, действующие на элемент балки  $dy$ , перемещения которого в простом гармоническом движении равны  $w_B(y, t)$  и  $\theta_T(y, t)$ , записываются в виде

$$dF = - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ EI \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} \right] dy \quad (9-78a)$$

и

$$dt = \frac{\partial}{\partial y} \left[ GJ \frac{\partial \theta_T}{\partial y} \right] dy. \quad (9-78b)$$

Каждой из этих формул ставится в соответствие конструктивное трение

$$dF_{\text{констр. демпф.}} = -ig_\omega \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ EI \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} \right] dy, \quad (9-79a)$$

$$dt_{\text{констр. демпф.}} = ig_\theta \frac{\partial}{\partial y} \left[ GJ \frac{\partial \theta_T}{\partial y} \right] dy. \quad (9-79b)$$

Значения постоянных  $g_\omega$  и  $g_\theta$  для типичных металлических самолетных конструкций изменяются в интервале 0,01—0,03, редко превышая 0,05. В соот-

ветствии с уравнением (3-258), описывающим случай приложения поперечной силы и крутящего момента вокруг упругой оси,  $dF_{\text{констр. демпф.}}$  и  $dt_{\text{констр. демпф.}}$  дают следующие добавки к обобщенным силам в уравнениях движения для изгиба и кручения:

$$(Q_w)_{\text{констр. демпф.}} = \int_0^l \frac{dF_{\text{констр. демпф.}}}{dy} f_w(y) dy = -ig_w \omega_R \int_0^l \frac{d^2}{dy^2} \left[ EI \frac{d^2 f_w}{dy^2} \right] f_w dy, \quad (9-80a)$$

$$(Q_\theta)_{\text{констр. демпф.}} \int_0^l \frac{dt_{\text{констр. демпф.}}}{dy} f_\theta(y) dy = ig_\theta \theta_R \int_0^l \frac{d}{dy} \left[ GJ \frac{df_\theta}{dy} \right] f_\theta dy. \quad (9-80b)$$

Упростим уравнение (9-80a), интегрируя его дважды по частям. В результате получим, что вследствие граничных условий для рассматриваемой конструкции проинтегрированные члены пропадут. Применяв затем равенство (9-71), получим

$$(Q_w)_{\text{констр. демпф.}} = -ig_w \omega_R \int_0^l EI \left[ \frac{d^2 f_w}{dy^2} \right]^2 dy = -ig_w \omega_w^2 \omega_R \int_0^l m f_w^2 dy. \quad (9-81)$$

Аналогичное преобразование уравнения (9-80b), включающее однократное интегрирование по частям, дает

$$(Q_\theta)_{\text{констр. демпф.}} = -ig_\theta \theta_R \int_0^l GJ \left[ \frac{df_\theta}{dy} \right]^2 dy = -ig_\theta \omega_\theta^2 \theta_R \int_0^l I_y f_\theta^2 dy. \quad (9-82)$$

Для того чтобы получить уравнения движения флаттера, подставим выражения (9-65), (9-67), (9-72), (9-73), (9-81) и (9-82) в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial U_E}{\partial q} = Q_q \quad (9-83)$$

для каждой из двух обобщенных координат  $q = w_R$  и  $q = \theta_R$ . В результате получим

$$\ddot{w}_R \int_0^l m f_w^2 dy - \ddot{\theta}_R \int_0^l S_y f_w f_\theta dy + \omega_R \omega_w^2 [1 + ig_w] \int_0^l m f_w^2 dy = \int_0^l L f_w dy, \quad (9-84)$$

$$\ddot{\theta}_R \int_0^l I_y f_\theta^2 dy - \ddot{w}_R \int_0^l S_y f_w f_\theta dy + \theta_R \omega_\theta^2 [1 + ig_\theta] \int_0^l I_y f_\theta^2 dy = \int_0^l M_y f_\theta dy. \quad (9-85)$$

Теперь необходимо выбрать некоторую явную форму выражения для аэродинамических нагрузок. В согласии с обычной практикой при предварительном исследовании флаттера прямых крыльев с достаточно большими удлинениями принимаем, что имеют силу соотношения двумерной теории несущей полосы. Известно, что имеются обширные таблицы подъемных сил и моментов, обусловленных простым гармоническим движением как в несжимаемом, так и сжимаемом потоке, в форме величин [ср. уравнения (5-350) и (5-351)]:

$$L(y, t) = \pi \rho_\infty b^3 \omega^2 \left\{ \frac{\omega_R}{b} f_w(y) L_n - \theta_R f_\theta(y) \left[ L_\alpha - L_n \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \right\}, \quad (9-86)$$

$$M_y(y, t) = \pi \rho_\infty b^4 \omega^2 \left\{ -\frac{\omega_R}{b} f_w(y) \left[ M_n - L_n \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] + \theta_R f_\theta(y) \left[ M_\alpha - (M_n + L_n) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_n \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right] \right\}. \quad (9-87)$$

Здесь  $b(y)$  — местная полухорда крыла;  $a(y)$  — измеряемое в полухордах расстояние, на котором упругая ось находится позади линии середины хорд. Безразмерные аэродинамические коэффициенты  $L_h$ ,  $L_a$ ,  $M_h$  и  $M_a$  являются функциями приведенной частоты  $k(y)$  и числа Маха  $M$ . Определим простое гармоническое движение посредством соотношения

$$\omega_R(t) = \bar{\omega}_R e^{i\omega t}, \quad \theta_R(t) = \bar{\theta}_R e^{i\omega t}. \quad (9-88)$$

Подставим, наконец, выражения (9—86)—(9—88) в уравнения (9—84) и (9—85), соберем подобные члены и для того, чтобы сделать результаты безразмерными, разделим соответственно на  $\pi\rho_\infty b_R^3 \omega^2 l e^{i\omega t}$  и  $\pi\rho_\infty b_R^4 \omega^2 l e^{i\omega t}$ . Окончательно будем иметь

$$\frac{\bar{\omega}_R}{b_R} \left\{ \frac{1}{\pi\rho_\infty b_R^2} \left[ 1 - (1 + ig_w) \left( \frac{\omega_w}{\omega_\theta} \right)^2 \left( \frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] \int_0^1 m f_w^2 dy^* + \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^2 L_h f_w^2 dy^* \right\} -$$

$$- \bar{\theta}_R \left\{ \frac{1}{\pi\rho_\infty b_R^3} \int_0^1 S_y f_w f_\theta dy^* + \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 \left[ L_a - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] f_w f_\theta dy^* \right\} = 0, \quad (9-89)$$

$$- \frac{\bar{\omega}_R}{b_R} \left\{ \frac{1}{\pi\rho_\infty b_R^3} \int_0^1 S_y f_w f_\theta dy^* + \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 \left[ M_h - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] f_w f_\theta dy^* \right\} +$$

$$+ \bar{\theta}_R \left\{ \frac{1}{\pi\rho_\infty b_R^4} \left[ 1 - (1 + ig_\theta) \left( \frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] \int_0^1 I_y f_\theta^2 dy^* + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 \left[ M_a - (M_h + L_a) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right] f_\theta^2 dy^* \right\} = 0. \quad (9-90)$$

Все множители в подинтегральных выражениях являются здесь функциями приведенной переменной, отсчитываемой вдоль размаха,

$$y^* = \frac{y}{l}. \quad (9-91)$$

Четыре коэффициента  $\bar{\omega}_R/b_R$  и  $\bar{\theta}_R$  в уравнениях (9-89) и (9-90) образуют детерминант флаттера, порядок которого всегда равен числу степеней свободы, оставшихся у системы после выбора аппроксимирующих форм. Как было упомянуто в предыдущих пунктах, корни детерминанта непосредственно определить нельзя, а потому нельзя найти и собственные значения флаттера  $U_F$  и  $\omega_F$  (или  $U_F$ ,  $\omega_F$  и  $M_F$ ). Поэтому для вычисления корней детерминанта предложено большое число схем, многие из которых сходны со схемами, обсуждавшимися в п. 9—2 в связи с простым крылом. В общем можно сказать, что большинство схем, используемых на практике, исходит из задания одного или нескольких значений величины

$$k_R = \frac{\omega b_R}{U} \quad (9-92)$$

(или  $M$  и  $k_R$ ), так как эти параметры позволяют численно определить комплексные аэродинамические интегралы. Затем определяются те искусственные условия, при которых при заданных характеристиках имело бы место явление флаттера.

Перечислим сначала те три метода расчета, которые напрашиваются сами собой в результате внимательного исследования детерминанта флаттера. Если интегралы в уравнениях (9-89) и (9-90) вычислены, то в каждом случае две действительные величины должны быть оставлены неизвестными и определяться

из условия равенства нулю действительной и мнимой частей детерминанта. В качестве одной из таких величин естественно взять отношение  $\omega_\theta/\omega$ . Другая может быть выбрана одним из следующих способов.

(1) *Способ изменения плотности.* Эту схему расчета следует использовать тогда, когда желательно получить кривую изменения скорости флаттера с высотой. В качестве второй неизвестной величины выбирают  $\rho_\infty$ , вводя ее в виде безразмерного параметра

$$\frac{m_R}{\pi\rho_\infty b_R^2},$$

где  $m_R$  — текущая масса в расчетном сечении. Очевидно, что этот параметр можно исключить из каждого члена, содержащего плотность, и оставить только комбинации известных членов. Одновременное решение детерминантного уравнения флаттера относительно  $(\omega_\theta/\omega)^2$  и  $m_R/\pi\rho_\infty b_R^2$  облегчается тем обстоятельством, что обе величины входят в уравнение для мнимой части только линейным образом.

(2) *Способ изменения частоты.* Когда другие безразмерные характеристики системы зафиксированы, то для определения влияния, которое оказывает на флаттер изменение отношения частот  $\omega_\omega/\omega_\gamma$ , в качестве неизвестных величин выбираются отношения  $(\omega_\theta/\omega)^2$  и  $(\omega_\omega/\omega_\gamma)^2$ . Последнее отношение входит в оба уравнения для действительной и мнимой частей в виде линейного множителя.

(3) *Способ изменения массовой балансировки.* Влияние изменения положения центра тяжести относительно упругой оси можно выявить, если в качестве переменной, дополнительно к  $(\omega_\theta/\omega)^2$ , взять переменную

$$x_{aR} = \frac{S_{\eta R}}{m_R b_R^2}. \quad (9-93)$$

Так как функция  $a(y)$  задана, то положение упругой оси известно, как известны распределения массы и массовых моментов инерции. Скорость флаттера, как можно заключить из кривых фиг. 9—5, особенно чувствительна к величине  $S_y$ . Как и в случае (1), параметр массовой балансировки входит в мнимую часть уравнения, полученного при разложении детерминанта, только линейно.

Менее ясная, но более часто применяемая схема решения детерминантного уравнения флаттера основана на использовании в качестве неизвестных коэффициентов конструктивного демпфирования. Это иллюстрируется в рассмотренном ниже примере 9-1.

При исследовании явления флаттера с учетом сжимаемости необходимость задавать заранее величину  $M$  вводит в решение дополнительный искусственный элемент. Когда  $\omega_F$ ,  $U_F$  и  $M_F$  известны, комбинация последних двух определяет скорость звука, которая в свою очередь дает температуру газа, при которой имело бы место явление флаттера. Эта температура и плотность  $\rho_\infty$  могут не соответствовать ни одному из действительных состояний атмосферы, имеющих место в процессе полета. Подобные задачи разбираются далее в п. 9-6.

**Пример 9-1.** Вычислить методом  $U-g$  скорость изгибно-крутильного флаттера свободнонесущего трапецевидного крыла в потоке несжимаемой жидкости при полете на уровне моря. Для расчета выберем то же самое крыло реактивного транспортного самолета, нормальные формы свободных колебаний которого были найдены в гл. 4.

Форма крыла в плане и распределение масс, статического дисбаланса и момента инерции представлены на фиг. 2-28, 4-20, 4-22 и в таблице примера 4-7. Упругая ось лежит на линии 35% хорд. Распределения изгибной и крутильной жесткости показаны на фиг. 2-29.

**Решение.** В качестве изображающего сечения выберем сечение, находящееся на расстоянии  $y = 3l/4$  от корневого сечения. При расчете флаттера это сечение часто

рассматривается в качестве характерного сечения. Поэтому

$$b_R = 5,468 \text{ фута.} \quad (a)$$

Независимые формы изгибных и крутильных колебаний  $f_w(y)$  и  $f_\theta(y)$ , соответствующие уравнениям флаттера, вычислены в примерах 4—5 и 4—6 и изображены на фиг. 4-21, а и 4-23; частоты  $\omega_w$  и  $\omega_\theta$  равны соответственно 12,80 и 22,36 рад/сек.

Учитывая все эти данные, можно записать уравнения флаттера (9-89) и (9-90) в численном виде. Внесем в эти уравнения две поправки. Во-первых, для решения детерминантного уравнения флаттера применяем схему Смилга и Вассермана [9—1], допустив, что

$$g_w \cong g_\theta = g. \quad (b)$$

При этом  $g$  рассматривается как одна из неизвестных. Выбор  $g$  в качестве одной из неизвестных является очень удачным, так как эта величина всегда объединяется с другой неизвестной  $\omega_\theta/\omega$  в одной комплексной комбинации

$$Z = \left(\frac{\omega_\theta}{\omega}\right)^2 [1 + ig]. \quad (c)$$

Для некоторого частного значения  $k_R$  детерминант лучше представить не в виде двух действительных полиномов, а в виде одного полинома от комплексной величины  $Z$ . Так как в настоящем примере рассматриваются только две степени свободы, этот полином можно разбить на множители с помощью формулы для решения квадратного уравнения.

Вторая модификация, значительно упрощая вычисление нескольких членов в уравнениях (9-89) и (9-90), также вытекает из [9—1]. Строго говоря, интегралы от аэродинамических величин на трапециевидном крыле имеют подинтегральные выражения, подобные  $L_h$ , которые меняются вдоль размаха в зависимости от выбора  $k_R$ . Таким образом, для каждого  $k_R$  величины  $L_h$  и т. д. должны определяться интерполированием из таблиц, рассчитанных для ряда величин  $k$ , а затем по правилу трапеций должны вычисляться интегралы. Однако оказывается, что в несжимаемом потоке все аэродинамические коэффициенты можно хорошо аппроксимировать полиномами относительно  $1/k$ . Используя обозначения Сканлана и Розенбаума [9—11], имеем

$$L_h \cong 1 + \frac{k_R}{k} K_2(L_h) = 1 + \frac{b_R}{b} K_2(L_h), \quad (d)$$

$$L_\alpha \cong 0,5 + \frac{b_R}{b} K_2(L_\alpha) + \left(\frac{b_R}{b}\right)^2 K_3(L_\alpha), \quad (e)$$

$$M_h = 0,5, \quad (f)$$

$$M_\alpha \cong 0,375 + \frac{b_R}{b} K_2(M_\alpha). \quad (g)$$

Функции  $K_2(L_h)$ ,  $K_2(L_\alpha)$  и т. д. зависят только от приведенной частоты изображающего сечения; они затабулированы на стр. 209 в [9—1] и на стр. 412 в [9—11].

С учетом этих различных подстановок буквенные уравнения движения запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{w}_R}{b_R} \left\{ \left[ 1 - \left(\frac{\omega_w}{\omega_\theta}\right)^2 Z \right] \int_0^1 \left[ \frac{m}{\pi \rho b_R^2} \right] f_w^2 dy^* + \int_0^1 \left(\frac{b}{b_R}\right)^2 f_w^2 dy^* + \right. \\ \left. + K_2(L_h) \int_0^1 \frac{b}{b_R} f_w^2 dy^* \right\} - \bar{\theta}_R \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{S_H}{\pi \rho b_R^3} \right] f_w f_\theta dy^* - \right. \\ \left. - \int_0^1 \left(\frac{b}{b_R}\right)^3 a f_w f_\theta dy^* + K_2(L_\alpha) \int_0^1 \left(\frac{b}{b_R}\right)^2 f_w f_\theta dy^* + \right. \\ \left. + K_3(L_\alpha) \int_0^1 \left(\frac{b}{b_R}\right) f_w f_\theta dy^* - K_2(L_h) \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} + a \right] \left(\frac{b}{b_R}\right)^2 f_w f_\theta dy^* \right\} = 0, \quad (h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\bar{w}_R}{b_R} \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{S_y}{\pi \rho b_R^3} f_w f_\theta dy^* - \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 a f_w f_\theta dy^* - K_2(L_h) \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} + a \right] \left( \frac{b}{b_R} \right)^2 f_w f_\theta dy^* \right\} + \\
 & + \bar{\theta}_R \left\{ [1 - Z] \int_0^1 \left[ \frac{l_y}{\pi \rho b_R^4} \right] f_\theta^2 dy^* + \int_0^1 \left[ \frac{1}{8} + a^2 \right] \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 f_\theta^2 dy^* + \right. \\
 & + K_2(M_\alpha) \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 f_\theta^2 dy^* + K_2(L_h) \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} + a \right]^2 \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 f_\theta^2 dy^* - \\
 & \left. - K_2(L_\alpha) \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} + a \right] \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 f_\theta^2 dy^* - K_3(L_\alpha) \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} + a \right] \left( \frac{b}{b_R} \right)^2 f_\theta^2 dy^* \right\} = 0. \quad (i)
 \end{aligned}$$

Принимая  $a = -0,3$  и используя другие данные, приведенные выше, можно вычислить все интегралы в уравнениях (h) и (i). Таким образом, приходим к следующему детерминантному уравнению флаттера:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \{8,2156 [1 - 0,3277Z] + 0,2073 + 0,2215K_2(L_h)\} & -\{-0,3047 + 0,3545K_2(L_\alpha) + 0,3489K_3(L_\alpha) - 0,0709K_0(L_h)\} \\ \{0,3047 + 0,0709K_2(L_h)\} & \{66,1117 [1 - Z] + 0,2807 + 1,0569K_2(M_\alpha) + 0,0423K_0(L_h) - 0,2114K_2(L_\alpha) - 0,1772K_3(L_\alpha)\} \end{vmatrix} = 0. \quad (j)$$

Для нескольких значений  $k_R$  из таблиц были найдены коэффициенты уравнения (j), а два комплексных корня  $Z$  вычислены по формуле решения квадратного уравнения. Значения этих корней вместе с соответствующими значениями скорости, частоты и искусственного конструктивного демпфирования  $g$  помещены в табл. 9—1.

Таблица 9—1

$k_R$	$Z_1$	$U_1$ миль в час	$\omega_1$ $\frac{\text{рад}}{\text{сек}}$	$g_1$	$Z_2$	$U_2$ миль в час	$\omega_2$ $\frac{\text{рад}}{\text{сек}}$	$g_2$
0,06	3,414—2,816 <i>i</i>	748	12,1	—0,825	1,668+0,021 <i>i</i>	1075	17,3	0,012
0,08	3,078—2,009 <i>i</i>	590	12,7	—0,653	1,456+0,0005 <i>i</i>	865	18,6	0,000
0,10	2,973—1,517 <i>i</i>	484	13,0	—0,510	1,331—0,030 <i>i</i>	723	19,4	—0,023
0,12	2,946—1,196 <i>i</i>	403	13,1	—0,406	1,247—0,049 <i>i</i>	621	20,0	—0,039
0,16	2,959—0,821 <i>i</i>	303	13,0	—0,277	1,146—0,058 <i>i</i>	485	20,8	—0,051
0,20	2,988—0,615 <i>i</i>	240	12,9	—0,206	1,094—0,054 <i>i</i>	398	21,4	—0,049
0,30	3,035—0,368 <i>i</i>	159	12,8	—0,121	1,042—0,038 <i>i</i>	272	21,9	—0,036
0,40	3,064—0,258 <i>i</i>	119	12,8	—0,084	1,024—0,029 <i>i</i>	206	22,1	—0,028

На фиг. 9—9 изображена кривая изменения  $g$  в зависимости от  $U$  для двух форм колебаний, соответствующих корням  $Z_1$  и  $Z_2$ . Если допустить, что в действительной конструкции  $g_w$ ,  $g_\theta$  и  $g$  почти равны нулю, то получим следующее условие флаттера, при котором кривая  $Z_2$  пересекает ось  $U$

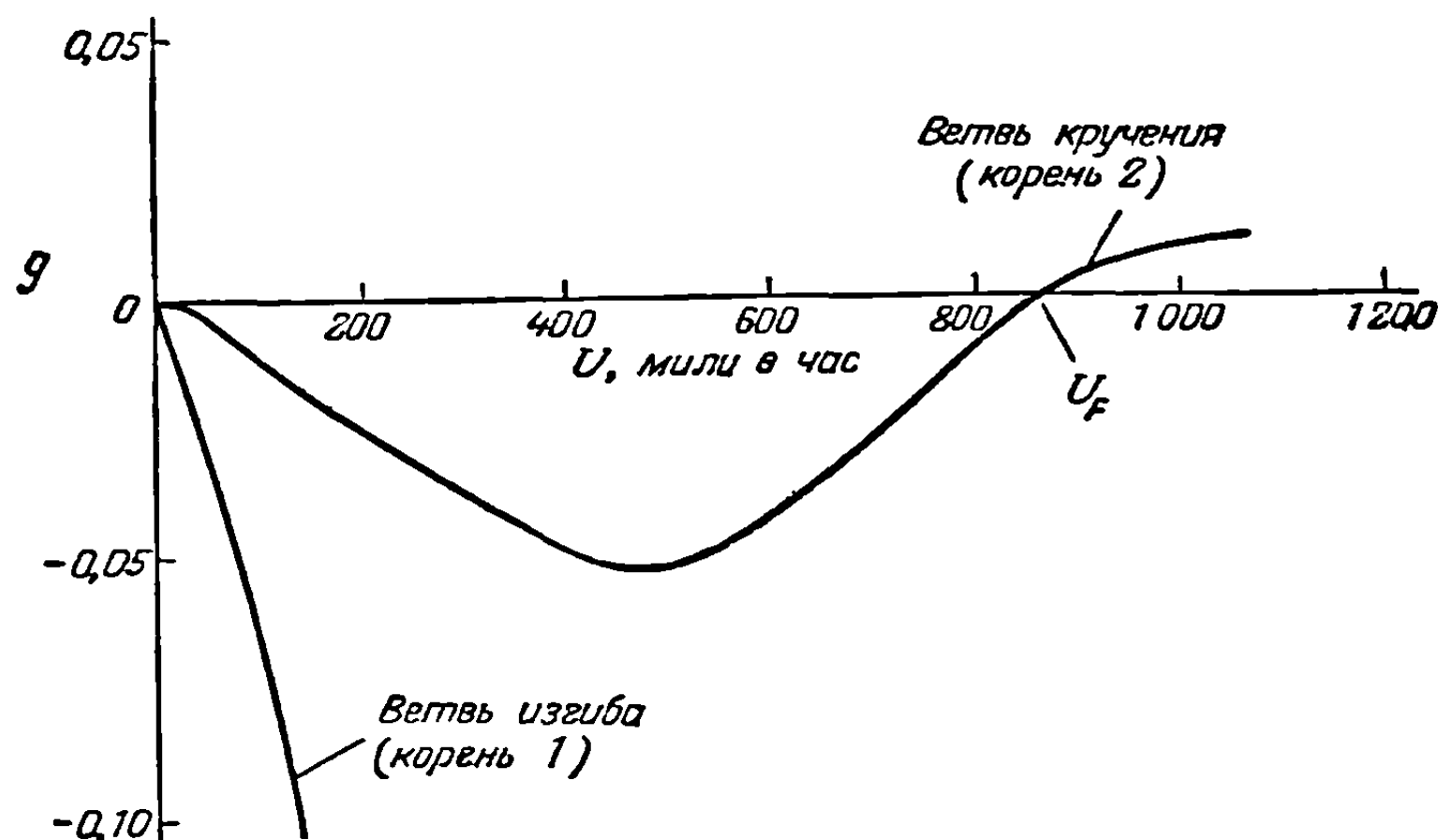
$$U_F = 865 \text{ миль в час, } \omega_F = 18,6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \quad k_F = 0,08. \quad (k)$$

Так же как и в расчетах дивергенции и реверса, изложенных в гл. 8, скорость  $U_F$  получается слишком большой для того, чтобы можно было оправдать допущение о несжимаемости потока. Однако это говорит о том, что реактивный транспортный самолет в диапазоне своих летных скоростей не будет подвержен явлению изгибно-крутильного флаттера. Пример не теряет своего значения в качестве иллюстрации процесса расчета флаттера, и величину 865 миль в час можно использовать как отправную точку более трудоемкого определения  $U_F$  в виде функции числа Маха.

Отметим ту кривую  $U - g$ , которая ведет к ветви крутильного флаттера, так как при скорости, равной нулю, она сливается с первой связанной формой крутильных

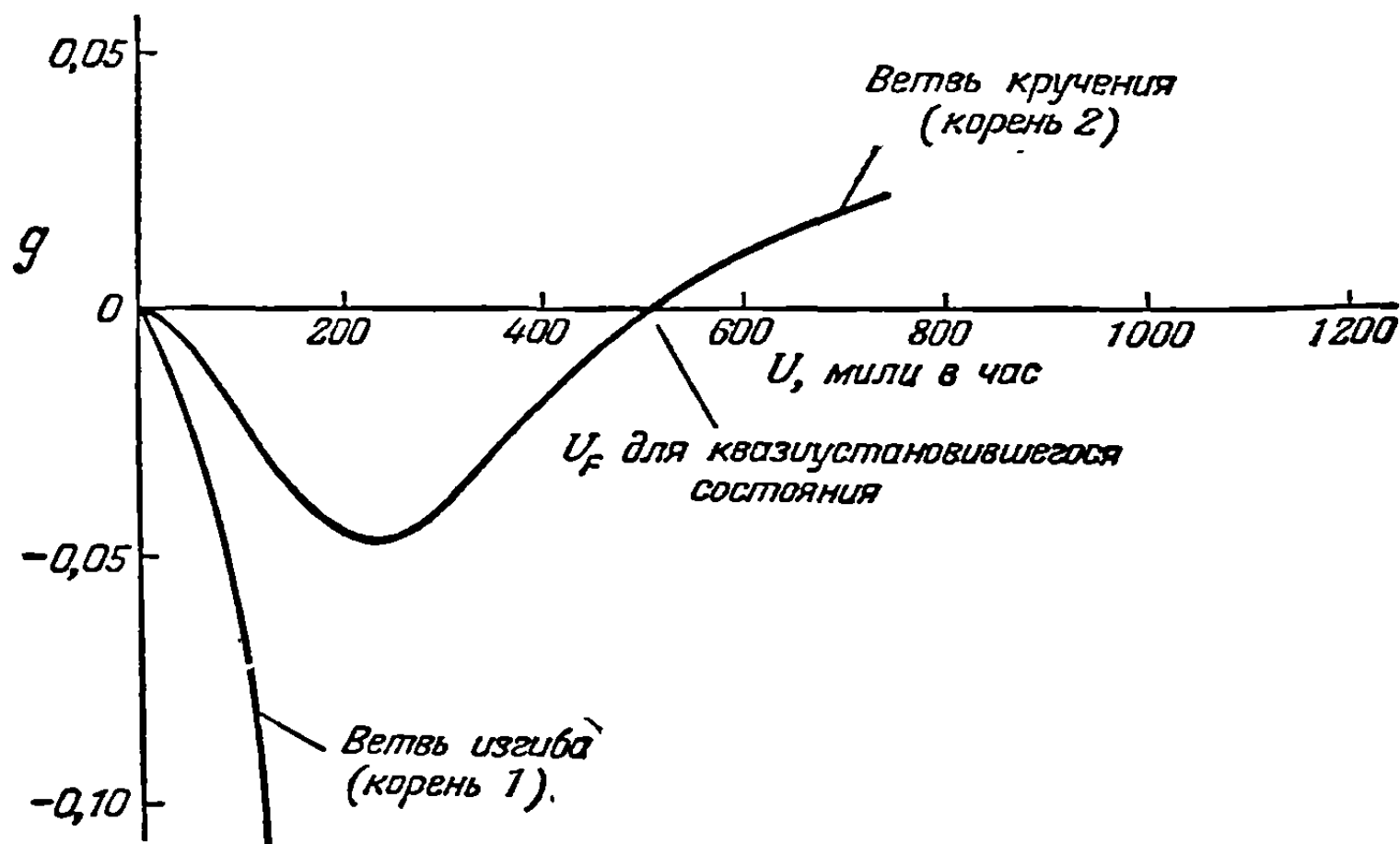


колебании (ср п 9-4) Точки на двух кривых, в которых  $g$  достигает нереальной величины, из ражают физически невозможные условия, поэтому при истолковании этих то ек следует соблюдать известную осторожность Однако здесь можно с уверенностью утверждать, что когда  $g$  отрицательно (это означает, что конструкция как-то питает



Фиг. 9-9. Кривая зависимости  $g$  от  $U$  для крыла реактивного транспортного самолета в случае использования в расчетах флаттера квазистановившихся аэродинамических нагрузок.

энергией колебания), то действительные формы аэроупругих колебаний являются устойчивыми. Наоборот, малые положительные значения  $g$  соответствуют условиям, при которых для предотвращения расхождения простого гармонического движения рассеивание энергии должно быть увеличено. Эти точки, очевидно, представляют собой



Фиг. 9-10. Кривая изменения конструктивного деформирования  $g$  в зависимости от скорости полета  $U$  по результатам исследования изгибно-крутильного флаттера для крыла реактивного транспортного самолета.

границу неустойчивости. Наклон кривой  $g$  по  $U$  в том месте, где она проходит через значение  $U_F$ , является качественной мерой того, насколько бурно возникли бы колебания во время ускоренного полета. Настоящий случай, относящийся к меньшинству случаев изгибно-крутильного флаттера, является только умеренно опасным случаем.

Несмотря на сравнительно низкую приведенную частоту, неустановившиеся аэродинамические процессы играют значительную роль в определении  $U_F$ . Для того чтобы показать это, параллельно было проведено исследование явления флаттера на основе

аэродинамики квазиустановившегося движения, изложенной в п. 5—6. Коэффициенты сил и моментов в этом случае таковы же, как и в случае неустановившегося движения, за исключением того, что  $C(k)$  повсюду заменяется единицей. Эта аппроксимация дает кривые  $g$  по  $U$ , изображенные на фиг. 9—10. Новое значение скорости флаттера, 550 миль в час, на 40% ниже более точного значения, вычисленного согласно теории неустановившегося движения. Здесь аэродинамика квазиустановившегося движения приводит к весьма осторожной оценке в противоположность примеру п. 9—1, где, согласно этой теории, флаттер вовсе не возникает.

(b) *Флаттер, включающий степени свободы твердого тела или деформации фюзеляжа.* При расчете флаттера свободного самолета часто встречаются случаи, когда масса или момент инерции некоторой несущей поверхности составляет значительную долю массы или соответствующего момента инерции всего самолета. Тогда очевидно, что определенные движения твердого тела заметно повлияют на форму флаттера. В вывод уравнений флаттера как методом нормальных, так и методом заданных форм мы включаем вывод одного или нескольких уравнений (3-189) и (3-203). В гл. 3 описывается, как уравнения движения составляются в общем случае.

С аэродинамической точки зрения мы можем легко вычислить распределение сил и моментов, обусловленных любым колебанием твердого тела, поскольку каждое такое колебание аналогично простому колебанию изгиба или кручения. Вертикальное перемещение всего самолета подобно изгибу, при котором функция формы  $f_w(y)$  остается постоянной поперек крыла или хвостового оперения. Движение тангажа напоминает кручение крыла с постоянным значением  $f_3(y)$  и осью вращения, совпадающей с осью тангажа, которая обычно проходит через центр тяжести самолета. Вертикальное перемещение и движение тангажа не влияют на вертикальное оперение, но движение тангажа эквивалентно вращению горизонтального оперения около оси, расположенной далеко впереди его передней кромки. Движение крена эквивалентно антисимметричной форме изгиба всех аэродинамических поверхностей, при которой функция формы  $f_w$  изменяется линейно с расстоянием от оси фюзеляжа.

В качестве практической иллюстрации использования этих фактов допустим, что изгибно-крутильный флаттер, описанный в п. 9—5(a), является антисимметричным, и добавим к нему степень свободы, соответствующую движению крена.

Так как доля крыла в моменте инерции самолета  $I_x$  весьма значительна, то движение крена похоже на движение твердого тела, которое рассматривается в большинстве приложений в первую очередь. Для простоты мы не будем здесь учитывать аэродинамическое влияние хвостового оперения и рулевых поверхностей.

Обозначим через

$$\Phi(t) = \bar{\Phi} e^{i\omega t} \quad (9-94)$$

угловое перемещение недеформированного самолета относительно оси  $x$ , проходящей через центр тяжести. Примем, что ось  $x$  закреплена и почти параллельна направлению полета. Вторая строка равенств (3-203) показывает, что  $\Phi(t)$  приводит к перемещению точек вдоль размаха, равному

$$\Phi(t) \varphi_3(x, y) = \Phi(t) y. \quad (9-95)$$

Таким образом, из уравнений (9-59) и (9-60) получим, что полное абсолютное нормальное перемещение и угол закручивания равны

$$w_B(y, t) = w_R(t) f_w(y) + \Phi(t) y, \quad (9-96)$$

$$\theta_T(y, t) = \theta_R(t) f_0(y). \quad (9-97)$$

Для построения уравнений движения воспользуемся уравнением Лагранжа, замечая, что равенство (9-67) все еще выражает потенциальную энергию  $U_E$ , поскольку

с  $\Phi$  не связана никакая упругая деформация. Согласно уравнению (9-65), кинетическую энергию всего самолета можно получить следующим образом, если рассматривать  $f_w$  и  $f_\theta$  как нечетные функции  $y$ , равные нулю на протяжении всего фюзеляжа. Так как в основном мы будем рассматривать только одну половину самолета, то кинетическую энергию самолета обозначим через  $2T^1$ :

$$2T = \frac{1}{2} \dot{\omega}_R^2 \int_{-l}^l m f_w^2 dy + \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 \int_{\text{самолет}} m y^2 dy + \dot{\omega}_R \dot{\Phi} \int_{-l}^l m y f_w dy - \\ - \dot{\omega}_R \dot{\theta}_R \int_{-l}^l S_y f_w f_\theta dy - \dot{\Phi} \dot{\theta}_R \int_{-l}^l S_y y f_\theta dy + \frac{1}{2} \dot{\theta}_R^2 \int_{-l}^l I_y f_\theta^2 dy, \quad (9-98a)$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 \frac{I_x}{2} + \frac{1}{2} \dot{\omega}_R^2 \int_0^l m f_w^2 dy + \omega_R \dot{\Phi} \int_0^l m y f_w dy - \omega_R \dot{\theta}_R \int_0^l S_y f_w f_\theta dy - \\ - \dot{\Phi} \dot{\theta}_R \int_0^l S_y y f_\theta dy + \frac{1}{2} \dot{\theta}_R^2 \int_0^l I_y f_\theta^2 dy. \quad (9-98b)$$

Обобщенные силы  $Q_w$  и  $Q_\theta$ , даваемые равенствами (9-72) и (9-73), остаются неизменными, за исключением тех добавочных членов к  $L(y, t)$  и  $M_y(y, t)$ , которые возникают за счет  $\Phi$ . Обобщенная сила, связанная с движением крена, имеет вид

$$Q_\Phi = \int_0^l L(y, t) y dy = \frac{1}{2} L_R(t) \quad (9-99)$$

и равна половине момента крена, с которым крыло воздействует на самолет.

Поскольку единственными конструктивными демпфирующими силами являются силы, определяемые равенствами (9-81) и (9-82), возможно применить уравнение Лагранжа (9-83), в котором  $q$  последовательно заменяется на  $\omega_R$ ,  $\theta_R$  и  $\Phi$ . Получающиеся в результате уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\omega}_R \int_0^l m f_w^2 dy + \ddot{\Phi} \int_0^l m y f_w dy - \ddot{\theta}_R \int_0^l S_y f_w f_\theta dy + \\ + \omega_R \omega_w^2 [1 + i g_w] \int_0^l m f_w^2 dy = \int_0^l L f_w dy, \quad (9-100)$$

$$\ddot{\theta}_R \int_0^l I_y f_\theta^2 dy - \ddot{\Phi} \int_0^l S_y y f_\theta dy - \ddot{\omega}_R \int_0^l S_y f_w f_\theta dy + \\ + \theta_R \omega_\theta^2 [1 + i g_\theta] \int_0^l I_y f_\theta^2 dy = \int_0^l M_y f_\theta dy, \quad (9-101)$$

$$\ddot{\Phi} \frac{I_x}{2} + \ddot{\omega}_R \int_0^l m y f_w dy - \ddot{\theta}_R \int_0^l S_y y f_\theta dy = \frac{1}{2} L_R(t). \quad (9-102)$$

В уравнение равновесия (9-102) не входит ни одна из упругих сил, так как движение крена связано с изгибом и кручением только за счет наличия инер-

<sup>1)</sup> Во втором члене правой части выражения (9-98a) интегрирование распространяется на весь самолет. — Прим. ред.

ционных членов и антисимметричного распределения подъемной силы. Степени свободы  $w_R$  и  $\theta_R$  вследствие существования упругой оси тоже упруго не связаны.

Учитывая наличие трех степеней свободы, получим, что подъемную силу и момент, приходящиеся на единицу размаха крыла, согласно теории несущей полосы можно выразить через аэродинамические коэффициенты, приведенные в работе [9—1], в виде

$$L(y, t) = \pi \rho_{\infty} b^3 \omega^2 \left\{ \left[ \frac{w_R}{b} f_w(y) + \Phi \frac{y}{b} \right] L_h - \theta_R f_{\theta}(y) \left[ L_{\alpha} - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \right\}, \quad (9-103)$$

$$M_y(y, t) = \pi \rho_{\infty} b^4 \omega^2 \left\{ - \left[ \frac{w_R}{b} f_w(y) + \Phi \frac{y}{b} \right] \left[ M_h - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] + \theta_R f_{\theta}(y) \left[ M_{\alpha} - (M_h + L_{\alpha}) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right] \right\}. \quad (9-104)$$

Этапы расчета, заключающиеся в подстановке выражений (9-103) и (9-104) в уравнения движения и построении детерминанта флаттера, составленного из безразмерных элементов, не отличаются существенным образом от соответствующих этапов предыдущего примера. Поэтому они здесь не повторяются. Следует, однако, заметить, что отсутствие упругих сил в уравнении (9-102) приводит к детерминанту, в котором неизвестное  $\omega_{\theta}/\omega$  появляется только в двух первых членах, расположенных на главной диагонали. Это обстоятельство заметно упрощает решение; там, где лишняя упругая степень свободы потребовала бы разложения полиномов третьей степени, теперь для разложения членов можно использовать формулу для решения квадратного уравнения.

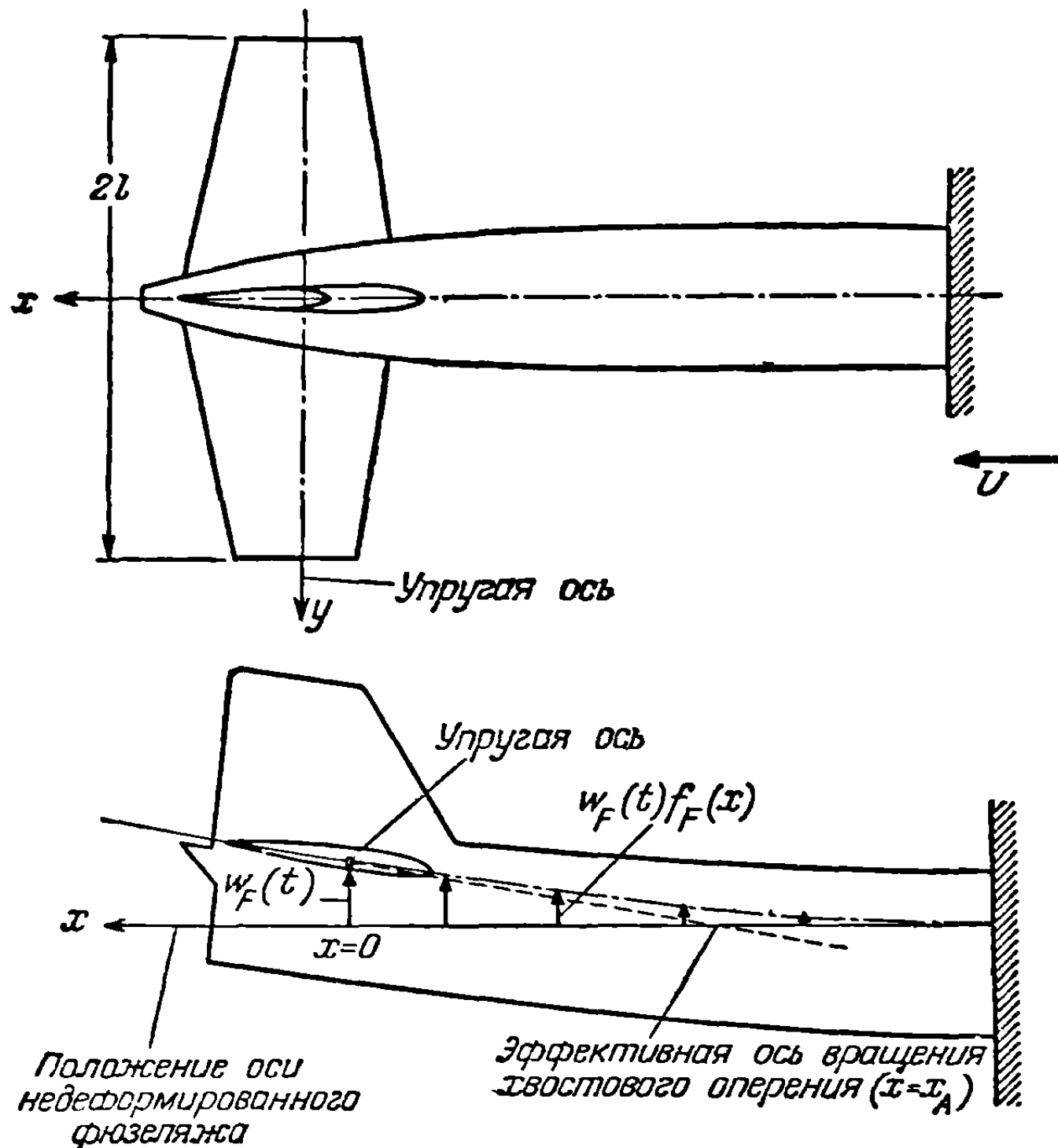
Другой случай, при котором могут играть важную роль степени свободы, отличные от деформаций несущих поверхностей, имеет место при анализе флаттера хвостового оперения. Почти всегда в местах пересечения фюзеляжа с крылом и хвостовым оперением фюзеляж обладает значительной гибкостью. Изгиб фюзеляжа в вертикальной плоскости ведет к симметричному повороту и изменению угла атаки стабилизатора относительно крыла. Боковой изгиб и кручение приводят к антисимметричным перемещениям, первый приводит к изменению угла атаки киля, второе — к колебанию как киля, так и стабилизатора.

В тех случаях, когда возможно пренебречь влиянием крыла и изучать флаттер одного хвостового оперения, часто рассматривают фюзеляж как неоднородную свободно-несущую балку, заделанную в некотором экспериментально определяемом сечении (фиг. 9-11). Тогда хвостовое оперение, расположенное на упругом выступающем конце такой балки, можно исследовать на симметричный и антисимметричный флаттер, включая в каждую систему уравнений движения соответствующие формы колебаний фюзеляжа и (если необходимо) учитывая вращение рулевых поверхностей. Основные аэродинамические и конструктивные характеристики всех хвостовых оперений напоминают соответствующие характеристики крыла, так что новые черты задачи вносятся за счет деформаций фюзеляжа.

Для того чтобы показать, как ведется исследование в данном случае, повторим исследование изгибно-крутильного флаттера, проведенное в п. 9-5(а), рассматривая теперь этот случай как случай симметричного флаттера стабилизатора и накладывая на движение системы вертикальный изгиб фюзеляжа. На фиг. 9-11 изображено влияние этого изгиба на хвостовое оперение в случае единственной заданной функции деформации фюзеляжа

$$w_{BF}(x, t) = w_F(t) f_F(x). \quad (9-105)$$

Функция деформации  $f_F(x)$  нормирована таким образом, что  $w_F(t)$  дает движение в точке пересечения оси фюзеляжа с упругой осью стабилизатора, проектирующейся в начало координат. Если упругая ось перпендикулярна



Фиг. 9-11. Влияние изгиба фюзеляжа на движение горизонтального оперения. Фюзеляж предполагается заделанным вблизи центра тяжести самолета.

к оси фюзеляжа, то абсолютное нормальное перемещение упругой оси и угол поворота относительно нее соответственно равны

$$w_B(y, t) = w_R(t) f_w(y) + w_F(t), \quad (9-106)$$

$$\theta_T(y, t) = \theta_R(t) f_\theta(y) - w_F(t) \frac{df_F(0)}{dx}. \quad (9-107)$$

Эти уравнения легко могут быть приспособлены для случая стреловидной или изогнутой упругой оси.

Для того чтобы составить уравнения Лагранжа, запишем кинетическую и потенциальную энергию упругой деформации в следующем виде<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l \int_0^{2b} [\dot{w}_B(y, t) - x\dot{\theta}_T(y, t)]^2 \rho(x, y) dx dy + \\ &+ \frac{1}{2} \int_F [\dot{w}_{BF}(x, t)]^2 m_F(x) dx + [\text{слагаемые от киля}] = \\ &= \int_{-l}^l \left\{ \frac{1}{2} m [\dot{w}_R f_w + \dot{w}_F]^2 - S_y [\dot{w}_R f_w + \dot{w}_F] \left[ \dot{\theta}_R f_\theta - \dot{w}_F \frac{df_F(0)}{dx} \right] \right\} dx + \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Интегралы с индексом  $F$  указывают на интегрирование по всему фюзеляжу. — Прим. ред.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} I_y \left[ \dot{\theta}_R f_\theta - \dot{\omega}_F \frac{df_F(0)}{dx} \right]^2 dy + \frac{1}{2} \dot{\omega}_F^2 \int_F m_F f_F^2 dx + [\text{слагаемые от кия}] = \\
 & = \frac{1}{2} \dot{\omega}_F^2 \left\{ m_T + 2S_{yT} \frac{df_F(0)}{dx} + I_{yT} \left[ \frac{df_F(0)}{dx} \right]^2 + \int_F m_F f_F^2 dx \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} \dot{\omega}_R^2 \int_{-l}^l m f_w^2 dy + \dot{\omega}_R \dot{\omega}_F \left\{ \int_{-l}^l m f_w dy + \frac{df_F(0)}{dx} \int_{-l}^l S_y f_w dy \right\} - \\
 & - \dot{\omega}_R \dot{\theta}_R \int_{-l}^l S_y f_w f_\theta dy + \frac{1}{2} \dot{\theta}_R^2 \int_{-l}^l I_y f_\theta^2 dy + \\
 & + \dot{\theta}_R \dot{\omega}_F \left\{ - \int_{-l}^l S_y f_\theta dy - \frac{df_F(0)}{dx} \int_{-l}^l I_y f_\theta dy \right\}. \quad (9-108)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_E & = \frac{1}{2} \omega_R^2 \int_{-l}^l EI \left[ \frac{d^2 f_w}{dy^2} \right]^2 dy + \frac{1}{2} \theta_R^2 \int_{-l}^l GJ \left[ \frac{df_\theta}{dy} \right]^2 dy + \frac{1}{2} \omega_F^2 \int_F EI_F \left[ \frac{d^2 f_F}{dx^2} \right]^2 dx = \\
 & = \frac{1}{2} \omega_w^2 \omega_R^2 \int_{-l}^l m f_w^2 dy + \frac{1}{2} \omega_\theta^2 \theta_R^2 \int_{-l}^l I_y f_\theta^2 dy + \frac{1}{2} \omega_F^2 \omega_F^2 \int_F m_F f_F^2 dx. \quad (9-109)
 \end{aligned}$$

Здесь во всех случаях индекс  $F$  обозначает величину, относящуюся к фюзеляжу;  $m_T$ ,  $S_{yT}$  и  $I_{yT}$  представляют соответственно массу, статический дисбаланс и момент инерции всего хвостового оперения; они включают как киль, так и стабилизатор, поскольку последний участвует в движении, обусловленном движением фюзеляжа.

Новая степень свободы не влияет на обобщенные силы  $Q_w$  и  $Q_\theta$ , выраженные равенствами (9-72) и (9-73). Аэродинамическими нагрузками на фюзеляж мы пренебрегаем. Однако когда координата  $\omega_F$  изменяется на возможное перемещение  $\delta\omega_F$ , то как подъемная сила, так и момент хвостового оперения совершают над системой работу, равную

$$\delta W = Q_F \delta\omega_F = \delta\omega_F \int_{-l}^l L(y, t) dy - \delta\omega_F \frac{df_F(0)}{dx} \int_{-l}^l M_y(y, t) dy. \quad (9-110)$$

Поэтому обобщенная сила равна

$$Q_F = L_T(t) - M_T(t) \frac{df_F(0)}{dx}, \quad (9-111)$$

где  $L_T$  и  $M_T$  — суммарная мгновенная сила, действующая на стабилизатор, и момент относительно (прямой) упругой оси.

В дополнение к эффектам конструктивного демпфирования  $(Q_w)_{\text{констр. демпф.}}$  и  $(Q_\theta)_{\text{констр. демпф.}}$  [равенства (9-81) и (9-82)] можно предвидеть, что в процессе колебаний фюзеляжа некоторое количество энергии рассеивается. По аналогии с другими подобными эффектами, рассеивание энергии в этом случае можно представить в виде обобщенной силы

$$(Q_F)_{\text{констр. демпф.}} = - \int_F m_F f_F^2 dx. \quad (9-112)$$

Подставим выражения (9-108), (9-109), (9-111) и (9-112) и другие результаты из п. 9-5(а) в уравнения Лагранжа (9-83) для обобщенных координат  $w_R$ ,  $\theta_R$  и  $w_F$ . В результате получим уравнения движения:

$$\ddot{w}_R \int_{-l}^l m f_w^2 dy - \ddot{\theta}_R \int_{-l}^l S_y f_w f_\theta dy + \ddot{w}_F \left[ \int_{-l}^l m f_w dy + \frac{df_F(0)}{dx} \int_{-l}^l S_y f_w dy \right] + \\ + \omega_R \omega_w^2 [1 + i g_w] \int_{-l}^l m f_w^2 dy = \int_{-l}^l L f_w dy. \quad (9-113)$$

$$\ddot{\theta}_R \int_{-l}^l I_y f_\theta^2 dy - \ddot{w}_R \int_{-l}^l S_y f_w f_\theta dy - \ddot{w}_F \left[ \int_{-l}^l S_y f_\theta dy + \frac{df_F(0)}{dx} \int_{-l}^l I_y f_\theta dy \right] + \\ + \theta_R \omega_\theta^2 [1 + i g_\theta] \int_{-l}^l I_y f_\theta^2 dy = \int_{-l}^l M_y f_\theta dy. \quad (9-114)$$

$$\ddot{w}_F \left\{ m_T + 2 S_{yT} \frac{df_F(0)}{dx} + I_{yT} \left[ \frac{df_F(0)}{dx} \right]^2 + \int_F m_F f_F^2 dx \right\} + \\ + \ddot{w}_R \left[ \int_{-l}^l m f_w dy + \frac{df_F(0)}{dx} \int_{-l}^l S_y f_w dy \right] - \ddot{\theta}_R \left[ \int_{-l}^l S_y f_\theta dy + \frac{df_F(0)}{dx} \int_{-l}^l I_y f_\theta dy \right] + \\ + \omega_F \omega_F^2 [1 + i g_F] \int_F m_F f_F^2 dx = L_T(t) - M_T(t) \frac{df_F(0)}{dx}. \quad (9-115)$$

При выводе выражений для подъемной силы и момента, которые должны быть подставлены в уравнения (9-113)—(9-115), нужно соблюдать известную осторожность. Последняя обусловливается тем, что стабилизатор одновременно участвует в двух вращениях: в одном — около упругой оси вследствие кручения, в другом — около линии  $x = x_A$  вследствие изгиба фюзеляжа. Наши различные аэродинамические теории построены таким образом, чтобы давать момент тангажа относительно тех же осей, которые используются для определения вращения. Следовательно, самый легкий путь решения задачи заключается в рассмотрении движения фюзеляжа как сложного движения, складывающегося, согласно равенствам (9-106) и (9-107), из перемещения упругой оси и вращения около этой оси. Перенос плеча моментов с помощью наших уравнений движения осуществляется автоматически. Например, правая часть уравнения (9-115) равна моменту тангажа, поднимающему носок оперения, около оси, проходящей через  $x = x_A$ , разделенному на величину  $x_A$ .

Аэродинамические нагрузки, обусловленные перемещениями  $w_B(y, t)$  и  $\theta_T(y, t)$ , согласно теории несущей полосы, равны

$$L(y, t) = \pi \rho_\infty b^3 \omega^2 \left\{ \left[ \frac{w_R}{b} f_w(y) + \frac{w_F}{b} \right] L_h - \right. \\ \left. - \left[ \theta_R f_\theta(y) - w_F \frac{df_F(0)}{dx} \right] \left[ L_\alpha - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \right\}, \quad (9-116)$$

$$M_y(y, t) = \pi \rho_\infty b^4 \omega^2 \left\{ - \left[ \frac{w_R}{b} f_w(y) + \frac{w_F}{b} \right] \left[ M_h - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] + \right. \\ \left. + \left[ \theta_R f_\theta(y) - w_F \frac{df_F(0)}{dx} \right] \left[ M_\alpha - (M_h + L_\alpha) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right] \right\}. \quad (9-117)$$



Здесь  $b(y)a(y)$  — расстояние (в любом сечении) от середины хорды стабилизатора до упругой оси (положительное назад). Как и в первом примере этого пункта, мы не будем приводить подробности подстановки выражений (9-116) и (9-117) в уравнения (9-113)—(9-115) и составления безразмерного детерминанта флаттера.

(с) *Флаттер основной рулевой поверхности.* Огромное большинство всех случаев флаттера, имевших место на находящемся в полете самолете, являлись флаттером шарнирно-закрепленных рулевых поверхностей. Хотя флаттер подобного рода обычно и не имеет катастрофических последствий, он чрезвычайно неприятен и нежелателен. Следует поэтому приложить усилия к тому, чтобы предусмотреть заранее этот тип флаттера и обеспечить возможность конструктивных переделок, повышающих критические скорости флаттера, которые попадают в диапазон летных скоростей. В этой области конструкторский опыт и чутье играют важную роль. Однако можно заметить, что те теоретические расчеты, которые описаны в этой главе, за немногими исключениями, очень удачны. Одним из таких исключений является флаттер, при котором главными степенями свободы являются движение триммера и упругие деформации рулевой поверхности, другим — трансзвуковая неустойчивость, известная под названием тряски элеронов, которая связана с колебаниями скачков на верхней и нижней поверхностях крыла и их неустановившимся взаимодействием с пограничным слоем.

Единственными надежными средствами предотвращения тряски элеронов являются опытные данные. Наилучшее средство предотвращения тряски — сделать систему управления настолько необратимой, чтобы в ответ на шарнирные моменты, действующие на нее при трансзвуковом полете, возникали пренебрежимо малые вращения элеронов. Что касается флаттера триммера, то в случае тщательного выбора используемых при анализе функций деформаций колебаний качественной оценкой может служить классическая теория. Весьма полезны могут быть наземные испытания самолета на колебания. Необычайно ясное элементарное исследование этого вопроса и вопроса уравнивания рулевых поверхностей в целом можно найти в части III серии статей опытного аэроупругиста Бродбента в *Aircraft Engineering* [9-12].

Для того чтобы показать, как ввести степень свободы рулевой поверхности в уравнения флаттера, составленные с учетом заранее заданных функций деформаций, рассмотрим свободнонесущее крыло или поверхность хвостового оперения, к задней кромке которой между сечениями по размаху  $y=l_1$  и  $y=l_2$  прикреплен закрылок. Закрылок не имеет аэродинамической компенсации, так что практически его передняя кромка и линия шарниров совпадают по линии, лежащей на расстоянии  $be$  позади середины хорды; в общем случае как  $b$ , так и безразмерная величина  $e$  являются функциями  $y$ . Наличие аэродинамической компенсации изменяет в уравнении движения только воздушные нагрузки. Влияние аэродинамической компенсации подробно исследовано, например, в [9-1] и [9-11]. Здесь это исследование опускается по двум причинам. Во-первых, опыт показывает, что теоретические оценки шарнирных моментов на аэродинамически-уравновешенных поверхностях не точны до такой степени, что могут иметь неверный знак. Следовательно, аэродинамические коэффициенты, полученные расчетным путем, должны быть приведены в соответствие с их опытными величинами; полное исследование этого процесса выходит за рамки этой главы. Во-вторых, в новых самолетах существует тенденция к необратимым системам управления с механическим приводом.

В наше исследование включены три степени свободы: изгиб и кручение крыла с теми же заданными функциями  $f_w(y)$  и  $f_\theta(y)$ , которые были определены в п. 9-5(а), и вращение закрылка на угол  $\beta(t)$  (положителен для случая отклонения задней кромки закрылка вниз) относительно хорды крыла. Сам закрылок рассматривается как жесткое тело. Поэтому  $\beta$  в действительности является средним отклонением закрылка по его размаху, поскольку изменение

угла закручивания крыла приводит к небольшому изменению угла атаки закрылка с изменением  $y$ . Однако это приближение не приводит к нежелательным эффектам на практике. Принимается, что закрылок удерживается в положении  $\beta = 0$  пружиной, работающей на кручение с постоянной  $K_\beta$  фут · фунт рад. Для механических бустерных систем управления или симметричного флаттера элеронов, присоединенных к ручке управления,  $K_\beta$  представляет жесткость приводного механизма или жесткость тяг и тросов. В случаях антисимметричного флаттера элеронов и флаттера руля высоты или руля направления, когда существует непосредственная связь с ручкой управления, точная оценка  $K_\beta$  становится затруднительной. Величина  $K_\beta$  лежит где-то между нулем и максимальной жесткостью тяг, прочно скрепленных с ручкой. Поскольку  $K_\beta$  изменяется в таком широком диапазоне, то при расчете флаттера обычно в качестве переменного параметра берут собственную частоту  $\omega_\beta$  зажатого закрылка.

Для вывода уравнений движения крыла еще раз используем уравнение Лагранжа. Потенциальную энергию системы получим, прибавив к выражению (9-67) энергию, запасенную в отклоненной системе управления:

$$U_{\text{сист. упр.}} = \frac{1}{2} K_\beta \beta^2 = \frac{1}{2} \omega_\beta^2 I_{\beta \text{ суммарн.}} \quad (9-118)$$

где

$$\omega_\beta = \sqrt{\frac{K_\beta}{I_{\beta \text{ суммарн.}}}} \quad (9-119)$$

есть независимая частота упомянутых выше свободных колебаний. Таким образом, имеем

$$U_E = \frac{1}{2} \omega_w^2 \omega_R^2 \int_0^l m f_w^2 dy + \frac{1}{2} \omega_\theta^2 \theta_R^2 \int_0^l I_y f_\theta^2 dy + \frac{1}{2} \omega_\beta^2 I_{\beta \text{ суммарн.}} \quad (9-120)$$

Направленное вверх вертикальное перемещение точек крыла равно

$$w(x, y, t) = \begin{cases} [\dot{w}_B(y, t) - x\dot{\theta}_T(y, t)]; & \text{для } 0 \leq y < l_1 \text{ и } l_2 < y \leq l, \\ \{\dot{w}_B(y, t) - x\dot{\theta}_T(y, t) - [x - x_F]\dot{\beta}(t)\}; & \text{для } l_1 \leq y \leq l_2, \end{cases} \quad (9-121)$$

где  $[x - x_F]$  — расстояние от линии шарниров до любой точки на закрылке. По аналогии с выражениями (9-63) и (9-65), кинетическая энергия равна:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2b} [\dot{w}(x, y, t)]^2 \rho(x, y) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{l_1} + \int_{l_2}^l \right] \int_0^{2b} [\dot{w}_B(y, t) - x\dot{\theta}_T(y, t)]^2 \rho(x, y) dx dy + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{l_1}^{l_2} \int_{x_1}^{x_F} [\dot{w}_B(y, t) - x\dot{\theta}_T(y, t)]^2 \rho(x, y) dx dy + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{l_1}^{l_2} \int_{x_F}^{x_t} [\dot{w}_B(y, t) - x\dot{\theta}_T(y, t) - (x - x_F)\dot{\beta}(t)]^2 \rho(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^l \left[ \frac{1}{2} m \dot{w}_B^2 - S_y \dot{w}_B \dot{\theta}_T + \frac{1}{2} I_y \dot{\theta}_T^2 \right] dy + \\ &\quad + \int_{l_1}^{l_2} \left\{ -S_{y\beta} \dot{w}_B \dot{\beta} + [I_{y\beta} + b(e - a) S_{y\beta}] \dot{\theta}_T \dot{\beta} + \frac{1}{2} I_{y\beta} \dot{\beta}^2 \right\} dy, \quad (9-122) \end{aligned}$$

где  $x_1$ ,  $x_F$  и  $x_t$  — соответственно координаты  $x$  передней кромки, линии шарниров и задней кромки. Здесь  $S_{y\beta}$  и  $I_{y\beta}$ , статический дисбаланс и момент инерции закрылка на единицу размаха около оси шарнира, определяются равенствами:

$$S_{y\beta}(y) = \int_{x_F}^{x_t} [x - x_F] \rho(x, y) dx, \quad (9-123)$$

$$I_{y\beta}(y) = \int_{x_F}^{x_t} [x - x_F]^2 \rho(x, y) dx. \quad (9-124)$$

Как и в п. 9-5 (а), положим временно, что упругая ось проходит через точку  $x = 0$  так, что интеграл, представляющий инерционное взаимодействие между степенями свободы вращения закрылка и кручения, равен

$$\begin{aligned} \int_{x_F}^{x_t} x [x - x_F] \rho(x, y) dx &= \int_{x_F}^{x_t} [x - x_F] [x - x_F] \rho(x, y) dx + \\ &+ x_F \int_{x_F}^{x_t} [x - x_F] \rho(x, y) dx = I_{y\beta}(y) + b(e - a) S_{y\beta}(y). \end{aligned} \quad (9-125)$$

Следует указать, что в случае полной статической балансировки закрылка это взаимодействие не исчезает, подобно взаимодействию с изгибом.

Подставив заданные функции деформаций изгиба и кручения в выражение (9-122), получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{\omega}_R^2 \int_0^l m f_w^2 dy - \dot{\omega}_R \dot{\theta}_R \int_0^l S_y f_w f_\theta dy + \frac{1}{2} \dot{\theta}_R^2 \int_0^l I_y f_\theta^2 dy - \dot{\omega}_R \dot{\beta} \int_{l_1}^{l_2} S_{y\beta} f_w dy + \\ &+ \dot{\theta}_R \dot{\beta} \int_{l_1}^{l_2} [I_{y\beta} + b(e - a) S_{y\beta}] f_\theta dy + \frac{1}{2} \dot{\beta}^2 I_\beta \text{ суммарн.} \end{aligned} \quad (9-126)$$

Обобщенные аэродинамические силы, соответствующие трем степеням свободы, равны

$$Q_w = \int_0^l L(y, t) f_w(y) dy, \quad (9-72)$$

$$Q_\theta = \int_0^l M_y(y, t) f_\theta(y) dy, \quad (9-73)$$

$$Q_\beta = - \int_{l_1}^{l_2} \int_{x_F}^{x_t} \Delta p_a(x, y, t) [-(x - x_F)] dx dy = \int_{l_1}^{l_2} M_\beta(y, t) dy. \quad (9-127)$$

Для вычисления последнего интеграла нужно применить равенство (5-291) при условии, что функция деформации, связанная со степенью свободы закрылка (только на поверхности закрылка), имеет вид

$$\gamma_\beta(x, y) = -(x - x_F). \quad (9-128)$$

Представление конструктивного трения в виде искусственно вводимых членов ведет к возникновению дополнительных сил

$$(Q_w)_{\text{констр. демпф.}} = -ig_w \omega_w^2 \varpi_R \int_0^l m f_w^2 dy, \quad (9-81)$$

$$(Q_\theta)_{\text{констр. демпф.}} = -ig_\theta \omega_\theta^2 \theta_R \int_0^l I_y f_\theta^2 dy. \quad (9-82)$$

Следует также ожидать наличия трения в системе управления, возможно даже превосходящего трение в основной конструкции. Оно может состоять из вязкого демпфирования, созданного с целью улучшения устойчивости, или трения скольжения в подшипниках, направляющих и т. п., или из комбинации этих двух видов трения. Какой бы ни был механизм трения, мы можем аппроксимировать его в виде источника диссипации энергии в простом гармоническом движении с помощью момента кручения на оси шарнира закрылка, опережающего восстанавливающий крутящий момент на  $90^\circ$

$$\delta\beta (Q_\beta)_{\text{констр. демпф.}} = -ig_\beta K_\beta \delta\beta = -ig_\beta \omega_\beta^2 I_{\beta \text{ суммарн.}} \beta \delta\beta. \quad (9-129)$$

Поскольку  $\delta\beta$  — малое возможное перемещение закрылка, то  $(Q_\beta)_{\text{констр. демпф.}}$  представляет собой обобщенную силу, обусловленную трением.

Равенства (9-120), (9-126), (9-72), (9-73), (9-127), (9-81), (9-82) и (9-129) дают все, что нам нужно для составления уравнений движения системы в форме Лагранжа. Применяя последовательно уравнение (9-83) к обобщенным координатам  $\varpi_R$ ,  $\theta_R$  и  $\beta$ , получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\varpi}_R \int_0^l m f_w^2 dy - \ddot{\theta}_R \int_0^l S_y f_w f_\theta dy - \ddot{\beta} \int_{l_1}^{l_2} S_{y\beta} f_w dy + \\ + \varpi_R \omega_w^2 [1 + ig_w] \int_0^l m f_w^2 dy = \int_0^l L f_w dy, \quad (9-130) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_R \int_0^l I_y f_\theta^2 dy - \ddot{\varpi}_R \int_0^l S_y f_w f_\theta dy + \ddot{\beta} \int_{l_1}^{l_2} [I_{y\beta} + b(e-a) S_{y\beta}] f_\theta dy + \\ + \theta_R \omega_\theta^2 [1 + ig_\theta] \int_0^l I_y f_\theta^2 dy = \int_0^l M_y f_\theta dy, \quad (9-131) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} I_{\beta \text{ суммарн.}} - \ddot{\varpi}_R \int_{l_1}^{l_2} S_{y\beta} f_w dy + \ddot{\theta}_R \int_{l_1}^{l_2} [I_{y\beta} + b(e-a) S_{y\beta}] f_\theta dy + \\ + \beta \omega_\beta^2 [1 + ig_\beta] I_{\beta \text{ суммарн.}} = \int_{l_1}^{l_2} M_\beta(y, t) dy. \quad (9-132) \end{aligned}$$

Аэродинамические нагрузки, соответствующие теории несущей полосы, которые нужно подставить в уравнения (9-130) — (9-132), можно взять из формул (5-350) — (5-352)<sup>1)</sup>. Так же как в предыдущих примерах, нужно заменить  $h$

<sup>1)</sup> Читатель должен помнить разницу между  $M_\beta(y, t)$ , представляющим аэродинамический шарнирный момент рулевой поверхности, и безразмерной величиной  $M_\beta$  в уравнении (9-134). Последняя является функцией положения шарнира и приведенной частоты, использованной при построении таблиц в [9-1].

и  $\alpha$ , согласно принятым обозначениям, через  $-\omega_R(t)f_w(y)$  и  $\theta_R(t)f_\theta(y)$ . Тогда получим

$$L(y, t) = \pi\rho_\infty b^3 \omega^2 \left\{ \frac{\omega_R}{b} f_w(y) L_h - \theta_R f_\theta(y) \left[ L_\alpha - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] - \beta L_\beta \right\}, \quad (9-133)$$

$$M_y(y, t) = \pi\rho_\infty b^4 \omega^2 \left\{ -\frac{\omega_R}{b} f_w(y) \left[ M_h - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] + \right. \\ \left. + \theta_R f_\theta(y) \left[ M_\alpha - (M_h + L_\alpha) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right] + \beta \left[ M_\beta - L_\beta \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \right\}, \quad (9-134)$$

$$M_\beta(y, t) = \pi\rho_\infty b^4 \omega^2 \left\{ -\frac{\omega_R}{b} f_w(y) T_h + \theta_R f_\theta(y) \left[ T_\alpha - T_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] + \beta T_\beta \right\}. \quad (9-135)$$

Применение этих формул ограничивается простым гармоническим движением. Следовательно, они предполагают наличие соотношений (9-88) и зависимости

$$\beta(t) = \bar{\beta} e^{i\omega t}. \quad (9-136)$$

Подставим выражения (9-133)—(9-135) в уравнения (9-130)—(9-132), соберем подобные члены и, разделив на соответствующие множители, приведем результат к безразмерной форме:

$$\frac{\bar{\omega}_R}{b_R} \left\{ \left[ 1 - (1 + i g_w) \left( \frac{\omega_w}{\omega_\theta} \right)^2 \left( \frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] \int_0^1 \left[ \frac{m}{\pi\rho_\infty b_R^2} \right] f_w^2 dy^* + \right. \\ \left. + \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^2 L_h f_w^2 dy^* \right\} - \bar{\theta}_R \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{S_y}{\pi\rho_\infty b_R^3} \right] f_w f_\theta dy^* + \right. \\ \left. + \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 \left[ L_\alpha - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] f_w f_\theta dy^* \right\} - \bar{\beta} \left\{ \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left[ \frac{S_{y\beta}}{\pi\rho_\infty b_R^3} \right] f_w dy^* + \right. \\ \left. + \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 L_\beta f_w dy^* \right\} = 0, \quad (9-137)$$

$$- \frac{\bar{\omega}_R}{b_R} \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{S_y}{\pi\rho_\infty b_R^3} \right] f_w f_\theta dy^* + \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 \left[ M_h - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] f_w f_\theta dy^* \right\} + \\ + \bar{\theta}_R \left\{ \left[ 1 - (1 + i g_\theta) \left( \frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] \int_0^1 \left[ \frac{I_y}{\pi\rho_\infty b_R^4} \right] f_\theta^2 dy^* + \right. \\ \left. + \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 \left[ M_\alpha - (M_h + L_\alpha) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right] f_\theta^2 dy^* \right\} + \\ + \bar{\beta} \left\{ \int_{l_1^*}^{l_2^*} \frac{I_{y\beta} + b(e-a) S_{y\beta}}{\pi\rho_\infty b_R^4} f_\theta dy^* + \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 \left[ M_\beta - L_\beta \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] f_\theta dy^* \right\} = 0, \quad (9-138)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\bar{\omega}_R}{b_R} \left\{ \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left[ \frac{S_{y\beta}}{\pi \rho_\infty b_R^3} \right] f_w dy^* + \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 T_h f_w dy^* \right\} + \\
& + \bar{\theta}_R \left\{ \int_{l_1^*}^{l_2^*} \frac{I_{y\beta} + b(e-a) S_{y\beta}}{\pi \rho_\infty b_R^4} f_\theta dy^* + \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 \left[ T_\alpha - T_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] f_\theta dy^* \right\} + \\
& + \bar{\beta} \left\{ \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 T_\beta dy^* + \left[ 1 - (1 + i g_\beta) \left( \frac{\omega_\beta}{\omega_\theta} \right)^2 \left( \frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] \frac{I_{y\beta \text{ суммарн.}}}{\pi \rho_\infty b_R^4 l} \right\} = 0. \quad (9-139)
\end{aligned}$$

Здесь  $l_1^*$  и  $l_2^*$  — координаты внутреннего и внешнего края закрылка, разделенные на полуразмах  $l$ . Девять коэффициентов  $\bar{\omega}_R/b_R$ ,  $\bar{\theta}_R$  и  $\bar{\beta}$  образуют детерминант флаттера, который является детерминантом третьего порядка и, будучи приравнен нулю, дает кубическое характеристическое уравнение.

Пример 9-2. Вычислить влияние частоты колебания элеронов на скорость изгибно-крутильного флаттера свободонесущего трапециевидного крыла в несжимаемом потоке при плотности на уровне моря. Возьмем опять крыло реактивного транспортного самолета, подробно рассмотренное в гл. 2, 4 и 8. Инерционные и упругие свойства и заданные функции деформации для конструкции основного крыла исследованы в примере 9-1 п. 9-5 (а). Элероны находятся между сечениями 30,83 фута и 40,58 фута во внешнюю сторону от середины размаха, так что

$$l_1^* = 0,740, \quad l_2^* = 0,974. \quad (a)$$

Линия шарниров лежит позади передней кромки, и следовательно,

$$e = 0,5. \quad (b)$$

Аэродинамическая компенсация отсутствует, но массовая статическая балансировка осуществлена полностью ( $S_{y\beta} = 0$ ). Суммарный момент инерции относительно линии шарниров равен

$$I_{y\beta \text{ суммарн.}} = 3,0154 \text{ слаг/фут}^2. \quad (c)$$

Этот момент распределяется вдоль размаха согласно следующей таблице:

Сечение (от середины размаха)	Соответствующий момент инерции $I_{y\beta}$ слаг·фут <sup>2</sup> фут
370 дюймов	0,4041
428,5	0,3083
487	0,2202

Решение. Расчетное сечение выбираем опять при  $y = 3l/4$ . При составлении уравнений флаттера пренебрегаем малым изменением  $k$  вдоль размаха элерона и аппроксимируем  $L_h$ ,  $L_\alpha$  и  $M_\alpha$  выражениями (d), (e) и (g) примера 9-1. Все коэффициенты демпфирования конструкции полагаем равными нулю. Таким образом, получим уравнения

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{\omega}_R}{b_R} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega_w}{\omega_\theta} \right)^2 \left( \frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] \int_0^1 \left[ \frac{m}{\pi \rho b_R^2} \right] f_w^2 dy^* + \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^2 f_w^2 dy^* + K_2(L_h) \int_0^1 \frac{b}{b_R} f_w^2 dy^* \right\} - \\
& - \bar{\theta}_R \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{S_y}{\pi \rho b_R^3} \right] f_w f_\theta dy^* - \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 a f_w f_\theta dy^* + K_2(L_\alpha) \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^2 f_w f_\theta dy^* + \right.
\end{aligned}$$

$$+ K_3(L_\alpha) \int_0^1 \frac{b}{b_R} f_w f_\theta dy^* - K_2(L_h) \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} + a \right] \left( \frac{b}{b_R} \right)^2 f_w f_\theta dy^* \left\} + \right. \\ \left. + \bar{\beta} \left\{ \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left[ \frac{S_{y\beta}}{\pi \rho b_R^3} \right] f_w dy^* + L_\beta \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 f_w dy^* \right\} = 0, \quad (d)$$

$$- \frac{\bar{w}_R}{b_R} \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{S_y}{\pi \rho b_R^3} \right] f_w f_\theta dy^* - \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 a f_w f_\theta dy^* - K_2(L_h) \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} + a \right] \left( \frac{b}{b_R} \right)^2 f_w f_\theta dy^* \right\} + \\ + \bar{\theta}_R \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] \int_0^1 \left[ \frac{I_y}{\pi \rho b_R^4} \right] f_\theta^2 dy^* + \right. \\ \left. + \int_0^1 \left[ \frac{1}{8} + a^2 \right] \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 f_\theta^2 dy^* + K_2(M_\alpha) \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 f_\theta^2 dy^* + \right. \\ \left. + K_2(L_h) \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} + a \right]^2 \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 f_\theta^2 dy^* - K_2(L_\alpha) \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} + a \right] \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 f_\theta^2 dy^* - \right. \\ \left. - K_3(L_\alpha) \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} + a \right] \left( \frac{b}{b_R} \right)^2 f_\theta^2 dy^* \right\} + \bar{\beta} \left\{ \int_{l_1^*}^{l_2^*} \frac{I_{y\beta} + b(e-a) S_{y\beta}}{\pi \rho b_R^4} f_\theta dy^* + \right. \\ \left. + M_\beta \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 f_\theta dy^* - L_\beta \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left[ \frac{1}{2} + a \right] \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 f_\theta dy^* \right\} = 0, \quad (e)$$

$$- \frac{\bar{w}_R}{b_R} \left\{ \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left[ \frac{S_{y\beta}}{\pi \rho b_R^3} \right] f_w dy^* + T_h \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 f_w dy^* \right\} + \\ + \bar{\theta}_R \left\{ \int_{l_1^*}^{l_2^*} \frac{I_{y\beta} + b(e-a) S_{y\beta}}{\pi \rho b_R^4} f_\theta dy^* + T_\alpha \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 f_\theta dy^* - T_h \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left[ \frac{1}{2} + a \right] \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 f_\theta dy^* \right\} + \\ + \bar{\beta} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega_\beta}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] \frac{I_{y\beta} \text{ суммарн.}}{\pi \rho b_R^4 l} + T_\beta \int_{l_1^*}^{l_2^*} \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 dy^* \right\} = 0. \quad (f)$$

Здесь все аэродинамические коэффициенты являются функциями величины

$$k_R = \frac{\omega b_R}{U} \quad (g)$$

и  $L_\beta$ ,  $M_\beta$ ,  $T_\alpha$ ,  $T_h$  и  $T_\beta$  находятся по таблицам работы [9-1] для соответствующего значения параметра  $e$ . После выполнения численного интегрирования всех выражений



в уравнениях (d), (e) и (f) приходим к следующему детерминанту флаттера:

$$\left\{ \begin{array}{l} 8,2156 \left[ 1 - 0,3277 \left( \frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] + \\ + 0,2073 + 0,2215 K_2(L_h) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0,3047 - 0,3545 K_2(L_a) + \\ + 0,3489 K_3(L_a) - \\ - 0,0709 K_2(L_h) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} -0,1325 L_\beta \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} 0,3047 + \\ + 0,070 K_2(L_h) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 66,1117 \left[ 1 - \left( \frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] + \\ + 0,2807 + \\ + 1,0569 K_2(M_a) + \\ + 0,0423 K_3(L_h) - \\ - 0,2114 K_2(L_a) - \\ - 0,1772 K_3(L_a) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0,0107 + \\ + 0,1572 M_\beta - \\ - 0,0314 L_\beta \end{array} \right\} \\
 \left\{ \begin{array}{l} -0,132 T_h \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0,0107 + 0,1572 T_a - \\ - 0,0314 T_h \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0,1593 T_\beta + \\ + 0,01083 \left[ 1 - \left( \frac{\omega_\beta}{\omega_\theta} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] \end{array} \right\} \\
 = 0. \quad (h)$$

Для нескольких значений  $k_R$  по таблицам работы [9-1] были найдены коэффициенты уравнения (h) и детерминант был разложен на мнимую и действительную части. Получающиеся в результате два уравнения были разрешены с помощью алгебраических методов относительно  $\omega_\beta/\omega$  и  $\omega_\theta/\omega$ . Каждому корню этих уравнений соответствуют свои величины критической скорости и частоты. Несмотря на то, что по одному значению  $k_R$  можно найти три действительных корня, в настоящем примере только один из этих корней соответствует положительному значению  $(\omega_\beta/\omega_\theta)^2$ , т. е. соответствует действительному условию флаттера. Решения, имеющие физический смысл, даны в табл. 9-2.

Таблица 9-2

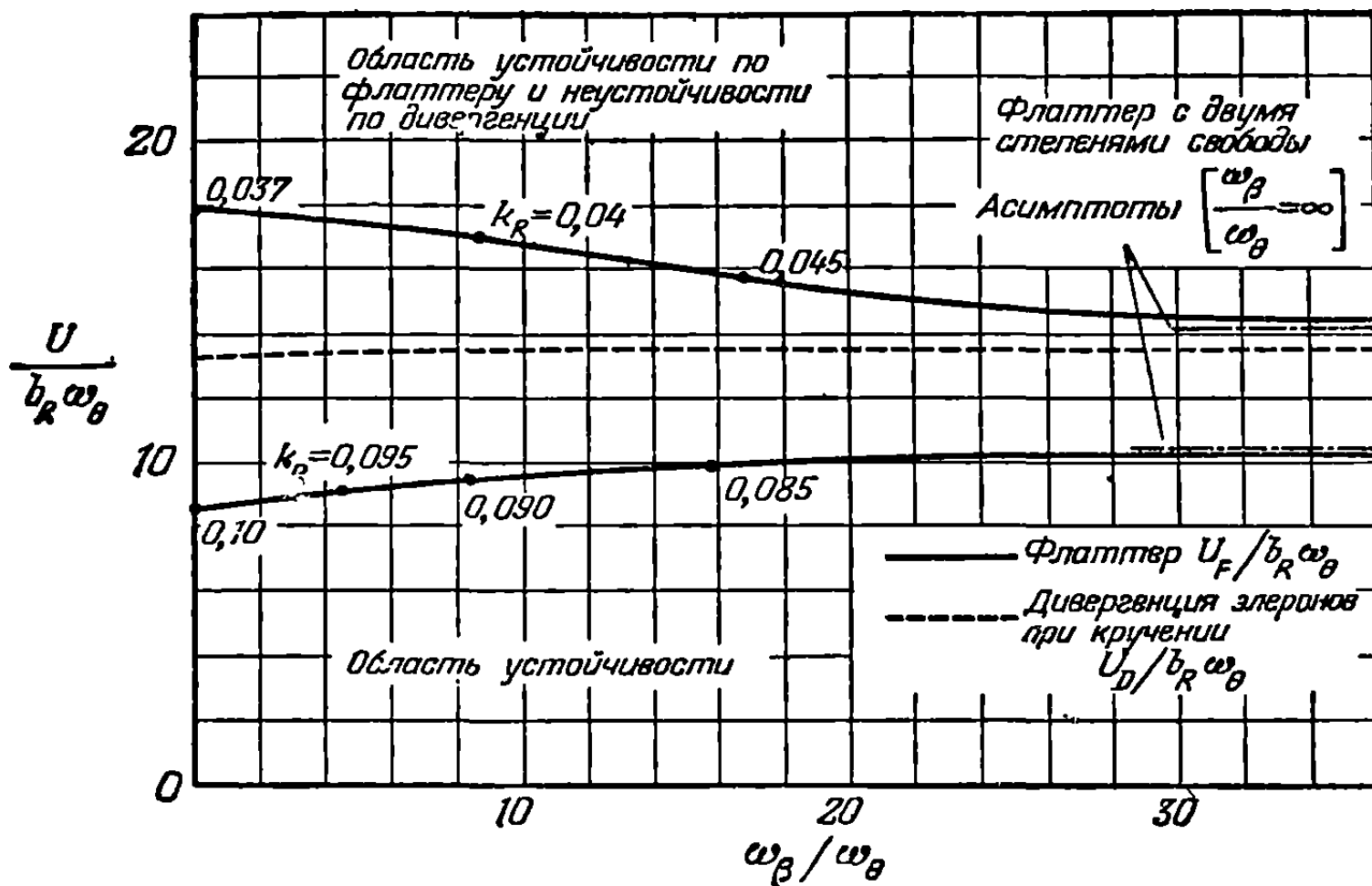
$k_R$	$\omega_\theta/\omega$	$\omega_\beta/\omega_\theta$	$U_F/b_R \omega_\theta$	$U_F$ миль в час	$\omega_F$ рад сек
0,037	1,486	0	18,190	1516	15,05
0,040	1,464	11,288	17,074	1423	15,27
0,045	1,409	23,709	15,769	1315	15,87
0,051	1,389	$\infty$	14,111	1176	16,09
0,080	1,202	$\infty$	10,397	865	18,60
0,085	1,193	18,913	9,858	822	18,73
0,090	1,183	9,847	9,395	783	18,91
0,095	1,174	5,345	8,967	747	19,04
0,100	1,167	0	8,568	714	19,15

На фиг. 9-12 в безразмерной форме изображены кривые зависимости  $U_F/b_R \omega_\theta$  от  $\omega_\beta/\omega_\theta$ , на которых в отдельных точках нанесены соответствующие значения приведенной частоты. Для целей сравнения на этой фигуре нанесена пунктирная кривая изменения скорости дивергенции элеронов при кручении  $U_D/b_R \omega_\theta$  (исследованной в гл. 8), величину которой можно определить из детерминанта флаттера. Для этого нужно умножить детерминант на  $\omega^2$  и, положив  $\omega = 0$ , вычислить собственные значения. Так как дивергенция почти всецело определяется крутильной жесткостью крыла, она мало чувствительна к изменениям частоты колебаний элеронов.

На фиг. 9-12 на всем промежутке изменения отношений частот видна область неустойчивости по флаттеру, ограниченная как сверху, так и снизу кривыми критической скорости. Многие исследования флаттера с тремя степенями свободы приводят к тому же самому результату, хотя часто „область флаттера“ ограничена частью спектра  $\omega_\beta$  с наибольшей неустойчивостью вблизи  $\omega_\beta/\omega_\theta = 1$ . Нижняя кривая  $U_F/b_R \omega_\theta$ , представляющая

Интерес с практической точки зрения, показывает, что с ростом отношения частот критическая скорость увеличивается очень плавно, начиная с минимального значения 714 миль в час при совершенно свободном элероне до асимптотической величины 865 миль в час (изгибно-крутильный флаттер) при закрепленном относительно крыла элероне.

Дальнейшие сведения, касающиеся флаттера прямого крыла или хвостового оперения, можно получить из параметрических исследований, таких, как исследование Теодорсена и Гаррика [9-3] или более поздняя работа Вулстона и Хаккеля [9-13]. В последней работе основное внимание уделено влиянию сжимаемости, и из нее трудно вывести общие заключения, которые были бы справедливы для всех чисел Маха. Расчеты, проведенные в этих двух работах, относятся к упрощенному секционному крылу такого типа, который был



Фиг. 9-12. Кривые зависимости безразмерных скоростей изгибно-крутильного элеронного флаттера  $U_F / b_R \omega_\theta$  и скорости дивергенции элерона при кручении  $U_D / b_R \omega_\theta$  от отношения частот  $\omega_\beta / \omega_\theta$  (результаты исследования свободнонесущего крыла реактивного транспортного самолета по теории несущей полосы).

проанализирован в п. 9-2; большинство случаев включает только две степени свободы или изгиб закрылка, или кручение закрылка. Эти ограничения не снижают ценности указанных результатов как хорошего источника параметрических данных для действительных крыльев.

Статический дисбаланс

$$x_\beta = \frac{S_{\beta\beta} \text{ суммарн.}}{m_R b_R^2 [l_2 - l_1]} \quad (9-140)$$

и отношение частот  $\omega_\beta / \omega_\gamma$  (или  $\omega_\beta / \omega_\omega$ ) являются теми безразмерными величинами, от которых в наибольшей степени зависит влияние, оказываемое на флаттер степенью свободы рулевой поверхности. Как показано в [9-3], скорость флаттера в потоке несжимаемой жидкости с увеличением отношения частот имеет тенденцию к постепенному увеличению от скорости флаттера свободной рулевой поверхности до скорости изгибно-крутильного флаттера при очень большом  $\omega_\beta$ . Поведение скорости в промежутке между двумя этими скоростями в значительной мере зависит от степени уравновешенности масс и конструктивного демпфирования. Детерминант флаттера обычно имеет два корня, отвечающих физическому смыслу задачи и дающих две скорости, между которыми имеется область неустойчивости (как в примере 9-2). При экспериментах в аэродинамической трубе оказалось возможным пройти эту область неустойчивости и

доказать существование верхней критической скорости. Однако для аэроупругиста, имеющего дело с натурным самолетом, этот факт имеет мало значения, поскольку он должен дать гарантию, что даже наименьшая из этих скоростей никогда не будет достигнута в процессе полета.

В несжимаемом потоке, при малых значениях  $\omega_\beta$ , влияние закрылка можно обычно определить, исследуя флаттер с двумя степенями свободы. В [9-3] указывается, что в том случае, когда относительная массовая плотность крыла достаточно мала, безопасность от крутильного флаттера закрылка обеспечена, если обеспечена безопасность от изгибного флаттера закрылка. На фиг. 3 работы [9-13] изображены почти единственные имеющиеся в распоряжении систематические данные по крутильному флаттеру закрылка при больших значениях  $m/\pi\rho b^2$ . Эти данные наводят на мысль, совершенно отличную от прежнего заключения и состоящую в том, что массовая перебалансировка может привести к уменьшению критической скорости. Согласно этой фигуре, оптимальный режим лежит вблизи  $x_\beta = 0$ , когда  $\omega_\beta = 0$ .

В случае изгибного флаттера закрылка как уменьшение  $x_\beta$ , так и увеличение  $\omega_\beta/\omega_w$  влияют, согласно [9-3], в благоприятную сторону. Флаттер исключается полностью только в том случае, когда либо отношение частоты слегка превышает единицу, либо достигнута полная массовая балансировка ( $x_\beta = 0$ ). Для заданного положительного  $x_\beta$  существует минимальное критическое отношение частот, ниже которого  $U_F$  принимает нижнее почти постоянное значение. Аналогично, когда величина  $x_\beta$  превышает некоторый предел, то для заданного отношения ( $\omega_\beta/\omega_w$ ) получаются опасно малые величины  $U_F$ . Трение во всех случаях оказывает положительное влияние, особенно на улучшение вышеупомянутых критических величин массовой балансировки и отношения частот. Сравнения, проведенные Голендом и Денглером в [9-14], показывают удовлетворительное соответствие теоретических и экспериментальных точек для определенных рассмотренных здесь конфигураций рулевых поверхностей.

В заключение подчеркнем, что у конструктора имеется два способа избежать затруднения, связанные с большинством типов флаттера основных рулевых поверхностей. Первый способ заключается в том, чтобы достигнуть по возможности полной массовой балансировки, исключая тем самым опасное взаимодействие с колебаниями основного крыла или хвостового оперения. По другим причинам этот способ часто используется в необратимых системах управления. Второй способ заключается в том, чтобы включить в приводные механизмы и поддерживающую конструкцию такую большую жесткость, чтобы отношение частот было настолько велико, насколько это необходимо для исключения какого-либо серьезного влияния рулевой поверхности на любую скорость изгибно-крутильного флаттера основной конструкции.

(d) *Выбор степеней свободы и функций деформаций.* Когда намереваются исследовать флаттер определенного самолета или части его с помощью метода Рэля—Ритца, то в первую очередь нужно решить вопрос о том, какие степени свободы следует включить в решение и каждой степени поставить в соответствие некоторую функцию деформаций. Ввиду большого разнообразия конструктивных и аэродинамических форм чрезвычайно трудно выработать общие правила, и определяющим фактором в этом случае является личная практика конструктора.

Важным обстоятельством, влияющим на выбор функции деформаций, является экономия усилий и времени, затрачиваемых на вычисление. Последняя может быть достигнута за счет разумного выбора небольшого количества функций деформаций, которые могут очень близко аппроксимировать действительную форму флаттера. Этот метод был, пожалуй, переоценен в результате его необычайного успеха в случае изгибно-крутильного флаттера гладких прямых крыльев. Нужно помнить, что этот частный случай является одним из тех случаев, когда критическая скорость нечувствительна даже к большим изме-

нениям выбранных функций  $f_w$  и  $f_\theta$ . Как и в случае определения основных форм колебаний простой конструкции методом Рэля, даже довольно неудачный выбор аппроксимирующих функций может тем не менее привести к точным собственным значениям. Последнее обстоятельство не имеет места по отношению ко многим другим видам флаттера. Очень важно поэтому, что большие быстродействующие вычислительные машины исключают надобность ограничивать практические расчеты флаттера очень небольшим числом степеней свободы.

Определенные принципы доказали в прошлом свою ценность в решении вопроса о том, какие движения будут возможно наилучшим образом аппроксимировать данную форму флаттера. Наиболее очевидный из этих принципов вытекает из того обстоятельства, что почти каждый самолет имеет центральную плоскость симметрии. Следовательно, все колебания конструкции и движения ее как твердого тела по отношению к этой плоскости можно разбить на симметричные и антисимметричные составляющие. Как доказывается небольшим исследованием уравнений движения, включающих обе составляющие, в пределах линейной механики ни один из членов одного ряда не может никоим образом взаимодействовать с членом другого ряда. Однако симметрия не является своего рода всеобъемлющим средством, сводящим анализ флаттера к поддающейся решению задаче. Если учесть движения самолета как твердого тела и движения основных рулевых поверхностей, то обычный самолет имеет 9 симметричных степеней свободы типа, рассмотренного в этом пункте, и 12 антисимметричных степеней свободы. Наружные упруго подвешенные баки легко могут чрезмерно увеличить количество этих степеней.

Второй принцип заключается в том, что степени свободы, участвующие в колебаниях и определяющие форму колебаний флаттера, обычно сильно взаимодействуют друг с другом. На языке цифр это означает, что коэффициенты при различных обобщенных координатах во всех уравнениях движения являются величинами одного порядка.

На самом деле заслуживает исследования только тот случай взаимодействия, когда коэффициенты при рассматриваемой координате достигают значительной величины лишь в двух уравнениях движения. Согласно этому правилу, при расчете флаттера крыла не следует, например, учитывать движения хвостового оперения с таким массивным фюзеляжем, при котором колебания крыла приводят к незначительному возбуждению киля или стабилизатора.

Третий принцип касается собственных частот колебаний и утверждает, что не следует учитывать степень свободы с частотой, сравнимой с ожидаемой частотой флаттера. Согласно этому правилу, при исследовании, например, изгибно-крутильного флаттера крыла зажатую рулевую поверхность с жесткими тягами можно было бы исключить из рассмотрения. Недостаток частотных испытаний заключается в трудности, которая часто встречается при оценке частоты флаттера. Например, у крыльев малых удлинений флаттер имеет место при частотах, превышающих частоту четвертого тона нормальных колебаний.

Что касается оценки функций деформаций, соответствующих отдельным степеням свободы, то этот вопрос встает только при применении метода заданных функций деформаций. В качестве основного метода нормальных форм следует использовать каждый раз, когда конструкция и распределение масс достаточно новы и предыдущий опыт не дает уверенности в справедливости более простых методов расчета. Естественно, что при отсутствии полных сведений об исследуемой системе определить функции деформаций можно только весьма приближенно. На начальных этапах проектирования полезным инструментом часто является упругая динамическая модель конструкции, если, конечно, она не слишком сложна.

В большинстве случаев метод заданных функций деформаций должен воспроизводить свойства конструкции, которую он аппроксимирует настолько точно, насколько это возможно. Выше говорилось, например, о том, как можно

гипотетически исключить взаимодействие с силами инерции у балки с упругой осью для того, чтобы облегчить расчет основных форм изгиба и кручения. Очень редко собственные значения флаттера настолько нечувствительны к форме колебаний, что простые математические функции, выбранные таким образом, чтобы удовлетворить некоторым или всем граничным условиям, можно рассматривать в качестве заданных функций деформаций. Этот процесс настолько ненадежен и требует так много опыта, что его нельзя рекомендовать для практического применения. Лучше использовать нормальные формы колебаний или осторожно выбранные заданные функции деформаций. При этом вследствие сведения к минимуму числа подлежащих рассмотрению степеней свободы полный труд, затрачиваемый на вычисления, уменьшается.

Как было указано выше, единственным реальным случаем, где сказывается преимущество метода заданных функций деформаций перед методом нормальных форм, является случай крыльев с жесткими сечениями вдоль хорды. Докажем это, выведя еще раз систему уравнений движения для прямого свободносущего крыла. Возьмем  $n$  нормальных координат  $\xi_j(t)$ . Каждая из координат дает слагаемое как к деформации изгиба, так и к деформации кручения. Функция деформаций  $j$ -й формы колебаний  $\varphi_j(x, y)$  может быть записана в виде

$$\varphi_j(x, y) = b_R f_{w_j}(y) - x f_{\theta_j}(y), \quad (9-141)$$

где  $x$  измеряется назад от упругой оси (или произвольно определенной конструктивной линии отсчета на крыле с жесткими поперечными сечениями, которое не имеет ясно определенной упругой оси). Полное перемещение поверхности крыла за счет  $\xi_j(t)$  равно

$$w_j(x, y, t) = \xi_j(t) [b_R f_{w_j}(y) - x f_{\theta_j}(y)]. \quad (9-142)$$

Иначе можно разделить изгибные и крутильные составляющие  $n$  форм колебаний:

$$\frac{w_B(y, t)}{b_R} = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) f_{w_i}(y), \quad (9-143)$$

$$\theta_T(y, t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) f_{\theta_i}(y). \quad (9-144)$$

Уравнения движения имеют вид

$$M_j \ddot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = E_j \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, n, \quad (3-147a)$$

где  $M_j$  определяется равенством (3-147 б). Конструктивное трение можно ввести с помощью приближения, основанного на замене  $\omega_j^2$  через  $\omega_j^2 [1 + i g_j]$ . Недостаток этого метода по сравнению с методом заданных функций деформаций становится очевидным при определении обобщенных аэродинамических сил. Согласно равенствам (3-147 с) и (9-55) имеем

$$\begin{aligned} E_j &= - \int_S \Delta p_a(x, y, t) \varphi_j(x, y) dx dy = \\ &= b_R \int_0^l L(y, t) f_{w_j}(y) dy + \int_0^l M_y(y, t) f_{\theta_j}(y) dy. \end{aligned} \quad (9-145)$$

В обозначениях [9-1] получим

$$L(y, t) = \pi \rho_{\infty} b^3 \omega^2 \left\{ L_n \frac{b_R}{b} \sum_{i=1}^n \xi_i(t) f_{w_i}(y) - \left[ L_a - L_n \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \sum_{i=1}^n \xi_i(t) f_{\theta_i}(y) \right\}, \quad (9-146)$$

$$M_y(y, t) = \pi \rho_\infty b^4 \omega^2 \left\{ - \left[ M_h - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \frac{b_R}{b} \sum_{i=1}^n \xi_i(t) f_{wi}(y) + \right. \\ \left. + \left[ M_\alpha - (M_h + L_\alpha) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right] \sum_{i=1}^n \xi_i(t) f_{\theta i}(y) \right\}. \quad (9-147)$$

Уравнения (9-146) и (9-147) показывают тот выигрыш, который можно получить, располагая, если это возможно, координатную ось конструкции по линии четвертой хорд так, чтобы множитель  $\left(\frac{1}{2} + a\right)$  обратился в нуль. Подставляя величины (9-146) и (9-147) в равенство (9-145) и группируя члены, получаем

$$\frac{\Xi_j}{\pi \rho_\infty \omega^2 b_R^4 l e^{i\omega t}} = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i \int_0^1 \left\langle \left( \frac{b}{b_R} \right)^2 L_h f_{wi} f_{wj} - \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 \left\{ \left[ L_\alpha - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] f_{\omega j} f_{\theta i} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ M_h - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] f_{wi} f_{\theta i} \right\} + \right. \\ \left. + \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 \left[ M_\alpha - (M_h + L_\alpha) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right] f_{\theta i} f_{\theta j} \right\rangle dy^*. \quad (9-148)$$

Здесь  $\bar{\xi}_i$  — комплексная амплитуда координаты  $\xi_i$ , определяемая равенством (9-56).

Если, наконец, подставим величину  $\Xi$  из равенства (9-148) в уравнение (9-147a), то в результате придем к системе  $n$  уравнений, которая может быть записана в следующей матричной форме:

$$\left( \left[ 1 - \left( \frac{\omega_j}{\omega} \right)^2 (1 + i g_j) \right] \left[ \frac{M_j}{\pi \rho_\infty b_R^4 l} \right] + [A] \right) \{\bar{\xi}_j\} = 0. \quad (9-149)$$

Элементами входящей сюда аэродинамической матрицы  $[A]$  являются  $n^2$  интегралов, аналогичных интегралу правой части равенства (9-148). Произведение диагональной единичной матрицы на диагональную матрицу, элементами которой являются безразмерные обобщенные массы

$$\frac{M_j}{\pi \rho_\infty b_R^4 l} = \int_0^1 \int_0^{2b} \frac{\varphi_j^2(x, y)}{b_R^2} \left[ \frac{\rho(x, y)}{\pi \rho_\infty b_R} \right] d \left( \frac{x}{b_R} \right) dy^*, \quad (9-150)$$

часто называют инерционной матрицей, так как она образуется из членов уравнения движения, выражающих ускорения. Аналогично, произведение диагональной матрицы

$$\frac{(1 + i g_j) \omega_j^2}{\omega^2}$$

на инерционную матрицу называется жесткостной или конструктивной матрицей. Детерминант флаттера является детерминантом суммы инерционной, жесткостной и аэродинамической матриц.

В матричной форме уравнения движения для  $n$  заданных несвязанных функций деформаций, включающих  $r$  форм колебаний изгиба и  $n - r$  форм колебаний кручения [ср. уравнения (9-59) и (9-60)], имели бы вид

$$\left( [M] - \left[ 1 - \left( \frac{\omega_j}{\omega} \right)^2 (1 + i g_j) \right] \left[ S \right] + [A] \right) \begin{Bmatrix} \bar{\omega}_R \\ \bar{b}_R \\ \dots \\ \bar{\theta}_R \end{Bmatrix} = 0. \quad (9-151)$$



Из уравнений (9-89) и (9-90) можно видеть, какую форму принимают элементы различных матриц. Инерционная матрица  $[M]$  составляется из интегралов, подобных нижеследующим:

$$\int_0^1 \left[ \frac{m}{\pi \rho_\infty b_R^2} \right] f_{wi} f_{wj} dy^*, \quad \int_0^1 \left[ \frac{S_y}{\pi \rho_\infty b_R^3} \right] f_{wi} f_{\theta j} dy^*$$

и

$$\int_0^1 \left[ \frac{I_y}{\pi \rho_\infty b_R^4} \right] f_{wi} f_{\theta j} dy^*.$$

Так как было допущено существование упругой оси и отсутствие статического взаимодействия между степенями свободы, жесткостная матрица является диагональной матрицей и содержит два типа членов:

$$\int_0^1 \left[ \frac{m}{\pi \rho_\infty b_R^2} \right] f_{wi}^2 dy^* \quad \text{и} \quad \int_0^1 \left[ \frac{I_y}{\pi \rho_\infty b_R^4} \right] f_{\theta i}^2 dy^*.$$

Три типичных элемента аэродинамической матрицы имеют вид

$$\int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^2 L_h f_{wi} f_{wj} dy^*,$$

$$\int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 \left[ L_a - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] f_{wi} f_{\theta j} dy^*$$

и

$$\int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 \left[ M_a - (M_h + L_a) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right] f_{\theta i} f_{\theta j} dy^*.$$

Столбцовая матрица неизвестных амплитуд включает совокупность  $r$  величин  $\bar{\omega}_i$ ,  $b_R$  и  $(n-r)$  величин  $\bar{\theta}_i$ .

Сравнивая уравнения (9-149) и (9-151), мы не видим существенной разницы между затратами труда, необходимыми для вычисления инерционной или жесткостной матрицы, за исключением немногих лишних инерционных членов в уравнении (9-151), обусловленных взаимодействием между заданными функциями деформаций. С другой стороны, на каждый элемент аэродинамической матрицы в уравнении (9-149) расходуется ориентировочно в четыре раза больше вычислительной работы, нежели на соответствующий ему элемент в уравнении (9-151). Поскольку наибольшая часть усилий, затрачиваемых на решение любой задачи флаттера, падает на аэродинамические члены, то преимущество метода заданных функций деформаций для крыла рассматриваемого типа должно быть очевидным.

Вулстон и Раньян [9-16] сравнивают результаты исследования флаттера по методу нормальных и заданных функций деформаций с экспериментальными измерениями на прямом, однородном, свободнонесущем крыле. Для того чтобы создать необычайно жесткие условия испытания метода заданных функций деформаций, в ряде сечений крыла вблизи передней кромки были размещены большие массы. Их влияние включено в уравнения движения в виде сосредоточенных добавок к интегралам, содержащим  $m$ ,  $S_y$  и  $I_y$ . Выводы работы [9-16] обычно способствуют выбору функций деформаций. Результаты, полученные по методу заданных функций деформаций, не дают лучшего совпадения с опы-



тами как для чистого крыла, так и для крыла с добавленными массами. Если масса располагается вблизи конца крыла, то в том случае, когда рассматриваются только две степени свободы, оба метода дают плохие результаты. При большем числе степеней свободы метод заданных функций деформаций оказывается более точным.

Для случая расположения масс впереди упругой оси обе схемы расчета имеют тенденцию к неосторожным оценкам скорости флаттера. В работе [9-9], в которой впервые сообщалось об экспериментах над подобной свободнонесущей моделью, Раньян и Уотинс доказывают, что для таких случаев гораздо лучше подходит решение дифференциального уравнения, данное Голендом [9-6].

Что касается задачи составления детерминанта флаттера со многими степенями свободы и решения соответствующего уравнения, получаемого приравнением детерминанта нулю, то недостаток места заставляет нас ограничиться указанием на очевидные обобщения методов, уже описанных в этом пункте. В работе [9-17] Уильямс дает прекрасный анализ этого вопроса и приводит пространный перечень работ, касающихся различных прямых и косвенных методов вычисления больших комплексных детерминантов. Эта книга [9-17] является также одним из лучших руководств в английской литературе по всем типам флаттера. Другим ценным исследованием является докторская диссертация ван де Воорена [9-19].

**9-6. Учет влияния конечности размаха в расчетах флаттера.** В системы уравнений флаттера, подобные системам уравнений (9-84) — (9-85) и (9-130) — (9-132), в принципе можно легко включить влияние сжимаемости и влияние конечности размаха. Необходимо лишь заменить действующие силы и моменты теми выражениями, которые соответствуют применяемой теории. Единственное общее замечание заключается в том, что почти каждый аэродинамический метод основан на предварительном знании формы простого гармонического движения. Можно снять это ограничение с помощью так называемых аэродинамических коэффициентов влияния, но на то, чтобы приспособить их к обычным расчетам флаттера, потребуется известный промежуток времени.

В нескольких пунктах гл. 7 были обсуждены трудные проблемы построения и систематизации расчета, связанные с большинством теорий для крыльев конечного размаха. Если степени свободы и формы колебаний заданы, то вычисление инерционной и жесткостной частей уравнений флаттера осуществляется непосредственно. Более 90% заботы и труда посвящается обычно обобщенным аэродинамическим силам. Учитывая затруднения, которые могут возникнуть в случае теории несущей полосы, не приходится удивляться, что учет пространственности течения на практике осуществляется редко.

Для всех типов крыльев, кроме крыльев очень малого удлинения, хорошее общее правило заключается в том, чтобы сначала провести анализ флаттера по теории несущей полосы. Это правило имеет два преимущества. Первое заключается в том, что вследствие общего осторожного характера расчетов по теории несущей полосы из рассмотрения исключается только небольшое число типов неустойчивости. Часто расчеты, проведенные с учетом этой теории, показывают, что самолет совершенно не подвержен флаттеру, или подсказывают те минимальные модификации, которые приведут к этому. Во-вторых, если собираются провести более точный анализ, то в уравнениях движения, уже выведенных для случая теории несущей полосы, нужно изменить только определенные аэродинамические элементы. Последнее имеет особое значение для методов, подобных методу Рейсснера (см. п. 7-2), где обобщенные аэродинамические силы определяются с помощью дополнительных поправок к величинам, подсчитанным по двумерной теории несущей полосы.

Для прямых крыльев в потоке несжимаемой жидкости на примере транспортного реактивного самолета будет показан удобный метод учета влияния индукции.

Пример 9-3. Вычислить скорость изгибно-крутильного флаттера свободнонесущего крыла, указанного в примере 9-1, включая учет влияния конечности размаха по теории Рейсснера.

Решение. Как и в примере 9-1, применим метод  $U - g$  и используем две заданные независимые функции деформаций  $f_w(y)$  и  $f_\theta(y)$ . Здесь мы не будем повторять вывода инерционных, упругих и аэродинамических (по теории несущей полосы) элементов детерминанта флаттера, а сосредоточим внимание на определении обобщенных сил.

Как показано в п. 7-2 и работе [9-18], пространственность течения обуславливает следующие добавочные члены к выражениям для подъемной силы и момента на единицу размаха, появляющиеся в правой части уравнений (9-84) и (9-85):

$$\Delta L(y, t) = -2\pi\rho U^2 b_R [ik\sigma_w(y)] \frac{\bar{w}_R(t)}{b_R} f_w(y) + \\ + 2\pi\rho U^2 b \left[ 1 + ik \left( \frac{1}{2} - a \right) \right] \sigma_\theta(y) \bar{\theta}_R(t) f_\theta(y), \quad (a)$$

$$\Delta M_y(y, t) = -2\pi\rho U^2 b b_R \left[ \left( \frac{1}{2} + a \right) \sigma_w(y) \right] \frac{\bar{w}_R(t)}{b_R} f_w(y) + \\ + 2\pi\rho U^2 b^2 \left[ \left( \frac{1}{2} + a \right) + ik \left( \frac{1}{4} - a^2 \right) \right] \sigma_\theta(y) \bar{\theta}_R(t) f_\theta(y). \quad (b)$$

Эти добавочные члены приводят к дополнительным обобщенным силам:

$$\Delta Q_w = -2\pi\rho U^2 b_R \frac{\bar{w}_R}{b_R} e^{i\omega t} \int_0^l ik\sigma_w(y) f_w^2 dy + \\ + 2\pi\rho U^2 \bar{\theta}_R e^{i\omega t} \int_0^l b \left[ 1 + ik \left( \frac{1}{2} - a \right) \right] \sigma_w(y) f_w f_\theta dy, \quad (c)$$

$$\Delta Q_\theta = -2\pi\rho U^2 b_R \frac{\bar{w}_R}{b_R} e^{i\omega t} \int_0^l b \left[ \left( \frac{1}{2} + a \right) ik \right] \sigma_w(y) f_w f_\theta dy + \\ + 2\pi\rho U^2 \bar{\theta}_R e^{i\omega t} \int_0^l b^2 \left[ \left( \frac{1}{2} + a \right) + ik \left( \frac{1}{4} - a^2 \right) \right] \sigma_\theta(y) f_\theta^2 dy. \quad (d)$$

Для того чтобы перейти от уравнений (9-84) — (9-85) к уравнениям (9-89) — (9-90) (для несжимаемого потока  $\rho_\infty$  заменяется через  $\rho$ ), уравнения (c) и (d) нужно разделить соответственно на  $\pi\rho b_R^3 \omega^2 l e^{i\omega t}$  и  $\pi\rho b_R^4 \omega^2 l e^{i\omega t}$ . Тогда получаются следующие четыре поправки к коэффициентам при  $\bar{w}_R/b_R$  и  $\bar{\theta}_R$  в уравнениях (9-89) и (9-90); эти коэффициенты являются поправками к четырем элементам  $A, B, C, D$  детерминанта флаттера, соответствующего теории несущей полосы:

$$\Delta A = -\frac{2}{k_R^2} \int_0^1 ik\sigma_w(y^*) f_w^2 dy^*, \quad (e)$$

$$\Delta B = \frac{2}{k_R^2} \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right) \left[ 1 + ik \left( \frac{1}{2} - a \right) \right] \sigma_\theta(y^*) f_w f_\theta dy^*, \quad (f)$$

$$\Delta C = -\frac{2}{k_R^2} \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right) \left[ \left( \frac{1}{2} + a \right) ik \right] \sigma_w(y^*) f_w f_\theta dy^*, \quad (g)$$

$$\Delta D = \frac{2}{k_R^2} \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^2 \left[ \left( \frac{1}{2} + a \right) + ik \left( \frac{1}{4} - a^2 \right) \right] \sigma_\theta(y^*) f_\theta^2 dy^*, \quad (h)$$

Численная форма детерминанта флаттера [уравнение (j) в примере 9-1] с этими добавлениями при  $a = -0,3$  будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} \{A + \Delta A\} & \{B + \Delta B\} \\ \{C + \Delta C\} & \{D + \Delta D\} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left\{ \begin{aligned} &8,2156 [1 - 0,3277Z] + 0,2073 + \\ &+ 0,2215 K_2(L_h) - \\ &-\frac{2}{k_R^2} \int_0^1 ik\sigma_w(y^*) f_w^2 dy^* \end{aligned} \right\} & \left\{ \begin{aligned} &0,3047 - 0,3545 K_2(L_a) - \\ &- 0,3489 K_3(L_a) + \\ &+ 0,0709 K_2(L_h) + \\ &+\frac{2}{k_R^2} \int_0^1 \left(\frac{b}{b_R}\right) [1 + 0,8lk] \sigma_\theta(y^*) f_\theta f_w dy^* \end{aligned} \right\} \\ \left\{ \begin{aligned} &0,3047 + 0,0709 K_2(L_h) - \\ &-\frac{0,4}{k_R^2} \int_0^1 \left(\frac{b}{b_R}\right) ik\sigma_w(y^*) f_w f_\theta dy^* \end{aligned} \right\} & \left\{ \begin{aligned} &66,1117 [1 - Z] + 0,2807 + \\ &+ 1,0569 K_2(M_a) + \\ &+ 0,0423 K_2(L_h) - \\ &- 0,2114 K_2(L_a) - \\ &- 0,1772 K_3(L_a) + \\ &+\frac{2}{k_R^2} \int_0^1 \left(\frac{b}{b_R}\right)^2 [0,2 + 0,16lk] \sigma_\theta(y^*) f_\theta^2 dy^* \end{aligned} \right\} \end{vmatrix} = 0. \quad (i)$$

Для каждого выбранного значения  $k_R$ , после того как будут вычислены интегралы (e), (f), (g) и (h), детерминантное уравнение можно решить относительно двух комплексных значений  $Z$ . Последний шаг является наиболее трудоемким, поскольку он включает решение интегродифференциального уравнения (7-25) относительно функций  $\bar{Q}_w(y^*)$  и  $\bar{Q}_\theta(y^*)$ . Далее, с помощью равенства (7-29) определяются  $\sigma_w(y^*)$  и  $\sigma_\theta(y^*)$ . Это достигается следующим образом. Допуская, что движения крыла симметричны, удерживаем в каждом ряде Фурье четыре члена [равенство (7-36)]:

$$\bar{Q}_w(y^*) = \sum_{n=1, 3, 5, 7} K_{nw} \frac{\sin n\varphi}{n} \quad (j)$$

и

$$\bar{Q}_\theta(y^*) = \sum_{n=1, 3, 5, 7} K_{n\theta} \frac{\sin n\varphi}{n}. \quad (k)$$

Если

$$\bar{Q}_w^{(2)}(y^*) = -\frac{4iC(k)}{kH_1^{(2)}(k)} \left(\frac{b_R}{b_0}\right) \frac{\bar{w}_R}{b_R} f_w(y^*) \quad (l)$$

и

$$\bar{Q}_\theta^{(2)}(y^*) = \frac{4iC(k)}{k_0 H_1^{(2)}(k)} [1 + 0,8lk] \bar{\theta}_R f_\theta(y^*), \quad (m)$$

то система совместных уравнений (7-43) для случая двух степеней свободы имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=1, 3, 5, 7} K_{nw} \left\{ \frac{\sin n\varphi}{n} + 0,7069 \frac{b}{b_0} \mu(k) S_n(4,44k_0, \varphi) \right\} = \\ = -2,333 \frac{iC(k)}{kH_1^{(2)}(k)} \frac{\bar{w}_R}{b_R} f_w(4,44 \cos \varphi), \quad (n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1, 3, 5, 7} K_{n\theta} \left\{ \frac{\sin n\varphi}{n} + 0,7069 \frac{b}{b_0} \mu(k) S_n(4,44k_0, \varphi) \right\} = \\ = \frac{4iC(k)}{k_0 H_1^{(2)}(k)} [1 + 0,8lk] \bar{\theta}_R f_\theta(4,44 \cos \varphi). \quad (o) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$k_R = 0,583k_0. \quad (p)$$

Уравнения (п) и (о) были удовлетворены в сечениях  $\cos \varphi = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ , соответствующих тем сечениям, которые были использованы в работе [9-18]. Другие таблицы в этой работе дают величины

$$\mu(k), \sin n\varphi/n \quad [iC(k)/kH_1^{(2)}(k)]$$

и величину дополнительных функций, облегчающих решение. В качестве числового примера приведем уравнения для  $k_R = 0,1$ .

$$[1,1463 - 0,1233i] K_{1w} + [-0,4505 + 0,0887i] K_{3w} + [0,2306 - 0,0501i] K_{5w} + \\ + [-0,1060 + 0,0253i] K_{7w} = - [0,000479 + 0,002507i] \frac{\bar{w}_R}{b_R}, \quad (q)$$

$$[1,0700 - 0,1049i] K_{1w} + [-0,1802 + 0,0296i] K_{3w} + [-0,1989 + 0,0418i] K_{5w} + \\ + [0,3632 - 0,0782i] K_{7w} = - [0,00132 + 0,00727i] \frac{\bar{w}_R}{b_R}, \quad (r)$$

$$[0,9495 - 0,0749i] K_{1w} + [0,1922 - 0,0343i] K_{3w} + [-0,4279 + 0,0835i] K_{5w} + \\ + [0,0785 - 0,0152i] K_{7w} = - [0,00285 + 0,01704i] \frac{\bar{w}_R}{b_R}, \quad (s)$$

$$[0,7409 - 0,0571i] K_{1w} + [0,5535 - 0,0879i] K_{3w} + [0,0343 + 0,0089i] K_{5w} + \\ + [-0,4101 + 0,0734i] K_{7w} = - [0,00376 + 0,02462i] \frac{\bar{w}_R}{b_R}. \quad (t)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\frac{K_{1w}}{\bar{w}_R/b_R} = [0,0895 + 1,211i] \times 10^{-2}, \quad (u)$$

$$\frac{K_{3w}}{\bar{w}_R/b_R} = [-0,0527 + 2,456i] \times 10^{-2}, \quad (v)$$

$$\frac{K_{5w}}{\bar{w}_R/b_R} = - [0,0470 + 0,2990i] \times 10^{-2}, \quad (w)$$

$$\frac{K_{7w}}{\bar{w}_R/b_R} = - [0,0327 + 0,4846i] \times 10^{-2}. \quad (x)$$

Функция  $\sigma_w$  дается равенством (7-29) в виде

$$\sigma_w(y^*) = \left[ \frac{\bar{Q}_w(y^*)}{\bar{Q}_w^{(2)}(y^*)} - 1 \right] \left[ C(k) + \frac{iJ_1(k)}{J_0(k) - iJ_1(k)} \right] = \\ = \left\{ \frac{0,429ikH_1^{(2)}(k)}{C(k)f_w(y^*)} \sum_{n=1,3,5,7} \frac{K_{nw}}{\bar{w}_R/b_R} \frac{\sin n\varphi}{n} - 1 \right\} \left[ C(k) + \frac{iJ_1(k)}{J_0(k) - iJ_1(k)} \right]. \quad (y)$$

Аналогичное равенство имеем для  $\sigma_\theta(y^*)$ .

Для каждого значения  $k_R$  в шести сечениях по размаху были определены  $\sigma_w(y^*)$  и  $\sigma_\theta(y^*)$ , причем при вычислении интегралов (e), (f), (g) и (h) использовалось правило трапеций. Корни матрицы (i) были определены по квадратичной формуле для трех значений  $k_R$ . При этом руководствовались значениями  $k_R$ , близкими к значениям, соответствующим флаттеру в примере 9-1. Значения этих корней, вместе с соответствующими значениями скорости, частоты и конструктивного демпфирования, помещены в табл. 9-3.

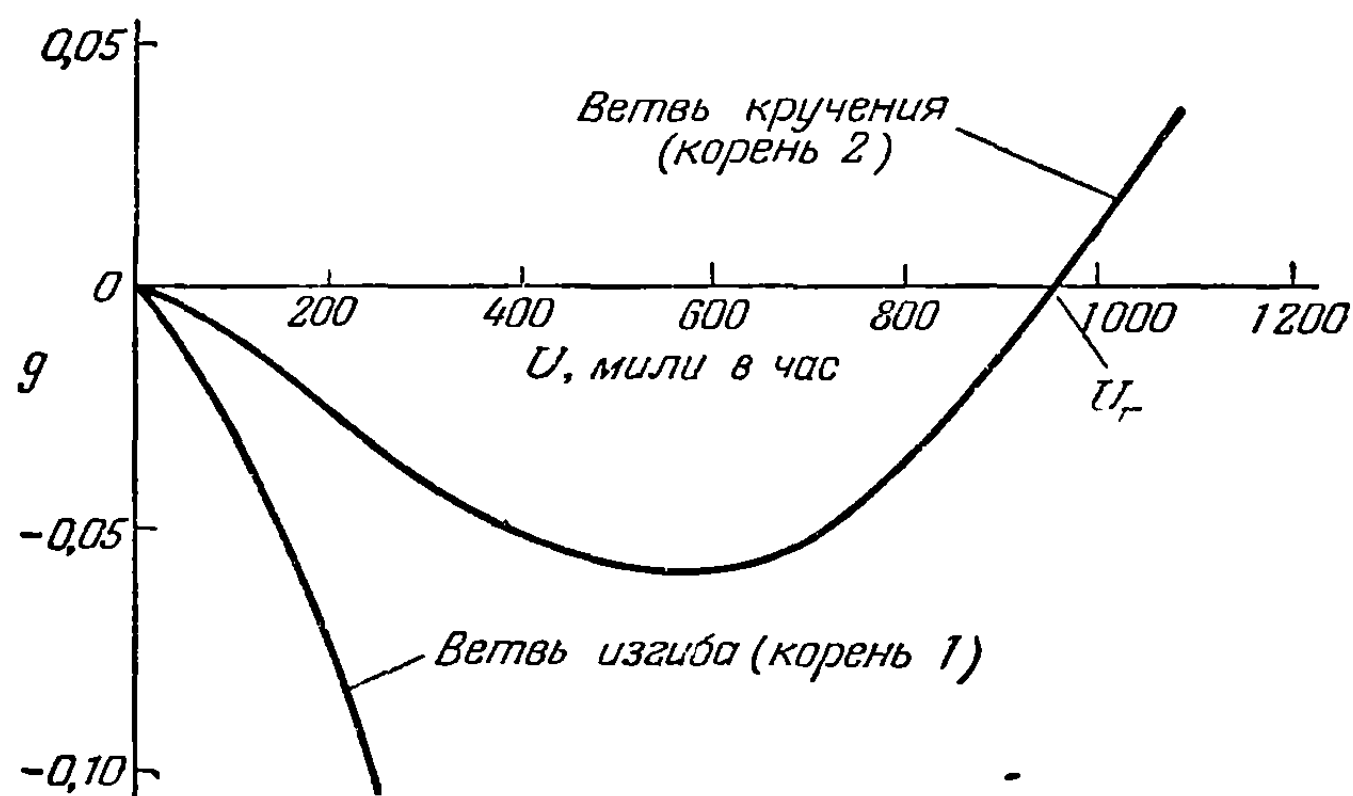
На фиг. 9-13 изображена кривая изменения  $g$  по  $U$  для двух заданных аэроупругих форм. Если допустить, что  $g_w$  и  $g_\theta$  равны нулю, то найдем следующее условие флаттера, при котором кривая  $Z_2$  пересекает ось  $U$ :

$$U_F = 955 \text{ миль в час}, \quad \omega_F = 17,9 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \quad k_F = 0,070. \quad (z)$$

Таблица 9-3

$h_R$	$Z_1$	$U_1$ , миль в час	$\omega_1$ , $\frac{\text{рад}}{\text{сек}}$	$g_1$	$Z_2$	$U_2$ , миль в час	$\omega_2$ , $\frac{\text{рад}}{\text{сек}}$	$g_2$
0,06	3,392 -1,390i	755	12,14	-0,410	1,702 +0,0562i	1062	17,14	0,033
0,1	3,094 -0,719i	475	12,72	-0,232	1,314 -0,0651i	727	19,53	-0,050
0,2	3,084 -0,289i	237	12,71	-0,094	1,080 -0,0564i	401	21,52	-0,052

Значение этой критической скорости на 10,4% выше значения 865 миль в час, полученного по теории несущей полосы. Опыт применения метода Рейсснера при анализе флаттера прямых крыльев говорит о том, что обычно величина критической скорости, рассчитанная таким методом, лежит ближе к экспериментально полученным результатам



Фиг. 9-13. Кривая зависимости конструктивного демпфирования  $g$  от скорости полета  $U$  из расчета изгибно-крутильного флаттера свободнонесущего крыла реактивного самолета с учетом влияния конечности размаха по теории Рейсснера.

нежели величины, получаемые расчетом по двумерной теории. Поэтому пример, приведенный здесь, подтверждает обычную тенденцию теории несущей полосы к завышенным оценкам.

**9-7. Влияние сжимаемости на флаттер.** В гл. 6 и п. 7-5 перечислены важнейшие источники аэродинамических коэффициентов для колеблющихся профилей и крыльев конечного размаха в дозвуковом, звуковом и сверхзвуковом потоках. Как и в случае трехмерного несжимаемого потока, в системе уравнений флаттера, подобной системе уравнений (9-84)—(9-85) и (9-130)—(9-132), для того чтобы учесть сжимаемость потока, необходимо изменить только *аэродинамические* члены. Фактически для изгибно-крутильного флаттера, исследованного на базе теории несущей полосы, в работе [9-20] приведены данные (в обозначениях [9-1]) для всех чисел Маха, за исключением числа Маха, равного единице. Это позволяет перейти к безразмерным уравнениям, подобным уравнениям (9-89) и (9-90), даже не меняя обозначений. Для иллюстрации в примере 9-5, помещенном в конце этого пункта, произведен расчет на флаттер крыла реактивного транспортного самолета.

Из гл. 6 видно, что функциональная зависимость воздушных нагрузок, обусловленных сжимаемостью, от числа Маха так же сложна, как и зависи-

мость этих нагрузок от приведенной частоты. Поэтому почти во всех практических расчетах флаттера мы будем прибегать к косвенному методу, основанному на предварительном выборе величин  $k$  и  $M$ . Два таких особенно удачных метода бросаются в глаза. Первый обычно используется в авиационной промышленности. Этот метод хорошо приспособлен как к параметрическому исследованию, так и к исследованию определенного самолета на какой-либо определенной высоте. Для каждой серии заданных чисел Маха критическая скорость определяется одним из стандартных методов, уже описанных для случая несжимаемого потока; в США метод  $U-g$  является наиболее распространенным методом расчета. Раз такой расчет проделан, можно начертить кривую  $U_F$  по  $M$  и выбрать точки, в которых скорость и число Маха соответствуют температуре атмосферы на заданной высоте полета.

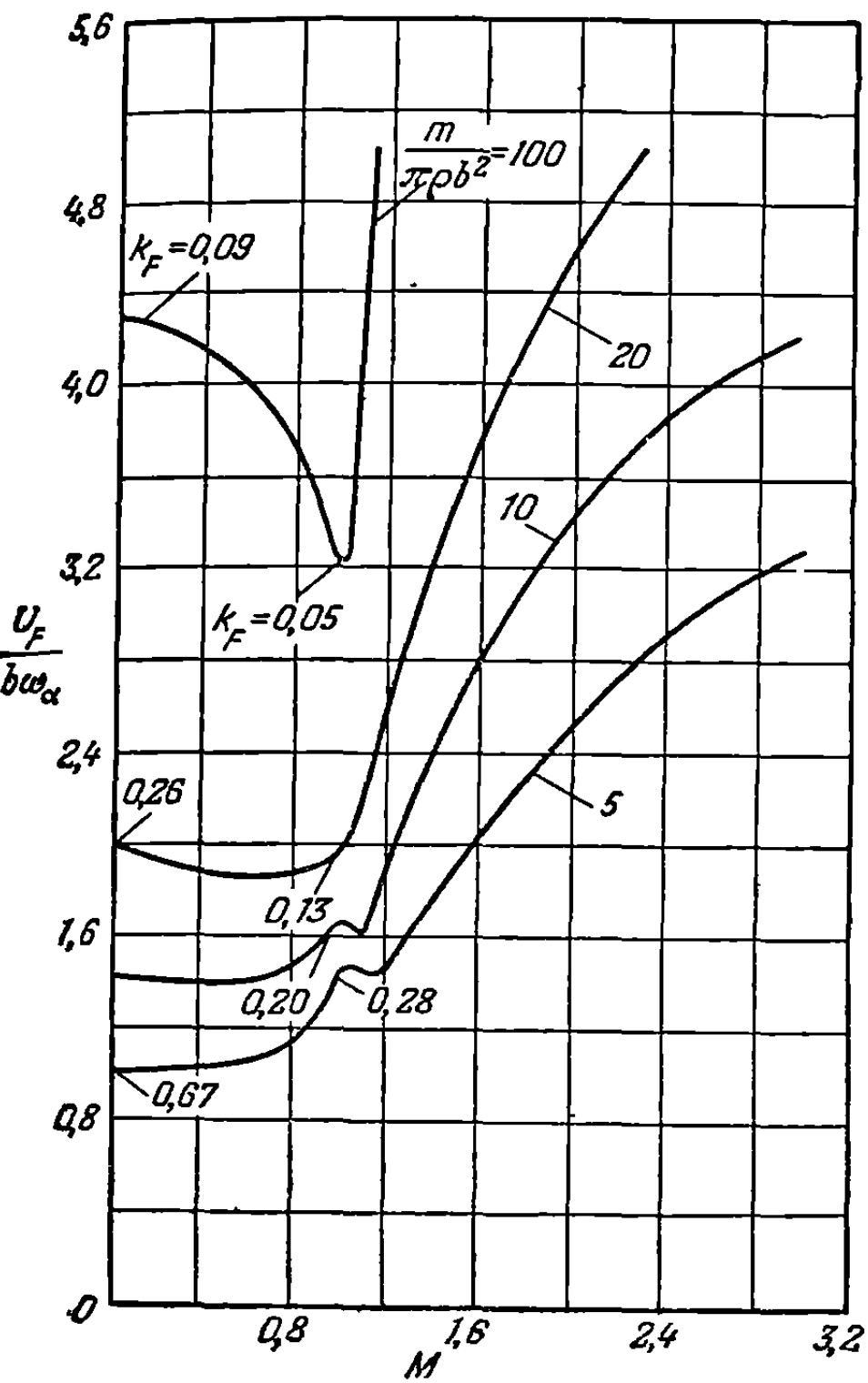
Второй метод является обобщением идеи вариации плотности, которая в общих чертах была описана в п. 9-5 (а). Для нескольких пар значений  $M$  и  $k$  детерминант флаттера разрешается относительно частоты  $\omega$  и плотности  $\rho_\infty$ . Каждое полученное таким способом значение  $\omega$  определяет вместе со значением  $k$  скорость  $U_F$ . Скорость и число Маха определяют скорость звука  $a_\infty$ , а следовательно, и температуру  $T_\infty$ , по которой, исходя из уравнения состояния идеального газа, подсчитывается давление. Получающееся термодинамическое состояние может не представлять возможную совокупность атмосферных условий, но процесс расчета может повторяться до тех пор, пока не вырисуеться поверхность  $U_F$  по  $p_\infty$  и  $\rho_\infty$ . На этой поверхности имеется некоторая линия, которая определяется пересечением поверхности с вертикальным цилиндром, описывающим стандартную атмосферу. Эта линия и является как раз кривой зависимости скорости флаттера от высоты. Указанная выше поверхность может быть также использована для предсказания момента наступления флаттера крыла при других состояниях окружающей атмосферы, подобных, например, тем, которые могут встретиться в высокоскоростных аэродинамических трубах.

Среди немногих опубликованных расчетов по первой схеме имеются параметрические исследования на упрощенных двумерных моделях, проведенные Гарриком и Рубиновым [9-21] и Вулстоном и Хаккелем [9-13]. Последние имели дело с флаттером рулевой поверхности, и, как было уже упомянуто в п. 9-5 (с), вывести общие заключения из этих исследований оказалось достаточно трудно. Однако первое исследование включает ценное добавление к данным, касающимся простого изгибно-крутильного флаттера (ср. п. 9-2), и допускает некоторые интересные толкования.

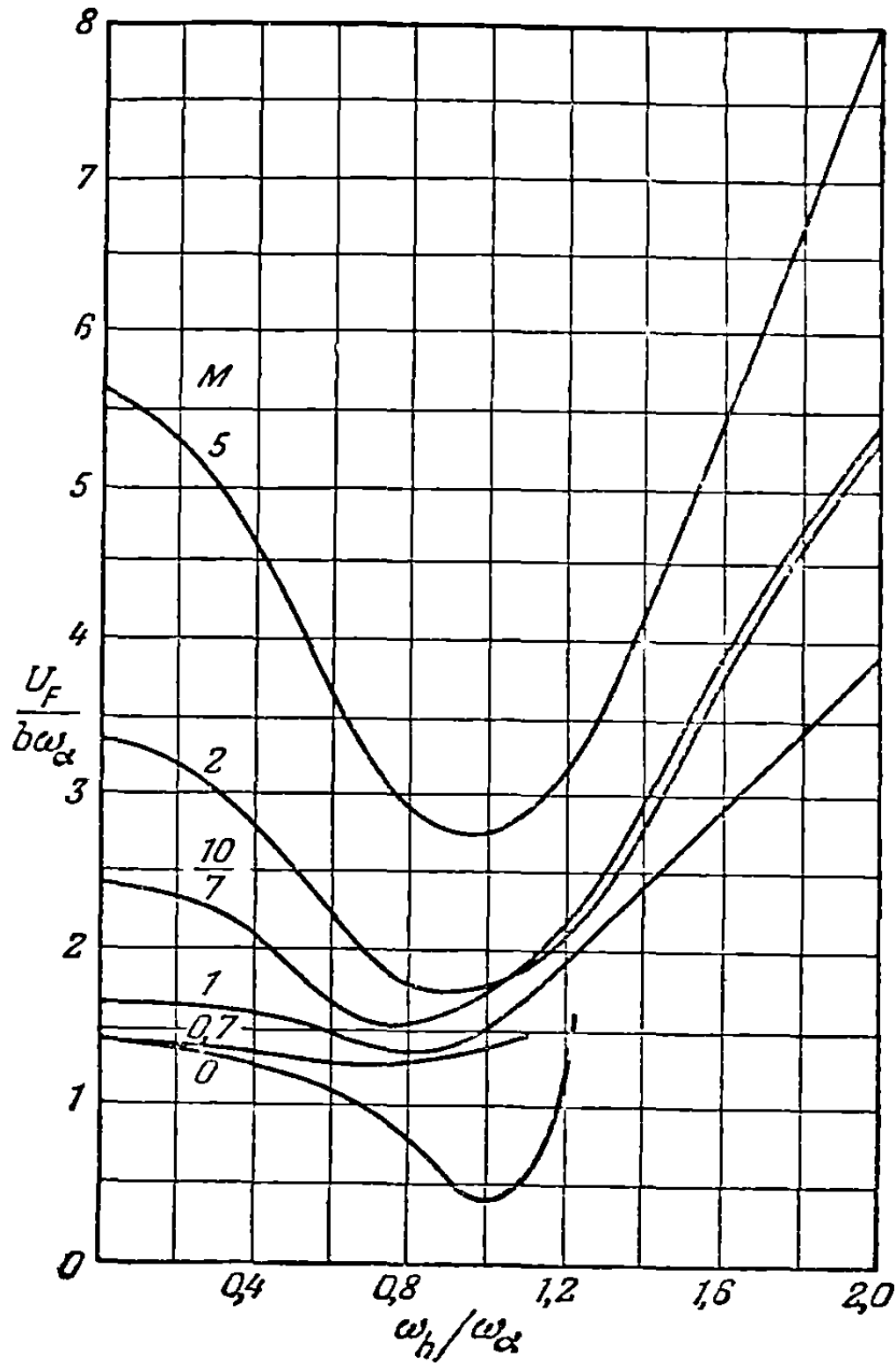
На фиг. 9-14 и 9-15 воспроизведены две из наиболее важных кривых из работы [9-21], иллюстрирующие влияние сжимаемости на безразмерную скорость  $U_F/b\omega_\alpha$ . (В действительности эти фигуры взяты из работы [9-22] с добавлением точек, соответствующих  $M=1$ .) Первое, что бросается в глаза на обеих фигурах, это сравнительная нечувствительность  $U_F$  к изменению числа  $M$  у прямых крыльев рассматриваемого типа при полете с дозвуковой скоростью. Только в случае наибольшей величины относительной плотности при числах Маха, меньших  $M=0,8$ , наблюдается изменение скорости, превышающее 10%. Ясно, что первоначальная поправка, основанная на правиле Прандтля—Глауэрта для установившегося течения, когда значение  $U_F$  для несжимаемого потока умножается на  $\sqrt[4]{1-M^2}$ , в таких случаях, вероятно, является слишком осторожной. Следует предупредить, что количественная точность этих кривых в трансзвуковом диапазоне сомнительна как вследствие непотенциальности течения при числах Маха, меньших  $M=1$ , так и вследствие беспорядочного поведения теоретических кривых аэродинамических коэффициентов по мере приближения числа  $M$  к единице сверху. Но это обстоятельство не снижает ценности этих кривых как указателей общего направления изменения величин,

и, конечно, они способствуют уточнению любого закона, строго ограниченного рамками двумерного установившегося движения жидкости.

Когда по одной из кривых фиг. 9-14 желают определить критическую скорость модели с заданными геометрическими, инерционными и жесткостными характеристиками, то используют тот факт, что полет самолета в атмосфере на какой-либо высоте характеризуется прямой линией, проходящей через начало



Фиг. 9-14. Зависимость безразмерной скорости изгибно-крутильного флаттера  $U_F / b\omega_\alpha$  от числа Маха  $M$  для различных значений  $m / \pi r b^2$ . Другие параметры равны  $\omega_h / \omega_\alpha = 0$ ,  $x_\alpha = 0,2$  и  $a = 0$ . Для отдельных точек указана приведенная частота флаттера  $k_F$ .



Фиг. 9-15. Зависимость безразмерной скорости изгибно-крутильного флаттера  $U_F / b\omega_\alpha$  от отношения частоты  $\omega_h / \omega_\alpha$  для различных значений числа Маха  $M$ . Другие параметры равны:  $m / \pi r b^2 = 10$ ,  $x_\alpha = 0,2$  и  $a = 0$ .

координат. Таким образом, если  $a_\infty$  является скоростью звука при известном состоянии газа, то

$$M = \frac{U}{a_\infty}, \tag{6-2}$$

откуда

$$\frac{U}{b\omega_\alpha} = \frac{a_\infty}{b\omega_\alpha} M. \tag{9-152}$$

Наклон кривой, определяемой уравнением (9-152), уменьшается с высотой полета до тех пор, пока не сделается постоянным в стратосфере. Однако только одна атмосферная прямая полностью соответствует каждой кривой флаттера, поскольку последняя предполагает выбор параметра  $m / \pi r_\infty b^2$  и поэтому фиксирует высоту. На фиг. 9-16 изображены три типичных случая связи между кривыми  $U_F / b\omega_\alpha$  и атмосферной прямой.

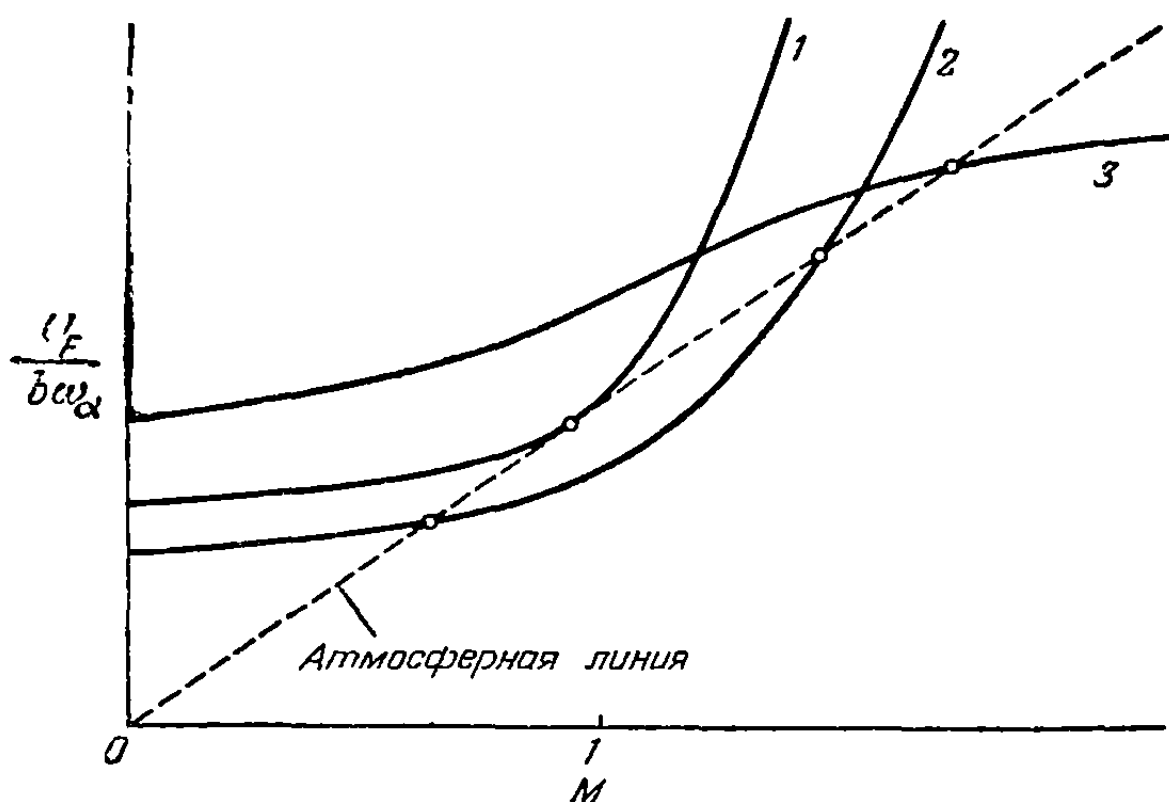


Кривая 1 касается атмосферной прямой при некотором околозвуковом числе Маха, причем флаттер отсутствует как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых скоростях. Любая кривая, лежащая выше кривой 1 (или сама кривая 1, если теорию с уверенностью можно рассматривать как теорию, дающую завышенные оценки), указывает, что на этой высоте система не будет подвержена явлению флаттера. Что может случиться на других высотах, твердо еще не выяснено. Если, однако, касание имеет место на уровне моря, то условия оказываются благоприятными, потому что с увеличением высоты атмосферная прямая опускается вниз, а точки  $U_F/b\omega_\alpha$  вследствие увеличения относительной плотности обычно смещаются вверх.

Кривая 2 характерна для многих прямых крыльев, используемых на практике. При больших дозвуковых и малых сверхзвуковых скоростях кривая

указывает на существование области неустойчивости. Безопасные полеты можно было бы совершать и за верхним критическим режимом, однако любое излишнее замедление привело бы к катастрофе. Эти результаты имеют особое значение для экспериментального исследования в аэродинамических трубах с переменным сверхзвуковым числом Маха. Для того чтобы получить полноценные данные, опыт следует начинать с большой скорости и в поисках режима флаттера уменьшать число  $M$ .

Кривая 3 указывает на другой теоретически возможный случай, когда неустойчивость воз-



Фиг. 9-16. Три возможных случая взаимного расположения кривых зависимости скорости флаттера от числа Маха и прямой, изображающей полет на заданной высоте.

никает в процессе ускоренного сверхзвукового полета. Из фиг. 9-14 видно, что этот случай может встретиться при сравнительно легких крыльях на низких высотах. Много дополнительных сведений по влиянию различных параметров можно найти в работе [9-21]. Как видно, например, из фиг. 9-15, вблизи отношения частот, равного единице, для всех чисел Маха имеет место одинаковое падение скорости флаттера, менее резко выраженное вблизи чисел  $M = 0,7$  и 1. Гаррик и Рубинов [9-21] указывают на важную зависимость, существующую между аэродинамическим центром, упругой осью и положением центра тяжести как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых скоростях. Ниже критического числа Маха аэродинамический центр движется от точки, лежащей на четверти хорды, до тех пор, пока не окажется вблизи середины хорды, когда сверхзвуковой поток полностью установится. Для малых отношений частот  $\omega_h/\omega_\alpha$  наблюдается такое же определяющее влияние положения центра тяжести на положение аэродинамического центра, как и в случае несжимаемого потока. Если на сверхзвуковых числах  $M$  центр тяжести лежит впереди середины хорды, явления флаттера не существует. Когда центр тяжести переходит за середину хорды, наблюдается резкое падение отношения  $U_F/b\omega_\alpha$  до сравнительно низкой и постоянной величины. При больших значениях отношения  $\omega_h/\omega_\alpha$  флаттер определяет параметр дисбаланса упругой оси  $x_\alpha$ . Когда параметр  $x_\alpha$  отрицателен, неустойчивость отсутствует, тогда как минимальное значение отношения  $U_F/b\omega_\alpha$  указывает на тот факт, что центр тяжести находится на несколько процентов длины хорды позади упругой оси.

Хотя эта тема и будет опять обсуждаться в п. 9-10, следует обратить здесь внимание на тот факт, что неустойчивость при кручении с одной степенью

свободы должна иметь место для нормальных положений упругой оси и сверхзвуковых чисел Маха, меньших  $\sqrt{2,5}$ . Этот вид неустойчивости может также иметь место на шарнирно-укрепленных рулевых поверхностях. В обоих случаях она обуславливается тем фактом, что аэродинамический коэффициент расходится по фазе на  $90^\circ$  с колебанием тангажа и имеет такой знак, при котором воздушный поток питает энергией колебательное движение. Как показано Флаксом [9-23], эта неустойчивость оказывает влияние на изгибно-крутильный флаттер только тогда, когда отношение частот  $\omega_h/\omega_a$  превышает единицу, что на практике встречается редко. Для крыльев, обладающих меньшей жесткостью на кручение, во флаттере участвуют обе степени свободы, так что приток энергии, идущий только от кручения, нейтрализуется. В этом случае расчеты, основанные на искусственном подавлении колебаний изгиба, не имеют смысла.

Много теоретических исследований по колеблющимся сверхзвуковым крыльям в трехмерном потоке было посвящено изучению этой неустойчивости около поперечной оси; общее уменьшение устойчивости происходит в тех же диапазонах чисел Маха и при том же положении упругой оси, как и в двумерном потоке. Однако при оценке значения этих данных для случаев изгибно-крутильного флаттера следует соблюдать известную осторожность. В опубликованной литературе нет случаев применения метода вариации плотности к анализу флаттера с учетом сжимаемости применительно к крыльям, используемым на практике. Поэтому здесь представлены результаты расчета для простого свободонесущего крыла.

Пример 9-4. Вычислить изменение скорости изгибно-крутильного флаттера в зависимости от термодинамического состояния окружающего воздуха при полете в сжимаемой атмосфере модели однородного крыла, имеющего следующие характеристики: удлинение = 4; центр тяжести лежит на  $49,1\%$  позади передней кромки; упругая ось расположена на  $41,3\%$  позади передней кромки;

$$r_a^2 = \frac{I_y}{mb^2} = 0,28, \quad \frac{\omega_w}{\omega_\theta} = 0,48, \quad b = b_R = 0,1263 \text{ фута}, \quad \omega_\theta = 1747 \text{ рад/сек.} \quad (a)$$

Флаттер модели экспериментально наблюдался при такой плотности, что

$$\frac{m}{\pi\rho_\infty b^2} = 64,9. \quad (b)$$

*Решение.* Выбираем одну форму колебаний изгиба и одну форму колебаний кручения; функции деформации  $f_w(y)$  и  $f_\theta(y)$  будут функциями деформации однородного свободонесущего крыла. Уравнениями флаттера являются уравнения (9-89) и (9-90) с подставленными туда соответствующими численными значениями безразмерных параметров. Положим, что

$$g_w = g_\theta = 0, \quad a = -0,174, \quad x_a = \frac{S_y}{mb} = 0,172.$$

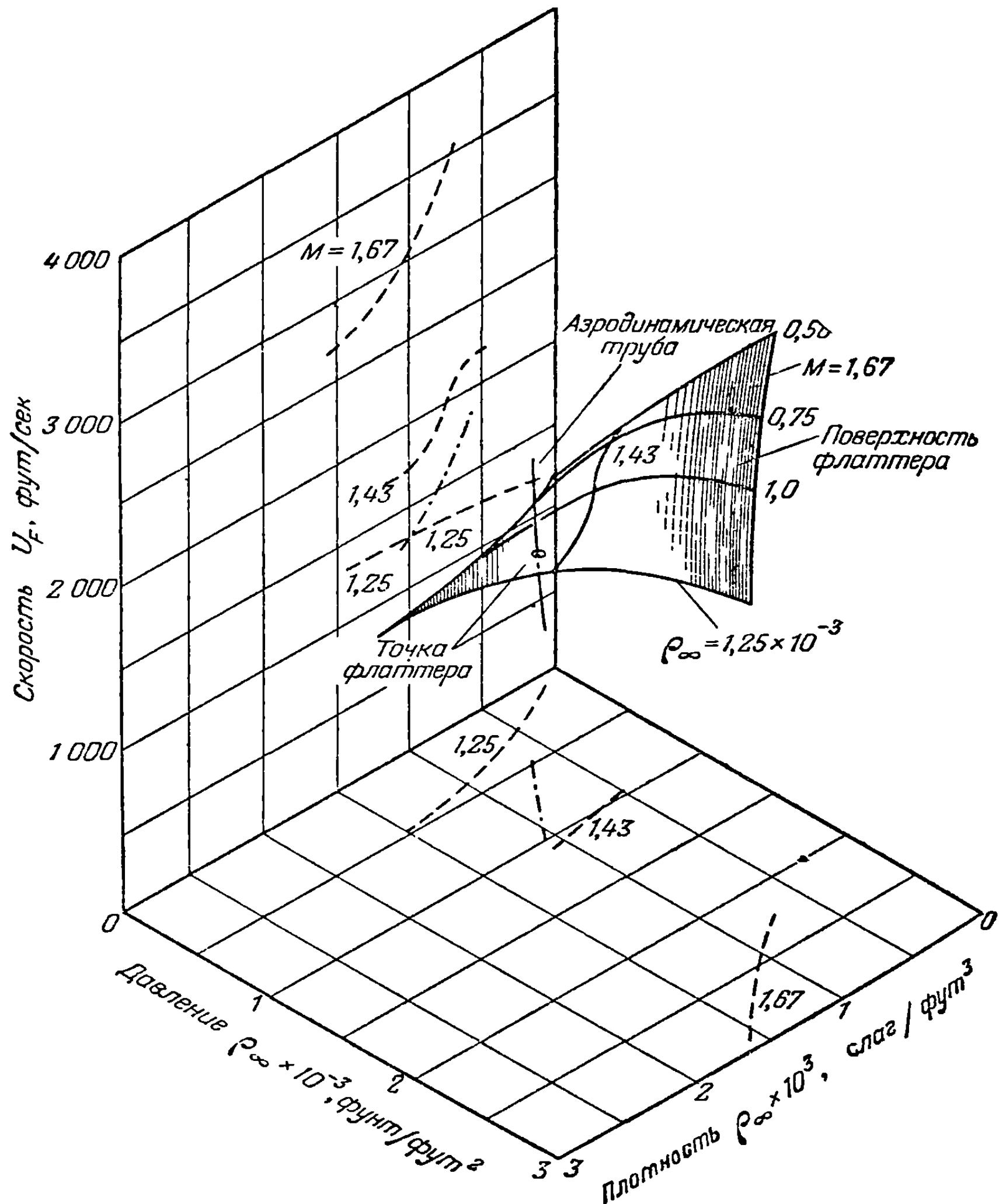
Детерминант флаттера решается относительно  $m/\pi\rho_\infty b^2$  и  $\omega_\theta^2/\omega^2$  для ряда значений  $k$  и сверхзвуковых чисел  $M$ . Аэродинамические коэффициенты берутся из [9-20].

Детали вычислений здесь не приводятся, поскольку расчет очень похож на расчет по методу вариации плотности в несжимаемом потоке. Каждый корень детерминанта, как указывалось выше, дает комбинацию  $U_F$ ,  $\rho_\infty$  и  $\rho_\infty$ . Поверхность флаттера изображена на фиг. 9-17.

На фиг. 9-17 кривые стандартной атмосферы изображены в плоскости  $\rho_\infty - \rho_\infty$ , там же изображена поверхность  $U_F$ , показывающая изменение критической скорости с высотой. На этой фигуре приведена также кривая возможного изменения скорости в зависимости от давления и плотности в типичной аэродинамической трубе прерывного действия с переменным числом Маха и выхлопом в резервуар, из которого предварительно выкачан воздух при повышающемся противодавлении. Точка пересечения этой кривой с поверхностью  $U_F$  указывает режим, на котором для модели, испытанной в аэродинамической трубе, наступило бы явление флаттера. Некоторые заключения, касающиеся момента приближения флаттера и стремительности его наступления, можно сделать, исходя из величины угла, под которым эта линия пересекает поверхность  $U_F$ .

Однако по этим результатам нелегко сделать вывод о том, какая сторона поверхности представляет устойчивое состояние. Этот вопрос можно решить, добавляя конструктивное трение и наблюдая за тем, куда перемещается  $U_F$ .

Пример 9-5. Вычислить изменение критической скорости с числом Маха для изгибно-крутильного флаттера крыла, напоминающего свободно-несущее крыло реактивного транспортного самолета, указанного в примере 9-1. Применить теорию несущей полосы. Расчет произвести для атмосферных условий на уровне моря.



Фиг. 9-17. Поверхность изменения  $U_F$  от  $q_\infty$  и  $\rho_\infty$  для сверхзвукового изгибно-крутильного флаттера модели однородного крыла.

**Решение.** Как и в примере 9-1, для каждой заданной величины  $M$  будем вести расчет по методу  $U-g$ . Выберем те же самые независимые функции деформации  $f_w(y)$  и  $f_\theta(y)$ . Инерционные и жесткостные свойства крыла и положение упругой оси остаются неизменными, за исключением того, что статический дисбаланс сечения крыла, содержащего сосредоточенную массу двигателя, мы примем равным  $-91,44$  *слэг/фут*. Для облегчения длинных аэродинамических расчетов заменим крыло трапецевидной формы нормальным прямоугольным крылом с той же площадью и тем же размахом. Поэтому хорда будет иметь постоянную величину, соответствующую хорде в сечении  $y=1/2$ , (a)

$$2b = 2b_R = 13,54 \text{ фута.}$$

Уравнениями флаттера являются уравнения (9-89) и (9-90), в которых отношение  $b/b_R$  принято равным единице. Численное выражение детерминанта флаттера полу-

чим, положив

$$g_w = g_\theta = g, \tag{b}$$

$$Z = \left(\frac{\omega_\theta}{\omega}\right)^2 [1 + ig] \tag{c}$$

и вынося аэродинамические коэффициенты, независящие от  $y^*$ , за знаки интегралов:

$$\left| \begin{array}{cc} \{5,3589 - 1,7561Z + & \{0,1126 + \\ + 0,2431L_h\} & + 0,3555 [L_\alpha - 0,2L_h]\} \\ \{0,1126 + & \{28,1285 [1 - Z] + \\ + 0,3555 [M_h - 0,2L_h]\} & + 0,6941 [M_\alpha + 0,04L_h - \\ & - 0,2 [M_h + L_\alpha)]\} \end{array} \right| = 0. \tag{d}$$

Коэффициенты в уравнении (d) были найдены из работы [9-20] для нескольких значений  $k$  при  $M = 0; 0,5; 0,6; 0,7; 10/9; 5/4; 10/7$ . Затем по квадратичной формуле были определены два комплексных корня  $Z$ . Для двух характерных чисел Маха эти корни вместе с соответствующими величинами скорости, частоты и конструктивного демпфирования  $g$  приведены в табл. 9-4. Промежуточные графики  $g$  по  $U$  для каждого числа  $M$  не приводятся, но в табл. 9-5 помещены скорости  $U_F$  и частоты флаттера  $\omega_F$ , соответствующие пересечению кривых с  $g = 0$ .

Таблица 9-4

$k$	$Z_1$	$U_1$ , миль в час	$\omega_1$ , рад/сек	$g_1$	$Z_2$	$U_2$ , миль в час	$\omega_2$ , рад/сек	$g_2$
$M=0,6$								
0,10	2,79820 -3,19608 <i>i</i>	617	13,36	-1,14	1,53036 +0,09607 <i>i</i>	835	18,07	0,06
0,15	2,69476 -1,89248 <i>i</i>	419	13,62	-0,70	1,40533 +0,010625 <i>i</i>	581	18,87	0,01
0,20	2,75570 -1,18989 <i>i</i>	311	13,47	-0,69	1,23016 -0,08282 <i>i</i>	466	20,16	-0,07
$M=10/9$								
0,21	2,51182 -0,86300 <i>i</i>	312	14,11	-0,34	0,98377 +0,05134 <i>i</i>	498	22,54	0,05
0,24	2,60995 -0,68500 <i>i</i>	269	13,84	-0,26	1,01827 -0,02522 <i>i</i>	431	22,16	-0,02
0,25	2,65412 -0,62642 <i>i</i>	243	13,72	-0,27	1,01810 -0,04948 <i>i</i>	409	22,16	-0,05

Таблица 9-5

$M$	$U_F$ , миль в час	$\omega_F$ , рад/сек	$M$	$U_F$ , миль в час	$\omega_F$ , рад/сек
0	562	19,8	10/9	450	22,23
0,5	549	19,3	5/4 10/7	368 624 устойчивый режим	23,02 25,85
0,6	559	19,00			
0,7	583	18,67			

На фиг. 9-18 приведена кривая зависимости  $U_F$  от числа Маха. На этой фигуре нанесена также атмосферная прямая, выражающая скорость в зависимости от числа Маха для стандартных условий на уровне моря. Уравнение этой прямой имеет вид

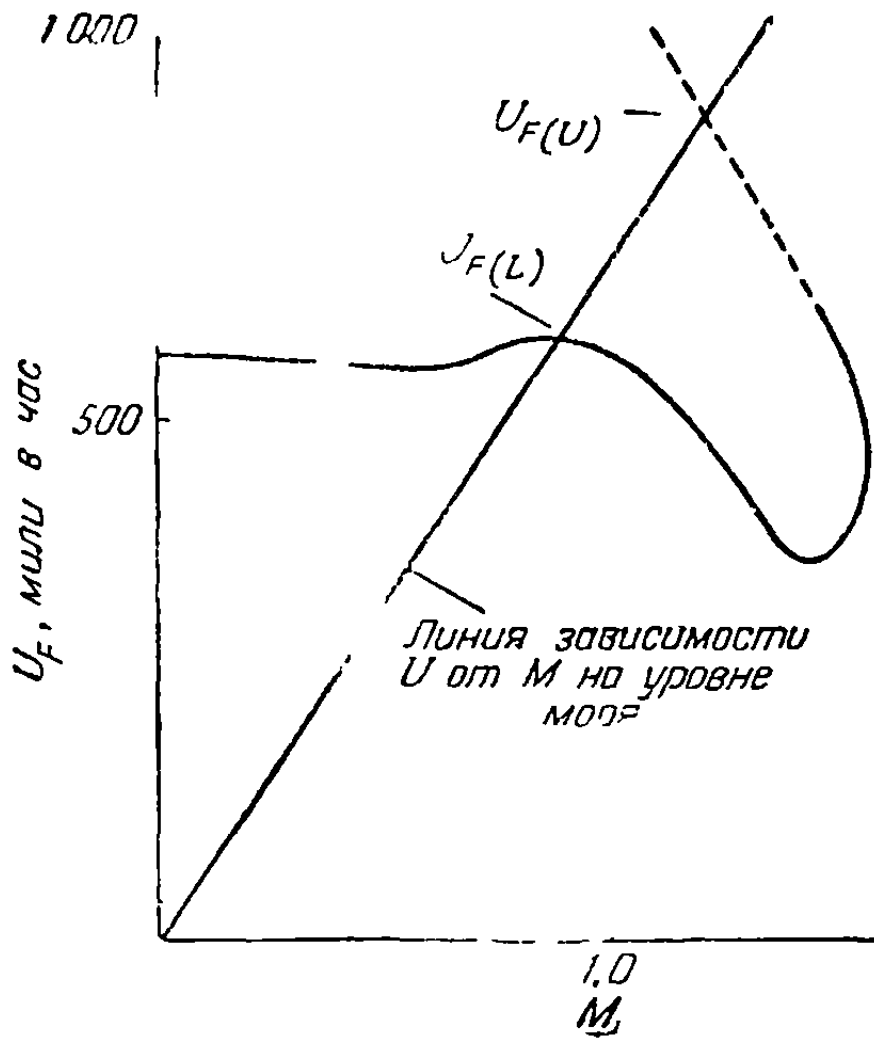
$$U = 760,9M \text{ миль в час.} \tag{e}$$

Эта прямая дважды пересекает кривую флаттера, давая нижние и верхние критические условия<sup>1)</sup>:

$$U_{F \text{ нижн.}} = 582 \text{ миль в час, } \omega_{F \text{ нижн.}} = 18,60 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \quad k_{F \text{ нижн.}} = 0,148; \quad (f)$$

$$U_{F \text{ верхн.}} = 800 \text{ миль в час, } \omega_{F \text{ верхн.}} = 28,60 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \quad k_{F \text{ верхн.}} = 0,165. \quad (g)$$

Известно, что когда все безразмерные характеристики крыла фиксированы, то  $U_F$  прямо пропорциональна частоте крутильных колебаний  $\omega_\theta$ . Сдвигая всю кривую зависимости  $U_F$  от  $M$  вверх до тех пор, пока она не коснется атмосферной прямой, мы обнаружим, что, если  $\omega_\theta$  увеличить на 162,40%, то крыло на всех числах Маха будет гарантировано от флаттера. Как указывалось выше, это, по-видимому, исключило бы вероятность возникновения изгибно-крутильного флаттера не только на уровне моря, но и на всех высотах. Подобное увеличение частоты крутильных колебаний повлекло бы за собой увеличение  $EI$  и  $GJ$  на 5880%, если бы его можно было достигнуть без заметного увеличения веса крыла, что кажется маловероятным.



Фиг. 9-18. Кривая зависимости скорости флаттера  $U_F$  от числа Маха  $M$  для изгибно-крутильного флаттера модифицированного свободнонесущего крыла реактивного транспортного самолета в сжимаемом потоке.

### 9-8. Флаттер стреловидных крыльев.

Успешное предсказание флаттера стреловидных крыльев с помощью метода заданных функций деформаций еще в большей степени, нежели при отсутствии стреловидности, зависит от точного знания конструктивных и аэродинамических характеристик системы. Уровень знаний о стреловидных крыльях, особенно с аэродинамической стороны, не является таким высоким, как для прямых крыльев. Форма крыла со значительной стреловидностью вперед или назад характеризуется двумя удлинениями: конструктивным, пропорциональным отношению длины  $\bar{l}$  от

корневого до концевых сечений к хорде  $\bar{c}$ , измеренной нормально к размаху стрелы (фиг. 9-19), и меньшим аэродинамическим удлинением. Последнее определяется равенством

$$\lambda = \frac{(2l)^2}{S}, \quad (9-153)$$

где  $2l$  — расстояние между концами крыла и  $S$  — площадь крыла в плане. Для крыла с постоянной хордой и углом стреловидности  $\Lambda$  оба удлинения связаны с помощью соотношения

$$\frac{(2l)^2}{S} = \frac{2l}{c} \cong \frac{2\bar{l}}{c} \cos^2 \Lambda, \quad (9-154)$$

где  $c$  — хорда крыла, измеренная в направлении полета. До настоящего времени нет уверенности в том, что  $\lambda$  является истинной мерой влияния конечности размаха. Дидерих [9-24] указывает, что промежуточный параметр

$$\frac{\lambda}{\cos \Lambda} = \frac{2\bar{l}}{c} \cos \Lambda \quad (9-155)$$

<sup>1)</sup> Значение верхней критической скорости приближенно, поскольку оно получено с помощью небольшой экстраполяции кривой  $U_F$  по  $M$ .

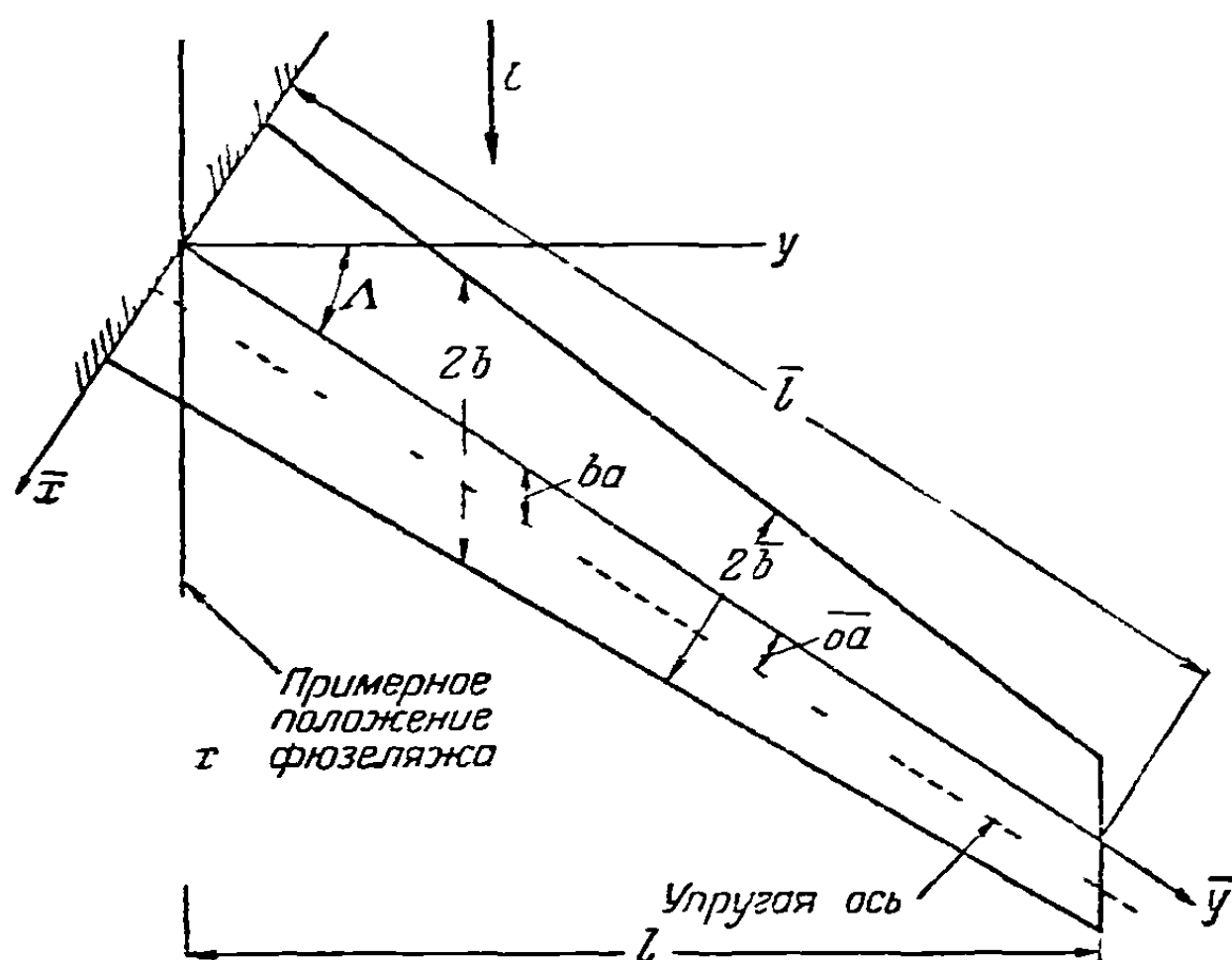
оказывается более важным для определения таких величин, как наклон криво подъёмной силы в установившемся потоке, тогда как Барби, Каннингэм и Гаррикс [9-25] делают тот вывод, что в случае флаттера к делу может иметь отношение только конструктивное удлинение.

С точки зрения аэроупругиста большие значения отношения  $\bar{l} \bar{c}$  при заданном значении  $\lambda$  имеют одно преимущество, заключающееся в том, что конструкция стреловидного крыла в этом случае более склонна вести себя как простая балка с действительной упругой осью. Замечено, что на большинстве действующих самолетов крыло работает как консольная балка заделанная в некотором сечении, нормальном к упругой оси и находящемся вблизи узлов крепления к фюзеляжу. На этом типе конструкции и сосредоточивается внимание в этом пункте. Более сложные крылья, до тех пор пока определенные поперечные сечения не деформируются в процессе изгиба и кручения, можно исследовать, используя для определения воздушных нагрузок теорию несущей полосы и метод наложения нормальных (а не заданных) форм. Крылья, деформации которых напоминают деформации пластины, должны анализироваться методами крыльев малого удлинения, которые кратко будут изложены в п. 9-9. В последнем случае главная трудность состоит в отсутствии систематической аэродинамической теории для стреловидного крыла в трехмерном потоке.

На фиг. 9-19 даны очертания крыла, для которого выводятся уравнения флаттера. Углы стреловидности  $\Lambda$  почти прямой упругой оси и прямой линии, соединяющей середины хорд, приблизительно равны друг другу. Мы опускаем здесь рассуждения, связанные со степенями свободы, характеризующими движение крыла как твердого тела, но степени свободы, как было показано в п. 9-5 (b), легко могут быть введены в расчет. Оказывается, что для симметричных форм движение тангажа и вертикальное перемещение, а для антисимметричных форм движение крена могут оказывать более значительное влияние на флаттер стреловидных, нежели нестреловидных крыльев [ср. замечания в (9-15) и (9-23)].

Как было доказано в п. 7-3, имеются два пути применения аэродинамической теории: один основывается на сечениях крыла, нормальных к упругой оси, другой — на сечениях в направлении полета. Они соответствуют двум схемам построения детерминанта флаттера. Первый путь более часто применяется на практике и кажется наиболее рациональным в тех случаях, когда нервюры крыла располагаются нормально к размаху. Второй путь удобен для случая расположения нервюр параллельно оси фюзеляжа и лучше отображает аэродинамические условия у корня и концов крыла, обычно срезанных в направлении полета.

Обращаясь сначала к расчету флаттера для случая нормально расположенных сечений, предположим, что изгиб упругой оси (положительный для отклонения вверх) и кручение около этой оси (положительное при закручивании



Фиг. 9-19. Схема свободнонесущего стреловидного крыла с упругой осью и корневым сечением, приблизительно нормальным к этой оси.



носка крыла вверх) будут аппроксимироваться с помощью заданных независимых функций деформаций

$$\bar{\omega}_B(\bar{y}, t) = \bar{\omega}_R(t) \bar{f}_w(\bar{y}), \quad (9-156)$$

$$\bar{\theta}_T(\bar{y}, t) = \bar{\theta}_R(t) \bar{f}_\theta(\bar{y}). \quad (9-157)$$

Черточка сверху всюду используется для обозначения координат и величин, связанных с расчетом по методу нормальных сечений. Если  $\bar{l}$  — расстояние между корневым сечением и концом крыла, отсчитываемое по оси крыла (фиг. 9-19), то уравнения (9-84) и (9-85) можно просто применить к этой системе, снабдив все величины, входящие в нее, черточками сверху

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_R \int_0^{\bar{l}} \bar{m} \bar{f}_w^2 d\bar{y} - \ddot{\theta}_R \int_0^{\bar{l}} \bar{S}_y \bar{f}_w \bar{f}_\theta d\bar{y} + \bar{\omega}_R \bar{\omega}_w^2 [1 + i\bar{g}_w] \int_0^{\bar{l}} \bar{m} \bar{f}_w^2 d\bar{y} = \\ = \int_0^{\bar{l}} \bar{L}(\bar{y}, t) \bar{f}_w(\bar{y}) d\bar{y}, \end{aligned} \quad (9-158)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_R \int_0^{\bar{l}} \bar{I}_y \bar{f}_\theta^2 d\bar{y} - \ddot{\omega}_R \int_0^{\bar{l}} \bar{S}_y \bar{f}_w \bar{f}_\theta d\bar{y} + \bar{\theta}_R \bar{\omega}_\theta^2 [1 + i\bar{g}_\theta] \int_0^{\bar{l}} \bar{I}_y \bar{f}_\theta^2 d\bar{y} = \\ = \int_0^{\bar{l}} \bar{M}_y(\bar{y}, t) \bar{f}_\theta(\bar{y}) d\bar{y}. \end{aligned} \quad (9-159)$$

Здесь  $\bar{m}$ ,  $\bar{S}_y$ ,  $\bar{I}_y$ ,  $\bar{L}$  и  $\bar{M}_y$  относятся к единице длины в направлении оси  $\bar{y}$ .

Аэродинамические нагрузки вычисляются по формулам (7-69) и (7-70); при этом входящие туда зависимые переменные, описывающие движение, преобразуются следующим образом:

$$\bar{h} = -\bar{\omega}_R \bar{f}_w, \quad (9-160a)$$

$$\bar{\alpha} = \bar{\theta}_R \bar{f}_\theta, \quad (9-160b)$$

$$\sigma = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} = -\bar{\omega}_R \frac{d\bar{f}_w}{d\bar{y}}, \quad (9-160c)$$

$$\tau = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \bar{y}} = \bar{\theta}_R \frac{d\bar{f}_\theta}{d\bar{y}}. \quad (9-160d)$$

Для удобства будем пользоваться упрощенными коэффициентами, которые определены равенствами (7-71), (7-72) и (7-73). Это позволяет написать

$$\bar{L}(\bar{y}, t) \stackrel{\pm}{=} \pi \rho \omega^2 \bar{b}^3 \left\{ \frac{\bar{\omega}_R}{\bar{b}} \bar{f}_w(\bar{y}) L_{hh} + \bar{\omega}_R \frac{d\bar{f}_w}{d\bar{y}} L_{hh'} - \bar{\theta}_R \bar{f}_\theta(\bar{y}) L_{h\alpha} - \bar{b} \bar{\theta}_R \frac{d\bar{f}_\theta}{d\bar{y}} L_{h\alpha'} \right\}, \quad (9-161)$$

$$\bar{M}_y(\bar{y}, t) = \pi \rho \omega^2 \bar{b}^4 \left\{ -\frac{\bar{\omega}_R}{\bar{b}} \bar{f}_w(\bar{y}) M_{\alpha h} - \bar{\omega}_R \frac{d\bar{f}_w}{d\bar{y}} M_{\alpha h'} + \bar{\theta}_R \bar{f}_\theta(\bar{y}) M_{\alpha\alpha} + \bar{b} \bar{\theta}_R \frac{d\bar{f}_\theta}{d\bar{y}} M_{\alpha\alpha'} \right\}. \quad (9-162)$$

Подставим, наконец, выражения (9-161) и (9-162) в уравнения (9-158) и (9-159), соберем подобные члены и для того, чтобы получить результат в безразмерной форме, разделим оба уравнения почленно на  $\pi \rho \omega^2 \bar{b}^3 \bar{l}$  и  $\pi \rho \omega^2 \bar{b}^4 \bar{l}$  соответственно ( $\bar{b}_R$  — произвольно выбранная расчетная полухорда). Заменим



при этом, используя свойства простого гармонического движения, величины  $\ddot{\bar{\theta}}_R$  и  $\ddot{\bar{\omega}}_R$  на  $-\omega^2\bar{\theta}_R$  и  $-\omega^2\bar{\omega}_R$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\omega}_R}{\bar{b}_R} \left\{ \left[ 1 - (1 + i\bar{g}_w) \left( \frac{\bar{\omega}_w}{\omega} \right)^2 \right] \int_0^1 \left[ \frac{\bar{m}}{\pi\rho\bar{b}_R^2} \right] \bar{f}_w^2 d\bar{y}^* + \int_0^1 \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b}_R} \right)^2 L_{hh} \bar{f}_w^2 d\bar{y}^* + \right. \\ \left. + \frac{\bar{b}_R}{l} \int_0^1 \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b}_R} \right)^3 L_{hh'} \bar{f}_w \frac{d\bar{f}_w}{d\bar{y}^*} d\bar{y}^* \right\} - \bar{\theta}_R \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{\bar{S}_y}{\pi\rho\bar{b}_R^3} \right] \bar{f}_w \bar{f}_\theta d\bar{y}^* + \right. \\ \left. + \int_0^1 \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b}_R} \right)^3 L_{h\alpha} \bar{f}_w \bar{f}_\theta d\bar{y}^* + \frac{\bar{b}_R}{l} \int_0^1 \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b}_R} \right)^4 L_{h\alpha'} \bar{f}_w \frac{d\bar{f}_\theta}{d\bar{y}^*} d\bar{y}^* \right\} = 0, \quad (9-163) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \frac{\bar{\omega}_R}{\bar{b}_R} \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{\bar{S}_y}{\pi\rho\bar{b}_R^3} \right] \bar{f}_w \bar{f}_\theta d\bar{y}^* + \int_0^1 \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b}_R} \right)^3 M_{\alpha h} \bar{f}_w \bar{f}_\theta d\bar{y}^* + \frac{\bar{b}_R}{l} \int_0^1 \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b}_R} \right)^4 M_{\alpha h'} \bar{f}_\theta \frac{d\bar{f}_w}{d\bar{y}^*} d\bar{y}^* \right\} + \\ + \bar{\theta}_R \left\{ \left[ 1 - (1 + i\bar{g}_\theta) \left( \frac{\bar{\omega}}{\omega} \right)^2 \right] \int_0^1 \left[ \frac{\bar{I}_y}{\pi\rho\bar{b}_R^4} \right] \bar{f}_\theta^2 d\bar{y}^* + \right. \\ \left. + \int_0^1 \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b}_R} \right)^4 M_{\alpha\alpha} \bar{f}_\theta^2 d\bar{y}^* + \frac{\bar{b}_R}{l} \int_0^1 \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b}_R} \right)^5 M_{\alpha\alpha'} \bar{f}_\theta \frac{d\bar{f}_\theta}{d\bar{y}^*} d\bar{y}^* \right\} = 0. \quad (9-164) \end{aligned}$$

Все множители в подинтегральных выражениях являются функциями приведенной переменной

$$\bar{y}^* = \frac{\bar{y}}{l}, \quad (9-165)$$

отсчитываемой вдоль размаха. Равенства (7-73) показывают, что аэродинамические коэффициенты зависят также от угла стреловидности  $\Lambda$  и безразмерного положения упругой оси.

Четыре скобки в уравнениях (9-163) и (9-164), умноженные на  $\bar{\omega}_R/\bar{b}_R$  и  $\bar{\theta}_R$ , образуют детерминант флаттера. Соответствующее детерминантное уравнение можно решить любым из методов, указанных в п. 9-5 (а). Если нужно учесть сжимаемость, то  $\rho$  заменяется на  $\rho_\infty$  и аэродинамические характеристики должны определяться по таблицам для соответствующего числа Маха поперечного потока

$$\frac{U \cos \Lambda}{a_\infty} = M \cos \Lambda. \quad (7-61)$$

Уравнения флаттера, связанные с сечениями крыла, направленными по потоку, не получили такого общего признания, как уравнения (9-163) и (9-164). Это объясняется, возможно, тем, что использованные в них функции деформаций кажутся неестественными для стреловидных крыльев. Однако мы выведем здесь эти уравнения, так как известно, что они приводят к удовлетворительным результатам и, кроме того, при некоторых условиях имеют определенные преимущества перед другими. Так, степени свободы движения твердого тела, например движение крена, естественно, включаются в эти уравнения, и аэроупругие модели, построенные по схеме конструктивных секций (см., например, [9-26]), очень хорошо описываются с помощью физических приближений, лежащих в их основании.

Анализируя задачу об изгибно-крутильном флаттере с помощью двух заданных функций деформаций, мы можем представить деформацию изгиба упругой оси (положительная при изгибе оси вверх) в виде

$$\omega_B(y, t) = \omega_R(t) f_w(y). \quad (9-166)$$

Это соотношение не отличается от равенства (9-156) за исключением того, что  $f_w$  рассматривается в этом случае как функция координаты, нормальной к направлению полета (фиг. 9-19). Предполагается, что поперечные сечения, параллельные скорости  $U$ , не изгибаются, поэтому распределение углов закручивания (положительные при закручивании носка вверх) *около осей, перпендикулярных к  $U$ , но пересекающих упругую ось в каждом сечении  $y$* , мы заменим распределением

$$\theta_T(y, t) = \theta_R(t) f_\theta(y). \quad (9-167)$$

За исключением секционной аэроупругой модели, трудно представить себе способ, с помощью которого можно было бы осуществить такое вращение. Тем не менее с физической точки зрения оно эквивалентно закручиванию,

$$\bar{\theta}_T = \frac{\theta_T}{\cos \Lambda}, \quad (9-168)$$

около упругой оси, направленной вдоль размаха, и малой деформации дужки в перпендикулярных к этой оси поперечных сечениях.

Если подсчитать кинетическую и потенциальную энергии простого гармонического движения в формах (9-166) и (9-167) и приписать каждой из них некоторую искусственную частоту, то найдем, что полученные выражения для  $T$  и  $U_E$  будут идентичны выражениям (9-65) и (9-67) с той лишь разницей, что  $m$ ,  $S_y$  и  $I_y$  характеризуют инерционные свойства единицы длины в направлении  $y$ . Величины  $S_y dy$  и  $I_y dy$  равны соответственно статическому дисбалансу и моменту инерции материала, содержащегося в отрезке шириной  $dy$ , относительно оси, перпендикулярной к направлению полета и проходящей через точку пересечения упругой оси с этим элементарным сечением. Легко доказать следующие формулы:

$$\bar{m} = m \cos \Lambda, \quad \bar{S}_y = S_y \cos^2 \Lambda, \quad \bar{I}_y = I_y \cos^3 \Lambda. \quad (9-169)$$

Выражения для обобщенных сил, обусловленных демпфированием конструкции, не изменяются. Исследуя выражения для возможных перемещений  $\delta\omega_R$  и  $\delta\theta_R$ , соответствующих рассматриваемым степеням свободы, мы получим следующие соотношения для обобщенных аэродинамических сил:

$$Q_w = \int_0^l L(y, t) f_w(y) dy, \quad (9-170)$$

$$Q_\theta = \int_0^l M_y(y, t) f_\theta(y) dy, \quad (9-171)$$

где  $L$  и  $M_y$  — подъемная сила и момент тангажа, приходящиеся на единицу расстояния вдоль оси  $y$ ; момент  $M_y$  является, следовательно, моментом относительно оси, нормальной к  $U$  и проходящей через точку пересечения местной упругой оси с поперечным сечением.

Уравнения движения, выведенные указанным выше способом, не отличаются от уравнений (9-84) и (9-85), за исключением изменения смысла содержащихся

в их членах,

$$\bar{w}_R \int_0^l m f_w^2 dy - \bar{\theta}_R \int_0^l S_y f_w f_\theta dy + \bar{w}_R \omega_w^2 [1 + g] \int_0^l m f_w^2 dy = \int_0^l L f_w dy, \quad (9-172)$$

$$\bar{\theta}_R \int_0^l I_y f_\theta^2 dy - \bar{w}_R \int_0^l S_y f_w f_\theta dy + \bar{\theta}_R \omega_\theta^2 [1 + i g_\theta] \int_0^l I_y f_\theta^2 dy = \int_0^l M_y f_\theta dy. \quad (9-173)$$

Воздушные нагрузки определяются формулами (7-58) и (7-59), что позволяет, умножив все члены на  $\cos \Lambda$ , использовать без изменения обозначения, принятые в работе [9-1]:

$$L(y, t) = \pi \rho_\infty b^3 \omega^2 \cos \Lambda \left\{ \frac{w_R}{b} f_w(y) L_h - \theta_R f_\theta(y) \left[ L_a - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \right\}, \quad (9-174)$$

$$M_y(y, t) = \pi \rho_\infty b^4 \omega^2 \cos \Lambda \left\{ -\frac{w_R}{b} f_w(y) \left[ M_h - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] + \theta_R f_\theta(y) \left[ M_a - (M_h + L_a) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right] \right\}. \quad (9-175)$$

Таким образом, безразмерные уравнения флаттера имеют вид

$$\frac{w_R}{b_R} \left\{ \left[ 1 - (1 + i g_w) \left( \frac{\omega_w}{\omega} \right)^2 \right] \int_0^1 \left[ \frac{m}{\pi \rho_\infty b_R^2} \right] f_w^2 dy^* + \cos \Lambda \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^2 L_h f_w^2 dy^* \right\} - \theta_R \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{S_y}{\pi \rho_\infty b_R^3} \right] f_w f_\theta dy^* + \cos \Lambda \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 \left[ L_a - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] f_w f_\theta dy^* \right\} = 0, \quad (9-176)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{w_R}{b_R} \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{S_y}{\pi \rho_\infty b_R^3} \right] f_w f_\theta dy^* + \cos \Lambda \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^3 \left[ M_h - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] f_w f_\theta dy^* \right\} + \\ & + \theta_R \left\{ \left[ 1 - (1 + i g_\theta) \left( \frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] \int_0^1 \left[ \frac{I_y}{\pi \rho_\infty b_R^4} \right] f_\theta^2 dy^* + \right. \\ & \left. + \cos \Lambda \int_0^1 \left( \frac{b}{b_R} \right)^4 \left[ M_a - (M_h + L_a) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right] f_\theta^2 dy^* \right\} = 0. \quad (9-177) \end{aligned}$$

Пример 9-61). Применить метод сечений, направленных по потоку, для расчета изгибно-крутильного флаттера в несжимаемом потоке свободных моделей стреловидного крыла с постоянным удлинением и переменным углом стреловидности. В работе [9-25] эти модели обозначены номерами 13, 14 и 15. Углы стреловидности равны соответственно  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$ . Удлинение каждого крыла было равно 4 и вычислялось по формуле (9-153), хорда была постоянна и равна  $\frac{2}{3}$  фута. Модели крыльев в виде полукрыльев испытывались в аэродинамической трубе с помощью консольной державки, укрепленной на стенке трубы.

Характеристики моделей, входящие в уравнения (9-176) и (9-177), даны в табл. 9-6.

Решение. Исследование, проведенное для модели с углом стреловидности  $45^\circ$ , показывает, что характеристики флаттера нечувствительны к выбору функций  $f_w$  и  $f_\theta$ . Выберем поэтому легко интегрируемые функции

$$f_w(y^*) = (y^*)^2, \quad (a)$$

$$f_\theta(y) = y^*. \quad (b)$$

<sup>1)</sup> Этот пример взят из тезисов диссертации Мартучелли (Martuccelli J. R.), Массачусетский технологический институт.

Таблица 9-6

Номер модели	13	14	15
$\Lambda$ (градусы) . . . . .	30	45	60
$m$ (слэг/фут) . . . . .	0,0161	0,0138	0,0120
$m/\pi\rho_{\infty}b_R^2$ . . . . .	6,19	5,50	4,55
$I_y/mb_R^2$ . . . . .	0,23	0,23	0,23
$S_y/mb_R$ . . . . .	-0,004	-0,224	-0,324
$b = b_R$ (фут) . . . . .	0,333	0,333	0,333
$\bar{l}$ (фут) . . . . .	1,540	1,886	2,667
$l$ (фут) . . . . .	1,333	1,333	1,333
$\omega_w$ (рад/сек) . . . . .	$66\pi$	$44\pi$	$24\pi$
$\omega_{\theta}$ (рад/сек) . . . . .	$186\pi$	$184\pi$	$186\pi$
$g_w$ . . . . .	0	0	0
$g_{\theta}$ . . . . .	0	0	0
$a$ . . . . .	-0,02	0,20	0,30

Для решения детерминанта уравнений (9-176) и (9-177) используем кривую  $U-g$ . До подстановки всех параметров, характеризующих данные однородные крылья, этот детерминант имеет вид

$$\left| \begin{array}{l} 0,200 \left\{ \frac{m}{\pi\rho_{\infty}b_R^2} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_w}{\omega_{\theta}} \right)^2 Z \right] + \right. \\ \left. + L_h \cos \Lambda \right\} - \\ - 0,250 \left\{ \frac{S_y}{\pi\rho_{\infty}b_R^3} + \right. \\ \left. + \left[ M_h - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \right] \cos \Lambda \right\} \\ \\ 0,333 \left\{ \frac{I_y}{\pi\rho_{\infty}b_R^4} [1 - Z] + \right. \\ \left. + \left[ M_{\alpha} - (M_h + L_{\alpha}) \left( \frac{1}{2} + a \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \right] \cos \Lambda \right\} \end{array} \right| = 0, \quad (c)$$

где

$$Z = \left( \frac{\omega_{\theta}}{\omega} \right)^2 [1 + ig]. \quad (d)$$

Детали вычисления решения не отличаются существенным образом от деталей решения, изложенных в примере 9-1, и здесь воспроизводиться не будут. В табл. 9-7 сравниваются скорости флаттера  $U_e$  и частоты  $\omega_e$ , полученные экспериментальным путем, с их теоретическими значениями, полученными тремя различными способами. Индекс 1 обозначает результаты, полученные в работе [9-25] с помощью предложенной там обычной теории несущей полосы; индекс 2 относится к вычислениям, основанным на приведенном выше уравнении (с); индекс 3 обозначает величины, исправленные на конечность размаха с помощью теории стреловидного крыла, развитой в работе [9-27]. Полное описание последнего расчета выходит за рамки этой главы.

Данные табл. 9-7 показывают, что для рассматриваемых здесь моделей метод расчета, основанный на сечениях крыла, направленных по потоку, является более точным, нежели любой другой метод. По отношению к величине скорости флаттера метод дает несколько осторожные оценки, но в смысле предсказания тенденций изменения как  $U_F$ , так и  $\omega_F$  с изменением угла стреловидности этот метод достаточно хорош. При расчетах по этому методу только частота для модели с углом стреловидности  $60^\circ$  получилась с ошибкой более  $7\%$ . Из сопоставления данных, приведенных в таблице, видно, что теория, основанная на трехмерном течении, по-видимому, дает очень заниженные оценки, особенно при малых углах стреловидности. Так как опыты проводились в аэродинамической трубе, содержащей фреон-12, то максимальное число Маха, соответствующее флаттеру, было равно 0,62. Однако в работе [9-25] показывается, что при числах Маха такого порядка сжимаемость оказывает на флаттер сравнительно небольшое влияние.

Таблица 9-7

Номер модели	13	14	15
$\Lambda$ (градусы) . . . . .	30	45	60
$U_e$ (фут/сек) . . . . .	297	288	263
$U_{F_1}$ (фут/сек) . . . . .	234	244	270
$U_{F_2}$ (фут/сек) . . . . .	277	270	252
$U_{F_3}$ (фут/сек) . . . . .	343	323	282
$\omega_e$ (рад/сек) . . . . .	384	337	233
$\omega_{F_1}$ (рад/сек) . . . . .	408	383	364
$\omega_{F_2}$ (рад/сек) . . . . .	377	322	272
$\omega_{F_3}$ (рад/сек) . . . . .	325	295	233

В работе [9-25] помещены результаты большой серии испытаний моделей однородных свободнонесущих крыльев с различными углами стреловидности и различными удлинениями. Опыты проанализированы с целью обнаружить влияние изменения различных характерных параметров. Как выше упоминалось, сжимаемость вплоть до числа Маха невозмущенного по ока 0,8 почти не оказывает влияния на  $U_F$ . Следует помнить, что и максимальное эффективное число Маха поперечного потока много ниже соответствующего числа  $M$  на формах с большой стреловидностью. Так как большинство моделей имели достаточно низкое отношение частот, то изменение положения упругой оси в небольших пределах также оказывало лишь незначительное влияние на характеристики флаттера. Однако положение центра тяжести на хорде крыла с увеличением  $U_F$  оказывает более заметное влияние на характеристики флаттера, в случае крыльев с любым углом стреловидности назад, когда он перемещается вперед. Из п. 9-2 следует, что обе эти тенденции наблюдаются также и на прямых крыльях. Другое свойство стреловидных крыльев, наблюдаемое на всех углах  $\Lambda$ , включая  $\Lambda=0$ , есть постепенное уменьшение  $U_F$  с ростом отношения частот, но это свойство не было исследовано экспериментально в работе [9-25].

Имеются два пути исследования влияния изменения угла стреловидности на флаттер. Один заключается в том, что крыло поворачивают около корневого сечения, оставляя конструктивное удлинение постоянным. Другой состоит в том, что крыло сдвигают назад таким образом, что  $\lambda$  в уравнении (9-153) остается неизменным. В работе [9-25] применялись оба эти метода. Сдвиг крыла при неизменных инерционных и упругих свойствах приводит к уменьшению как  $\omega_w$ , так и  $\omega_\theta$  и соответствующему уменьшению  $U_F$ . Как теория, так и эксперимент, подобно изложенному выше в примере 9-6, указывают, что при заземленном корневом сечении  $U_F$  падает несколько медленнее, чем  $\sqrt{\cos \Lambda}$ .

Поворот крыла около корневого сечения не может изменить распределения масс и жесткостей, и до тех пор, пока конструктивное удлинение ( $\bar{l}/c$ ) не станет примерно меньше 3, не изменяются также и основные частоты колебаний. Упругая ось, оставаясь сравнительно прямой линией, сдвигается назад. Можно предвидеть, что результатом подобного поворота крыла будет увеличение  $U_F$ . Это показывает и эксперимент. По теории чисто двумерного течения воздушные нагрузки создаются только за счет поперечного компонента потока, и в этом случае  $U_F$  растет пропорционально  $1/\cos \Lambda$ . Для крыла конечного размаха появляется неблагоприятное изменение во взаимодействии степеней свободы, которое является причиной того, что  $U_F$  растет пропорционально величине, средней между  $1/\cos \Lambda$  и  $1/\sqrt{\cos \Lambda}$ , но ближе к последней.

В целом теорию изгибно-крутильного флаттера стреловидных крыльев в несжимаемом потоке можно считать удовлетворительной. Она не так надежна,

как теория, развитая для прямых крыльев, хотя и лучше того, что можно о ней подумать по некоторым сравнениям, прозеденным в примере 9-6. Наш ограниченный опыт по приложению теории несущей полосы на больших дозвуковых и сверхзвуковых скоростях не доставляет большого удовлетворения, особенно для крыльев в диапазоне наиболее часто употребляемых удлинений. Она дает очень завышенные оценки, которые связаны с неустановившимися моментами рыскания, действующими на высокоскоростные профили при колебаниях около оси, лежащей впереди середины хорды. Рациональная поправка на влияние конечности размаха явится наилучшим средством избежать тех неправдоподобных результатов, которые мы теперь здесь получаем.

Заканчивая пункт, посвященный стреловидным крыльям, обратим внимание на задачу об изгибном флаттере крыльев со стреловидностью назад с одной степенью свободы. Как доказано Каннингэмом [9-28], это явление может иметь место, когда относительная плотность и параметр

$$\frac{\text{tg } \Lambda}{l \bar{b}_R}$$

достаточно велики. В п. 9-10 это явление вместе с другими подобными явлениями неустойчивости будет разобрано более подробно.

**9-9. Крылья малого удлинения.** Хотя несомненно, что имеется много крыльев малого удлинения и хвостозых оперений, безопасных с точки зрения флаттера вследствие своей большой жесткости, этого, конечно, нельзя сказать обо всех их. Чувствуется все увеличивающаяся потребность в теоретических методах исследования таких конструкций, подкрепляемая высокой стоимостью изготовления модели, экспериментов на ракетах и других экспериментальных суррогатов. Подобные расчеты весьма трудны по двум причинам, которые были изложены в предыдущих пунктах. Поскольку жесткости вдоль хорды и вдоль размаха являются величинами одного порядка, следует учитывать то обстоятельство, что крыло деформируется, как пластина. Следовательно, необходимо применить трехмерную аэродинамическую теорию, а так как ширина и длина крыла в плане почти одинаковы, то оказывается нерациональным упрощать эту теорию, задавая форму кривой распределения давления в каком-либо направлении.

Как было кратко упомянуто в пп. 7-2, 7-4 и 7-5, были сделаны определенные обещающие шаги в направлении развития необходимых аэродинамических теорий. Однако мало действительных расчетов на флаттер было доведено до конца или сравнено с экспериментальными результатами.

Если расчет ведется по методу Рэля—Ритца, то лучше и эффективнее всего воспользоваться нормальными формами колебаний и уравнениями движения. Именно определение функций деформаций  $\varphi_j(x, y)$  и частот  $\omega_j$  может потребовать большой вычислительной работы и трудных вибрационных опытов над действительной конструкцией или изготовления динамической модели. В качестве альтернативы метода наложения форм в конце этого пункта будет описана интересная схема Восса, в которой коэффициенты упругого влияния конструкции непосредственно применяются к решению задачи о флаттере.

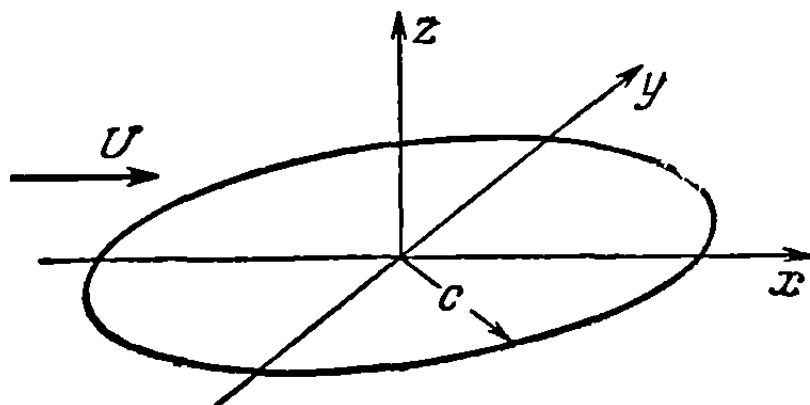
Отдельные этапы исследования крыльев малого удлинения наилучшим образом можно описать на примере расчета. Возьмем однородное кольцевое крыло или упрощенную „летающую тарелку“ (как оно было названо в [9-29]). Это крыло дает то преимущество, что формы нормальных колебаний круглой пластинки хорошо известны. Распределение воздушной нагрузки по круглому крылу, колеблющемуся в потоке несжимаемой жидкости, можно найти по теории Кочина [9-30] или Кринеса и Шаде [9-31]. Кочин в своей работе не привел затабулированных данных, и поэтому существует неопределенность относительно сходимости рядов, использованных в работе [9-31]; однако таблицы Кринеса и Шаде считаются достаточно точными для целей расчета флаттера при низких приведенных частотах.

**Пример 9-7.** Вычислить скорость флаттера однородного круглого крыла (фиг. 9-20). Модель, на которой основывается этот пример, была изготовлена из дюралюминиевой пластинки:

$$\begin{aligned} \text{радиус} & \dots \dots \dots c = 21 \text{ дюйм.} \\ \text{толщина} & \dots \dots \dots t_0 = 0,040 \text{ дюйма,} \\ \text{масса, приходящаяся на единицу площади} & \dots \dots \rho(x, y) = 0,1252 \text{ слаг/фут}^2, \end{aligned} \quad (a)$$

где  $\rho(x, y)$  включает массу наложенного базальтового дерева, предназначенного не для увеличения жесткости, а для получения плавной формы профиля сечения.

**Решение** Поскольку «летающая тарелка» находится в свободном полете, предполагается, что симметричное движение флаттера складывается из вертикального перемещения крыла как твердого тела, движения тангажа и первых двух форм нормальных колебаний круглой пластинки:



Фиг. 9-20. Крыло круговой формы в плане в несжимаемом потоке.

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{r=1} \varphi_r(x, y) \xi_r(t) = \\ &= c \{ A(t) + x^* B(t) + \varphi_1(x^*, y^*) D(t) + \\ &\quad + \varphi_2(x^*, y^*) F(t) \}. \end{aligned} \quad (b)$$

Здесь  $x^*$  и  $y^*$  — безразмерные величины, полученные в результате деления на радиус  $c$ . Две формы колебаний, пользуясь, например, работой [9-32], можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(x^*, y^*) &= \{ J_2(2,29 \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}) + 0,333091 I_2(2,29 \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}) \} \cos 2\theta \cong \\ &\cong 0,8x^{*2} - 0,8y^{*2}, \end{aligned} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x^*, y^*) &= J_0(3,01 \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}) - 0,084058 I_0(3,01 \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}) \cong \\ &\cong 0,915942 - 1,980x^{*2} - 1,980y^{*2}, \end{aligned} \quad (d)$$

где

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y^*}{x^*}. \quad (e)$$

Для воспроизведения функций деформаций (обозначенных символами  $A$ ,  $B$ ,  $D$  и  $F$ ), для которых в работе [9-31] составлены таблицы, выбираются аппроксимации в виде степенных рядов.

Кинетическая энергия, соответствующая равенству (b), равна:

$$T = \frac{1}{2} \pi c^4 \rho (x^*, y^*) \left\{ \dot{A}^2 + \frac{1}{4} \dot{B}^2 + 0,099099 \dot{D}^2 + 0,207022 \dot{F}^2 \right\}. \quad (f)$$

Используя общее выражение для упругой энергии пластины [уравнение (2-162)], получаем энергию деформации в виде

$$U_E = \frac{\pi E t_0^3}{24(1-\nu^2)} [4,832216 D^2 + 17,055164 F^2], \quad (g)$$

где  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона для материала конструкции.

В обозначениях Кринеса и Шаде обобщенные силы [равенства (3-147с) и (9-55)] имеют следующий вид.

$$E_A = 4 \rho c^3 U^2 \{ l_A A + l_B B + 0,8(l_D - l_F) D + [0,915942 - 1,980(l_D + l_F)] F \}. \quad (h)$$

Здесь  $l$  связаны с коэффициентами, затабулированными в работе [9-31] и являющимися функциями только

$$k = \frac{\omega c}{U}. \quad (i)$$

Конструктивным трением пренебрегаем.

Если мы подставим величины (f), (g) и выражения для обобщенных сил в уравнение Лагранжа (9-83) и допустим, что имеет место простое гармоническое движение, то



придем к следующей системе уравнений:

$$[l_A + k^2\gamma_0] \bar{A} + l_B \bar{B} + 0,8 [l_D - l_F] \bar{D} + [0,915942l_A - 1,980 (l_D + l_F)] \bar{F} = 0, \quad (j)$$

$$m_A \bar{A} + \left[ m_B + \frac{1}{4} k^2\gamma_0 \right] \bar{B} + 0,8 [m_D - m_F] \bar{D} + [0,915942m_A - 1,980 (m_D + m_F)] \bar{F} = 0, \quad (k)$$

$$0,8 [l_A - j_A] \bar{A} + 0,8 [l_B - j_B] \bar{B} + \\ + [0,09909k^2\gamma_0 + 0,64 (l_D - j_D - l_F + j_F) - \alpha_D \delta] \bar{D} + \\ + 0,8 [0,915942 (l_A - j_A) - 1,980 (l_D - j_D - l_F + j_F)] \bar{F} = 0, \quad (l)$$

$$[0,915942l_A - 1,980 (l_A + j_A)] \bar{A} + [0,915942l_B - 1,980 (l_B + j_B)] \bar{B} + \\ + 0,8 [0,915942 (l_D - l_F) - 1,980 (l_D + j_D - l_F - j_F)] \bar{D} + \\ + [0,207002k^2\gamma_0 - \alpha_F \delta + 0,838950l_A - 1,813565 (l_D + l_F + l_A + j_A) + \\ + 3,9204 (l_D + j_D + l_F + j_F)] \bar{F} = 0, \quad (m)$$

где  $l$ ,  $j$  и  $m$  — затабулированные функции  $k$ , подобные функциям  $l$ ; величина

$$\gamma_0 = \frac{\pi \rho (x^*, y^*)}{4\rho c} \quad (n)$$

является видоизмененной относительной плотностью и

$$\delta = \frac{Et_0^3}{48\rho U^2 c^2 (1 - \nu^2)}. \quad (o)$$

Детерминант флаттера состоит из взятых в скобки коэффициентов уравнений (j), (k), (l) и (m). Когда величина  $k$  задана, то получаем квадратное уравнение относительно оставшейся неизвестной  $\delta$ , обратно пропорциональной динамическому давлению. Флаттер имеет место при том значении  $k$ , которое обращает в нуль мнимую часть  $\delta$ .

Теоретическим условием флаттера того крыла, которое используется в этом примере, являются следующие равенства:

$$U_F = 44,9 \text{ миль в час}, \quad \omega_F = 11,3 \text{ рад/сек}, \quad k_F = 0,30. \quad (p)$$

Трудности, связанные с созданием линейной конструкции модели, делают невозможным получение сравнимых экспериментальных данных.

В качестве замены подхода к решению общей задачи методом заданных функций деформаций Восс [9-32] предложил остроумное применение теоремы об обратном потоке (п. 7-5). Его метод хорошо приспособлен к систематическому расчету на быстродействующей вычислительной машине и оказывается полезным для крыльев малого удлинения. По аналогии с равенством (2-55), напишем уравнение движения колеблющегося закрепленного самолета в виде:

$$\bar{\omega}(x, y) = \omega^2 \int_S \int C^{zz}(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) \bar{\omega}(\xi, \eta) d\xi d\eta - \\ - \int_S \int C^{zz}(x, y; \xi, \eta) \Delta \bar{p}_a(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (9-178)$$

Сюда включены только аэродинамические нагрузки, и  $\bar{\omega}(x, y)$  представляет распределение амплитуд при изгибе в вертикальной плоскости:

$$\omega(x, y, t) = \bar{\omega}(x, y) e^{i\omega t}. \quad (9-179)$$

Аналогичным уравнением движения описывается поведение незакрепленного самолета.

Обратим внимание на последний член уравнения (9-178). Умножим  $C^{zz}(x, y; \xi, \eta)$  на  $U$  и разделим на  $C^{zz}(x, y; x, y)$ . Тогда множитель при  $\Delta \bar{p}_a(\xi, \eta)$  будет равен

$$\bar{\omega}_0 = U \frac{C^{zz}(x, y; \xi, \eta)}{C^{zz}(x, y; x, y)}. \quad (9-180)$$

При специальном выборе  $(x, y)$  величину  $\bar{\omega}_0(\xi, \eta)$  можно истолковать как распределение значений вертикальной скорости частиц жидкости по горизонтальной проекции крыла. Согласно теореме об обратном потоке

$$U \int_S \int \frac{C^{zz}(x, y; \xi, \eta)}{C^{zz}(x, y; x, y)} \Delta \bar{p}_a(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_S \int \left[ i\omega \bar{\omega}(\xi, \eta) + U \frac{\partial \bar{\omega}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right] \bar{r}(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (9-181)$$

где  $\bar{r}(x, y; \xi, \eta)$  — распределение амплитуд разности давлений по той же горизонтальной проекции крыла в обратном потоке со скоростью  $U$ , обусловленной вертикальной скоростью (9-180). Очевидно, что выражение

$$\left[ i\omega \bar{\omega}(\xi, \eta) + U \frac{\partial \bar{\omega}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right]$$

в уравнении (9-181) есть распределение вертикальной скорости, обуславливающее возникновение  $\Delta \bar{p}_a$ . Если имеется достаточно сведений относительно коэффициентов взаимного влияния  $C^{zz}(x, y; \xi, \eta)$  при изгибе, то  $\bar{r}(x, y; \xi, \eta)$  можно рассматривать как известную функцию.

Уравнение (9-181) позволяет переписать соотношение (9-178) в виде

$$\bar{\omega}(x, y) = \omega^2 \int_S \int C^{zz}(x, y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) \bar{\omega}(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_S \int \bar{V}(x, y; \xi, \eta) \left[ i \frac{\omega}{U} \bar{\omega}(\xi, \eta) + \frac{\partial \bar{\omega}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta, \quad (9-182)$$

где

$$\bar{V}(x, y; \xi, \eta) = C^{zz}(x, y; x, y) \bar{r}(x, y; \xi, \eta). \quad (9-183)$$

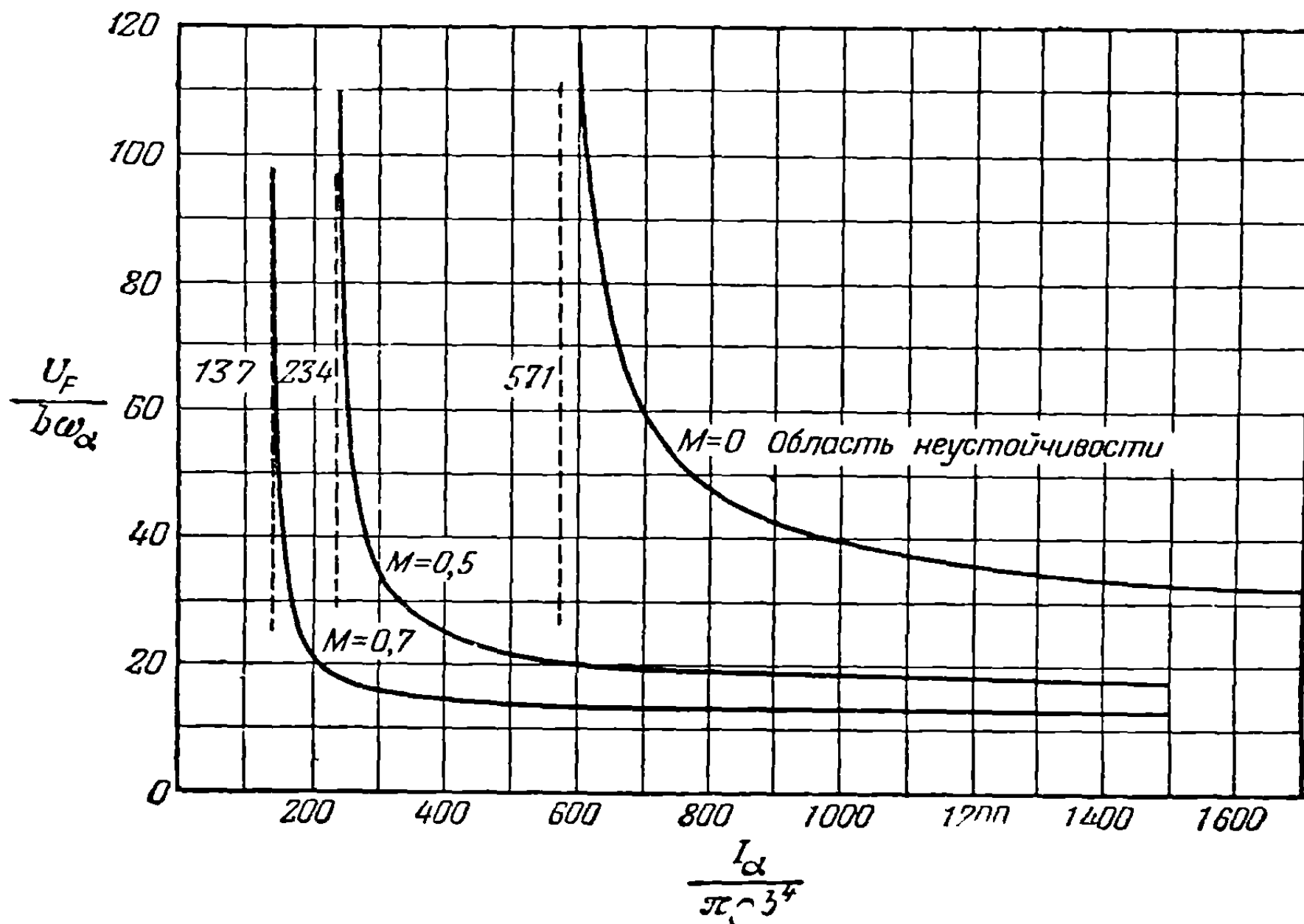
Теперь все аэродинамические характеристики задачи содержатся в единственной функции  $\bar{V}$ , которая не зависит от движения  $\bar{\omega}$  и может быть подсчитана для ряда значений  $(x, y)$  от точки к точке по функции влияния. Если при помощи одного из методов, которые были описаны в гл. 7, определить функцию  $\bar{V}$ , то при численном интегрировании двух интегралов, стоящих в правой части, уравнение (9-182) может быть заменено матричным уравнением. Детерминант коэффициентов неизвестных величин  $\bar{\omega}(x, y)$ , взятых в ряде точек по хорде и размаху, является детерминантом флаттера. Соответствующее детерминантное уравнение можно решить одним из методов, изложенных в предыдущих пунктах. В противном случае можно применить метод итерации матриц к уравнениям, напоминающим те, которые были выведены для случая свободных колебаний в гл. 4 (или более сложным).

Можно показать, что проблема флаттера в постановке Восса в тех случаях, когда допустимы различные упрощения в свойствах конструкции, приводится к некоторым другим решениям, описанным выше. За дополнительными сведениями мы рекомендуем читателю обратиться к работе [9-32].

**9-10. Флаттер с одной степенью свободы.** Несмотря на то, что типы флаттера, встречающиеся на практике, включают взаимодействие двух или более „степеней свободы“ или определенных типов деформаций конструкции, двадцатипятилетней практикой было установлено, что это условие не является обязательным для возникновения аэроупругой неустойчивости. Большинство примеров

так называемого флаттера с одной степенью свободы имеет преимущественно академический интерес. Однако эти примеры поучительны, и их следует изучить, так как они проливают свет на гораздо более сложное явление и на природу нестационарных аэродинамических сил, управляющих этим явлением. Представляют также определенную опасность некоторые случаи, связанные с работой рулевых поверхностей на больших дозвуковых и сверхзвуковых скоростях. Подобные случаи конструктор должен также принимать во внимание.

Обширный обзор и библиографию по флаттеру с одной степенью свободы дают Раньяна, Каннингэм и Уоткинс в работе [9-33]. Все перечисленные ими типы флаттера, кроме одного, состоят из колебаний вращения жестких крыльев



Фиг. 9-21. Границы устойчивости на кривой зависимости безразмерной скорости флаттера  $U_F/b\omega_\alpha$  от коэффициента инерции  $I_\alpha/\pi\rho b^4$  для движения тангажа крыла относительно передней кромки в дозвуковом потоке.

и шарнирных рулевых поверхностей. Ниже эти типы флаттера перечислены в другом порядке, причем критерием разделения одного вида флаттера от другого служит характер связанного движения. Каждому типу флаттера поставлено в соответствие несколько его существенных характеристик.

(а) *Вращение крыльев как целого около поперечной оси.* В п. 9-1 был исследован флаттер жесткого профиля, колеблющегося около оси, направленной вдоль размаха, в двумерном потоке несжимаемой жидкости. Пренебрегая конструктивным трением, мы обнаружили, что критерием нейтральной устойчивости является равенство нулю компоненты аэродинамического момента около оси вращения, не совпадающей по фазе с колебаниями крыла. При скорости, меньшей критической скорости  $U_F$ , аэродинамический момент поглощает энергию колебаний тангажа и обуславливает их затухание.

Для несжимаемого потока эта неустойчивость проявляется только в случае чрезвычайно массивных крыльев и практическое значение ее мало.

Однако, с другой стороны, оказывается, что на больших дозвуковых и сверхзвуковых скоростях полета, несмотря на то, что при  $M < 1$  ось вращения должна еще находиться впереди линии четверти хорд, сжимаемость оказывает сильное дестабилизирующее влияние. Фиг. 9-21, воспроизведенная из исследо-

вания Раньяна [9-34], показывает влияние сжимаемости в дозвуковом потоке для профиля с осью вращения на передней кромке ( $a = -1,0$ ). Кривые приведены для чисел Маха 0, 0,5 и 0,7 и даны в виде зависимости безразмерной скорости флаттера  $U_F/b\omega_\alpha$  от инерционного параметра  $I_\alpha/\pi\rho_\infty b^4$ , являющегося основным определяющим явлением фактором. В каждом случае существует минимальное значение инерционного параметра, ниже которого неустойчивость невозможна; для значений параметра, превышающих минимальное, скорость флаттера быстро падает, причем характер этого падения определяется числом  $M$ .

Небольшое конструктивное трение при значительной величине инерционного параметра приводит к быстрому росту  $U_F/b\omega_\alpha$ , но не влияет на минимальную величину  $I_\alpha/\pi\rho_\infty b^4$ . Однако подобного трения в случае вращения фюзеляжа и вертикального или горизонтального оперения как твердых тел около оси, проходящей через центр тяжести всего самолета, не существует<sup>1)</sup>. При этом инерционные параметры все еще достаточно велики и кривые фиг. 9-21 продолжают иметь практическое значение. Заметим, что большинство хвостовых оперений имеют сравнительно малые удлинения и поток около них в высшей степени приближается к трехмерному. Поэтому обнадеживающим является тот факт, что влияние конечности размаха является причиной заметного сужения диапазона параметров, внутри которого в дозвуковом потоке возникают неустойчивые моменты тангажа. Для несжимаемого потока этот факт вытекает из анализа теоретических и экспериментальных кривых Эшли, Зартариана и Нейсона [9-27].

На неустойчивость движения тангажа для двумерного профиля в аэродинамической трубе малых скоростей указал Раньян [9-34]. Его работа наводит на мысль, что теория флаттера для низких значений  $I_\alpha/\pi\rho_\infty b^4$  дает весьма заниженные оценки, но по мере увеличения инерционного параметра точность ее возрастает.

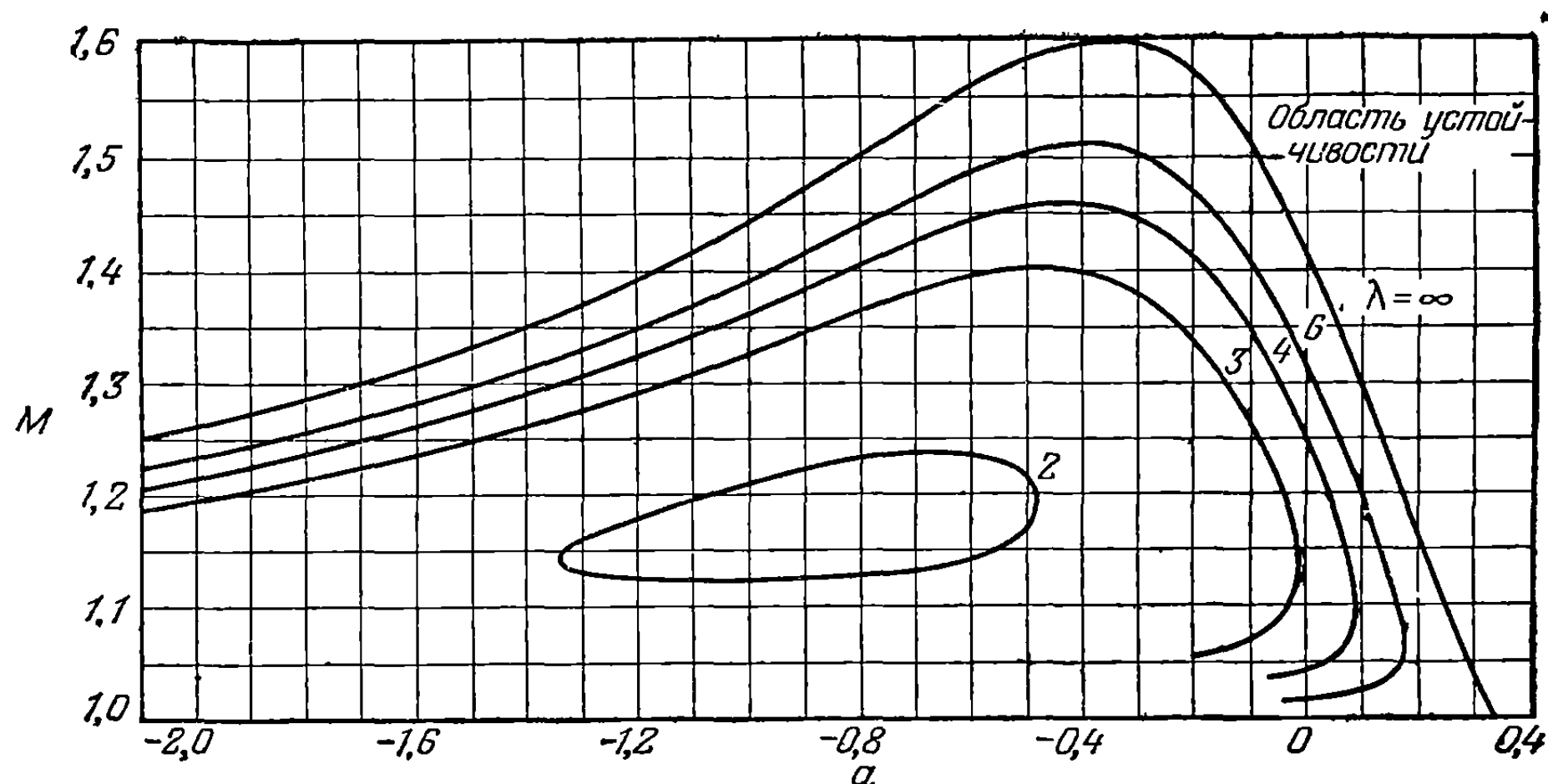
Флаттер с одной степенью свободы может иметь место и на сверхзвуковых профилях и крыльях. В этих случаях уменьшение удлинения опять является сильно стабилизирующим фактором. Природа аэродинамической теории такова, что удобно определить положение оси при нейтральной устойчивости в виде функции числа Маха. На фиг. 9-22 воспроизведен ряд подобных кривых из [9-33]. Результаты, полученные на основе работы Уоткинса [9-35] для крыльев прямоугольной формы в плане, верны с точностью до первой степени приведенной частоты. Интересной противоположностью дозвуковому случаю является тот факт, что положение границ устойчивости не зависит от приведенной частоты. При условии, что приведенная частота не должна быть слишком большой,  $k$  может принимать любое значение, зависящее от инерционных и жесткостных характеристик крыла.

Фиг. 9-22 показывает, что теоретически двумерный профиль может подвергаться флаттеру при больших трансзвуковых скоростях около любой оси, расположенной в интервале от бесконечности впереди передней кромки профиля до точки, находящейся на  $2/3$  хорды. Этот интервал положений оси уменьшается с увеличением  $M$  до тех пор, пока при числе  $M$ , близком к предельному значению  $\sqrt{2,5}$ , всякая неустойчивость исчезает. Однако, когда удлинение уменьшается до 2, интервал положений оси сокращается приблизительно до половины хорды, причем центр этого интервала находится на передней кромке. В работе [9-33] указывается на аналогичное влияние удлинения на флаттер дельтавидных крыльев и делается заключение, что небольшое трение могло бы совершенно исключить проблему флаттера для крыльев с углами стреловидности передней кромки, большими  $60^\circ$ .

<sup>1)</sup> Отрицательные величины  $a$  между  $-3$  и  $-10$  являются типичными для этой задачи. В [9-34] указывается, что почти на всем диапазоне положения оси на больших дозвуковых числах Маха вполне возможно возникновение неустойчивости.

Выводы, которые напрашиваются из фиг. 9-22 по отношению к флаттеру и неустойчивости по тангажу сверхзвукового самолета, не так уж тревожны, как они могут показаться на первый взгляд. Оказывается, что даже небольшое взаимодействие с другими степенями свободы производит очень благоприятное действие. Так, вертикальное перемещение стабилизирует динамику перемещения всего самолета или ракеты как твердого тела, а возможность деформации изгиба приводит к таким свойствам изгибно-крутильного флаттера упругих крыльев и хвостовых оперений, которые можно контролировать так же, как и в случае дозвукового потока. Последний факт вытекает из сравнения фиг. 9-22 с результатами примера 9-5, вычисленными на основе двумерной аэродинамической теории.

(b) Вращение рулевых поверхностей, расположенных на задней кромке крыла. По аналогии с равенством (9-7b), критерием нейтральной устойчивости



Фиг. 9-22. Границы устойчивости на кривой зависимости числа Маха от положения оси  $a$  для движения тангажа прямоугольных крыльев различных удлинений в сверхзвуковом потоке.

рулевой поверхности типа закрылка при отсутствии трения в шарнире является условие равенства нулю компоненты колеблющегося аэродинамического шарнирного момента, не совпадающей по фазе с колебаниями крыла, т. е.

$$\text{Im} \{M_{\beta}\} = 0. \quad (9-184)$$

Этому условию могут удовлетворять конфигурации рулевых поверхностей как с аэродинамической компенсацией, так и без нее, в дозвуковом и сверхзвуковом потоке при малой сверхзвуковой скорости.

Как показал Раньян [9-36], многие характеристики дозвукового флаттера этого типа сходны с характеристиками колебаний тангажа всего профиля. Определяющим параметром является коэффициент инерции  $I_{\beta}/\pi\rho_{\infty}b^4$ , где  $I_{\beta}$  — момент инерции на единицу размаха рулевой поверхности относительно оси шарниров. В соответствии с каждым положением шарнира и числом Маха существует минимальное значение этого параметра, ниже которого система является вполне устойчивой. В несжимаемом потоке это минимальное значение чрезмерно велико, но с увеличением числа Маха быстро падает. Так, для рулевой поверхности без компенсации с отношением хорды рулевой поверхности к хорде крыла, равном 0,15, минимальное значение  $I_{\beta}/\pi\rho_{\infty}b^4$  падает с 15 до 5,57 при увеличении числа  $M$  от 0 до 0,7.

Чем дальше назад по хорде отодвинута линия шарниров, тем меньше минимальное значение параметра инерции, при котором возникает флаттер. Однако

это не означает, что малые рулевые поверхности, с точки зрения возникновения флаттера, являются более критическими, поскольку сама величина  $I_p$  изменяется пропорционально второй или более высокой степени хорды рулевой поверхности. Для заданной величины отношения хорд увеличение аэродинамической компенсации оказывается благоприятным, однако это заключение страдает от неопределенности всей теории потенциального течения около компенсированных рулей. Более надежным результатом является тот факт, что трение в шарнирах увеличивает скорость флаттера, но не изменяет минимального значения параметра инерции, при котором возникает неустойчивость.

Для сверхзвуковых рулевых поверхностей без компенсации уравнение (9-184) удовлетворяется при числе Маха, превышающем примерно  $M = \sqrt{2}$ . Так же как в случае колебаний тангажа, когда удерживаются только аэродинамические члены, содержащие первую степень  $k$ , положение границы устойчивости на графике зависимости числа Маха от положения линии шарниров не меняется. В сжимаемом потоке вследствие несовершенства существующей теории аэродинамическая компенсация не исследовалась.

Весьма вероятно, что переход от двумерного потока к потоку около рулевой поверхности конечного размаха приведет к большей устойчивости. До сих пор пока еще не было опубликовано никаких количественных расчетов, касающихся этого предположения. Однако в сверхзвуковом потоке крыло, находящееся под нулевым углом атаки, не может оказывать влияния на линеаризованный поток, обтекающий рулевую поверхность, расположенную позади крыла. Таким образом, кривые фиг. 9-22 можно истолковать как кривые, непосредственно относящиеся к настоящей задаче. Числа  $M$  для нейтральной устойчивости при  $a = -1, 0$  равны числам  $M$  для нейтральной устойчивости закрылков, расположенных по всему размаху и имеющих различные удлинения и шарниры на передних кромках.

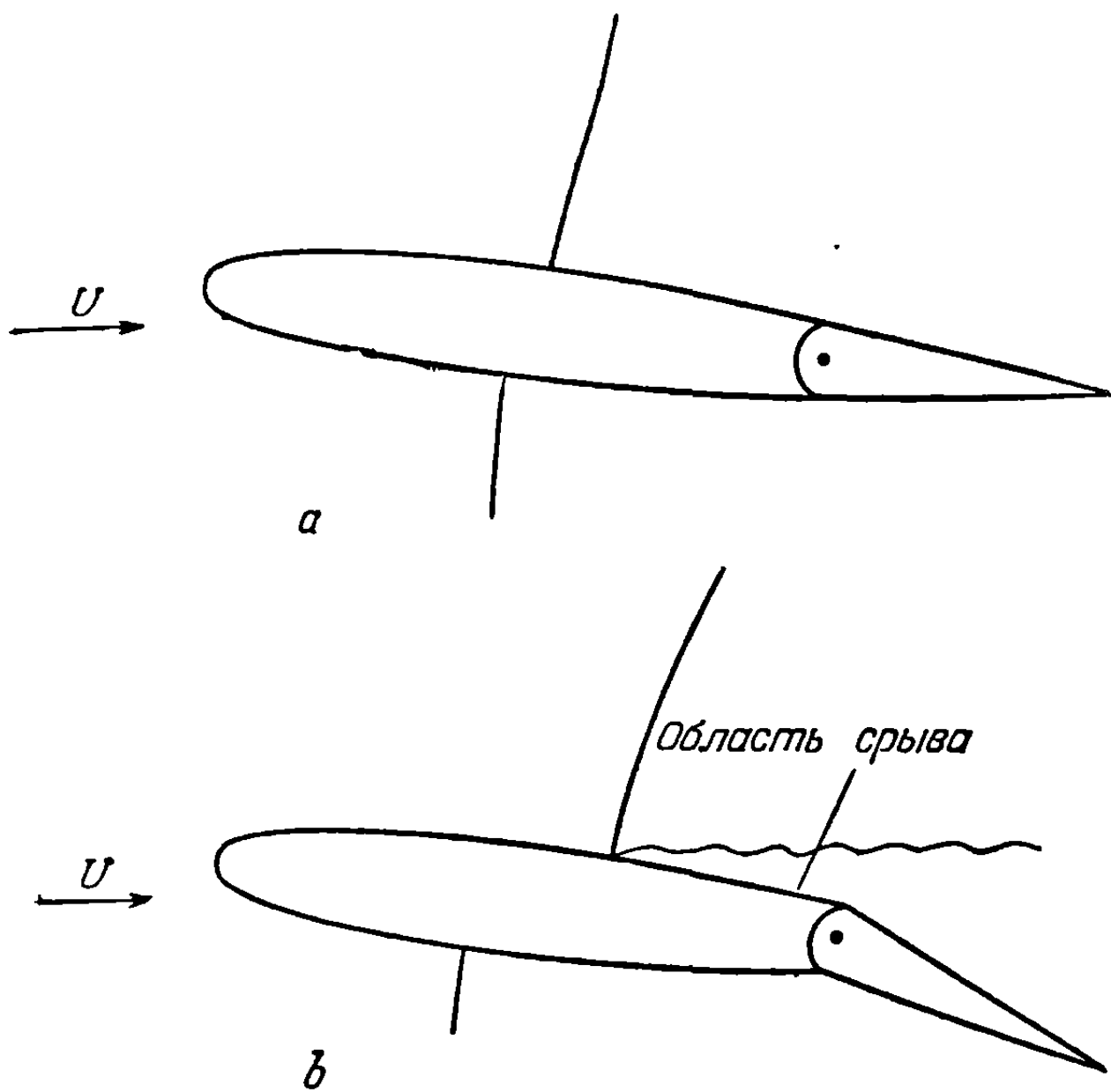
(с) *Тряска элеронов.* Как было упомянуто в п. 9-5 (с), задачи флаттера рулевой поверхности на малых трансзвуковых скоростях осложняются любопытной разновидностью неустойчивости, которая известна под названием тряски элеронов. Рассчитать это явление количественно с помощью классической аэродинамической теории оказывается невозможным, хотя наблюдаемое при этом движение элеронов представляет простое гармоническое движение и сильно напоминает движение, описанное в предыдущем подразделе. Наилучшее физическое объяснение тряски связывает ее с наличием прямых скачков уплотнения на поверхности крыла впереди линии шарниров. Это объяснение составляет также основу любого из существующих эмпирических критериев предотвращения тряски.

При полете с дозвуковыми скоростями с числом Маха, большим критического числа  $M$  сечения крыла, расположение образующихся на верхней и нижней поверхностях крыла ударных волн схематически показано на фиг. 9-23, а. Поскольку сечение крыла создает подъемную силу, скорость течения на верхней поверхности выше, протяженность местной сверхзвуковой зоны больше и ударная волна сильнее. Существенным фактом в объяснении тряски является то обстоятельство, что отклонение рулевой поверхности вниз (фиг. 9-23, б) приводит к дальнейшему ускорению потока и интенсификации верхней ударной волны. Это ведет к уменьшению давления на верхней поверхности руля, так как сильная ударная волна либо приводит к отрыву пограничного слоя позади нее, либо усиливает уже существующий отрыв. Таким образом, порождается восстанавливающий шарнирный момент. Аналогично на руль, отклоненный вверх, действует шарнирный момент, отклоняющий его вниз и возникающий за счет низкого давления, обусловленного интенсивной нижней ударной волной.

Если рулевую поверхность медленно отклонять вниз и вверх, то этот момент отстает по фазе относительно положения руля на  $180^\circ$ . Однако движение, стремящееся вернуть рулевую поверхность в первоначальное положение,



будет отставать от более быстрого колебания, поскольку необходим определенный промежуток времени для того, чтобы сигналы, возбуждаемые отклонением руля, распространились вперед через поток, движущийся с почти звуковой скоростью. Кроме того, дальнейшее отставание возникает вследствие замедления отрыва пограничного слоя и прилегания его внозь в ответ на внезапное изменение давления. Комбинация этих эффектов может привести к возникновению довольно большого угла запаздывания по фазе в восстанавливающем моменте, так что последний долго продолжает действовать в направлении вращения после того, как рулевая поверхность прошла нейтральное положение. Таким образом, рулевая поверхность может питать колебания энергией. Это легко может привести к неустойчивости с одной степенью свободы. Воздушные нагрузки, по-видимому, не будут линейно зависеть от скорости движения. Следовательно, могут иметь место предельные циклы и сопровождающие их изменения устойчивости, зависящие от амплитуды колебаний.



Фиг. 9-23. Картина ударных волн на крыле при полете на закритическом режиме.

*a* — без отклонения рулевой поверхности; *b* — с рулевой поверхностью, отклоненной вниз.

отставание по фазе, вызывающее неустойчивость, превышало  $180^\circ$ . Другое предложение состоит в том, чтобы ввести в систему управления искусственный источник трения, который поглощал бы поступающую в систему энергию. Ни одна из этих схем не кажется столь осуществимой практически или столь привлекательной для конструктора, как создание элерона с максимально возможной необратимостью. Случай идеальной необратимости (который никогда не достигается) исключил бы, конечно, какое бы то ни было возмущение системы управления за счет внешних шарнирных моментов. Опыт, однако, показал, что та степень необратимости, которая может быть обеспечена на практике, приводит, очевидно, к такой малой амплитуде колебаний, что пограничный слой на крыле остается невозмущенным и механизм замедления не приводится в действие. Другое соображение, которое будет иметь впоследствии важное значение, состоит в том, что многие самолеты проходят через область трансзвуковых скоростей с большим ускорением. Неустановившийся характер течения, обусловленный этим обстоятельством, может привести к тому, что процесс тряски благодаря малой величине промежутка времени не получит достаточного развития в интервале чисел Маха, соответствующем сильной тряске. По крайней мере кажется мало вероятным, что неустойчивость разовьется до опасно боль-

вести к неустойчивости с одной степенью свободы. Воздушные нагрузки, по-видимому, не будут линейно зависеть от скорости движения. Следовательно, могут иметь место предельные циклы и сопровождающие их изменения устойчивости, зависящие от амплитуды колебаний.

Предыдущее объяснение явления тряски элеронов подтверждается тем обстоятельством, что это явление наблюдалось только в тех случаях, когда ударные волны образовывались на верхней и нижней поверхностях, и тем, что появление тряски в сильной степени зависит от числа Маха, а не от высоты или истинной воздушной скорости.

Одно из предложений для избежания тряски заключается в том, чтобы отрегулировать частоту собственных колебаний элерона таким образом, чтобы



ших амплитуд, прежде чем установится устойчивое сверхзвуковое обтекание, которое подавит эту неустойчивость.

(d) *Изгибный флаттер с одной степенью свободы крыльев со стреловидностью назад.* Хотя чисто изгибные колебания в действительности включают бесконечное количество степеней свободы, естественно классифицировать неустойчивость крыльев со стреловидностью назад, упомянутую в конце п. 9-8, как флаттер с одной степенью свободы. Это объясняется тем, что этот вид неустойчивости можно рассчитать даже тогда, когда положение конструкции вследствие принятия одной единственной формы для деформации изгиба характеризуется одной обобщенной координатой. Если использовать аэродинамическую теорию несущей полосы, основывающуюся на сечениях крыла, нормальных к направленной вдоль размаха оси координат с углом стреловидности  $\Lambda$ , то уравнения движения могут быть выведены из уравнения (9-163), если принять крутильную жесткость равной бесконечности ( $\bar{\theta}_R = 0$ ). В результате получим

$$\frac{\bar{w}_R}{\bar{b}_R} \left\{ \left[ 1 - (1 + i\bar{g}_w) \left( \frac{\bar{\omega}_w}{\omega} \right) \right]^2 \int_0^1 \left( \frac{\bar{m}}{\pi \rho \bar{b}_R^2} \right) \bar{f}_w^2 d\bar{y}^* + \right. \\ \left. + \int_0^1 \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b}_R} \right)^2 L_{hh} \bar{f}_w^2 d\bar{y}^* + \frac{\bar{b}_R}{l} \int_0^1 \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b}_R} \right)^3 L_{hh'} \bar{f}_w \frac{d\bar{f}_w}{d\bar{y}^*} d\bar{y}^* \right\} = 0. \quad (9-185)$$

Как и раньше, черточки сверху обозначают характеристики крыла в системе осей, перпендикулярных и параллельных оси, направленной вдоль размаха под углом, равным углу стреловидности.

Для замены аэродинамических коэффициентов  $L_{hh}$  и  $L_{hh'}$  более знакомой величиной  $L_h$ , затабулированной в работе [9-1], используем равенства (7-73a) и (7-73b). Если разделить  $L_h$  на действительную и мнимую части,

$$L_h = L_{h \text{ Re}} + iL_{h \text{ Im}}, \quad (9-186)$$

то для действительных и мнимых компонент выражения в уравнении (9-185), заключенного в фигурные скобки, можно составить отдельные выражения.

Для того чтобы получить уравнения флаттера, эти компоненты нужно порознь приравнять нулю

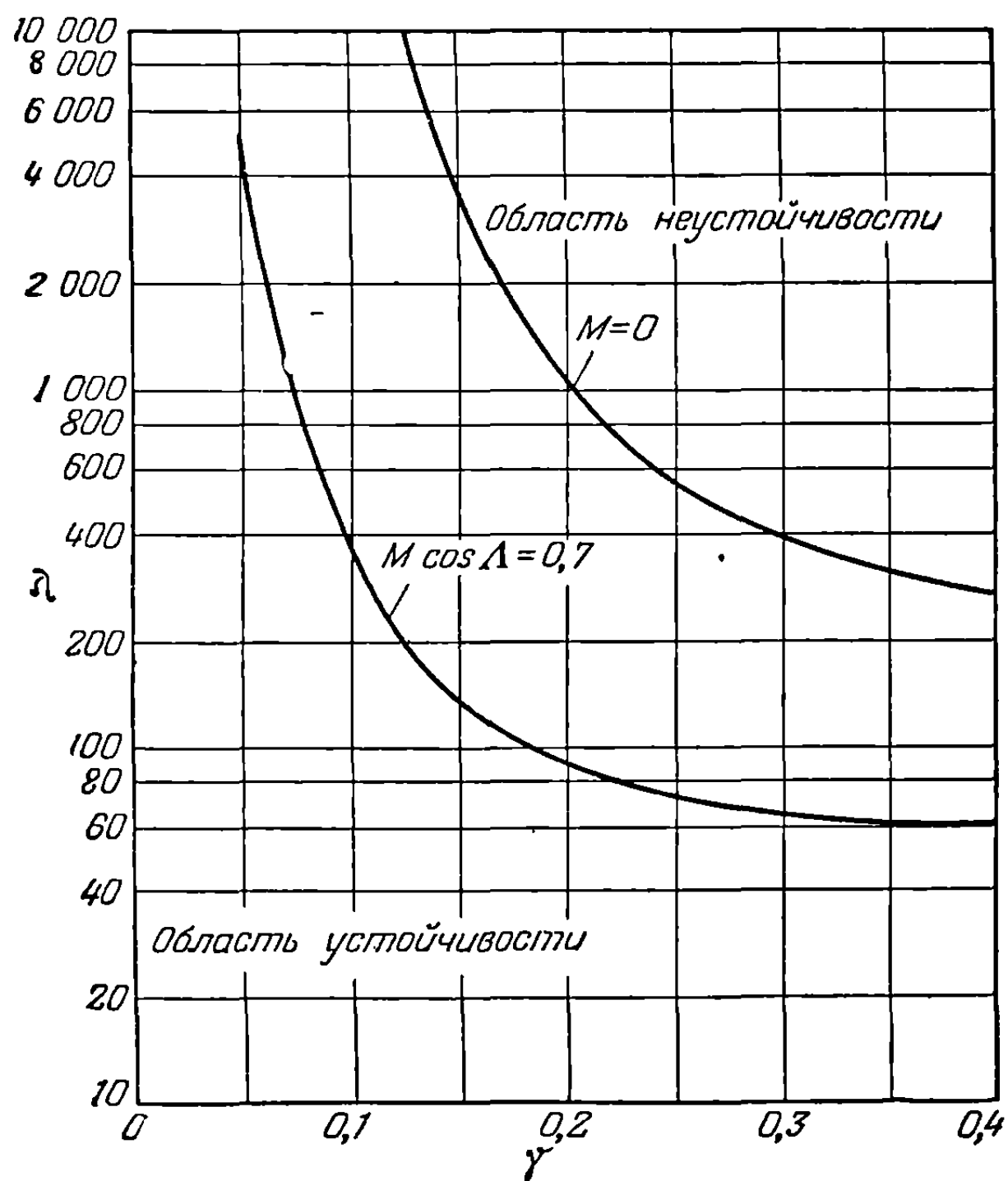
$$\left[ 1 - \left( \frac{\bar{\omega}_w}{\omega} \right)^2 \right] \int_0^1 \left[ \frac{\bar{m}}{\pi \rho \bar{b}_R^2} \right] \bar{f}_w^2 d\bar{y}^* + \int_0^1 \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b}_R} \right)^2 L_{h \text{ Re}} \bar{f}_w^2 d\bar{y}^* + \\ + \frac{\text{tg } \Lambda}{l/\bar{b}_R} \int_0^1 \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b}_R} \right)^3 \frac{L_{h \text{ Im}}}{k} \bar{f}_w \frac{d\bar{f}_w}{d\bar{y}^*} d\bar{y}^* = 0, \quad (9-187)$$

$$- \bar{g}_w \left( \frac{\bar{\omega}_w}{\omega} \right)^2 \int_0^1 \left[ \frac{\bar{m}}{\pi \rho \bar{b}_R^2} \right] \bar{f}_w^2 d\bar{y}^* + \int_0^1 \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b}_R} \right)^2 L_{h \text{ Im}} \bar{f}_w^2 d\bar{y}^* - \\ - \frac{\text{tg } \Lambda}{l/\bar{b}_R} \int_0^1 \left( \frac{\bar{b}}{\bar{b}_R} \right)^3 \frac{L_{h \text{ Re}}}{k} \bar{f}_w \frac{d\bar{f}_w}{d\bar{y}^*} d\bar{y}^* = 0. \quad (9-188)$$

Из уравнений (9-187) и (9-188) очевидно, что в дополнение к параметрам, связанным обычно с изгибной степенью свободы флаттера, важное влияние на флаттер будет оказывать отношение

$$\gamma = \frac{\text{tg } \Lambda}{l/\bar{b}_R}. \quad (9-189)$$

Это становится особенно очевидным, если принять во внимание ту форму, в которой  $\gamma$  входит в уравнение (9-188). Поскольку член, содержащий  $\bar{g}_w$ , очень мал, это уравнение является существенно аэродинамическим соотношением, определяющим приведенную частоту  $k_R$ , при которой возникает флаттер. Уравнение (9-187) является просто условием совместности; если  $k_R$  известно, то это уравнение показывает, имеется ли такое действительное значение частоты  $\omega$ , при котором на крыле с данным распределением масс может возникнуть флаттер. Если мы опускаем член с  $\bar{g}_w$  и исследуем два последних члена в левой части уравнения (9-188), то должны помнить, что  $L_{h_{lim}}$  всегда является отрицательным, тогда как  $L_{h_{R0}}$  меняет знак с положительного на отрицательный, когда  $k$  падает приблизительно ниже 0,35. Поэтому прямое крыло ( $\Lambda = 0$ ) никогда не будет удовлетворять этому уравнению и, таким образом, случай изгибного флаттера с одной степенью свободы для такого крыла исключается. Для крыльев со стреловидностью назад ( $\Lambda > 0$ ) уравнение (9-188) можно удовлетворить для каждого значения  $\gamma$  при сравнительно низком  $k_R$ . Чем больше  $\gamma$ , тем больше соответствующее  $k_R$  и поэтому тем ниже при данных свойствах



Фиг. 9-24. Границы устойчивости на кривой зависимости параметра инерции  $\lambda$  от параметра  $\gamma$ , характеризующего отношение угла стреловидности к удлинению для изгибного флаттера с одной степенью свободы на однородном крыле со стреловидностью назад для двух дозвуковых чисел Маха.

по  $\gamma$  для чисел Маха поперечного потока, равных 0 и 0,7. В настоящем случае, как и в других примерах, сжимаемость оказывает сильное дестабили-

зирующее влияние на скорость флаттера (если она вообще существует).

Каннингэм [9—28] выполнил обширные вычисления<sup>1)</sup> для однородных крыльев с постоянной хордой. Оказывается, что для каждого значения  $\gamma$  и  $\bar{g}_w = 0$  существует положительное значение величины

$$\lambda = \frac{\bar{m}}{\pi \rho \bar{b}_R^2} \left[ 1 - \left( \frac{\bar{\omega}_w}{\omega} \right)^2 \right], \quad (9-189a)$$

удовлетворяющее уравнению (9-188). Уравнение (9-189a) устанавливает, следовательно, ту минимальную величину относительной плотности  $\bar{m}/\pi \rho \bar{b}_R^2$ , при которой может иметь место явление флаттера, так как она равна значению  $\lambda$ , при котором скорость флаттера и частота колебаний настолько велики, что  $\left( \frac{\bar{\omega}_w}{\omega} \right)^2 \ll 1$ .

На фиг. 9-24 воспроизведены границы устойчивости Каннингэма в виде графика  $\lambda$

<sup>1)</sup> Аэродинамическая теория несущей полосы, использованная Каннингэмом, взята из работы [9-25] и лишь незначительно отличается от той теории, которая была здесь использована (см. п. 7-3). Это различие не вносит изменения в качественное истолкование результатов расчетов флаттера. Пользуясь еще более отличной разновидностью теории несущей полосы, Бродинг [9-37] обобщил результаты Каннингэма на звуковые и сверхзвуковые числа Маха поперечного потока.

звующее влияние. Крылья со стреловидностью назад, спользующиеся на практике, вероятно, никогда не имели бы настолько высокую относительную плотность, чтобы возникла проблема флаттера такого крыла в несжимаемом потоке, тогда как комбинации параметров, соответствующие режиму неустойчивости, подобные, например такой, когда  $\lambda = 80$  и  $\gamma = 0,25$  могут легко встретиться на самолете при трансзвуковом режиме. Действительная скорость флаттера легко определяется в безразмерной форме  $U_F \bar{b} \bar{\omega}_w$ . Как можно было ожидать, эта величина для заданной относительной плотности и конструктивного удлинения  $\bar{b}_R$  очень быстро падает с увеличением угла стреловидности. При некотором минимальном значении  $\Delta$  кривая измененная этой величины приближается к вертикальной асимптоте. Если угол стреловидности падает ниже этого максимального значения изгибный флаттер становится невозможным. Для более высоких значений относительной плотности демпфирование конструкции может привести к значительному увеличению  $U_F$ .

Значение влияния параметра  $\gamma$  на изгибный флаттер заключается в том, что чем больше стреловидность назад и чем меньше конструктивное удлинение тем задача становится более важной. Последнее условие является отчасти неожиданным, поскольку уменьшение удлинения прямого крыла улучшает характеристики флаттера хорошего экспериментального подтверждения этого факта пока еще не имеется. Теория показывает, что уменьшение  $\bar{b}_R$  при постоянном угле стреловидности действительно уменьшает  $U_F \bar{b}_R \bar{\omega}_w$ . Это не означает что уменьшается сама скорость  $U_F$ , поскольку  $\bar{\omega}_w$  приблизительно пропорционально величине  $1/\bar{b}_R$ , но противоположная тенденция, т. е. увеличение  $U_F \bar{b}_R \bar{\omega}_w$  с уменьшением  $\bar{b}_R$ , в большей степени была бы характерна для изгибно-крутильного флаттера.

На все эти заключения по отношению к высокоскоростному флаттеру стреловидных крыльев, особенно те, которые относятся к крыльям умеренных или малых удлинений распространяется действие ограничений, упомянутых в конце п. 9-8. Есть основание подозревать, что теория приводит к очень завышенной оценке, обусловленной пренебрежением влияния конечности разбега крыла в сжимаемом потоке.

Интересной интерпретацией флаттера с одной степенью свободы является объяснение его как случая вырожденного изгибно-крутильного флаттера, когда отношение частот  $\bar{\omega}_w/\bar{\omega}_\theta$  стремится к нулю вследствие того, что  $\bar{\omega}_\theta$  стремится к бесконечности. Для прямых, а также и для стреловидных крыльев с заданным массовым коэффициентом, при значении  $\gamma$ , меньшем минимального значения, безразмерная комбинация  $U_F \bar{b}_R \bar{\omega}_w$  в процессе предельного перехода остается ограниченной, так что скорость  $U_F$  становится бесконечно большой. Однако при  $\gamma$ , большем минимального значения,  $U_F \bar{b}_R \bar{\omega}_w$  приближается к нулю таким образом, что  $U_F \bar{b}_R \bar{\omega}_w$  и  $U_F$  имеют конечные пределы такого же вида, который был описан в этом пункте.

9-11. Некоторые другие интересные типы флаттера. а Срывной флаттер и баффтинг. Под срывным флаттером можно понимать любой флаттер несущей поверхности, при котором сечения накладываются на режиме срыва, по крайней мере в течение некоторой части каждого цикла колебания. Поскольку самолеты при полете на максимальных скоростях и при динамических давлении, для которых они спроектированы, редко подходят к режиму флаттера, то эта проблема не является серьезной для крыльев и хвостового оперения. Срыв на больших скоростях у воздушных винтов и роторов генераторов есть явление более обычное, и большинство наблюдавшихся случаев срывного флаттера относилось именно к воздушным винтам ротора генераторов. Вопрос этот приобрел недавно дополнительный интерес вследствие

явления, которое может оказаться срывным флаттером лопаток компрессоров и турбин в турбореактивных двигателях, работающих на нерасчетных режимах.

Важно отличать срывной флаттер от бафтинга крыла, обусловленного сильными возмущениями, исходящими от следа крыла. Первый представляет собой почти чисто гармоническое движение и является настоящим неустойчивым движением, при котором флюктуации потока и аэродинамические силы порождаются колебаниями и поддерживают их своей энергией. При бафтинге силы мало зависят от движения и существовали бы даже в том случае, когда жесткость конструкции была бы бесконечно большой; при нормальных полетных числах Рейнольдса эти силы распределяются по закону вероятностей. Если в реакции крыла преобладает какая-либо частота, то это объясняется тем, что конструкция играет роль фильтра и выбирает те компоненты возмущения, которые находятся в резонансе с одной или большим числом ее собственных аэроупругих форм колебаний. Аналогичное вынужденное возбуждение при сравнительно низких числах Рейнольдса встречается на плохообтекаемых конструкциях, подобных, например, цилиндрическим дымовым трубам. Это явление представляет собой резонанс с собственной частотой колебаний следа, образованного из попеременно срывающихся с каждой стороны вихрей („вихревая дорожка“ Кармана). Обычно в этом случае приведенная частота возбуждающей силы, отнесенная к диаметру цилиндра или толщине тела, нормальной к потоку, равна примерно  $0,4\pi$  [9—38].

Самыми ранними систематическими исследованиями срывного флаттера на моделях в аэродинамических трубах были опыты Раушера [9—39] и Штудера [9—40]. Их исследования показали, что при увеличении среднего угла атаки крыла от нуля до угла в окрестности угла максимальной подъемной силы при установившемся потоке может произойти существенное снижение критической скорости. Это снижение особенно заметно при низкой приведенной частоте флаттера. Штудер считает, что уменьшение  $U_F$  составляет в этом случае 60%. Почти во всех случаях вышеупомянутых опытов, даже тогда, когда флаттер той же самой модели в потенциальном потоке включал заметные колебания изгиба, движение представляло собой в основном крутильные колебания. Скорость срывного флаттера оказывается сравнительно мало чувствительной к величине статического дисбаланса модели. Большое число других параметров оказывает более сильное влияние на это явление, особенно такие, как средний угол атаки, число Рейнольдса, приведенная частота, положение упругой оси, форма профиля и даже амплитуда колебаний. Последние два предполагают математическую нелинейность задачи, которая сильно затрудняет теоретический расчет.

Проблема оценки скорости срывного флаттера была освещена экспериментами Виктори [9-41] и Халфмэна, Джонсона и Хейли [9-42]. Авторы приводят данные об изменении во времени сил и моментов на жестких крыльях, совершающих колебания тангажа и поперечные колебания с известной амплитудой и частотой при больших средних углах атаки. Они определяют также работу за цикл, совершаемую этими нагрузками на пути их образования, и используют эти данные для приближенного определения  $U_F$  упругих крыльев. Для этой цели особенно подходящим оказывается метод, предложенный в работе [9—42]. В этой работе показано также, что очень малое движение изгиба может существенно изменить энергетический баланс, так что расчеты флаттера, основанные на чистом кручении, не всегда будут успешными.

Недавние теоретические и экспериментальные исследования срывного флаттера в решетках, приведенные Шниттгером [9-43] и Систо [9-51], способствуют лучшему пониманию аэроупругой неустойчивости в компрессорах и турбинах. Шниттгер замечает, что относительная плотность сплошных лопаток настолько велика, что критическая частота и форма колебаний могут быть часто взяты совпадающими с одной из нормальных форм свободных колебаний кручения или изгиба. Пользуясь приближенным представлением аэродинамических

нелинейных нагрузок с помощью ступенчатых функций, Шниттгер смог предсказать флаттер как тип колебаний с предельным циклом. Существование этого явления теоретически и экспериментально было доказано также в ранней работе Систо.

(b) *Сверхзвуковой флаттер панели.* С тех пор как были замечены вынужденные и по временам разрушительные колебания некоторых частей обшивки немецкой ракеты V-2, возрос интерес к явлению панельного флаттера. На дозвуковых скоростях единственной формой аэроупругой устойчивости, которой подвержена упругая пластина, с одной стороны обтекаемая установившимся потоком, а с другой — соприкасающаяся с покоящимся воздухом, является установившаяся дивергенция или самовозбуждающиеся колебания, сопровождающиеся выпучиванием. Очевидно, что толщина обшивки, необходимая для того, чтобы исключить возникновение неустойчивости, настолько мала, что этот вопрос для практики не играет никакой роли. Однако в сверхзвуковом потоке возможен настоящий флаттер. Теоретически этот вопрос впервые был изучен Майлсом [9-44]. В первой работе Шеня [9-45] дано строгое исследование двумерного случая флаттера одной панели с опертыми передними и задними кромками.

Система, исследованная Шенем, представляет просто опертую пластину постоянной ширины с длиной  $L$ , вставленную в некоторую другую плоскую поверхность. Поток воздуха обтекает одну поверхность пластины и направлен нормально к ее опертым краям. Сама пластина при этом испытывает малые поперечные колебания. Нормальные формы колебаний пластины представляют синусоидальные волны. Поскольку аэродинамические характеристики верхней и нижней поверхностей двумерной несущей поверхности в сверхзвуковом потоке независимы друг от друга, то распределение давления легко находится по теории Гаррика и Рубинова (п. 6-6 и работа [9-21]). Если  $r$ -й тон колебаний имеет вид

$$\xi_r \varphi_r(x) = \xi_r \sin \frac{r\pi x}{L}, \quad (9-190)$$

то распределение амплитуд вертикальной скорости, которое нужно подставить в формулу (6-241), запишется в виде

$$\bar{w}_a(x) e^{i\omega t} = \xi_r \left[ i\omega \sin \frac{r\pi x}{L} + \frac{r\pi U}{L} \cos \frac{r\pi x}{L} \right]. \quad (9-191)$$

Соответствующий потенциал скоростей и давление определяются непосредственным интегрированием.

Уравнения простого гармонического движения имеют вид

$$[\omega_r^2 - \omega^2] M_r \xi_r = \sum_{s=1}^{\infty} Q_{rs} \xi_s, \quad (9-192)$$

где  $M_r$  — обобщенная масса, пропорциональная массе  $M$  панели, приходящейся на единицу размаха пластины. Каждая обобщенная сила определяется выражением вида

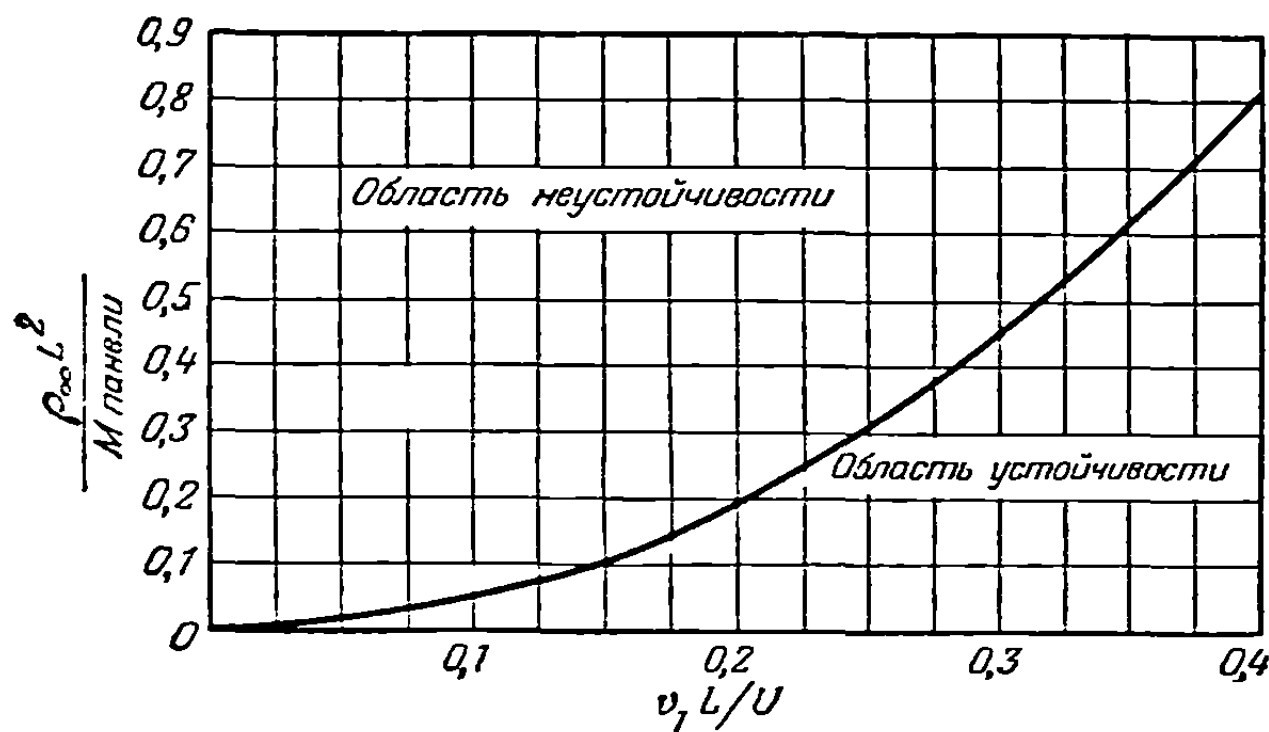
$$Q_{rs} = - \int_0^L \frac{\Delta \bar{p}_r}{\xi_r} \sin \frac{s\pi x}{L} dx, \quad (9-193)$$

где  $\Delta \bar{p}_r$  — амплитуда разности давлений  $p - p_\infty$  на поверхности пластины, обусловленная  $r$ -м тоном простого гармонического колебания. Предполагается, что давление позади пластины равно давлению окружающей атмосферы. Шень указывает, что  $Q_{rs}$  зависит от затабулированных им функций, аналогичных функции  $f_0$  в [9-21].



В работе [9-45] получено решение системы уравнений (9-192) только при использовании первых двух форм собственных колебаний. Получающийся в результате детерминант, как и в случае флаттера крыльев в сжимаемом потоке, сложным образом зависит от числа Маха и приведенной частоты. Однако для заданного числа Маха результаты могут быть изображены в виде границы устойчивости на графике зависимости отношения плотностей воздуха и пластины  $\rho_{\infty} L^2 / M_{\text{панель}}$  от приведенной частоты основного тона  $\omega_1 L U$ . На фиг. 9-25 изображена такая кривая для  $M = 2$ .

Как можно было ожидать, панель будет устойчивой тогда, когда она обладает достаточной жесткостью и масса ее достаточно велика по сравнению с массой воздуха. Любопытно, что для числа Маха, равного  $\sqrt{2}$ , Шень обнаружил вторую область неустойчивости, соответствующую очень высоким соб-



Фиг. 9-25. Граница устойчивости при панельном флаттере для  $M=2$  на кривой зависимости коэффициента плотности  $\rho_{\infty} L^2 / M_{\text{панели}}$  от приведенной частоты  $\omega_1 L U$ . Однородная панель жестко оперта и находится в двумерном потоке.

математическому исследованию, и подробно исследовали неустойчивость такой панели. Хотя количественные расчеты, проведенные в [9-46], и вызывают некоторые вопросы, они близко напоминают расчеты Шеня для больших чисел Маха.

Как доказано, например, в работе Фына [9-47], имеется тесная связь между статической потерей устойчивости при продольном изгибе и флаттером панели. Пластины, имеющие определенные формы выпучивания, оказываются особенно восприимчивыми к этой форме неустойчивости. В противоположность этому первоначальное натяжение оказывает сильное стабилизирующее влияние. Значительная разность давлений между двумя сторонами пластины может дать такое натяжение, с помощью которого можно объяснить, почему так редко встречается на практике флаттер панели на сверхзвуковых самолетах и ракетах. Внешний поток (тем или иным путем) ведет к образованию разности давлений только на очень малой части всей площади обшивки, причиной же натяжения во многих из самых больших неподкрепленных панелей часто является герметизация различных помещений или кабины пилота. Уменьшение жесткости обшивки, обусловленное высокими температурами при полете со скоростью, превышающей примерно  $M = 2,5$ , будет, очевидно, оказывать неблагоприятное влияние как на выпучивание, так и на флаттер панели.

(с) *Флаттер других неавиационных конструкций.* Виды аэродинамической неустойчивости, которые подпадают под наше определение, встречаются, кроме самолета, еще и на других известных конструкциях. Обычным следствием возникновения такого рода неустойчивости являются шум и вибрации или затруднения, возникающие при эксплуатации, потому что некоторые меха-

стическим частотам и малым отношениям плотностей. Имеется основание полагать, что включение в анализ добавочных форм колебаний может уничтожить эту область, или, по крайней мере, считать, что внутри этой области конструкция обладает таким свойством, что любое весьма малое демпфирование ее исключило бы флаттер. Интересное предварительное исследование в поддержку последнего утверждения представлено Хэджепетом и Будянским [9-46]. Они обнаружили, что длинная панель с большим числом равномерно распределенных опор поддается особенно простому

низмы не работают так, как это ожидалось. Задача решается с помощью различного рода мероприятий, подобных увеличению демпфирования или жесткости конструкции, уменьшению угла атаки ниже критического угла, перемещению линии шарниров и т. п. Обычными случаями подобного рода являются хлопанье парусов, флаттер флагов<sup>1)</sup>, вибрации регулировочных лопаток в вентиляционных системах, колебания плохо изготовленных флюгеров.

Выделяется один пример катастрофического флаттера, представляющий собой неустойчивые колебания очень гибкого подвесного моста. Мы имеем здесь в виду саморазрушение Такомакского моста в США (Tacoma Narrows bridge) 7 ноября 1940 г. при ветре 42 мили в час. Можно указать также много примеров аналогичных нежелательных колебаний и разрушений; наиболее ранние документы относятся к разрушению моста в Менаи (Menai Straights Bridge) в 1826 г. и цепного моста в Брайтоне (Brighton Chain Pier) в 1836 г. Большинство указанных мостов имели железнодорожное полотно, которое обладало ненормально слабым сопротивлением кручению. Опасной формой колебаний в первую очередь была антисимметричная форма колебаний кручения с узлом посередине пролета. До тех пор пока не установлены специальные подпорки, эти колебания только в слабой степени ограничиваются поддерживающими мост тросами. Улучшение характеристик обычно достигалось увеличением крутильной жесткости и изменением формы поперечного сечения для уменьшения неустойчивости развивающихся воздушных нагрузок. Боковые раскосы и железнодорожное полотно обычного подвесного моста имеют много острых углов и являются всем, чем угодно, но не хорошо обтекаемыми телами, и поток около них представляет картину срывов и сложных вихревых образований. Теория потенциальных течений мало пригодна для вычисления распределения неустановившихся нагрузок, и практически все исследование флаттера проводилось с различного рода моделями в аэродинамических трубах. О двух особенно больших сериях опытов сообщает Фаркуарсон и др. [9-48] из Вашингтонского университета и Фрезер и Скратон [9-49] из Англии. Первая серия опытов возникла как результат Такомакской катастрофы; авторы описывают эксперименты с моделями первоначально 0,0 моста и моста, заменившего его, выполненными в масштабе 1/50, вместе со многими вспомогательными исследованиями, которые были необходимы для того, чтобы прийти к удовлетворительной новой конструкции. В работе [9-48] перепечатаны также результаты испытаний, проведенных Карманом и Данном в Калифорнийском технологическом институте.

Английские опыты связаны в основном с проектированием удовлетворительного (с точки зрения аэроупругости) моста через устье реки Северн (Severn). В работе [9-49] содержится также несколько важных фундаментальных добавлений к вопросам моделирования и испытания мостов. Установлено, что в таких опытах число Рейнольдса, вплоть до моделей масштаба 1/100, не оказывает заметного влияния на результаты. Более того, показано, что большинство важных сведений о данной конструкции моста можно получить из испытаний соответствующим образом опертых моделей характерных сечений с большим удлинением, так что для того, чтобы обезопасить конструкцию от возникновения флаттера, не всегда необходимо воспроизводить целиком ее форму и размеры.

Ни один из обзоров исследований по неустойчивости мостов не был бы полным без ссылки на работу Стеймана, который подробно изложил свои собственные результаты, касающиеся этой задачи, в работе [9-50]. Эта работа содержит перечень эмпирических критериев, которые могут служить для быстрой проверки предлагаемой конструкции на флаттер.

Из всех исследований мостов вытекает одно заключение, состоящее в том, что критическим параметром является комбинация  $U/Nb$ , где  $U$  — скорость

<sup>1)</sup> В этой связи см. работу Тома [9-52].



ветра,  $N$  — частота рассматриваемой формы колебаний и  $b$  — некоторый характерный размер, подобный, например, расстоянию между тросами. Эта величина пропорциональна обратной величине приведенной частоты, известной исследователям флаттера. Как и в случае компрессорных лопаток, конструкции висячих мостов, по-видимому, имеют такие высокие относительные плотности, что частоты их аэроупругих форм колебаний не изменяются заметным образом, когда величина скорости потока воздуха, набегающего на конструкцию, начинает отличаться от нуля. Это означает, что  $N$  в выражении для приведенной скорости  $U Nb$  может быть заменено через частоту соответствующих свободных колебаний, и каждой форме нормальных колебаний может быть приписано некоторое критическое значение параметра. Этот факт намного облегчает предсказание влияния жесткости или изменения массы по сравнению с тем, что имеет место в случае типичных самолетных крыльев, и облегчает использование секционных моделей и тому подобных приспособлений при исследовании новых и сложных конструкций.

## Глава 10

### ДИНАМИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ

**10-1. Введение.** Явления статической аэроупругости, рассмотренные в гл. 8, характеризуются тем, что в уравнения, описывающие эти явления, время не входит в качестве независимой переменной, тогда как задача о флаттере, рассмотренная в гл. 9, касается главным образом вопроса о гармонической зависимости перемещения от времени. В этой главе будет обращено внимание на класс задач, в которых движение системы может изменяться произвольным образом с течением времени. Вид этой зависимости определяется начальными условиями, характером приложенных сил и реактивными свойствами системы.

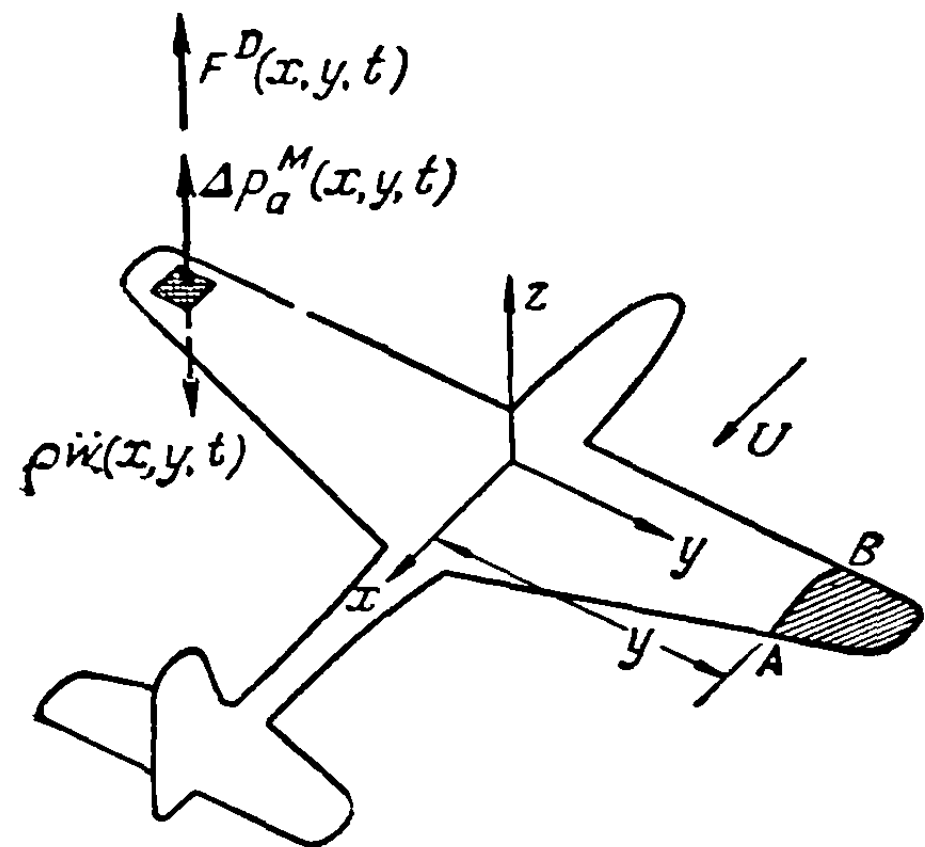
При определении динамической реакции самолета в полете часто допускается, что конструкция самолета абсолютно жесткая. На основе этого предположения приложенные извне силы, подобные, например, нагрузкам на самолет в воздухе или на земле, уравниваются аэродинамическими и инерционными силами, которые являются результатом поступательного и вращательного движения самолета как твердого тела, причем предполагается, что эти силы представляют собой всю совокупность сил, действующих на самолет. Это приводит к ошибкам двоякого рода. Деформация конструкции может возбудить дополнительные аэродинамические силы, которые будут оказывать влияние на суммарную реакцию самолета. Кроме того, если динамическая реакция является прямым следствием быстро приложенных внешних сил, то в добавление к поступательному и вращательному движениям самолета будут возбуждаться также и колебательные движения его конструкции. Последние оказывают существенное влияние на распределение напряжений в конструкции и несколько меньшее влияние на суммарную реакцию самолета.

В этой главе мы будем интересоваться двумя вопросами. Первый касается исследования влияния явлений аэроупругости на напряжения в конструкции в тех случаях, когда самолет подвергается действию быстро приложенных внешних сил или произвольно заданному ряду начальных условий. Второй — касается исследования влияния явлений аэроупругости на суммарную реакцию самолета, когда последний подвергается аналогичным воздействиям.

В течение срока службы современного самолета быстро прикладываемые внешние силы могут возникнуть из многих источников. Одними из наиболее важных возмущающих сил являются силы, обусловленные порывами ветра. В случае гражданского самолета порывы ветра являются результатом атмосферной турбулентности, а в случае военного самолета порыв может обуславливаться не только атмосферной турбулентностью, но также и возникшими в результате взрыва ударными волнами. Ударные нагрузки в процессе посадки являются источником весьма быстро и локально прикладываемых внешних сил. Эти силы представляют интерес главным образом в связи с вопросом о напряжениях в конструкции в задачах, касающихся динамической реакции. Кроме этого, быстро изменяющиеся внешние силы могут быть связаны с катапультированием, сбрасыванием бомб, быстрым маневрированием, обусловленным резким отклонением рулевых поверхностей, и турбулентным следом за крыльями, гондолами или другими частями самолета.

Первая часть этой главы содержит исследование общих уравнений движения, касающихся задач динамической реакции самолета в полете, и их решения. Последующие пункты содержат приложение этих уравнений и их решений к отдельным задачам.

10-2. Уравнения возмущенного движения упругого самолета. Самая общая формулировка уравнений движения упругого самолета в полете включает рассмотрение трехмерного упругого тела, обладающего шестью степенями свободы поступательного и вращательного движений и, кроме того, большим числом степеней свободы упругих движений. Ввиду сложности такой системы в гл. 3 для целей исследования была введена более простая математическая модель,



Фиг. 10-1. Упругий самолет, подверженный действию возмущающей силы.

в которой конструкция представлена упругой пластиной, расположенной в плоскости  $xu$ . В настоящей главе эта модель кладется в основу исследования, и несмотря на то, что вследствие этого несколько теряется общность задачи, это приближение позволит нам в сжатом виде показать основные принципы расчета.

Рассмотрим незакрепленный упругий самолет в виде пластины в плоскости  $xu$  (см. фиг. 10-1). Допустим, что самолет имеет следующие степени свободы: поступательного перемещения в вертикальной плоскости, движения тангажа и крена. Возмущающая сила, приходящаяся на единицу площади,  $F^D(x, y, t)$ , произвольно зависящая от координат и времени, считается приложенной к поверхности самолета. Принимается, что в начальный момент система находилась в состоянии устано-

вившегося движения. Задача состоит в том, чтобы рассчитать изменение деформаций и перемещений во времени, начиная от этого равновесного состояния. В результате возмущенного движения возникают аэродинамические давления  $\Delta p_a^M(x, y, t)$  (например, силы аэродинамического демпфирования). Соответствующие уравнения движения можно вывести с помощью методов, изложенных в п. 3-7 (b). Для равновесия всех сил вдоль оси  $z$  необходимо, чтобы

$$\int_S \int \ddot{w}(x, y, t) \rho dx dy = \int_S \int (F^D + \Delta p_a^M) dx dy. \quad (10-1)$$

Для равновесия всех моментов относительно оси  $x$  нужно, чтобы

$$\int_S \int \ddot{w}(x, y, t) \rho y dx dy = \int_S \int (F^D + \Delta p_a^M) y dx dy. \quad (10-2)$$

Для равновесия всех моментов относительно оси  $y$  должно быть

$$\int_S \int \ddot{w}(x, y, t) \rho x dx dy = \int_S \int (F^D + \Delta p_a^M) x dx dy. \quad (10-3)$$

Из уравнения (2-55) получаем условие равновесия элемента конструкции

$$\begin{aligned} w(x, y, t) - w(0, 0, t) - x \frac{\partial w(0, 0, t)}{\partial x} - y \frac{\partial w(0, 0, t)}{\partial y} = \\ = \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) [F^D(\xi, \eta, t) + \Delta p_a^M(\xi, \eta, t) - \rho(\xi, \eta) \ddot{w}(\xi, \eta, t)] d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (10-4)$$

В этой системе уравнений неизвестной величиной является функция  $w(x, y, t)$ , представляющая перемещение упругого самолета из его первоначального положения равновесия. Предполагается, что возмущение  $F^D(x, y, t)$  задано в виде явной функции координат и времени. Как объяснялось в гл. 5, аэродинамические давления  $\Delta p_a^M$  могут вообще зависеть как от мгновенных значений перемещения, так и от предыдущей истории движения.

В гл. 3 мы видели, что в практических приложениях решение уравнений движения неизбежно начинается с допущения, что пространственная конфигурация деформированной конструкции, которая в действительности обладает бесконечным числом степеней свободы, может быть аппроксимирована некоторой эквивалентной системой с конечным числом степеней свободы. Если этот первоначальный шаг сделан, то уравнения непрерывной системы приводятся к совместным обыкновенным дифференциальным уравнениям. Независимой переменной в этих уравнениях является время. В гл. 3 были описаны три метода, с помощью которых непрерывная система сводится к системе с конечным числом степеней свободы. Во-первых, допускается, что деформация может быть представлена как наложение конечного числа нормальных, или собственных, форм колебаний конструкции. Эти формы, как описывается в гл. 4, определяются с помощью собственных значений и собственных функций однородной системы уравнений движения свободного самолета. Во-вторых, деформация берется в виде суммы конечного числа заранее заданных функций и, в-третьих, деформация конструкции описывается с помощью деформаций в некотором числе отдельных точек на ее поверхности. При исследовании переходных решений уравнений движения мы будем применять первый метод, в котором допускается, что нормальные формы колебаний свободной конструкции известны. Это делается только ради удобства исследования, и читатель может обобщить изложенные здесь принципы на другие методы.

Когда решение выражено через нормальные формы колебаний, то в уравнения (10-1), (10-2), (10-3) и (10-4) вводится следующее разложение:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x, y) \xi_i(t), \quad (10-5)$$

где  $\varphi_i(x, y)$  — нормированные формы нормальных колебаний свободного самолета, включающие движения самолета как твердого тела, и  $\xi_i(t)$  — нормальные координаты. В п. 3-7 (b) было показано, что в том случае, когда решение выражается через нормальные координаты, уравнения движения (10-1), (10-2), (10-3) и (10-4) переходят в следующие:

$$M_i \ddot{\xi}_i + M_i \omega_i^2 \xi_i = E_i \quad (i = 1, 2, \dots, n; \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0)^1 \quad (10-6)$$

с начальными условиями вида

$$\xi_i(0) = \dot{\xi}_i(0) = 0, \quad (10-7)$$

где

$$M_i = \int_S \int \varphi_i^2(x, y) \rho(x, y) dx dy, \quad (10-8)$$

$$E_i = \int_S \int [F^D(x, y, t) + \Delta p_a^M(x, y, t)] \varphi_i(x, y) dx dy. \quad (10-9)$$

<sup>1)</sup> При желании уравнения (10-6) могут быть пополнены добавочными уравнениями движения твердого тела, представляющими движения рыскания и боковые движения. Поскольку самолет предполагается сжатым в тонкую пластинку в плоскости  $xu$ , эти дополнительные степени свободы не влияют на формы свободных колебаний упругой пластины.

Обобщенная сила  $\Xi_i$  складывается из возмущающей силы, являющейся явной функцией координат и времени, и составляющей, зависящей от движения системы. Последняя в общем случае является функцией всех нормальных координат и их первых и вторых производных по времени. Удобно переписать уравнения (10-6) в следующей форме:

$$M_i \ddot{\xi}_i + M_i \omega_i^2 \xi_i = \Xi_i^M + \Xi_i^D \quad (i = 1, 2, \dots, n; \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0), \quad (10-10)$$

где  $\Xi_i^M$  есть составляющая обобщенной силы, обусловленная возмущенным движением:

$$\Xi_i^M(\xi_1, \dots, \xi_n; \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_n; \ddot{\xi}_1, \dots, \ddot{\xi}_n) = \int_S \int \Delta p_a^M(x, y, t) \varphi_i(x, y) dx dy, \quad (10-11)$$

и  $\Xi_i^D$  — составляющая обобщенной силы, обусловленная возмущающей силой:

$$\Xi_i^D(t) = \int_S \int F^D(x, y, t) \varphi_i(x, y) dx dy. \quad (10-12)$$

### 10-3. Системы с заданной зависимостью внешних сил от времени.

Метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений движения [уравнения (10-10)] зависит от природы обобщенной силы. Рассмотрим сначала системы, в которых эта сила определяется всецело внешними силами с известной зависимостью от времени и, таким образом, не зависит от движения системы, т. е.  $\Xi_i^M = 0$ . Следовательно, обобщенная сила будет просто функцией времени

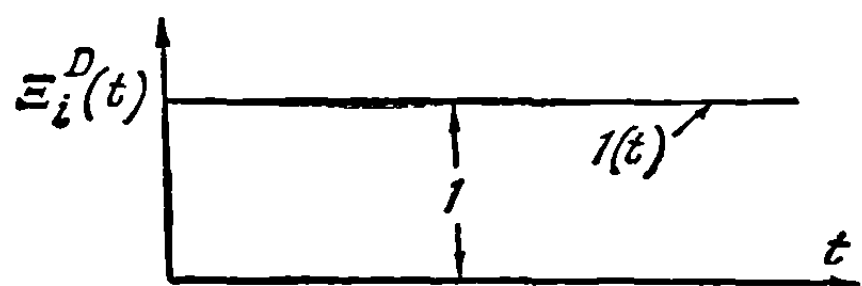
$$\Xi_i = \Xi_i^D(t). \quad (10-13)$$

Поскольку выбор нормальных координат уже исключает взаимодействие упругих и инерционных сил в уравнениях (10-10), то уравнения движения будут независимы друг от друга и могут решаться отдельно.

(а) Решения уравнений движения. Для  $i = 1, 2, 3$  решения уравнений (10-10) могут быть получены с помощью двукратного интегрирования. Так как принимается, что до приложения возмущающей силы система находится в покое, то

$$\xi_i(t) = \frac{1}{M_i} \int_0^t \int_0^t \Xi_i^D(t) dt dt \quad (i = 1, 2, 3). \quad (10-14)$$

Рассматривая затем решения уравнений (10-10) для  $i = 4, \dots, n$ , найдем, что по форме они идентичны решениям для простой системы с одной степенью свободы, не обладающей затуханием и состоящей из массы, подвешенной на пружине.



Фиг. 10-2. Единичная ступенчатая функция.

Поэтому в этом случае можно применить те методы решения, которые используются для этой простой системы. Допустим сначала, что обобщенная возмущающая сила имеет простую функциональную форму, изображенную на фиг. 10-2. Эта функция известна под названием единичной ступенчатой функции [10-1].

При  $t = 0$  эта функция скачком увеличивает свое значение от 0 до 1 и в дальнейшем остается неизменной. Единичная ступенчатая функция обозначается символом  $1(t)$ . Подставив в уравнения (10-10) вместо возмущающей силы единичную ступенчатую функцию, получим

$$M_i \ddot{\xi}_i + M_i \omega_i^2 \xi_i = 1(t) \quad (i = 4, 5, \dots, n). \quad (10-15)$$

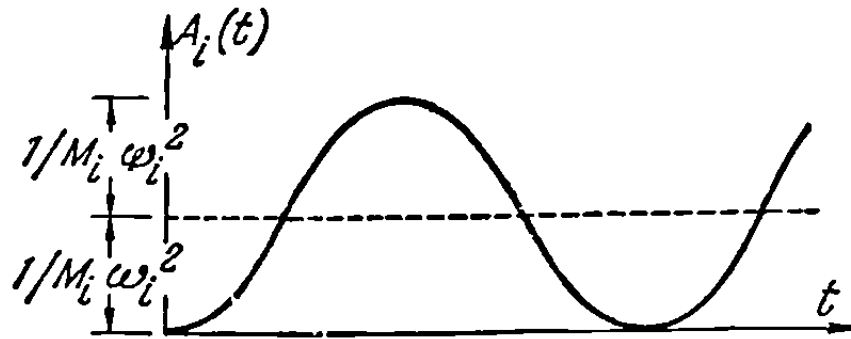
Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\xi_i = A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t + \frac{1}{M_i \omega_i^2}. \quad (10-16)$$

Используя начальные условия  $\xi_i(0) = \dot{\xi}_i(0) = 0$ , получаем

$$A_i(t) = \frac{1}{M_i \omega_i^2} (1 - \cos \omega_i t) \quad (i = 4, 5, \dots, n). \quad (10-17)$$

Функция, обозначенная через  $A_i(t)$ , представляет реакцию системы на действие единичной ступенчатой функции  $1(t)$  и называется *переходной проводимостью* [10-1]. На фиг. 10-3 графически иллюстрируется форма кривой переходной проводимости. Из фиг. 10-3 очевидно, что результат приложения ступенчатой единичной силы к простой недемпфирующей системе с одной степенью свободы выражается в реакции, в два раза превышающей реакцию в случае статического приложения силы. Таким образом, единичная ступенька порождает *динамическое усиление*, равное двум. Когда сила прикладывается в течение бесконечного промежутка времени (статический случай), динамическое усиление равно единице. Для промежутка времени действия, находящегося между этими пределами, динамическое усиление лежит между единицей и двумя.



Фиг. 10-3. Переходная проводимость недемпфирующей системы с одной степенью свободы.

Интересно также определить решение уравнений (10-10) при  $n \geq 4$  для возмущающей силы в форме дельта-функции Дирака, введенной в п. 3-2 (b) [выражение (3-79)]. Этот тип возмущения называется *функцией единичного импульса*. В этом случае уравнения (10-10) имеют вид

$$M_i \ddot{\xi}_i + M_i \omega_i^2 \xi_i = \delta(t) \quad (i = 4, 5, \dots, n), \quad (10-18)$$

где свойства функции  $\delta(t)$  определяются соотношениями (3-80) и (3-81). Необходимо сделать специальные замечания, касающиеся тех начальных условий, которые должны быть заданы для уравнения (10-18). Поскольку принимается, что до приложения единичного импульса система находится в покое, то при  $t=0$  перемещение  $\xi_i(0)$  равно, очевидно, нулю; однако условие для скорости требует более подробного исследования. Если проинтегрировать уравнение (10-18) по времени:

$$\int_0^{\Delta t} d\dot{\xi}_i + \omega_i^2 \int_0^{\Delta t} \xi_i dt = \frac{1}{M_i} \int_0^{\Delta t} \delta(t) dt \quad (10-19)$$

и использовать соотношения (3-80), то при  $\Delta t$ , стремящемся к нулю, получим

$$\dot{\xi}_i(\Delta t \rightarrow 0) = \frac{1}{M_i}. \quad (10-20)$$

Таким образом, заключаем, что начальное условие для скорости будет иметь вид

$$\dot{\xi}_i(0) = \frac{1}{M_i}.$$

Подставляя эти начальные условия в уравнение (10-18), получаем следующее выражение:

$$h_i(t) = \frac{1}{M_i \omega_i} \sin \omega_i t \quad (i = 4, 5, \dots, n), \quad (10-21)$$

где символ  $h_i(t)$  использован для обозначения реакции на единичный импульс. Сравнивая равенства (10-17) и (10-21), видим, что реакцию на единичный импульс можно получить дифференцированием переходной проводимости по времени, т. е.

$$h_i(t) = \frac{dA_i(t)}{dt}. \quad (10-22)$$

Этот полезный результат справедлив не только для исследуемой простой системы, но, как показано в [10-2], имеет место также и для любой линейной системы.

Поскольку функции специальной формы  $1(t)$  и  $\delta(t)$  в прикладных задачах употребляются нечасто, рассмотрим реакцию  $i$ -й формы колебаний на обобщенную силу  $\Xi_i^D(t)$  с произвольным изменением во времени. Реакцию системы на приложенную произвольную силу можно выразить либо через переходную проводимость  $A(t)$ , либо через реакцию на единичный импульс  $h(t)$ . Это достигается с помощью интеграла Дюамеля, выведенного в приложении С. Согласно этому интегралу реакцию можно выразить через переходную проводимость с помощью соотношения

$$\xi_i(t) = \int_0^t \Xi_i^D(\tau) A_i'(t - \tau) d\tau, \quad (10-23)$$

где

$$A_i'(t - \tau) = \frac{dA_i(t - \tau)}{d(t - \tau)}, \quad (10-24)$$

или в другой форме — через реакцию на единичный импульс в виде

$$\xi_i(t) = \int_0^t \Xi_i^D(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (10-25)$$

Подставляя выражение (10-17) в равенство (10-23) или соотношение (10-21) в уравнение (10-25), мы придем в обоих случаях к следующему выражению для реакции на произвольное усилие:

$$\xi_i(t) = \frac{1}{M_i \omega_i} \int_0^t \Xi_i^D(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (i = 4, 5, \dots, n). \quad (10-26)$$

Подставляя соотношения (10-14) и (10-26) в уравнение (10-5), можно получить окончательное выражение для полной реакции системы незакрепленного упругого самолета в виде

$$\omega(x, y, t) = \sum_{i=1}^3 \frac{\varphi_i}{M_i} \int_0^t \int_0^t \Xi_i^D(t) dt dt + \sum_{i=4}^n \frac{\varphi_i}{M_i \omega_i} \int_0^t \Xi_i^D(t) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau. \quad (10-27)$$

Во многих случаях аналитическое выражение возмущающих сил неизвестно и они задаются просто в виде кривой. В этих случаях для вычисления интеграла Дюамеля нужно применять численные или графические методы расчета. Для этой цели созданы многочисленные приближенные методы; полезное графическое построение описано, например, Джонсом в его работе [10-3].

**Пример 10-1** Вычислить реакцию свободного однородного крыла, присоединенного к фюзеляжу, на действие равномерной погонной нагрузки  $f(t)$  (см. фиг. 10-4). Принять, что изменение возмущающей силы во времени описывается полуволной синуса.

**Решение.** Боковая реакция тонкой балки может быть представлена с помощью наложения собственных форм колебаний свободно колеблющейся балки в следующем виде:

$$\omega(\xi, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) \xi_i(t), \quad (a)$$

где  $\xi$  — безразмерная переменная, отсчитываемая вдоль размаха и равная  $\xi = \frac{y}{l}$ .

Так как крыло нагружено симметрично, то в настоящем примере нужно рассмотреть только симметричные формы собственных колебаний системы крыло-масса фюзеляжа. Эти формы и соответствующие им частоты были уже вычислены в примере 3-2. Поскольку система является свободной, то уравнение (a) содержит только одну форму



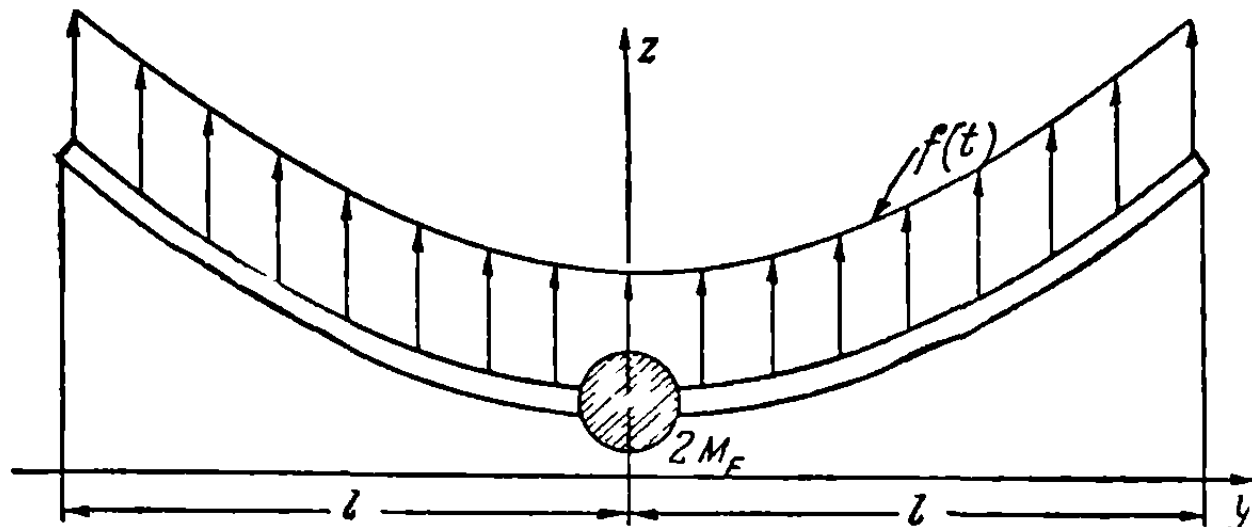
колебаний с нулевой частотой, соответствующую жесткому телу. Подставляя формы колебания, полученные в примере 3-2, в выражение (а), имеем

$$w(\xi, t) = \xi_1(t) + \sum_{i=2}^n \varphi_i(\xi) \dot{\xi}_i(t), \quad (b)$$

где

$$\varphi_i(\xi) = B_i [e^{-\Omega_i \xi} + K_1^{(i)} \cos \Omega_i \xi + K_2^{(i)} \operatorname{sh} \Omega_i \xi + (1 - K_2^{(i)}) \sin \Omega_i \xi] \quad (i = 2, 3, \dots, \infty). \quad (c)$$

Нормирующие постоянные  $B_i$  и постоянные  $K_1^{(i)}$ ,  $K_2^{(i)}$  и  $K_3^{(i)}$  определены в примере 3-2. Функции времени  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$ , ...,  $\xi_n(t)$  получаются как решения дифференциальных уравнений типа уравнения (10-10). В каждом из этих уравнений обобщенная масса  $M_i$



Фиг. 10-4. Однородное крыло, прикрепленное к фюзеляжу и нагруженное внешними силами.

равна половине массы всей системы, потому что формы колебаний, использованные в примере 3-2, были нормированы следующим образом:

$$\int_0^l \varphi_1^2 dm = \int_0^l \varphi_2^2 dm = \dots = \int_0^l \varphi_n^2 dm = M = M_F + ml, \quad (d)$$

где  $2M_F$  — масса фюзеляжа,  $m$  — погонная масса крыла. Таким образом, уравнения движения, определяющие нормальные координаты, имеют вид

$$M \ddot{\xi}_1(t) = \Xi_1(t), \quad (e)$$

$$M \ddot{\xi}_i(t) + M \omega_i^2 \xi_i(t) = \Xi_i(t) \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (f)$$

Обобщенные силы равны

$$\Xi_i(t) = C_i f(t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (g)$$

где

$$C_1 = l, \quad (h)$$

$$C_i = \frac{A_i l}{\Omega_i} [K_1^{(i)} \sin \Omega_i + K_2^{(i)} \operatorname{ch} \Omega_i - (1 - K_2^{(i)}) \cos \Omega_i - e^{-\Omega_i} + 2(1 - K_2^{(i)})], \quad (i) \\ (i = 2, 3, \dots, n).$$

Если вначале, непосредственно перед приложением  $f(t)$ , система находилась в покое, то из равенства (10-14) следует, что решение уравнения (b) дается выражением

$$\xi_1(t) = \frac{C_1}{M} \int_0^t \int_0^t f(t) dt dt. \quad (j)$$

Аналогично из выражения (10-26) можно видеть, что решение уравнения (f) имеет вид

$$\xi_i(t) = \frac{C_i}{M \omega_i} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (k)$$

Таким образом, окончательно результат можно записать в виде

$$w(\xi, t) = \frac{C_1}{M} \int_0^t \int_0^t f(\tau) d\tau d\tau + \frac{1}{M} \sum_{i=2}^n \frac{C_i \varphi_i(\xi)}{\omega_i} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau, \quad (l)$$

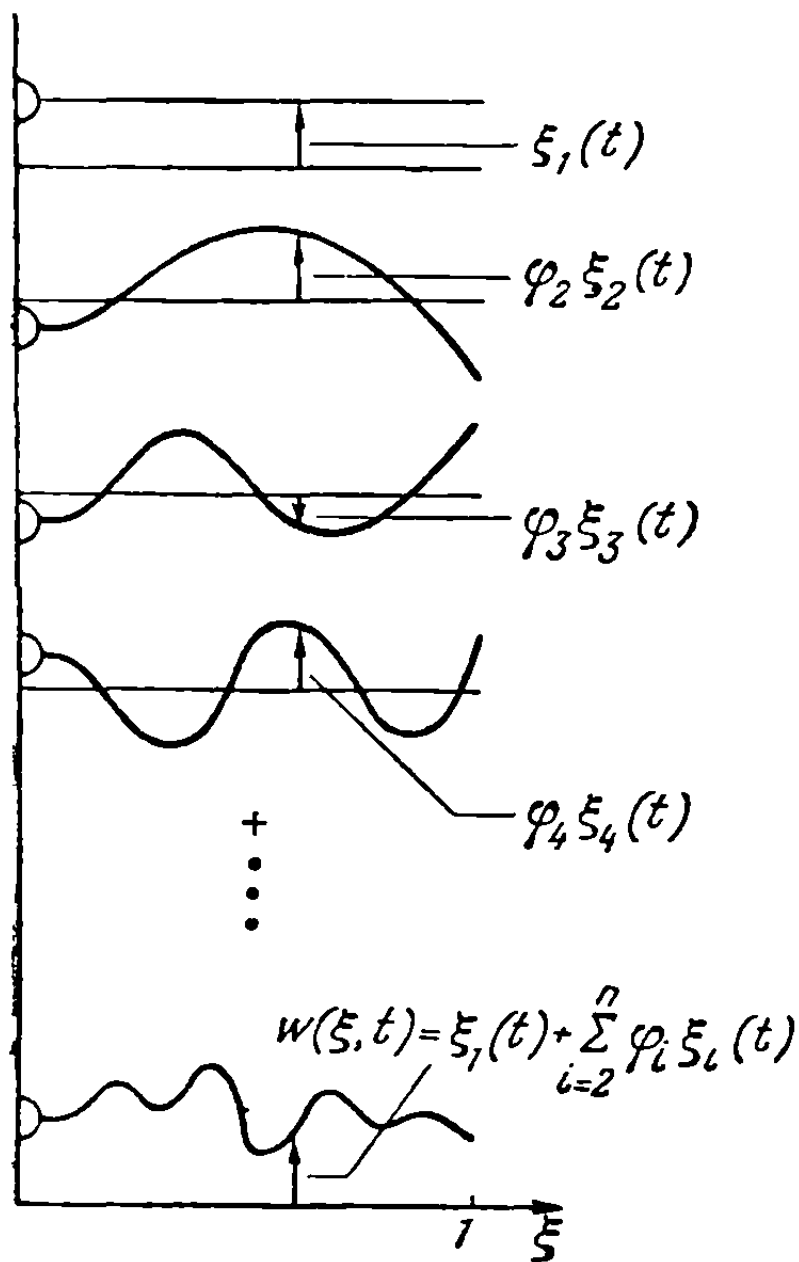
где  $\varphi_i(\xi)$ ,  $C_1$  и  $C_i$  определяются соответственно выражениями (с), (h) и (i).

Перемещение  $\xi_1(t)$ , соответствующее колебанию твердого тела, физически можно истолковать как перемещение центра тяжести колеблющейся системы. Очевидно, что уравнение (е) на самом деле представляет собой результат применения второго закона Ньютона к системе в целом. Перемещения  $\xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$  с физической точки зрения представляют упругие перемещения системы по отношению к перемещениям системы как твердого тела. Схематически это проиллюстрировано на фиг. 10-5, где суммарное перемещение системы представлено в виде перемещения горизонтальной прямой, проходящей через центр тяжести системы, и суммы перемещений системы, соответствующих различным формам ее колебаний относительно прямой, проходящей через центр тяжести системы. Допустим теперь, что возмущающая сила имеет форму полуволны синуса:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin \Omega t & (0 \leq t \leq \pi/\Omega), \\ f(t) &= 0 & (t > \pi/\Omega). \end{aligned} \quad (m)$$

Подставляя эти величины в выражение (l) и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} w(\xi, t) &= \frac{C_1}{M\Omega} \left( t - \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t \right) + \\ &+ \frac{1}{M} \sum_{i=2}^n \frac{C_i \varphi_i(\xi)}{(\omega_i^2 - \Omega^2)} \left( \sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_i} \sin \omega_i t \right). \end{aligned} \quad (n)$$



Фиг. 10-5. Иллюстрация процесса наложения собственных форм колебаний

$$\begin{aligned} w(\xi, t) &= \frac{C_1 \pi}{M\Omega^2} + \\ &+ \frac{1}{M} \sum_{i=2}^n \frac{C_i \varphi_i(\xi)}{(\omega_i^2 - \Omega^2)} \left\{ \sin \Omega t + \sin \Omega \left( t - \frac{\pi}{\Omega} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{\Omega}{\omega_i} \left[ \sin \omega_i t + \sin \omega_i \left( t - \frac{\pi}{\Omega} \right) \right] \right\} \quad (t \geq \pi/\Omega). \end{aligned} \quad (o)$$

(в) *Переходные напряжения в системах с заданной зависимостью внешних сил от времени.* В принципе всегда возможно определить распределение напряжений, соответствующее известному распределению деформаций. Когда упругие характеристики конструкции заданы в виде коэффициентов влияния или функций влияния, то можно определить нагрузки, потребные для того, чтобы удерживать конструкцию в данном деформированном состоянии. С помощью этих нагрузок можно обычным образом исследовать распределение напряжений в конструкции. В принципе также возможно, конечно, определить напряжения, возникающие вследствие деформаций, связанных с пространственной кривизной деформированной конструкции.

Хотя эти методы, вообще говоря, и являются прямыми методами, они могут вести к цели не наиболее коротким путем, особенно если деформированное состояние выражается через перемещения, соответствующие нормальным формам колебаний. Ниже будут рассмотрены два других метода расчета переходных напряжений.

*Метод перемещений.* Вначале следует заметить, что в этом случае применяется принцип наложения и суммарное напряженное состояние при любой деформации конструкции является наложением напряженных состояний, определяемых перемещениями, соответствующими каждой нормальной форме коле-

баний. Поэтому напряжение в данной точке  $p$  конструкции может быть выражено в виде

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^n A_p^{(i)} \xi_i, \quad (10-28)$$

где величины  $A_p^{(i)}$  являются постоянными, представляющими напряжение в точке  $p$ , обусловленное единичным перемещением в  $i$ -й форме нормального колебания.

Напряжение, соответствующее единичному перемещению в нормальной форме колебаний, равно тому напряжению, которое возникает в результате инерционной нагрузки при свободных колебаниях той же формы с амплитудой, равной единице. Эта инерционная нагрузка может быть выражена в виде зависимости от формы и частоты колебаний, и постоянные  $A_p^{(i)}$  могут быть определены с помощью обычного расчета на прочность.

Рассмотрим, например, несколько подробнее определение поперечного усилия и изгибающего момента в сечении  $A-B$  крыла самолета, изображенного на фиг. 10-1. Допустим, что изменение нормальных координат  $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$  во времени известно. Инерционная нагрузка, связанная с  $i$ -й формой нормальных колебаний, или, другими словами, та внешняя нагрузка, которую нужно приложить к конструкции для того, чтобы деформировать ее соответственно  $i$ -й форме колебаний с амплитудой  $\xi_i$ , равна

$$Z_i(x, y) = \varphi_i(x, y) \rho(x, y) \omega_i^2 \xi_i. \quad (10-29)$$

Согласно принципу наложения, полная внешняя нагрузка, необходимая для деформации конструкции в некоторую форму, которую можно рассматривать как наложение  $n$  нормальных форм колебаний, получается простым суммированием выражений (10-29):

$$Z(x, y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x, y) \rho(x, y) \omega_i^2 \xi_i. \quad (10-30)$$

Величину  $Z(x, y)$  можно рассматривать как внешнюю нагрузку, и расчет конструкции на прочность может быть доведен до конца обычным путем. Например, поперечная сила в сечении  $A-B$ , расположенном на расстоянии  $y$  от центральной оси самолета (см. фиг. 10-1), получается с помощью интегрирования  $Z(x, y)$  по площади крыла  $A$ , находящейся с внешней стороны сечения  $A-B$ ,

$$S_{AB} = \iint_A Z(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (10-31)$$

Подставляя сюда соотношение (10-30), получаем

$$S_{AB} = \sum_{i=1}^n S_{AB}^{(i)} \xi_i, \quad (10-32)$$

где

$$S_{AB}^{(i)} = \omega_i^2 \iint_A \varphi_i(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (10-33)$$

Аналогично, изгибающий момент в сечении  $A-B$  равен

$$M_{AB} = \iint_A Z(\xi, \eta) (\eta - y) d\xi d\eta. \quad (10-34)$$

Подставляя выражение (10-30), находим

$$M_{AB} = \sum_{i=1}^n M_{AB}^{(i)} \xi_i, \quad (10-35)$$

где

$$M_{AB}^{(i)} = \omega_i^2 \int \int_A \varphi_i(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) (\eta - y) d\xi d\eta. \quad (10-36)$$

Таким образом, из формул (10-32) и (10-35) видно, что поперечная сила и момент являются линейными функциями перемещений, соответствующих нормальным формам колебаний такого же вида, как (10-28); отсюда и происходит название „метод перемещений“.

*Метод ускорений.* При другом методе подхода к решению задачи сначала определяются напряжения, которые возникли бы в системе, если бы колебания ее были исключены, а затем прибавляются дополнительные напряжения, возникающие за счет колебательного движения. Напряжения, подсчитываемые на первом этапе, при условии отсутствия колебаний, являются теми напряжениями, которые обычно определяет конструктор самолета, когда он полагает рассчитываемую им конструкцию жесткой; эти напряжения будут называться статическими напряжениями. Дополнительные напряжения, вызванные колебательным движением, обуславливают динамическую перегрузку. Этот метод (особенно подходящий к недемпфирующим системам, подверженным действию внешних сил, но пригодный и для других систем) был впервые предложен Уильямсом [10-4].

В уравнениях движения для нормальных форм колебаний влияние инерционных сил колебательного движения можно исключить, положив  $\ddot{\xi}_i = 0$ . Это дает форму кривой статических перемещений:

$$\xi_{i(\text{статич.})} = \Xi_i^D(t) / M_i \omega_i^2 \quad (i = 4, 5, \dots, n). \quad (10-37)$$

Подставив величины (10-37) в выражение (10-28), получим, что статическое напряжение в точке  $p$  будет иметь вид

$$\sigma_{p(\text{статич.})} = \sum_{i=4}^n A_p^{(i)} \left[ \frac{\Xi_i^D(t)}{M_i \omega_i^2} \right]. \quad (10-38)$$

Очевидно, что напряжения, даваемые выражением (10-38), в том случае, когда учтены все нормальные формы колебаний, т. е. когда  $n = \infty$ , равны тем напряжениям, которые обычно вычисляет авиаконструктор в предположении абсолютной жесткости конструкции.

Суммарное перемещение, соответствующее  $i$ -й форме колебаний, может быть записано в виде

$$\xi_i = \frac{\Xi_i^D(t)}{M_i \omega_i^2} - \frac{\ddot{\xi}_i}{\omega_i^2} \quad (i = 4, 5, \dots, n) \quad (10-39)$$

или, если воспользоваться соотношением (10-37), в виде

$$\xi_i = \xi_{i(\text{статич.})} - \frac{\ddot{\xi}_i}{\omega_i^2} \quad (i = 4, 5, \dots, n). \quad (10-40)$$

Подставив величины (10-40) в равенство (10-28) и воспользовавшись соотношением (10-38), получим суммарное напряжение в точке  $p$  в виде

$$\sigma_p = \sigma_{p(\text{статич.})} - \sum_{i=4}^n \frac{A_p^{(i)}}{\omega_i^2} \ddot{\xi}_i. \quad (10-41)$$

Это соотношение указывает на то, что напряжение в конструкции в любой момент времени равно разности между статическим напряжением в этот момент и добавочным напряжением, которое является линейной функцией ускорений

нормальных форм колебаний; отсюда происходит название „метод ускорений“. Необходимо отметить, что так называемое „статическое напряжение“ в действительности является псевдостатическим напряжением, поскольку оно учитывает влияние сил инерции, обусловленных ускорением твердого тела. Особенно полезным является соотношение (10-41), так как  $\sigma_p$  (статич.) представляет то напряжение, которое обычно вычисляется инженером, когда конструкция самолета считается жесткой. Таким образом, члены, пропорциональные ускорению, являются только поправками, учитывающими динамическую перегрузку.

Обобщенные ускорения можно определить из уравнений (10-6) в виде

$$\ddot{\xi}_i = \frac{1}{M_i} [\mathbb{E}_i^D - M_i \omega_i^2 \xi_i] \quad (10-42a)$$

или, если воспользоваться равенствами (10-26), в виде

$$\ddot{\xi}_i = \frac{1}{M_i} \left[ \mathbb{E}_i^D(t) - \omega_i \int_0^t \mathbb{E}_i^D(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \right]. \quad (10-42b)$$

Интегрированием по частям выражение (10-42b) можно свести к следующему:

$$\ddot{\xi}_i = \frac{1}{M_i} \left[ \mathbb{E}_i^D(0) \cos \omega_i t + \int_0^t \frac{d}{d\tau} (\mathbb{E}_i^D(\tau)) \cos \omega_i(t - \tau) d\tau \right]. \quad (10-42c)$$

Если учесть достаточное количество форм колебательного движения, то как метод перемещений, так и метод ускорений приводят к одинаковым результатам. Однако для практических расчетов можно брать только сравнительно небольшое число форм. Поэтому там, где это возможно, желательно использовать метод, обуславливающий более быструю сходимость. В уравнении (10-41) компоненты, соответствующие случаю статического приложения нагрузки, неявно содержатся все в первом члене, тогда как в уравнении (10-28) они содержатся в каждом члене ряда. Это предполагает более быструю сходимость ряда в разложении (10-41). Фактически, в большинстве практических задач, касающихся самолетных конструкций, значительными оказываются только колебания, относящиеся к двум или трем самым низким формам, и при использовании равенства (10-41) нужно удерживать только два или три члена ряда. С другой стороны, если используется соотношение (10-28), то нужно взять достаточное число членов, для того чтобы иметь уверенность, что все существенные компоненты статической деформации были учтены.

**Пример 10-2.** Вычислить переходное распределение поперечной силы и изгибающего момента в свободном однородном крыле, связанном в середине с массой фюзеляжа (см. пример 10-1). Расчет провести по методам перемещений и ускорений и сравнить результаты.

**Решение.** (а) *Метод перемещений.* Согласно методу перемещений, распределение поперечной силы <sup>1)</sup> дается следующим выражением:

$$S(\xi, t) = \sum_{i=2}^n S^{(i)}(\xi) \xi_i(t), \quad (a)$$

где  $S^{(i)}(\xi)$  — распределение поперечной силы, соответствующее единичному перемещению в  $i$ -й форме нормальных колебаний. Так как распределение нагрузки, обуславливающее различное перемещение при колебательном движении, должно быть таким же, как

<sup>1)</sup> Поперечная сила, направленная вверх, считается положительной; изгибающие моменты, под действием которых нижнее волокно растягивается, принимаются положительными.

и распределение инерционных сил, связанных со свободными колебаниями единичной амплитуды этой формы, то

$$S^{(i)}(\xi) = ml\omega_i^2 \int_{\xi}^1 \varphi_i(\lambda) d\lambda \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (b)$$

Аналогично, изгибающий момент равен

$$M(\xi, t) = \sum_{i=2}^n M^{(i)}(\xi) \xi_i(t), \quad (c)$$

где  $M^{(i)}(\xi)$  — распределение изгибающего момента соответствующее единичному перемещению в  $i$ -и форме нормальных колебаний

$$M^{(i)}(\xi) = l \int_{\xi}^1 S^{(i)}(\lambda) d\lambda \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (d)$$

Формы колебаний однородного крыла, прикрепленного к центральной массе фюзеляжа, даны в примере 3-2 в виде

$$\varphi_i(\xi) = B_i [e^{-\Omega_i \xi} + K_1^{(i)} \cos \Omega_i \xi + K_2^{(i)} \operatorname{sh} \Omega_i \xi + (1 - K_2^{(i)}) \sin \Omega_i \xi] \quad (i = 2, 3, \dots, n), \quad (e)$$

где нормирующие постоянные  $B_i$  и постоянные  $K_1^{(i)}$ ,  $K_2^{(i)}$  и  $K_3^{(i)}$  определены в примере 3-2.

Подставляя выражение (e) в равенство (b), получаем  $S^{(i)}(\xi)$  в виде

$$S^{(i)}(\xi) = ml\omega_i^2 [D_1^{(i)} + D_2^{(i)}(\xi)] \quad (i = 2, 3, \dots, n), \quad (f)$$

где

$$D_1^{(i)} = \frac{B_i}{\Omega_i} [K_1^{(i)} \sin \Omega_i + K_2^{(i)} \operatorname{ch} \Omega_i - (1 - K_2^{(i)}) \cos \Omega_i - e^{-\Omega_i}],$$

$$D_2^{(i)} = -\frac{B_i}{\Omega_i} [K_1^{(i)} \sin \Omega_i \xi + K_2^{(i)} \operatorname{ch} \Omega_i \xi - (1 - K_2^{(i)}) \cos \Omega_i \xi - e^{-\Omega_i \xi}].$$

Аналогично,  $M^{(i)}(\xi)$  можно записать в форме

$$M^{(i)}(\xi) = ml^2\omega_i^2 [D_3^{(i)} + D_4^{(i)}(\xi)] \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (g)$$

где

$$D_3^{(i)} = D_1^{(i)} - \frac{B_i}{\Omega_i^2} [K_2^{(i)} \operatorname{sh} \Omega_i - K_1^{(i)} \cos \Omega_i - (1 - K_2^{(i)}) \sin \Omega_i + e^{-\Omega_i}],$$

$$D_4^{(i)} = -D_1^{(i)} \xi - \frac{B_i}{\Omega_i^2} [K_1^{(i)} \cos \Omega_i \xi + (1 - K_2^{(i)}) \sin \Omega_i \xi - K_2^{(i)} \operatorname{sh} \Omega_i \xi - e^{-\Omega_i \xi}].$$

Распределения поперечной силы и изгибающего момента вдоль размаха крыла, обусловленные возмущающей силой  $f(t)$  в виде полуволны синуса (выражение (m), пример 10-1), согласно методу перемещений даются следующими выражениями:

$$S(\xi, t) = ml \sum_{i=2}^n \omega_i^2 [D_1^{(i)} + D_2^{(i)}(\xi)] \xi_i(t) \quad (h)$$

и

$$M(\xi, t) = ml^2 \sum_{i=2}^n \omega_i^2 [D_3^{(i)} + D_4^{(i)}(\xi)] \xi_i(t). \quad (i)$$

где  $D_1^{(i)}, \dots, D_4^{(i)}$  определены выше и  $\xi_i(t)$  определяются соотношениями

$$\xi_i(t) = \frac{C_i}{M(\omega_i^2 - \Omega^2)} \left[ \sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_i} \sin \omega_i t \right] \quad (i = 2, 3, \dots, n; 0 \leq t \leq \pi/\Omega),$$

$$\xi_i(t) = \frac{C_i}{M(\omega_i^2 - \Omega^2)} \left\{ \sin \Omega t + \sin \Omega \left( t - \frac{\pi}{\Omega} \right) - \frac{\Omega}{\omega_i} \left[ \sin \omega_i t + \sin \omega_i \left( t - \frac{\pi}{\Omega} \right) \right] \right\},$$

$$(i = 2, 3, \dots, n; t \geq \pi/\Omega). \quad (j)$$

(b) *Метод ускорений.* В методе ускорений инерционные нагрузки на балку определяются при условии жесткости конструкции и затем к ним прибавляются инерционные нагрузки, обусловленные колебательными движениями. Таким образом, согласно уравнению (10-4), можно написать выражение для поперечной силы

$$S(\xi, t) = S_{\text{статич.}}(\xi, t) - \sum_{i=2}^n \frac{S^{(i)}(\xi)}{\omega_i^2} \ddot{\xi}_i(t), \quad (k)$$

где  $S_{\text{статич.}}(\xi, t)$  — псевдостатическая поперечная сила для абсолютно жесткой балки. Легко видеть, что

$$S_{\text{статич.}}(\xi, t) = (M - ml)(1 - \xi) \ddot{\xi}_1(t), \quad (l)$$

где

$$M = M_p + ml.$$

Соответствующие выражения для изгибающего момента имеют вид

$$M(\xi, t) = M_{\text{статич.}}(\xi, t) - \sum_{i=2}^n \frac{M^{(i)}(\xi)}{\omega_i^2} \ddot{\xi}_i(t) \quad (m)$$

и

$$M_{\text{статич.}}(\xi, t) = l(M - ml) \frac{(1 - \xi)^2}{2} \ddot{\xi}_1(t). \quad (n)$$

Ускорение для первой формы колебаний равно

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1(t) &= \frac{C_1}{M} \sin \Omega t \quad (0 \leq t \leq \pi/\Omega), \\ \ddot{\xi}_1(t) &= 0 \quad (t \geq \pi/\Omega). \end{aligned} \quad (o)$$

Дифференцируя равенство (j) два раза по времени, получаем ускорения для форм колебаний выше первой:

$$\ddot{\xi}_i(t) = -\frac{C_i \Omega^2}{M(\omega_i^2 - \Omega^2)} \left[ \sin \Omega t - \frac{\omega_i}{\Omega} \sin \omega_i t \right] \quad (i = 2, 3, \dots, n; 0 \leq t \leq \pi/\Omega), \quad (p)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_i(t) &= -\frac{C_i \Omega^2}{M(\omega_i^2 - \Omega^2)} \left\{ \sin \Omega t + \sin \Omega \left( t - \frac{\pi}{\Omega} \right) - \frac{\omega_i}{\Omega} \left[ \sin \omega_i t + \sin \omega_i \left( t - \frac{\pi}{\Omega} \right) \right] \right\} \\ &\quad (i = 2, 3, \dots, n; t \geq \pi/\Omega). \end{aligned}$$

Следовательно, распределения поперечной силы и изгибающего момента, согласно методу ускорений, равны соответственно

$$S(\xi, t) = (M - ml)(1 - \xi) \ddot{\xi}_1(t) - ml \sum_{i=2}^n [D_1^{(i)} + D_2^{(i)}(\xi)] \ddot{\xi}_i(t), \quad (q)$$

$$M(\xi, t) = l(M - ml) \frac{(1 - \xi)^2}{2} \ddot{\xi}_1(t) - ml^2 \sum_{i=2}^n [D_3^{(i)} + D_4^{(i)}(\xi)] \ddot{\xi}_i(t), \quad (r)$$

где постоянные  $D_1^{(i)}, \dots, D_4^{(i)}$  определены соотношениями (f) и (g) и ускорения  $\ddot{\xi}_1(t)$  и  $\ddot{\xi}_i(t)$  — соотношениями (o) и (p).

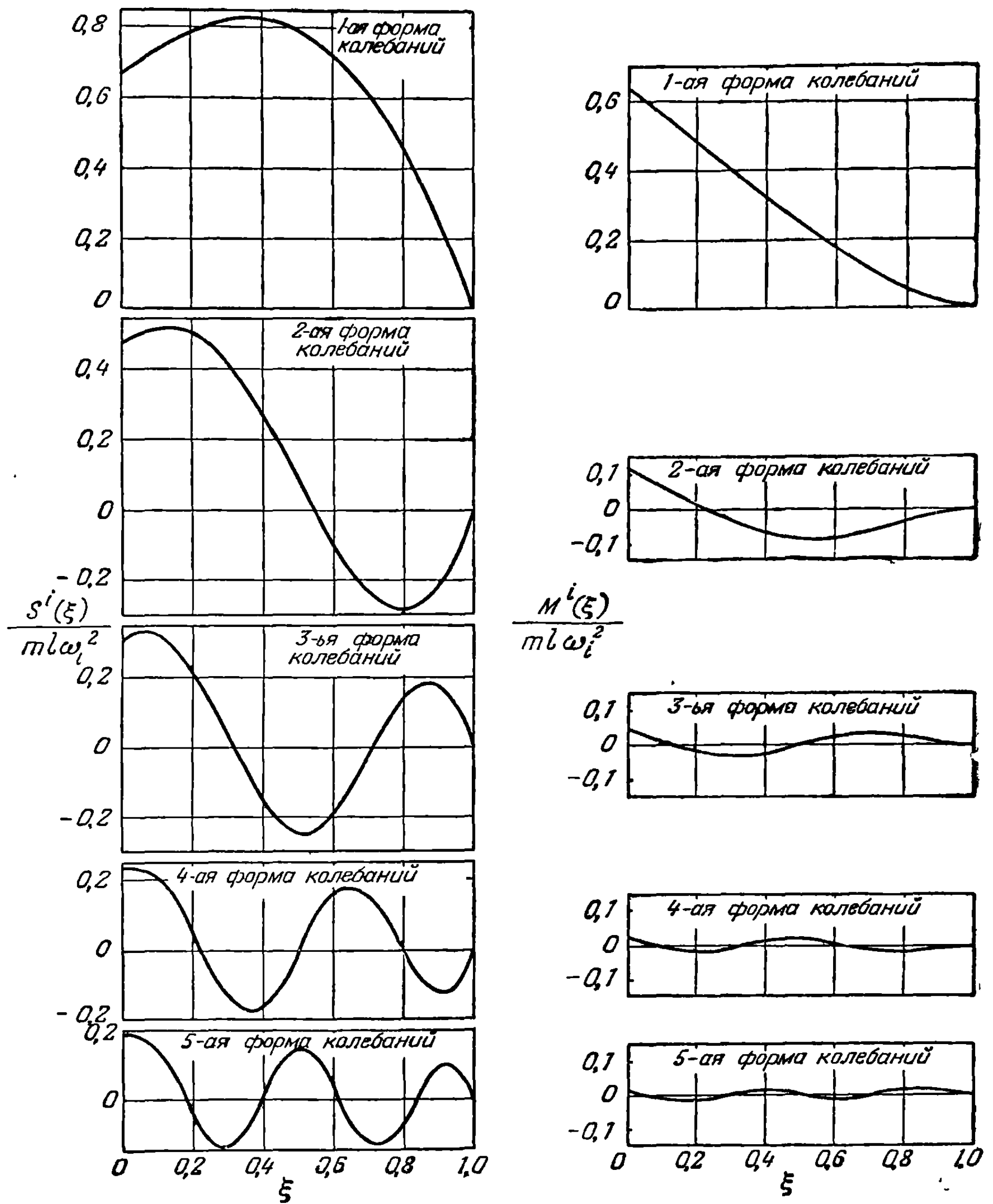
(c) *Численные расчеты и сравнение методов.* При численных расчетах первый шаг состоит в вычислении постоянных  $S^i(\xi)$  и  $M^i(\xi)$ , определяющих соответственно распределения поперечной силы и изгибающего момента  $i$ -й формы собственных колебаний. Для случая, когда массы крыла и фюзеляжа равны друг другу ( $R = 1$ ), на фиг. 10-6 приведены результаты расчета этих постоянных по формулам (l) и (g).

Результаты вычислений максимальной поперечной силы и максимального изгибающего момента по размаху крыла по обоим методам показаны на фиг. 10-7 и 10-8. Эти расчеты были выполнены для случая  $T_I/T_1 = 1/2$ , где  $T_I$  — время достижения максимального значения возмущающей функции, а  $T_1$  — период основной формы собственных колебаний.

На фиг. 10-7 приведено распределение максимальной поперечной силы и моментов времени, соответствующих возникновению максимальной поперечной силы по размаху крыла, вычисленное по двум методам. Очевидно, что метод ускорений дает значительно



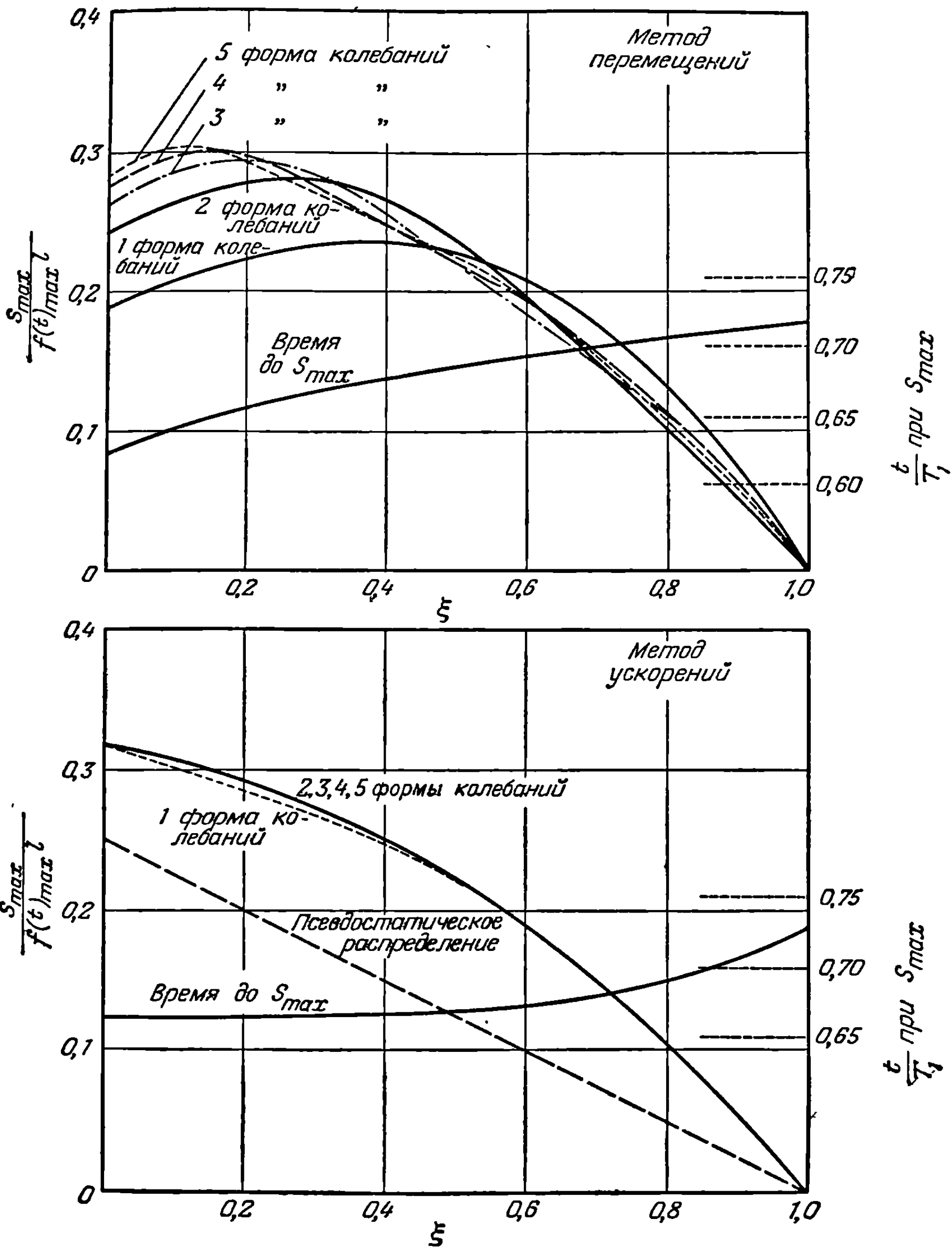
лучшую сходимость, нежели метод перемещений, особенно вблизи корня, где высшие тона, в том случае, когда используется метод перемещений, оказывают весьма существенное влияние на поперечную силу. Можно видеть, что фактически при использовании метода перемещений удовлетворительная сходимость для поперечной силы не достигается даже с пятью формами колебаний.



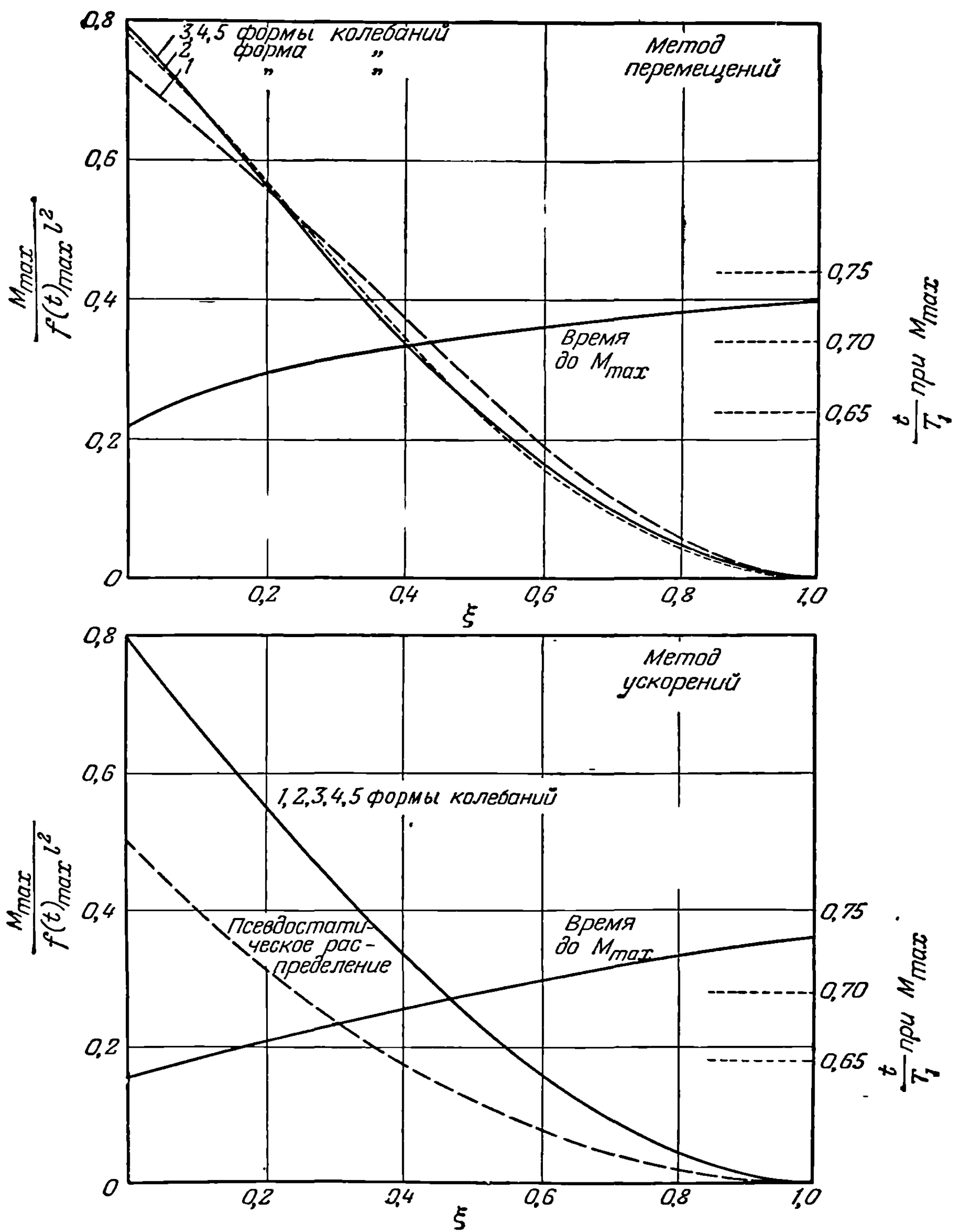
Фиг. 10-6. Распределение поперечной силы и изгибающего момента, соответствующих единичному перемещению, для различных форм колебательного движения ( $R = 1$ ).

Фиг. 10-8 показывает изменения максимального изгибающего момента и соответствующих ему моментов времени вдоль размаха, рассчитанные по обоим методам. При сравнении с полученными ранее результатами становится очевидным, что сходимость расчетов для изгибающих моментов значительно лучше, чем для поперечной силы. Метод ускорений опять дает лучшую сходимость расчетов, нежели метод перемещений.

На фиг. 10-7 и 10-8 интересно отметить то обстоятельство, что динамическая перегрузка, представляющая отношение действительного напряжения к псевдостатическому напряжению, увеличивается от корня к концу крыла. Более подробно этот показательный пример исследован в [10-5].



Фиг. 10-7. Распределение максимальной поперечной силы  
 $(T_1/T_1 = \frac{1}{2}, R = 1)$ .



Фиг. 10-8. Распределение максимального изгибающего момента  
 $(T_1/T_1 = \frac{1}{2}, R = 1)$ .

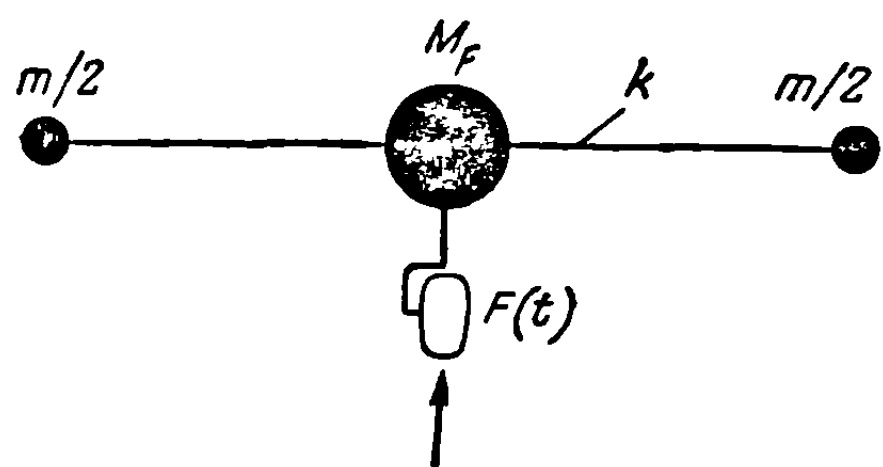
**10-4. Переходные напряжения в процессе посадки.** В процессе посадки после удара колес о землю вертикальная скорость, или скорость снижения самолета, быстро уменьшается до нуля. Этот процесс сопровождается переходом кинетической энергии снижающегося самолета во внутреннюю энергию системы амортизации, где она и рассеивается. Если самолет абсолютно „жесткий“, то амортизационные стойки должны превратить всю кинетическую энергию приземляющегося самолета в потенциальную и рассеять ее в виде тепла. Однако в случае упругого самолета часть кинетической энергии превращается в энергию деформации конструкции самолета. Доля кинетической энергии, которая таким образом отбирается от системы амортизации, является функцией характеристик частотной реакции конструкции и характеристик амортизационных стоек. Из практических соображений характеристики амортизационных стоек самолета подбираются такими, чтобы вертикальная скорость самолета уменьшалась до нуля в течение доли секунды и, следовательно, силы, прикладываемые к конструкции через амортизационную стойку, изменялись от нуля до максимального значения тоже в течение доли секунды. Это быстрое изменение скорости или такое же быстрое приложение силы возбуждает низкие тоны колебаний конструкции. В случае упругих самолетов возбуждение может быть достаточным для возникновения разрушающих напряжений. До последних лет серьезных проблем, связанных с динамическими нагрузками при посадке, не возникало. В течение же последнего времени при посадках больших сухопутных и морских самолетов имел место ряд поломок, обусловленных динамическими напряжениями, которые не были учтены при расчете. К 1946 г., главным образом благодаря расчетам Стоуэлла, Шварца и Хауболта, опубликованным в нескольких отчетах НАСА (см., например, [10-6]), Био и Бисплингхоффа [10-7], Рамберга и Макферсона [10-8] и Уильямса [10-4], конструкторы имели в своем распоряжении хорошие методы исследования этого явления. Другие исследователи, среди которых можно указать, например, на Вассермана [10-9], Кролля и Леви [10-10], Бяня и Фломенхофта [10-11], О'Брайена и Бяня [10-12] и Хауболта, обобщили с тех пор эти методы исследования и дали им экспериментальное подтверждение. Большинство методов используют метод моделей, за исключением методов, описанных Кроллем и Леви [10-10] и Хауболтом [10-13]. При таком подходе к решению задачи деформация конструкции выражается через перемещения ее отдельных точек, что исключает необходимость использования форм колебаний.

Задача об определении переходных напряжений при посадке допускает два различных метода ее решения. Для сухопутного самолета конструкция и шасси могут рассматриваться как единая система, и действительные вынужденные перемещения шасси могут быть введены в теорию. В этом случае динамические напряжения появляются вследствие внезапного приложения движущихся связей, наложенных на самолет в процессе посадки. Аналогично, для гидросамолета упругую конструкцию и окружающую корпус воду рассматривают как два взаимодействующих тела. Такой метод подхода к решению задачи приводит к присущим ему усложнениям, подобным тем, которые возникают вследствие нелинейности характеристик шасси сухопутного самолета и влияния присоединенной массы воды, окружающей корпус гидросамолета. В результате, несмотря на то, что не исключена возможность использования указанного метода с исследовательской целью при изучении специальных случаев, в практическом применении он оказывается весьма трудоемким.

Во втором методе подхода к решению задачи, при котором принимается, что напряжения в конструкции обуславливаются ударной нагрузкой при посадке, приложенной непосредственно к конструкции, допускается, что изменение ударной нагрузки во времени может быть исследовано независимо от свойств конструкции. Таким образом, задачу можно решать в два отдельных приема—исследование посадочных усилий и исследование переходной реакции в конструкции, обусловленной действием таких сил. Этот метод включает в себя допущение,

закрывающееся в том, что посадочная ударная нагрузка может быть определена таким образом, что изменение ее во времени для всех практических задач не будет зависеть от частотной характеристики конструкции. Аналитическими исследованиями и исследованиями на моделях, подобными, например, тем, которые были проведены Макферсоном, Эвансом и Леви [10-14], было подтверждено, что в случае сухопутных самолетов такой метод дает результаты, точность которых достаточна для инженерных целей. Однако в случае гидросамолетов, особенно при наличии ударного импульса от поплавка, расположенного на конце крыла, может потребоваться первый метод расчета.

При исследовании посадки обычно допускается, что в первом приближении можно пренебречь демпфированием, обусловленным аэродинамическими силами. Законность этого допущения была исследована на моделях Бянем и Фломенхофтом [10-11]. Эксперименты в аэродинамической трубе, проведенные на простой модели для испытаний на удар, показывают, что хотя аэродинамические силы и стремятся быстро погасить колебания, они оказывают мало влияния на максимум переходного напряжения первого пика. Таким образом, когда величина первого пика напряжения играет главную роль, пренебрежение аэродинамическими силами является оправданным. Однако, если важны также и последующие коле-



Фиг. 10-9. Упрощенная схема самолета.

бания, то пренебрежение аэродинамическим демпфированием может внести заметную ошибку.

Исследование задачи о посадке ведется в предположении, что ударная нагрузка не зависит от реакции конструкции и аэродинамическим демпфированием можно пренебречь. Задача, таким образом, сводится к задаче об определении реакции недемпфирующей упругой конструкции, подверженной действию внешних нагрузок с заданной зависимостью

от времени. Допускается, что при посадке скорость снижения самолета постоянна, так что в момент, предшествующий посадке, самолет под действием сил тяжести и аэродинамических сил находится в состоянии статического равновесия. В процессе удара посадочные силы, которые считаются заранее определенными, приложены непосредственно к конструкции. Получающиеся в результате расчета зависимости переходных напряжений от времени накладываются на напряжения, соответствующие начальным установившимся условиям.

Исследуем сначала случай упрощенного самолета, состоящего из фюзеляжа и двух баков на концах крыла с одной амортизационной стойкой на оси самолета (см. фиг. 10-9). Крыло с жесткостью  $k$  считается невесомым. Примем, что при соприкосновении с землей в амортизационной стойке развивается сила

$$F(t) = N_{\max} M g f(t), \quad (10-43)$$

где  $N_{\max}$  — коэффициент перегрузки при посадке, которым пользуются при обычном расчете на прочность, и  $M$  — суммарная масса

$$M = M_F + m. \quad (10-44)$$

Здесь  $M_F$  — масса фюзеляжа и  $m/2$  — масса каждого концевго бака. Легко видеть, что простая модель, изображенная на фиг. 10-9, имеет одну степень свободы движения твердого тела и одну степень движения упругого тела, которые обладают следующими свойствами:

$$\text{Форма движения } \begin{cases} \varphi^{(1)}(0) = 1, \\ \text{твердого тела} \quad \varphi^{(1)}(l) = 1 \end{cases} \quad (\omega_1 = 0), \quad (10-45)$$

$$\text{Форма движения } \begin{cases} \varphi^{(2)}(0) = -\frac{m}{M_F}, \\ \text{упругого тела} \quad \varphi^{(2)}(l) = 1 \end{cases} \quad (\omega_2 = \sqrt{kM/M_F m}). \quad (10-46)$$

Если, например, мы хотим вычислить максимальную поперечную силу как раз у внутренней стороны концевого бака, то можно применить метод ускорений<sup>1)</sup> (уравнение 10-41):

$$S(t) = S_{\text{статич.}} - \frac{S^{(2)}}{\omega_2^2} \ddot{\xi}_2(t). \quad (10-47)$$

Это уравнение переходит в следующее:

$$S(t) = -\frac{m}{2} (\ddot{\xi}_1(t) + \ddot{\xi}_2(t)). \quad (10-48)$$

В уравнениях (10-47) и (10-48) положительная поперечная сила считается направленной вверх. Ускорения от обобщенных координат определяются из соотношений

$$\ddot{\xi}_1 = N_{\text{max}} g f(t). \quad (10-49)$$

$$\ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 = -N_{\text{max}} g f(t). \quad (10-50)$$

Подставив соответственно выражения для  $\ddot{\xi}_1$  и  $\ddot{\xi}_2$  из (10-49) и (10-50) в уравнение (10-48), получим

$$S(t) = \frac{mg}{2} N_{\text{max}} \left[ -f(t) + f(0) \cos \omega_2 t + \int_0^t \frac{df(\tau)}{d\tau} \cos \omega_2 (t - \tau) d\tau \right]. \quad (10-51)$$

Считая, что сила, действующая в амортизационной стойке, имеет следующую зависимость от времени:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin \Omega t & (0 \leq t \leq \pi/\Omega), \\ f(t) &= 0 & (t \geq \pi/\Omega), \end{aligned} \quad (10-52)$$

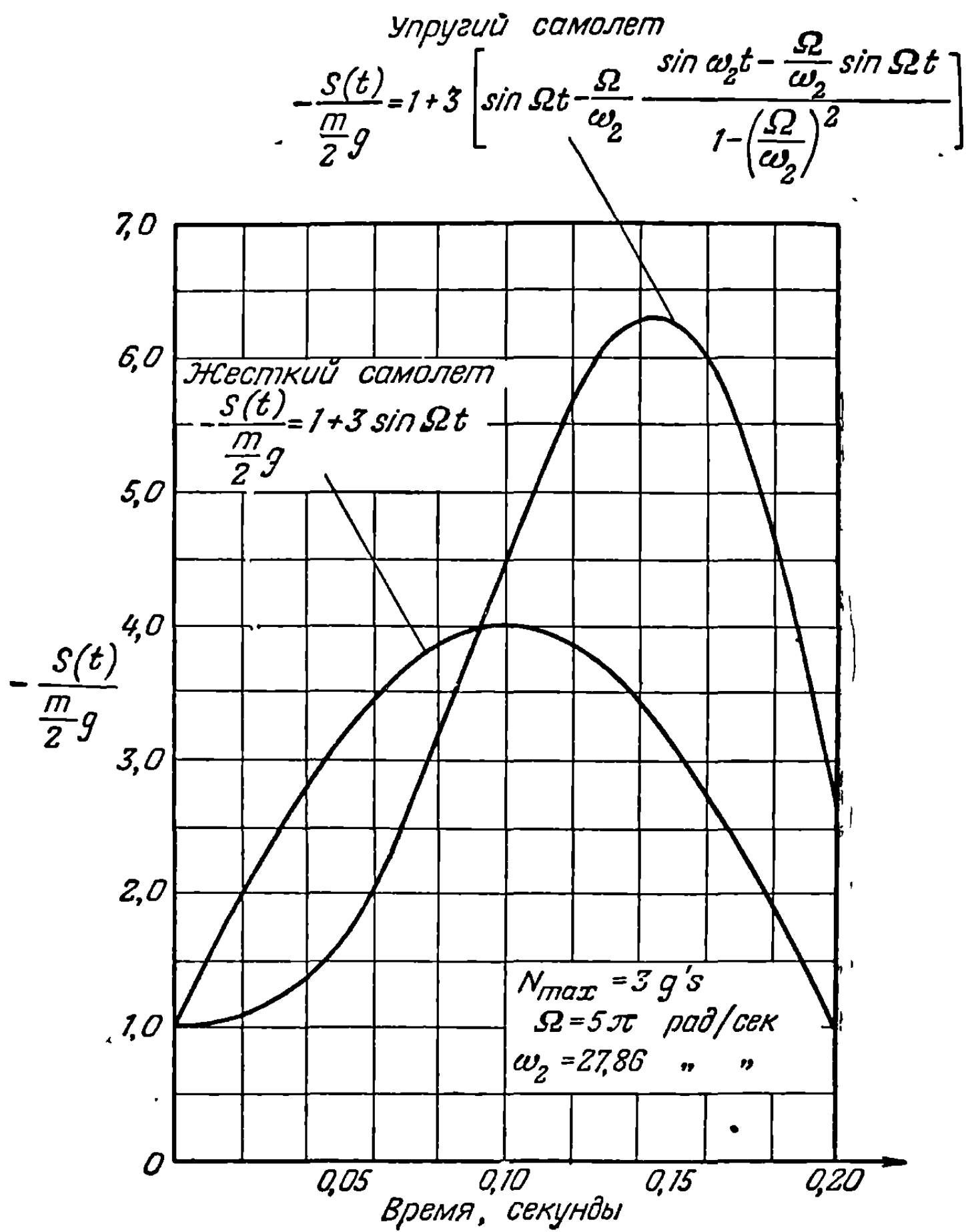
мы получаем явное выражение для поперечной силы крыла

$$S(t) = \frac{mg}{2} N_{\text{max}} \left[ -\sin \Omega t + \frac{\Omega}{\omega_2} \frac{\sin \omega_2 t - \frac{\Omega}{\omega_2} \sin \Omega t}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2} \right] \quad (0 \leq t \leq \pi/\Omega). \quad (10-53)$$

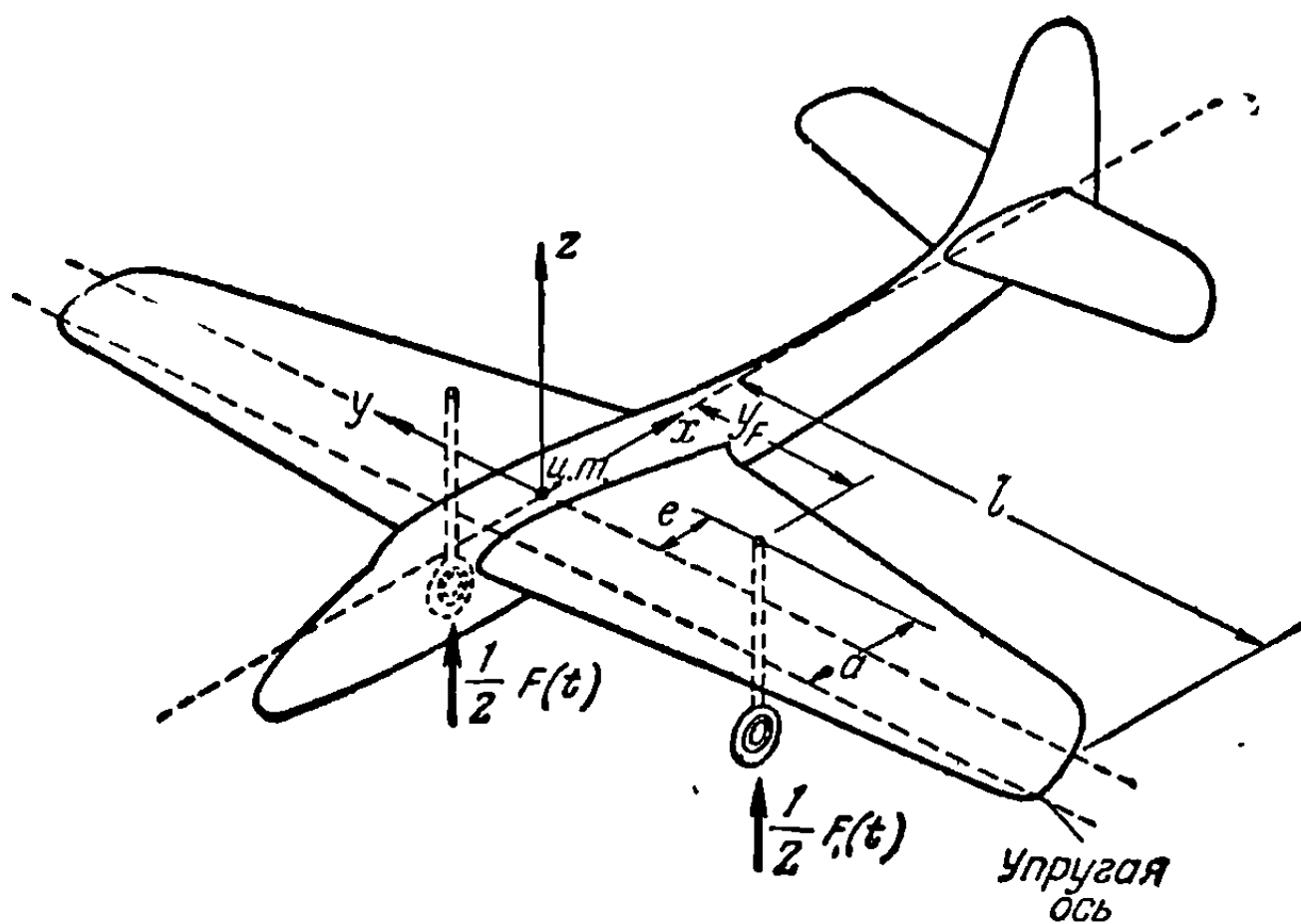
Поскольку на практике максимальная величина поперечной силы обычно достигается вблизи  $t = \pi/\Omega$ , то уравнение (10-53) достаточно для того, чтобы получить желаемый результат. На фиг. 10-10 проиллюстрирован характер зависимости, даваемый уравнением (10-53). На этой фигуре произведено сравнение поперечной силы для жесткой конструкции крыла с тем усилием, которое получается по уравнению (10-53). Влияние упругости конструкции сводится, как видно из фиг. 10-10, к увеличению максимума поперечной силы и к отдалению момента времени его появления.

Рассмотрим более общий случай симметричной посадки самолета на два колеса (см. фиг. 10-11). Допускается, что самолет в целом может свободно совершать поступательные перемещения в вертикальной плоскости и крыло самолета может как изгибаться, так и закручиваться. Задача заключается в определении зависимости от времени и распределения изгибающего и крутящего моментов, а также и поперечной силы по размаху крыла, обусловленных реакциями  $\frac{1}{2}F(t)$ , действующими на каждое колесо шасси при приземлении. Для простоты сила сопротивления здесь не учитывается. Допустим, что упругая ось крыла является прямой, перпендикулярной к плоскости симметрии самолета, и что в направлении хорды крыло абсолютно жесткое.

<sup>1)</sup> В этом примере метод ускорений и метод перемещений дают идентичные результаты. Это справедливо для любой системы, если учтены все формы ее колебаний.



Фиг. 10-10. Поперечная сила при посадке.



Фиг. 10-11. Симметричная посадка на два колеса.



Если использовать метод ускорений, то зависимость напряжения в крыле от времени может быть записана в следующей форме:

$$\sigma = B_1 f(t) + \sum_{i=2}^n B_i K_i(t), \quad (10-54)$$

где

$$F(t) = N_{\max} M g f(t), \quad (10-55)$$

$$K_i(t) = \int_0^t \cos \omega_i(t - \tau) \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (10-56)$$

$N_{\max}$  — коэффициент перегрузки при посадке, используемый в обычных расчетах на прочность,  $M$  — полная масса самолета. Коэффициенты  $B_1$  и  $B_i$  определяются характеристиками самолета. Например, в случае рассматриваемого самолета для коэффициентов  $B_1$  и  $B_i$  имеют место следующие соотношения:

Распределение поперечной силы  $\sigma = S(y, t)$  (положительное направление вверх):

$$\begin{aligned} B_1 &= -N_{\max} g \int_y^l \left\{ m + \frac{eM}{I_y} [S_\alpha - m(a - e)] \right\} dy \quad (y > y_F), \\ B_1 &= -N_{\max} g \int_y^l \left\{ m + \frac{eM}{I_y} [S_\alpha - m(a - e)] \right\} dy + \frac{1}{2} M g N_{\max} \quad (y < y_F), \\ B_i &= -N_{\max} g \varphi_F^{(i)} \int_y^l [m h^{(i)} + S_\alpha \alpha^{(i)}] dy \quad (i = 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (10-57)$$

Распределение изгибающего момента  $\sigma = M(y, t)$  (положителен, когда нижняя сторона поверхности растянута):

$$\begin{aligned} B_1 &= -N_{\max} g \int_l^y \int_l^y \left\{ m + \frac{eM}{I_y} [S_\alpha - m(a - e)] \right\} dy dy \quad (y > y_F), \\ B_1 &= \frac{1}{2} (y_F - y) M N_{\max} g - N_{\max} g \int_l^y \int_l^y \left\{ m + \frac{eM}{I_y} [S_\alpha - m(a - e)] \right\} dy dy \quad (y < y_F), \\ B_i &= -N_{\max} g \varphi_F^{(i)} \int_l^y \int_l^y (m h^{(i)} + S_\alpha \alpha^{(i)}) dy dy \quad (i = 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (10-58)$$

Распределение крутящего момента  $\sigma = T(y, t)$  (положителен при закручивании носка крыла вверх):

$$\begin{aligned} B_1 &= N_{\max} g \int_y^l \left\{ \frac{eM}{I_y} [I_{ea} - S_\alpha(a - e)] + S_\alpha \right\} dy \quad (y > y_F), \\ B_1 &= N_{\max} g \int_y^l \left\{ \frac{eM}{I_y} [I_{ea} - S_\alpha(a - e)] + S_\alpha \right\} dy - \frac{1}{2} a M N_{\max} g \quad (y < y_F), \\ B_i &= N_{\max} g \varphi_F^{(i)} \int_y^l (I_{ea} \alpha^{(i)} + S_\alpha h^{(i)}) dy \quad (i = 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (10-59)$$

В этих формулах

- $e$  — плечо момента вертикальной реакции относительно центра тяжести самолета (положительно, когда нагрузка располагается позади центра тяжести);
- $a$  — плечо момента вертикальной реакции относительно упругой оси крыла (положительно, когда нагрузка находится позади упругой оси);
- $I_y$  — момент инерции тангажа самолета относительно оси  $y$ ;
- $y_F$  — расстояние колеса шасси от оси самолета;
- $h^{(i)}(y)$  — функция, описывающая  $i$ -ю нормированную симметричную форму изгиба упругой оси;
- $\alpha^{(i)}(y)$  — функция, описывающая  $i$ -ю нормированную симметричную форму кручения крыла относительно упругой оси;
- $\varphi_F^{(i)}$  — амплитуда  $i$ -й нормированной симметричной формы в той точке крыла, где расположено колесо шасси;
- $I_{ea}(y)$  — момент инерции относительно упругой оси, приходящийся на единицу размаха крыла (положителен, когда центр тяжести расположен позади упругой оси);
- $S_a(y)$  — статическая неуравновешенность относительно упругой оси на единицу длины по размаху крыла (положительна, когда центр тяжести находится позади упругой оси);
- $m(y)$  — масса крыла, приходящаяся на единицу размаха.

Считается, что формы колебаний нормированы таким образом, что

$$M = \int_S \int [\varphi]^2 \rho dx dy = \int_{-l}^{+l} (mh^2 + I_{ea}\alpha^2 + 2S_a h\alpha) dy. \quad (10-60)$$

Когда постоянные  $B_1$  и  $B_i$  определены, задача сводится к вычислению соотношения (10-54). Для этого необходимо вычислить изменение напряжения во времени, определяемое интегралом  $K_i(t)$  (равенство 10-56). Последнее вычисление может быть довольно утомительным, если аналитическое выражение функции  $f(t)$  неизвестно, и в этом случае должно проводиться с помощью численных или графических методов.

Для того чтобы экспериментально подтвердить описанный выше метод, он был применен к модели, изображенной на фиг. 10-12. Вычисления были проведены для случая падения модели с высоты 2,5 дюйма при поступательной скорости, равной нулю; максимальная сила удара была при этом равна 45,5 фунта.

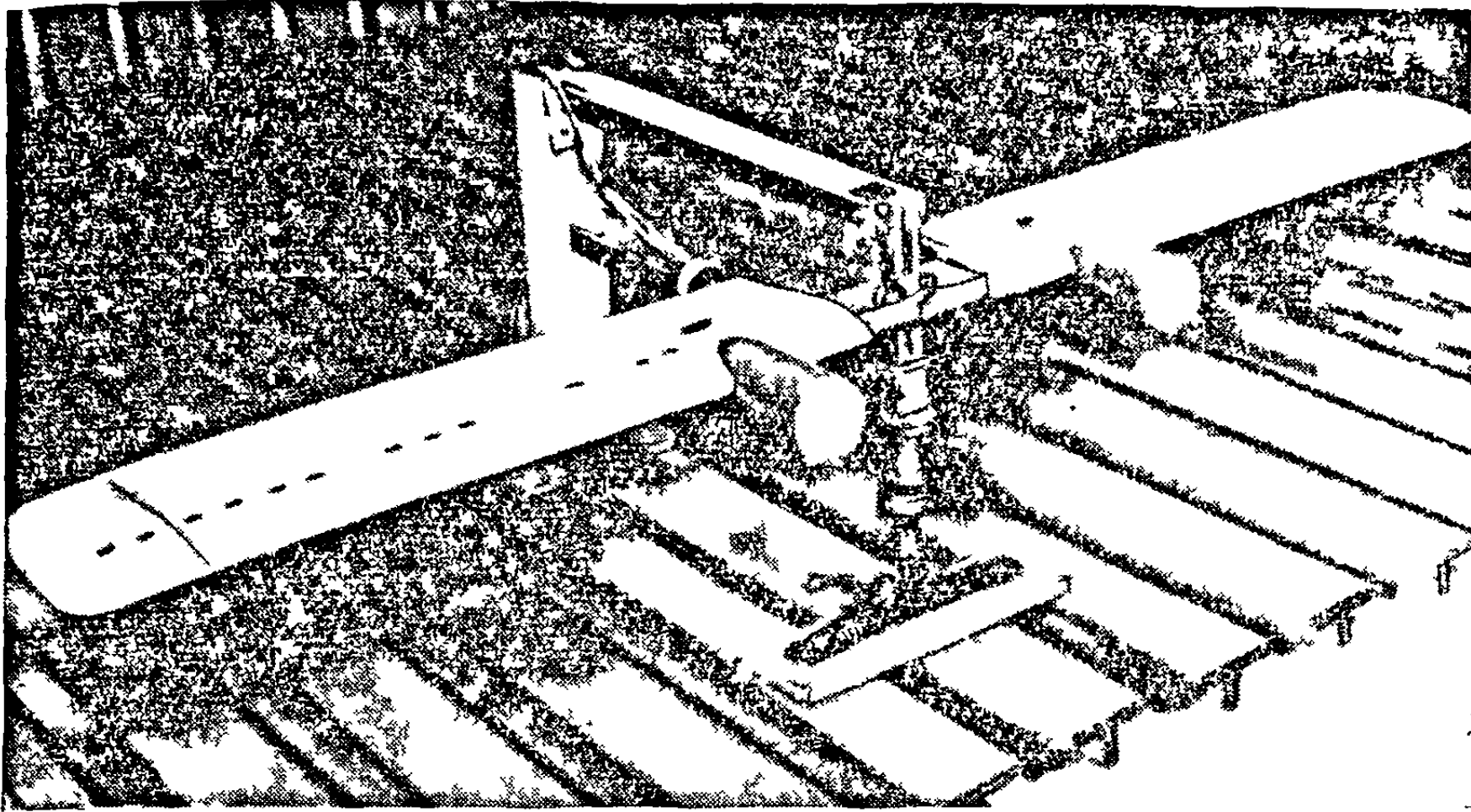
Для простоты исследования крыло было заменено динамической моделью, изображенной на фиг. 10-13. Крыло было разбито на пять секций. Считалось, что масса каждой секции по размаху, за исключением центральной, масса которой включена в массу фюзеляжа, сосредоточена в центре тяжести сечения.

В направлении хорды каждая секция заменена двумя сосредоточенными массами. Массы трех внешних секций равны и расположены по хорде на одинаковых расстояниях от центра тяжести сечения. В моторном отсеке массы распределены таким образом, что передняя масса находится в центре тяжести свинцового груза, изображающего выступающий за крыло двигатель. Поскольку этот свинцовый груз имеет упругую опору, передняя масса моторного отсека разделена на две упруго-связанные массы.

Если воспользоваться тремя функциями деформаций, то переходное напряжение в произвольной точке модели можно записать в виде

$$\sigma(t) = B_1 f(t) + B_2 K_2(t) + B_3 K_3(t) + B_4 K_4(t). \quad (10-61)$$

Для лучшего сравнения экспериментальных и теоретических результатов напряжения даны в виде зависимости от безразмерных величин. Максимальные напряжения, рассчитанные при условии подавления колебательного движения конструкции, выбраны в качестве масштабных величин. Когда результаты представлены



Фиг. 10-12. Фотография модели для испытания на удар.

в виде зависимостей от безразмерных величин, применяется следующее соотношение:

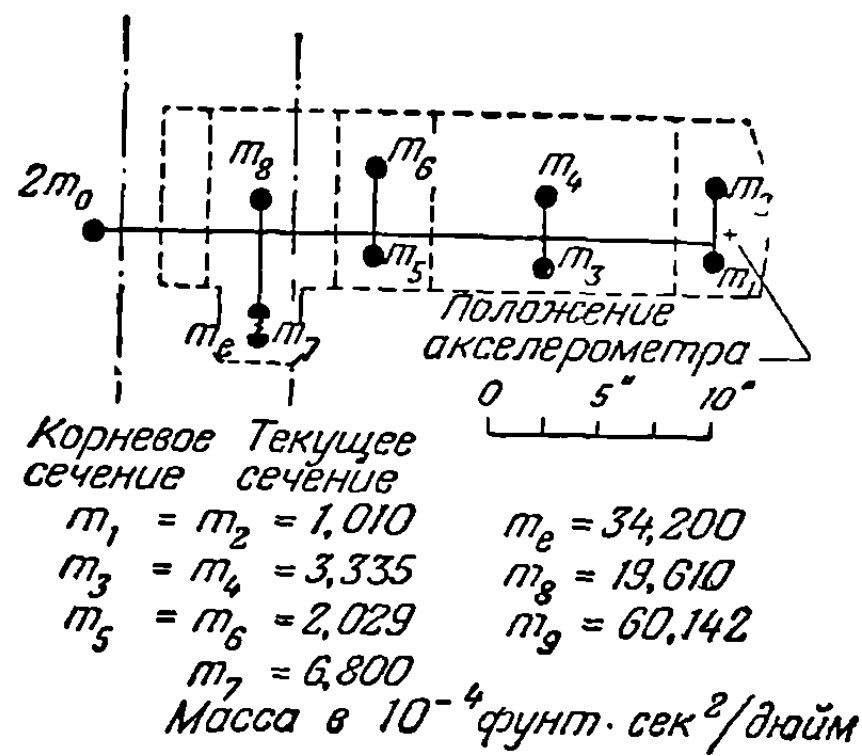
$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_{расч.}} = \frac{\sigma(t)}{B_1} = f(t) + \frac{B_2}{B_1} K_2(t) + \frac{B_3}{B_1} K_3(t) + \frac{B_4}{B_1} K_4(t). \quad (10-62)$$

Кривая изменения ударной нагрузки, использованная в этом исследовании, была взята из экспериментальных диаграмм изменения нагрузки в амортизационной стойке по времени, полученных в процессе опыта, при котором стойка падала с высоты 2,5 дюйма; при этом упругое крыло было заменено жесткой массой.

С помощью соотношения (10-62) были вычислены изгибающие моменты в корневом сечении крыла и в сечении, расположенном непосредственно за моторным отсеком с внешней его стороны (ср. фиг. 10-13). Постоянные  $B_1, B_2, B_3$  и  $B_4$  вычисляются по уравнениям (10-58) и (10-59). Вычисленные изменения безразмерных изгибающих моментов во времени для двух сечений сопоставлены на фиг. 10-14, а и 10-14, б с экспериментальными результатами. Можно заметить, что использование трех функций деформаций дает приемлемые результаты для изгибающих моментов.

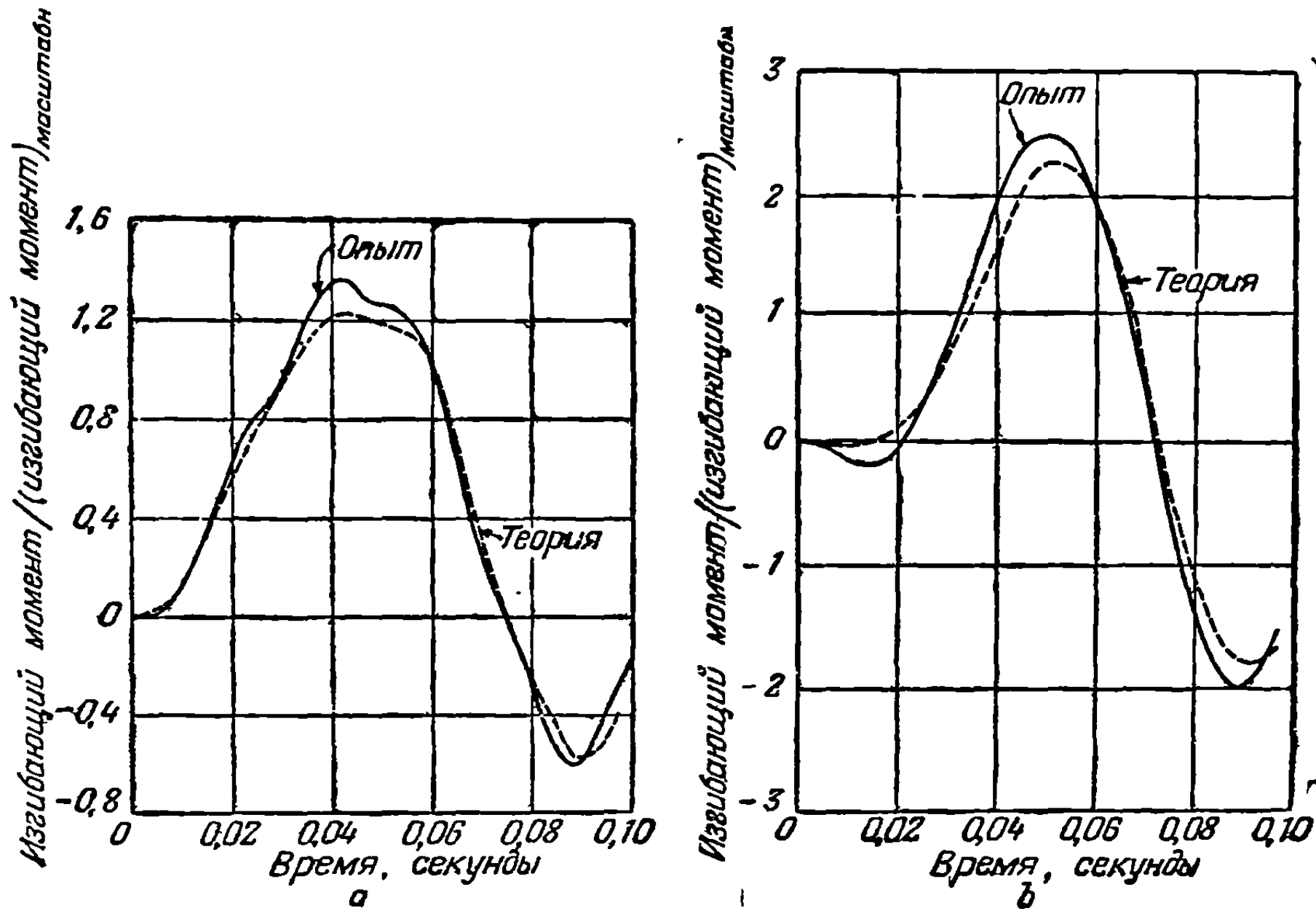
Интересно отметить, что в то время как для корня крыла динамическая перегрузка достигает приблизительно 200%, для некорневого сечения крыла она превышает 2000%. Часто в практических расчетах интересуются ускорением конца крыла. Для вычисления ускорения конца крыла в выбранной точке  $p$  на крыле можно, используя следующие постоянные:

$$B_1 = N_{max}g, \quad B_i = N_{max}g\varphi_F^{(i)}\varphi_p^{(i)}, \quad (10-63)$$



Фиг. 10-13. Динамическая модель крыла.

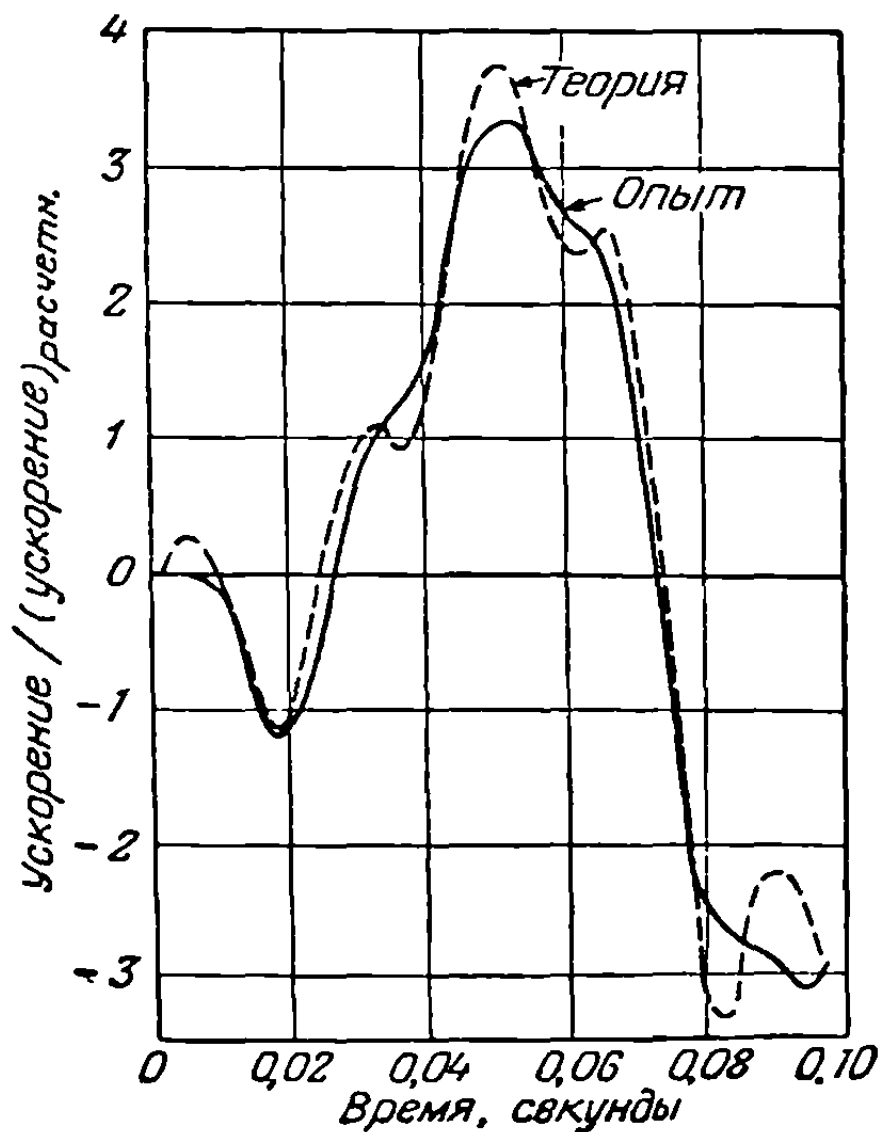
применить уравнение (10-62). При этом  $\varphi_F^{(i)}$  и  $\varphi_p^{(i)}$  представляют соответственно амплитуды  $i$ -й нормированной симметричной формы в месте расположения стойки



Фиг. 10-14.

а — изменение изгибающего момента у корня крыла с временем; б — изменение изгибающего момента для текущего сечения крыла с временем.

шасси и в точке  $p$ . На фиг. 10-15 дано сравнение теоретических результатов с экспериментальными значениями ускорения конца крыла, на фиг. 10-13 указано место крепления акселерометра на модели.



Фиг. 10-15. Изменение ускорения конца крыла с временем.

Хотя в настоящем случае совпадение результатов теории с экспериментом не такое близкое, как в случае изгибающего момента, характер экспериментальной кривой предсказан удовлетворительно. Дальнейшие подробности этого сравнения эксперимента и теории можно найти в [10-15].

**10-5. Системы с внешними силами, зависящими от движения.** Рассмотрим теперь методы определения переходных решений при наличии сил, обусловленных движением. В задачах аэроупругости эти силы возникают главным образом из аэродинамических источников. Вопрос состоит в отыскании переходных решений  $n$  совместных обыкновенных дифференциальных уравнений. Если допустить, что возмущающие обобщенные силы можно представить в форме

$$\Xi_i^D(t) = C_i f(t), \quad (10-64)$$

где  $f(t)$  — безразмерная функция, представляющая изменение возмущающей силы во времени, то дифференциальные уравнения будут иметь вид

$$M_i \ddot{\xi}_i + M_i \omega_i^2 \xi_i = \Xi_i^M(\xi_1, \dots, \xi_n; \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_n; \ddot{\xi}_1, \dots, \ddot{\xi}_n) + C_i f(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10-65)$$

Начальные условия для этих уравнений запишутся в следующей форме:

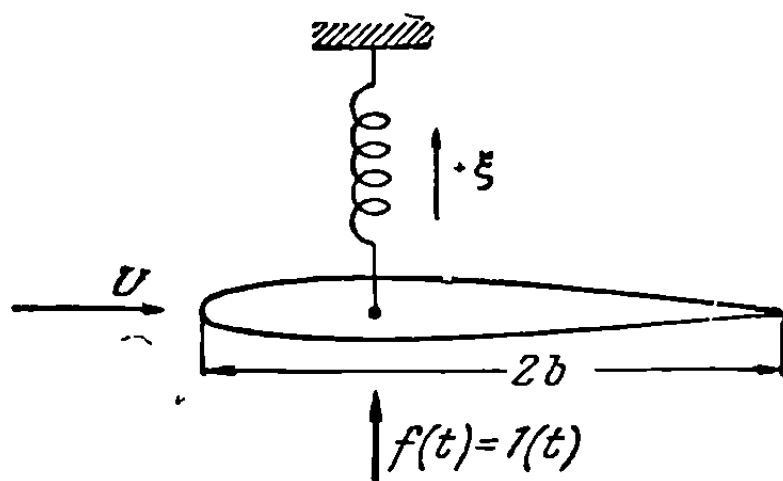
$$\xi_i(0) = \dot{\xi}_i(0) = 0.$$

(а) Решение с помощью преобразования Лапласа. Преобразование Лапласа для функции  $f(t)$  является операцией вида

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (10-66)$$

где  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  обозначает операцию преобразования (см. 10-16). Этой операцией определяется функция  $\bar{f}(p)$  переменного  $p$ . При исследовании проблем динамической реакции функция  $f(t)$  для отрицательных значений  $t$  обычно равна нулю.

Применяя это преобразование ко всем членам линейного дифференциального уравнения, получаем алгебраическое уравнение. Применяя к решению алгебраического уравнения обратную операцию, получаем окончательную форму решения исходного дифференциального уравнения. Этот метод оказывается особенно полезным при отыскании переходных решений.



Фиг. 10-16. Упруго-подвешенное крыло в воздушном потоке.

Применив преобразование Лапласа к уравнению (10-65), получим

$$M_i p^2 \bar{\xi}_i(p) + M_i \omega_i^2 \bar{\xi}_i(p) = \mathcal{L}\{\Xi_i^M(\xi_1, \dots, \xi_n; \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_n; \ddot{\xi}_1, \dots, \ddot{\xi}_n) + C_i f(t)\} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10-67)$$

где

$$\bar{\xi}_i(p) = \mathcal{L}\{\xi_i(t)\}.$$

Вследствие предположения о линейности приложенных сил уравнение (10-67) можно записать в форме

$$\{(p^2 + \omega_i^2) M_i - \bar{\Xi}_{ii}^M(p)\} \bar{\xi}_i(p) - \sum_{j \neq i}^n \bar{\Xi}_{ij}^M(p) \bar{\xi}_j(p) = C_i \bar{f}(p) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10-68)$$

где  $\bar{\Xi}_{ii}^M \bar{\xi}_i(p)$  — преобразованные компоненты обобщенной силы  $\Xi_i^M$ , обусловленные движением в направлении координаты  $\xi_i$ ;  $\bar{\Xi}_{ij}^M(p) \bar{\xi}_j(p)$  ( $j \neq i$ ) — преобразованные компоненты обобщенной силы  $\Xi_i^M$ , обусловленные движением в направлении координат, отличных от  $\xi_i$ ;  $\bar{f}(p)$  — образ функции  $f(t)$ .

Уравнения (10-68) представляют собой систему  $n$  совместных линий алгебраических уравнений относительно неизвестных функций  $\bar{\xi}_1(p), \dots, \bar{\xi}_n(p)$ :

$$\begin{aligned} C_{11} \bar{\xi}_1 + C_{12} \bar{\xi}_2 + \dots + C_{1n} \bar{\xi}_n &= C_1 \bar{f}, \\ C_{21} \bar{\xi}_1 + C_{22} \bar{\xi}_2 + \dots + C_{2n} \bar{\xi}_n &= C_2 \bar{f}, \\ \dots & \\ C_{n1} \bar{\xi}_1 + C_{n2} \bar{\xi}_2 + \dots + C_{nn} \bar{\xi}_n &= C_n \bar{f}. \end{aligned} \quad (10-69)$$

Решая уравнения (10-69) относительно  $\xi_i(p)$ , получаем

$$\bar{\xi}_i(p) = \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}(p)}{N(p)} C_j \bar{f}(p) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10-70)$$

где  $N(p)$  — детерминант матрицы коэффициентов  $\bar{\xi}_1(p), \dots, \bar{\xi}_n(p)$  и  $a_{ij}(p)$  — алгебраическое дополнение элемента  $C_{ij}$ . Равенство (10-70) может быть записано в виде

$$\bar{\xi}_i(p) = \frac{M_i(p)}{N(p)} \bar{f}(p) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10-71)$$

где

$$M_i(p) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(p) C_j.$$

В процессе вычисления реакции  $\xi_i(t)$  нужно произвести обратное преобразование уравнения (10-71). Это достигается с помощью применения свертывающего интеграла [10-16]

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \bar{g}(p) \bar{h}(p) \} = \int_0^t g(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (10-72)$$

к равенству (10-71), что дает

$$\xi_i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{M_i(p)}{N(p)} \bar{f}(p) \right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{M_i(p)}{N(p)} \right\} f(t - \tau) d\tau \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10-73)$$

Так как элементы  $C_{ij}$  в детерминанте  $N(p)$  являются алгебраическими функциями  $p$ , детерминант может быть представлен в виде полинома, который можно разбить на множители

$$N(p) = \prod_i^m (p - p_i), \quad (10-74)$$

где  $m$  — число корней полинома.

Обратное преобразование функции  $M_i(p)/N(p)$  достигается с помощью разложения Хэвисайда на частные дроби [10-16]:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{M_i(p)}{N(p)} \right\} = \sum_{k=1}^m \frac{M_i(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k \tau} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10-75)$$

где

$$N'(p_k) = \left[ \frac{d}{dp} N(p) \right]_{p=p_k}.$$

Подставляя соотношение (10-75) в (10-73), получаем окончательное выражение для  $i$ -й нормальной координаты

$$\xi_i(t) = \sum_{k=1}^m \frac{M_i(p_k)}{N'(p_k)} \int_0^t f(t - \tau) e^{p_k \tau} d\tau \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10-76)$$

Для того чтобы получить это выражение, необходимо было разложить на множители знаменатель полинома  $N(p)$ . Эта особенность метода получения решения с помощью преобразования Лапласа является одной из самых неприятных, так как разложение на множители полинома высокой степени, имеющего комплексные корни, представляет чрезвычайно трудную задачу.

**Пример 10-3.** Применяя преобразование Лапласа, определить переходную реакцию тонкого жесткого крыла, подвешенного на пружине в потоке несжимаемой жидкости, движущейся со скоростью  $U$  (см. фиг. 10-16). Принять, что система возмущается единичной ступенчатой силой  $1(t)$ . Крыло может совершать вертикальные поступательные перемещения.

Решение. Уравнение движения системы с одной степенью свободы имеет вид

$$M\ddot{\xi} + M\omega^2\xi = \Xi^M(\dot{\xi}) + 1(t), \quad (a)$$

где  $M$  — масса профиля и  $\omega$  — собственная частота колебаний профиля при отсутствии аэродинамических сил. Применив квазистационарную аэродинамическую теорию, получим

$$\Xi^M = -\pi\rho S U \dot{\xi}, \quad (b)$$

где  $S$  — площадь жесткого крыла. Подставляя (b) в уравнение (a), имеем

$$M\ddot{\xi} + \pi\rho S U \dot{\xi} + M\omega^2\xi = 1(t). \quad (c)$$

От переменной  $t$  удобно перейти к безразмерной независимой переменной

$$s = \frac{Ut}{b}, \quad (d)$$

где  $b$  — полухорда крыла. Переменная  $s$  представляет собой путь, пройденный частицами движущегося воздуха, измеренный в полухордах. Если ввести независимую переменную  $s$  в уравнение движения, то последнее примет следующий вид:

$$\lambda\xi''(s) + \xi'(s) + \lambda\Omega^2\xi = \frac{b1(s)}{\pi\rho S U^2}, \quad (e)$$

где  $\lambda = M/\pi\rho S b$  — безразмерная величина, называемая параметром массы крыла, и  $\Omega = \omega b/U$  — безразмерная приведенная частота системы.

Перейдем теперь в уравнении (e) от зависимой переменной  $\xi(s)$  к переменной  $\zeta(s)$ . Последняя определяется как отношение действительного прогиба к статическому:

$$\zeta(s) = \frac{\xi(s)}{\xi_{\text{статич.}}} = \frac{\xi(s)}{1/M\omega^2}. \quad (f)$$

Уравнение (e) переходит в следующее:

$$\zeta''(s) + \frac{1}{\lambda}\zeta'(s) + \Omega^2\zeta(s) = \Omega^2 1(s). \quad (g)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (g), получаем

$$p^2\bar{\zeta}(p) + \frac{1}{\lambda}p\bar{\zeta}(p) + \Omega^2\bar{\zeta}(p) = \frac{\Omega^2}{p}, \quad (h)$$

где

$$\mathfrak{L}\{1(s)\} = 1/p.$$

Решая относительно  $\bar{\zeta}(p)$ , находим

$$\bar{\zeta}(p) = \frac{\Omega^2}{p[p^2 + (p/\lambda) + \Omega^2]}. \quad (i)$$

Окончательный результат получим, применив к равенству (i) обратное преобразование. Знаменатель дроби в правой части этого равенства можно разложить на множители:

$$p[p^2 + (p/\lambda) + \Omega^2] = (p - 0)(p - p_1)(p - p_2), \quad (j)$$

где

$$p_1 = -\frac{1}{2\lambda} + \sqrt{\frac{1}{4\lambda^2} - \Omega^2}, \quad p_2 = -\frac{1}{2\lambda} - \sqrt{\frac{1}{4\lambda^2} - \Omega^2}. \quad (k)$$

Применив разложение Хэвисайда на частные дроби, получим

$$\zeta(s) = \Omega^2 \left( \frac{1}{\Omega^2} + C_1 e^{p_1 s} + C_2 e^{p_2 s} \right), \quad (l)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{3p_1^2 + \frac{2}{\lambda}p_1 + \Omega^2}, \quad C_2 = \frac{1}{3p_2^2 + \frac{2}{\lambda}p_2 + \Omega^2}.$$

Если допустить, что  $\Omega^2 > 1/4\lambda^2$ , то  $p_1$  и  $p_2$  будут комплексными сопряженными величинами и уравнение (b) может быть записано в форме

$$\zeta(s) = 1 + \Omega^2 e^{-s/2\lambda} \left[ (C_1 + C_2) \cos \left( \sqrt{\Omega^2 - \frac{1}{4\lambda^2}} s \right) + (C_1 - C_2) \sin \left( \sqrt{\Omega^2 - \frac{1}{4\lambda^2}} s \right) \right]. \quad (m)$$



Реакция системы является функцией двух безразмерных параметров  $\lambda$  и  $\Omega$ . Если принять, что  $\lambda = \frac{1}{4}$  и  $\Omega = 20$ , то из уравнения (m) получим  $\zeta(s)$  в виде

$$\zeta(s) = 1 - e^{-2s} [\cos(19,899s) + 0,1005 \sin(19,899s)]. \quad (n)$$

(b) *Решение с помощью механической проводимости или с помощью метода частотной реакции.* Термином *проводимость* в электротехнике обозначают отношение амплитуды тока в контуре к амплитуде приложенного напряжения, которое изменяется во времени по закону синуса. Аналогично мы можем определить *механическую проводимость* как отношение амплитуды перемещения механической системы к амплитуде синусоидально изменяющейся силы, обуславливающей перемещение. Механическая проводимость является вообще функцией частоты приложенной силы.

В случае консервативных или недемпфирующих систем реакция всегда находится либо в фазе с приложенной силой, либо сдвинута по фазе относительно этой силы на  $180^\circ$ . В случае систем с демпфирующими силами реакция обычно не совпадает по фазе с приложенной силой. Для того чтобы установить правильное соотношение между реакцией и возбуждающей функцией, механическая проводимость должна складываться из двух величин: отношения амплитуд и запаздывания по фазе реакции относительно возбуждающей функции.

Исчерпывающее объяснение понятия механической проводимости и его применения при решении задач о колебаниях дано Дунканом [10-17]. Применение термина механической проводимости в том смысле, в котором он здесь используется, не ограничивается возбуждающей функцией и соответственно реакцией в форме силы и перемещения. Предполагается, что его можно применить к любому роду реакции. Возбуждающая функция, например, может быть синусоидальной силой, приложенной к орудийной установке, синусоидальным картиной распределения скорости порыва ветра или синусоидальным движением рулевой поверхности, а реакцией может быть перемещение, соответствующее нормальной форме колебаний, или напряжение в некоторой точке крыла. Понятие механической проводимости в той форме, в которой оно здесь используется, идентично методу *частотной реакции*, широко применяемому в автоматическом регулировании [10-18].

Допустим, что безразмерная функция  $f(t)$ , дающая изменение возмущающей силы во времени, имеет вид

$$f(t) = e^{i\omega t}. \quad (10-77)$$

Тогда уравнение (10-65) может быть записано в форме

$$M_r \ddot{\xi}_r + M_r \omega_r^2 \xi_r = E_r^M(\xi_1, \dots, \xi_n; \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_n; \ddot{\xi}_1, \dots, \ddot{\xi}_n) + C_r e^{i\omega t} \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (10-78)$$

Решения уравнения (10-78) даются выражениями вида

$$\xi_r(t) = H_r(i\omega) e^{i\omega t} \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (10-79)$$

где  $H_r(i\omega)$  — комплексные величины, называемые *механическими проводимостями* системы. Их обратные величины являются комплексными импедансами  $Z_r(i\omega)$ , т. е.

$$Z_r(i\omega) = \frac{1}{H_r(i\omega)}. \quad (10-80)$$

Подставляя выражения (10-79) в уравнение (10-78), получаем

$$[(\omega_r^2 - \omega^2) M_r - E_{rr}^M(i\omega)] H_r(i\omega) + \sum_{s \neq r} E_{rs}^M(i\omega) H_s(i\omega) = C_r \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (10-81)$$

Величины  $\Xi_{rr}^M(i\omega)$  и  $\Xi_{rs}^M(i\omega)$  аналогичны таким же величинам в решении с помощью преобразования Лапласа (уравнение 10-68), за исключением того обстоятельства, что теперь они являются функциями возбуждающей частоты  $\omega$ . Механические проводимости определяются из решения системы  $n$  совместных уравнений (10-81):

$$H_r(i\omega) = \sum_{s=1}^n \frac{a_{rs}(i\omega)}{\Delta(i\omega)} C_s \quad (r=1, 2, \dots, n), \quad (10-82)$$

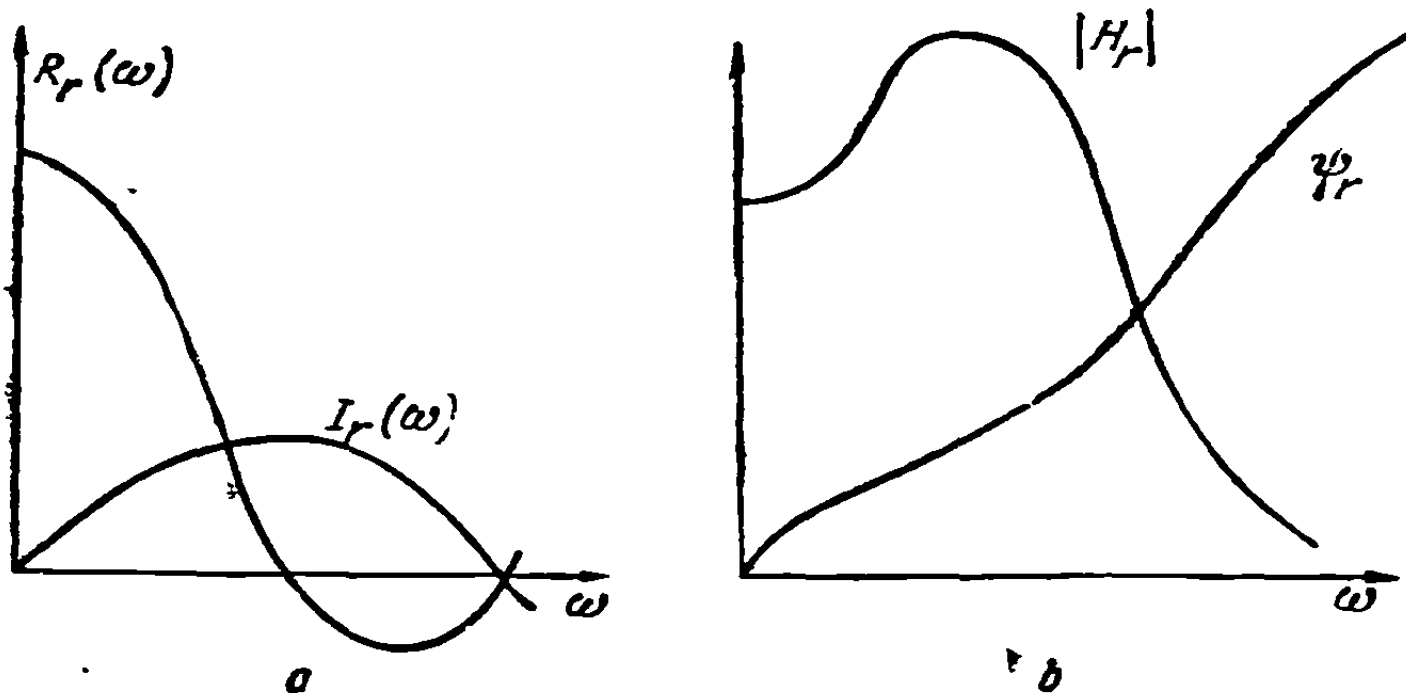
где  $\Delta(i\omega)$  — детерминант, составленный из коэффициентов при  $H_1(i\omega), \dots, H_n(i\omega)$ , и  $a_{rs}(i\omega)$  — алгебраическое дополнение члена  $\Delta(i\omega)$  в  $r$ -й строке и  $s$ -м столбце. Равенство (10-82) удобно записать в форме

$$H_r(i\omega) = \frac{A_r(i\omega)}{\Delta(i\omega)} \quad (r=1, 2, \dots, n), \quad (10-83)$$

где

$$A_r(i\omega) = \sum_{s=1}^n a_{rs}(i\omega) C_s.$$

Обычно в практических задачах аэроупругости невозможно представить  $\Xi_{rr}^M(i\omega)$  и  $\Xi_{rs}^M(i\omega)$  в виде явных функций. Однако если частота возбуждения принимает некоторое численное значение  $\omega_k$ , уравнения (10-81) переходят в систему совместных линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами



Фиг. 10-17. Графическое представление функции проводимости.

и механические проводимости  $H_1(i\omega)_k, H_2(i\omega)_k, \dots, H_n(i\omega)_k$  для этой частоты можно получить с помощью численного решения этих уравнений. Решая совместные уравнения для различных значений  $\omega$ , можно построить кривые, подобные тем, которые изображены на фиг. 10-17. На фиг. 10-17 функция проводимости представлена графически двумя способами; при этом использовано следующее обозначение:

$$H_r(i\omega) = R_r(\omega) + iI_r(\omega) = |H_r| e^{i\psi_r}. \quad (10-84)$$

Действительная и мнимая части  $H_r(i\omega)$ , обозначенные соответственно через  $R_r(\omega)$  и  $I_r(\omega)$ , могут быть представлены в виде зависимостей от  $\omega$  (см. фиг. 10-17, а); амплитуда и фаза, обозначенные соответственно через  $|H_r|$  и  $\psi_r$ , могут быть представлены в виде зависимостей, изображенных на фиг. 10-17, б. Если система обладает  $n$  степенями свободы, то имеется  $n$  кривых такого типа, как на фиг. 10-17.

Рассмотрим теперь метод определения реакции на произвольное возмущение  $f(t)$ , если механические проводимости системы известны. В принципе можно

использовать комплексную форму интеграла Фурье, выведенную в приложении С,

$$f(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} G(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (10-85)$$

$$G(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} f(\lambda) e^{-i\omega\lambda} d\lambda. \quad (10-86)$$

Сила  $f(t)$  в равенстве (10-85) образуется с помощью наложения гармонических функций времени. Величина  $G(i\omega)$ , определяемая соотношением (10-86), описывает спектральное распределение по частоте гармонических компонентов функции  $f(t)$ . В приложении С показано, что если силу  $f(t)$  можно представить в форме (10-85), т. е. если интеграл выражения (10-86) сходится, то реакция на  $f(t)$  может быть выражена в виде

$$\xi_r(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} H_r(i\omega) G(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (10-87)$$

Интеграл с бесконечными пределами в соотношении (10-87) представляет явное выражение реакции на произвольную возбуждающую функцию  $f(t)$  в том случае, если интеграл в равенстве (10-86) сходится.

Когда проводимость не может быть выражена в виде простой аналитической функции частоты, вычисление выражения (10-87) оказывается трудно выполнимым. Было найдено (10-18), что в подобных случаях для представления переходных проводимостей в зависимости от функций проводимости удобнее вывести приближенное выражение и затем для определения реакции на произвольную возбуждающую функцию использовать интеграл Дюамеля. Интегральная формула Бромвича, выведенная в приложении С (формула 44), дает выражение для определения переходной проводимости в явном виде в том случае, когда функция проводимости задана:

$$A_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} \frac{H_r(i\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega; \quad (10-88)$$

при этом предполагается, что путь интегрирования около начала координат идет по бесконечно малой полуокружности, лежащей ниже начала координат. При вычислении интеграла следует соблюдать осторожность, так как в общем случае подинтегральное выражение в начале координат имеет особую точку — полюс. Поэтому, когда  $\omega = 0$ , подинтегральное выражение становится бесконечным и, если  $H_r(0)$  не равно нулю, интеграл не будет сходиться. Эту трудность можно обойти, если переписать равенство (10-88) в форме

$$A_r(t) = \frac{H_r(0)}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} \frac{H_r(i\omega) - H_r(0)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad (10-89)$$

где  $H_r(0)$  — значение функции проводимости  $H_r(i\omega)$ , соответствующее  $\omega = 0$ . Применяя теорему о вычетах ([10-1] и приложение С), можно показать, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} d\omega = 1(t), \quad (10-90)$$

и равенство (10-89) переходит в следующее:

$$A_r(t) = H_r(0) 1(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} \frac{H_r(i\omega) - H_r(0)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega. \quad (10-91)$$

Равенство (10-91) с помощью подстановок

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \quad (10-92)$$

$$H_r(i\omega) = R_r(\omega) + iI_r(\omega) \quad (10-93)$$

может быть записано в действительной форме:

$$A_r(t) = R_r(0) 1(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} \left( \frac{R_r(\omega) - R_r(0)}{\omega} \sin \omega t + \frac{I_r(\omega)}{\omega} \cos \omega t \right) d\omega - \\ - \frac{i}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} \left( \frac{R_r(\omega) - R_r(0)}{\omega} \cos \omega t - \frac{I_r(\omega)}{\omega} \sin \omega t \right) d\omega, \quad (10-94)$$

где принято  $I_r(0) = 0$ . Последнее допущение, требующее только, чтобы при статическом приложении возмущающей силы  $f(t)$  запаздывание было равно нулю, имеет законную силу в аэроупругих системах.

Так как  $A_r(t)$  действительно, то последний член в равенстве (10-94) должен быть равен нулю, и так как

$$\int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi & \text{для } t > 0, \\ -\pi & \text{для } t < 0, \end{cases} \quad (10-95)$$

то окончательно получим

$$A_r(t) = \frac{1}{2} R_r(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} \left( \frac{R_r(\omega)}{\omega} \sin \omega t + \frac{I_r(\omega)}{\omega} \cos \omega t \right) d\omega. \quad (10-96)$$

Формула (10-96) дает явное выражение для вычисления переходной проводимости  $A_r(t)$ , если действительная и мнимая части функции механической проводимости известны. Если использовать свойство четности функции  $R_r(\omega)$  ( $R_r(-\omega) = R_r(\omega)$ ) и нечетности функции  $I_r(\omega)$  ( $I_r(-\omega) = -I_r(\omega)$ ) (в аэроупругих системах эти условия обычно выполняются), то эту формулу можно привести к более простому виду:

$$A_r(t) = \frac{1}{2} R_r(0) + \frac{1}{\pi} \int_{\omega=0}^{\omega=\infty} \left( \frac{R_r(\omega)}{\omega} \sin \omega t + \frac{I_r(\omega)}{\omega} \cos \omega t \right) d\omega. \quad (10-97)$$

Поскольку  $H_r(\omega)$  и  $I_r(\omega)$  редко встречаются в виде явных аналитических выражений и обычно задаются в виде кривых (см. фиг. 10-17), то для практических приложений полезно представить интеграл выражения (10-97) в виде суммы

$$A_r(t) = \frac{1}{2} R_r(0) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n} [R_r(n\omega_0) \sin n\omega_0 t + I_r(n\omega_0) \cos n\omega_0 t]. \quad (10-98)$$

Частота  $\omega_0$  выбирается произвольно, с тем чтобы получить удовлетворительную сходимость. Критерием сходимости является стремление  $R_r(n\omega_0)$  и  $I_r(n\omega_0)$  к нулю для больших значений  $n$ . Для этого необходимо, чтобы система была демпфирующей и, например, для слабо демпфирующих систем нужно выбирать малое значение  $\omega_0$ . Вблизи скорости флаттера этот численный метод расчета оказывается неудовлетворительным. Идентичный результат получается при определении реакции системы на квадратную волну с периодом  $T = 2\pi/\omega_0$  [10-15]. Очевидно, что реакция на квадратную волну может представлять переходную проводимость только тогда, когда система является демпфирующей. Когда проводимость найдена, то, применяя интеграл Дюамеля, можно вычислить реакцию на произвольное возмущение.

(с) *Решение с помощью конечных разностей.* Теория конечных разностей дает полезный численный способ для получения переходных решений дифференциальных уравнений движения аэроупругих систем. Такой подход оказывается особенно полезным в задачах неустановившегося движения, где желательно определить первое максимальное значение. Подобные задачи обычны для аэроупругости. Основной задачей подобного рода является задача о действии порыва ветра, рассматриваемая в следующем пункте. Техника применения конечных разностей изменяется вместе с типом задачи, и обычно для того, чтобы получить удовлетворительное решение, требуется некоторая изобретательность.

В настоящем пункте мы не будем пытаться описывать общую схему, применимую ко всем неустановившимся задачам аэроупругости, а разберем применение метода на простой задаче. Для простоты рассмотрим частный случай, когда можно пренебречь взаимодействием форм, обусловленным силами, вызванным движением, и когда силы, обусловленные движением, являются просто силами вязкого демпфирования, т. е.

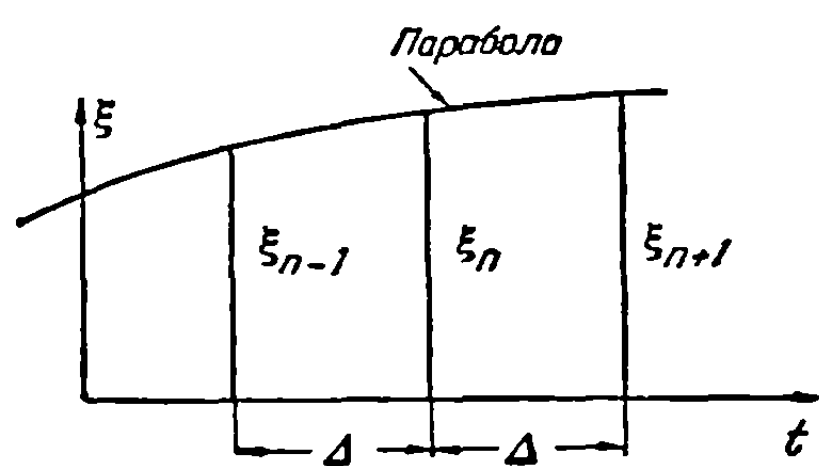
$$\Xi_r^M = -\beta \dot{\xi}_r. \quad (10-99)$$

Таким образом, уравнение движения для  $r$ -й нормальной формы имеет вид

$$M\ddot{\xi} + \beta\dot{\xi} + M\omega^2\xi = \Xi^D(t), \quad (10-100)$$

где индекс  $r$  опущен. Уравнение (10-100) идентично уравнению движения массы, подвешенной на пружине и подверженной действию возмущающей силы с произвольной зависимостью от времени при наличии сил вязкого трения.

Рассмотрим сначала, как уравнение (10-100) может быть преобразовано от дифференциальной формы к уравнению в конечных разностях. Способ такого



Фиг. 10-18. Конечноразностная аппроксимация с помощью параболы.

преобразования состоит в замене производных по времени в дифференциальном уравнении подходящими разностными соотношениями и в последовательном решении получающегося в результате алгебраического уравнения относительно реакции. Допустим, что функцию  $\xi(t)$  нужно определить для равноотстоящих моментов времени  $t$  (см. фиг. 10-18). Обозначим через  $\Delta$  интервал между двумя соседними моментами времени. В технических приложениях при отыскании решения методом конечных разностей часто принимается, что  $\xi(t)$  можно

аппроксимировать с помощью параболы, проходящей через концы трех соседних ординат. Если допустить, как показано на фиг. 10-18, что точки с ординатами  $\xi_{n-1}$ ,  $\xi_n$  и  $\xi_{n+1}$  связаны дугами параболы, то можно показать (см., например, [10-19]), что первая и вторая производные по времени от  $\xi_n$  равны

$$\dot{\xi}_n = \frac{\xi_{n+1} - \xi_{n-1}}{2\Delta}, \quad (10-101)$$

$$\ddot{\xi}_n = \frac{\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}}{\Delta^2}. \quad (10-102)$$

Эти выражения, дающие производные  $n$ -й ординаты в зависимости от  $(n-1)$ -й и  $(n+1)$ -й ординат, дают удовлетворительные результаты при решении многих инженерных задач. Однако для задач аэроупругости вообще, а для задачи о воздействии порыва ветра в частности, Хауболтом было показано [10-19], что необходимы разностные выражения, которые дают производные конечной ординаты как функции нескольких последовательных ординат. Если используется конечная ордината, то для того, чтобы сохранить точность, соответствующую

шую точности выражений (10-101) и (10-102), необходимо получить результат, зависящий от четырех, а не от трех последовательных ординат. Рассмотрим теперь фиг. 10-19, в которой четыре последовательные ординаты связаны кубическим уравнением. Хауболт показал [10-19], что первая и вторая производные по времени от ординаты  $\xi_n$  могут быть выражены в зависимости от трех предшествующих ординат в виде

$$\dot{\xi}_n = \frac{11\xi_n - 18\xi_{n-1} + 9\xi_{n-2} - 2\xi_{n-3}}{6\Delta}, \quad (10-103)$$

$$\ddot{\xi}_n = \frac{2\xi_n - 5\xi_{n-1} + 4\xi_{n-2} - \xi_{n-3}}{\Delta^2}. \quad (10-104)$$

Если теперь заменить производные в уравнении (10-100) их разностными выражениями (10-103) и (10-104), то в результате получим

$$\left(2 + \frac{11\beta\Delta}{6M} + \omega^2\Delta^2\right)\xi_n = \left(5 + \frac{3\beta\Delta}{M}\right)\xi_{n-1} - \left(4 + \frac{3\beta\Delta}{2M}\right)\xi_{n-2} + \left(1 + \frac{\beta\Delta}{3M}\right)\xi_{n-3} + \frac{\Delta^2\Xi_n^D}{M}, \quad (10-105)$$

где  $\Xi_n^D$  — величина обобщенной возмущающей силы в момент времени  $t = n\Delta$ . Соотношение (10-105) представляет рекуррентную формулу, которая может использоваться при вычислении реакции для последовательных значений  $n$ . Если величина  $\xi$  в трех предыдущих сечениях известна, то можно определить эту величину для следующего сечения. Таким образом, шаг за шагом можно вычислить всю историю изменения реакции во времени.

Необходимо сделать особые замечания, касающиеся начальных этапов расчета, относящихся к началу движения. Хауболт показал [10-19], что рекуррентный процесс можно начать, используя начальные условия вместе с разностными выражениями для первой и второй производных третьей ординаты из четырех последовательных ординат. Эти выражения имеют вид

$$\dot{\xi}_n = \frac{1}{6\Delta}(2\xi_{n+1} + 3\xi_n - 6\xi_{n-1} + \xi_{n-2}), \quad (10-106)$$

$$\ddot{\xi}_n = \frac{1}{\Delta^2}(\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}). \quad (10-107)$$

Пользуясь этими соотношениями при  $n = 0$ , получаем

$$\dot{\xi}_0 = \frac{1}{6\Delta}(2\xi_1 + 3\xi_0 - 6\xi_{-1} + \xi_{-2}), \quad (10-108)$$

$$\ddot{\xi}_0 = \frac{1}{\Delta^2}(\xi_1 - 2\xi_0 + \xi_{-1}). \quad (10-109)$$

Примем, что начальная скорость и перемещение равны нулю. Необходимо также вспомогательное начальное условие, дающее ускорение при  $t = 0$ . Если допустить, что  $\Xi^D(0)$  конечно, то из уравнения (10-100) можно видеть, что ускорение при  $t = 0$  равно  $\Xi^D(0)/M$ . Таким образом, два основных начальных условия и одно вспомогательное имеют следующий вид:

$$\xi(0) = 0, \quad (10-110)$$

$$\dot{\xi}(0) = 0, \quad (10-111)$$

$$\ddot{\xi}(0) = \frac{\Xi^D(0)}{M}. \quad (10-112)$$



Фиг. 10-19. Конечно-разностная аппроксимация с помощью кубической параболы.

Подставляя начальные условия в уравнения (10-108) и (10-109), получаем

$$2\xi_1 - 6\xi_{-1} + \xi_{-2} = 0, \quad (10-113a)$$

$$\xi_1 + \xi_{-1} = \frac{\Delta^2 \Xi^D(0)}{M}. \quad (10-113b)$$

Полагая в уравнении (10-105)  $n = 1$ , находим

$$\left(2 + \frac{11\beta\Delta}{6M} + \omega^2\Delta^2\right)\xi_1 = -\left(4 + \frac{3\beta\Delta}{2M}\right)\xi_{-1} + \left(1 + \frac{\beta\Delta}{3M}\right)\xi_{-2} + \frac{\Delta^2 \Xi_1^D}{M}. \quad (10-114)$$

Теперь у нас есть три уравнения, которые могут быть решены совместно относительно  $\xi_1$ ,  $\xi_{-1}$  и  $\xi_{-2}$ . Величины  $\xi_1$  и  $\xi_{-1}$  вместе с  $\xi_0 = 0$  можно использовать для вычисления [по уравнению (10-105)]  $\xi_2$  и, таким образом, начать рекуррентный процесс. Никакого физического смысла величинам  $\xi_{-1}$  и  $\xi_{-2}$  приписывать нельзя, поскольку действующая система находится в покое до момента  $t = 0$ . Допущение конечных величин перемещений до момента начала движения требуется для того, чтобы начать рекуррентный процесс вычисления, и является искусственным средством выражения начальных условий в форме конечных разностей.

**Пример 10-4.** С помощью метода конечных разностей получить решение задачи, сформулированной в примере 10-3<sup>1)</sup>. Примем  $\lambda = \frac{1}{4}$  и  $\Omega = 20$ .

*Решение.* Дифференциальное уравнение движения, выведенное в примере 10-3, имеет вид

$$\zeta''(s) + \frac{1}{\lambda}\zeta'(s) + \Omega^2\zeta(s) = \Omega^2 1(s). \quad (a)$$

Введя сюда численные значения параметров  $\lambda$  и  $\Omega$ , получим

$$\zeta''(s) + 4\zeta'(s) + 400\zeta(s) = 400 \times 1(s). \quad (b)$$

Используя в настоящем примере уравнение (10-105) и положив интервал  $\Delta = 0,01$ , получим рекуррентную формулу

$$\left[2 + \left(\frac{11}{6}\right)(4)(0,01) + 400(0,01)^2\right]\zeta_n = [5 + (3)(4)(0,01)]\zeta_{n-1} - \left[4 + \left(\frac{3}{2}\right)(4)(0,01)\right]\zeta_{n-2} + \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)(4)(0,01)\right]\zeta_{n-3} + (0,01)^2(400), \quad (c)$$

которая сводится к следующей:

$$\zeta_n = 0,018927 + 2,42272\zeta_{n-1} - 1,92114\zeta_{n-2} + 0,47949\zeta_{n-3}. \quad (d)$$

Для того чтобы начать рекуррентный процесс, начальные условия нужно выразить в конечно-разностной форме. Начальные условия имеют вид  $\zeta(0) = \zeta'(0) = 0$ . Вспомогательное граничное условие выражается равенством  $\zeta''(0) = 400$ . Приводя уравнения (10-108) и (10-109) к обозначениям настоящего примера, получаем

$$\zeta'_0 = \frac{1}{(6)(0,01)}(2\zeta_1 + 3\zeta_0 - 6\zeta_{-1} + \zeta_{-2}), \quad (e)$$

$$\zeta''_0 = \frac{1}{(0,01)^2}(\zeta_1 - 2\zeta_0 + \zeta_{-1}). \quad (f)$$

Используя основные и вспомогательные начальные условия, можно написать с помощью равенств (e) и (f)

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_{-2} = 6\zeta_{-1} - 2\zeta_1, \quad \zeta_{-1} = 0,04 - \zeta_1. \quad (g)$$

Равенства (g) можно также записать в виде

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_{-1} = 0,04 - \zeta_1, \quad \zeta_{-2} = 0,24 - 8\zeta_1. \quad (h)$$

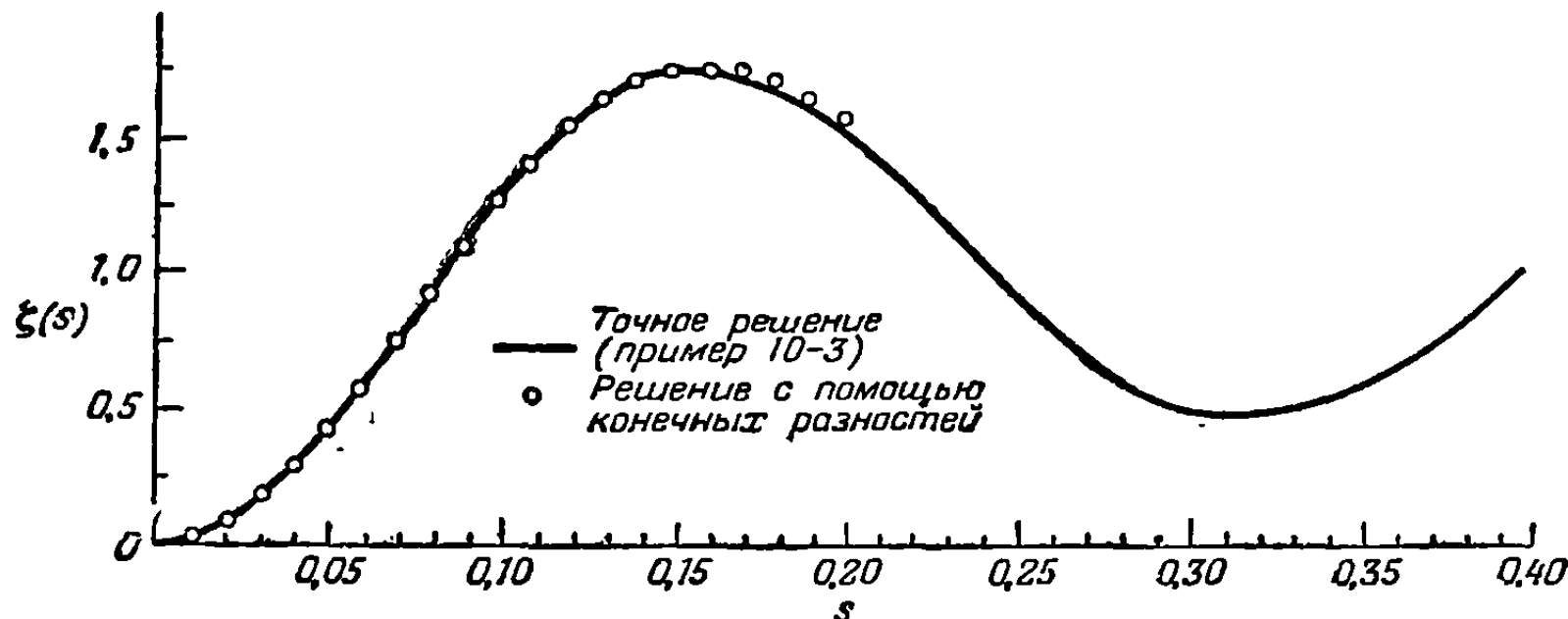
<sup>1)</sup> Этот пример дан Хауболтом. Подробное решение примера приведено им в [10-19].



Полагая в формуле (d)  $n = 1$  и подставляя величины  $\zeta_0$ ,  $\zeta_{-1}$  и  $\zeta_{-2}$ , приведенные выше, определяем численную величину  $\zeta_1$ :

$$\zeta_1 = 0,019610. \quad (i)$$

Имея  $\zeta_1$ , можно, положив в уравнении (d)  $n = 2$  и используя известные величины  $\zeta_{-1}$ ,  $\zeta_0$  и  $\zeta_1$ , вычислить  $\zeta_2$ . Определив таким образом исходные величины, можно шаг за шагом продолжать процесс, последовательно применяя уравнение (d). Результаты численного расчета изображены на фиг. 10-20, где они сравнены с результатом точного решения, полученного с помощью преобразования Лапласа (пример 10-3).



Фиг. 10-20. Сравнение решения, полученного с помощью конечных разностей, с точным решением.

(d) *Переходные напряжения в системах с внешними силами, зависящими от движения.* Метод перемещений, описанный в п. 10-3 (b), дает простой и прямой способ вычисления переходных напряжений в системах с внешними силами, зависящими от времени. Метод ускорений, оказывающийся простым и быстро сходящимся в случае применения к системам с заданной зависимостью внешних сил от времени, в случае  $\Xi_r^M \neq 0$  имеет определенные присущие ему недостатки. Рассмотрим кратко некоторые черты последнего метода. Суммарное перемещение, соответствующее  $i$ -й форме колебаний, можно получить из равенства (10-11) в следующей форме:

$$\xi_i = \xi_{i \text{ статич.}} + \frac{\Xi_i^M}{M_i \omega_i^2} - \frac{\ddot{\xi}_i}{\omega_i^2} \quad (i = 4, 5, \dots, n), \quad (10-115)$$

где

$$\xi_{i \text{ статич.}} = \frac{\Xi_i^D}{M_i \omega_i^2}.$$

Подставляя выражение (10-115) в равенство (10-28), получаем

$$\sigma_p = \sigma_p \text{ статич.} + \sum_{i=4}^n A_p^{(i)} \frac{\Xi_i^M}{M_i \omega_i^2} - \sum_{i=4}^n A_p^{(i)} \frac{\ddot{\xi}_i}{\omega_i^2}, \quad (10-116)$$

где

$$\sigma_p \text{ (статич.)} = \sum_{i=4}^{n=\infty} A_p^{(i)} \xi_i \text{ (статич.)}.$$

Первый член правой части равенства (10-116) представляет напряжение, которое получилось бы, если бы колебания были подавлены; второй член представляет напряжение, вызванное силами, отличными от сил инерции и обусловленными движением системы; последний член представляет напряжение, обусловленное инерционными силами колебательного движения. Поскольку  $\Xi_i^M$  в общем случае является функцией всех координат и их первых и вторых производных, то

второй член в равенстве (10-116) может быть чрезвычайно сложным. Для решения задачи можно использовать третий метод, при котором напряжения, обусловленные различными внешними силами, просто накладываются друг на друга. Этот метод, который можно назвать *методом суммирования сил*, в пп. 10-6 и 10-7 применен к задаче о действии порыва ветра.

**10-6. Динамическая реакция на одиночный порыв.** С точки зрения конструктора, занимающегося вопросами прочности, реакция самолета, находящегося в полете, обусловленная действием порыва ветра, является, может быть, самой важной динамической задачей. Нагрузки, вызываемые порывами ветра, часто определяют конструкцию крыла большого самолета. Явления аэроупругости могут оказать существенное влияние на величину и распределение нагрузок по крылу, обусловленных порывами ветра.

Расчет нагрузок от порывов ветра на самолет, находящийся в полете, является задачей двойного характера, включающей как исследование структуры порыва ветра, так и исследование характера реакции самолета на действие этого порыва. Расчет конструкции на нагрузку от порыва был в значительной степени основан на единичном дискретном порыве и на требовании обеспечения прочности конструкции, достаточной для восприятия возникающих напряжений. Основой любого метода предсказания динамической реакции на отдельный порыв является рациональное представление конфигурации порыва. Такие параметры, как интенсивность порыва, градиент и профиль порыва, так же, как и распределение скорости порыва по размаху, оказывают важное влияние на реакцию самолета и возникающие в результате напряжения. В большей своей части эта книга посвящена вопросам реакции на единичный порыв, и вопросы, относящиеся к свойствам атмосферы, выходят за ее пределы. Для дальнейшего знакомства с этой важной отраслью исследования порывов читатель отсылается, например, к работе [10-20].

Развитие методов исследования реакции упругого самолета при входе в порыв было предпринято еще в 1932 г. Возможно, что первый вклад был сделан Кюсснером [10-21], который сделал вывод о том, что напряжение в упругом крыле, обусловленное порывом, может быть значительно выше, нежели в жестком крыле. В 1936 г. Брайант и Джонс [10-22] исследовали влияние упругости крыла на нагрузки от порывов, считая, что крыло состоит из жесткого центрального сечения и жестких внешних панелей, соединенных упругими связями. Они заключили, что аэродинамические силы, действующие на упругое крыло, практически такие же, как и на жестком крыле, подверженном воздействию того же самого порыва. Таким образом, силы, рассчитанные для жесткого крыла, можно использовать для определения изгибных колебаний упругого крыла. Они также сделали вывод, что напряжения в упругих крыльях вряд ли превысят напряжения в жестких крыльях более чем на 10%. Уильямс и Хансон [10-23] в 1937 г. исследовали как влияние продольной устойчивости, так и влияние упругости крыла. Они учли только жесткость на изгиб и задались формой прогиба. Их заключения, по-видимому, подтверждают результаты Брайанта и Джонса. Эта ранняя работа упомянута вследствие ее исчерпывающего характера. Самым последним исследованием периода перед второй мировой войной было исследование Сирса и Спаркса в 1941 г. [10-24]. Они приняли во внимание демпфирование крыла и показали, что при больших скоростях полета демпфирование оказывает значительное влияние на величину динамической реакции. Самым ранним исследованием после второй мировой войны явилось исследование Пирса в 1947 г. [10-25]. Пирс развил полуэмпирический метод расчета, основанный частично на результатах испытаний модели в аэродинамической трубе для исследования порывов. При этом в расчет принималась только основная форма изгиба крыла, и влияние неустановившегося потока учитывалось приближенно в форме демпфирующего коэффициента эквивалентной вязкости. Результаты расчета указывают, что для коротких порывов можно ожидать

перегрузку, равную приблизительно 120%. Патнем [10-26], используя те же самые допущения и учитывая в несколько более удачной форме влияние демпфирования, улучшил методы Пирса.

Работа Голенда, Льюка и Кана 1947 года [10-27] явилась важным шагом вперед. В их анализе влияние неустановившегося течения учтено более рациональным способом, нежели в любом предшествующем исследовании, и рассмотрено влияние кручения и изгиба. Аналогичный метод расчета с некоторыми улучшениями и теми же ограничениями создали Дженкинс и Панку [10-23]. В последнем используется операторное исчисление, тогда как в первом при решении уравнений движения используется метод численного интегрирования. В последующей работе, опубликованной в 1949 г. Бисплингхоффом, Айзаксоном, Бянем, Фломенхофтом и О'Брайеном [10-15], при решении задачи используются методы механической проводимости или частотной реакции и учтены те факторы, которыми до тех пор пренебрегали, такие, например, как влияние тангажа, влияние распределения воздушной нагрузки по размаху, неустановившегося скоса у хвостового оперения и влияние большого числа форм колебательного движения крыла. Эта работа показала, что в многомоторных самолетах с прямыми крыльями у корневого сечения можно ожидать увеличения изгибающего момента от 15 до 20%.

Все из упомянутых выше ранних работ относятся к прямым крыльям, и цель исследований состояла главным образом в том, чтобы оценить порядок величин различных эффектов.

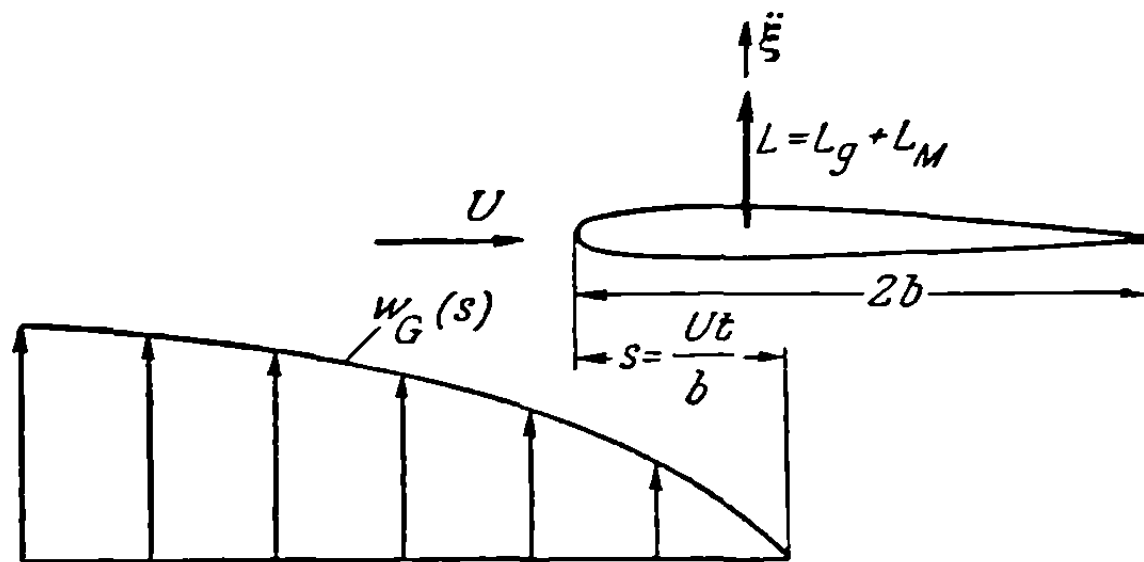
Последующие аналитические исследования были отчасти направлены более в сторону разработки систематических методов анализа, предназначенных для использования конструкторами. Работы Хауболта [10-19] и Хауболта и Кордеса [10-29, 10-30] оказались чрезвычайно полезными для исследования сложных конструкций. Основным результатом этих работ состоит в том, что в них с помощью конечно-разностных уравнений и теории матриц дано решение зависящих от времени уравнений движения. В более поздней работе Кодика, Линя и Бяня [10-31] методы Хауболта и Кордеса применяются к задаче о стреловидном крыле.

(а) Жесткое крыло, свободно перемещающееся в вертикальном направлении.

Прежде чем разбирать более общий случай, в котором принимается во внимание упругость крыла, полезно сначала рассмотреть более простую задачу о встрече с порывом ветра однородного жесткого крыла, имеющего единственную степень свободы поступательного перемещения по вертикали. Обращаясь к фиг. 10-21, примем, что тонкое крыло с хордой  $2b$  и площадью  $S$  встречает одиночный порыв ветра с произвольным распределением скоростей  $w_G$  в направлении полета и равномерным распределением скоростей в направлении размаха. Принимается, что крыло может свободно перемещаться по вертикали. Толщина крыла и амплитуда перемещения его по вертикали считаются малыми по сравнению с хордой. Скорость полета  $U$  при движении крыла через порыв ветра принимается неизменной. Реакция крыла описывается одним дифференциальным уравнением

$$M\ddot{\xi} = E^M + E^D, \quad (10-117)$$

где  $M$  — масса крыла и  $\xi$  — вертикальное перемещение (положительное вверх).



Фиг. 10-21. Жесткое крыло, входящее в порыв ветра.

При вычислении обобщенных сил примем, что они вполне определяются неустановившимися аэродинамическими силами, действующими на крыло. Это обусловливается тем, что сила тяжести и установившиеся аэродинамические силы, действующие на крыло в первоначальном установившемся полете, находятся в равновесии и поэтому взаимно погашаются. Более того, неустановившаяся подъемная сила на единицу размаха (положительная вверх) равна сумме аэродинамических сил, обусловленных порывом и возмущенным движением:

$$L = L_G + L_M, \quad (10-118)$$

где индекс  $G$  относится к порыву и индекс  $M$  — к возмущенному движению. Обобщенные силы равны поэтому

$$\mathbb{E}^D = \int_{-l}^l L_G dy, \quad (10-119)$$

$$\mathbb{E}^M = \int_{-l}^l L_M dy. \quad (10-120)$$

От переменного  $t$  удобно перейти к безразмерной переменной  $s$ , определяемой следующим соотношением:

$$s = \frac{Ut}{b} \quad (10-121)$$

и представляющей расстояние, проходимое крылом, в полухордах. Переходя в уравнении (10-117) от  $t$  к  $s$  и внося туда выражения (10-119) и (10-120), получаем

$$\frac{U^2}{b^2} M \xi''(s) = \int_{-l}^l L_G dy + \int_{-l}^l L_M dy, \quad (10-122)$$

где штрихи обозначают производные по  $s$ .

В гл. 5 [равенство (5-382)] показано, что подъемная сила на единицу длины размаха, обусловленная порывом произвольного профиля  $w_G(s)$ , вычисляется по формуле двумерной теории

$$L_G(s) = 2\pi\rho Ub \left[ w_G(0) \psi(s) + \int_0^s \frac{dw_G(\sigma)}{d\sigma} \psi(s - \sigma) d\sigma \right], \quad (5-382)$$

где  $\psi(s)$  — функция Кюсснера, описывающая возрастание подъемной силы тонкого профиля при проникновении в резкоограниченный порыв ветра. Выполняя интегрирование в формуле (5-382) по частям, приходим к следующему более удобному выражению:

$$L_G(s) = 2\pi\rho Ub \int_0^s w_G(\sigma) \psi'(s - \sigma) d\sigma. \quad (10-123)$$

При вычислении аэродинамических сил, обусловленных поступательным движением, в настоящем приложении можно воспользоваться формулой (5-370)

$$L_M(s) = -\pi\rho U^2 \left[ \xi''(s) + 2 \int_0^s \xi''(\sigma) \varphi(s - \sigma) d\sigma \right], \quad (10-124)$$

где  $\varphi(s)$  — функция Вагнера, описывающая возрастание подъемной силы профиля, следующее за внезапным изменением угла атаки.

Подставляя выражения (10-123) и (10-124) в уравнение (10-122) и допуская справедливость теории несущей полосы, получаем дифференциальное уравнение движения

$$\frac{U^2}{b^2} M \xi''(s) = \pi \rho U^2 S \left[ \int_0^s \frac{\omega_G(\sigma)}{U} \psi'(s-\sigma) d\sigma - \frac{\xi''(s)}{2b} - \frac{1}{b} \int_0^s \xi''(\sigma) \varphi(s-\sigma) d\sigma \right]. \quad (10-125)$$

Применяя к уравнению (10-125) преобразование Лапласа на этот раз не относительно переменной  $t$ , а относительно переменной  $s$ , получаем

$$\frac{U^2}{b^2} M p^2 \bar{\xi}(p) = \pi \rho U^2 S \left[ \frac{\bar{\omega}_G(p)}{U} p \bar{\psi}(p) - \frac{p^2}{2b} \bar{\xi}(p) - \frac{p^2}{b} \bar{\xi}(p) \bar{\varphi}(p) \right]. \quad (10-126)$$

Начальные условия имеют следующий вид:

$$\xi(0) = \xi'(0) = 0.$$

При этом были использованы следующие формулы преобразования Лапласа [10-16]:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^s \omega_G(\sigma) \psi'(s-\sigma) d\sigma \right\} = \bar{\omega}_G(p) p \bar{\psi}(p), \quad (10-127)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^s \xi''(\sigma) \varphi(s-\sigma) d\sigma \right\} = p^2 \bar{\xi}(p) \bar{\varphi}(p). \quad (10-128)$$

Решая уравнение (10-126) относительно  $\bar{\xi}(p)$ , получаем

$$\bar{\xi}(p) = \frac{b}{2} \frac{(\bar{\omega}_G(p)/U) \bar{\psi}(p)}{p \left( \lambda + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \bar{\varphi}(p) \right)}, \quad (10-129)$$

где  $\lambda = M/\pi \rho S b$  — безразмерная величина, называемая параметром массы крыла.

В гл. 5 мы видели, что функции  $\psi(s)$  и  $\varphi(s)$  не могут быть точно выражены в простой аналитической форме. Однако удовлетворительные аппроксимации даются следующими выражениями:

$$\psi(s) = 1 - 0,500 e^{-0,130 s} - 0,500 e^{-s}, \quad (5-383)$$

$$\varphi(s) = 1 - 0,165 e^{-0,0455 s} - 0,335 e^{-0,300 s}. \quad (5-371)$$

Преобразования Лапласа этих функций имеют вид

$$\bar{\psi}(p) = \frac{1}{p} - \frac{0,500}{p + 0,130} - \frac{0,500}{p + 1}, \quad (10-130)$$

$$\bar{\varphi}(p) = \frac{1}{p} - \frac{0,165}{p + 0,0455} - \frac{0,335}{p + 0,300}. \quad (10-131)$$

Подставляя эти выражения в выражения (10-129), получаем после сокращения

$$\bar{\xi}(p) = \frac{0,2824b}{\lambda + 0,250} \times \frac{p^3 + 0,5756p^2 + 0,09315p + 0,003141}{p(p + 0,130)(p + 1)(p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3)} \times \frac{\bar{\omega}_G(p)}{U}, \quad (10-132)$$

где

$$a_1 = \frac{0,3455\lambda + 0,3364}{\lambda + 0,250}, \quad a_2 = \frac{0,01365\lambda + 0,1438}{\lambda + 0,250}, \quad a_3 = \frac{0,006825}{\lambda + 0,250}.$$

Приспособим уравнение (10-132) к случаю резко ограниченного порыва, положив

$$\omega_G(s) = \omega_0 1(s). \quad (10-133)$$

Преобразование Лапласа, соответствующее этой функции, имеет вид

$$\mathfrak{L}\{\omega_0 1(s)\} = \frac{\omega_0}{p}. \quad (10-134)$$

Замечая, что  $\ddot{\xi} = (U^2/b^2)\xi''(s)$  и что начальная скорость и начальное ускорение равны нулю, получаем следующее выражение для вертикального ускорения, обусловленного резко ограниченным порывом ветра:

$$\ddot{\xi}(s) = \frac{U^2}{b^2} \mathfrak{L}^{-1}\{p^2 \bar{\xi}(p)\} = \frac{0,2824}{\lambda + 0,250} \frac{U\omega_0}{b} \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{M(p)}{N(p)}\right\}. \quad (10-135)$$

где

$$M(p) = p^3 + 0,5756p^2 + 0,09315p + 0,003141, \quad (10-136)$$

$$N(p) = (p + 0,130)(p + 1)(p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3). \quad (10-137)$$

Обратное преобразование можно выполнить с помощью применения разложения на частные дроби Хэвисайда для того, чтобы получить экспоненциальные члены с действительными или комплексными показателями. Таким образом,

$$\ddot{\xi}(s) = \frac{0,2824}{\lambda + 0,250} \frac{U\omega_0}{b} \times (A_1 e^{-0,130s} + A_2 e^{-s} + B_1 e^{\gamma_1 s} + B_2 e^{\gamma_2 s} + B_3 e^{\gamma_3 s}), \quad (10-138)$$

где  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  — корни многочлена третьей степени

$$(p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3) = (p - \gamma_1)(p - \gamma_2)(p - \gamma_3) \quad (10-139)$$

и

$$A_1 = \frac{M(-0,130)}{N'(-0,130)}, \quad A_2 = \frac{M(-1)}{N'(-1)}, \quad B_k = \frac{M(\gamma_k)}{N'(\gamma_k)}, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Когда численная величина параметра массы  $\lambda$  задана, ускорение определяется в явном виде с помощью уравнения (10-138).

Введем гипотетическое ускорение, вызываемое резко ограниченным порывом и вычисляемое в предположении, что аэродинамическими силами, обусловленными движением, можно пренебречь. Кроме того, примем, что силы, обусловленные порывом, вычисляются по теории установившегося движения. Это ускорение имеет вид

$$\ddot{\xi}_{\text{гипот. уск.}} = \frac{\omega_0 U}{2\lambda b}. \quad (10-140)$$

Равенство (10-140) называется формулой резко ограниченного порыва [10-20].

Безразмерное отношение действительного ускорения к величине гипотетического ускорения, даваемого формулой (10-140), называется относительным ускорением:

$$\frac{\ddot{\xi}}{\ddot{\xi}_{\text{гипот. уск.}}} = \frac{0,5648\lambda}{\lambda + 0,250} (A_1 e^{-0,130s} + A_2 e^{-s} + B_1 e^{\gamma_1 s} + B_2 e^{\gamma_2 s} + B_3 e^{\gamma_3 s}). \quad (10-141)$$

Максимальная величина относительного ускорения равна коэффициенту облегчения. В случае неустановившегося потока эффект облегчения наблюдается даже для резко ограниченного порыва и коэффициент облегчения является функцией параметра массы  $\lambda$ . В качестве иллюстрации характера результатов, получаемых из уравнения (10-141), на фиг. 10-22 изображены результаты численных расчетов для четырех значений параметра массы  $\lambda$ . Эти кривые показывают, что влияние неустановившихся аэродинамических явлений и сил, обусловленных движением, велико для малых значений параметра массы и мало для больших значений этого параметра. Дальнейшие подробности относительно этой частной задачи можно найти в [10-32].

Наконец, реакцию жесткого крыла на порыв произвольного профиля можно найти, применяя к рассчитанной выше реакции на резко ограниченный порыв интеграл Дюамеля.

(b) Самолет, имеющий свободу перемещения по вертикали, с крылом, испытывающим деформацию изгиба. Рассмотрим теперь случай самолета, имеющего свободу перемещения по вертикали, с крылом, которое может испытывать деформации изгиба, но не может закручиваться. Крыло считается тонким и прямым с произвольным изменением массы, жесткости и хорды вдоль размаха. Реакция определяется из решения дифференциальных уравнений

$$M_i \ddot{\xi}_i + M_i \omega_i^2 \xi_i = E_i^M + E_i^D$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \omega_1 = 0),$$

$$(10-142)$$

где  $\xi_1$  — реакция, соответствующая вертикальному перемещению жесткого тела, и  $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  — нормальные координаты, представляющие реакции изгибных форм колебательного движения крыла. Положительные направления указаны на фиг. 10-23. В уравнении (10-142)  $M$  представляет собой полную массу самолета, а  $\omega_i$  — частоту изгибных колебаний крыла. Формы колебаний определяются функциями  $\varphi_i(y)$ , нормированными таким образом, чтобы

$$2 \int_0^l \varphi_i^2 m dy = M. \text{ Обобщенные}$$

силы определяются с помощью соотношений

$$E_i^D = \int_{-l}^{+l} L_G \varphi_i dy, \quad (10-143)$$

$$E_i^M = \int_{-l}^{+l} L_M \varphi_i dy, \quad (10-144)$$

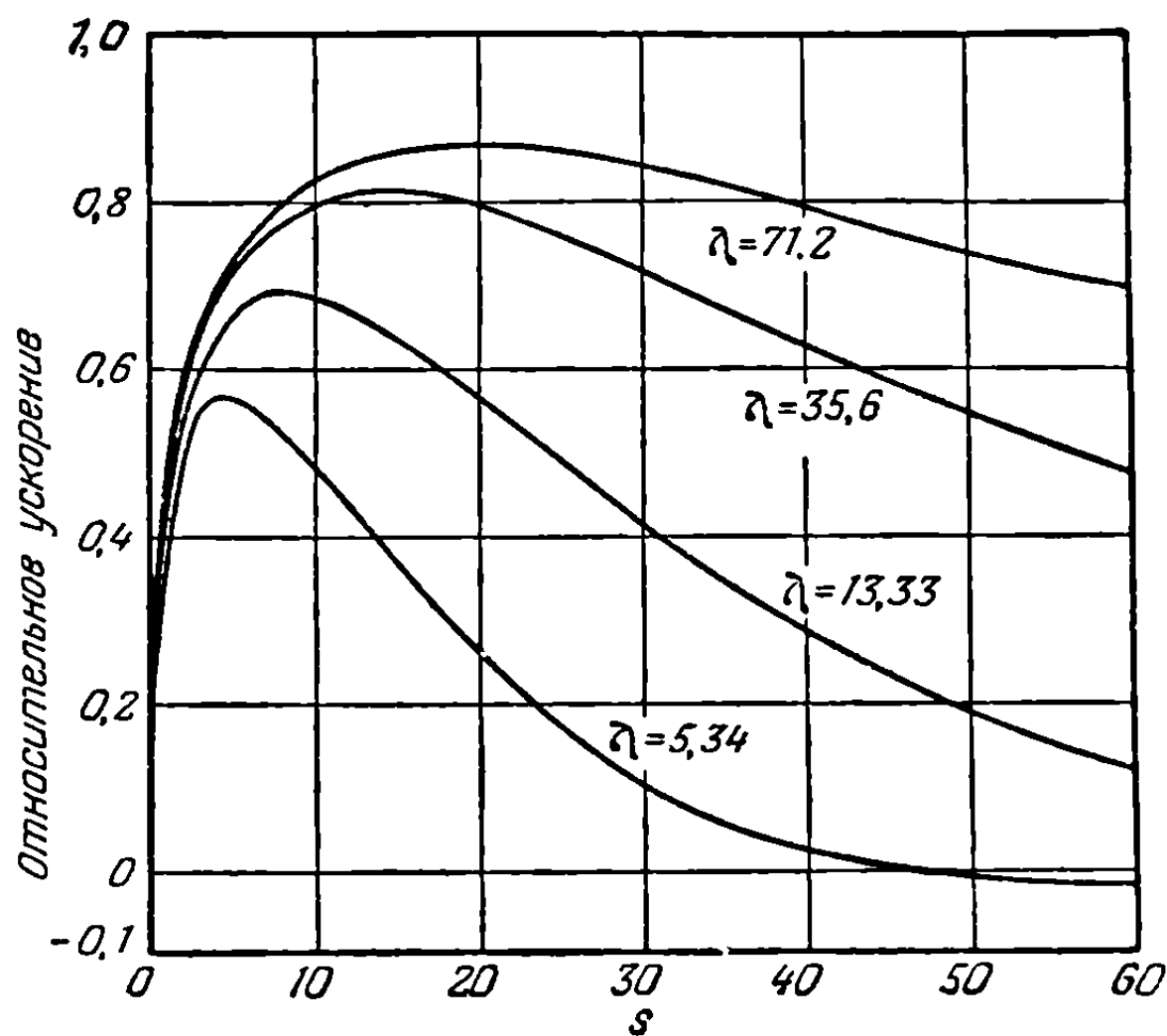
где  $L_G$  и  $L_M$  — силы, приходящиеся на единицу размаха, обусловленные порывом и движением. Переходя в уравнении (10-142) к безразмерной независимой переменной

$$s = \frac{Ut}{b_R}, \quad (10-145)$$

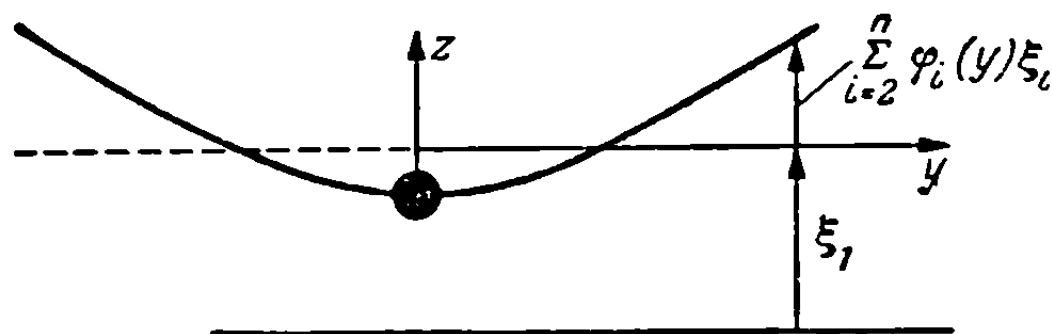
где  $2b_R$  — расчетная хорда, получаем

$$\frac{U^2}{b_R^2} M \xi_i''(s) + M \omega_i^2 \xi_i(s) = E_i^M + E_i^D \quad (i = 1, 2, \dots, n; \omega_1 = 0). \quad (10-146)$$

Мы видели, что при определении неустановившихся аэродинамических сил, приходящихся на единицу размаха, характерной переменной является расстояние в полухордах, проходимое профилем. Однако теперь хорда является переменной величиной, зависящей от координаты вдоль размаха. Для того чтобы сохранить одну-единственную переменную, свяжем хорду в произвольном сечении



Фиг. 10-22. Реакция в виде безразмерного ускорения, вычисленная на основе теории неустановившихся течений.



Фиг. 10-23. Самолет, свободно перемещающийся в вертикальном направлении; крыло самолета испытывает деформацию изгиба.



с расчетной хордой с помощью соотношения  $b = a(y) b_R$ , где величина  $a(y)$  зависит от координаты  $y$  вдоль размаха.

Допустим, что самолет встречается с дискретным порывом с произвольным распределением скоростей  $w_G(s)$  в направлении полета и равномерным распределением вдоль размаха. Если дополнительно принять, что крыло достаточно тонкое, так что можно применить теорию несущей полосы, то из уравнения (5-382) получим силу  $L_G$ , приходящуюся на единицу размаха и обусловленную действием порыва:

$$L_G(y, s) = 2\pi\rho U a(y) b_R \int_0^s w_G(\sigma) \psi'(s - \sigma) d\sigma. \quad (10-147)$$

Величина  $L_M$  в выражении (10-144) является силой, приходящейся на единицу размаха и обусловленной поступательным перемещением крыла. Это движение состоит как из движения в вертикальной плоскости, так и из колебаний изгиба, и если применить теорию несущей полосы, то из уравнения (5-370) получим

$$L_M(y, s) = -\pi\rho U^2 a(y) \left[ a(y) \sum_{j=1}^n \varphi_j(y) \xi_j''(s) + 2 \int_0^s \left( \sum_{j=1}^n \varphi_j(y) \xi_j''(\sigma) \right) \varphi(s - \sigma) d\sigma \right]. \quad (10-148)$$

Заменяя в выражениях для обобщенных сил (10-143) и (10-144)  $L_G(y, s)$  и  $L_M(y, s)$  их выражениями (10-147) и (10-148) и подставляя результаты в (10-146), получаем дифференциальные уравнения движения

$$\begin{aligned} \lambda \xi_i''(s) + \lambda \Omega_i^2 \xi_i(s) + \sum_{j=1}^n A_{ij} \xi_j''(s) + 2 \sum_{j=1}^n B_{ij} \int_0^s \xi_j''(\sigma) \varphi(s - \sigma) d\sigma = \\ = 2b_R B_{1i} \int_0^s \frac{w_G(\sigma)}{U} \psi'(s - \sigma) d\sigma \quad (i = 1, 2, \dots, n; \omega_1 = 0), \end{aligned} \quad (10-149)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{M}{\pi\rho S b_R}, \quad \Omega_i = \frac{\omega_i b_R}{U}, \quad (10-149a) \\ A_{ij} = \frac{b_R}{S} \int_{-l}^{+l} a^2 \varphi_i \varphi_j dy, \quad B_{ij} = \frac{b_R}{S} \int_{-l}^{+l} a \varphi_i \varphi_j dy. \end{aligned}$$

Решения уравнений (10-149) относительно нормальных координат  $\xi_i(s)$  можно получить с помощью преобразования Лапласа, метода проводимости или с помощью метода конечных разностей, описанных соответственно в п. 10-5 (а), (б) и (с). Если решения известны, то можно определить движение самолета и напряжения в крыле. Например, поперечная сила крыла на расстоянии  $y$  от продольной оси самолета получается простым суммированием всех аэродинамических и инерционных нагрузок, действующих на внешнюю сторону сечения  $y^1$ .

$$S(y, s) = \int_y^l \left[ L_G + L_M - \frac{U^2}{b_R^2} \left( \sum_{i=1}^n \varphi_i(\eta) \xi_i''(s) \right) m(\eta) \right] d\eta. \quad (10-150)$$

1) Это является применением метода суммирования сил, упомянутого в п. 10-5 (d).

Аналогично получаем изгибающий момент, действующий на крыло на расстоянии  $y$  от продольной оси самолета:

$$M(y, s) = \int_y^l \left[ L_G + L_M - \frac{U^2}{b_R^2} \left( \sum_{i=1}^n \varphi_i(\eta) \xi_i''(s) \right) m(\eta) \right] (\eta - y) d\eta, \quad (10-151)$$

где  $L_G$  и  $L_M$  определяются соответственно равенствами (10-147) и (10-148). Первые два члена подынтегрального выражения представляют действие аэродинамических нагрузок, последний член обусловлен действием инерционных сил.

Аналогичным же образом составляются уравнения движения для задачи о действии порыва ветра, когда учитываются другие формы движения твердого тела и другие формы колебательного движения. Приведенный выше вывод, относящийся к простому случаю, служит только иллюстрацией метода и ни в коем случае не является результатом, относящимся ко всем самолетам. Часто наряду с изгибом крыла необходимо учитывать также и кручение крыла. В случае очень гибких самолетов желательно использовать нормальные формы колебаний всего самолета. Пример использования нормальных форм при формулировании задачи о порыве для большого самолета приведен в [10-15].

В специальных случаях может потребоваться много других уточнений. Например, в случае стреловидных крыльев степень свободы, соответствующая движению тангажа, играет сравнительно более важную роль, чем та, которую она играла в случае прямых крыльев. Вообще учет движения тангажа приводит к увеличению нагрузки, и следовательно, было бы неосторожно пренебрегать степенью свободы, соответствующей движению тангажа. Степень свободы тангажа вносит в задачу сложный вопрос, связанный с влиянием хвостового оперения, подобным, например, влиянию скоса потока от крыла. В общем можно утверждать, что удовлетворительные результаты можно получить с помощью простой аппроксимации запаздывания скоса потока. Эта аппроксимация заключается в том, что скос потока у хвостового оперения в любой момент времени берется равным тому скосу потока, который отошел от крыла на  $L_T U$  секунд ранее рассматриваемого момента времени, где  $L_T$  — длина хвостового оперения,  $U$  — скорость движения самолета. Эта простая поправка учитывает промежуток времени, необходимый для того, чтобы частицы воздуха прошли расстояние от крыла до хвостового оперения.

При исследовании высокоскоростных самолетов со стреловидными крыльями малого удлинения желательно использовать трехмерную аэродинамическую теорию и при вычислении нагрузок от порыва принимать во внимание влияние конечности размаха. Рациональной теории, которую можно было бы легко применить к стреловидным крыльям произвольной формы в плане, не существует, и единственными практическими средствами исследования задачи о порыве являются приближения теории несущей полосы или ее модификации.

**Пример 10-5.** Вычислить динамический изгибающий момент в корневом сечении крыла реактивного транспортного самолета при скорости  $U = 475$  миль/час, обусловленный действием резко ограниченного порыва величины  $w_0$ . Учесть движение самолета в вертикальной плоскости и основную форму изгибного колебания крыла. Предположить, что аэродинамические силы, обусловленные движением, удовлетворительно описываются теорией квазиустановившегося течения<sup>1)</sup>.

**Решение.** Уравнения движения получим из уравнений (10-149), положив  $i = 1, 2$  и принимая, что аэродинамические силы, зависящие от движения, вычисляются по теории

<sup>1)</sup> В настоящем примере вследствие сравнительно низкой частоты это допущение приводит к пренебрежимо малой ошибке.

квазиустановившегося течения:

$$\lambda \xi_1''(s) + 2B_{11} \xi_1'(s) + 2B_{12} \xi_2'(s) = 2b_R B_{11} \int_0^s \frac{w_G(\sigma)}{U} \psi'(s-\sigma) d\sigma, \quad (a)$$

$$\lambda \xi_2''(s) + \lambda \Omega_2^2 \xi_2(s) + 2B_{21} \xi_1'(s) + 2B_{22} \xi_2'(s) = 2b_R B_{12} \int_0^s \frac{w_G(\sigma)}{U} \psi'(s-\sigma) d\sigma, \quad (b)$$

где

$$\lambda = \frac{M}{\pi \rho S b_R}, \quad \Omega_2 = \frac{\omega_2 b_R}{U}, \quad b_R = \frac{S}{4l},$$

$$B_{12} = B_{21} = \frac{b_R}{S} \int_{-l}^{+l} a(y) \varphi_2(y) dy, \quad B_{11} = \frac{b_R}{S} \int_{-l}^{+l} a(y) dy,$$

$$B_{22} = \frac{b_R}{S} \int_{-l}^{+l} a(y) \varphi_2^2(y) dy.$$

Сначала удобно оценить реакцию на гипотетический порыв интенсивности

$$\frac{w_G(s)}{U} \psi(s) = 1(s)$$

и затем, для того чтобы получить окончательный результат, применить интеграл Дюамеля. Полагая в уравнениях (a) и (b)

$$\frac{w_G(s)}{U} \psi(s) = 1(s)$$

и применив к обеим частям этих уравнений преобразование Лапласа, получим

$$(\lambda p^2 + 2B_{11}p) \bar{\xi}_1(p) + 2B_{12}p \bar{\xi}_2(p) = 2b_R B_{11} \frac{1}{p}, \quad (c)$$

$$(2B_{21}p) \bar{\xi}_1(p) + (\lambda p^2 + \lambda \Omega_2^2 + 2B_{22}p) \bar{\xi}_2(p) = 2b_R B_{12} \frac{1}{p}. \quad (d)$$

Для того чтобы определить входящие сюда постоянные, необходимы следующие данные:

$$M = 2606,1 \text{ слэг}, \quad l = 41,666 \text{ фут}, \quad b_R = 6,771 \text{ фут},$$

$$S = 1128,47 \text{ фут}^2, \quad \omega_2 = 15,316 \text{ рад/сек},$$

Форма крыла в плане реактивного транспортного самолета изображена на фиг. 8-18, а. Форма первого свободного изгибного колебания  $\varphi_2(y)$ , данная в примере 4—5 (b), норми-

рована таким образом, что  $2 \int_0^l \varphi_2^2(y) m dy = M$ .

Подставляя эти данные в формулы для соответствующих постоянных, найдем

$$\lambda = 45,6560, \quad B_{12} = B_{21} = 0,3963,$$

$$\lambda \Omega_2^2 = 1,0122, \quad 2b_R B_{12} = 5,3665,$$

$$B_{11} = 0,5000, \quad 2b_R B_{11} = 6,7708,$$

$$B_{22} = 1,4460.$$

Подставив постоянные в уравнения (a) и (b) и разрешив их относительно  $\bar{\xi}_1(p)$  и  $\bar{\xi}_2(p)$ , получим

$$\bar{\xi}_1(p) = \frac{309,1276 [p^2 + 0,049584p + 0,022170]}{2084,470p^2 [p + 0,0222179] [p^2 + 0,0630284p + 0,0218558]}, \quad (e)$$

$$\bar{\xi}_2(p) = \frac{245,0129}{2084,470 [p + 0,0222179] [p^2 + 0,0630284p + 0,0218558]}. \quad (f)$$

Обратное преобразование получим, применяя теорему разложения Хэвисайда. Это дает

$$\xi_1(s) = -309,1276 + 6,77079s + 309,22e^{-0,0222179s} + e^{-0,0315142s} [-0,087901 \cos(0,144439s) + 0,66852 \sin(0,144439s)], \quad (g)$$

$$\xi_2(s) = 5,6108e^{-0,0222179s} + e^{-0,0315142s} [-5,6108 \cos(0,144439s) - 0,36112 \sin(0,144439s)]. \quad (h)$$

Изгибающий момент у корня крыла ( $y = 0$ ) получим по формуле (10-151) в виде

$$M(0, s) = \int_0^l \left[ L_G + L_M - \frac{U^2}{b_R^2} (\xi_1''(s) + \varphi_2(\eta) \xi_2''(s)) m(\eta) \right] \eta d\eta, \quad (i)$$

где для гипотетической интенсивности порыва

$$\frac{w_G(s)}{U} \psi(s) = 1(s)$$

члены  $L_G$  и  $L_M$  имеют вид

$$L_G = 2\pi\rho U^2 a(y) b_R,$$

$$L_M = -2\pi\rho U^2 a(y) [\xi_1'(s) + \varphi_2(y) \xi_2'(s)]. \quad (j)$$

Подставив выражения (g) и (h) в уравнения (j) и внося полученный таким образом результат в уравнение (i), найдем

$$M(0, s) = 2\pi\rho U^2 b_R (750,250) - 2\pi\rho U^2 (750,250) \xi_1'(s) - 2\pi\rho U^2 (1309,435) \xi_2'(s) - \frac{U^2}{b_R^2} (13\,286,058) \xi_1''(s) - \frac{U^2}{b_R^2} (12\,657,658) \xi_2''(s). \quad (k)$$

Выражение (k) представляет реакцию на гипотетическую интенсивность порыва

$$\frac{w_G(s)}{U} \psi(s) = 1(s).$$

Реакция на интенсивность порыва

$$\frac{w_G(s)}{U} \psi(s)$$

определяется с помощью интеграла Дюамеля:

$$M(0, s) = \int_0^s \frac{w_G(\sigma)}{U} \psi'(\sigma) M(s - \sigma) d\sigma, \quad (l)$$

где  $\psi'(\sigma)$  — первая производная функции Кюсснера [равенство (5-383)],

$$\psi'(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} (1 - 0,500e^{-0,130\sigma} - 0,500e^{-\sigma}) = 0,065e^{-0,130\sigma} + 0,500e^{-\sigma}. \quad (m)$$

Полагая, например,  $w_G(s) = w_0 \cdot 1$ ) и подставляя выражения (k) и (m) в уравнение (l) и интегрируя, получаем, производя соответствующие вычисления,

1) Более реалистичным предположением для атмосферных порывов было бы распределение скорости порыва в форме

$$w_G(s) = \frac{1}{2} w_0 \left( 1 - \cos \frac{\pi s}{s_G} \right)$$

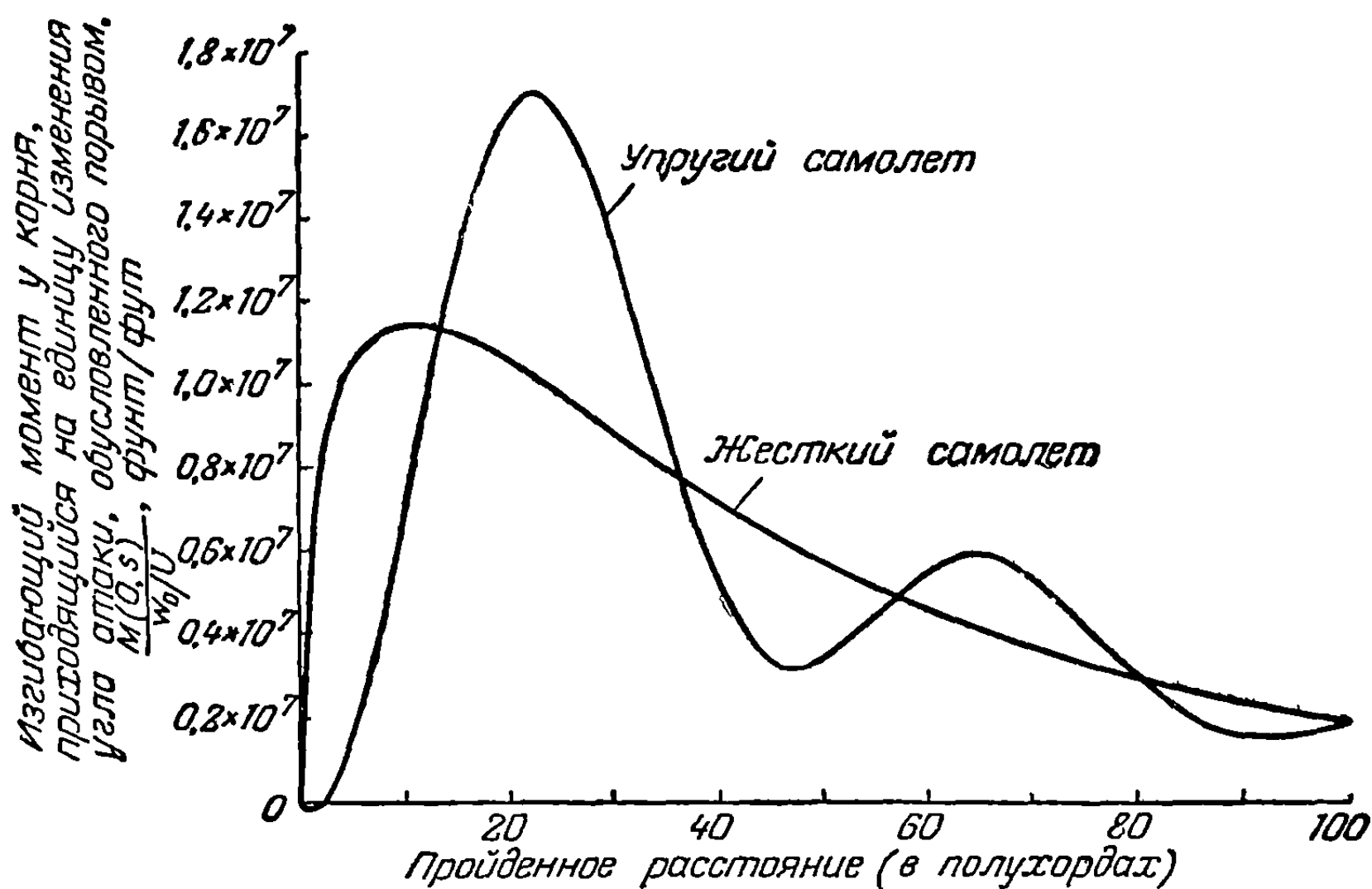
для  $0 \leq s \leq 2s_G$  и  $w_G(s) = 0$  для  $s \leq 2s_G$ . Величина  $w_0$  в этой формуле представляет наибольшую скорость порыва, а величина  $s_G$  — градиент порыва, выраженный в полухордах. Для конструкторов военных самолетов некоторый интерес представляют порывы, образовавшиеся в результате взрывов, где распределение скорости порыва имеет общую форму:

$$w_G(s) = w_0 (1 - k_1 s) e^{-k_2 s}.$$

Следует заметить, что в этом случае в уравнении (l) лучше вместо функции Кюсснера использовать функцию Багнера.

$$\frac{M(0, s)}{w_0/U} = 10^7 \left\{ -0,622068e^{-0,130s} + 1,820448e^{-0,022179s} + 0,0200273e^{-s} - \right. \\ \left. - e^{-0,0315142s} [1,218407 \cos(0,144439s) + 0,624602 \sin(0,144439s)] \right\}. \quad (n)$$

На фиг. 10-24 изображена кривая, соответствующая уравнению (n), иллюстрирующая колебания изгибающего момента у корневого сечения. Для сравнения на фиг. 10-24



Фиг. 10-24. Изгибающий момент у корня крыла, приходящийся на единицу угла атаки, индуцированного порывом,  $\frac{M(0, s)}{w_0/U}$ .

нанесена кривая для жесткого самолета. Читателю следует помнить, что результаты, изображенные на фиг. 10-24, должны быть наложены на результаты, соответствующие горизонтальному установившемуся полету.

**10-7. Динамическая реакция на непрерывную атмосферную турбулентность.** Искусственность допущения дискретного порыва в качестве основы проектирования конструкции самолета была признана давно. В действительности атмосферная турбулентность есть явление непрерывное, при котором самолет периодически подвергается воздействию порывов. Стремление к совершенно новым формам в конструкции самолета и применение высокопрочных сплавов, которые требуют более внимательного исследования усталостных свойств, привели к усилению иррационального характера гипотезы дискретного порыва. Очевидно, что для того, чтобы полнее учесть свойства непрерывности атмосферной турбулентности, необходим статистический подход к решению задачи. Статистические понятия, применяющиеся при исследовании реакции линейных систем на случайный импульс, получили широкое развитие в связи с теорией коммуникаций в работах Винера [10-33] и других исследователей. Эти понятия, рассмотренные в общих чертах в приложении С, систематически применялись также в статистической теории турбулентности. Клеменсон [10-34] экспериментально определил спектр мощности реакции самолета при полете в турбулентной атмосфере. Впоследствии Липман [10-35], Пресс и Мазельский [10-36] обратили внимание на использование статистических понятий в авиации и показали их применение к задачам аэроупругости.

(а) *Жесткое крыло, обладающее свободой перемещения по вертикали.* Рассмотрим сначала вертикальную реакцию жесткого крыла постоянной хорды  $2b$ , движущегося сквозь турбулизированную атмосферу со скоростью  $U$ . При-

принимается, что толщина профиля и амплитуда вертикального перемещения малы по сравнению с хордой. Компоненты турбулентных флуктуаций  $u$ ,  $v$ ,  $w$  считаются малыми по сравнению со скоростью движения  $U$ . Поскольку крыло обладает только свободой вертикального перемещения, принимается, что влиянием компонент скорости  $u$  и  $v$  можно пренебречь. Таким образом, флуктуация угла атаки профиля крыла будет равна

$$\alpha = \frac{w}{U}. \quad (10-152)$$

Принимается также, что флуктуация угла атаки не меняется по размаху и что картина турбулентности не изменяется в течение того промежутка времени, за который рассматриваемая частица воздуха проходит расстояние вдоль профиля, т. е. в течение отрезка времени, равного  $2b/U$ . Вследствие последнего допущения турбулентность  $w$  можно выразить в форме

$$w = w \left( t - \frac{x}{U} \right), \quad (10-153)$$

где оси координат считаются неподвижно связанными с крылом. Соотношение (10-153) выражает лишь тот факт, что турбулентное образование движется относительно крыла со скоростью  $U$ .

Предположим теперь, что турбулентность  $w$  не допускает применения методов исследования Фурье и является стационарной случайной функцией, определенной в приложении С. Таким образом, мы не в состоянии получить в явном виде зависимость реакции крыла от времени и должны довольствоваться некоторыми средними величинами. В частности, в приложении С показано, что если среднее значение квадрата скорости пульсации  $\overline{w^2}$  известно, то можно вычислить среднее значение квадрата реакции жесткого крыла (например, вертикальное ускорение  $\overline{\xi^2}$ ). Это достигается использованием функций  $\Phi(\omega)$  и  $\Psi(\omega)$ , спектральной плотности энергии на входе и выходе (см. приложение С). В настоящем примере функция  $\Phi(\omega)$  удовлетворяет равенству

$$\overline{w^2} = \int_0^{\infty} \Phi(\omega) d\omega, \quad (10-154)$$

а функция  $\Psi(\omega)$  равенству

$$\overline{\xi^2} = \int_0^{\infty} \Psi(\omega) d\omega. \quad (10-155)$$

Кроме того, в приложении С показано, что имеет место следующее соотношение:

$$\Psi(\omega) = |H(i\omega)|^2 \Phi(\omega), \quad (10-156)$$

где  $H(i\omega)$  — механическая проводимость линейной системы. Таким образом, расчет реакции на случайный импульс включает знание спектральной плотности энергии возбуждающей функции и механической проводимости системы. После этого по формуле (10-156) определяется спектральная плотность энергии реакции и по формуле (10-155) — среднее значение квадрата реакции.

Для жесткого крыла механическую проводимость системы можно определить, подвергая крыло воздействию порыва с синусоидальным распределением скорости, описываемым действительной частью выражения (см. гл. 5)

$$w_G = \overline{w}_G e^{ik(s-x^*)}. \quad (5-374)$$

Реакция крыла на этот порыв получается из решения уравнения движения (10-122):

$$\frac{U^2}{b^2} M \xi''(s) = \int_{-l}^l L_G dy + \int_{-l}^l L_M dy, \quad (10-122)$$

где, согласно равенству (5-376), подъемная сила, обусловленная синусоидальным порывом, равна

$$L_G = 2\pi\rho U b \bar{w}_G \{C(k) [J_0(k) - iJ_1(k)] + iJ_1(k)\} e^{iks}. \quad (10-157)$$

Согласно же равенству (5-311), подъемная сила, обусловленная движением, имеет вид

$$L_M = -\pi\rho U^2 \xi''(s) - 2\pi\rho U^2 C(k) \xi'(s). \quad (10-158)$$

Функция Теодорсена  $C(k)$  определяется в явном виде с помощью равенства (5-309). Подставляя выражения (10-157) и (10-158) в уравнение (10-122) и используя теорию несущей полосы, получаем

$$(2\lambda + 1) \xi'' + 2C(k) \xi' = 2b \frac{\bar{w}_G}{U} K(k) e^{iks}, \quad (10-159)$$

где  $\lambda = M/\pi\rho S b$  и

$$K(k) = C(k) [J_0(k) - iJ_1(k)] + iJ_1(k).$$

Полагая, что решение имеет вид

$$\xi = \bar{\xi} e^{iks},$$

находим

$$\frac{\bar{\xi}}{\bar{w}_G} = \frac{b}{U} \frac{2K(k)}{k [2iC(k) - (2\lambda + 1)k]}. \quad (10-160)$$

Эта величина является функцией проводимости относительно перемещения крыла. Если положить

$$\ddot{\xi} = \bar{\ddot{\xi}} e^{iks} = -\frac{U^2}{b^2} k^2 \bar{\xi} e^{iks}, \quad (10-161)$$

то функция проводимости относительно ускорения будет иметь следующий вид:

$$\frac{\bar{\ddot{\xi}}}{\bar{w}_G} = -\frac{U}{b} \frac{2kK(k)}{2iC(k) - (2\lambda + 1)k}. \quad (10-162)$$

Среднее значение квадрата ускорения определяется равенством

$$\overline{\ddot{\xi}^2} = \int_0^\infty \left| \frac{\bar{\ddot{\xi}}}{\bar{w}_G} \right|^2 \Phi(\omega) d\omega. \quad (10-163)$$

Если, например, принять, что турбулентность в порыве изотропная, то, как показал Липман [10-35], спектр энергии на входе имеет вид

$$\Phi(\omega) = \frac{\bar{w}_G^2}{\pi U} \frac{L}{1 + (\omega L/U)^2}, \quad (10-164)$$

где  $\bar{w}_G^2$  — среднее значение квадрата скорости порыва и  $L$  — интегральный масштаб турбулентности. Последний определяется площадью под кривой корреляции (10-35) и может рассматриваться в качестве характеристики среднего размера вихря турбулентного поля.

Подставляя выражения (10-162) и (10-164) в уравнение (10-163), получаем

$$\overline{\ddot{\xi}^2} = \frac{4U^2}{b^2} \frac{\bar{w}_G^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{k^2 |K(k)|^2}{|2iC(k) - (2\lambda + 1)k|^2} \frac{1 + 3\zeta^2}{(1 + \zeta^2)^2} d\zeta, \quad (10-165)$$



где  $\zeta = \omega L/U$ . Липман [10-35] показал, что простая аппроксимация величины  $|K(k)|^2$  имеет вид

$$|K(k)|^2 = \frac{1}{1 + 2\pi k}. \quad (10-166)$$

Если, кроме того, допустить, что приемлемая аппроксимация дается выражением

$$|2iC(k) - (2\lambda + 1)k|^2 = 4 + k^2(2\lambda + 1)^2, \quad (10-167)$$

то формула для средней величины квадрата ускорения примет вид

$$\overline{\xi^2} = \frac{4U^2 \overline{\omega_G^2}}{b^2 \pi} \frac{1}{(2\lambda + 1)^2} \int_0^\infty \frac{\zeta^2}{a^2 + \zeta^2} \frac{1}{1 + 2\pi r \zeta} \frac{1 + 3\zeta^2}{(1 + \zeta^2)^2} d\zeta, \quad (10-168)$$

где  $r = b/L$  и

$$a = \frac{2}{(2\lambda + 1)r}.$$

Фын [10-37] показал, что интеграл в правой части равенства (10-168) может быть выражен через элементарные функции. В результате будем иметь

$$\overline{\xi^2} = \overline{\omega_G^2} \left[ \frac{4U^2}{\pi b^2 (2\lambda + 1)^2} \right] \left[ \frac{a^2(3a^2 - 1)}{(a^2 - 1)^2} I_1 - \frac{5a^2 - 3}{(a^2 - 1)^2} I_1 + \frac{2}{a^2 - 1} I_2 \right], \quad (10-169)$$

где

$$I_1 = \frac{2\pi r}{1 + 4\pi^2 r^2 a^2} \left( \ln 2\pi r + \ln a + \frac{1}{4ar} \right),$$

$$I_2 = \frac{8\pi^3 r^3}{(1 + 4\pi^2 r^2 a^2)^2} \left( \ln 2\pi r + \ln a + \frac{1}{4ar} \right) + \frac{\pi r}{a^2 (1 + 4\pi^2 r^2 a^2)} \left( \frac{1}{4ra} - 1 \right).$$

Исследование этого результата показывает, что среднее значение квадрата ускорения очень сильно зависит от отношения полухорды крыла к масштабу турбулентности  $r = b/L$ , в особенности когда это отношение стремится к нулю, т. е. когда масштаб турбулентности велик по сравнению с полухордой и среднее значение квадрата ускорения стремится к нулю. В этом случае жесткое крыло действительно движется сквозь порывы с очень большими градиентами скорости, которые приводят к малым ускорениям. Когда отношение полухорды к масштабу турбулентности велико и стремится к бесконечности, то среднее значение квадрата ускорения также стремится к нулю. Этот результат правдоподобен, поскольку маленькие вихри, распределенные в направлении хорды, стремятся погасить друг друга и поэтому результирующее ускорение жесткого крыла мало. Между этими двумя крайними значениями  $r$  обычно имеется критическое значение, при котором наблюдаются пики ускорения.

Хотя вычисленное выше среднее значение квадрата ускорения имеет определенное значение как количественная характеристика, особенно при сравнении одного самолета с другим, однако для применения этих методов анализа к проектированию конструкции необходимо получить дополнительные сведения. Необходимы дополнительные соотношения между спектром энергии реакции и действительным изменением реакции во времени. Например, для исследований на усталость практическое значение имеет вопрос о том, сколько раз превышает данное ускорение при полете в воздухе на заданную дистанцию с заданной средней величиной квадрата интенсивности турбулентности. Такие данные можно получить с помощью статистических методов, и если имеется достаточное количество статистических данных об атмосферной турбулентности, то они в конце концов могут послужить практической основой для проектирования конструкции. Недостаток места не позволяет останавливаться на этих важных статистических понятиях, поэтому для дальнейшего изучения их мы рекомендуем читателю обратиться к работам [10-35] и [10-36].

(b) Самолет, свободно перемещающийся по вертикали, с крылом, испытывающим деформацию изгиба. Рассмотрим реакцию самолета при воздействии на него турбулентной атмосферы. Примем, что самолет может свободно перемещаться по вертикали и имеет упругое крыло, которое может изгибаться, но не может закручиваться. Крыло считается тонким и прямым с произвольным распределением массы, жесткости и хорды вдоль размаха. Из п. 10-6 (b) известно, что уравнения движения в этом случае имеют вид (10-146). Эти уравнения могут быть использованы для определения реакции на синусоидальный порыв в форме (5-374), если подставить в них решение в форме

$$\xi_r = \bar{\xi}_r e^{iks}, \quad (10-170)$$

где

$$k = \frac{\omega b_R}{U} \quad \text{и} \quad s = \frac{Ut}{b_R}.$$

В результате этой подстановки получим

$$-\left(\frac{U}{b_R}\right)^2 M k^2 \bar{\xi}_r e^{iks} + M \omega_r^2 \bar{\xi}_r e^{iks} = \Xi_r^M + \Xi_r^D \quad (r = 1, 2, \dots, n; \omega_1 = 0). \quad (10-171)$$

Правые части этих уравнений вычисляются при помощи равенств (10-143) и (10-144) после подстановки в них следующих выражений:

$$L_G = 2\pi\rho U^2 b_R \frac{\bar{w}_G}{U} a(y) K(k) e^{iks}, \quad (10-172)$$

где  $K(k)$  определяется из уравнения (10-159) и

$$L_M = \pi\rho U^2 [a^2(y) k^2 - 2a(y) ikC(k)] \left[ \sum_{j=1}^n \varphi_j \bar{\xi}_j \right] e^{iks}, \quad (10-173)$$

где  $C(k)$  определяется равенством (5-309). Таким образом, если использовать теорию несущей полосы, то уравнения (10-171) перейдут в следующие<sup>1)</sup>:

$$-\lambda k^2 \bar{\xi}_r + \lambda \Omega_r^2 \bar{\xi}_r - k^2 \sum_{j=1}^n A_{rj} \bar{\xi}_j + 2ikC(k) \sum_{j=1}^n B_{rj} \bar{\xi}_j = 2b_R B_{1r} \frac{\bar{w}_G}{U} K(k) \quad (r = 1, 2, \dots, n; \omega_1 = 0), \quad (10-174)$$

где  $\lambda$ ,  $\Omega_r$ ,  $A_{rj}$  и  $B_{rj}$  определяются соотношениями (10-149а). Уравнения (10-174) представляют систему совместных линейных уравнений с комплексными коэффициентами и комплексными неизвестными величинами  $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n$ . Вообще решения можно получить для комплексных величин

$$\frac{\bar{\xi}_1}{b_R (\bar{w}_G/U)}, \quad \frac{\bar{\xi}_2}{b_R (\bar{w}_G/U)}, \quad \dots, \quad \frac{\bar{\xi}_n}{b_R (\bar{w}_G/U)}. \quad (10-175)$$

Эти величины могут рассматриваться как функции проводимости по отношению к перемещениям, соответствующим нормальным формам колебаний. Предположим, например, что нужно исследовать влияние турбулентности на изгибающий момент крыла. Функция проводимости относительно изгибающего момента крыла  $\bar{M}/\bar{w}_G$  может быть определена при помощи равенства (10-151), если представить  $M(y, s) = \bar{M} e^{iks}$  в виде:

$$\bar{M} e^{iks} \int_y^l \left[ L_G + L_M - \frac{U^2}{b_R^2} \left( \sum_{r=1}^n \varphi_r(\eta) \xi_r''(s) \right) m(\eta) \right] (\eta - y) d\eta. \quad (10-176)$$

<sup>1)</sup> Допущения двумерной картины турбулентности и постоянства ее вдоль размаха вносят определенную ошибку, когда масштабы турбулентности таковы, что порядок отношения  $2l/L$  равен единице или превышает ее.

Если вместо  $\xi_r$ ,  $L_G$  и  $L_M$  подставить соответствующие выражения из равенств (10-170), (10-172) и (10-173), то функция проводимости относительно изгибающего момента примет вид

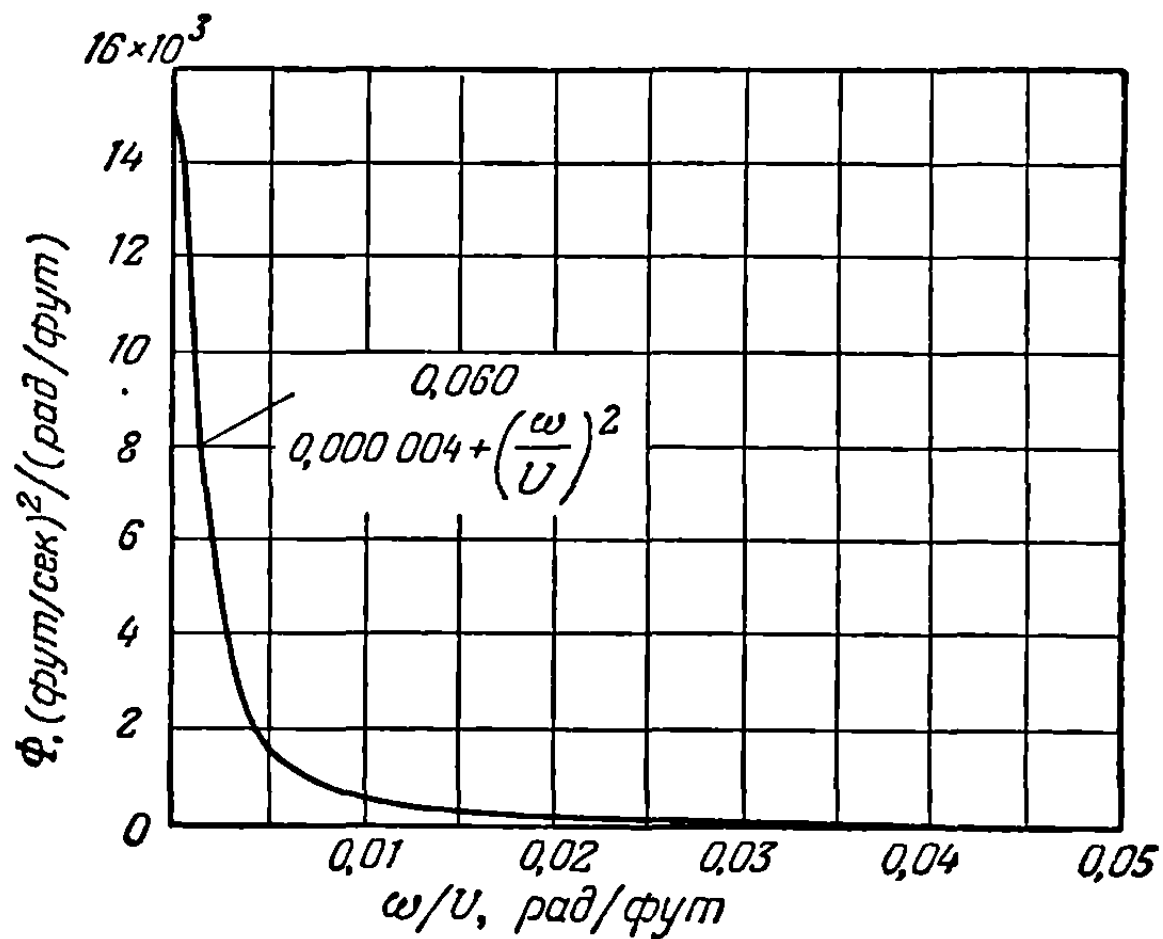
$$\begin{aligned} \frac{\bar{M}}{\bar{w}_G} = \frac{MU}{\lambda b_R} \left\{ 2K(k) \frac{b_R}{S} \int_y^l a(\eta)(\eta-y) d\eta + k^2 \sum_{r=1}^n \frac{\bar{\xi}_r}{b_R (\bar{w}_G/U)} \frac{b_R}{S} \int_y^l a^2(\eta) \varphi_r(\eta)(\eta-y) d\eta - \right. \\ \left. - 2ikC(k) \sum_{r=1}^n \frac{\bar{\xi}_r}{b_R (\bar{w}_G/U)} \frac{b_R}{S} \int_y^l a(\eta) \varphi_r(\eta)(\eta-y) d\eta + \right. \\ \left. + \lambda k^2 \sum_{r=1}^n \frac{\bar{\xi}_r}{b_R (\bar{w}_G/U)} \frac{1}{M} \int_y^l \varphi_r(\eta) m(\eta)(\eta-y) d\eta \right\}. \quad (10-177) \end{aligned}$$

Когда величины (10-175) будут введены в равенство (10-177), функция проводимости определится в явном виде. Среднее значение квадрата изгибающего момента равно

$$\bar{M}^2 = \int_0^\infty \left| \frac{\bar{M}}{\bar{w}_G} \right|^2 \Phi(\omega) d\omega. \quad (10-178)$$

Уравнения движения с учетом других степеней свободы жесткого и упругого тела могут быть выведены аналогичным путем. Возможно, что наиболее значительным упущением в приведенном выше иллюстративном выводе является пренебрежение степенью свободы тангажа. Экспериментальные и теоретические исследования реакции самолета в непрерывно-возмущенном воздухе показали, что большое значение имеет степень свободы, соответствующая движению тангажа, и большую роль играют связанные с ней симметричные свойства устойчивости.

Важно отметить подобие форм уравнений движения (10-174) и уравнений, применяемых при исследовании флаттера. В левую часть уравнений входят те же самые коэффициенты аэродинамических сил, и поэтому можно воспользоваться таблицами аэродинамических коэффициентов для различных чисел Маха, которые применяются при расчетах на флаттер.



Фиг. 10-25. Спектр энергии атмосферной турбулентности.

Пример 10-6. Определить спектр энергии изгибающего момента у корня крыла реактивного транспортного самолета при скорости  $U = 475$  миль в час. Учесть вертикальные перемещения самолета и основную форму изгиба крыла. Принять, что спектр энергии атмосферной турбулентности определяется эмпирической формулой<sup>1)</sup> (ср. фиг. 10-25)

$$\Phi\left(\frac{\omega}{U}\right) = \frac{0,060}{0,000004 + (\omega/U)^2}. \quad (a)$$

<sup>1)</sup> Это выражение является аппроксимацией кривой, приведенной в работе [10-36] на фиг. 2. Опыт и теория указывают, что  $\Phi$  для больших значений  $\omega/U$  пропорционально  $1/(\omega/U)^2$ . Для того чтобы сделать  $\Phi$  конечным при  $\omega/U = 0$ , к знаменателю прибавлено некоторое постоянное число.

Сравнить результаты с результатами, полученными для жесткого самолета, и определить среднее квадратическое значение коэффициента динамической перегрузки.

*Решение.* Уравнения движения получаются из уравнений (10-174), если положить  $n = 2$ , и имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} \left( \frac{\bar{\xi}_1}{b_R(\bar{\omega}_G/U)} \right) + \bar{a}_{12} \left( \frac{\bar{\xi}_2}{b_R(\bar{\omega}_G/U)} \right) &= \bar{f}, \\ \bar{a}_{21} \left( \frac{\bar{\xi}_1}{b_R(\bar{\omega}_G/U)} \right) + \bar{a}_{22} \left( \frac{\bar{\xi}_2}{b_R(\bar{\omega}_G/U)} \right) &= \frac{B_{12}}{B_{11}} \bar{f}, \end{aligned} \quad (b)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11}(k) &= -\lambda k^2 - k^2 A_{11} + 2ikC(k) B_{11}, \\ \bar{a}_{12}(k) = \bar{a}_{21}(k) &= -k^2 A_{12} + 2ikC(k) B_{12}, \\ \bar{a}_{22}(k) &= -\lambda k^2 + \lambda \Omega_2^2 - k^2 A_{22} + 2ikC(k) B_{22}, \\ \bar{f}(k) &= 2B_{11}K(k). \end{aligned}$$

Постоянные  $\lambda$ ,  $\Omega_2$ ,  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$ ,  $B_{22}$  были вычислены в примере 10-5. В настоящем примере дополнительно требуется определить постоянные  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  и  $A_{22}$ . Последние определяются выражениями (10-149a); их численные значения равны

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{b_R}{S} \int_{-l}^{+l} a^2(y) dy = 0,5246, & A_{12} &= \frac{b_R}{S} \int_{-l}^{+l} a^2(y) \varphi_2(y) dy = 0,2610, \\ A_{22} &= \frac{b_R}{S} \int_{-l}^{+l} a^2(y) \varphi_2^2(y) dy = 1,1078. \end{aligned}$$

Функция проводимости относительно изгибающего момента у корня определяется равенством (10-177) при  $n = 2$  и  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{M}}{\bar{\omega}_G} &= \frac{MUI}{\lambda b_R} \left\{ B'_{11} K(k) + \frac{1}{2} [A'_{11} k^2 - 2B'_{11} ikC(k) + 2\lambda k^2 \gamma'_1] \frac{\bar{\xi}_1}{b_R(\bar{\omega}_G/U)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [A'_{12} k^2 - 2B'_{12} ikC(k) + 2\lambda k^2 \gamma'_2] \frac{\bar{\xi}_2}{b_R(\bar{\omega}_G/U)} \right\}, \quad (c) \end{aligned}$$

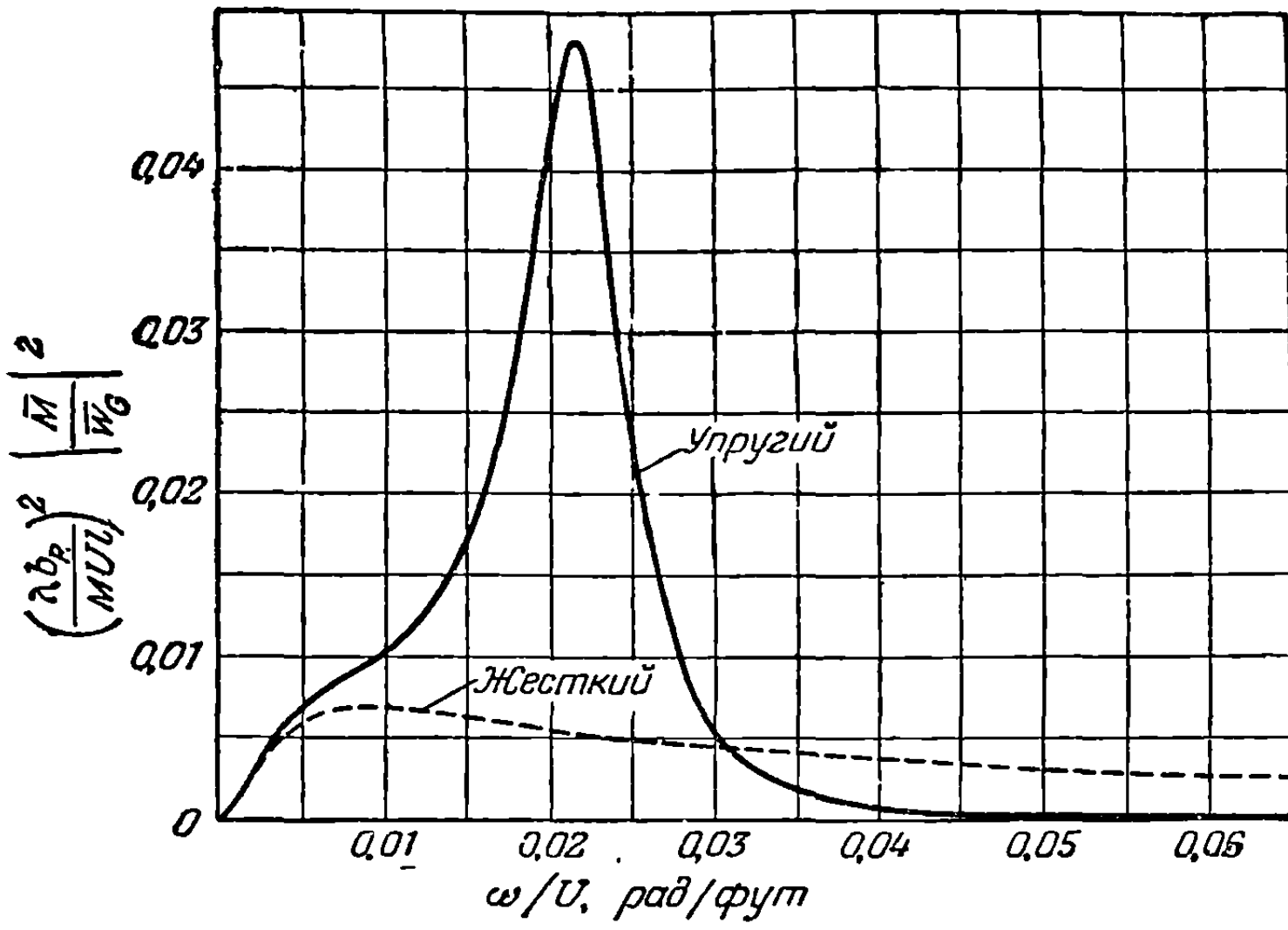
где

$$\begin{aligned} A'_{11} &= \frac{2b_R}{Sl} \int_0^l a^2(\eta) \eta d\eta = 0,1965, & A'_{12} &= \frac{2b_R}{Sl} \int_0^l a^2(\eta) \varphi_2(\eta) \eta d\eta = 0,2841, \\ B'_{11} &= \frac{2b_R}{Sl} \int_0^l a(\eta) \eta d\eta = 0,2163, & B'_{12} &= \frac{2b_R}{Sl} \int_0^l a(\eta) \varphi_2(\eta) \eta d\eta = 0,3779, \\ \gamma'_1 &= \frac{1}{Ml} \int_0^l m(\eta) \eta d\eta = 0,1224, & \gamma'_2 &= \frac{1}{Ml} \int_0^l m(\eta) \varphi_2(\eta) \eta d\eta = 0,1166. \end{aligned}$$

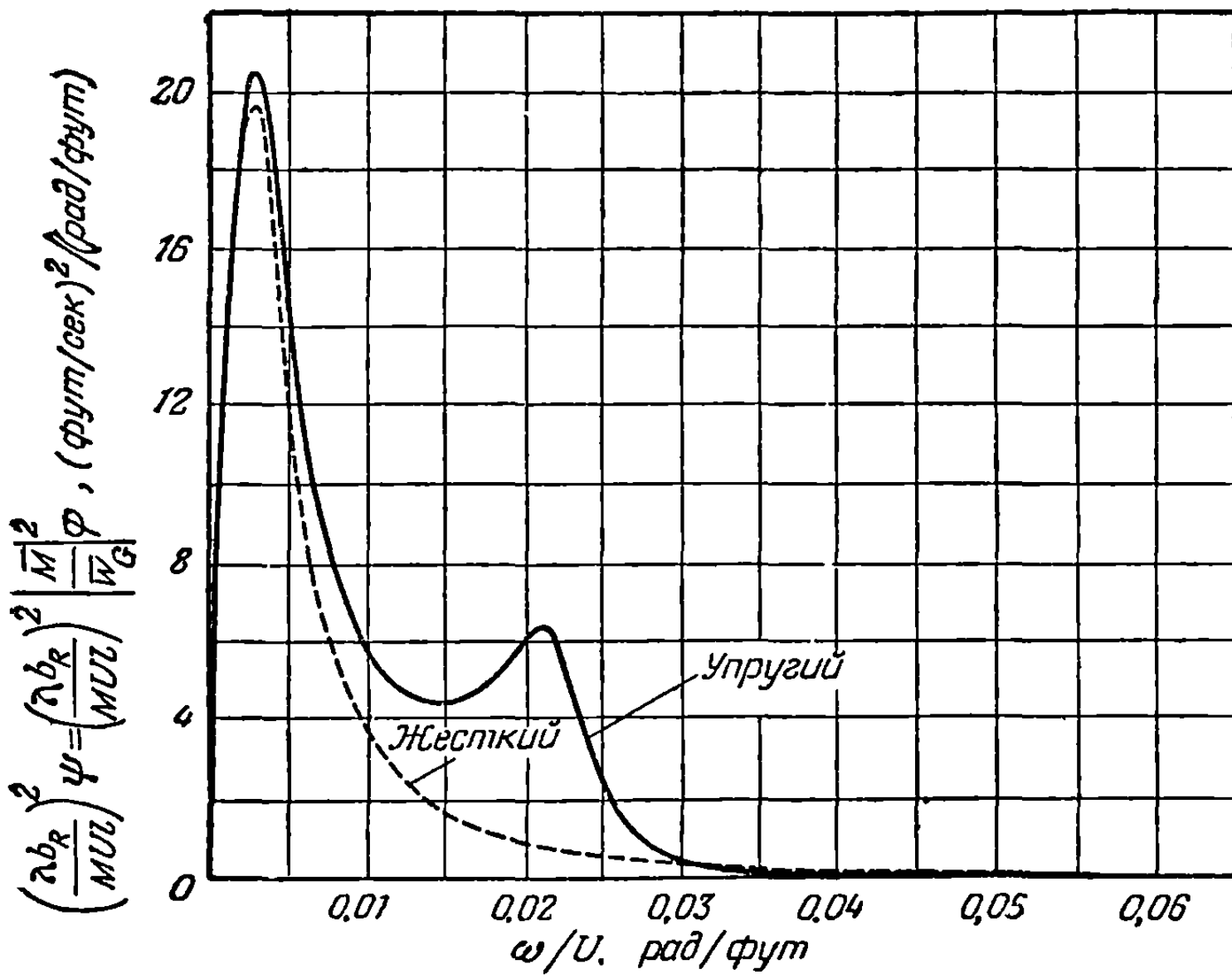
Уравнения (b) решаются численно для отдельных значений  $k$  в интервале от  $k = 0$  до  $k = 2,0$ . Для каждого значения  $k$  определяются действительная и мнимая части комплексных величин  $\frac{\bar{\xi}_1}{b_R(\bar{\omega}_G/U)}$  и  $\frac{\bar{\xi}_2}{b_R(\bar{\omega}_G/U)}$ . Таким образом, для каждого отдельного значения

$k$  комплексная функция проводимости, определяемая выражением (c), может быть оценена численно. Функция проводимости имеет действительную и мнимую части. Например,

$$\frac{\bar{M}(k)}{\bar{\omega}_G} = R(k) + I(k), \quad (d)$$



Фиг. 10-26. Функция проводимости для изгибающего момента у корня крыла.



Фиг. 10-27. Спектр энергии изгибающего момента у корня крыла.

где  $R$  и  $I$  — соответственно действительная и мнимая части. Квадрат абсолютного значения функции проводимости, являющийся действительным числом, определяется простым суммированием квадратов действительной и мнимой частей

$$\left| \frac{\overline{M}(k)}{\overline{\omega}_G} \right|^2 = R^2(k) + I^2(k). \quad (e)$$

В настоящей задаче квадрат абсолютной величины функции проводимости вычисляется для тех же первоначально выбранных значений  $k$ . Результаты изображены на фиг. 10-26. На этой фигуре для удобства по оси ординат отложена величина

$$\left( \frac{\lambda b_R}{MUI} \right)^2 \left| \frac{\overline{M}(\omega/U)}{\overline{\omega}_G} \right|^2,$$

а по оси абсцисс величина  $\omega/U$ . Следует отметить, что на фиг. 10-26 помещены также результаты для жесткого самолета (см. пунктирную кривую). Последние получаются из тех же самых уравнений, которые были даны выше, если положить  $\overline{\xi}_2$  равным нулю. Спектр энергии изгибающего момента получается из уравнений (10-156)

$$\Psi\left(\frac{\omega}{U}\right) = \left| \frac{\overline{M}(\omega/U)}{\overline{\omega}_G} \right|^2 \Phi\left(\frac{\omega}{U}\right). \quad (f)$$

Если перемножить соответствующие ординаты фиг. 10-25 и 10-26, то получатся ординаты кривой

$$\left( \frac{\lambda b_R}{MUI} \right)^2 \Psi.$$

Эти величины, нанесенные на фиг. 10-27 в виде зависимости от  $\omega/U$ , умножением на  $(\lambda b_R/MUI)^2$  могут быть преобразованы в спектр энергии изгибающего момента у корня.

Кривые на фиг. 10-27 ясно показывают различные реакции, обусловленные различными частотными компонентами в атмосфере. Первый пик, при  $\omega/U = 0,003$ , обусловлен вертикальным перемещением, и упругость крыла оказывает на него мало влияния. Второй пик на сплошной кривой связан со степенью свободы, соответствующей основной форме движения изгиба; аналогичного пика на пунктирной кривой, соответствующей жесткому самолету, не существует. Таким образом, степень свободы, соответствующая основной форме движения изгиба упругого самолета, выбирает, или, иначе, „настроена“ в атмосфере на компоненту с частотой, приблизительно равной 0,0215.

Если взять площадь под кривой фиг. 10-25, то можно получить среднее значение квадрата скорости порыва:

$$\overline{\omega}_G^2 = \int_0^{\infty} \frac{0,060}{0,000004 + (\omega/U)^2} d\left(\frac{\omega}{U}\right) = 47,12 \text{ (фут/сек)}^2. \quad (g)$$

Если взять площади под кривыми фиг. 10-27 и применить затем формулу (10-178), то можно получить среднее значение квадратов изгибающих моментов

$$\begin{aligned} \overline{M}_{(\text{упруг.})}^2 &= 0,2023 \left( \frac{MUI}{\lambda b_R} \right)^2 = 1,2115 \times 10^{10} \text{ (фунт/фут)}^2, \\ \overline{M}_{(\text{жестк.})}^2 &= 0,1400 \left( \frac{MUI}{\lambda b_R} \right)^2 = 0,8384 \times 10^{10} \text{ (фунт/фут)}^2. \end{aligned} \quad (h)$$

Наконец, среднее квадратическое значение коэффициента динамической перегрузки, имеющее некоторое значение для оценки влияния упругости крыла на напряжения в крыле, равно

$$\sqrt{\frac{\overline{M}_{(\text{упруг.})}^2}{\overline{M}_{(\text{жестк.})}^2}} = 1,202. \quad (i)$$

## Глава 11

# ТЕОРИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЯВЛЕНИЙ АЭРОУПРУГОСТИ

**11-1. Введение.** Экспериментальные исследования в области аэроупругости служат двум главным целям. Они оказывают руководящее влияние, необходимое для развития всякой плодотворной теории, и решают непосредственные практические задачи в обширных областях, где существующая теория не является еще надежной. Испытания в аэродинамических трубах моделей с соответствующим образом подобранными массовыми и жесткостными свойствами, в особенности в тех случаях, когда имеют дело с флаттером, часто дают исследователю больше, нежели эквивалентные усилия в области аналитических расчетов или даже испытания полноразмерных самолетов. В процессе таких опытов было создано много новых ценных методов и приемов, которые распространялись только устно и публиковались в отдельных статьях. С целью создания более полного источника информации оставшиеся главы посвящены изложению основных понятий экспериментальной аэроупругости.

Рациональный подход к проектированию и использованию моделей требует полного понимания теории моделирования, которая и является предметом настоящей главы. В гл. 12 разбираются задачи проектирования и производства моделей, а в гл. 13 — техника эксперимента.

**11-2. Понятие о размерности.** Теория моделирования (применяется ли она к самолетам или к химическим процессам) должна основываться на ясном определении понятия о размерности и на знакомстве с принципами анализа размерностей. По этой причине мы начнем с обзора основных свойств научных систем измерения. В основном необходимость в „размере“ возникает тогда, когда желают измерить некоторую физическую величину. Так, например, измерение расстояния требует понятия длины. Аналогично, измерение скорости требует как понятия времени, так и понятия длины. Измерение расстояния требует, конечно, ясного правила, с помощью которого числа соединяются с расстояниями. Используемое обычно правило указывает, что мерой заданного расстояния является число раз, которое единица длины может быть уложена на этом расстоянии. Аналогичным образом, измерение отрезка времени требует применения единичного интервала времени. Вследствие этого мера расстояния зависит от величины принятой единицы длины, а именно: мера обратно пропорциональна единице длины. Эта характеристика обычных систем измерения ведет к важному заключению, что отношение мер двух расстояний совершенно не зависит от величины единицы, применявшейся при их измерении. Например, удлинение несущей поверхности не зависит от того, использовались ли при измерении размаха и хорды дюймы или метры. Все системы измерения, применяемые в научной практике, обладают этим свойством, являющимся основой анализа размерностей.

В процессе измерения физических величин скоро становится очевидным, что имеется два типа величин. К первому, самому простому, относятся величины, каждая из которых может быть легко измерена прямо в своих собственных единицах. Ко второму относятся величины, которые выводятся из величин первого типа согласно некоторому правилу. В задаче, включающей



определенный ряд физических величин, все физические величины могут быть выведены из небольшого числа величин первого типа, которые называются поэтому *основными* величинами. Остальные величины называются *производными* величинами. Например, в задачах статики сооружений все производные величины, подобные изгибающему моменту и модулю упругости, могут быть выведены из основных величин — силы и длины. В механике в качестве основных величин удачно выбраны масса, длина и время, тогда как в аэродинамике сжимаемой жидкости и термодинамике в качестве четвертой основной величины часто добавляется температура. Следует отметить, что нет серьезного довода за то, чтобы в качестве основных величин всегда выбирались определенные величины. Скорее вследствие принятой системы измерений удобно называть некоторые величины основными, а другие производными,

Важное ограничение, которое должно быть наложено на правило образования комбинации, служащей для вывода производных величин из основных, вытекает из упомянутого выше свойства обычных научных систем измерения. Это свойство заключается в том, что отношение двух значений физической величины (как основной, так и производной) не зависит от величины единиц основных величин. Так, отношение величин двух скоростей оказывается одинаковым независимо от того, являются ли единицами измерения мили и часы или футы и секунды. Бриджмен [11-1] показывает, что это накладывает ограничение на вид зависимости, с помощью которой мера производной величины может быть выражена через меры  $P_1, P_2, \dots, P_m$  соответствующего ряда  $m$  основных величин. Зависимость эта должна иметь вид

$$S = CP_1^{d_1} P_2^{d_2} P_3^{d_3} \dots P_m^{d_m}, \quad (11-1)$$

где  $C$  — безразмерное число. Таким образом, каждая производная величина выражается в виде числа, умноженного на положительные или отрицательные степени мер основных величин. Показатель  $d_k$  называется „размерностью“ производной величины по отношению к основной величине  $P_k$  и для обычного ряда основных величин является целым числом.

Для того чтобы привести несколько примеров из механики, выберем в качестве основных величин массу, длину и время и припишем их мерам символы  $M, L$  и  $T$  соответственно. Тогда мера силы выразится в виде  $CM^1L^1T^{-2}$ . Аналогично, мера плотности будет равна  $CM^1L^{-3}$ , мера давления  $CM^1L^{-1}T^{-2}$  и мера скорости  $CL^1T^{-1}$ .

Если единицами измерения в равенстве, определяющем силу, являются фунты, слагги, футы и секунды или дины, граммы, сантиметры и секунды, то постоянная  $C$  равна единице. В отличие от силы, другие физические величины, такие, как плотность, давление и скорость, не имеют специальных названий для своих обычно употребляемых единиц и вместо этого выражаются через названия других единиц. Так, единица плотности выражается через основные единицы, слагги и футы, в виде *слаг фут<sup>3</sup>*. Давление обычно выражается через одну производную величину и одну основную: *фунт/фут<sup>2</sup>*. Конечно, в обоих случаях постоянная  $C$  равна единице. Для скорости имеется менее известная единица — узел, для которого постоянная  $C$  не равна единице, если длина не измеряется в морских милях, а время в часах.

Важно понять, что форма выражения для величины силы в виде

$$F = CM^1L^1T^{-2} \quad (11-2)$$

получила всеобщее распространение главным образом вследствие практической важности второго закона Ньютона, гласящего, что произведение массы тела на ускорение пропорционально приложенной силе. Нет серьезного препятствия к тому, чтобы размерность силы определять на основании закона тяготения Ньютона. Этот закон утверждает, что сила притяжения между двумя

массами пропорциональна произведению масс, деленному на квадрат расстояния между ними. Таким образом, меру силы можно было бы выразить в виде

$$F = CM^2L^{-2}. \quad (11-3)$$

Очевидно, что эти два выражения производной величины, силы, несовместимы и не должны употребляться одновременно. Последовательное использование первой формулировки требует записи закона тяготения в виде

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (11-4)$$

где  $\gamma$  имеет размерность  $M^{-1}L^3T^{-2}$  и является универсальной гравитационной постоянной. Последовательное (но менее обычное) использование второй формулировки потребовало бы записи второго закона в форме

$$F = \beta m \frac{d^2s}{dt^2}, \quad (11-5)$$

где  $\beta$  могла бы быть названа „универсальной инерциальной постоянной“ и имела бы размерность  $M^1L^{-3}T^2$ . В этой книге будет применяться первая и более обычная формулировка, основанная на втором законе Ньютона. Тем не менее важно знать о существовании размерных постоянных, таких, как гравитационная постоянная, скорость света и газовая постоянная, и не путать их с безразмерным числом  $C$ , которое зависит только от величины единиц измерения.

**11-3. Уравнения движения.** Для того чтобы описать некоторую физическую картину с помощью математического уравнения, нужно использовать один или большее число физических принципов. Типичными из этих принципов как в механике, так и в аэродинамике являются законы Ньютона и принцип сохранения материи. Применение соответствующих принципов к данной ситуации выражается в одном или более уравнений, содержащих в качестве аргументов соответствующие физические величины. Этими аргументами могут быть основные величины, производные величины или размерные постоянные (имеющие ту же самую форму, что и производные величины). Выведенное таким образом уравнение, если оно включает необходимые размерные постоянные, будет существенно независимо от изменения величины единиц измерения основных величин. Такое изменение основной единицы измерения приведет просто к умножению каждого члена уравнения на один и тот же множитель, потому что размерности всех членов уравнения одинаковы. Другими словами, поскольку физическое состояние системы не изменяется при изменении величины основных единиц, то уравнение, полностью описывающее физическое состояние, также не должно зависеть от величины основной единицы измерения. Такое уравнение называется „полным уравнением“. Только такого типа уравнения и рассматриваются в этой книге.

Единственным примером, когда изменение величины основной единицы не изменяет коэффициент при каждом члене в полном уравнении, является случай, когда члены уравнения имеют нулевую размерность по отношению к этой частной основной величине. Например, уравнение неускоренного движения частицы

$$x = x_0 + v_0 t \quad (11-6)$$

не изменится, если основная величина — время измеряется не в секундах, а в часах. Действительно, деление уравнения на  $x_0$  приводит к тому, что каждый член уравнения становится безразмерным по отношению к обоим основным величинам — времени и длине. Таким образом, безразмерная форма уравнения

$$\frac{x}{x_0} = 1 + \frac{v_0 t}{x_0} \quad (11-7)$$

совершенно не зависит от величины единицы измерения. Более того, видно, что в безразмерной форме уравнение стало проще в том отношении, что теперь нужно принимать во внимание только две безразмерные переменные  $(x/x_0)$  и  $(v_0 t/x_0)$ , вместо четырех первоначальных физических величин  $x$ ,  $x_0$ ,  $v_0$  и  $t$ .

Эта идея записи полного уравнения в безразмерной форме с меньшим числом аргументов была обобщена Баккингом [11-2] и явно выражена Бриджменом [11-1]. Она суммируется в „П-теореме“, которая гласит, что физическое явление может быть описано посредством полного уравнения

$$\psi(S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_n) = 0 \quad (11-8)$$

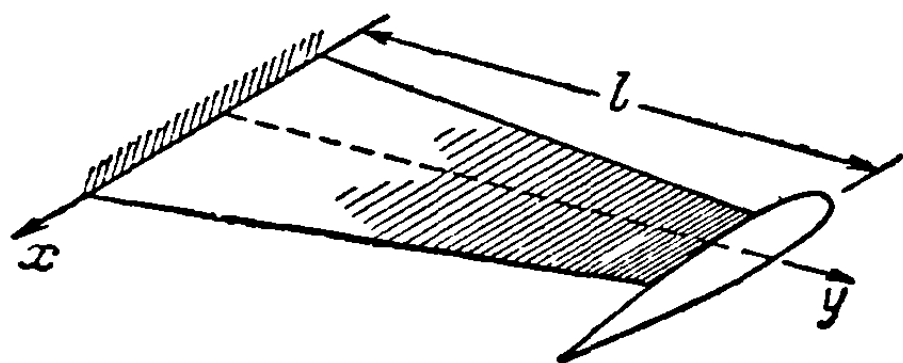
(где  $n$  аргументов включают все основные величины, производные величины и размерные постоянные, которые необходимо учитывать в задаче); это уравнение можно записать в форме

$$\varphi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \dots, \Pi_{n-m}) = 0, \quad (11-9)$$

где  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}$  представляет собой  $(n - m)$  независимых комбинаций аргументов  $S_1, \dots, S_n$ , являющихся безразмерными величинами по отношению к  $m$  основным величинам. Вид этих безразмерных величин  $\Pi$  может быть определен с помощью формальной процедуры (11-1), но обычно его можно определить с помощью непосредственного исследования и общих соображений. Типичными величинами  $\Pi$ , которыми обычно пользуются, являются удлинение, приведенная частота, число Маха и число Рейнольдса.

В теории моделирования преимущества использования безразмерных переменных носят двойной характер. Во-первых, задача удобно формулируется при помощи минимального числа переменных. Во-вторых, поскольку безразмерное уравнение совершенно не зависит от масштабного эффекта (т. е. от изменений величин основных единиц измерения), величины безразмерных переменных должны быть одинаковы для исходной задачи и для ее модели. Эта идея будет детально разобрана в следующих пунктах этой главы.

**11-4. Законы подобия для колеблющейся модели.** В качестве первого примера теории моделирования рассмотрим задачу определения с помощью достаточно малой модели частот и форм собственных колебаний *свободнонесущего суживающегося крыла с сосредоточенной массой на его конце*. Как видно на фиг. 11-1, полуразмах крыла равен  $l$  и вес груза на конце есть  $M_T$ .



Фиг. 11-1. Свободнонесущее суживающееся крыло с массой на конце.

Крыло подходит к классу конструкций, хорошо описываемых теорией простой балки. Текущая масса крыла равна  $m(y)$ , переменный момент инерции площади равен  $I(y)$  и прогиб  $w(y, t)$ .

Задача проектирования подходящей модели этого крыла будет решаться с помощью метода, предложенного в предыдущем пункте. Таким образом, для того чтобы установить входящие в задачу параметры, нужно будет

изучить основное уравнение движения. Эти параметры будут скомбинированы в подходящий ряд безразмерных параметров с тем, чтобы уравнение движения могло быть записано в безразмерной форме, включающей минимальное число переменных. Поскольку это уравнение никоим образом не зависит от изменения величин первоначальных единиц измерения, оно с равным успехом применяется к полноразмерному крылу и к любой модели, предназначенной для имитации полноразмерного крыла. Такое уравнение прямо указывает те безразмерные параметры, которые нужно перенести на модель с тем, чтобы ее безразмерные характеристики были идентичны характеристикам, получаемым из опытов с полноразмерным крылом.

Масштабные коэффициенты, действительно используемые при проектировании модели, определяются теми практическими ограничениями, которые накладываются на модель. К ним могут относиться: допустимый размер модели, методы производства модели или, может быть, имеющиеся в распоряжении инструменты и аппаратура.

Если все безразмерные параметры, входящие в уравнение движения, оказываются независимыми, то число отдельных ограничений, относящихся к проектированию, которое может быть наложено на модель, равно числу подлежащих определению масштабных коэффициентов, т. е. числу основных величин, входящих в задачу. В более простых задачах одна пара безразмерных параметров (или более) может появиться только в определенной комбинации. В этих случаях при проектировании модели можно наложить дополнительные ограничения.

Тогда, если следовать этому методу, первый шаг заключается в том, чтобы написать соответствующее уравнение движения

$$[EI(y)w''(y, t)]'' + m(y)\ddot{w}(y, t) = 0 \quad (3-7)$$

с подходящими граничными условиями при  $y=0$  и  $y=l$ , для того чтобы учесть характер закрепления корневого сечения и консоли и влияние сосредоточенной концевой массы  $M_T$ . Как показано в гл. 3, это уравнение может быть разделено на два полных дифференциальных уравнения [уравнения (3-10) и (3-11)]. Искомые формы колебаний  $W(y)$  и частоты  $\omega$  являются решениями уравнения (3-11):

$$[EI(y)W''(y)]'' - \omega^2 m(y)W(y) = 0. \quad (3-11)$$

Размерность каждого из параметров, входящих в это уравнение, может быть выражена через комбинации основных величин — массы, длины и времени ( $M$ ,  $L$  и  $T$ ). Однако перед тем, как сделать это, следует заметить, что некоторые из параметров включают в себя два понятия: понятие изменения вместе с  $y$  и понятие размерной величины. Применение обозначения, которое разделяет эти два понятия, делает предстоящие этапы расчета более ясными и выполняется следующим образом. Пусть

$$m(y) = m_{\text{корн.}} m_N(y), \quad (11-10)$$

где  $m_{\text{корн.}}$  — размерная величина текущей массы в корневом сечении и  $m_N(y)$  — величина, характеризующая изменение массы вдоль крыла, нормированная таким образом, что в корневом сечении она равна единице. Таким образом,  $m_N(y)$  представляет распределение массы, независимое от действительной величины массы в любом сечении. Это, конечно, величина безразмерная. Пусть, аналогично,

$$W(y) = W_{\text{кон.}} \varphi(y), \quad (11-11)$$

$$I(y) = I_{\text{корн.}} I_N(y). \quad (11-12)$$

Теперь уравнение движения примет вид

$$[EI_{\text{корн.}} I_N(y) \varphi''(y)]'' - \omega^2 m_{\text{корн.}} m_N(y) \varphi(y) = 0. \quad (11-13)$$

Размерности параметров имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} y, l &\sim L, & E &\sim ML^{-1}T^{-2}, & I_{\text{корн.}} &\sim L^4, \\ \omega &\sim T^{-1}, & m_{\text{корн.}} &\sim ML^{-1}, & M_T &\sim M, \\ I_N(y), \varphi(y), m_N(y) &\sim \text{безразмерные.} \end{aligned} \quad (11-14)$$

Эти размерности можно скомбинировать так, что получится ряд безразмерных величин

$$\frac{y}{l}, \frac{I_{\text{корн.}}}{l^4}, \frac{M_T}{m_{\text{корн.}} l}, \frac{\omega^2 m_{\text{корн.}}}{E}, I_N(y), \varphi(y), m_N(y). \quad (11-15)$$

Как было указано в П-теореме, количество безразмерных параметров (11-15) на три единицы меньше количества безразмерных параметров в (11-14), причем безразмерные параметры образуют полный ряд, потому что любой другой безразмерный параметр, образованный из того же размерного ряда (11-14), может быть также получен как комбинация безразмерных параметров полного ряда (11-15).

Безразмерная форма уравнения движения будет иметь теперь следующий вид:

$$\left[ I_N \left( \frac{y}{l} \right) \varphi'' \left( \frac{y}{l} \right) \right]'' - \left[ \frac{l^4 \omega^2 m_{\text{корн.}}}{EI_{\text{корн.}}} \right] m_N \left( \frac{y}{l} \right) \varphi \left( \frac{y}{l} \right) = 0 \quad (11-16)$$

с соответствующими граничными условиями при  $y/l = 0$  и  $y/l = 1$ , которые включают как  $M_T/m_{\text{корн.}}$ , так и параметры, входящие в написанное выше уравнение. Штрихи обозначают здесь производную по переменной  $y/l$ , а не по  $y$ . Из формы уравнения видно, что параметры  $\omega^2 m_{\text{корн.}}/E$  и  $I_{\text{корн.}}/l^4$  в этой задаче независимы друг от друга и входят в уравнение только в комбинации  $\omega^2 l^4 m_{\text{корн.}}/EI_{\text{корн.}}$ . Искомые формы и частоты собственных колебаний в безразмерной форме  $\varphi(y/l)$  и  $\omega^2 l^4 m_{\text{корн.}}/EI_{\text{корн.}}$ , очевидно, можно определить из испытания любой модели с правильным распределением момента инерции площади  $I_N(y/l)$ , правильным распределением массы  $m_N(y/l)$  и с соответствующей сосредоточенной массой на конце крыла.

Для того чтобы определить размерные характеристики модели, нужно исследовать независимые ограничения, определяющие три масштабных множителя. Принимая, что по практическим и экономическим соображениям размер модели ограничен  $\frac{1}{10}$  натуральной величины крыла, масштабный множитель длины можно записать в виде

$$\frac{L_m}{L_w} = \frac{1}{10}. \quad (11-17)$$

Принимая также, что имеющееся измерительное оборудование лучше всего приспособлено к интервалу частот, превышающему ожидаемый интервал частот колебаний полноразмерного крыла, следует спроектировать модель таким образом, чтобы частоты ее колебаний превышали частоты колебаний крыла примерно в три раза, т. е.

$$\frac{T_m}{T_w} = \frac{1}{3}. \quad (11-18)$$

Третье конструктивное ограничение может состоять в том, что модель должна представлять собой металлическую конструкцию, так что ее внутреннее демпфирование является величиной того же порядка, что и демпфирование для натурного крыла. Таким образом, отношение модулей упругости определяется выбором материала. Если в модели используется сталь, а в крыле — алюминиевый сплав, то <sup>1)</sup>

$$\frac{E_m}{E_w} = \frac{3}{1} = \frac{(ML^{-1}T^{-2})_m}{(ML^{-1}T^{-2})_w}. \quad (11-19)$$

Разрешив это соотношение относительно масштабного множителя для третьей основной величины, получим

$$\frac{M_m}{M_w} = \frac{3}{1} \frac{L_m}{L_w} \left( \frac{T_m}{T_w} \right)^2 = \frac{1}{30}. \quad (11-20)$$

По этим трем масштабным множителям основных величин — массы, длины и времени — можно определить все необходимые размерные характеристики модели,

<sup>1)</sup> Индексы  $m$  и  $w$  относятся соответственно к модели и к крылу. — Прим. ред.



входящие в уравнение движения (11-16). Например, груз на конце модели можно определить из соотношения

$$(M_T)_m = \frac{1}{30} (M_T)_w, \quad (11-21)$$

и характерная величина текущей массы будет равна

$$(m_{\text{корн.}})_m = \frac{1}{30} \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} (m_{\text{корн.}})_w = \frac{1}{3} (m_{\text{корн.}})_w. \quad (11-22)$$

Момент инерции площади равен

$$(I_{\text{корн.}})_m = \frac{1}{10^4} (I_{\text{корн.}})_w. \quad (11-23)$$

Когда величины всех этих характеристик модели вычислены, их можно использовать для определения всех других характеристик модели, которые не входят в уравнение (11-16). Обычно нельзя вычислять эти последние величины с помощью масштабных множителей для массы, длины и времени.

Например, нельзя сделать заключение о том, что максимальные напряжения в модели для взятого в определенном масштабе прогиба, соответствующего первой форме собственных колебаний, можно определить с помощью умножения напряжений в полноразмерной модели на соответствующие масштабные множители. Максимальное напряжение в данном поперечном сечении зависит не только от величины местного изгибающего момента и момента инерции площади, но также и от расстояния между нейтральной осью и крайним наружным волокном. Хотя две первые величины берутся в определенном масштабе, последняя зависит, например, от формы поперечного сечения, выбранной для модели, и нет причины, чтобы эта форма была в точности такой же, как и форма полноразмерной конструкции; для того чтобы получились желаемые величины частот и формы колебаний, площадь поперечного сечения модели должна лишь обладать соответствующим моментом инерции. В большинстве аэроупругих моделей характеристики конструкции в действительности определяются при помощи (частично неполноценных) легко изготавливаемых моделей, которые только слабо напоминают полноразмерную конструкцию.

Так, модель может быть изготовлена из стали с полуразмахом в  $\frac{1}{10}$  натурального с массой в  $\frac{1}{30}$  полной массы натурального крыла с теми же самыми распределениями массы и жесткости, что и у полноразмерного крыла. Тогда частоты колебаний модели для соответствующей формы колебаний будут в три раза больше частот соответствующих форм колебаний крыла, и формы колебаний модели  $\varphi(y/l)$  будут идентичны соответствующим формам колебаний крыла. Конечно, если ограничения, накладываемые на конструкцию модели, отличались бы от принятых выше, то масштабные множители были бы другими<sup>1)</sup>. Измеренные же частоты после преобразования к натуре оказались бы в точности теми же самыми.

В качестве второго примера теории моделирования рассмотрим более общую задачу о колебаниях, сформулированную в форме интегрального, а не дифференциального уравнения, которое было использовано выше. Допустим, что

<sup>1)</sup> В этом примере, как указывалось ранее, два безразмерных отношения  $I_{\text{корн.}}/l^4$  и  $\omega^2 m_{\text{корн.}}/E$  не входят в уравнение независимо друг от друга, а только в виде комбинации  $\omega^2 l^4 m_{\text{корн.}}/EI_{\text{корн.}}$ . В результате такого необычного случая при моделировании нужно сохранить постоянным только комбинированный параметр. Вследствие этого можно наложить четвертое независимое ограничение. Например, если масштабный множитель для  $I_{\text{корн.}}$  выбирается отличным от  $10^4$  и если масштабный множитель для  $m_{\text{корн.}}$  отличается от 3, то величина  $\omega^2 l^4 m_{\text{корн.}}/EI_{\text{корн.}}$  будет неизменной. При преобразовании нужно также изменить масштабный множитель для  $M_T$  с тем, чтобы  $M_T/m_{\text{корн.}}l$  оставить неизменным.

мы хотим построить модель колебаний *полного свободного самолета*, для того чтобы определить формы и частоты колебаний.

Полное уравнение, описывающее колебания самолета, изображенного на фиг. 3-21, выведено в гл. 3 в виде

$$\omega^2 \int_S \int G(x, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta = W(x, y), \quad (3-172)$$

где  $W(x, y)$  — формы собственных колебаний,  $\omega$  — частоты собственных колебаний,  $\rho(x, y)$  — двумерное распределение массы и

$$G(x, y; \xi, \eta) = C(x, y; \xi, \eta) - \int_S \int \zeta(r, s; \xi, \eta) \left[ \frac{1}{M} + \frac{yr}{I_x} + \frac{xs}{I_y} \right] \rho(r, s) dr ds. \quad (3-173)$$

В уравнении (3-173)  $C(x, y; \xi, \eta)$  является двумерной функцией упругого влияния, а  $M$ ,  $I_y$  и  $I_x$  характеризуют массовые свойства жесткого самолета. Площадь интегрирования  $S$  можно определить через полуразмах  $l$ . Как и в предыдущей задаче, некоторые переменные содержат в себе как понятие распределения по поверхности самолета, так и понятие безразмерной величины. Для того чтобы разделить эти понятия, положим

$$\rho(x, y) = \rho_0 \rho_N(x, y), \quad (11-24)$$

где величина  $\rho_N(x, y)$  нормирована таким образом, чтобы в сечении  $x=0$ ,  $y=0$  она равнялась единице. Аналогично, положим

$$C(x, y; \xi, \eta) = C_{\text{кон.}} C_N(x, y; \xi, \eta), \quad (11-25)$$

где  $C_{\text{кон.}}$  — величина  $C$  при  $x=\xi=0$ ,  $y=\eta=l$ . Форма колебаний выражается через нормированную форму с помощью соотношения

$$W(x, y) = W_{\text{кон.}} \varphi(x, y). \quad (11-26)$$

Для того чтобы представить интегральное уравнение в безразмерной форме, размерность каждого параметра должна быть сначала выражена через три первоначальные величины — массу, длину и время. Таким образом,

$$\begin{aligned} \omega &\sim T^{-1}, & \rho_0 &\sim ML^{-2}, & \left. \begin{array}{l} x, y \\ \xi, \eta \\ r, s, b \end{array} \right\} &\sim L, & (11-27) \\ C_{\text{кон.}} &\sim M^{-1}T^2, & W_{\text{кон.}} &\sim L, & & & \\ M &\sim M, & I_y, I_x &\sim ML^2, & & & \\ \rho_N(x, y), C_N(x, y; \xi, \eta), \varphi(x, y) &\sim \text{безразмерные.} \end{aligned}$$

Из этих параметров легко можно получить соответствующий ряд безразмерных отношений. Согласно  $\Pi$ -теореме число безразмерных независимых параметров должно быть на три единицы меньше числа приведенных выше параметров, так как в настоящей задаче имеются три основные величины. Безразмерные параметры имеют вид

$$\begin{aligned} \omega^2 M C_{\text{кон.}}, & \frac{\rho_0 l^2}{M}, & \frac{I_x}{M l^2}, & \frac{I_y}{M l^2}, & \frac{W}{l}, & \frac{x}{l}, & \frac{y}{l}, \\ \frac{\xi}{l}, & \frac{\eta}{l}, & \frac{r}{l}, & \frac{s}{l}, & \rho_N, & C_N, & \varphi. \end{aligned} \quad (11-28)$$

Интегральное уравнение может быть записано в виде

$$\left( \omega^2 M C_{\text{кон.}} \right) \left( \frac{\rho_0 l^2}{M} \right) \int_S \int \frac{G\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}; \frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}\right)}{C_{\text{кон.}}} \varphi\left(\frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}\right) \rho_N\left(\frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}\right) d\frac{\xi}{l} d\frac{\eta}{l} = \varphi\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}\right), \quad (11-29)$$



где

$$\frac{G\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}; \frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}\right)}{C_{\text{кон.}}} = C_N\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}; \frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}\right) - \int_S \int C_N\left(\frac{r}{l}, \frac{s}{l}; \frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}\right) \times \\ \times \left[1 + \left(\frac{Ml^2}{I_x}\right) \frac{y}{l} \frac{r}{l} + \left(\frac{Ml^2}{I_y}\right) \frac{x}{l} \frac{s}{l}\right] \left(\frac{\rho_0 l^2}{M}\right) \rho_N\left(\frac{r}{l}, \frac{s}{l}\right) d\frac{r}{l} d\frac{s}{l}. \quad (11-30)$$

Таким образом, любая модель с одинаковым распределением масс  $\rho_N$  (и поэтому с одинаковыми значениями  $\rho_0 l^2/M$ ,  $I_y/Ml^2$ ,  $I_x/Ml^2$ ) и одинаковым распределением жесткости  $C_N$  при одинаковой геометрии (безразмерной площади интегрирования) будет иметь такие же формы  $\varphi$  и безразмерные частоты колебаний  $\omega^2 M C_{\text{кон.}}$ , как и полноразмерный самолет. Три масштабных множителя, определяющие размерные величины распределений массы и жесткости  $(\rho_0)_m$  и  $(C_{\text{кон.}})_m$ , а также размер модели, определяются, как и в предыдущей задаче, тремя независимыми проектными ограничениями, накладываемыми на модель. Эти ограничения могут быть выражены, например, как ограничение размера модели, желание имитировать жесткости различных компонент, используя единственный металлический лонжерон подходящих размеров, и другими многочисленными способами.

**11-5. Законы подобия для систем, нагруженных установившимися воздушными нагрузками.** В качестве следующего примера приложения теории моделирования рассмотрим задачу об исследовании статических упругих деформаций несущей поверхности, находящейся под действием воздушных нагрузок в несжимаемом потоке. В гл. 8 для случаев простого двумерного крыла и стреловидных и суживающихся поверхностей были изложены соответствующие аналитические методы определения таких деформаций и сопровождающего их распределения воздушной нагрузки.

Угол закручивания двумерного упругоопертого крыла в воздушном потоке, имеющем скорость  $U$ , определялся в гл. 8 в виде

$$\theta = \frac{C^{\theta\theta} [(\partial C_L/\partial \alpha) e \alpha^r + C_{\text{МАС}} c] q S}{1 - C^{\theta\theta} (\partial C_L/\partial \alpha) q S e} \quad (8-4b)$$

(обозначения даны в п. 8-2а). Поскольку эта задача статическая, можно выбрать только две основные величины — силу ( $F$ ) и длину ( $L$ ). Очевидно, что размерности величин, входящих в уравнение (8-4b), имеют вид

$$C^{\theta\theta} \sim F^{-1} L^{-1}, \quad S \sim L^2, \quad e \sim L, \quad q \sim FL^{-2}, \quad c \sim L, \\ \theta, \alpha^r, \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}, C_{\text{МАС}} \sim \text{безразмерные величины.} \quad (11-31)$$

Непосредственным исследованием этих величин можно установить, что из них можно образовать следующие независимые безразмерные отношения:

$$C^{\theta\theta} q S c, \quad \frac{e}{c}, \quad \frac{c^2}{S}, \quad \theta, \quad \alpha^r, \quad \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}, \quad C_{\text{МАС}}. \quad (11-32)$$

Число этих отношений (как это и вытекает из П-теоремы) на две единицы меньше числа размерных параметров. В безразмерных параметрах соотношение (8-4b) примет вид

$$\theta = \frac{[(\partial C_L/\partial \alpha) (l/c) \alpha^r + C_{\text{МАС}}] (C^{\theta\theta} q S c)}{1 - (\partial C_L/\partial \alpha) (C^{\theta\theta} q S c) (e/c)}. \quad (11-33)$$

Из этого безразмерного соотношения можно видеть, что любая модель этого полужесткого крыла должна иметь один и тот же профиль крыла, направленный

по потоку ( $C_{MAC}$  и  $dC_L/d\alpha$ )<sup>1)</sup>, для любой модели должны быть одни и те же безразмерное положение упругой оси ( $e/c$ ), начальный угол атаки ( $\alpha^r$ ) и отношение аэродинамических сил к упругим ( $C^{\theta\theta}qSc$ ). Так как параметр  $c^2/S$  в действительности не входит в уравнение (11-33), то для этой задачи его воспроизведения не требуется. Два масштабных множителя определяются с помощью двух конструктивных ограничений.

Переходя теперь от этого сравнительно простого примера к случаю распределения воздушной нагрузки по *тонкой стреловидной упругой суживающейся несущей поверхности*, допустим, что самолет совершает маневр, который сообщает несущей поверхности заданное постоянное ускорение. Соответствующее интегральное уравнение можно получить из уравнений (8-170) и (8-173):

$$\mathfrak{A}[cc_i^e] = q \int_0^l \bar{C}(y, \eta) cc_i^e d\eta + \bar{f}(y), \quad (11-34)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}(y) = & q \int_0^l \bar{C}(y, \eta) cc_i^r d\eta + q \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) c_{MAC} c^2 d\eta - \\ & - g \int_0^l [C^{\theta z}(y, \eta) + C^{\theta\theta}(y, \eta) d(\eta)] mN d\eta, \quad (8-171) \end{aligned}$$

$$\bar{C}(y, \eta) = C^{\theta z}(y, \eta) + e(\eta) C^{\theta\theta}(y, \eta). \quad (8-172)$$

Оператор  $\mathfrak{A}$  определяет функциональную зависимость между распределением углов атаки и распределением подъемной силы. Форма этого оператора зависит от типа используемой аэродинамической теории. Произведение  $mNg$  представляет собой погонный вес модели, умноженный на коэффициент перегрузки, выраженный в  $g$ . Величина  $d(y)$  определяет положение центра тяжести в любом сечении.

Для того чтобы разделить понятия распределения и размерной величины, полезно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} C^{\theta z}(y, \eta) &= C_{\text{кон.}}^{\theta z} C_N^{\theta z}(y, \eta), & c(y) &= c_{\text{кон.}} c_N(y), \\ C^{\theta\theta}(y, \eta) &= C_{\text{кон.}}^{\theta\theta} C_N^{\theta\theta}(y, \eta), & e(y) &= e_{\text{кон.}} e_N(y), \\ m(y) &= m_{\text{кон.}} m_N(y), & d(y) &= d_{\text{кон.}} d_N(y). \end{aligned} \quad (11-35)$$

Размерности параметров, входящих в уравнения (11-34) и (11-35), имеют вид

$$\begin{aligned} C_{\text{кон.}}^{\theta z} &\sim F^{-1}, & C_{\text{кон.}}^{\theta\theta} &\sim F^{-1} L^{-1}, & \left\{ \begin{array}{l} l, c_{\text{кон.}} \\ y, \eta \\ d_{\text{кон.}}, e_{\text{кон.}} \end{array} \right\} &\sim L, \quad (11-36) \\ q &\sim FL^{-2}, & (gm_{\text{кон.}}) &\sim FL^{-1}, \\ \mathfrak{A} &\sim L^{-1}, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} c_i^e, c_i^r, c_{MAC}, N, C_N^{\theta z}, c_N, \\ m_N, C_N^{\theta\theta}, e_N, d_N \end{array} \right\} \sim \text{безразмерные величины.}$$

<sup>1)</sup> Следует отметить, что для того чтобы получить аэродинамические реакции одного рода на модели и на крыле, числа Рейнольдса  $\rho U c / \mu$  для них должны быть равны. Для малой модели в воздухе это потребовало бы большой скорости воздуха, что может оказаться невыполнимым. Поскольку влияние числа Рейнольдса часто является второстепенным, это ограничение обычно видоизменяется и сводится к тому, чтобы числа Рейнольдса не были меньше определенной минимальной величины.

Они могут быть скомбинированы так, что дадут безразмерный ряд

$$\begin{aligned}
 qc_{\text{кон.}} l C_{\text{кон.}}^{\theta z}, \quad \frac{c_{\text{кон.}} C_{\text{кон.}}^{\theta\theta}}{C_{\text{кон.}}^{\theta z}}, \quad \frac{qm_{\text{кон.}}}{qc_{\text{кон.}}}, \quad \frac{d_{\text{кон.}}}{c_{\text{кон.}}}, \\
 \frac{e_{\text{кон.}}}{c_{\text{кон.}}}, \quad \mathcal{U} c_{\text{кон.}}, \quad \frac{y}{l}, \quad \frac{\eta}{l}, \quad \frac{c_{\text{кон.}}}{l}.
 \end{aligned} \quad (11-37)$$

К этому ряду нужно добавить уже упомянутые выше безразмерные величины. Таким образом, уравнение примет вид

$$c_{\text{кон.}} \mathcal{U} [c_N c_l^e] = (qc_{\text{кон.}} l C_{\text{кон.}}^{\theta z}) \int_0^1 \frac{\bar{C}}{C_{\text{кон.}}^{\theta z}} c_N c_l^e d\left(\frac{\eta}{l}\right) + \bar{f}, \quad (11-38a)$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{f} = (qc_{\text{кон.}} l C_{\text{кон.}}^{\theta z}) \left\{ \int_0^1 \frac{\bar{C}}{C_{\text{кон.}}^{\theta z}} c_N c_l^e d\left(\frac{\eta}{l}\right) + \left(\frac{c_{\text{кон.}} C_{\text{кон.}}^{\theta\theta}}{C_{\text{кон.}}^{\theta z}}\right) \int_0^1 C_N^{\theta\theta} c_{m \Delta C} c_N^2 d\left(\frac{\eta}{l}\right) - \right. \\
 \left. - \left(\frac{gm_{\text{кон.}}}{qc_{\text{кон.}}}\right) N \int_0^1 \left[ C_N^{\theta z} + \left(\frac{d_{\text{кон.}}}{c_{\text{кон.}}}\right) \left(\frac{c_{\text{кон.}} C_{\text{кон.}}^{\theta\theta}}{C_{\text{кон.}}^{\theta z}}\right) C_N^{\theta\theta} d_N \right] m_N d\left(\frac{\eta}{l}\right) \right\}, \quad (11-38b)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{C}}{C_{\text{кон.}}^{\theta z}} = C_N^{\theta z} + \left(\frac{e_{\text{кон.}}}{c_{\text{кон.}}}\right) \left(\frac{c_{\text{кон.}} C_{\text{кон.}}^{\theta\theta}}{C_{\text{кон.}}^{\theta z}}\right) C_N^{\theta\theta} e_N. \quad (11-38c)$$

Так как  $N$  всегда входит в виде произведения с  $gm_{\text{кон.}}/qc_{\text{кон.}}$ , то в этой задаче эти два параметра не являются независимыми и могут быть объединены в один параметр  $Ngm_{\text{кон.}}/qc_{\text{кон.}}$ .

Для того чтобы найти распределение нагрузки  $c_N c_l^e$  на натурном крыле, необходимо сконструировать модель, которая имела бы:

а) одинаковую с натурным крылом аэродинамическую форму, т. е. форма в плане, профиль крыла и первоначальная „жесткая“ кривая должны быть одинаковы, для того чтобы имело место одинаковое распределение центров давления, коэффициентов момента и для того чтобы аэродинамические операторы  $c_{\text{кон.}} \mathcal{U}$  были одинаковы (конечно, параметры, подобные числу Маха и числу Рейнольдса, также могут играть важную роль);

б) одинаковое с натурным крылом отношение аэродинамической жесткости к упругой жесткости  $qc_{\text{кон.}}/lC_{\text{кон.}}^{\eta z}$ ;

в) одинаковые с натурным крылом распределения упругих жесткостей  $C_N^{\theta z}$ ,  $C_N^{\theta\theta}$  и  $e_N$ ;

г) одинаковое с натурным крылом отношение инерционных сил к аэродинамическим силам  $Ngm_{\text{кон.}}/qc_{\text{кон.}}$ ;

д) одинаковое с натурным крылом распределение величин  $m_N$  и  $d_N$ ;

е) одинаковое с натурным крылом отношение изгибной жесткости к крутильной жесткости  $c_{\text{кон.}} C_{\text{кон.}}^{\theta\theta}/C_{\text{кон.}}^{\eta z}$ ;

ж) одинаковое с натурным крылом положение упругой оси и центра тяжести:  $e_{\text{кон.}}/c_{\text{кон.}}$  и  $d_{\text{кон.}}/c_{\text{кон.}}$ . Тогда модель будет иметь в точности такое же распределение нагрузки и такую же форму упругой деформации, как и натурное крыло.

Масштабные множители силы и длины опять определяются ограничениями, накладываемыми при проектировании модели. Так как возможно, что модель изготавливается для определенной аэродинамической трубы, то ее размер, а следовательно, и масштаб длины определяются размером рабочей части трубы. Динамическое давление для модели определяется мощностью аэродинамической трубы или, возможно, типом конструкции модели. В любом случае, поскольку

все безразмерные параметры являются независимыми, можно наложить только два независимых ограничения.

11-6. Законы подобия для моделей, предназначенных для исследования флаттера. В качестве первого примера применения теории моделирования флаттера рассмотрим *однородное прямое свободнонесущее крыло умеренного удлинения*, поведение которого хорошо описывается уравнениями типичных сечений Теодорсена [уравнения (9-13) — (9-19)]. Если допустить, что как при вертикальном перемещении, так и при движении тангажа имеет место простое гармоническое движение с круговой частотой  $\omega$ , то уравнения движения примут вид

$$-m\omega^2 h_0 + K_h h_0 - S_a \omega^2 \alpha_0 e^{i\varphi} + \pi \rho b^2 (iU\omega \alpha_0 e^{i\varphi} - \omega^2 h_0 + ba\omega^2 \alpha_0 e^{i\varphi}) + \\ + 2\pi \rho U b C(k) \left[ U \alpha_0 e^{i\varphi} + i\omega h_0 + ib \left( \frac{1}{2} - a \right) \omega \alpha_0 e^{i\varphi} \right] = 0, \quad (11-39a)$$

$$-S_a \omega^2 h_0 - I_a \omega^2 \alpha_0 e^{i\varphi} + K_a \alpha_0 e^{i\varphi} + \\ + \pi \rho b^3 \left[ i \left( \frac{1}{2} - a \right) U \omega \alpha_0 e^{i\varphi} - \omega^2 b \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \alpha_0 e^{i\varphi} + a \omega^2 h_0 \right] - \\ - 2\pi \rho b^2 U \left( \frac{1}{2} + a \right) C(k) \left[ U \alpha_0 e^{i\varphi} + i\omega h_0 + ib \left( \frac{1}{2} - a \right) \omega \alpha_0 e^{i\varphi} \right] = 0. \quad (11-39b)$$

Размерности тринадцати параметров, входящих в два уравнения движения, в зависимости от основных величин массы, длины и времени имеют следующий вид:

$$h_0, b \sim L, \quad K_h \sim ML^{-1}T^{-2}, \quad K_a \sim MLT^{-2}, \\ \omega \sim T^{-1}, \quad S_a \sim M, \quad \rho \sim ML^{-3}, \\ m \sim ML^{-1}, \quad I_a \sim ML, \quad U \sim LT^{-2}. \\ \alpha_0, \varphi, a \sim \text{безразмерные величины.} \quad (11-40)$$

Здесь не упомянута приведенная частота  $k$ , так как она может быть выражена через  $\omega$ ,  $b$  и  $U$ . Соответствующий ряд безразмерных параметров можно записать в форме

$$\frac{h_0}{b}, \quad \frac{\omega b}{U} (= k), \quad \frac{m}{\rho b^2}, \quad \sqrt{\frac{K_h/m}{K_a/I_a}} (= \frac{\omega_h}{\omega_a}), \quad \frac{\omega}{\sqrt{K_a/I_a}} (= \frac{\omega}{\omega_a}), \\ \frac{S_a}{mb} (= x_a), \quad \sqrt{\frac{I_a}{mb^3}} (= r_a), \quad \alpha_0, \varphi, a. \quad (11-41)$$

Согласно П-теореме, число этих параметров равно десяти. Переписывая уравнения (11-39) в этих безразмерных параметрах, получим

$$-\frac{h_0}{b} + \left( \frac{\omega_h}{\omega_a} \right)^2 \left( \frac{\omega_a}{\omega} \right)^2 \frac{h_0}{b} - x_a \alpha_0 e^{i\varphi} + \frac{\pi \rho b^2}{m} \left( \frac{l}{k} \alpha_0 e^{i\varphi} - \frac{h_0}{b} + a \alpha_0 e^{i\varphi} \right) + \\ + \frac{2\pi \rho b^2}{m} \frac{1}{k} C(k) \left[ \frac{1}{k} \alpha_0 e^{i\varphi} + i \frac{h_0}{b} + i \left( \frac{1}{2} - a \right) \alpha_0 e^{i\varphi} \right] = 0, \quad (11-42a)$$

$$-x_a \frac{h_0}{b} - r_a^2 \alpha_0 e^{i\varphi} + r_a^2 \left( \frac{\omega_a}{\omega} \right)^2 \alpha_0 e^{i\varphi} + \\ + \frac{\pi \rho b^2}{m} \left[ \frac{l}{k} \left( \frac{1}{2} - a \right) \alpha_0 e^{i\varphi} - \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \alpha_0 e^{i\varphi} + a \frac{h_0}{b} \right] - \\ - \frac{2\pi \rho b^2}{m} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2} + a \right) C(k) \left[ \frac{1}{k} \alpha_0 e^{i\varphi} + i \frac{h_0}{b} + i \left( \frac{1}{2} - a \right) \alpha_0 e^{i\varphi} \right] = 0. \quad (11-42b)$$

Так как уравнения являются однородными относительно  $h_0/b$  и  $\alpha_0$ , то число безразмерных отношений может быть далее сокращено до девяти, если разделить уравнения на  $\alpha_0$  и образовать параметр отношения амплитуд  $h_0/b\alpha_0$ . В уравнениях не было, конечно, учтено влияние вязкости воздуха  $\mu$ , скорости звука  $a_\infty$

и отношения удельных теплоемкостей  $\gamma$ . Если бы эти параметры были включены в уравнения, то число первоначальных переменных было бы равно 16, а число безразмерных переменных — 13, причем добавочными являлись бы число Рейнольдса  $\rho U b / \mu$ , число Маха  $U / a_\infty$  и  $\gamma$ .

Теперь, когда уравнения движения крыла представлены в форме, независимой от размеров основных единиц, все другие крылья, обладающие теми же самыми безразмерными характеристиками, дадут при одинаковых полетных условиях одинаковые безразмерные результаты. Таким образом, любое из этих крыльев можно рассматривать в качестве модели, предназначенной для изучения флаттера исходного крыла.

*Случай несжимаемого потока.* Рассмотрим сначала более простой случай модели в аэродинамической трубе, когда предполагается, что сжимаемость (а следовательно, и число Маха и  $\gamma$ ) не оказывают влияния на характеристики флаттера. Искомые величинами являются

$$\frac{\omega_F b}{U_F}, \quad \frac{\omega_F}{\omega_\alpha}, \quad \frac{h_0}{b \alpha_0} \quad \text{и} \quad \varphi,$$

где индекс  $F$  относится к величинам, соответствующим флаттеру. Для того чтобы определить эти величины из опыта с моделью, последняя должна иметь соответствующие отношение частот  $\omega_h / \omega_\alpha$ , расстояние между центром тяжести сечения и упругой осью  $x_\alpha$ , положение упругой оси  $a$ , радиус инерции  $r_\alpha$ , относительную плотность  $m / \rho b^2$ , внешнюю форму и число Рейнольдса.

Число независимых ограничений, по которым может проектироваться модель, не должно превышать трех, потому что все безразмерные параметры являются независимыми и в задаче имеются только три основные величины, масштабы которых могут быть изменены. Масштабный множитель длины для модели и крыла  $L_m / L_w$  обычно определяется отношением допустимого размаха модели в аэродинамической трубе к действительному размаху. Этот масштаб длины через безразмерные параметры  $x_\alpha$ ,  $a$  и  $r_\alpha$  определяет как положение центра тяжести и упругой оси на хорде модели, так и радиус инерции модели. В рассматриваемом случае несжимаемого потока рабочий диапазон скоростей по ока в трубе или, как может оказаться, тип конструкции модели определяет верхний предел диапазона скоростей воздуха, в котором должен иметь место флаттер. Если, например, желаемая скорость флаттера модели равна примерно 70 милям в час, а вычисленная скорость флаттера действительного крыла равна 350 милям в час, то необходимый масштаб скоростей  $U_m / U_w$  равен  $1/5$ . Исходя из этого масштаба скоростей и из ранее определенного масштаба длин, можно определить масштаб второй основной величины — времени:

$$\frac{T_m}{T_w} = \frac{U_w L_m}{U_m L_w}. \quad (11-43)$$

Масштаб последней основной величины — массы — обычно определяется плотностью воздуха, который собираются использовать в аэродинамической трубе. Таким образом, поскольку относительная плотность  $m / \pi \rho b^2$  должна быть одинакова для модели и крыла, то

$$\frac{m_m}{m_w} = \frac{(\pi \rho b^2)_m}{(\pi \rho b^2)_w} = \frac{\rho_m b_m^2}{\rho_w b_w^2}. \quad (11-44)$$

Так как  $m$  является массой крыла, приходящейся на 1 *фут* размаха, то масштаб масс может быть выражен [из уравнения (11-44)] в виде

$$\frac{M_m}{M_w} = \left( \frac{L_m}{L_w} \right)^3 \frac{\rho_m}{\rho_w}, \quad (11-45)$$

где масштаб длин и отношение плотностей воздуха являются известными. Величина  $\rho_m$  относится к плотности воздуха в рабочей части трубы, тогда как  $\rho_w$  соответствует плотности воздуха на высоте полета крыла.

Важно отметить, что числа Рейнольдса при испытании в аэродинамической трубе будут обычно значительно ниже чисел Рейнольдса для крыла на высоте полета, и с этим положением почти ничего нельзя сделать. Три ограничения, уже наложенные на испытание модели, — ограничение размеров модели, скорости и плотности воздуха вместе с известной вязкостью воздуха в рабочей части трубы — полностью определяют число Рейнольдса модели. К счастью, влияние изменения числа Рейнольдса на воздушные нагрузки, обусловленные колебательным движением, сравнительно мало, при условии, что число Рейнольдса примерно равно  $4 \times 10^5$  и количественные характеристики флаттера, в особенности скорость и частота, сравнительно нечувствительны к изменению числа Рейнольдса. Условия опыта выбираются обычно такими, чтобы сделать число Рейнольдса по возможности максимальным. Однако в процессе опыта к натурному числу Рейнольдса приближаются редко.

Когда три основных масштаба определены, то можно определить все размерные характеристики модели. Выберем, например, самолет весом 10 000 фунтов, имеющий размах крыла 50 футов и расчетную скорость флаттера 500 миль в час. Если в рабочей части может разместиться модель с максимальным размахом 5 футов, то

$$\frac{L_m}{L_w} = \frac{1}{10}. \quad (11-46)$$

Если по конструктивным соображениям скорость испытания ограничивается 70 милями в час, то подходящее отношение скоростей равно

$$\frac{U_m}{U_w} = \frac{1}{8}, \quad (11-47)$$

и из уравнения (11-43) будем иметь

$$\frac{T_m}{T_w} = \frac{8}{10}. \quad (11-48)$$

Таким образом, масштаб времени для модели почти такой же, как и для самолета, и соответствующие частоты собственных колебаний будут почти одинаковыми. Если плотность воздуха в аэродинамической трубе равна плотности воздуха на уровне моря и при этом высота полета натурального самолета такова, что

$$\frac{\rho_w}{\rho_m} = 0,5, \quad (11-49)$$

то уравнение (11-45) определяет третий и последний основной масштаб в виде

$$\frac{M_m}{M_w} = \frac{1}{500}. \quad (11-50)$$

Вес модели (гравитационная постоянная  $g$  не изменяется) равен тогда 10 000/500, или 20 фунтам. Аналогично,

$$\frac{m_m}{m_w} = \frac{M_m}{M_w} \frac{L_w}{L_m} = \frac{1}{50}, \quad (11-51)$$

$$\frac{I_{am}}{I_{aw}} = \frac{M_m}{M_w} \frac{L_m}{L_w} = \frac{1}{5000}. \quad (11-52)$$

Для того чтобы определить изгибную жесткость модели, которая дает правильное эффективное  $K_h$  в типичном сечении, вспомним, что в рассматриваемом примере свойства крыла вдоль размаха не меняются,

$$\frac{(EI)_m}{(EI)_w} = \frac{M_m}{M_w} \left(\frac{L_m}{L_w}\right)^3 \left(\frac{T_w}{T_m}\right)^2 = \frac{1}{320\,000}. \quad (11-53)$$



Как было указано в п. 11-4, те характеристики модели, которые не входят в уравнения движения, должны вычисляться по характеристикам, входящим в уравнения, а не прямым применением масштабных множителей.

Когда результаты испытаний модели на флаттер известны, то при переходе к размерным величинам скорости и частоты флаттера можно воспользоваться уравнениями (11-47) и (11-48).

*Случай сжимаемого потока.* Если нельзя сделать допущение о несжимаемости жидкости, т. е. нельзя допустить, что скорость звука очень велика по сравнению со скоростями потока воздуха около крыла, то нужно учесть два добавочных параметра, число Маха и  $\gamma$ . Для того чтобы создать верную модель флаттера высокоскоростной несущей поверхности, необходимо, чтобы эти безразмерные параметры так же, как и в случае несжимаемого потока, имели одинаковые значения как при испытании модели, так и в натурном полете. Чтобы в обоих случаях  $\gamma$  было одинаковым, нужно, чтобы испытания модели проводились в обычном воздухе, а не в каком-либо другом газе, подобном, например, фреону-12. (Однако, если желают просто сравнить экспериментальные точки флаттера с точками, полученными на основе теоретического расчета, нет причин, чтобы не проводить опыты в таких газах, как фреон-12. Влияние таких изменений  $\gamma$ , какие происходят при переходе от воздуха к фреону-12, будет влиянием второго порядка. Это подтверждается тем, что  $\gamma$  не входит в линеаризованные выражения для неустановившихся аэродинамических сил в сверхзвуковом потоке.)

Так же как и в случае несжимаемого потока, на модель нельзя наложить более трех независимых ограничений, поскольку все безразмерные параметры независимы и только три масштаба,  $M$ ,  $L$  и  $T$ , подлежат определению. Размер модели опять ясно ограничивается оборудованием, предназначенным для проведения эксперимента, независимо от того, используются ли при испытании ракеты, бомбы или аэродинамические трубы. Таким образом, масштаб длины быстро определяется, по крайней мере в узких пределах. Второе строгое ограничение заключается в достижении желаемого интервала чисел Маха, который обычно определяет также скорость полета модели и плотность воздуха.

При испытаниях на ракетах или бомбах скорость полета непосредственно связана с числом Маха как функцией высоты полета (или, более правильно, функцией температуры, которая сама является функцией высоты). Таким образом, на любой высоте данное желаемое число Маха определяет скорость модели, а по ней и ранее определенному масштабу длины можно найти масштаб времени. Выбор высоты фиксирует плотность воздуха и масштаб массы, потому что безразмерный параметр  $m/\rho b^2$  должен сохраняться постоянным [уравнение (11-45)].

При испытаниях в аэродинамической трубе конструктивные характеристики трубы обычно определяют скорость и плотность воздуха, соответствующие желаемому числу Маха. Эти связи при переходе от одной трубы к другой могут сильно меняться. Например, в кратковременно действующей трубе, работающей на выхлоп, плотность воздуха в рабочей части будет выше, нежели у кратковременно действующей трубы, работающей на всасывание, так как давление торможения в первом случае будет значительно выше.

Скорость звука в рабочей части — и, таким образом, скорость для данного числа Маха — является функцией температуры торможения или температуры успокоительной камеры, которая, конечно, различна для различных труб.

В случае сжимаемого потока на опыте обычно невозможно получить числа Рейнольдса, соответствующие натуре, и, к несчастью, для сжимаемого неустановившегося потока интервал чисел Рейнольдса, в котором уверенно можно вести эксперимент, неизвестен.

**11-7. Исследование флаттера на свободной модели.** В качестве второго примера теории моделирования флаттера рассмотрим трудный случай флаттера модели целого самолета, имитирующей свободный прямолинейный горизонтальный



полет. Это отсутствие ограничения „степеней свободы твердого тела“ желательно во многих случаях, когда формы флаттера заметно зависят от этих степеней свободы и когда частота флаттера и частота колебаний, характеризующих динамическую устойчивость жесткого самолета, близки друг к другу.

Уравнения движения свободного самолета, который может совершать движения тангажа, крена и вертикальные перемещения, зависящие от нормальных форм, выведены в гл. 3. Если направления осей координат совпадают с направлениями главных осей самолета, то эти уравнения можно обобщить и включить туда все шесть степеней свободы твердого тела, так же как и нормальные формы колебаний. Таким образом, в более общем случае уравнения (3-204) примут вид

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{\xi}_1 &= E_1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ M_6 \ddot{\xi}_6 &= E_6, \\ M_7 \ddot{\xi}_7 + M_7 \omega_7^2 \xi_7 &= E_7 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ M_\infty \ddot{\xi}_\infty + M_\infty \omega_\infty^2 \xi_\infty &= E_\infty, \end{aligned} \right\} 11-54)$$

где  $\xi_1, \dots, \xi_6$  — амплитуды возмущения для форм движения твердого тела  $M_1, \dots, M_6$  — полная масса и главные моменты инерции самолета, а нормированные функции деформации  $\varphi$  и частоты  $\omega$  являются решениями уравнения (3-172).

Коэффициенты левых частей уравнений (11-54) включают параметры величины и распределения, описывающие массовые, жесткостные и геометрические свойства самолета. Они аналогичны параметрам  $m, S_\alpha, I_\alpha, K_h, K_\alpha, b$  и  $a$  предыдущего примера. Обобщенные силы  $E$ , стоящие в правых частях уравнений (11-54), подсчитываются так, как указано в гл. 3, и включают внешние аэродинамические и гравитационные нагрузки и нагрузки от двигательных установок. Взаимная связь этих уравнений очень значительна, так как в каждую обобщенную силу входят члены, зависящие от многих координат. Если в уравнениях движения твердого тела координаты  $\xi_7, \dots, \xi_\infty$  положить равными нулю, то уравнения тождественно переходят в известные уравнения динамической устойчивости жесткого самолета, только в необычной системе осей.

Исследуя параметры, которые входят в выражения для обобщенных сил в качестве коэффициентов, мы обнаружим среди них обычные коэффициенты, характеризующие динамическую устойчивость:  $C_L, C_D, C_{L_\alpha}, C_{M_\alpha}, C_{M_q}$ ; эти коэффициенты имеют чисто аэродинамическую природу и являются функциями формы и положения самолета. Среди них будут члены, характеризующие аэродинамику неустановившегося движения, аналогичные тем, которые мы встретили в предыдущей задаче и являющиеся функциями геометрии самолета, формы и приведенной частоты колебательного движения. Если сжимаемость воздуха играет важную роль, то коэффициенты будут включать в себя также число Маха и в известной степени всегда будут функциями числа Рейнольдса.

Если внимательно выписать уравнения, касающиеся соотношений между силами и моментами при равновесии, то найдем члены, включающие вес самолета (который может быть выражен через массу самолета и ускорение силы тяжести  $g$ ), и члены, включающие силу тяги, а также члены, учитывающие изменение ее с высотой, скоростью и т. п. Мы найдем также условие продольного равновесия моментов крыла, хвостового оперения и фюзеля-

ляжа. Эти соотношения, характеризующие равновесное или установившееся состояние, не должны исключаться из уравнений, относящихся к самолету, если их нельзя также исключить и из уравнений, относящихся к модели.

Рассмотрим, например, члены, куда входит вес самолета. Эти члены уравновешиваются членами, зависящими от подъемной силы и являющимися функциями положения самолета. В действительности же равновесное положение самолета при заданных условиях полета определяется весом самолета. Для того чтобы коэффициент  $C_L$  модели и другие коэффициенты, зависящие от него (например, коэффициент момента крена, обусловленный скольжением, сила, направленная по оси  $x$ , обусловленная изменением скорости), были такими же, как и у натурального самолета, модель должна занимать то же самое положение в потоке воздуха. Таким образом, для того чтобы модель могла находиться в полете в соответствующем равновесном положении, члены, зависящие от силы тяжести, должны иметь такой же масштаб, как и члены, зависящие от аэродинамических, инерционных и упругих сил. Посмотрим, возможно ли это осуществить в том случае, когда масштабы определяются с помощью типичных ограничений, накладываемых на модель при эксперименте.

Как и в предыдущем примере, здесь мы имеем дело с задачей динамики, и поэтому в качестве основных величин возьмем массу, длину и время. Поскольку все безразмерные параметры входят в уравнения независимым образом, на конструкцию модели можно наложить только три независимых ограничения. Как и прежде, масштаб длины определяется отношением допустимого размера модели к размеру самолета. Масштаб времени определяется с помощью масштаба длины и отношения допустимой скорости эксперимента к расчетной скорости флаттера в случае несжимаемого потока. Для воспроизведения влияния сжимаемости числа Маха для опыта и натуре должны быть одинаковыми. В соединении с температурами это условие определяет скорость и, таким образом, масштаб времени для случая сжимаемого потока. В обоих случаях массовый масштаб определяется условием, что относительные плотности модели и самолета должны быть одинаковы.

Если используется обычный метод, то безразмерный параметр, включающий вес, будет входить в виде отношения веса к аэродинамической силе  $mbg / \rho U^2 b^2$ .

Если этот параметр входит в виде отношения веса к силе инерции или к упругой силе, то он может быть сведен к отношению веса к аэродинамической силе с помощью соответствующего умножения на другие параметры, подобные, например,  $m / \rho b^2$  и  $\omega b U$ . Для того чтобы определить, правильно ли выбран масштаб для веса или силы тяжести, заметим, что отношение силы тяжести к аэродинамической силе может быть записано в виде

$$\frac{mbg}{\rho U^2 b^2} = \frac{m}{\rho b^2} \cdot \frac{g}{U^2/b} \quad (11-55)$$

Относительная плотность  $m / \rho b^2$  для модели и самолета уже одинакова; однако отношение<sup>1)</sup>  $g (U^2/b)$  может быть совершенно различно. Ускорение силы тяжести  $g$  для модели и натуре одно и то же, но отношения  $U^2/b$  для модели и натурального самолета обычно неодинаковы, т. е. масштаб ускорения для модели, предназначенной для испытания на флаттер, обычно не равен единице. Для иллюстрации интервала изменения этого масштаба в табл. 11—1 помещены типичные масштабы ускорения, принятые для моделей, предназначенных для испытания на флаттер при малых и больших скоростях небольшого высокоскоростного истребителя и большого реактивного транспортно-го самолета.

Величины в последнем столбце можно также рассматривать как отношения веса модели к подъемной силе модели при том положении, которое соответствует

<sup>1</sup> Это отношение равно обратной величине квадрата числа Фруда, хорошо известного корабельным инженерам благодаря его связи с волновым сопротивлением.

Таблица 11-1

	$L_w/L_m$	$U_w/U_m$	$\frac{\text{Ускорение}_w}{\text{Ускорение}_m}$
Истребитель:			
Модель для малых скоростей . . . . .	10	10	10
Модель для больших скоростей . . . . .	10	1	$1/10$
Транспортный самолет:			
Модель для малых скоростей . . . . .	25	5	1
Модель для больших скоростей . . . . .	25	1	$1/25$

состоянию равновесия на полноразмерном самолете. Очевидно, что модель истребителя при малых скоростях, вероятно, неспособна поддерживать свой собственный вес в любом положении, тогда как вариант модели для больших скоростей летает при очень малой величине коэффициента подъемной силы. Удачным является то обстоятельство, что модели больших транспортных самолетов и бомбардировщиков летают в правильном положении (по крайней мере в том случае, когда влияние сжимаемости не моделируется), потому что флаттер этих весьма гибких самолетов обычно сильно связан со степенями свободы движения твердого тела.

Тот факт, что сила тяжести для большинства моделей, предназначенных для исследования флаттера, не представлена в соответствующем масштабе, является одной из главных трудностей при испытании моделей, обладающих степенями свободы твердого тела. Либо мы должны довольствоваться результатами, полученными на моделях, летающих при слишком высоких или слишком низких коэффициентах подъемной силы, либо державка модели должна создавать соответствующую дополнительную вертикальную силу. Методы создания такой силы наряду с другими проблемами, возникающими при имитации движения твердого тела, анализируются в гл. 13.

Диспропорция в весовых характеристиках многих моделей, предназначенных для испытаний на флаттер при малых скоростях, приводит к другой трудности, заключающейся в решении вопроса о том, воспроизведены или не воспроизведены степени свободы движения твердого тела. Если модель поддерживается у фюзеляжа, то крылья будут необычайно сильно провисать до тех пор, пока они не будут заранее спроектированы с соответствующим „отрицательным провисанием“.

**11-8. Модели для изучения динамической устойчивости.** Ввиду возрастающего значения влияния упругости конструкции на динамическую устойчивость самолета и автоматическое управление рассмотрим возможность проектирования аэроупругих моделей, которые помогли бы решению этой задачи. Определяющими уравнениями в этом случае являются уравнения (11-54) для случая свободной модели, предназначенной для испытания на флаттер. Разница заключается только в том, на какие члены делается упор. В модели для испытания на флаттер нас интересует условие нейтральной динамической устойчивости, в котором главную роль играют формы упругих колебаний. В моделях, предназначенных для изучения динамической устойчивости, нас интересует ее докритическое динамическое поведение, которое определяется формами движения твердого тела. В моделях, предназначенных для исследования флаттера, для упрощения часто пренебрегают теми формами движения твердого тела, которые несущественны для флаттера. Аналогично модели для исследования динамической устойчивости в меньшей степени могут воспроизводить менее важные формы упругих деформаций без ущерба для исследуемого докритического поведения модели.

Тем не менее задача проектирования модели в обоих случаях принципиально одинакова. Имеются только три масштаба, и они фиксируются соображениями размеров, скорости и относительной массы модели. Необходимо создать модель с правильным распределением и величиной массы, жесткости и формы. В этом случае имеется излишнее ограничение для высоты или веса модели, которое для моделей низких скоростей трудно выполнимо, а с учетом сжимаемости и совсем не выполнимо, если поддерживающий модель механизм неспособен создать дополнительную вертикальную силу (ср. п. 13-6).

Конструктор модели, предназначенной для исследования динамической устойчивости, не может избежать этих излишних ограничений даже в том случае, когда частоты колебаний велики по сравнению с частотами колебаний, соответствующими движениям при исследовании динамической устойчивости, так как для того чтобы получить правильные частоты, требуется воспроизвести правильное распределение масс и жесткостей. Правильное распределение масс нужно также для того, чтобы воспроизвести инерционные нагрузки на конструкцию, обусловленные в основном движениями твердого тела. Для того чтобы обеспечить соответствующие формы прогиба от воздушных и инерционных нагрузок, возникающих от движений твердого тела, необходимо правильное распределение жесткости.

Даже в крайнем случае, когда проектируется идеально жесткая модель, предназначенная для исследования динамической устойчивости, нужно удовлетворить четырем ограничениям. Это является результатом того, что необходимо выбрать такие размеры модели, чтобы все четыре типа сил — аэродинамические, упругие, инерционные и силы тяжести, играющие важную роль, имели одинаковый масштаб.

Имеется другой, более обещающий способ использования упругих моделей в задаче о динамической устойчивости. До сих пор мы рассматривали использование совершенно не ограниченной в своих движениях модели самолета в потоке воздуха в качестве моделирующего счетного устройства, указывающего степень общей устойчивости. Это позволяет разрешить всю систему уравнений. При другом подходе модель используется для определения влияния упругости на отдельные коэффициенты основных уравнений движения твердого тела. Этот метод применим в основном к самолетам, у которых частоты колебаний, соответствующие движениям, характеризующим устойчивость, и частоты упругих колебаний ясно разделены, и отчасти аналогичен методу использования жестких моделей при синусоидальном характере возбуждения для проверки аэродинамических коэффициентов в уравнениях флаттера (ср. пп. 5-6, 7-2 и 13-6).

Для коэффициентов, характеризующих устойчивость при „установившемся режиме“, таких, как подъемная и боковая сила, моменты тангажа и рыскания, обусловленные угловым перемещением, а не его производными по времени, задача проектирования модели в основном сходна с задачей, разобранный в п. 11-5. Для коэффициентов, связанных с производными по времени от угловых перемещений, задача проектирования модели все еще сходна с задачей, изложенной в п. 11-5, или с задачей этого пункта без ограничения, накладываемого на вес модели. Основные трудности обычно связаны с креплением модели и с техникой эксперимента. Они обсуждаются в гл. 13 (ср. пп. 13-4 и 13-6).

## Глава 12

### ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУКЦИЯ МОДЕЛЕЙ

12-1. Введение. Тремя основными свойствами самолета, которые проявляются в приложениях теории упругого моделирования, являются:

- 1) распределение жесткости конструкции,
- 2) несущая форма модели в воздушном потоке,
- 3) распределение массы.

Задача конструктора модели состоит в том, чтобы так воспроизвести эти качества самолета, чтобы они наилучшим образом способствовали выполнению главных экспериментов. Например, в случае модели, предназначенной для измерения эффективности управления, как свойство (1), так и свойство (2) являются весьма важными, тогда как у модели для исследования колебаний

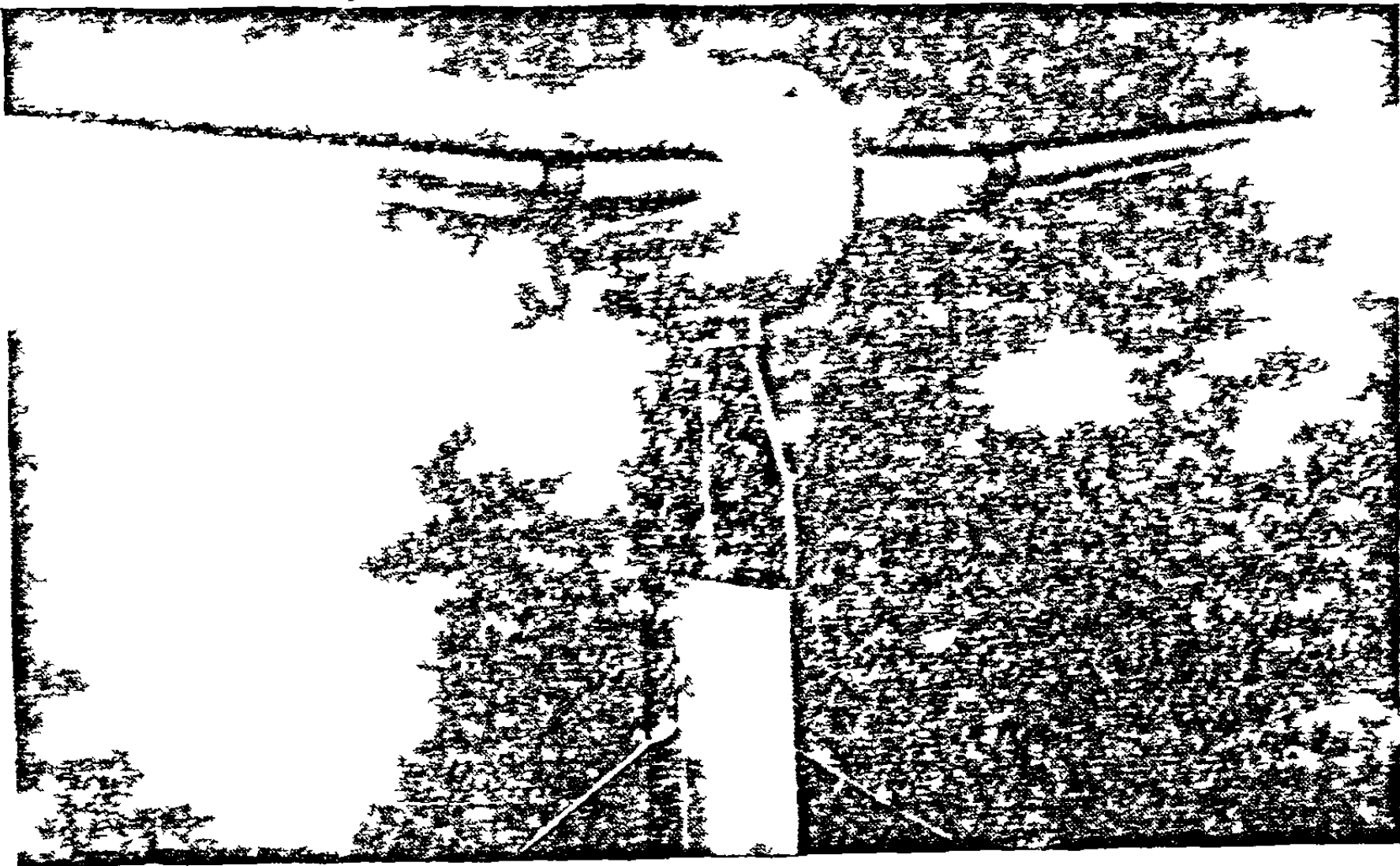
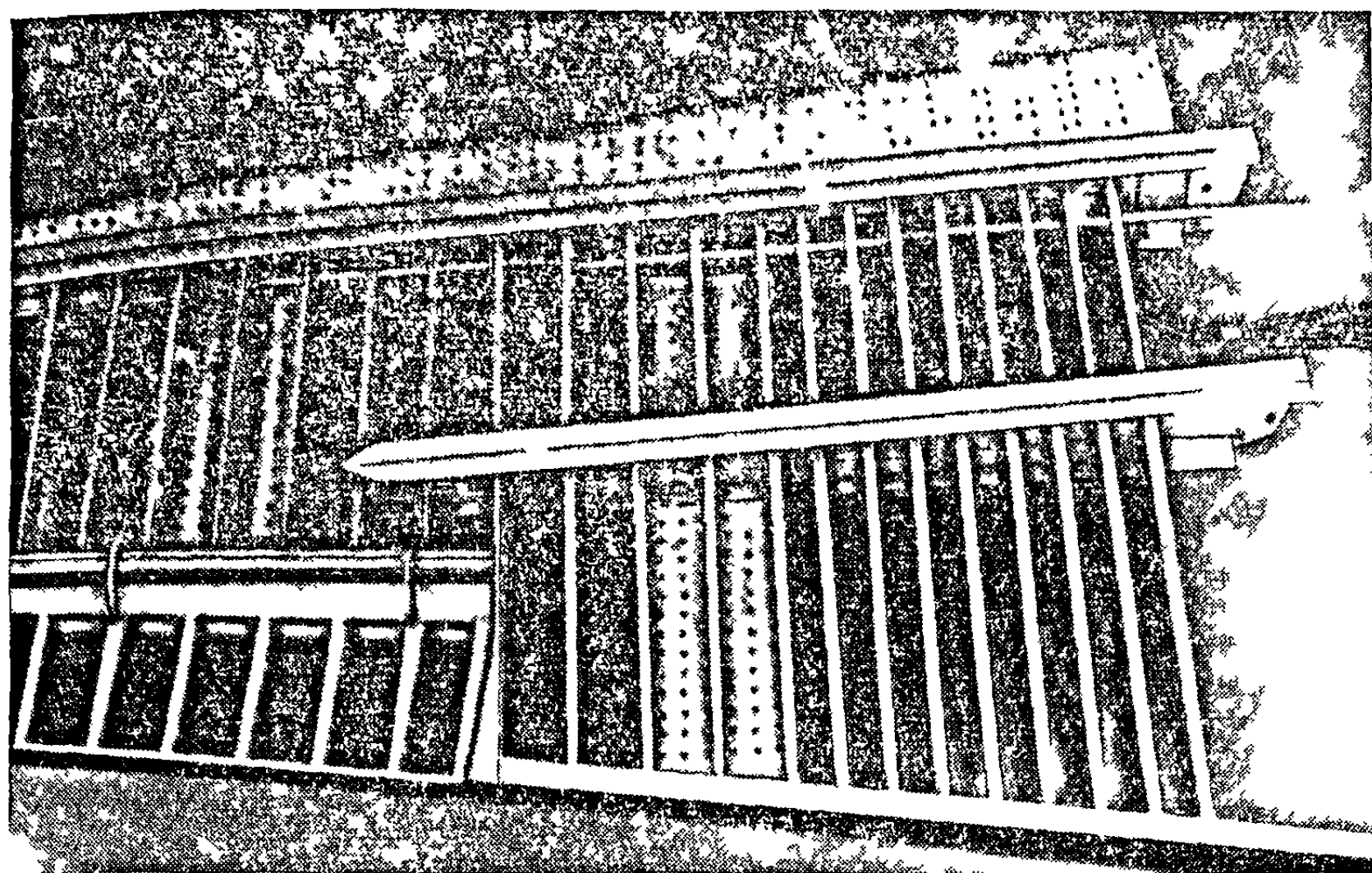


Рис. 12-1. Одна из версий модели для испытания на флаттер при больших дозвуковых скоростях (Грумман F6F) в аэродинамической трубе НАСА в лаборатории Лангли.

свойство (3) может не приниматься во внимание. Модель для исследования флаттера требует воспроизведения всех трех свойств самолета, и ее часто очень трудно спроектировать. Так как проектирование модели для исследования флаттера является сравнительно сложной проектной работой, оно служит поучительной иллюстрацией общего подхода к проектированию моделей. Из двух типов моделей для исследования флаттера — серии крыльев, характеризующих свойства крыла в целом и служащих для определения тенденции изменения параметров, и модели действительного натурного самолета, выполненной в соответствующих масштабах, последний тип наиболее труден для проектирования, и поэтому на нем будет сосредоточено основное внимание.

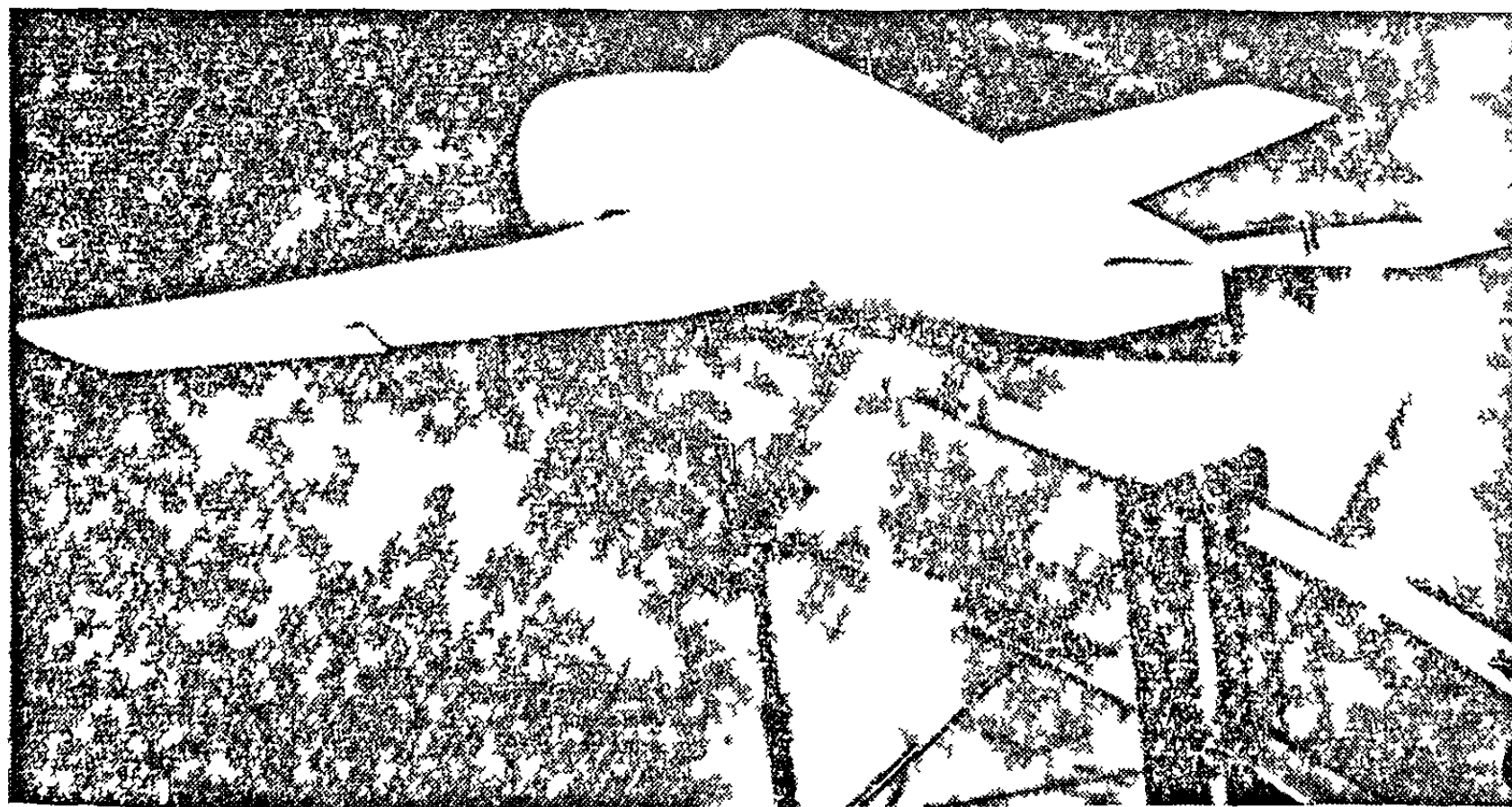


Первый обычный шаг в проектировании модели для исследования флаттера состоит в том, чтобы рассмотреть изготовление точной копии действительной



Фиг. 12-2. Внутренний набор модели F6F для больших дозвуковых скоростей перед покрытием магниевой обшивкой.

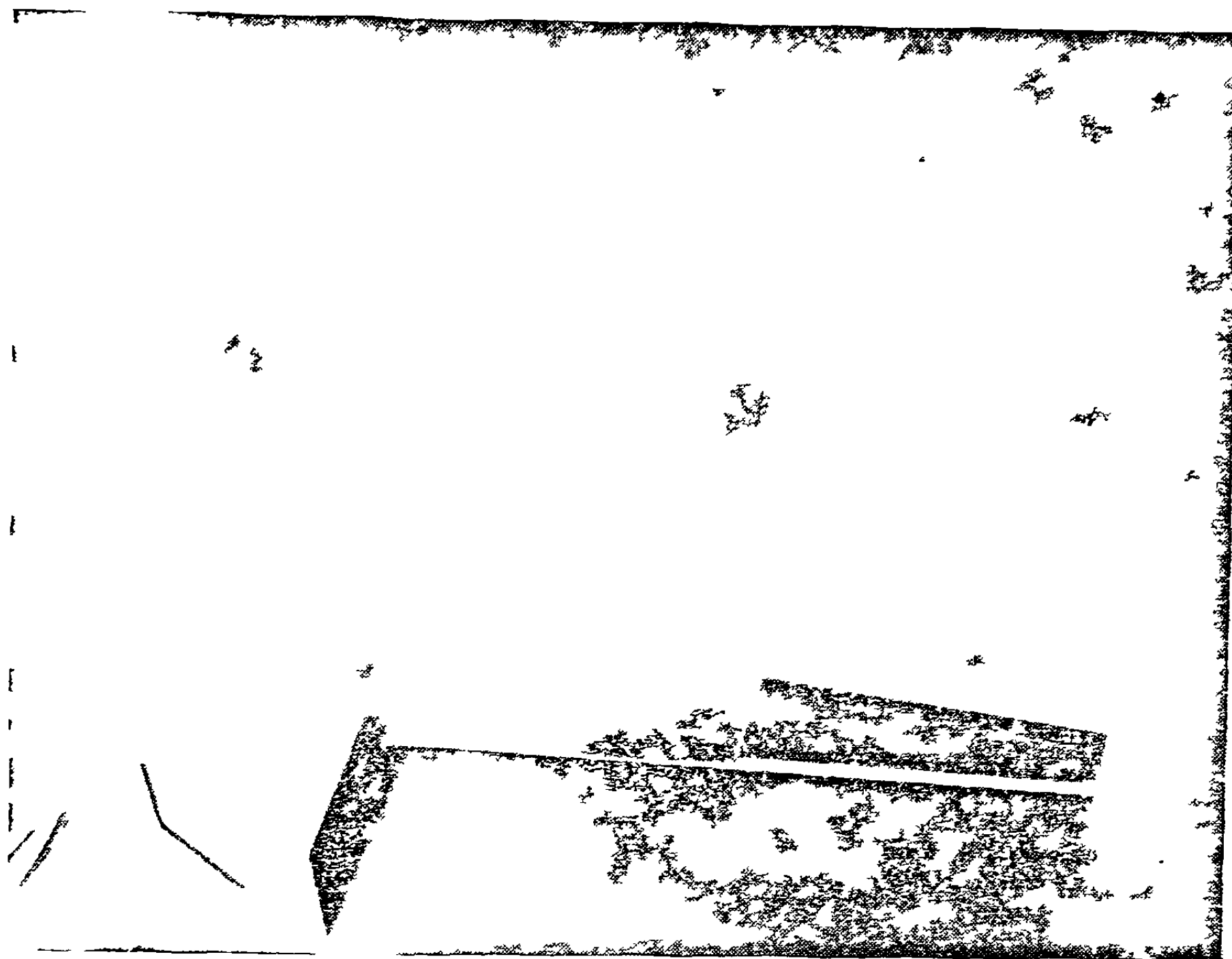
конструкции самолета в желаемом масштабе. Таким образом, предполагается, что изготовленные в определенном масштабе лонжероны, нервюры, обшивка и т. п. обеспечивают правильное распределение жесткости и основной массы и правильную внешнюю форму. К несчастью, этот метод тогда, когда его вообще



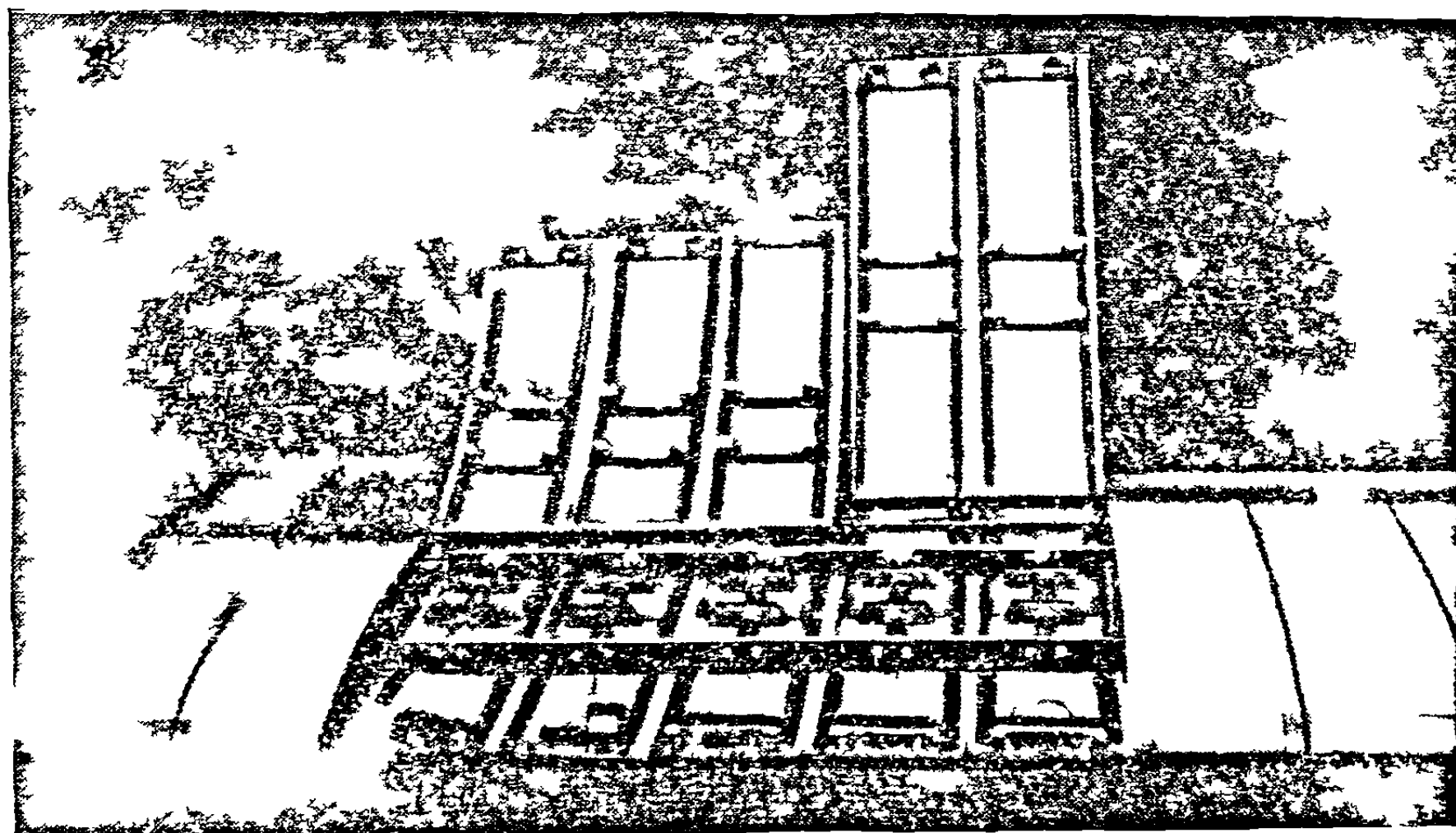
Фиг. 12-3. Маленькая модель крыла (Грумман F6F) для испытания на флаттер при малых скоростях, использующая двухлонжеронную покрытую резиной конструкцию из труб, работающих на кручение.

можно применять, должен быть в значительной степени изменен. Для обычной модели, предназначенной для исследования флаттера при малых скоростях, необходимые толщины обшивки, в том случае, когда она изготавливается из того

же самого материала, что и самолет, недопустимо малы. -Даже на больших высокоскоростных моделях требуемые толщины обшивки могут быть меньше



Фиг. 12-4. Свободнонесущая модель для испытания на флаттер при сверхзвуковых скоростях, состоящая из металлического лонжерона и сплошного бальзового покрытия.

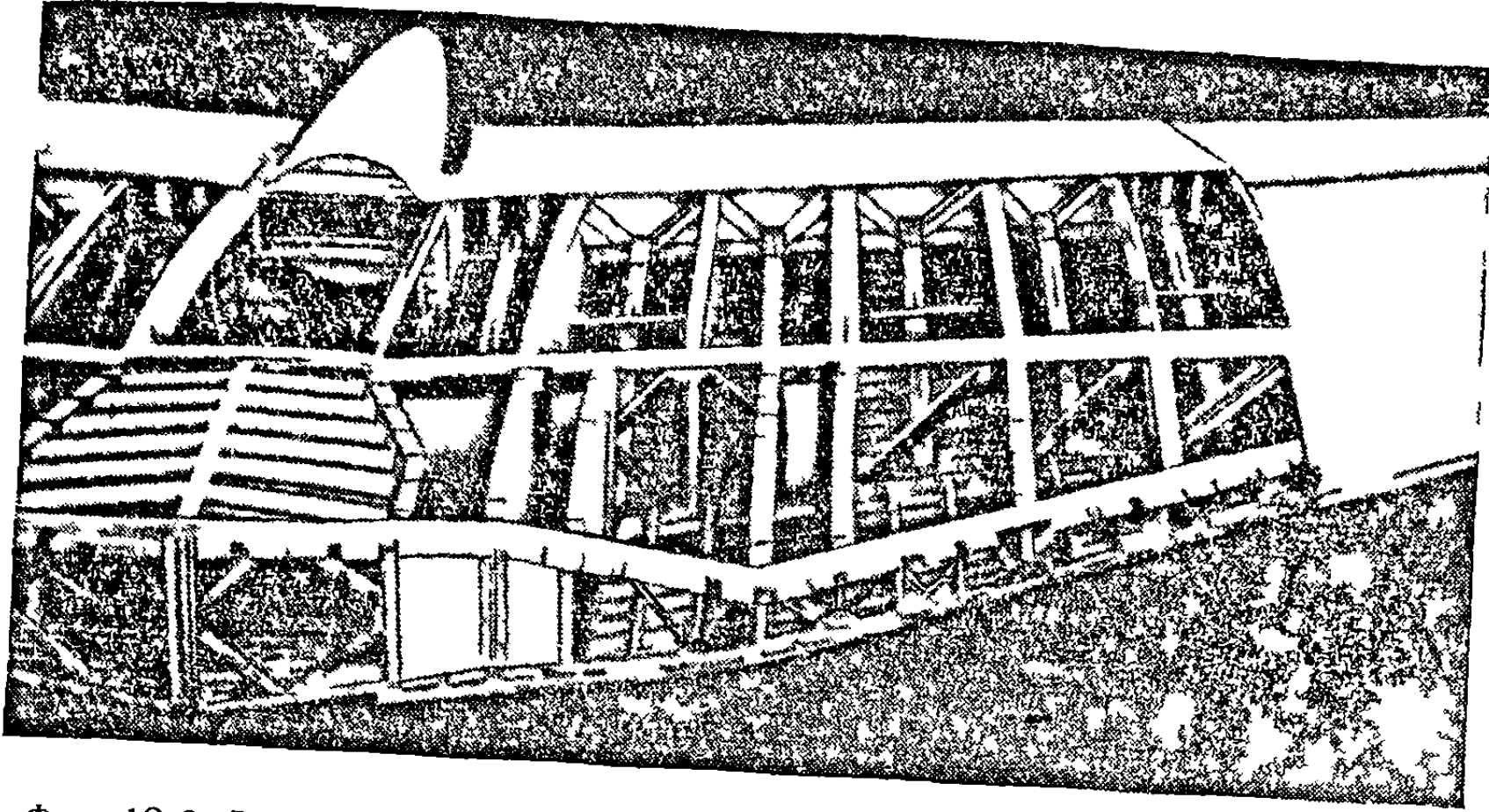


Фиг. 12-7. Модель для испытания на флаттер при малой скорости с т у и, работающей на кручение, и вмонтированными в нее секциями из бальзы

со ой доли дюйма. Для того чтобы получить практически применимые толщины, дл обшивки н обходимо использовать менее прочный материал. На высоко-коро тной мод ти, изображенной на фиг. 12-1, вместо алюминиевого сплава,

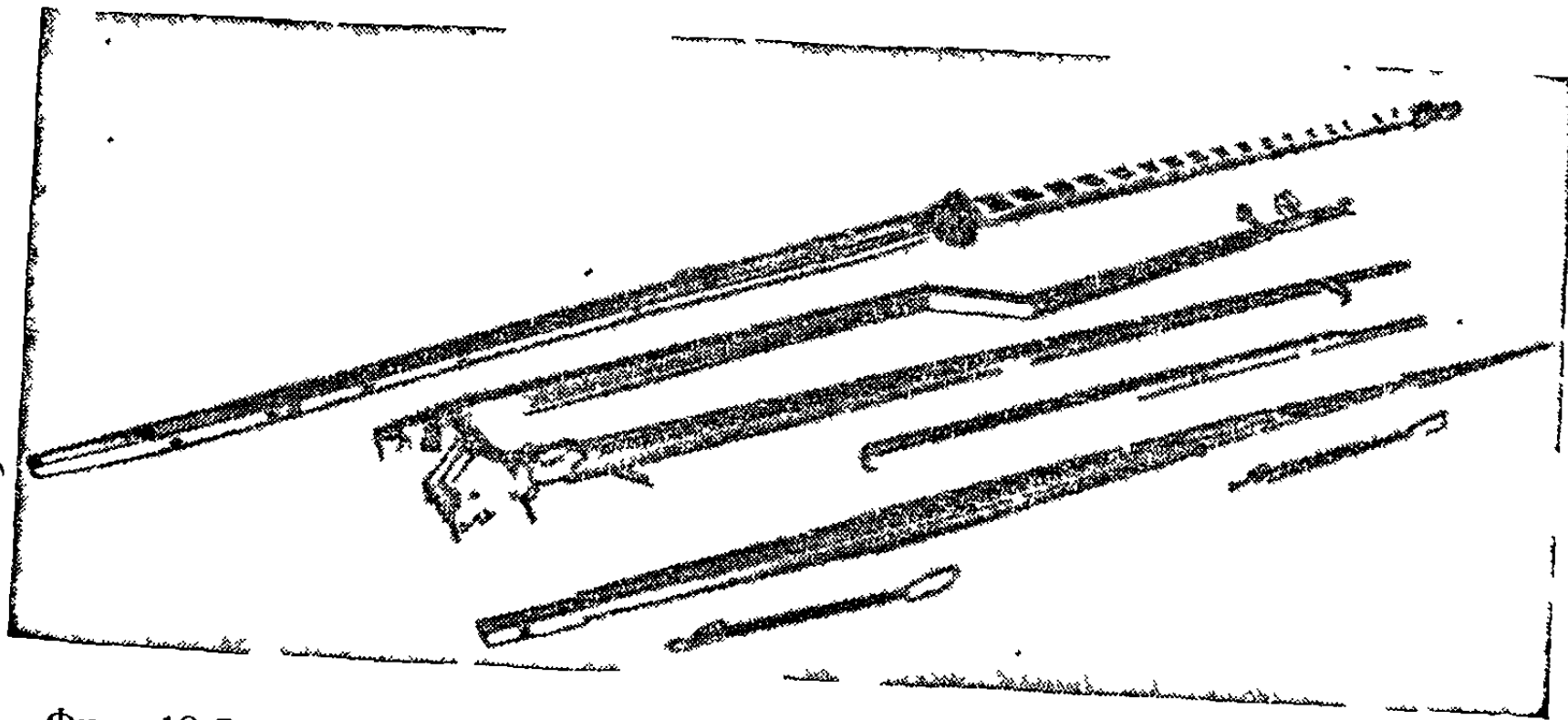


используемого в конструкции самолета, на обшивке применен листовой магний, но на малоскоростных моделях обычно необходимо применять пластики. Использование более толстых элементов приводит к снижению возможной точности воспроизведения жесткости и размеров деталей конструкции. Часто



Фиг. 12-6. Внутренний набор большой модели стреловидного крыла для испытания на флаттер при большой дозвуковой скорости.

такие размеры, как расстояние между нервюрами модели, необходимо изменять во избежание выпучивания обшивки; кроме того, вследствие невозможности скрепления многих частей модели с помощью заклепок необходимо применять различные способы склейки и другие прочные соединения. Основными недостатками

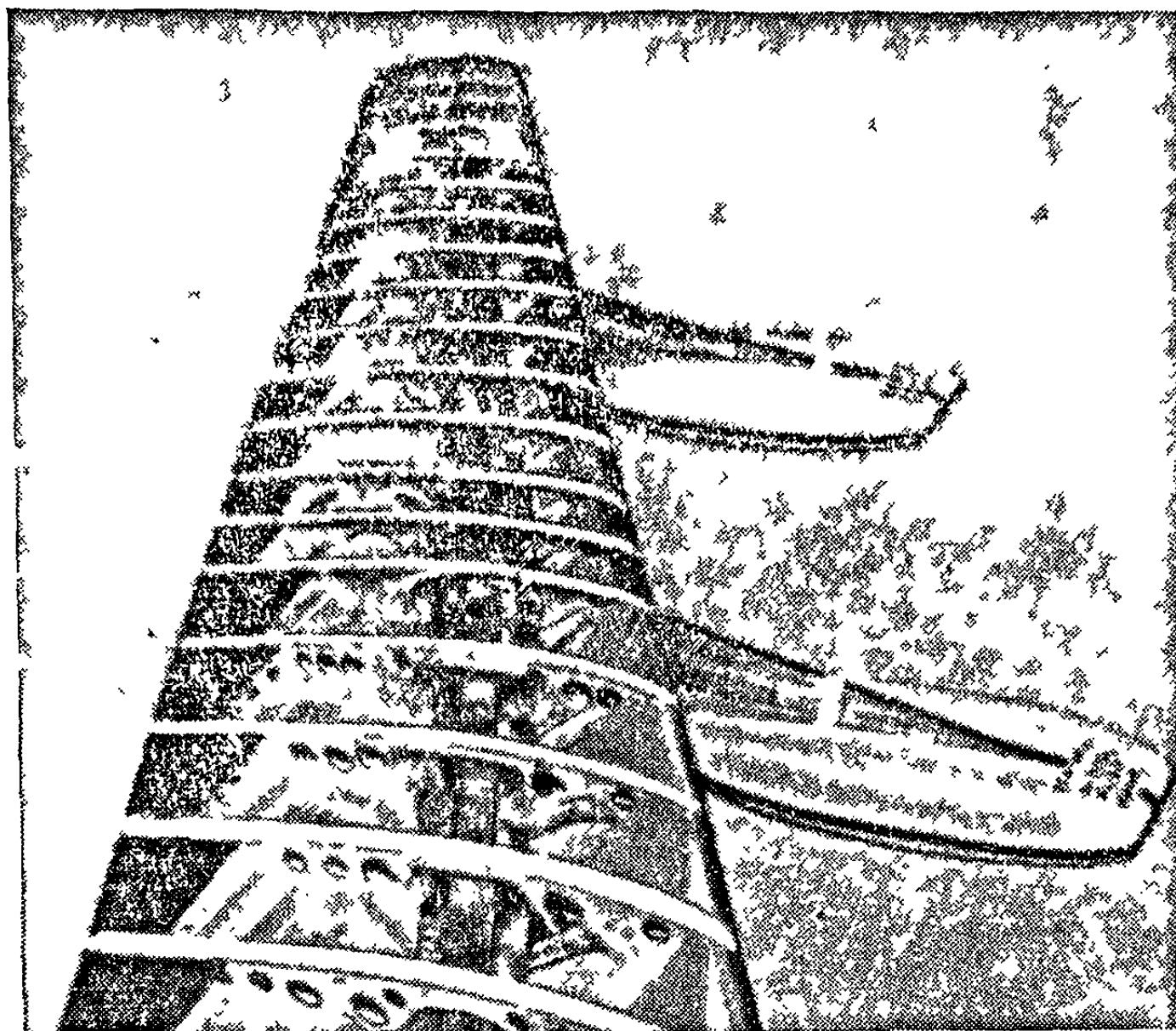


Фиг. 12-7. Типичные лонжероны крыла и фюзеляжа, применяющиеся в модели однолонжеронной конструкции.

использования пластика являются температурная чувствительность их жесткостных свойств, тенденция к ползучести и большое внутреннее демпфирование.

Обычно вместо элементов конструкции, изготовленных точно в масштабе, предпочитают использовать упрощенную конструкцию, которую легко спроектировать так, чтобы она удовлетворяла требованиям жесткости, предъявляемым к модели. Если полноразмерный самолет имеет такую необычную конструкцию, что его жесткостные свойства точно определить невозможно, то необходима отдельная модель конструкции. Обычно нецелесообразно пытаться изготовить

модель для исследования флаттера, которая была бы одновременно и моделью конструкции, поскольку требования, предъявляемые к этим двум типам моделей, часто несовместимы.



Фиг. 12-8. Внутренний набор модели крыла с упруго-подвешенными массами.

Таким образом, конструктор модели, предназначенной для исследования флаттера, часто обнаруживает, что наилучший метод решения задачи состоит

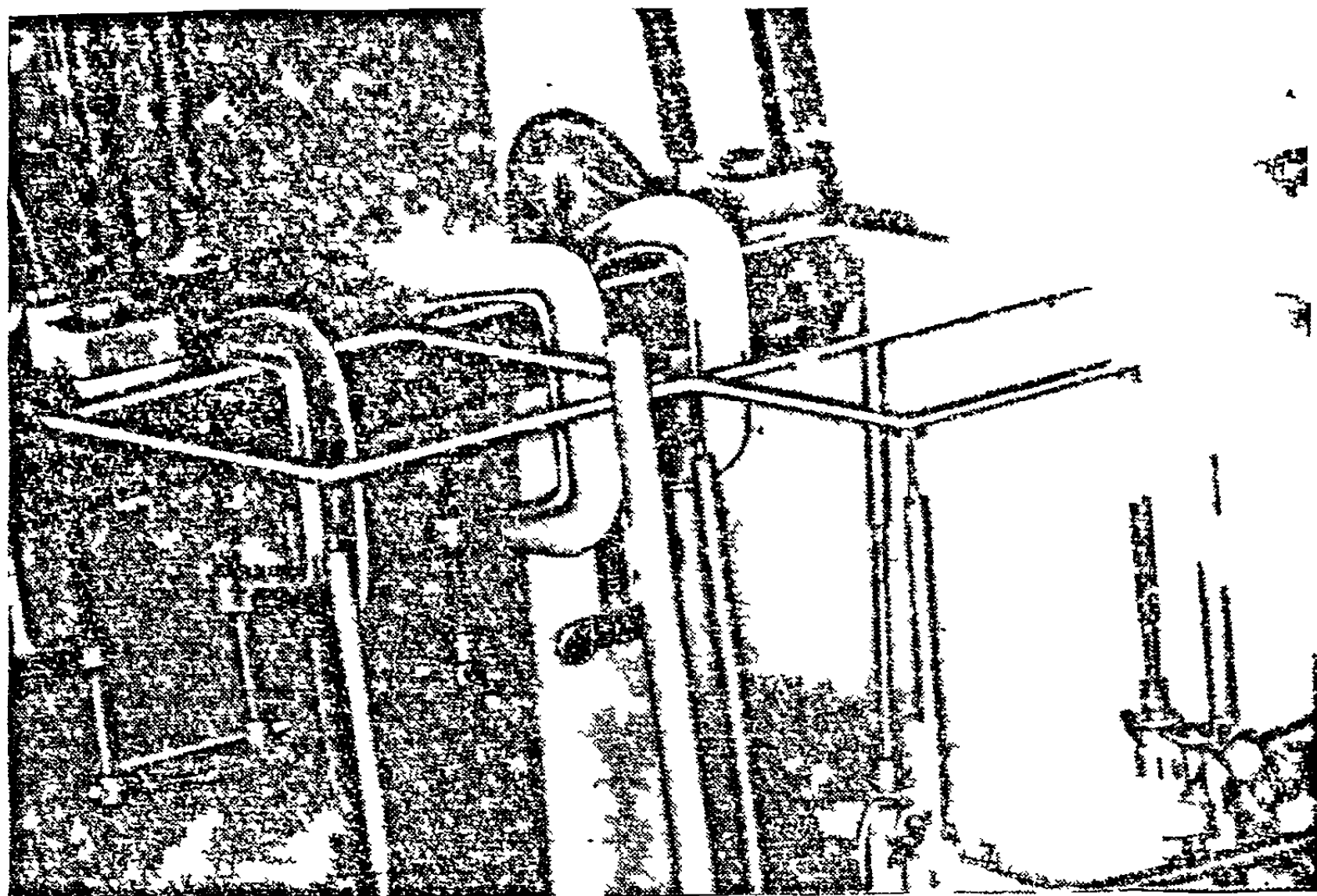


Фиг. 12-9. Модель дельтавидного крыла для испытания на флаттер при малых скоростях, в которой используются балочная решетка и секционное покрытие бальзой.

в том, чтобы сначала создать упрощенную конструкцию, заботясь о том, чтобы масса ее не составляла очень значительной доли допустимой массы конструкции и чтобы она вписывалась в имеющиеся размеры. Затем он проектирует оболочку,

закрывающую конструкцию и создающую наружную поверхность, которая обтекает потоком воздуха. Наконец конструктор определяет величины масс, которые нужно еще добавить к каждому сечению, и соответствующим образом распределяет эти массы. Конечно, в некоторых случаях, как, например, в случае покрытия резиной моделей для исследования флаттера на малых скоростях, обложка может увеличивать жесткость конструкции, тогда как в других случаях часть конструкции может образовать также и наружную поверхность.

Тип конструкции внутренней и наружной оболочек зависит от размера модели, интервала скоростей, в котором будет испытываться модель, и отношения плотности воздуха на высоте полета самолета к плотности воздуха при



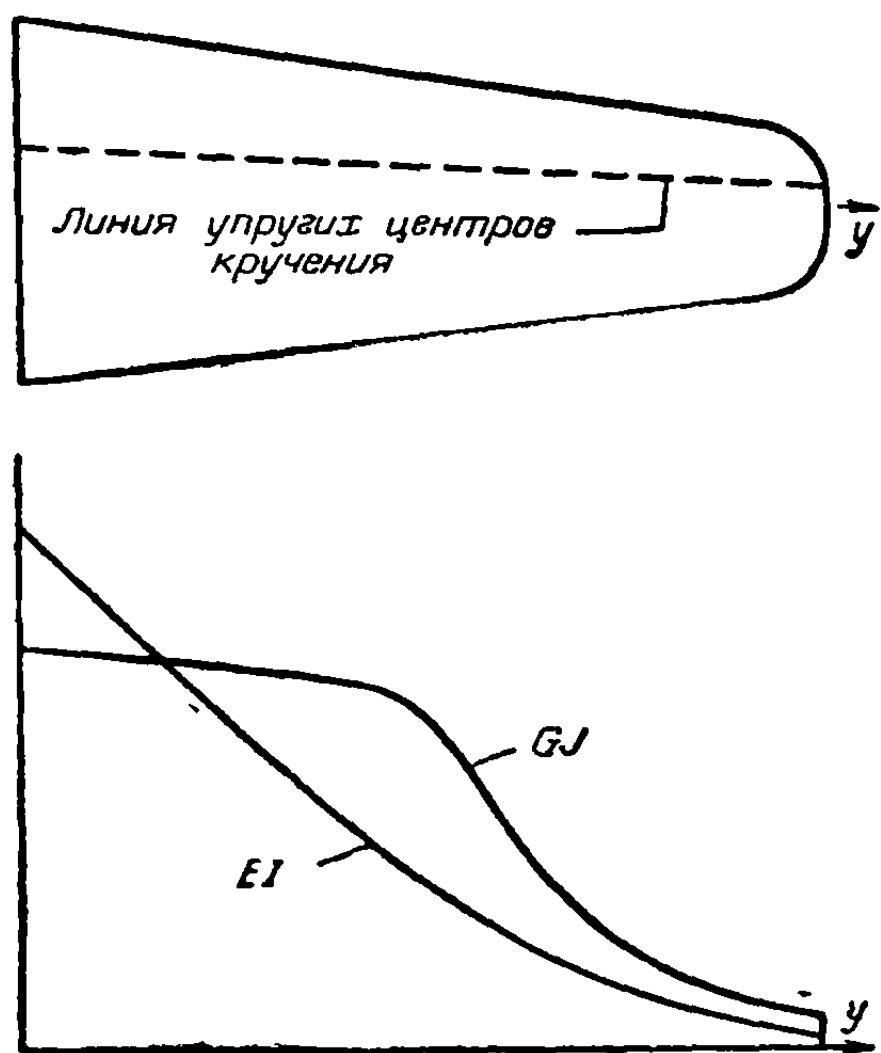
Фиг 12-10. Статическое испытание баточной решетки, аналогичной той, которая используется в модели, приведенной на фиг 12-9.

испытании модели. Этот последний параметр решает вопрос о том, должен ли конструктор использовать очень хорошую модель и при каждой возможности экономить в весе или, для того чтобы достичь правильного распределения жесткости и формы, можно использовать, может быть, менее эффективные, но удобные и простые средства. Типичные модели для исследования флаттера и их компоненты показаны на фиг. 12-1—12-10.

**12-2. Моделирование конструкции.** Распределение жесткости в различных основных частях самолетной конструкции обычно может быть наиболее просто описано одним из следующих методов. Первый и простейший метод можно использовать только для тех частей самолета, упругие свойства которых являются в основном функциями только одной переменной. Так, несущие поверхности большого удлинения, имеющие совершенно жесткие нервюры, могут описываться с помощью понятий упругой оси и распределений изгибной и крутильной жесткостей вдоль размаха. Фюзеляжи с большим удлинением относятся к этому же классу. Если удлинение несущей поверхности мало или нервюры ее сравнительно гибки, то необходимо использовать второй метод. Упругие свойства конструкции этого типа являются функциями двух переменных; это значит, что поверхность может деформироваться подобно пластине и ее деформации не ограничены простыми деформациями изгиба и кручения относительно упругой оси.

Для этих конструкций распределение жесткости наилучшим образом описывается с помощью матрицы коэффициентов влияния. Задачи моделирования конструкции в этих двух случаях совершенно различны и будут рассмотрены отдельно.

**12-3. Упругие свойства как функции одной переменной.** Крыло реактивного транспортного самолета, рассмотренного в примере 2-1, является типом конструкций, которые попадают в упомянутый выше первый класс; жесткостные свойства этого крыла изображены на фиг. 12-11. Упругая ось представлена в виде геометрического места центров поворота отдельных сечений, и распределение жесткости вдоль размаха дано в виде изгибной  $EI$  и крутильной  $GJ$  жесткостей отдельных сечений. Считается, что для модели этого



Фиг. 12-11. Распределение жесткости крыла реактивного транспортного самолета.

крыла, предназначенной для исследования флаттера, не нужно моделировать жесткости частей крыла, лежащих впереди и позади упругой оси, и что нервюры вдоль хорды обладают настолько большой жесткостью, что произвольная деформация сечения может быть представлена в виде простой комбинации деформаций изгиба и кручения. Другими словами, положение каждой жесткой нервюры может быть описано с помощью линейного перемещения нервюры  $u$  упругой оси и поворота ее относительно упругой оси.

Типы конструктивного оформления, которые могут быть использованы для этой модели, можно разделить на две категории: в первой — внутренняя конструкция окружена оболочкой, которая не увеличивает заметно изгибную и крутильную жесткости модели, во второй — оболочка весьма значительно увеличивает жесткости модели.

Простейший тип конструкции, попадающий в первую категорию, состоит из одного лонжерона, ось которого совпадает с желаемым положением упругой оси модели. Форма поперечного сечения лонжерона в каждом сечении спроектирована таким образом, чтобы обеспечить требуемые величины изгибной  $EI_x$  и крутильной  $GJ$  жесткостей. Отношение жесткостей всецело определяется формой поперечного сечения, тогда как величина жесткости определяется его размером [12-1]. Полярный момент инерции  $J$  круглого стержня равен  $2I_x$ , так что отношение крутильной жесткости к изгибной равно

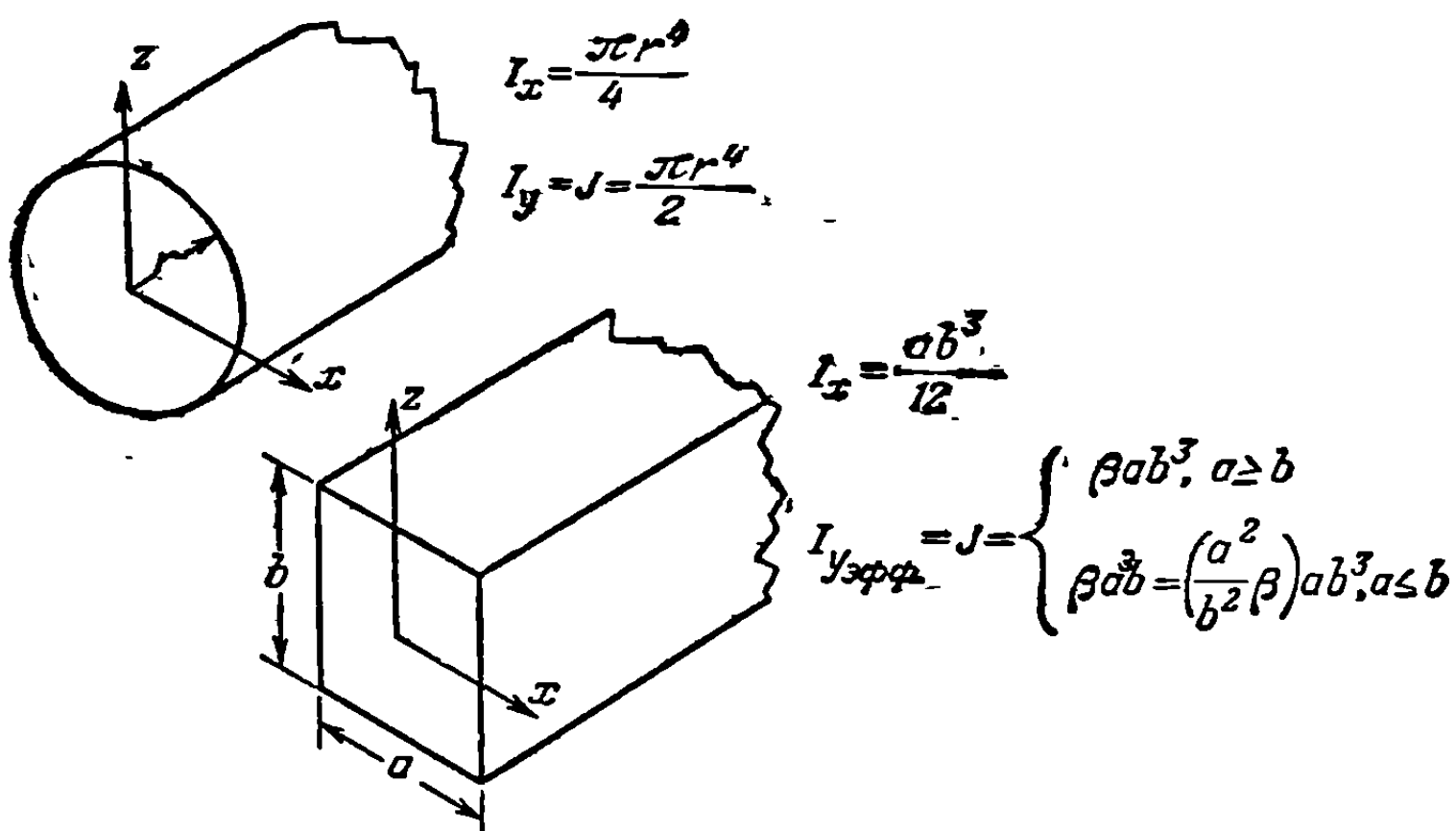
$$\frac{GJ}{EI_x} = \frac{2G}{E} \sim \frac{2}{3}. \quad (12-1)$$

Таким образом, для сплошного стержня или даже для круглой трубы нельзя получить отношение жесткостей, отличное от  $2/3$ . Для лонжерона прямоугольного поперечного сечения будет иметь место целый диапазон отношений жесткостей, потому что его ширина может изменяться независимо от его высоты. Как показано на фиг. 12-12, жесткость на кручение такого лонжерона можно определить с помощью коэффициента формы  $\beta$ . Изменение  $\beta$  и  $(a^2/b^2)\beta$  с формой поперечного сечения показано на фиг. 12-13. Для прямоугольного поперечного сечения отношение жесткостей может быть записано в виде

$$\frac{GJ}{EI_x} = \begin{cases} \frac{12G}{E} \beta, & \frac{a}{b} \geq 1, \\ \frac{12G}{E} \frac{a^2\beta}{b^2}, & \frac{a}{b} \leq 1. \end{cases} \quad (12-2)$$

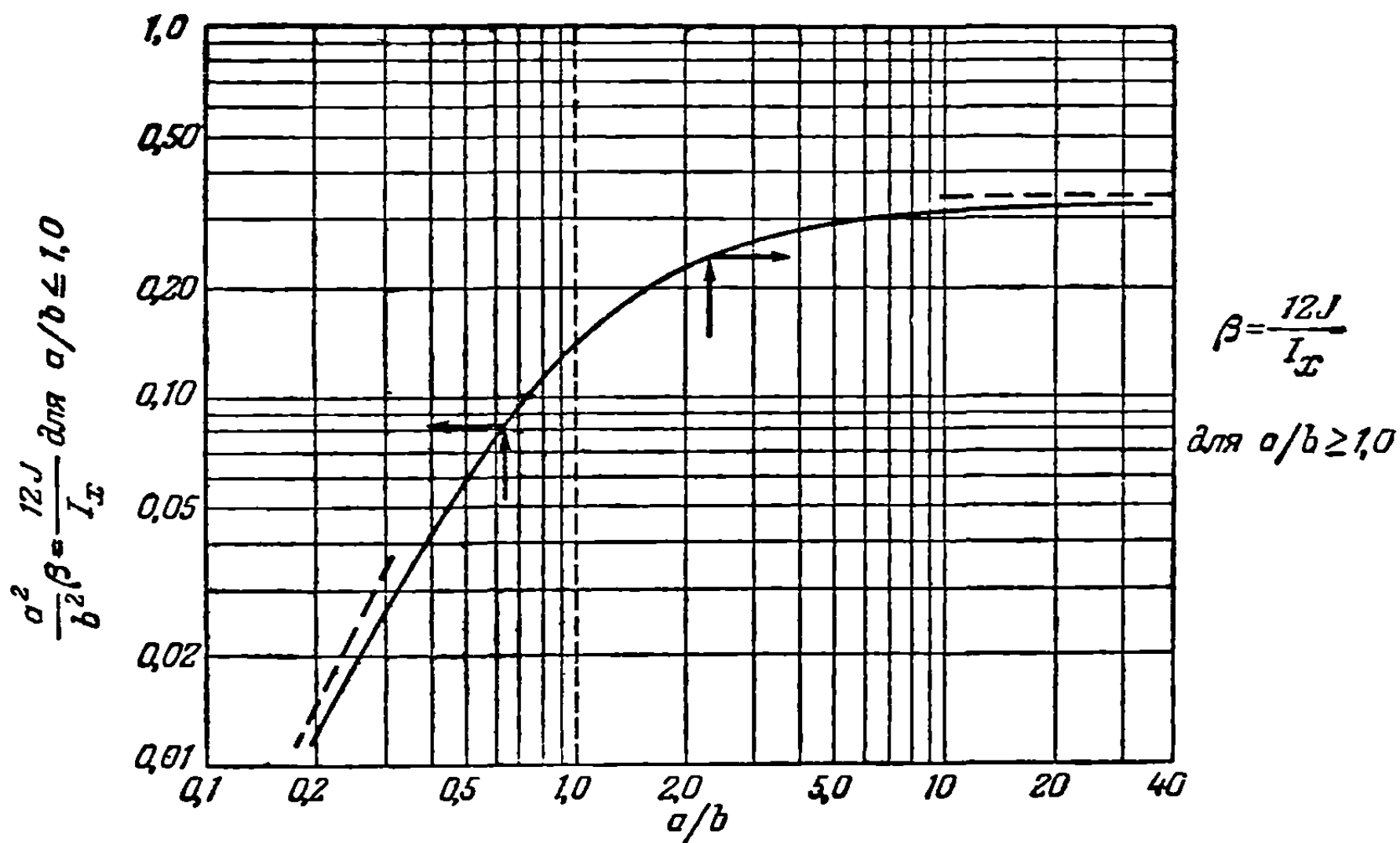


Поскольку величина коэффициента формы изменяется от 0 до  $1/3$ , то с помощью прямоугольного поперечного сечения можно воспроизводить отношения жесткостей максимум до  $4/3$ .



Фиг. 12-12. Моменты инерции площади лонжеронов круглого и прямоугольного поперечных сечений.

В некоторых случаях может оказаться необходимым моделировать как изгибную жесткость  $EI_z$ , так и  $EI_x$  и  $GJ$ . Это, в частности, имеет место в случае крыльев с большим удлинением и с подвесными массами и в случае фюзеляжей большого удлинения, когда нужно учитывать как боковой изгиб, так и



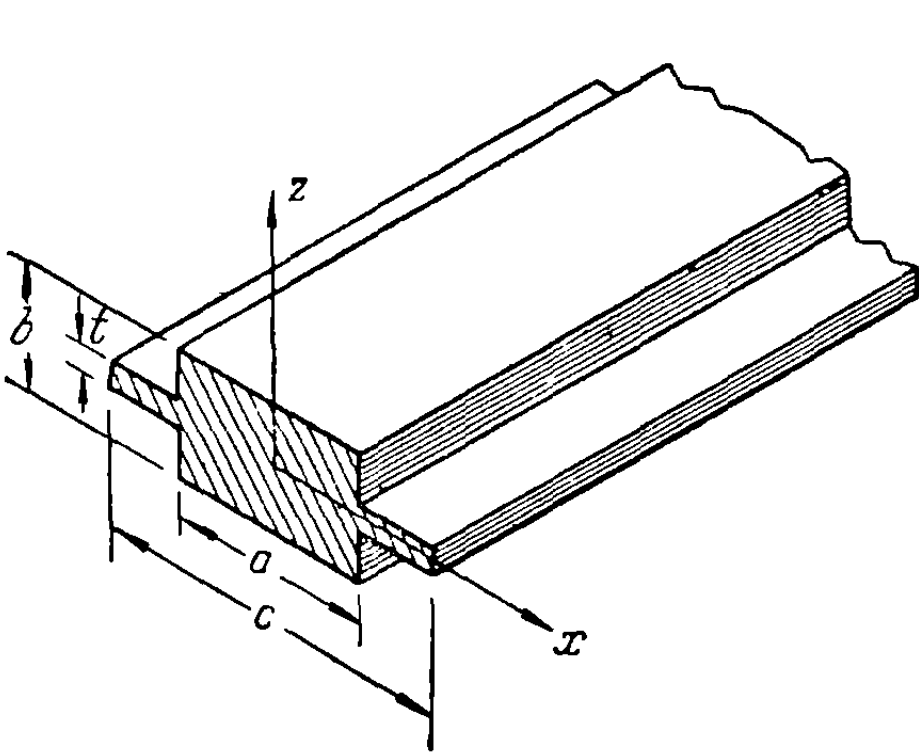
Фиг. 12-13. Коэффициенты крутильной жесткости формы  $\beta$  и  $\frac{a^2}{b^2} \beta$  для прямоугольного лонжерона, изображенного на фиг. 12-12.

изгиб в вертикальной плоскости. Так как на два параметра  $a$  и  $b$  прямоугольного поперечного сечения можно наложить не больше двух условий, то это третье требование обуславливает использование более сложных форм поперечного сечения<sup>1)</sup>.

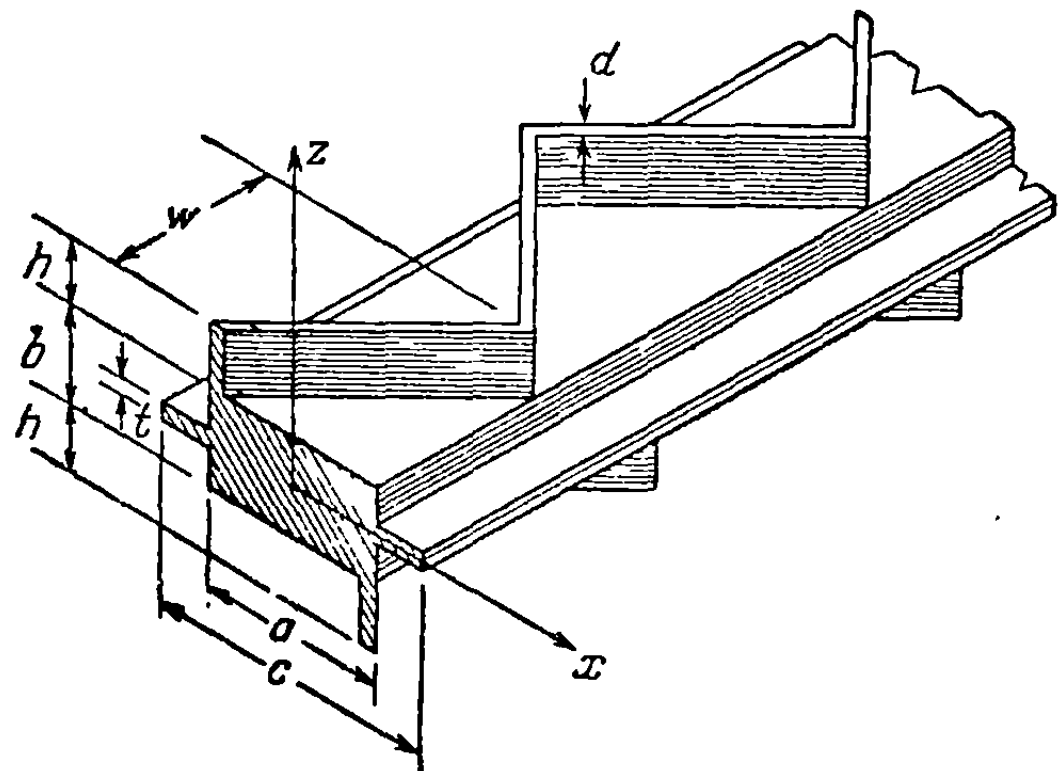
<sup>1)</sup> Оба эти метода и следующий метод для больших отношений жесткостей созданы авиационной компанией «Боинг».

Форма поперечного сечения, изображенная на фиг. 12-14, получена на основе следующего соображения: прямоугольная центральная часть служит для того, чтобы получить желаемые величины  $I_x$  и  $J$ , а фланцы прибавлены для того, чтобы увеличить  $I_z$  до желаемого значения. (Если  $I_z$  меньше нежели  $I_x$ , центральная часть предназначена для получения  $I_z$ , а фланцы — для получения  $I_x$ .) Если  $b/t \geq 10$ , то влияние фланцев на  $I_x$  будет менее 5%. Если  $b/t < 10$ , то для исправления первоначальных величин  $a$  и  $b$  на влияние фланцев при проектировании необходимо произвести итерацию. Так как на четыре имеющиеся в распоряжении величины  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $t$  нужно наложить только три проектных условия  $I_x$ ,  $J$  и  $I_z$ , то толщина фланца  $t$  может быть выбрана таким образом, чтобы она была меньше 10% от  $b$  и ограничивалась только условиями производства.

Для того чтобы иметь возможность использовать однолонжеронные конструкции в тех случаях, когда потребное отношение крутильной жесткости



Фиг. 12-14. Поперечное сечение лонжерона, крутильная и изгибная жесткости которого могут изменяться требуемым образом.



Фиг. 12-15. Лонжерон необычного поперечного сечения, спроектированный для обеспечения больших отношений крутильной и изгибной жесткостей.

к меньшей изгибной жесткости больше  $4/3$ , был сконструирован решетчатый лонжерон (фиг. 12-15). Он состоит из центральной части с фланцами и зигзагообразными ребрами на полках. В том сечении, где угол, образованный верхними ребрами, направлен вперед, угол, образованный нижними ребрами, направлен назад, и наоборот. Ребра закручиваются, когда лонжерон изгибается относительно оси  $x$ , изгибаются, когда лонжерон закручивается относительно оси  $y$ , и не испытывают заметной деформации, когда лонжерон изгибается относительно оси  $z$ .

Для частного случая алюминиевого сплава при угле пересечения ребер в  $90^\circ$ ,  $d = 0,06w$  и  $a = 1,085w$  эмпирически было установлено, что

$$\begin{aligned} J &= ab^3\beta + 0,31w^{1,1}h^{1,92}b, \\ I_x &= \frac{ab^3}{12} + 0,018w^{1,25}h^{1,43}b^{1,32}, \\ I_z &= \frac{ba^3}{12} + \frac{t(c^3 - a^3)}{12}. \end{aligned} \quad (12-3)$$

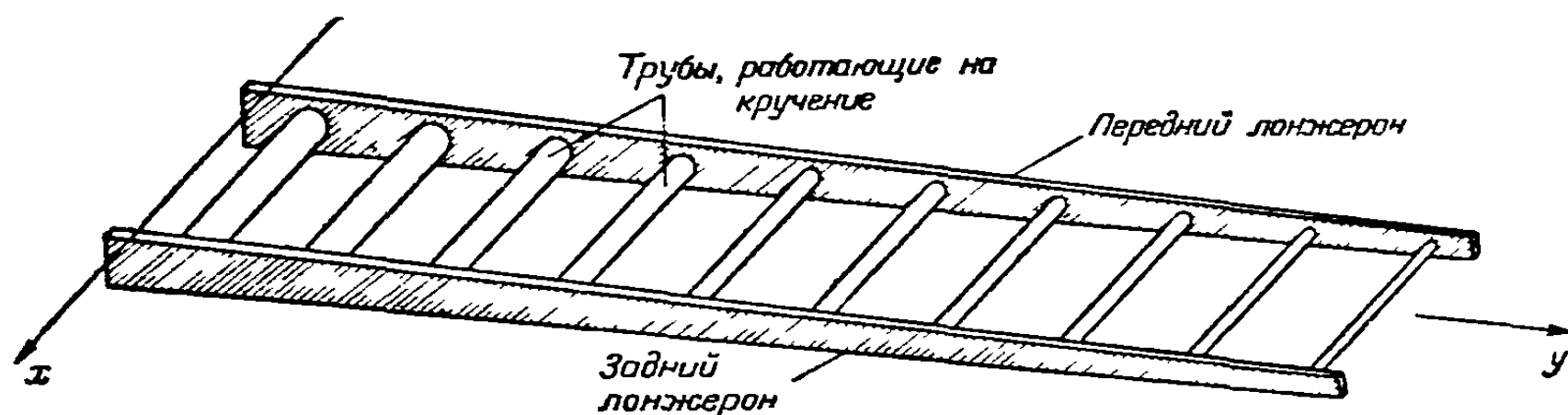
Другим типом конструктивного оформления модели, при котором лонжеронная конструкция полностью удовлетворяет требованиям жесткости, является двухлонжеронная конструкция с трубами, воспринимающими кручение, показанная в плане на фиг. 12-16 и на фиг. 12-5 и 12-33. Два лонжерона обеспечивают жесткость на изгиб  $EI_x$ , тогда как трубы, воспринимающие кручение, обеспечивают необходимую крутильную жесткость. Эта конструкция не может просто моделировать распределение изгибной жесткости  $EI_x$ . Однако, как будет

показано позднее, она дает дифференциальное распределение изгибной жесткости  $EI_x$ . Трубы, работающие на кручение, обладают очень большой жесткостью на изгиб, что обеспечивает выражение общей деформации конструкции в некотором сечении по размаху через деформацию сечения у упругой оси и деформацию кручения относительно этой оси.

Так как трубы, работающие на кручение, перпендикулярны к лонжеронам и не добавляют ничего к жесткости на изгиб  $EI_x$ , то сумма изгибных жесткостей переднего и заднего лонжерона в каждом сечении должна равняться требуемой жесткости  $(EI_x)_d$ :

$$(EI_x)_f + (EI_x)_r = (EI_x)_d. \quad (12-4)$$

Относительные размеры и положение лонжеронов должны быть при этом такими, чтобы обеспечивать правильное положение местных упругих центров кручения. Если считать, что упругий центр кручения данного сечения представляет собой точку, в которой должна была бы быть приложена нагрузка для того, чтобы



Фиг. 12-16. Конструкция двухлонжеронной модели с трубами, работающими на кручение.

получить чистый изгиб, в предположении, что местные условия распространены на весь размах, то можно показать, что момент жесткости лонжерона  $EI_x$  относительно упругого центра должен равняться нулю. Для того чтобы показать это, допустим, что нагрузка приложена на конце упругой оси однородной конструкции, имеющей везде одинаковые свойства. В силу чистого изгиба конструкции, обусловленного этой нагрузкой, форма прогибов обоих лонжеронов должна быть одинакова. Если  $w_f$  и  $w_r$  являются соответственно вертикальными перемещениями (положительное вверх) переднего и заднего лонжеронов и если положительный изгибающий момент  $M$  приводит к сжатию верхних волокон лонжерона, а положительная поперечная сила стремится сместить вверх внешнее сечение по отношению к внутреннему, то

$$S_f = -\frac{d}{dy} M_f = -\frac{d}{dy} \left[ (EI_x)_f \frac{d^2 w_f}{dy^2} \right] = -(EI_x)_f \frac{d^3 w_f}{dy^3}. \quad (12-5)$$

Однако

$$\frac{d^3 w_f}{dy^3} = \frac{d^3 w_r}{dy^3}, \quad (12-6)$$

так что

$$\frac{S_f}{(EI_x)_f} = \frac{S_r}{(EI_x)_r}. \quad (12-7)$$

Для равновесия внешнего сечения необходимо, чтобы

$$S_f l_f + S_r l_r = 0, \quad (12-8)$$

где  $l_f$  и  $l_r$  — соответственно расстояния от упругого центра до переднего и заднего лонжерона (положительное вверх). Используя соотношение (12-7), получим желаемый результат

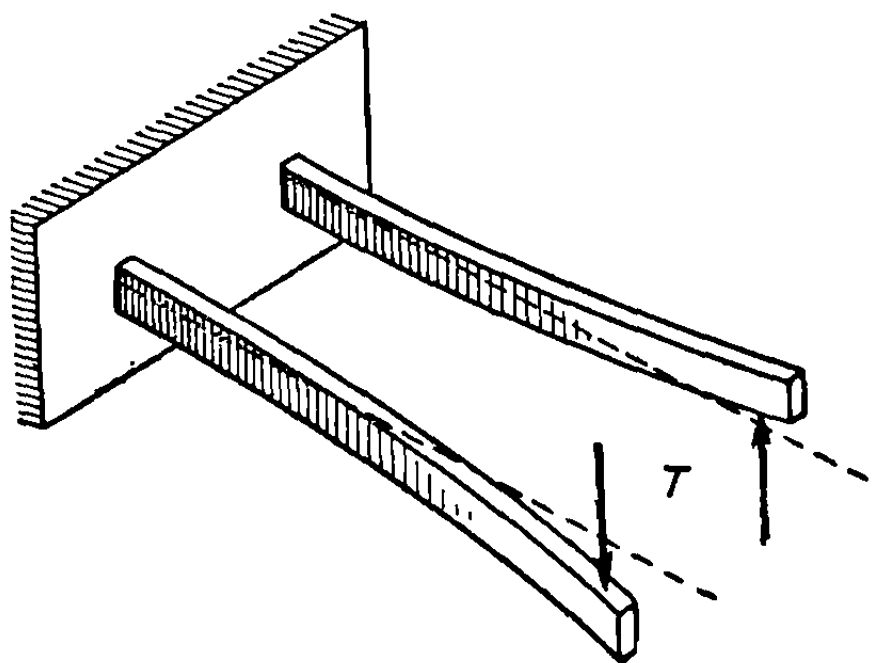
$$(EI_x)_f l_f + (EI_x)_r l_r = 0. \quad (12-9)$$



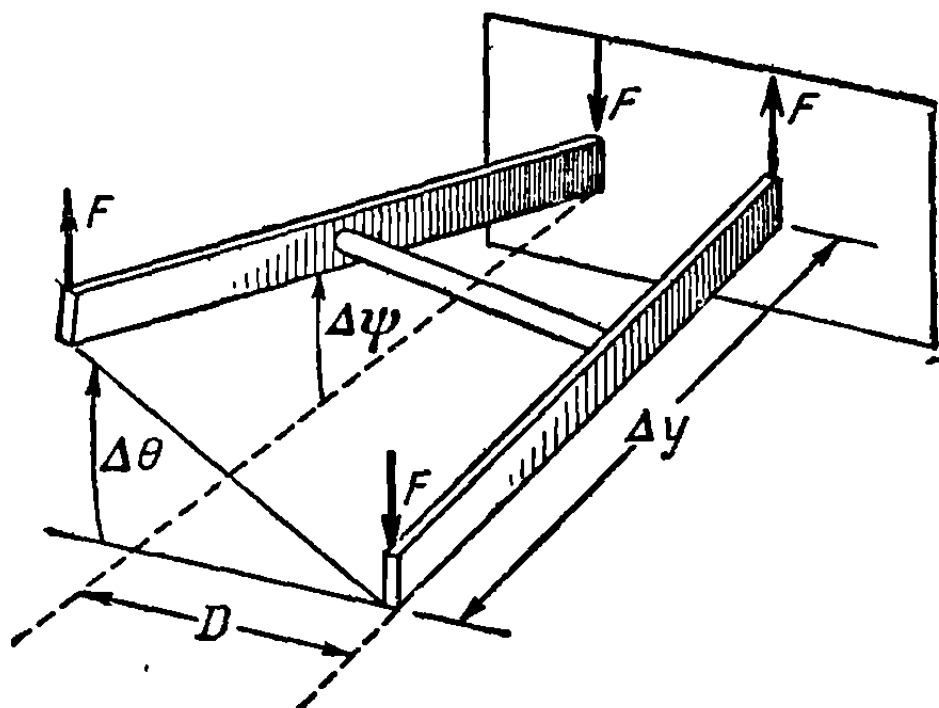
Таким образом, уравнения (12-4) и (12-9) определяют взаимное расположение и изгибные жесткости лонжеронов.

Для того чтобы обеспечить желаемую крутильную жесткость модели, необходимо увеличить крутильную жесткость лонжеронов за счет труб, работающих на кручение.

В большинстве моделей этого типа основная доля крутильной жесткости создается за счет труб, работающих на кручение. Важно, однако, знать, что у многолонжеронных моделей, так же как и у многолонжеронных крыльев, дифференциальный изгиб лонжеронов также увеличивает крутильную жесткость; связь эта является довольно запутанной. Даже при отсутствии связей между лонжеронами, они будут представлять некоторое сопротивление приложенному



Фиг. 12-17. Пример дифференциального сопротивления изгибу двух лонжеронов, к которым применен крутящий момент.



Фиг. 12-18. Деформация одной секции двухлонжеронной конструкции с работающими на кручение трубами под действием крутящего момента.

крутящему моменту  $T$  (см. фиг. 12-17). Для того чтобы оценить этот эффект в некотором сечении по размаху, заметим, что два лонжерона будут сопротивляться приложенной паре так, чтобы

$$S_f = -S_r, \quad M_f = -M_r, \quad T = S_f D, \quad (12-10)$$

где  $D$  — расстояние между параллельными лонжеронами. Таким образом,

$$\begin{aligned} T &= -\frac{d}{dy}[DM_f] = -\frac{d}{dy}[l_f M_f + l_r M_r] = -\frac{d}{dy}\left[l_f(EI_x)_f \frac{d^2 w_f}{dy^2} + l_r(EI_x)_r \frac{d^2 w_r}{dy^2}\right] = \\ &= -\frac{d}{dy}\left[l_f(EI_x)_f \frac{d^2(w_f - w_r)}{dy^2}\right] = -\frac{d}{dy}\left[l_f(EI_x)_f D \frac{d^2 \theta}{dy^2}\right], \quad (12-11) \end{aligned}$$

где угол закручивания равен

$$\theta = \frac{w_f - w_r}{D}. \quad (12-12)$$

Преобразуя, получим

$$T = -\frac{d}{dy}\left\{[l_f^2(EI_x)_f + l_r^2(EI_x)_r] \frac{d^2 \theta}{dy^2}\right\}. \quad (12-13a)$$

Таким образом, подавление крутящего момента, обусловленное дифференциальным изгибом лонжеронов, является функцией второго момента изгибной жесткости относительно упругого центра и третьей производной от угла закручивания  $\theta$ . Этот второй момент изгибной жесткости  $\sigma$  может быть записан в нескольких формах:

$$\sigma = l_f^2(EI_x)_f + l_r^2(EI_x)_r = D^2 \frac{(EI_x)_f (EI_x)_r}{(EI_x)_f + (EI_x)_r}. \quad (12-13b)$$

Для того чтобы с достаточной для целей проектирования точностью оценить эффективность труб, работающих на кручение (в смысле создания жесткости на кручение), рассмотрим деформированную конструкцию, состоящую из лонжеронов и работающей на кручение трубы (см. фиг. 12—18, и допустим при этом, что сами лонжероны не закручены. Если длина отрезков лонжеронов, которые взаимодействуют с трубой больше, нежели соседние участки, равна  $\Delta y$ , и если на эту конструкцию действует крутящий момент  $T = FD$ , то момент, поглощаемый трубой, работающей на кручение, равен  $F\Delta y$ . Если крутильная жесткость трубы, работающей на кручение, равна  $(GJ)_{TT}$ , то, допустив, что длина отрезков лонжеронов, связанных с трубой, почти не меняется, получим

$$F\Delta y = (GJ)_{TT} \frac{\Delta \theta}{D} = (GJ)_{TT} \frac{\Delta \theta}{\Delta y}. \quad (12-14)$$

Тогда

$$T = FD = \left[ (GJ)_{TT} \frac{D}{\Delta y} \right] \frac{\Delta \theta}{\Delta y} = (GJ)_{TT \text{ эфф}} \frac{\Delta \theta}{\Delta y}. \quad (12-15)$$

Таким образом, эффективная крутильная жесткость трубы, работающей на кручение относительно оси, направленной вдоль размаха, равна

$$\frac{(GJ)_{TT} D}{\Delta y}.$$

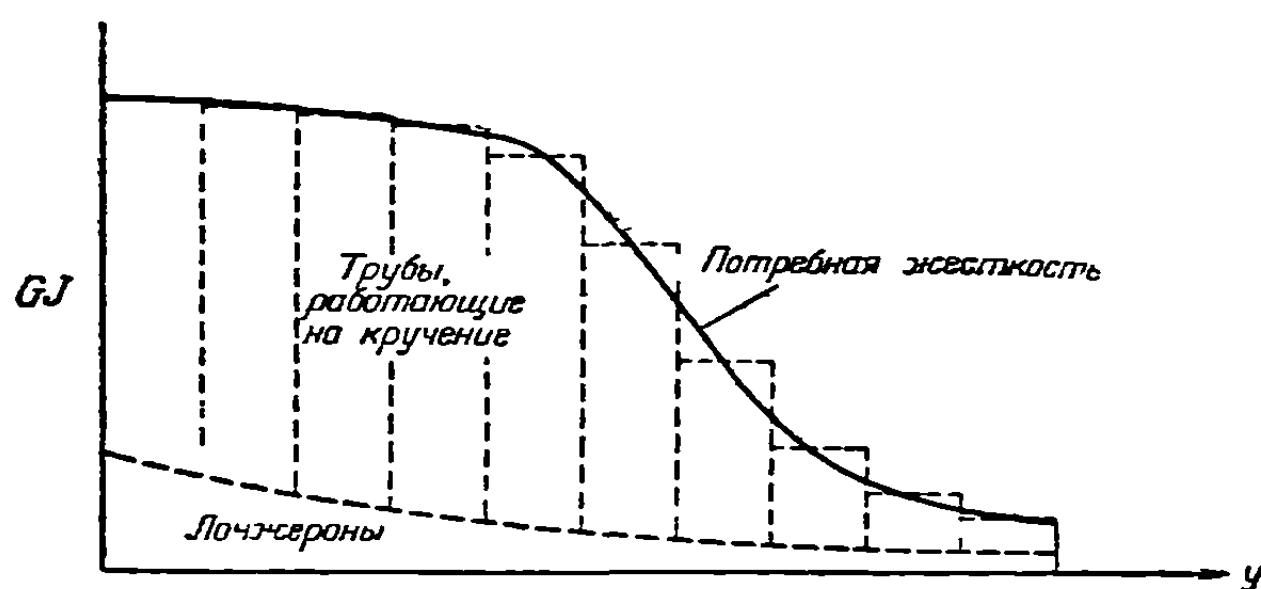
Вспомня, что трубы, работающие на кручение, размещены друг от друга довольно близко и используются для представления непрерывного распределения жесткости, мы можем выразить крутящий момент в виде

$$T = (GJ)_{TT \text{ (эфф.)}} \frac{d\theta}{dy}. \quad (12-16)$$

Если теперь принять во внимание тот факт, что при закручивании крыла лонжероны тоже закручиваются, то очевидно, что каждый лонжерон представляет определенное сопротивление закручиванию, пропорциональное величине  $GJ$  данного лонжерона. Эта жесткость лонжеронов является добавлением к дифференциальной изгибной жесткости и жесткости, вносимой трубами, работающими на кручение, так что действительный крутящий момент всей двухлонжеронной конструкции с работающими на кручение трубами может быть записан в виде

$$T = [(GJ)_{\text{лонжерон}} + (GJ)_{TT \text{ (эфф.)}}] \frac{d\theta}{dy} - \frac{d}{dy} \left\{ [l_f^2 (EI_x)_f + l_r^2 (EI_x)_r] \frac{d^2 \theta}{dy^2} \right\}. \quad (12-17)$$

Уравнение (12-17) только приближенно описывает поведение этой решетчатой балки. Более точный анализ можно провести с помощью метода минимума потенциальной энергии, изложенного в гл. 2. В результате получим ряд коэффициентов влияния при кручении. Однако при проектировании модели обычно в основу кладут уравнение (12-17), а также уравнения (12-4) и (12-9). Таким образом, поперечная изгибная жесткость, положение упругой оси и дифференциальная изгибная жесткость определяются с желаемой степенью точности с соответствующим выбором размеров и положения лонжеронов. Потребная крутильная жесткость создается, как показано на фиг. 12-19, за счет лонжеронов и труб, работающих на кручение.



Фиг. 12-19. Составляющие потребной жесткости на кручение за счет лонжеронов и труб, работающих на кручение.

Три условия, касающиеся суммарной жесткости на изгиб и ее первого и второго моментов относительно упругой оси, обычно не могут быть удовлетворены с помощью двух параллельных лонжеронов. Если моделирование дифференциального изгиба в каждом сечении по размаху имеет второстепенное значение, то приближенно его суммарный эффект может быть выражен с помощью соответствующего расположения двух прямых лонжеронов. Если точное моделирование дифференциального изгиба является делом первостепенной важности или если другие требования к жесткостям трудно выполнить с помощью двух прямых лонжеронов, то вместо того, чтобы прибегать к изогнутым лонжеронам или лонжеронам с различными ответвлениями, может быть, будет выгоднее добавить третий лонжерон, по крайней мере на части размаха модели. Используя для обозначения среднего лонжерона индекс  $m$  и для обозначения дифференциальной изгибной жесткости индекс  $\sigma$ , Раушер [12-2] показал, что в случае трех параллельных лонжеронов с межлонжеронными трубами уравнения оказываются совершенно аналогичными уравнениям, полученным для двух лонжеронов. Таким образом,

$$\begin{aligned} (EI_x)_f + (EI_x)_m + (EI_x)_r &= (EI_x)_d, \\ l_f(EI_x)_f + l_m(EI_x)_m + l_r(EI_x)_r &= 0, \\ l_f^2(EI_x)_f + l_m^2(EI_x)_m + l_r^2(EI_x)_r &= \sigma_d, \\ \sum (GJ)_{\text{лонжерон}} + \sum (GJ)_{TT(\text{эфф.})} &= (GJ)_d. \end{aligned} \quad (12-18)$$

Следует помнить, что в этой конструкции межлонжеронные элементы обладают очень большой жесткостью на изгиб, так что элементы, направленные вдоль хорды, при кручении и при изгибе крыла вращаются и перемещаются поступательно, не деформируясь.

Для того чтобы более наглядно показать влияние дифференциального изгиба при кручении модели с параллельными лонжеронами и с трубами, работающими на кручение, рассмотрим частный случай крыла с прямолинейной упругой осью и постоянными значениями  $EI_x$ ,  $GJ$  и  $\sigma$  вдоль размаха. Для свободнонесущего крыла, нагруженного сосредоточенным моментом  $T$  на конце ( $y=l$ ), дифференциальное уравнение имеет вид

$$\sigma \frac{d^3\theta}{dy^3} - GJ \frac{d\theta}{dy} = -T. \quad (12-19)$$

Условие заземления в корневом сечении для каждого лонжерона приводит с помощью уравнения (12-12) к граничным условиям в корневом сечении:

$$\theta = \frac{d\theta}{dy} = 0. \quad (12-20)$$

Так как на конце лонжеронов изгибающий момент равен нулю, то граничное условие на конце имеет вид

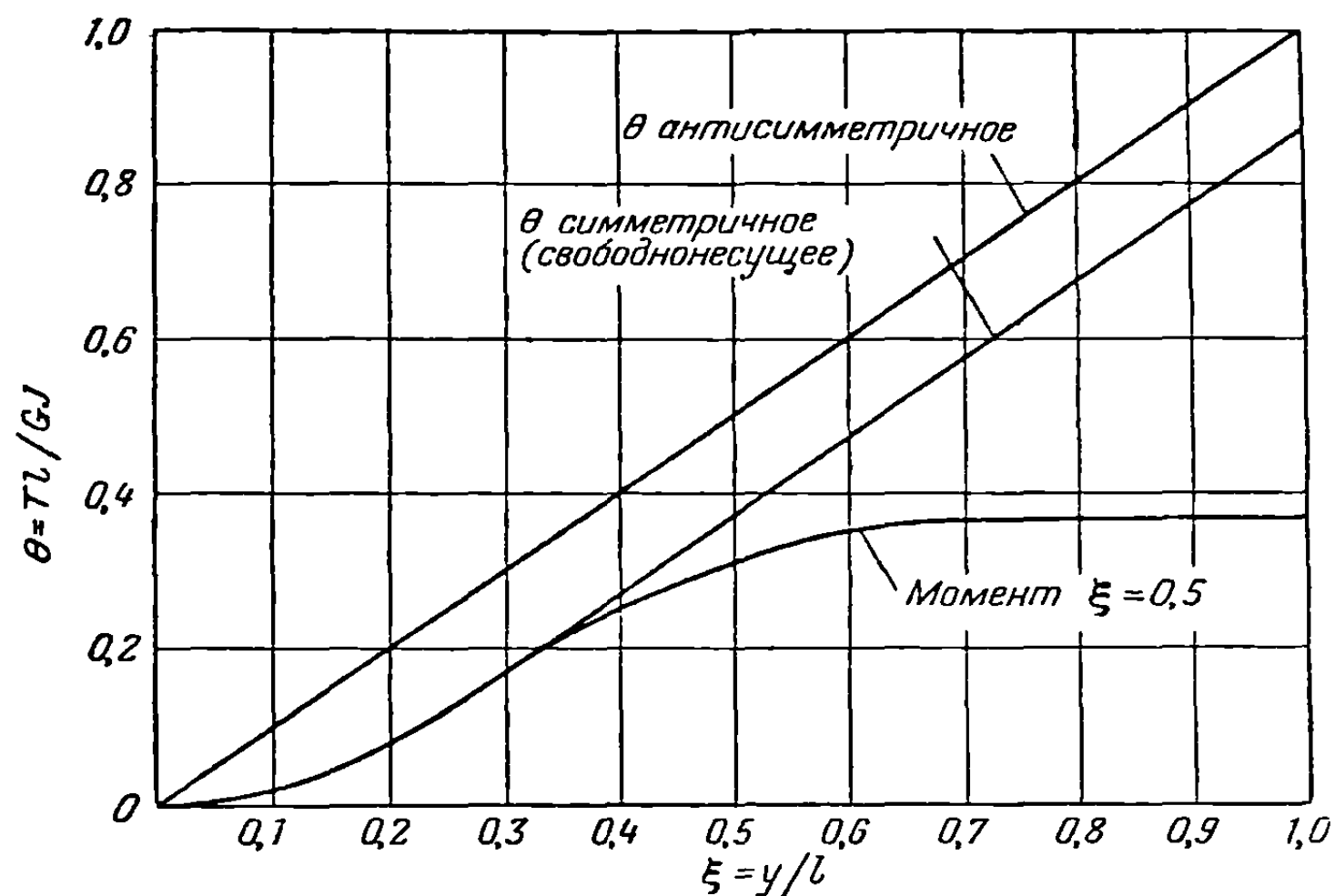
$$\left( \frac{d^2w_f}{dy^2} - \frac{d^2w_r}{dy^2} \right) = D \frac{d^2\theta}{dy^2} = 0. \quad (12-21)$$

С учетом граничных условий (12-20) и (12-21) решение уравнения (12-19) выразится в виде

$$\theta = \frac{T}{GJ} y - \frac{T}{GJ} \sqrt{\frac{\sigma}{GJ}} \left\{ \text{th} \sqrt{\frac{GJ}{\sigma}} l - \frac{\text{sh} \sqrt{GJ/\sigma} (l-y)}{\text{ch} \sqrt{GJ/\sigma} l} \right\}. \quad (12-22)$$

Это решение для типичной модели свободнонесущего крыла, предназначенной для исследования флаттера, представлено на фиг. 12-20. На этой фигуре для той же модели показано также изменение угла атаки под действием сосредоточенного момента, приложенного в среднем по размаху сечения.

Рассмотрим теперь то же самое однородное крыло со свободным корневым сечением, но подверженное действию двух равных противоположно направленных моментов, приложенных на концах. Этот случай нагружения может быть мыслим как случай антисимметричного нагружения, тогда как нагружение концов крыла с защемленным корневым сечением соответствует случаю симметричной нагрузки, когда на обоих концах крыла приложены крутящие моменты  $T$ ,



Фиг. 12-20. Угловые перемещения типичного однородного двухлонжеронного крыла с работающими на кручение трубами, обусловленные приложенными моментами.

которым противостоит момент  $2T$ , приложенный в корневом сечении. В случае антисимметричной нагрузки граничные условия в корневом сечении примут вид

$$\theta = \frac{d^2\theta}{dy^2} = 0, \quad (12-23)$$

так как форма кривой углов закручивания должна быть антисимметричной. Для однородного крыла это ведет к решению довольно простого вида:

$$\theta = \frac{T}{GJ} y, \quad (12-24)$$

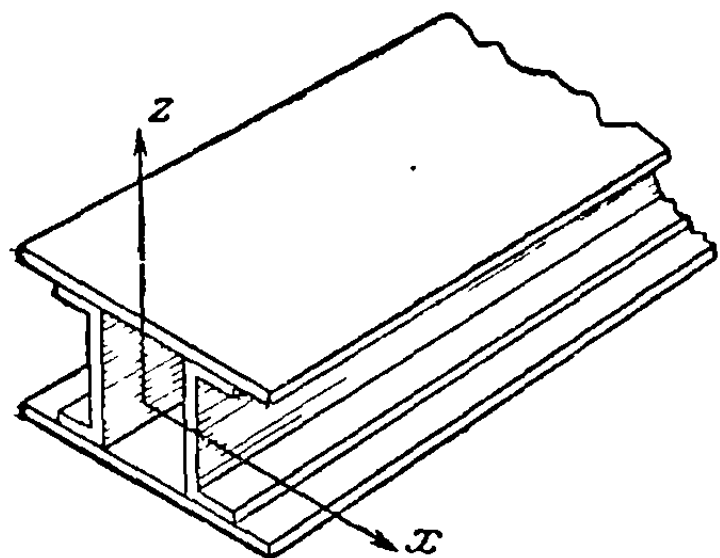
которое изображено на фиг. 12-20 (антисимметричное нагружение). Таким образом, видно, что при антисимметричном нагружении углы закручивания будут больше, нежели при соответствующем симметричном нагружении. Отношение углов закручивания на конце крыла для двух этих случаев нагружения равно

$$\frac{\theta_{\text{симм.}}}{\theta_{\text{антисимм.}}} = 1 - \sqrt{\frac{\sigma}{GJ}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{GJ}{\sigma}} l. \quad (12-25)$$

Для этого однородного крыла при антисимметричном нагружении влияние дифференциального изгиба исчезает.

Хотя одно- и двухлонжеронная конструкция с трубами, работающими на кручение, наиболее часто используется в моделях для исследования флаттера, требование большой жесткости и малая допустимая масса диктуют иногда использование более эффективных конструкций. Таким образом, может оказаться желательным использовать двухлонжеронную коробчатую конструкцию, работающую на кручение, или даже конструкцию с работающей обшивкой (фиг. 12-1 и 12-6).

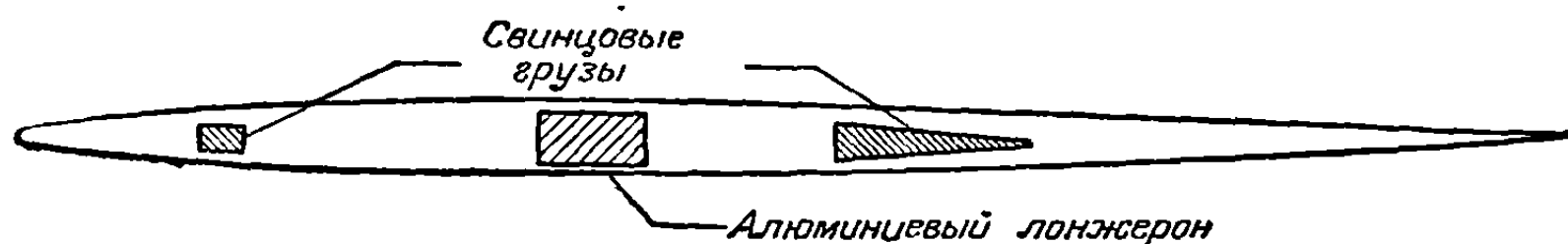
На фиг. 12-21 изображена простая сварная стальная коробчатая конструкция, работающая на кручение. Если жесткость такой конструкции превышает требуемую, то в любом сечении ее можно легко довести до соответствующей величины. Сначала для получения соответствующей величины крутильной жесткости уменьшают толщину верхней и нижней пластин, покрывающих коробку, а затем, для того чтобы уменьшить изгибную жесткость, не уменьшая заметным образом жесткости на кручение, спиливают края этих пластин.



Фиг. 12-21. Простая стальная сварная конструкция с работающей на кручение коробкой, допускающая быстрое изменение жесткости.

Допустимая масса моделей для флаттера, имитирующих полет на больших высотах и предназначенных для испытаний при плотностях, близких к плотности на уровне моря, сравнительно велика, и поэтому в этих случаях нет необходимости в использовании эффективных конструкций. Подобное положение часто имеет место для современных высокоскоростных самолетов, для исследования которых применяются сплошные модели. Эти модели могут быть сплошь деревянными, металлическими или представлять собой комбинацию того и другого. Для получения необходимого распределения массы в некоторых моделях может

использоваться свинец, но можно обойтись и без него. Конструкция, которая показала себя с хорошей стороны, состоит из алюминиевого лонжерона, вмонтированного в сплошной кусок бальзового дерева, создающего желаемую внешнюю форму (фиг. 12-4 и 12-22). Несмотря на то, что жесткостные свойства бальзы изменяются в широком диапазоне и сильно зависят от направления волокон, простые статические испытания брусков, из которых должны изготавливаться модели, дают конструктору все необходимые сведения. Это особенно справедливо для типичной модели, в которой основная доля жесткости на изгиб и кручение создается за счет лонжерона.



Фиг. 12-22. Поперечное сечение модели сверхзвукового крыла с вмонтированными в сплошную бальзу массами и лонжеронами.

Процесс проектирования модели из бальзы с алюминиевым лонжероном совершенно аналогичен процессу проектирования двухлонжеронной модели с трубами, работающими на кручение, в особенности в части, касающейся изгибной жесткости. Как и раньше, в каждом сечении по размаху конструктор должен найти требуемую величину изгибной жесткости, жесткости на кручение и положение упругой оси. Конструктор может считать, что модель состоит из сплошной бальзовой балки и лонжерона с модулем Юнга и модулем сдвига, равными разности соответствующих модулей алюминия и бальзы. Это позволяет ему помещать лонжерон в любом месте бальзовой балки без последующего внесения поправок на изменение свойств бальзовой балки, обусловленное отверстием для лонжерона. Изгибная и крутильная жесткости бальзовой балки сплошного сечения в данном сечении по размаху фиксируются профилем крыла<sup>1)</sup> и могут быть

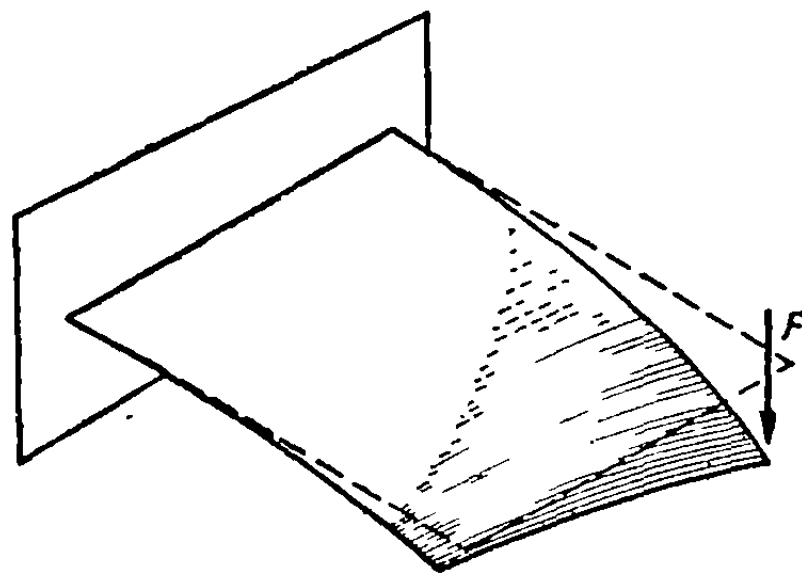
1) Эффективная величина  $GJ$  для типичного тонкого сплошного крылового профиля приближенно вычисляется по формуле  $\frac{1}{6} Gct^3$ , где  $c$  — хорда и  $t$  — максимальная толщина профиля.

вычтены из потребных величин жесткостей для того, чтобы определить жесткости, которые должны быть обеспечены лонжероном с «приведенным модулем». То же самое рассуждение, которое в случае двухлонжеронной конструкции с работающими на кручение трубами привело к уравнению (12-9), обеспечивает в этом случае такое положение лонжерона, что «центр тяжести» изгибной жесткости сплошной бальзовой балки и лонжерона с приведенным модулем лежит там, где должна проходить упругая ось. Для того чтобы обеспечить оставшиеся требования относительно изгибной и крутильной жесткости, размеры этого лонжерона с приведенным модулем должны соответствовать уравнению 12-2.

**12-4. Упругие свойства конструкции являются функциями двух переменных.** Задача моделирования жесткости конструкции при проектировании модели для флаттера намного труднее, когда упругие свойства конструкции являются функциями не одной, а двух переменных. Важность этой задачи возросла в связи с усиленным использованием несущих поверхностей малого удлинения, которые изгибаются и закручиваются не так, как несущие поверхности большого удлинения. Действительно, поскольку гибкость крыла в направлении хорды является величиной того же порядка, что и гибкость крыла в направлении размаха, то формы прогибов имеют резко выраженную двоякую кривизну, характерную для деформаций пластины (см. фиг. 12-23). Эти формы не могут быть выражены через соответствующие формы изгиба и кручения относительно определенной оси и в действительности являются сложными поверхностями деформаций, зависящими от  $x$  и  $y$ .

Для того чтобы в сжатой форме описать упругие характеристики такой конструкции, вводится матрица коэффициентов влияния (см гл. 2). Обычно в результате расчета или из экспериментальных данных, взятых из испытания крыла, эта матрица известна конструктору. Его задача состоит в том, чтобы создать конструкцию, которая в достаточном числе точек имела бы правильно подобранные коэффициенты влияния. Применяемая им конструкция может быть и не похожа на натурную конструкцию, за исключением, возможно, случаев больших высокоскоростных моделей. Как было указано во введении к этой главе, это объясняется тем, что строить точные уменьшенные копии конструкции непрактично. Какую бы «упрощенную» конструкцию ни выбрал конструктор, она не может быть построена точка за точкой, как строились конструкции, свойства которых зависели от одной переменной, потому что та форма ее, которая обеспечивает правильные перемещения для нагрузки в одной точке, в общем случае не будет давать соответствующих перемещений для нагрузок в других точках.

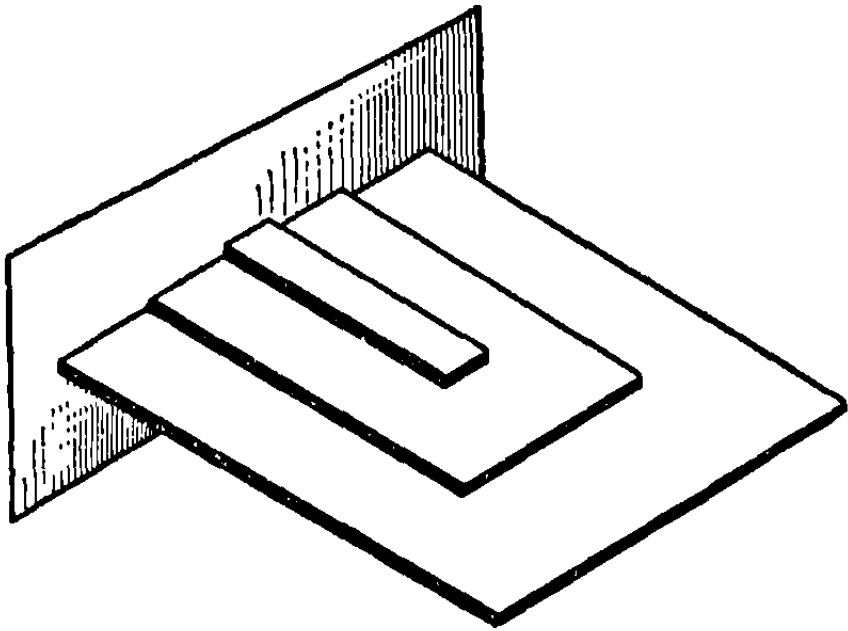
Так как конструкция малого удлинения деформируется отчасти, как пластина, первое очевидное приближение заключается в том, чтобы в качестве упрощенной конструкции использовать пластину. Эта пластина, если бы удалось спроектировать ее так, чтобы она давала правильную величину коэффициентов влияния, явилась бы удобной поверхностью крепления других частей, служащих для воспроизведения требуемой внешней формы конструкции. Так как для этой цели пластина постоянной толщины обычно не подходит, то конструктор должен использовать либо составную пластину (фиг. 12-24), либо пластину с подходящими вырезами (фиг. 12-25), либо пластину переменной толщины (фиг. 12-26), или, может быть, некоторую комбинацию этих трех пластин. К сожалению, два важных фактора являются причиной того, что этот метод плохо подходит для действительных расчетов. Во-первых, конструктору



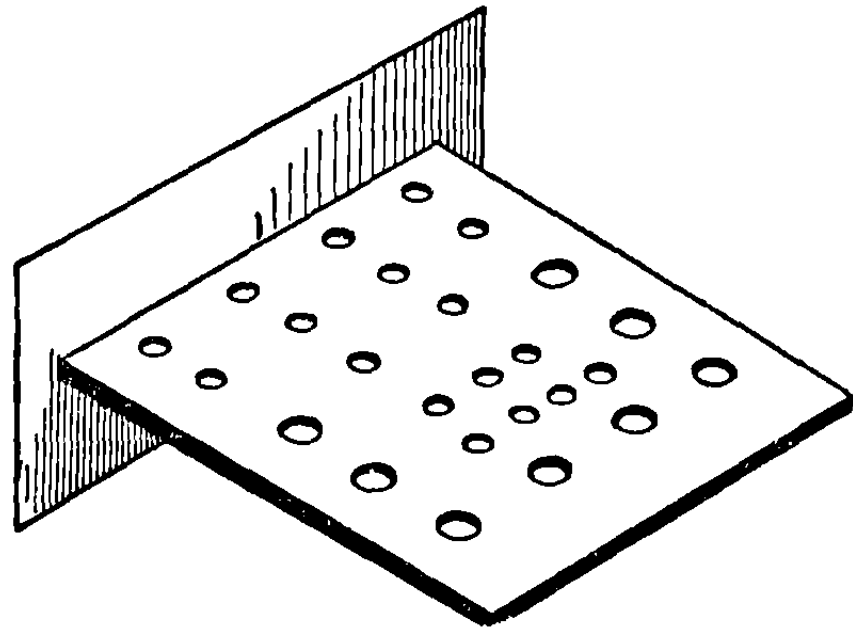
Фиг. 12-23. Деформация, подобная деформации пластины под нагрузкой, характерная для крыльев малого удлинения.



предстояла бы трудная задача вычисления коэффициентов влияния для подобной составной пластины с вырезами или пластины переменной толщины. Обратная задача конструирования пластины для заданного ряда коэффициентов влияния является более трудной. С другой стороны, использование для такого проектирования экспериментального итеративного процесса оказывается слишком утомительным, за исключением случая самого простого ряда коэффициентов влияния.

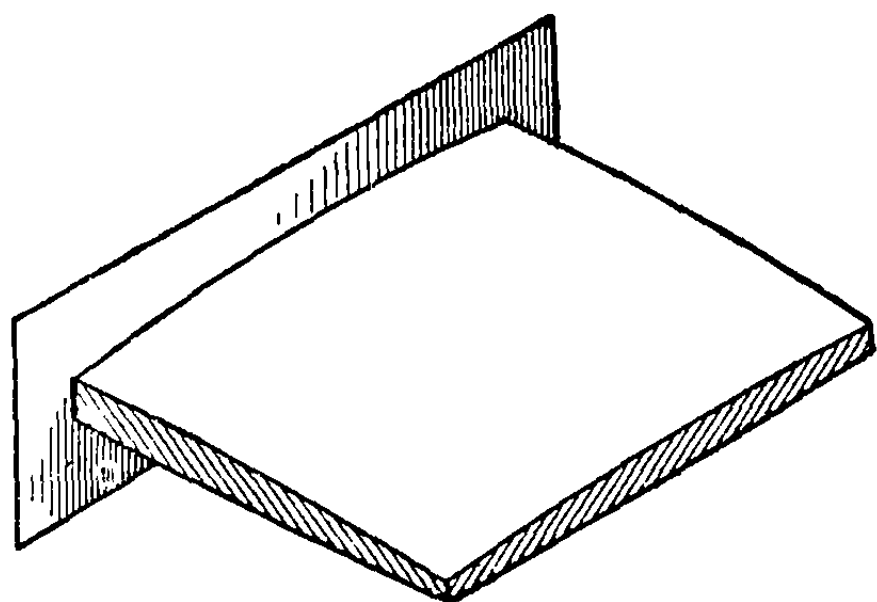


Фиг. 12-24. Составная пластинчатая конструкция для моделей малого удлинения.



Фиг. 12-25. Пластинчатая конструкция с соответствующими вырезами для моделирования крыльев малого удлинения.

Вторая и, может быть, главная причина неудачи этого метода связана с малыми толщинами пластины, которые необходимы для правильного моделирования, особенно для малоскоростных моделей. Деформации пластины оказываются линейными только тогда, когда они являются величинами одного порядка с толщиной пластины и только в случае существенно плоской пластины. При сравнительно гибких моделях для исследования флаттера ни одно из этих условий обычно не может быть выполнено даже при использовании вместо такой металлической пластины несколько более толстой пластмассовой пластины. Конечно, при использовании пластика возникают задачи ползучести, демпфирования, температурной зависимости и в некоторых случаях вопросы различия между статическими и динамическими жесткостными свойствами материала.



Фиг. 12-26. Профилированная пластина для моделирования распределения жесткости крыльев малого удлинения.

Если отказаться от использования тонкой пластины в качестве основной упрощенной конструкции, то следует спроектировать такую конструкцию, которая не была бы сильно ограничена величиной допустимых прогибов и легче поддавалась бы исследованию. Из упомянутых выше форм пластин пластина с вырезами наименее ограничивается величиной прогибов, поскольку для того,

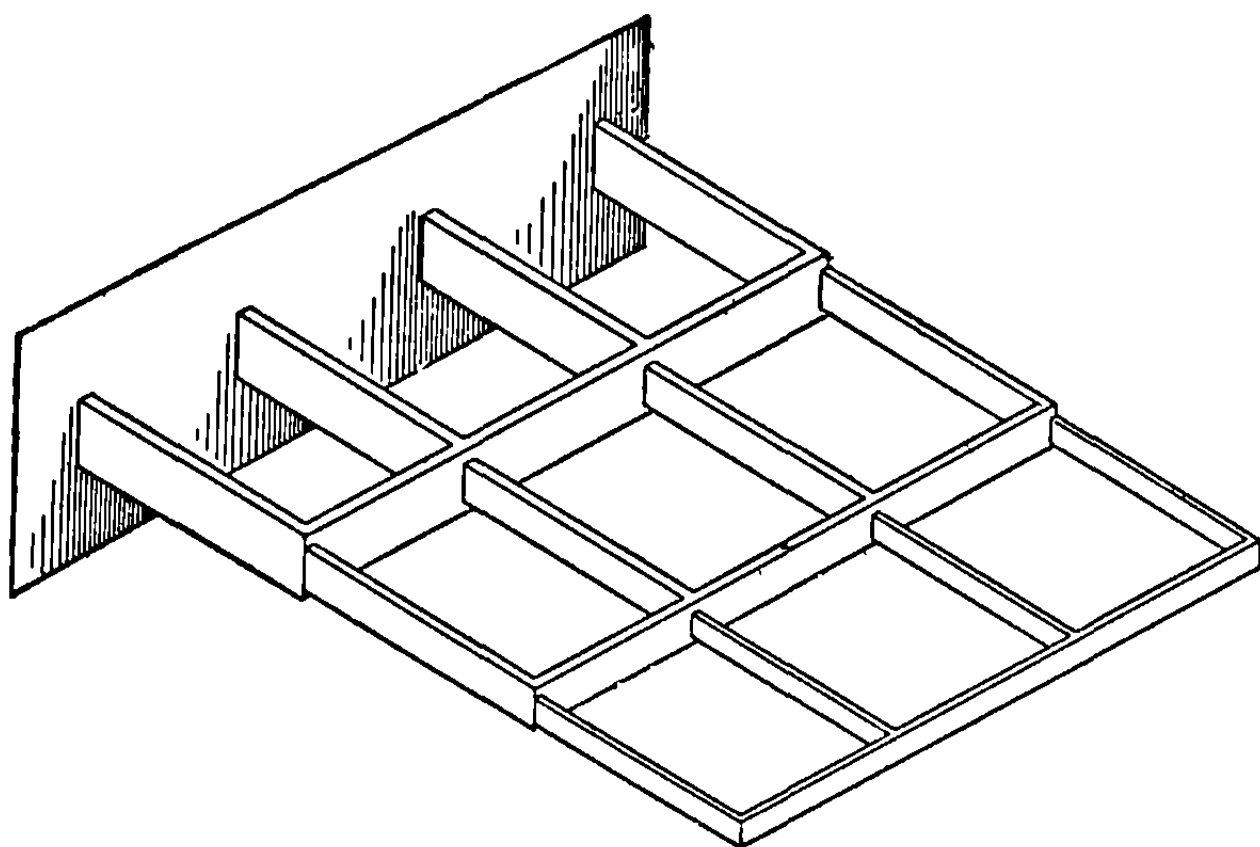
чтобы при уменьшенной площади в плане обеспечить при прочих равных условиях одинаковую жесткость, пластина должна быть толще. Если вырезы увеличиваются, то необходимо дальнейшее увеличение толщины материала, и в пределе получится решетка из простых балок, приведенная на фиг. 12-27. В этом случае „толщина пластины“ достигает максимума и каждый из элементов этой решетки может быть исследован с помощью известных методов.

Для целей исследования практической пригодности этой конструкции удобно предположить, что модель изготовлена из прямоугольных простых балок, воспринимающих как изгиб, так и кручение. Допускается также, что искомые коэффициенты влияния, которые нужно подогнать под коэффициенты влияния

Для целей исследования практической пригодности этой конструкции удобно предположить, что модель изготовлена из прямоугольных простых балок, воспринимающих как изгиб, так и кручение. Допускается также, что искомые коэффициенты влияния, которые нужно подогнать под коэффициенты влияния



модели, вычисляются в каждом случае в точках пересечения балок. В общем случае при проектировании модели будут использованы не все имеющиеся в распоряжении коэффициенты влияния крыла, так как сложность и стоимость

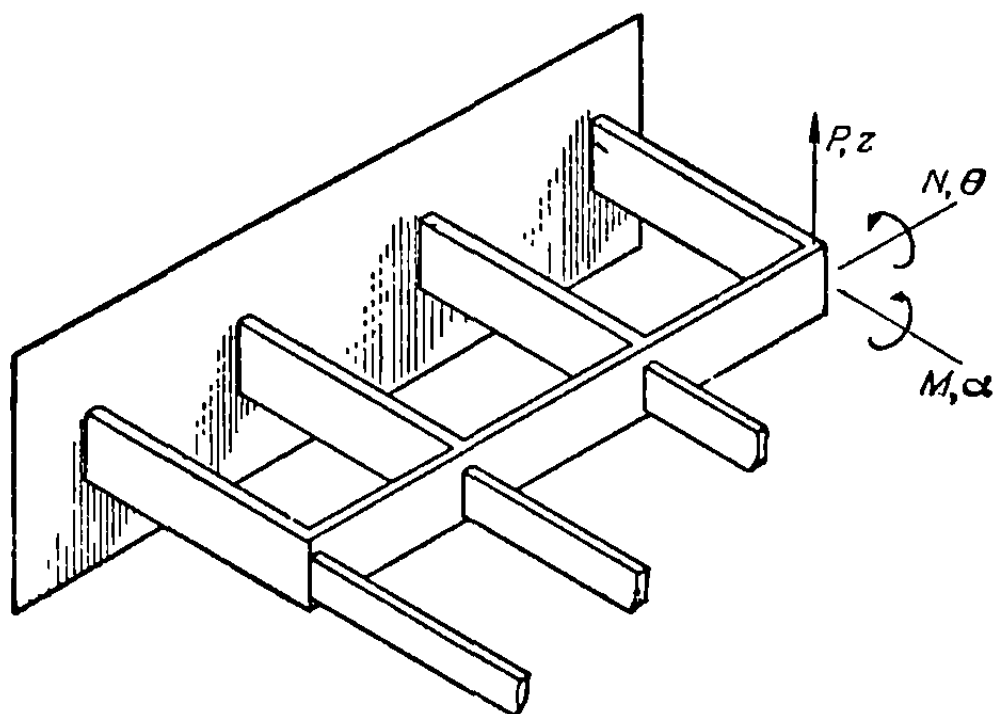


Фиг. 12-27. Конструкция балочной решетки, предназначенная для подбора коэффициентов влияния крыла малого удлинения.

процесса подгонки быстро возрастают с числом точек, в которых коэффициенты модели и натуре должны совпадать. Для того чтобы получить некоторое представление о трудности процесса проектирования и вместе с тем о степени необходимого компромисса, нужно исследовать различные подходящие соотношения, включающие коэффициенты влияния.

Ряд коэффициентов упругого влияния  $[C^{zz}]$ , который обычно составляется для крыла, связывает силы и линейные перемещения, перпендикулярные к плоскости крыла. Этот ряд является частью более общего ряда, связывающего внешние силы в каждой из рассматриваемых точек с линейными и угловыми перемещениями. Используя обозначения фиг. 12-28, можно записать это более общее соотношение в виде

$$\begin{bmatrix} C^{zz} & C^{za} & C^{z\theta} \\ C^{az} & C^{aa} & C^{a\theta} \\ C^{\theta z} & C^{\theta a} & C^{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ M \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z \\ \alpha \\ \theta \end{Bmatrix}. \quad (12-26)$$



Фиг. 12-28. Правило знаков, используемое при расчете балочной решетки.

Даже если искомые коэффициенты являются рядами  $[C^{zz}]$ , кажется вероятным, что ряд  $[C^{za}]$  был бы также очень ценным для конструктора модели, поскольку последний пытается построить такую конструкцию, деформации которой оказывали бы на окружающий воздух такое же влияние, как и деформации натурального крыла. Влияние это больше зависит от наклона, нежели от прогиба поверхности крыла в рассматриваемой точке. Возможно, что для достижений той же степени точности моделирования потребовалось бы меньше коэффициентов сила — угол наклона, нежели коэффициентов сила — прогиб.

Следует рассмотреть также метод коэффициентов жесткости, имея в виду, что имеющиеся в распоряжении конструктора коэффициенты влияния могут быть представлены не в виде коэффициентов упругого влияния, а в виде жесткостных

коэффициентов влияния вследствие той легкости, с которой эти последние коэффициенты могут быть записаны для каждой из многих элементарных частей конструкции. Соответствующее основное соотношение имеет вид

$$\begin{bmatrix} K^{zz} & K^{z\alpha} & K^{z\theta} \\ K^{\alpha z} & K^{\alpha\alpha} & K^{\alpha\theta} \\ K^{\theta z} & K^{\theta\alpha} & K^{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \alpha \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ M \\ N \end{Bmatrix}. \quad (12-27)$$

Если внешние крутящие моменты  $M$  и  $N$  положить равными нулю, то  $\alpha$  и  $\theta$  можно исключить с помощью алгебраических операций, так что уравнение (12-27) примет вид

$$[\bar{K}^{zz}] \{z\} = \{P\}, \quad (12-28)$$

где  $[\bar{K}^{zz}]$  является обращением обычной упругой матрицы  $[C^{zz}]$  и определяется равенством

$$[\bar{K}^{zz}] = [C^{zz}]^{-1} = [K^{zz}] - [K^{z\alpha} K^{z\theta}] \begin{bmatrix} K^{\alpha\alpha} & K^{\alpha\theta} \\ K^{\theta\alpha} & K^{\theta\theta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K^{\alpha z} \\ K^{\theta z} \end{bmatrix}. \quad (12-29)$$

Для конструкции, состоящей из множества прямоугольников и изображенной на фиг. 12-27, компоненты матрицы жесткостей в уравнении (12-27) являются линейными суммами изгибных и крутильных жесткостей отдельных балок, видоизмененных за счет множителей, связанных с геометрией решетки. Если у конструктора модели имеется в распоряжении матрица жесткостей крыла, то, приравнявая соответствующие члены в двух матрицах, он может получить ряд совместных алгебраических уравнений, который может быть разрешен относительно неизвестных жесткостей балок.

К сожалению, величина  $[C^{zz}]$  обычно бывает известна в численной форме и ее нельзя линейно связать с неизвестными жесткостями балок. Несмотря на то, что для конструкции из множества прямоугольников подматрицы  $[K^{\theta\alpha}]$  и  $[K^{\alpha\theta}]$  тождественно равны нулю, простейшая связь, которая может быть выведена из уравнения (12-27), имеет вид

$$[C^{zz}]^{-1} = [K^{zz}] - [K^{z\alpha}] [K^{\alpha\alpha}]^{-1} [K^{\alpha z}] - [K^{z\theta}] [K^{\theta\theta}]^{-1} [K^{\theta z}]. \quad (12-30)$$

Обращение и умножение подматриц приводит к очень сложной нелинейной функции относительно неизвестных жесткостей.

Соотношение, аналогичное (12-29), но зависящее целиком от коэффициентов упругого влияния, выведено в гл. 2 с помощью принципа минимума энергии деформации [равенства (2-133) — (2-147)]. Когда внешние нагрузки сводятся только к силам, соотношение (2-147) может быть записано в виде

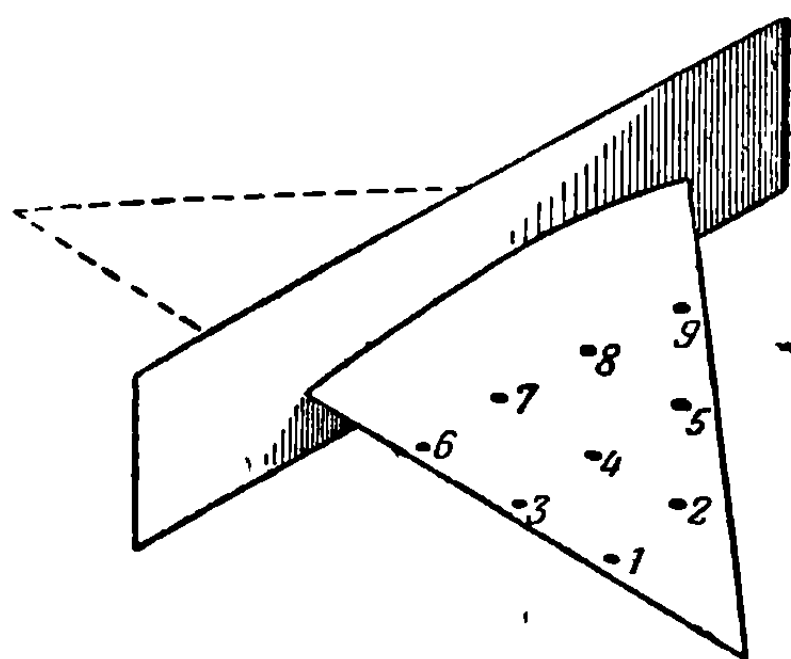
$$[C^{zz}] = [H_{QQ}] - [H_{QP}] [H_{PP}]^{-1} [H_{PQ}], \quad (12-31)$$

где подматрицы  $[H]$  линейно зависят от гибкостей, а не от жесткостей отдельных балок.

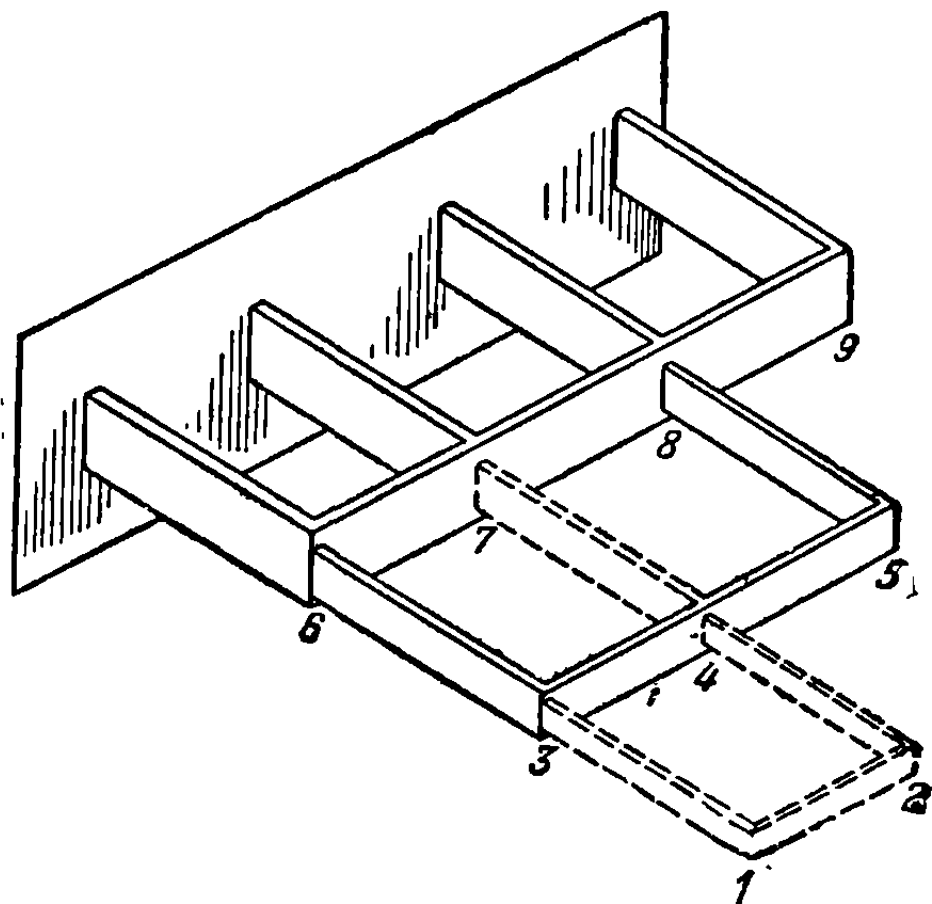
Однако связь между неизвестными и заданными характеристиками балок нелинейна и не менее сложна, чем та, которая определяется соотношениями (12-29) или (12-30). Следует указать, что если уравнения (2-133) — (2-147) содержат внешние моменты  $M$  и  $N$ , то  $[C]$  становится расширенной матрицей коэффициентов упругого влияния уравнения (12-26). Очевидно, что даже в том случае, когда в распоряжении конструктора модели в качестве основных данных о крыле имеется эта расширенная матрица упругих коэффициентов, не существует никаких линейных соотношений, связывающих неизвестные характеристики балок с коэффициентами упругого влияния, подобных тем, которые имели место, когда задача формулировалась с помощью соответствующих жесткостных коэффициентов влияния.

Для того чтобы проиллюстрировать сложность процесса подгонки коэффициентов для дельтавидного крыла с известными коэффициентами упругого влияния  $[C^{zz}]$  в точках, указанных на фиг. 12-29, допустим, что модель представляет простую решетку из 8 балок, показанную на фиг. 12-30 (сплошные линии). В этом случае имеется 16 неизвестных характеристик балок, которые могут быть определены таким образом, чтобы получить в результате не более 16 независимых коэффициентов влияния. Поскольку для конструкции, в которой будет 5 узлов, имеется 15 таких коэффициентов, а для конструкции с 6 узлами — 21, то в конструкции из 8 балок подбираться могут только коэффициенты, связанные с точками 1—5. Если к решетке на фиг. 12-30 прибавить 4 балки, изображенные пунктиром, то из 45 коэффициентов можно подбирать максимум 30 коэффициентов влияния, потому что предполагается, что каждая балка имеет две неизвестные характеристики.

Число точек, в которых коэффициенты влияния модели и натуры должны



Фиг. 12-29. Заданное расположение коэффициентов влияния на дельтавидном крыле.



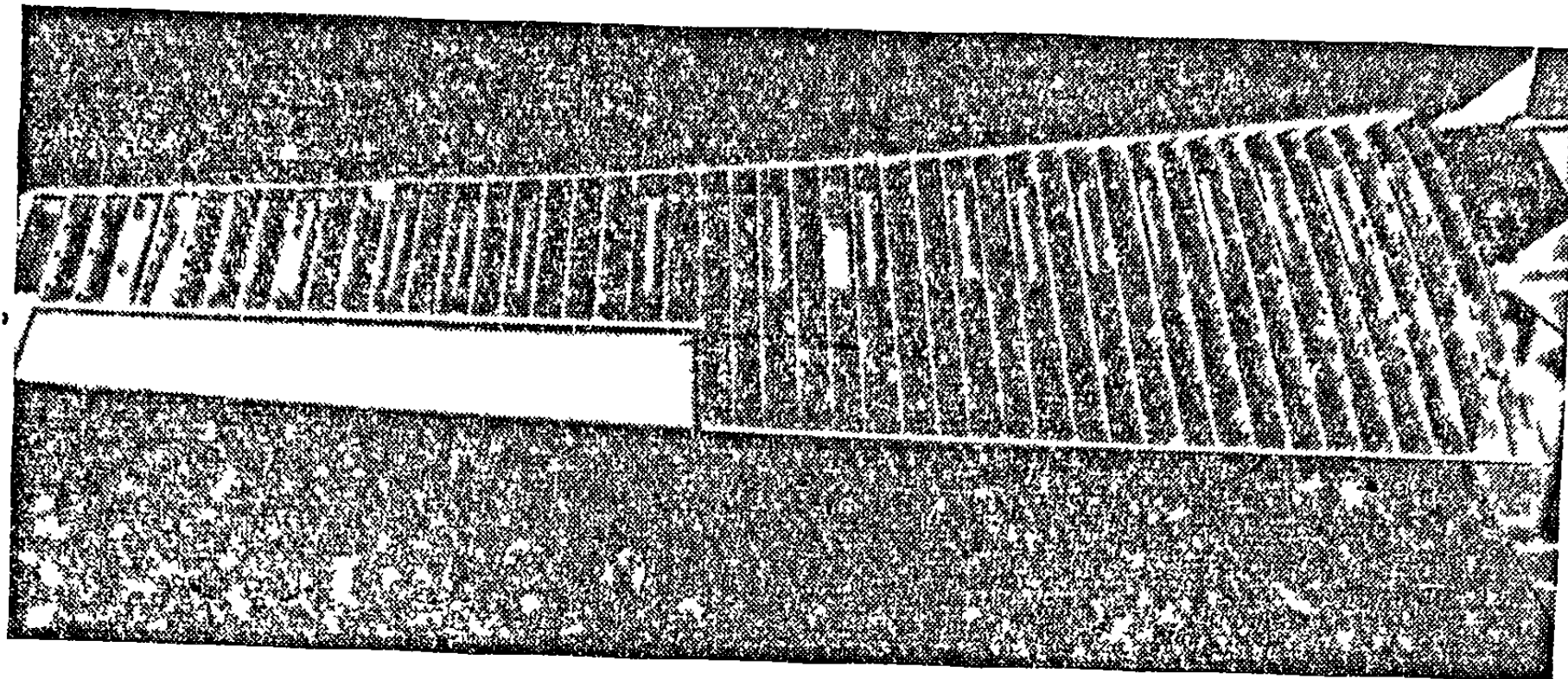
Фиг. 12-30. Конструкция балочной решетки, предназначенная для моделирования коэффициентов влияния дельтавидного крыла, изображенного на фиг. 12-29.

совпадать, и число балок, используемых в данной конструкции модели, могут ограничиваться малым числом имеющихся в распоряжении коэффициентов влияния. Однако гораздо более вероятно, что ограничивающим фактором в этом случае является производительность имеющихся средств вычисления. Даже решетка из 8 балок ведет к операциям с матрицей из  $24 \times 24$  элементов. Так как связи между характеристиками балок и заданной матрицей коэффициентов упругого влияния  $[C^{zz}]$  нелинейны, то мы должны прибегать к методам подбора или в лучшем случае к трудоемкому процессу итерации. В любом случае число последовательных математических операций настолько велико, что накопление ошибок округления заставляет удерживать очень большое число значащих цифр.

Очевидно, что проектирование этого типа моделей из балочных решеток осуществимо только с помощью быстрорастущей мощности высокоскоростных вычислительных машин. Хотя мы пока и не полностью понимаем разветвления вычислительной задачи, связанные с подобными сложными манипуляциями, использование балочных решеток для моделирования конструкций малого удлинения может, по-видимому, много дать как для малоскоростных, так и для высокоскоростных моделей, предназначенных для исследования флаттера.

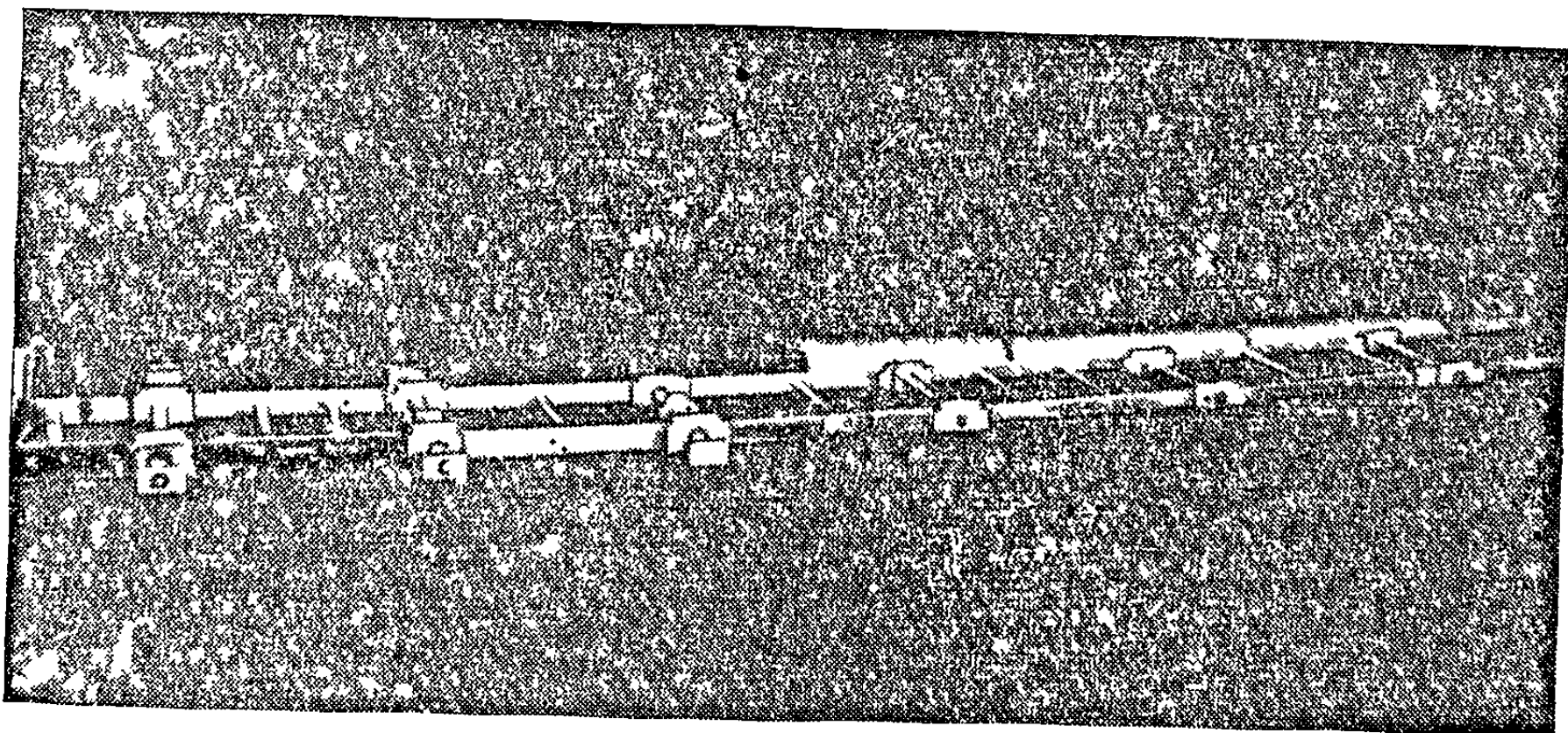
**12-5. Моделирование формы.** Во многих испытаниях аэроупругих моделей необходимо, чтобы модель, находящаяся в воздушном потоке, имела правильную внешнюю форму. Последнее необходимо для того, чтобы облегчить правильное моделирование стационарных и нестационарных воздушных нагрузок. Так как

конструкция модели под действием этих нагрузок изгибается и закручивается, то внешняя оболочка должна обладать способностью соответствующим образом деформироваться в потоке воздуха. Поскольку также во многих случаях очень желательно, чтобы жесткость модели обеспечивалась за счет внутренней конструкции, то внешняя оболочка должна обладать способностью выдерживать



Фиг. 12-31. Двухлонжеронная модель с работающими на кручение трубами для испытания на флаттер при малой скорости (с модели удалена тонкая резиновая обшивка).

воздушные нагрузки и в деформированном состоянии, не изменяя заметным образом жесткостные свойства модели. Таким образом, тип внешней оболочки, используемый конструктором, в сильной степени зависит от вида предполагаемой деформации модели, от относительной жесткости конструкции модели и, конечно, от допустимой массы оболочки.

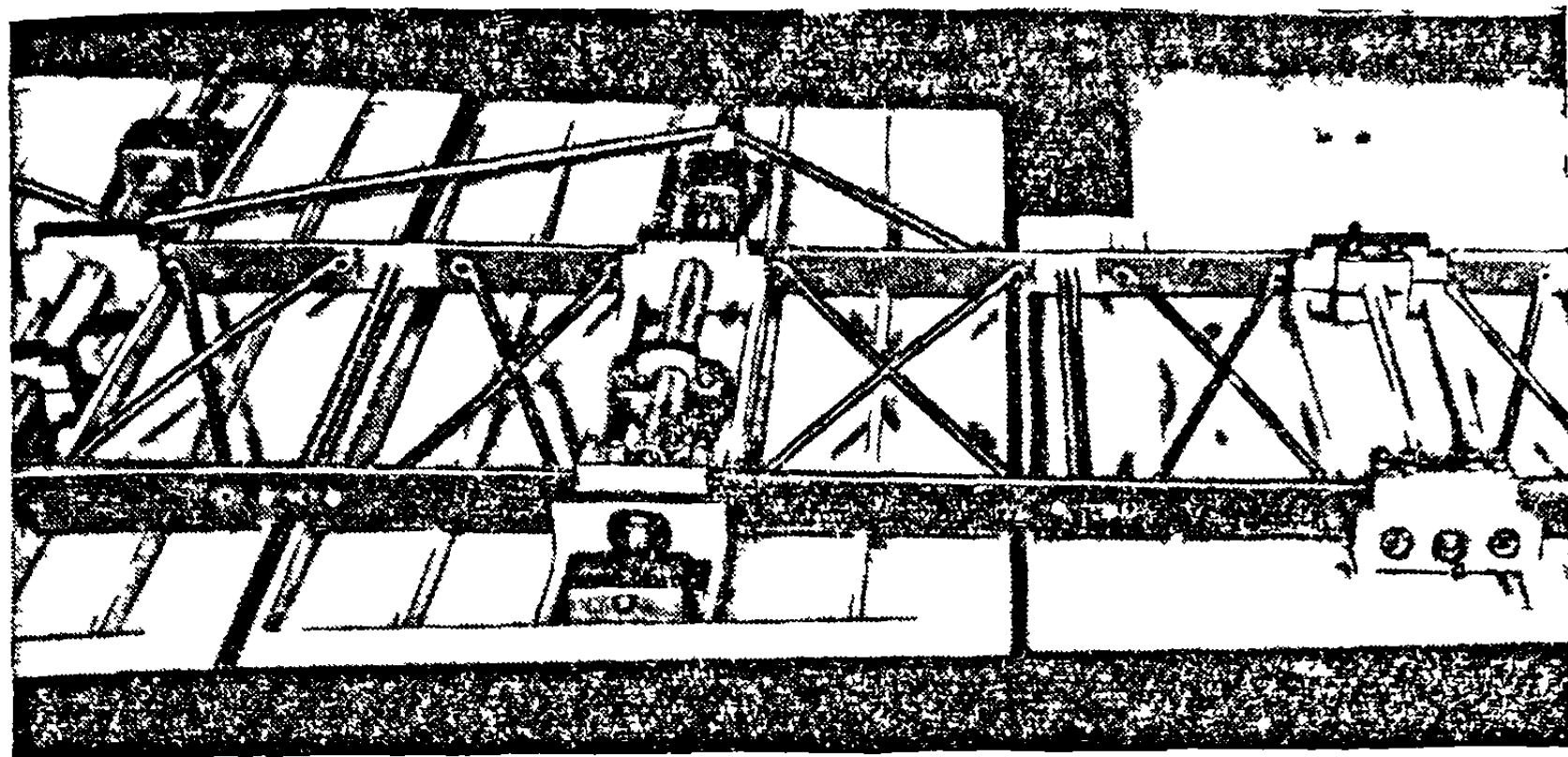


Фиг. 12-32. Секционная конструкция, свойства которой аналогичны свойствам модели, показанной на фиг. 12-31.

Одним из основных типов деформации модели, который следует рассмотреть, является тип деформации, связанный с такими конструкциями, упругие свойства которых являются функциями одной переменной (таковы, например, фюзеляжи и несущие поверхности большого удлинения). Для моделей этого класса, предназначенных для малых скоростей и требующих сравнительно малопрочной конструкции и, следовательно, такой внешней оболочки, которая почти ничего не прибавляет к жесткости всей модели, обычно используется либо секционная конструкция, либо нервюры, покрытые сплошным тонким слоем резины

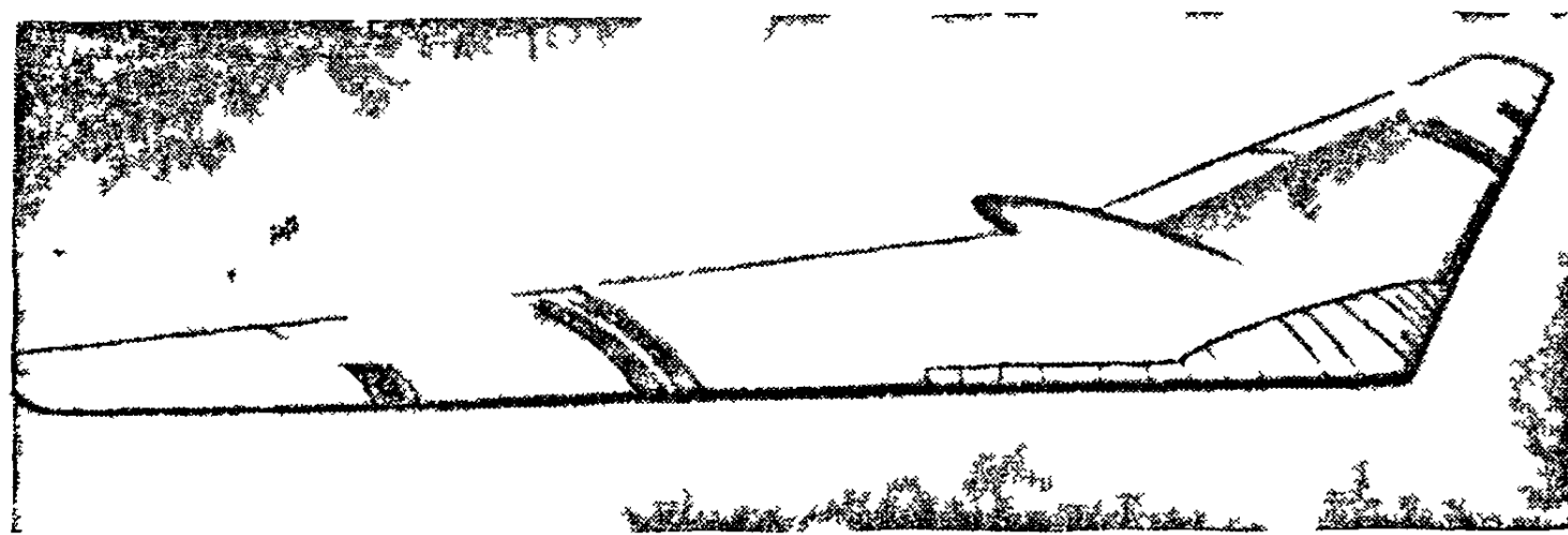


(см. фиг. 12-5, 12-8, 12-31, 12-32). В случае секционной конструкции оболочка состоит из соответствующего числа отдельных жестких секций или коробок, каждая из которых независимо прикрепляется к лонжерону модели. Для того чтобы предотвратить соприкосновение секций в процессе деформации крыла,



Фиг. 12-33. Секции из бальзы, смонтированные на конструкции, показанной на фиг. 12-32.

между ними оставляется достаточный зазор. Если это необходимо с аэродинамической точки зрения, зазоры могут быть покрыты полосками тонкой резины. При необходимости отдельные секции могут быть изготовлены из бальзы, жесткость которой увеличивается за счет покрытия слоем шелка или стекловолокна. Если позволяет масса, может оказаться даже желательным применение металлических секций. Если требуются очень легкие секции, то масса используемого клея может составить значительную долю массы секции оболочки, и поэтому ее следует очень внимательно контролировать. Особенно нежелательны

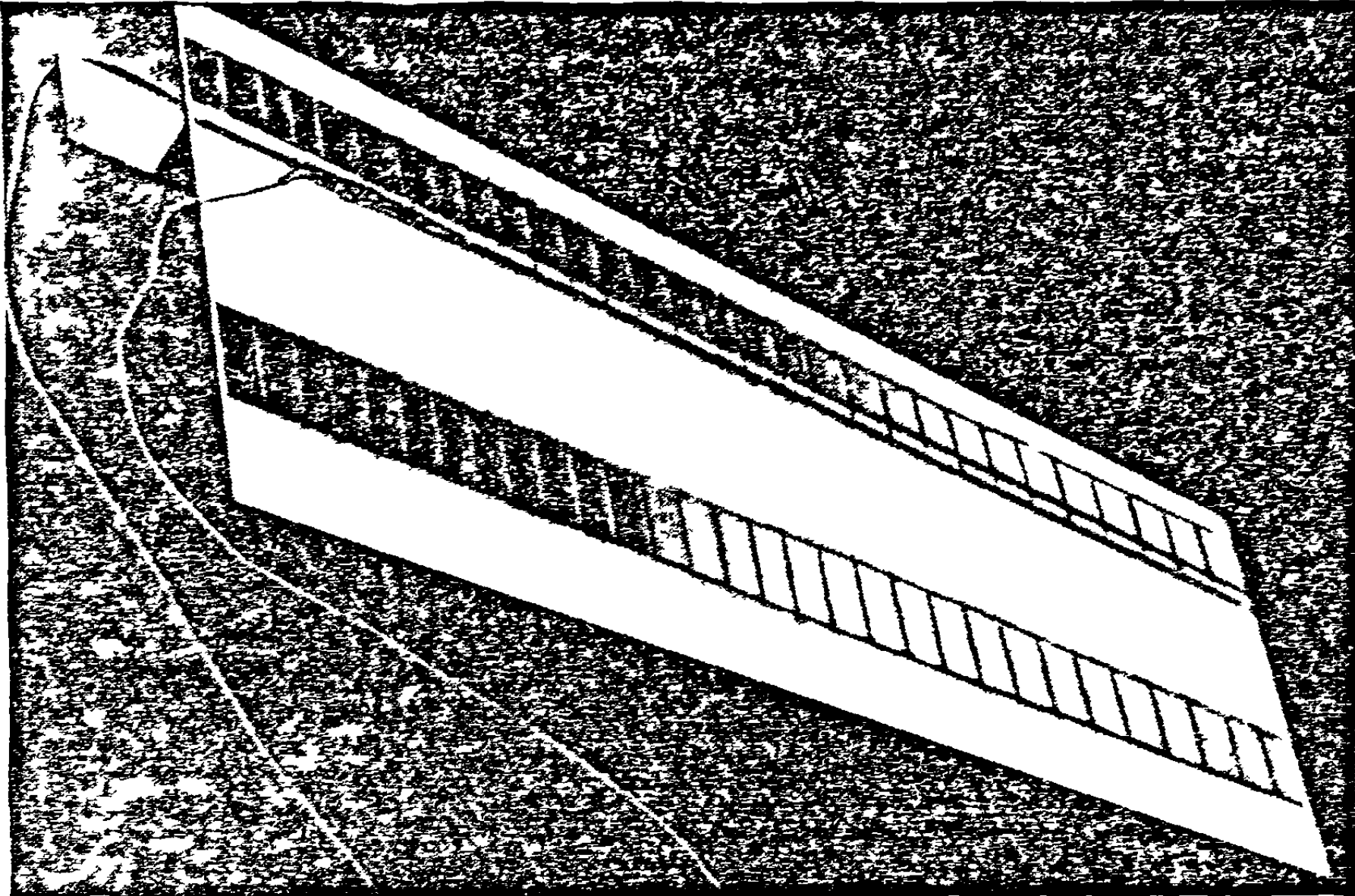


Фиг. 12-34. Модель летающего крыла для испытания на флаттер на больших дозвуковых скоростях (см. также фиг. 12-6)

разрывы непрерывности поверхности, которые образуются между секциями при закручивании стреловидных крыльев; используя большое число секций, можно свести разрывы до минимума, если, конечно, можно допустить увеличение массы за счет узких сечений. В конструкции, в которой применяется тонкая резиновая обшивка, натянутая на множество нервюр, такие разрывы поверхности отсутствуют, но конструкция становится чувствительной к деформациям под действием воздушных нагрузок. При скорости свыше шестидесяти миль в час очень трудно избежать выпучивания резиновой обшивки. На многих сравнительно упругих

моделях для малых скоростей вследствие того, что поле тяжести не может быть уменьшено наблюдаются чрезмерные статические деформации или провисания за счет грузов от сил тяжести. Это явление можно свести к минимуму с помощью введения в конструкцию такого „отрицательного провисания“, чтобы в окончательной модели никакого провисания не наблюдалось.

Высокоскоростные модели, упругие свойства которых являются функциями только одной переменной, обычно обладают более значительной жесткостью, нежели модели, описанные выше. Таким образом, часто оказывается возможным применять непрерывное бальзовое покрытие (см. фиг. 12-4 и 12-35). Если



Фиг. 12-35. Нижняя половина модели сверхзвукового стреловидного крыла для испытания на флаттер с укрепленными на лонжероне измерительными инструментами и большим числом свинцовых грузов.

позволяет масса, то лонжеронную конструкцию можно покрыть сплошной бальзой, имеющей соответствующую внешнюю форму. Если для модели, которая должна обладать большой жесткостью, запас массы небольшой, то более эффективная главная конструкция, которая должна использоваться в этом случае для моделирования жесткости, может образовать часть потребной внешней оболочки или всю оболочку (фиг. 12-1, 12-2, 12-6).

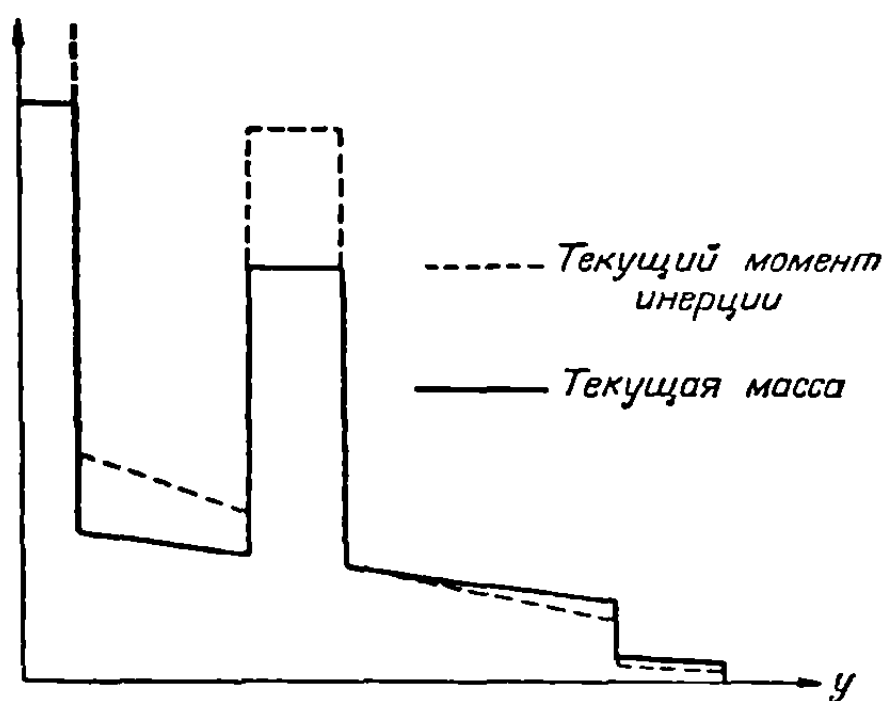
Второй основной тип деформации связан с конструкциями, упругие свойства которых являются функциями двух переменных. В этом случае необходимо создать внешнюю оболочку, обладающую гибкостью в двух направлениях, которая обычно может лишь незначительно увеличить жесткость модели. Для моделей со сравнительно малой жесткостью опять возможно изготовить оболочку из отдельных секций так, чтобы в двух направлениях оболочка была разборной. Таким образом, в обоих направлениях поверхность оболочки оказывается разделенной на достаточное количество секций, так что когда конструкция, к которой они присоединяются, деформируется, поверхность, образованная этими секциями, остается достаточно гладкой.

В этом случае для того, чтобы предотвратить срыв потока воздуха, зазоры между секциями опять могут быть покрыты резиновым листом. В случае моделей с относительно высокой жесткостью для тех частей поверхности, которым еще не придана соответствующая форма с помощью отдельных частей конструкции, можно опять использовать сплошное бальзовое покрытие.

**12-6. Моделирование инерционных свойств.** Аэроупругая модель, сконструированная таким образом, чтобы она имела необходимое распределение жесткости и необходимую внешнюю форму, обычно требует некоторого изменения ее первоначальных свойств, для того чтобы обеспечить требуемое распределение массы. Конструктор модели должен всегда стремиться применять достаточно легкие схемы внутренней конструкции и внешней оболочки с тем, чтобы иметь соответствующий запас по массе для всех секций модели. Легче увеличить массу до требуемой величины, нежели облегчить уже изготовленную секцию.

Для моделей, у которых конструктивные свойства являются функциями только одного переменного, обычно удобно представлять инерционные свойства модели в виде функций того же самого переменного. Таким образом, соответствующие характеристики распределения общей массы обычных несущих поверхностей сравнительно большого удлинения могут быть представлены в виде кривых, подобных тем, которые приведены на фиг. 12-36. Так как каждое сечение, направленное вдоль хорды, является абсолютно жестким, то его инерционные свойства будут воспроизведены моделью, у которой соответствующее сечение будет иметь то же самое положение центра тяжести по хорде, ту же самую массу и тот же самый момент инерции. Тот факт, что эти свойства могут быть получены на модели с другим распределением массы по хорде, не имеет значения.

Для того чтобы в каждом сечении модели крыла получить необходимые инерционные характеристики, сначала необходимо вычислить или измерить в каждом сечении инерционные свойства всех материалов, из которых изготовлена конструкция, оболочка, нервюры и т. п. Затем в каждом сечении можно добавить недостающую до необходимой величины массу таким образом, чтобы обеспечить необходимое положение центра тяжести и требуемую величину момента инерции. В качестве примера рассмотрим секцию крыла некоторой ширины. В модели с резиновым покрытием эта ширина может определяться расстоянием между нервюрами или шириной секции в секционной модели. Инерционные свойства законченной, но недостаточной по весу секции крыла могут быть вычислены с помощью заполнения таблицы, подобной табл. 12-1.



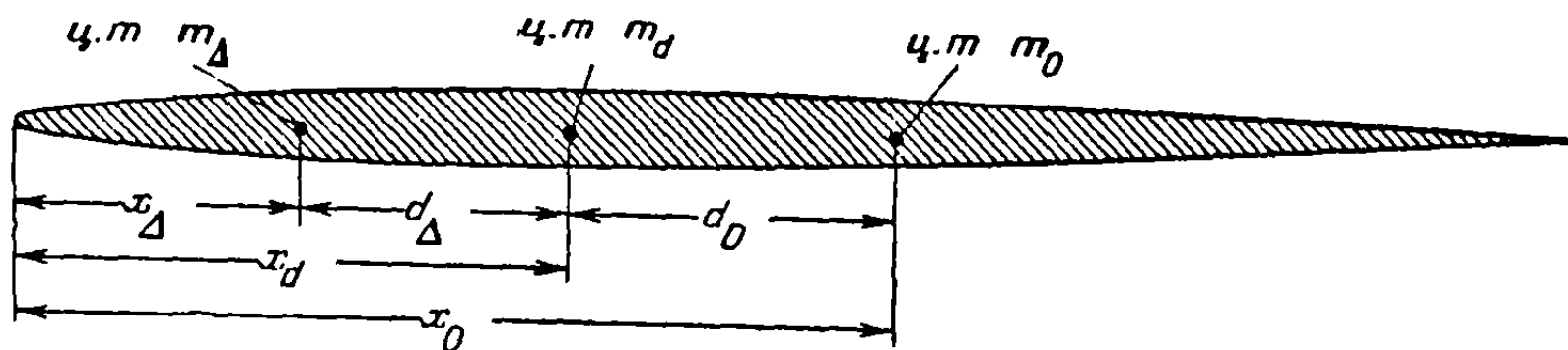
Фиг. 12-36. Изменение инерционных свойств крыла реактивного транспортного самолета в зависимости от координаты размаха крыла.

Таблица 12-1

Название элементов	$m$	$x$	$r$	$mx$	$mx^2$	$mr^2$	$I$
Передний лонжерон . .							
Задний лонжерон . . .							
Труба, работающая на кручение . . . . .							
$\Sigma m =$		$\Sigma mx =$			$\Sigma I =$		



Здесь  $m$  представляет массу элемента,  $x$  — расстояние центра тяжести элемента от удобной прямой отсчета, например от передней кромки,  $r$  — собственный радиус инерции элемента и  $I$  — момент инерции элемента относительно линии отсчета. Из трех приведенных сумм можно вычислить неполную массу сечения  $m_0$ , координату центра тяжести  $x_0$  и момент инерции  $I_0$  относительно центра тяжести.



Фиг. 12-37. Расположение центров тяжести: сечения, вес которого  $m_0$  меньше нормального веса, добавленной массы  $m_\Delta$  и сечения  $m_d$  с правильно подобранным весом.

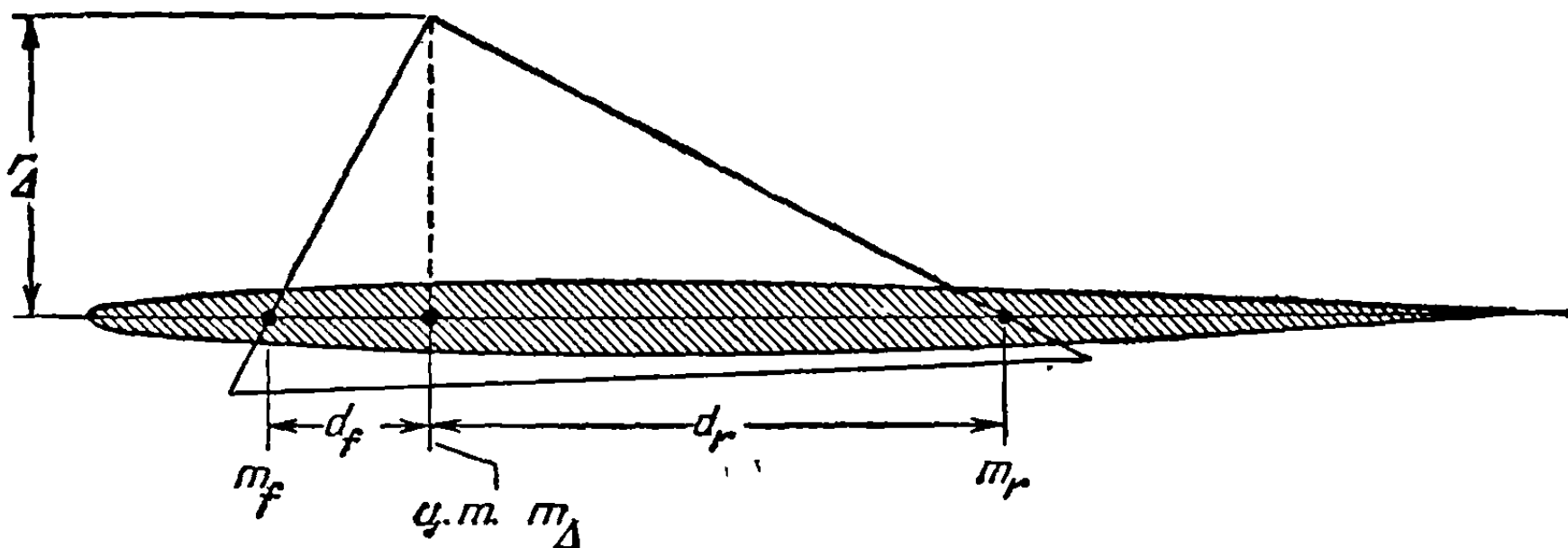
Если желаемые характеристики сечения должны быть равны  $m_d$ ,  $x_d$  и  $I_d$ , то потребная дополнительная масса равна

$$m_\Delta = m_d - m_0. \quad (12-32)$$

Пусть  $x_\Delta$  — координата центра тяжести дополнительной массы  $m_\Delta$  и пусть, как показано на фиг. 12-37,

$$d_\Delta = x_d - x_\Delta, \quad d_0 = x_d - x_0. \quad (12-33)$$

Центр тяжести дополнительной массы должен быть расположен таким образом,



Фиг. 12-38. Использование чертежного треугольника для определения положения добавочной массы, желаемого положения центра тяжести и момента инерции.

чтобы при необходимой массе сечения имела и соответствующее положение центра тяжести, т. е.

$$d_\Delta = \frac{m_0}{m_\Delta} d_0. \quad (12-34)$$

Эта дополнительная масса должна также иметь необходимый момент инерции  $I_\Delta$  около своего центра тяжести, чтобы обеспечить выполнение равенства

$$I_\Delta + m_\Delta d_\Delta^2 + I_0 + m_0 d_0^2 = I_d. \quad (12-35)$$

Для того чтобы получить такой момент инерции  $I_\Delta$ , обычно удобно разбить дополнительную массу на две (или иногда более) части,  $m_r$  и  $m_f$ . Независимо от величины этих частей имеем

$$m_r + m_f = m_\Delta \quad (12-36)$$

$$m_f d_f = m_r d_r, \quad (12-37)$$

где  $d_f$  — расстояние передней массы  $m_f$  и  $d_r$  — расстояние задней массы  $m_r$  от центра тяжести  $m_\Delta$  (фиг. 12-38). Обе массы и расстояние их от центра тяжести  $m_\Delta$  должны быть такими, чтобы в том случае, когда их собственные радиусы инерции пренебрежимо малы, имело место соотношение

$$m_f d_f^2 + m_r d_r^2 = I_\Delta. \quad (12-38)$$

Величины этих масс должны также удовлетворять соотношениям (12-36) и (12-37). При определении четырех неизвестных эти три условия все еще оставляют некоторую свободу выбора, так что конструктор модели может испытать ряд комбинаций с тем, чтобы выбрать из них наиболее удовлетворительную. Для того чтобы систематизировать этот процесс подбора, заметим, что

$$I_\Delta = r_\Delta^2 (m_f + m_r), \quad (12-39)$$

где  $r_\Delta$  — радиус инерции  $m_\Delta$ . Из уравнений (12-37), (12-38) и (12-39) следует, что

$$d_f = \frac{r_\Delta^2}{d_r}. \quad (12-40)$$

Это приводит к следующей схеме вычислений. Как показано на фиг. 12-38, от центра тяжести добавляемой массы  $m_\Delta$  нужно отложить перпендикулярно к хорде сечения известное расстояние  $r_\Delta$ . Если, как показано на фигуре, образуется прямоугольный треугольник, то любая пара расстояний, определяемых пересечением сторон треугольника с линией хорды, будет удовлетворять соотношению (12-40). Остается просто вращать треугольник относительно вершины до тех пор, пока не обнаружится наиболее подходящая пара расстояний. Две составляющие массы  $m_\Delta$  можно затем определить с помощью соотношений

$$m_f = m_\Delta \frac{d_r}{d_r + d_f}, \quad m_r = m_\Delta \frac{d_f}{d_r + d_f}. \quad (12-41)$$

Для поверхностей, обладающих гибкостью в двух направлениях, инерционные свойства модели не могут быть описаны способом, указанным на фиг. 12-36, а должны задаваться в виде функций координат вдоль размаха и вдоль хорды. Если для целей моделирования конструкции поверхность ее делится на малые секции, то удобно считать, что масса каждой секции сосредоточена в ее центре тяжести. Таким образом, для того чтобы довести массу секции до необходимой величины, нужно добавить соответствующее количество свинца. При больших секциях необходимо в известной степени моделировать и распределение массы внутри секции.

## Глава 13

### ТЕХНИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

**13-1. Введение.** В двух предыдущих главах исследовались принципы проектирования и конструкции моделей для испытаний различного рода. Цель этой главы описать связанную с этим технику испытаний и принципы, на которых эти испытания основываются. Поскольку большинство из испытаний часто производится также и на натуральных самолетах, то там, где это необходимо, будет проводиться различие между техникой эксперимента с моделью и с натурным самолетом.

Аэроупругие испытания складываются из трех основных видов. Первый включает эксперименты без воздушного потока, например статическое испытание для определения распределения жесткости и вибрационное испытание для определения частот и форм собственных колебаний. Испытания второго и третьего рода требуют наличия потока воздуха; испытания второго рода включают только „установившиеся“ явления аэроупругости, такие, например, как эффективность органов управления, тогда как третий род испытаний включает только „неустановившиеся“ явления, подобные флаттеру и динамической устойчивости.

**13-2. Измерение жесткости конструкции.** Вместе с ростом значения аэроупругих эффектов росло и стремление к экспериментальному определению жесткостных и прочностных характеристик самолета. Измерение жесткостных характеристик было особенно ценно и необходимо для тонких крыльев малого удлинения, трудно поддающихся исследованию. Обычно модели, предназначенные для исследования флаттера, никаким другим статическим испытаниям не подвергаются. В частности, модели для исследования флаттера на малых скоростях, несмотря на их сравнительно неэффективную конструкцию, обычно обладают более чем достаточной прочностью для того, чтобы противостоять любым установившимся нагрузкам, которые могут возникнуть в аэродинамической трубе. Поэтому конструктор проводит статические испытания только для того, чтобы определить, насколько удачно он выбрал величину потребной жесткости конструкции и ее распределение.

Характер выполняемых в частном случае измерений жесткостных или упругих свойств конструкции зависит как от формы контролируемых данных, так и от типа испытываемой конструкции. В случае моделей для флаттера испытания должны преследовать цель не только проверки степени моделирования, но также и выяснения возможностей тех изменений в конструкции модели, которые могут потребоваться для достижения необходимой степени моделирования.

Если сначала обратиться к конструкциям, свойства которых можно считать функциями только одной переменной (п. 12-3), то основными, подлежащими контролю, характеристиками являются распределения изгибной и крутильной жесткостей вдоль упругой оси. Если упругая ось является прямой линией, то, для того чтобы доказать существование адекватного моделирования, достаточно произвести сравнение между измеренными и вычисленными кривыми деформации для простых нагрузок и крутящих моментов, приложенных на конце крыла. Однако если требуется произвести видоизменение конструкции, то это может вылиться в форму изменения изгибной и крутильной жесткостей определенных

сечений конструкции. В случае изгиба эти поправки непосредственно связаны с ошибками в кривизне рассматриваемых сечений и определить их из экспериментальных кривых прогибов нелегко. В принципе, для того чтобы получить кривую изменения величины обратной изгибной жесткости, необходимо только дважды продифференцировать кривую прогибов и результат разделить на величину приложенного изгибающего момента. В случае кручения требуется только однократное дифференцирование. Однако небольшие неточности и ошибки, которые всегда имеются у экспериментально определенных функций, очень сильно увеличиваются в процессе дифференцирования и ведут к неприемлемо большим ошибкам, особенно во второй производной.

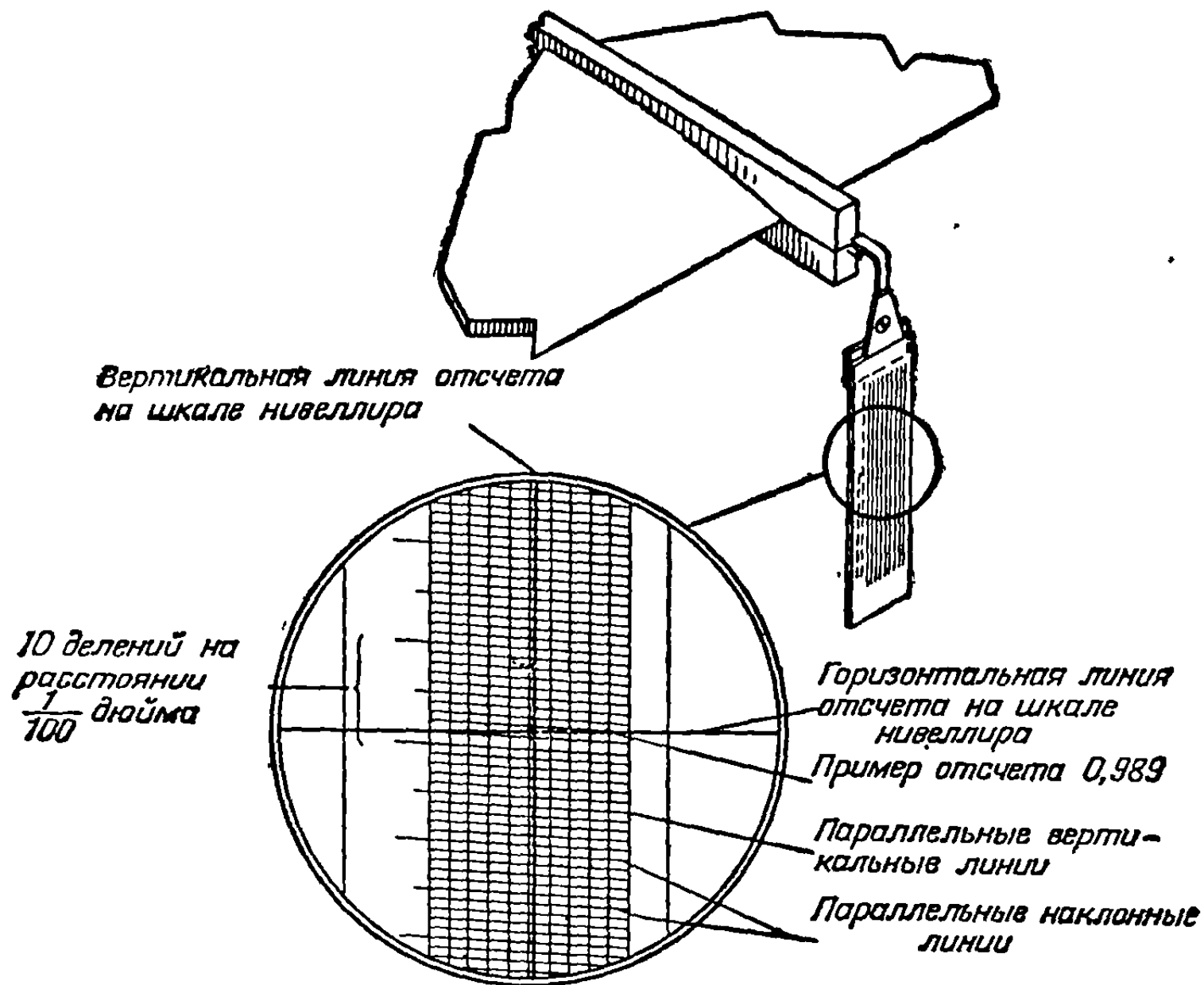
В тех случаях, когда поправки на изгибную жесткость необходимо получить из статических испытаний, лучшие указания относительно характера и месторасположения необходимых поправок может дать не измерение прогибов, а измерение углов наклона кривой прогибов. Не проще интерпретация результатов испытаний на кручение и в тех случаях, когда дифференциальная изгибная жесткость достигает значительной величины. Во многих случаях влияние дифференциального изгиба может быть выделено с помощью сравнения прогибов при кручении или углов наклона при симметричном и антисимметричном нагружении крутящим моментом (см. п. 12-3 и фиг. 12-20). Для конструкций со значительными разрывами в распределении жесткости и в упругой оси или в случае конструкций, трудно поддающихся модификациям, первоначальный проект модели должен быть достаточно удовлетворителен, так что статические испытания должны только подтвердить адекватность конструкции. В этих случаях наиболее подходящим методом является сравнение измеренных и вычисленных коэффициентов влияния.

Для конструкций, свойства которых являются функциями двух переменных (п. 12-4), данные о жесткостных свойствах конструктор модели получает в виде ряда коэффициентов влияния, которые можно непосредственно сравнить с соответствующим рядом коэффициентов, измеренных на модели. Если необходимы изменения конструкции, то их можно определить при помощи такого же итерационного процесса, который использовался при первоначальном проектировании модели.

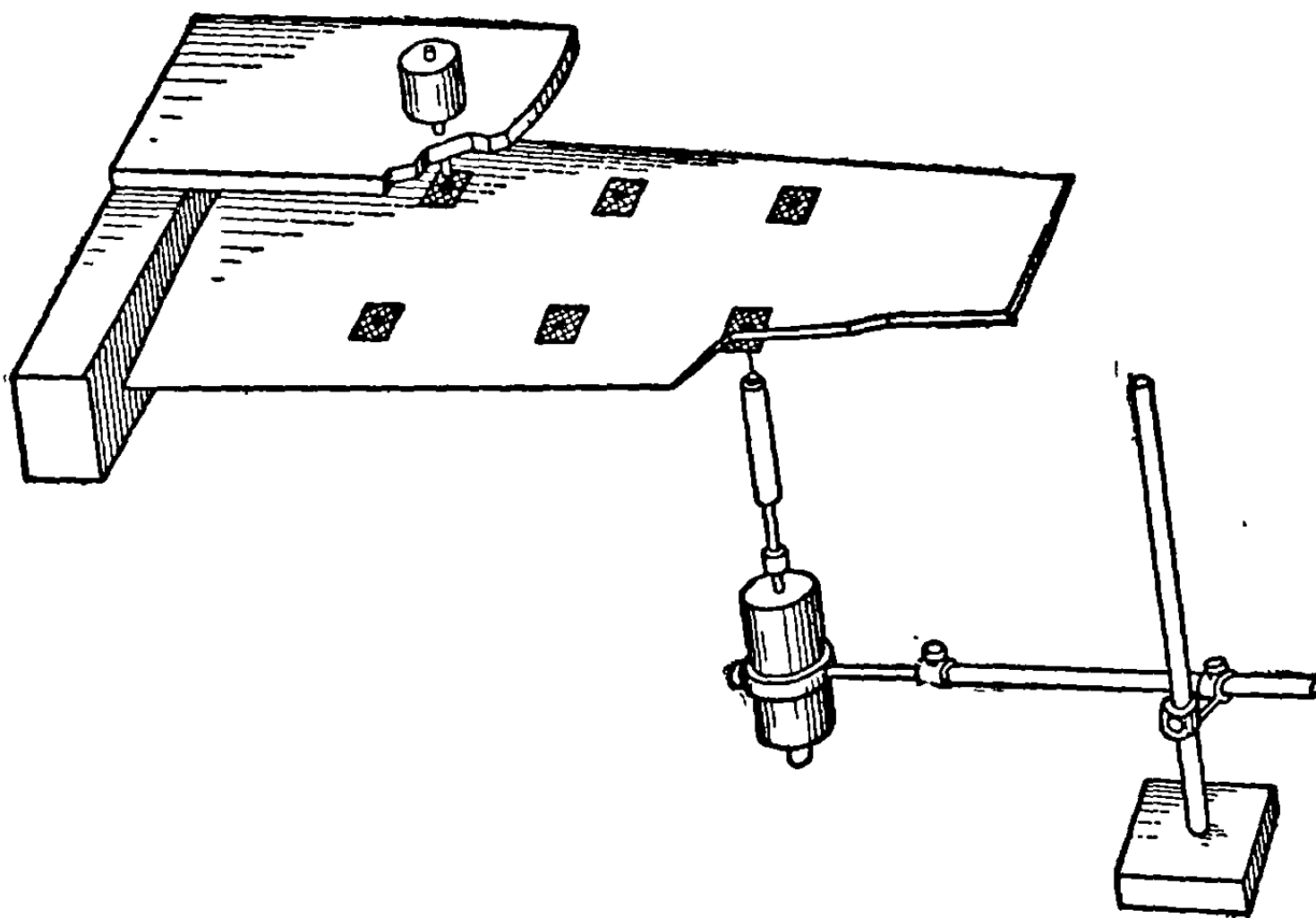
Производство статических испытаний включает вопросы измерения деформаций, методы приложения нагрузок и вопросы крепления конструкции в процессе испытаний. Если сначала разобрать вопросы, касающиеся техники измерения деформаций, то обнаружится, что эти требования как для модели, так и для натуре в основном одни и те же. Используемые приспособления должны обладать не только потребной точностью в соответствующих диапазонах и допускать быструю и простую интерпретацию получаемых результатов, но и не должны также обесценивать результаты внесением посторонних и неопределенных нагрузок.

Хотя последнее требование может показаться очевидным, при испытании моделей для исследования флаттера его очень трудно выполнить. Обычные приспособления для измерения прогибов, такие, например, как сдвоенные датчики, несмотря на то, что они и могут обладать необходимым диапазоном и точностью, вносят трение и жесткость в большей степени, чем это может быть допущено на большинстве моделей. В большинстве случаев нагрузки на конструкцию модели, обусловленные измерительными приспособлениями, в процессе испытания должны меняться в пределах нескольких граммов. Амплитуды прогибов, которые необходимо измерять, будут порядка половины дюйма и меньше, а точность измерений должна быть в пределах нескольких тысячных или десятитысячных дюйма. По этим причинам часто применяются световые лучи и оптическое увеличение. Точные измерения углов наклона возможны с помощью наблюдения на фиксированной шкале светового зайчика, отраженного от маленького зеркала, укрепленного на модели. Измерение углов наклона можно также осуществить

с помощью очень чувствительного акселерометра, укрепленного на модели в вертикальном положении. Показания акселерометра меняются с угловым перемещением модели (на „2g“ при повороте на 180°). Прогибы с точностью до тысячных долей дюйма можно измерить с помощью калиброванной стеклянной

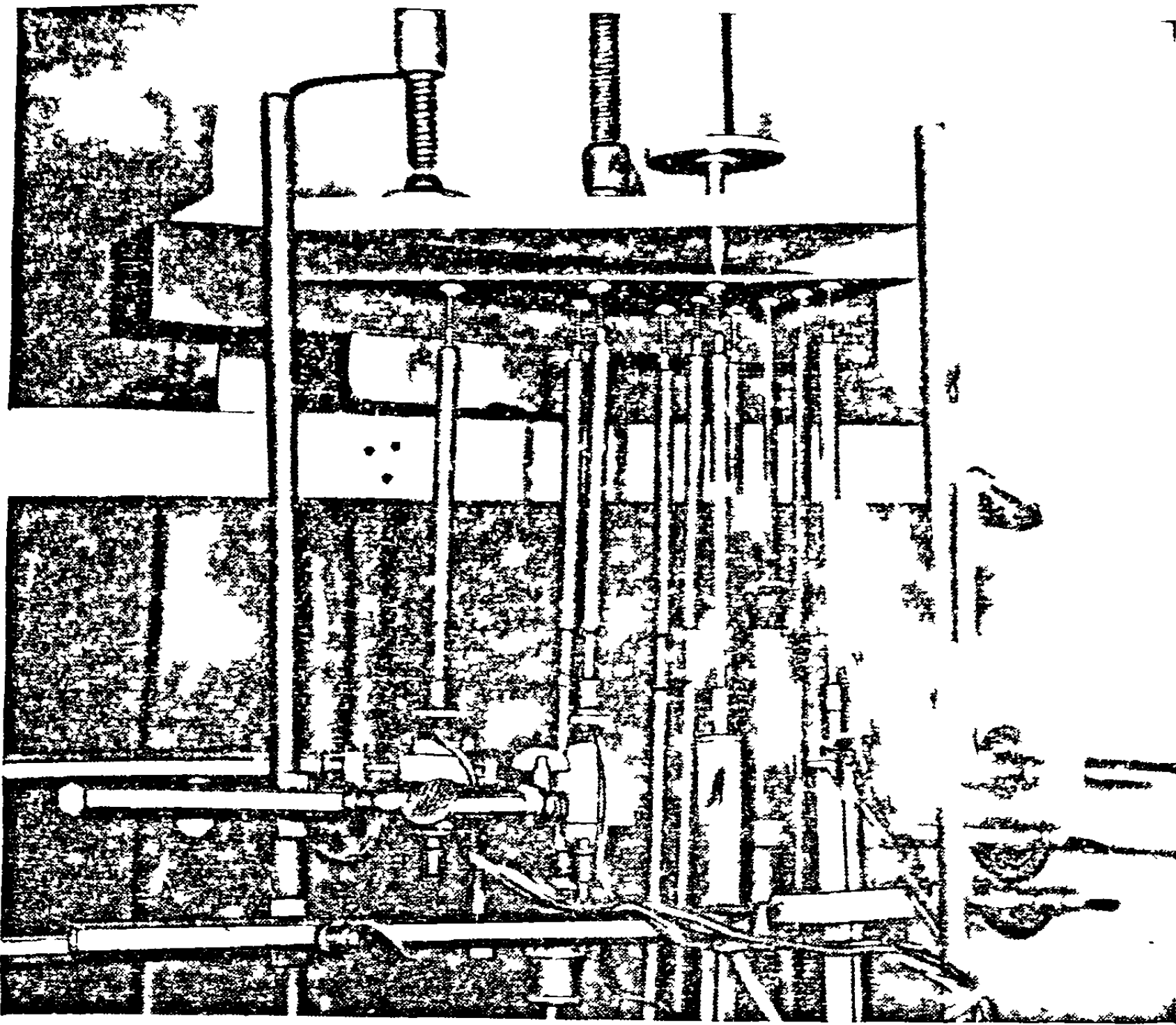


Фиг. 13-1. Измерение деформаций с помощью стеклянных шкал, наблюдаемых через трубу нивелира.

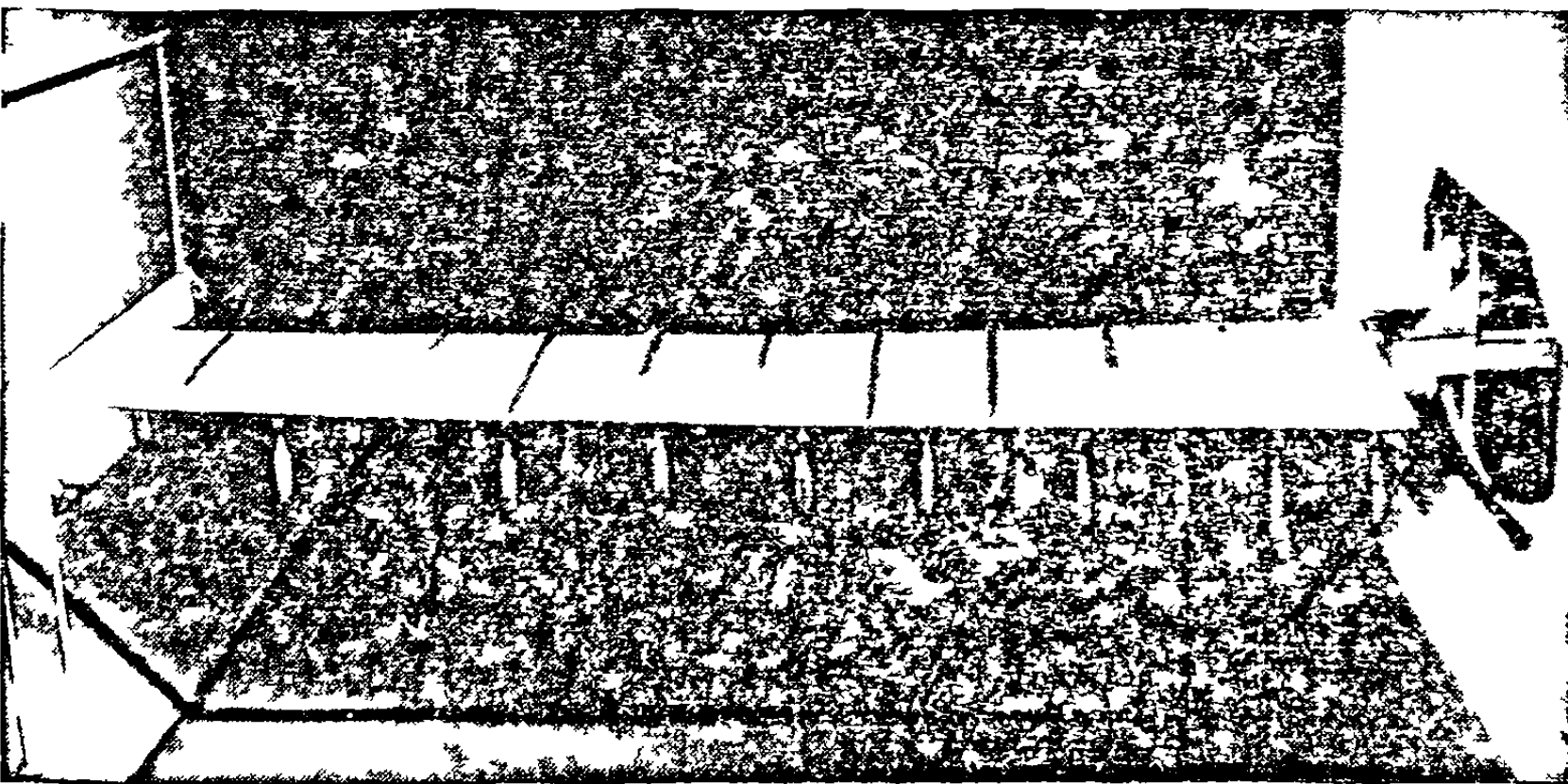


Фиг. 13-2. Измерение деформаций с помощью сигналов, генерируемых в катушке, по которой течет ток, и обусловленных смещением ее сердечника.

шкалы, которую наблюдают через оптическое приспособление, подобное, например, трубке нивелира (фиг. 13-1). Отклонение шкалы от перекрестий нивелира (фиг. 13-2) можно отсчитать непосредственно в сотых долях дюйма, причем следующий знак определяется пересечением косых линий типа линий, наносимых



Фиг. 13-3. Измерение коэффициентов влияния дельтавидного крыла с использованием катушки Шэвитца.



Фиг. 13-4. Крыло, смонтированное в аэродинамической трубе. Показана оснастка из тросов и балок для нагружения конца крыла. Прогибы подвешенных к крылу шкал наблюдаются через трубу нивелира.



на нониусе. Хотя этот метод трудоемок и утомителен для глаз, его можно применять во многих точках конструкции, повесив там соответствующие шкалы и последовательно снимая с них отсчеты с помощью нивелира. Нагрузка на конструкцию за счет легковесных шкал мала и остается неизменной в процессе опыта.

Схема измерений прогибов, дающая более точные результаты и особенно приспособленная для быстрого определения коэффициентов влияния на малых жестких высокоскоростных моделях, показана на фиг. 13-3. Металлические шнуры, свисающие с крыла, движутся вертикально в катушках, по которым течет ток. В процессе деформации крыла катушки неподвижно удерживаются под крылом. Используя элементы, идущие от отдельных точек и аккуратно присоединенные к главному элементу, который представляет собой мотор, приводимый в движение через сбалансированную на нуль сеть, можно повернуть переключатель и прочитать отклонение любого стержня на главном сведенном датчике.

Вследствие небольшого размера моделей, нагружение и крепление их в процессе статических испытаний представляют сравнительно простую задачу (фиг. 13-4). Наоборот, нагружение и крепление полноразмерных конструкций влекут за собой применение дорогостоящих монтажных каркасов, промежуточных соединений, выравнивающих напряжения, и мощных гидравлических домкратов.

**13-3. Измерение собственных частот и форм колебаний.** Для того чтобы определить собственные формы колебаний, программа испытаний прототипов всех самолетов и ракет, кроме самых маленьких и простейших, включает „вибрационное испытание“. Основная задача этого испытания состоит в том, чтобы путем сравнения экспериментально определенных частот и форм колебаний с расчетными проконтролировать те массовые и жесткостные характеристики, которые были использованы при расчете флаттера и динамических нагрузок. Иногда экспериментальные данные служат основой для нового ряда вычислений. Динамические модели, подобные моделям для исследования флаттера, всегда подвергаются вибрационным испытаниям для того, чтобы оценить ту точность, с которой моделирована полноразмерная конструкция. Формы колебаний, полученные на модели, можно сравнить либо с соответствующими измерениями, проведенными на натурной конструкции, либо с формами колебаний, полученными расчетным путем.

Основная техника возмущения конструкции и расшифровка полученных результатов остаются одинаковыми независимо от величины конструкции, хотя, конечно, возмущающая и измерительная аппаратура должна иметь соответствующие размеры. В гл. 3 было показано, что рассматриваемое здесь возмущенное движение конструкции можно непосредственно представить как наложение нормальных функций, которые мы пытаемся измерить. Таким образом, прогиб  $w(x, y, t)$  в некоторой конструкции может быть представлен в виде зависимости от нормальных функций  $\varphi(x, y)$  и соответствующих нормальных координат  $\xi(t)$  в форме

$$w(x, y, t) = \sum_i^{\infty} \varphi_i(x, y) \xi_i(t). \quad (3-145)$$

Уравнения реакции на внешнее возмущение имеют вид

$$M_i \ddot{\xi}_i + M_i \omega_i^2 \xi_i = E_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (3-147a)$$

где

$$M_i = \int_S \int \varphi_i^2(x, y) \rho(x, y) dx dy \quad (3-147b)$$

есть обобщенная масса,  $\omega_i$  — частота и

$$E_i = \int_S \int F_z(x, y, t) \varphi_i(x, y) dx dy \quad (3-147c)$$

— обобщенная сила, связанная с  $i$ -й формой собственных колебаний.



Из этих уравнений видно, что в общем случае реакция на произвольную возмущающую силу  $F_z$  является наложением всех нормальных форм колебаний конструкции. Для того чтобы выделить отдельные формы и частоты, нужно, конечно, проявить изобретательность в выборе формы и места приложения возмущающей силы. Обычно выгоднее использовать синусоидальное, а не импульсное возбуждение, часто применяющееся в линейных системах. Это обусловлено тем, что синусоидальное возбуждение часто позволяет сосредоточиться сначала на одной форме колебаний, а потом на другой, так что желаемые ответы можно получить и до некоторой степени оценить в процессе испытаний, а не в результате трудоемкой обработки записи наблюдений. (Хотя в этом пункте используются синусоидальные формы возбуждения, в п. 13-5 проанализированы и другие формы возбуждения.) Допустив синусоидальное возбуждение, нужно выбрать точки приложения, фазы и амплитуды приложенных сил и частоту возбуждения, для того чтобы наиболее отчетливо выделить исследуемую форму колебаний. Степень успеха связана, конечно, с возможностями имеющегося в распоряжении оборудования, но прежде всего зависит от умения и разумного его использования.

(а) *Реакция на возбуждение в одной точке.* Для того чтобы вывести законы, определяющие общий случай приложения к конструкции синусоидального возбуждения, исследуем сначала конструкцию, имеющую только одну форму собственных колебаний, возбужденных единственной синусоидальной силой с амплитудой  $\bar{F}$  и частотой  $\omega$ . Реакция носит синусоидальный характер и определяется выражением

$$\bar{\xi} = \frac{\bar{F}}{M\omega_n^2} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2}, \quad (13-1)$$

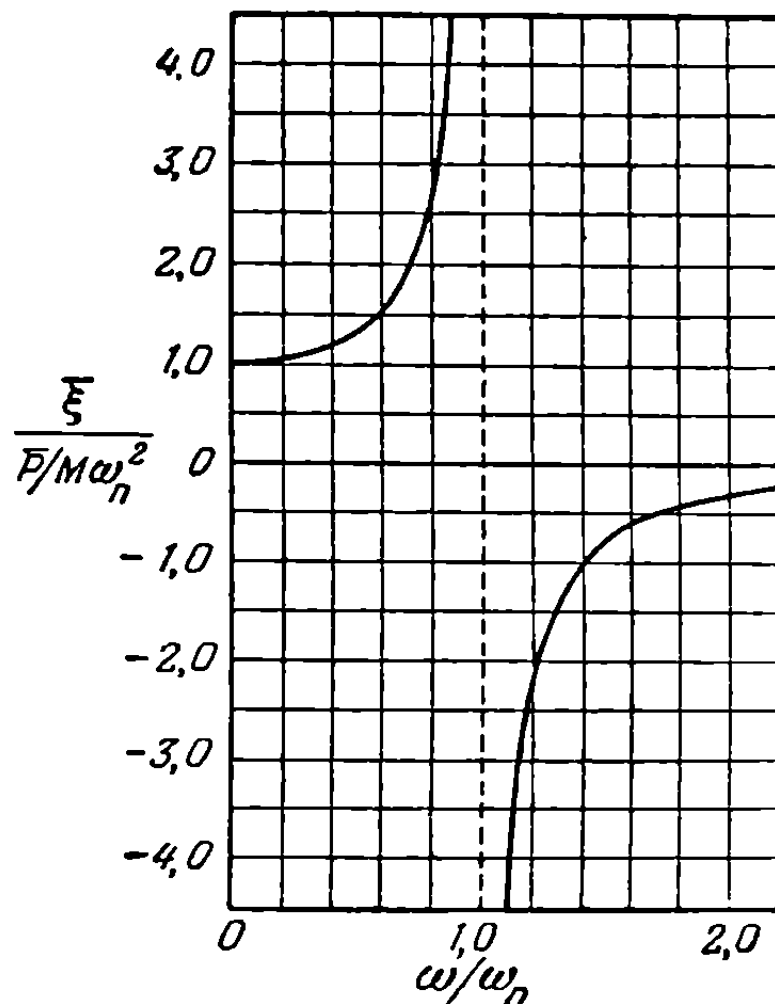
где  $\bar{\xi}$  — амплитуда реакции,  $\bar{F}$  — амплитуда обобщенной силы и  $\omega_n$  — собственная частота колебаний конструкции. В безразмерной форме эта реакция приведена на фиг. 13-5. Величина обобщенной силы по сравнению с величиной приложенной силы зависит от точки приложения силы. Обобщенная сила достигает максимума, когда сила приложена в точке, где амплитуда наибольшая, и будет равна нулю, если сила приложена в узловой точке.

Реакция, полученная из измерений, вследствие наличия в действительной конструкции некоторого демпфирования, будет отличаться от реакции, приведенной на фиг. 13-5. Это демпфирование обычно называется „конструктивным демпфированием“ (см. п. 9-5) и является выражением свойства пропорциональности величины демпфирования амплитуде колебания<sup>1)</sup>. Для синусоидального движения демпфирование может быть наилучшим образом представлено добавочным членом, стоящим в правой части уравнения (3-147а). Используя комплексное обозначение и беря обобщенную силу в форме косинусов, получим

$$M\ddot{\xi} + M\omega_n^2(1 + ig)\xi = \bar{P}e^{i\omega t}. \quad (13-2)$$

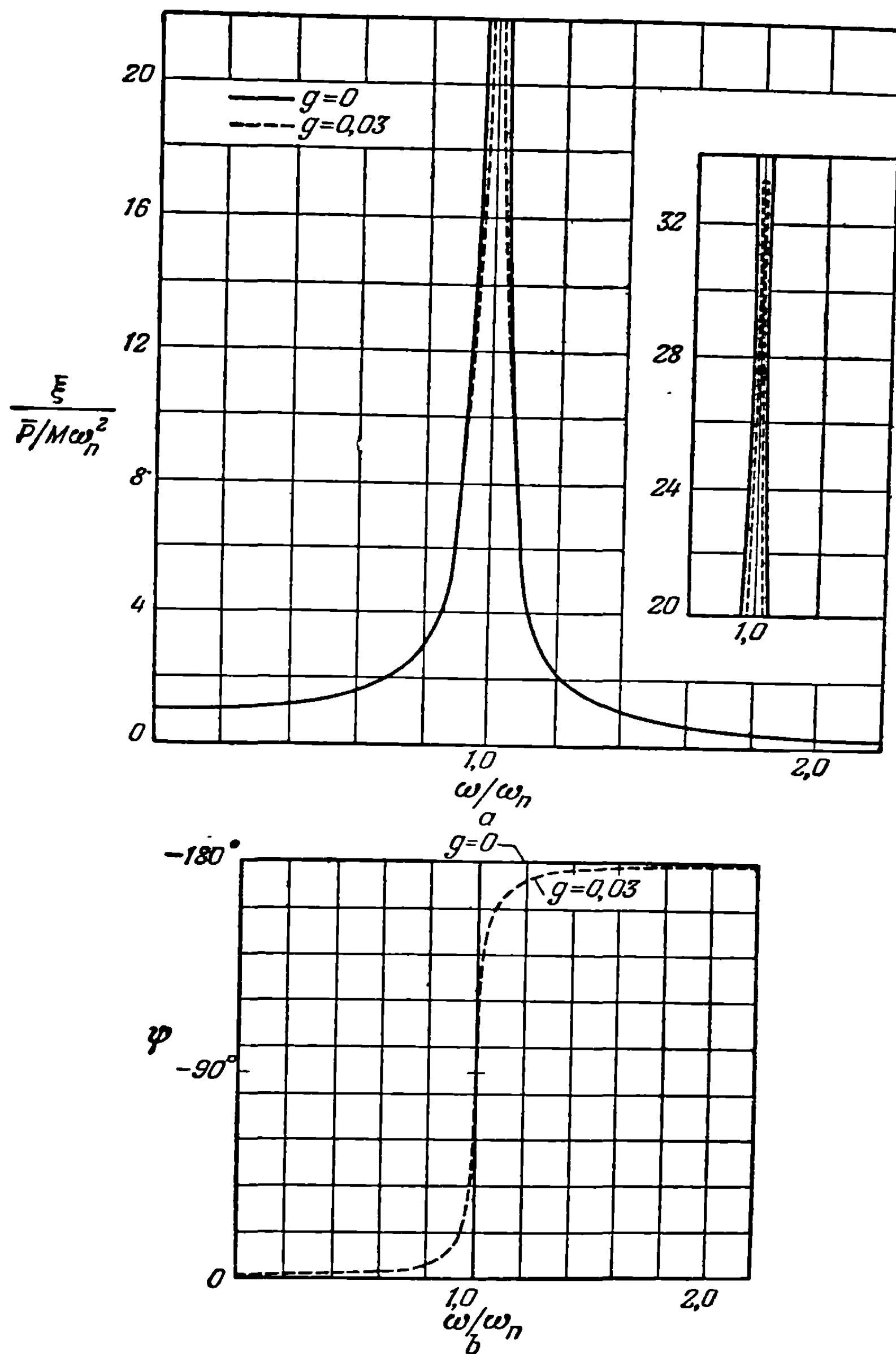
<sup>1)</sup> Конструктивное демпфирование отличается от более известного демпфирования, пропорционального скорости, которое привело бы к уравнению

$$M\ddot{\xi} + f\dot{\xi} + M\omega_n^2\xi = \Xi.$$



Фиг. 13-5. Амплитуда безразмерной реакции недемпфированной системы с одной степенью свободы на синусоидальную обобщенную силу.

Таким путем член, определяющий демпфирование, сдвинут по фазе на  $90^\circ$  относительно перемещения, но пропорционален ему. Следует отметить, что по вели-



Фиг. 13-6. Амплитуда  $a$  и фаза  $b$  безразмерной реакции на обобщенную синусоидальную силу системы с одной степенью свободы и конструктивным демпфированием ( $g = 0,03$ ).

чине  $g$  редко превышает 0,05. Если подставить решение в форме

$$\xi = \bar{\xi} e^{i(\omega\tau + \psi)}, \quad (13-3)$$

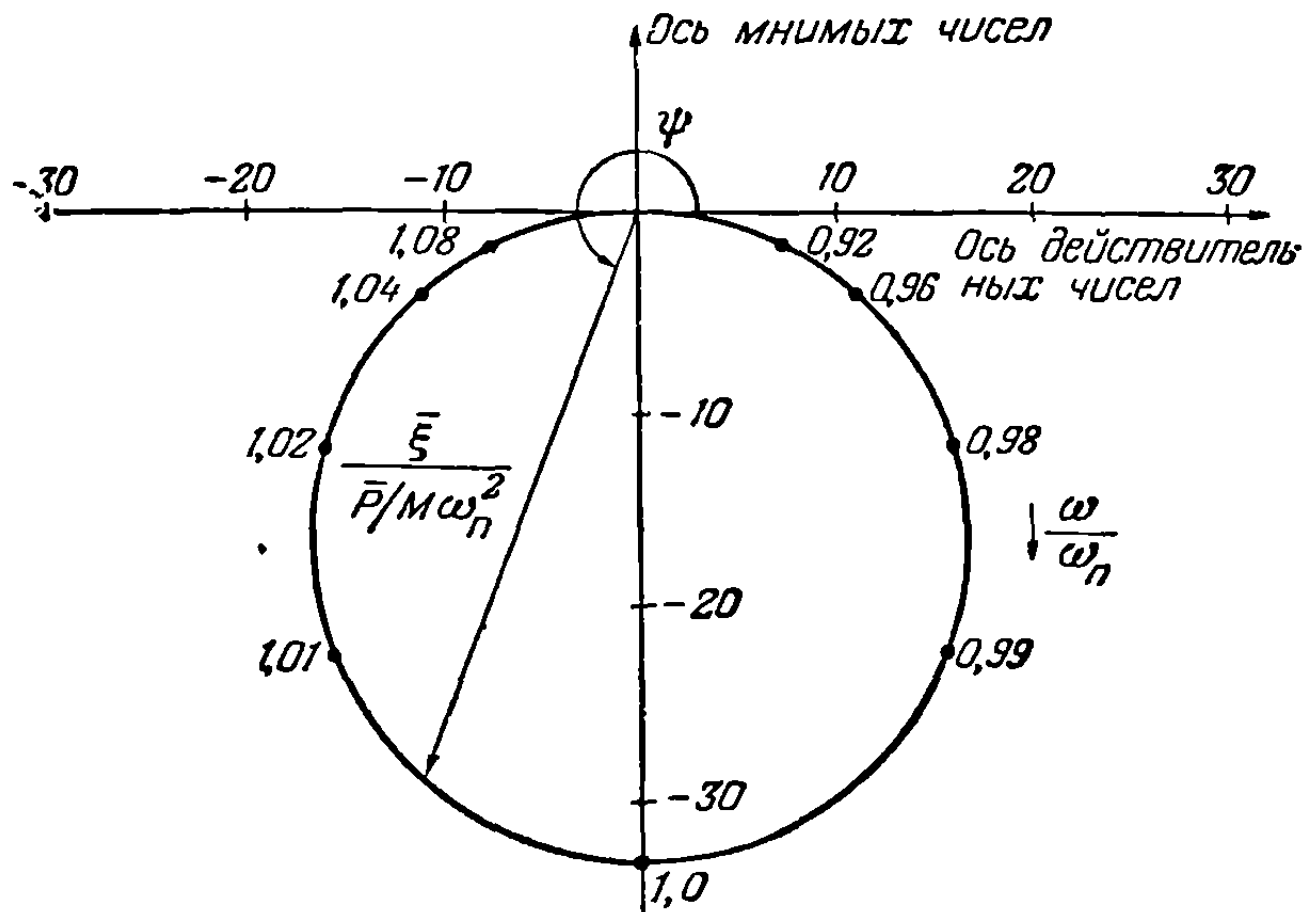
то получим реакцию (за исключением членов, зависящих от неустановившегося движения)

$$\bar{\xi} = \frac{\bar{P}}{M\omega_n^2} \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + g^2}},$$

$$\psi = \text{arctg} \left( \frac{-g}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right). \quad (13-4)$$

Эти соотношения для  $\dot{g} = 0,03$  вместе со сравнительными кривыми для случая, когда демпфирование отсутствует, изображены на фиг. 13-6. Если изобразить полярную диаграмму  $\bar{\xi}_e^{-i\psi}$ , то, как показано на фиг. 13-7 (см. [13-2]), окажется, что она представляет собой почти замкнутую окружность. Важно отметить, что максимальная реакция имеет место тогда, когда возбуждающая частота равна собственной, а перемещение отстает по фазе от возбуждающей силы на  $90^\circ$ .

Допустим теперь, что наша конструкция имеет две формы нормальных колебаний, но возбуждается единственной силой. Рассмотрим, например, первую свободную антисимметричную форму изгиба ( $\omega_b = 28,85 \text{ рад/сек}$ ) и первую



Фиг. 13-7. Полярная диаграмма демпфирующей реакции, показанной на фиг. 13-6.

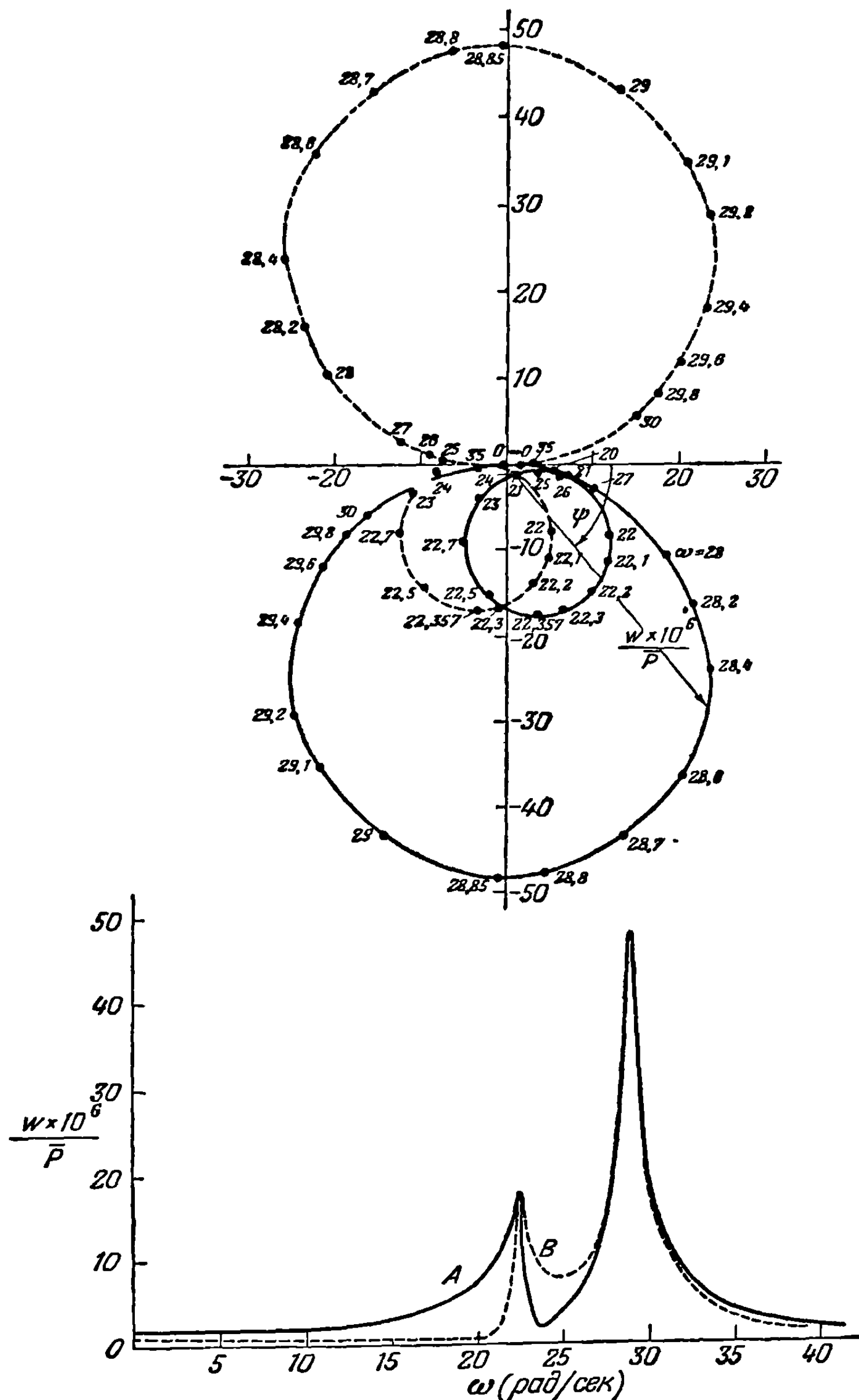
форму кручения ( $\omega_t = 22,36 \text{ рад/сек}$ ), рассчитанные в п. 4-6 для крыла реактивного транспортного самолета. Примем, что форма кручения симметрична и что для обеих форм  $g = 0,03$ . Если сначала определить обобщенные силы по формуле (3-147с), то по формуле (13-4) в каждой нормальной форме колебаний можно определить реакцию на действие синусоидальной силы, приложенной к правому крылу впереди упругой оси на расстоянии  $\sqrt{10}$  футов от нее в сечении 368 (см. фиг. 2-28). Применяя соответственно индексы  $b$  и  $t$  для обозначения форм изгиба и кручения, реакции можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_b &= \frac{3,351 \times 10^{-6} \bar{P}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{28,85}\right)^2\right]^2 + 0,0009}}, & \psi_b &= \text{arctg} \left( \frac{-0,03}{1 - \left(\frac{\omega}{28,85}\right)^2} \right), \\ \bar{\xi}_t &= \frac{1,658 \times 10^{-7} b_{\text{кон.}} \bar{P}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{22,36}\right)^2\right]^2 + 0,0009}}, & \psi_t &= \text{arctg} \left( \frac{-0,03}{1 - \left(\frac{\omega}{22,36}\right)^2} \right), \end{aligned} \quad (13-5)$$

где форма изгиба нормирована в концевом сечении упругой оси, а форма кручения — в концевом сечении в точке, лежащей на расстоянии половины концевой хорды впереди упругой оси.

Вспоминая, что реакцию крыла мы наблюдаем по движению определенных точек [ср. (3-145)], нанесем на фиг. 13-8 движение точки приложения силы (кривые А). Движение соответствующей точки на левом крыле представлено кривыми В. Резонансные пики этих двух форм в каждом случае спутать невозможно, и симметрия или антисимметрия их ясно видна по относительным фазам двух реакций при резонансе.

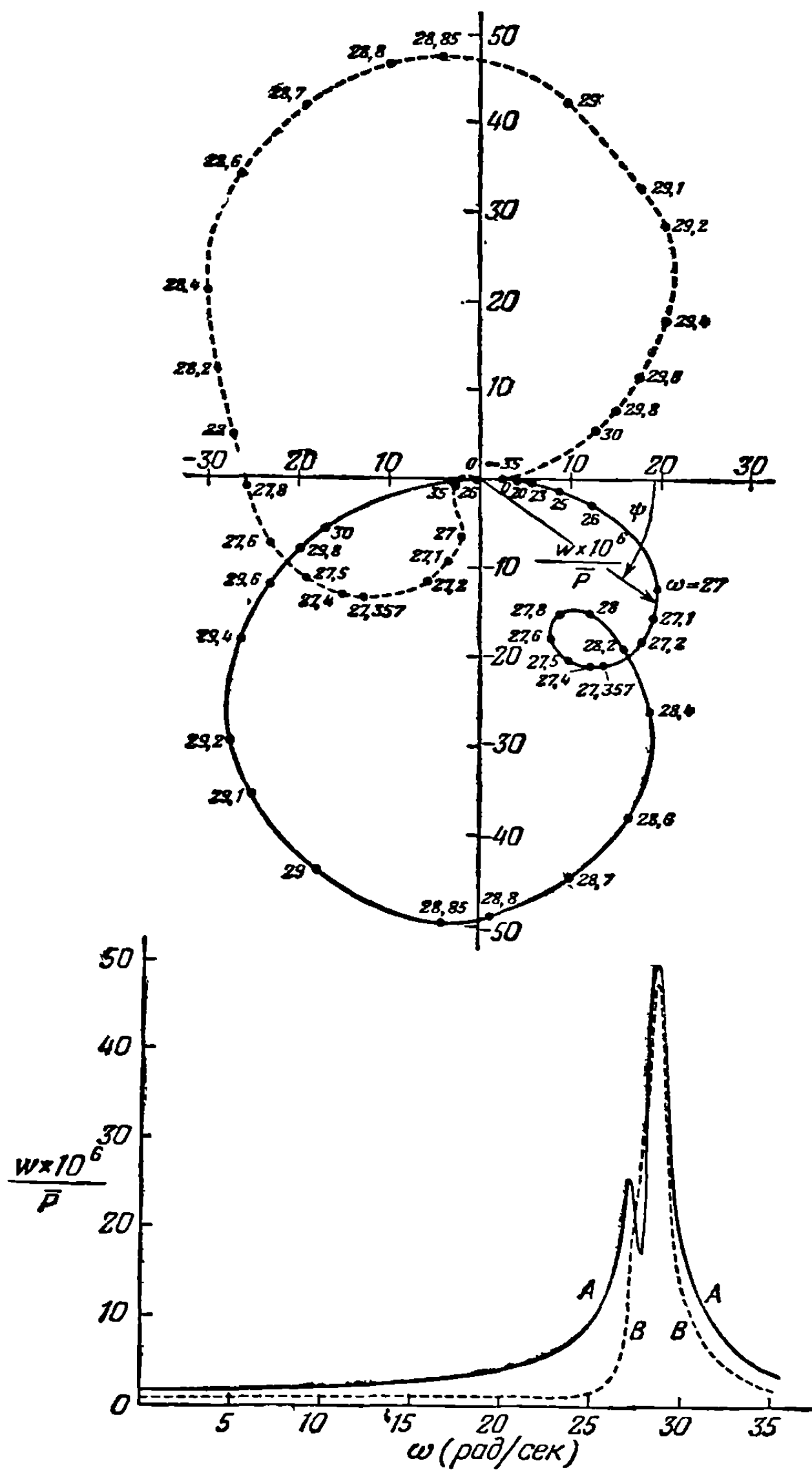
Для того чтобы показать характер тех трудностей, которые могут возникнуть при вибрационном испытании, изменим наш упрощенный пример и примем, что собственная частота колебания кручения равна  $27,36 \text{ рад/сек}$  вместо



Фиг. 13-8. Амплитуда и фаза реакции в двух точках, расположенных впереди упругой оси крыла реактивного транспортного самолета, с учетом только первой антисимметричной формы изгиба ( $\omega_b = 28,85 \text{ рад/сек}$ ) и первой формы кручения ( $\omega_t = 22,36 \text{ рад/сек}$ ). Кривые *A* относятся к точке, в которой приложена синусоидально изменяющаяся сила, а кривые *B* относятся к соответствующей точке другой половины крыла. В обеих формах  $g = 0,03$ .

$22,36 \text{ рад/сек}$ . Теперь не так легко расположить резонансные пики, так как реакции модели значительно перекрывают друг друга и дают кривые, изображенные на фиг. 13-9. На наличие двух форм указывают два пика кривой

амплитуды  $A$ , но существование формы кручения у кривой  $B$  гораздо менее очевидно. Дальнейшее затруднение возникает при попытке определить, является ли эта отчасти скрытая форма симметричной формой кручения. Сравнение фаз



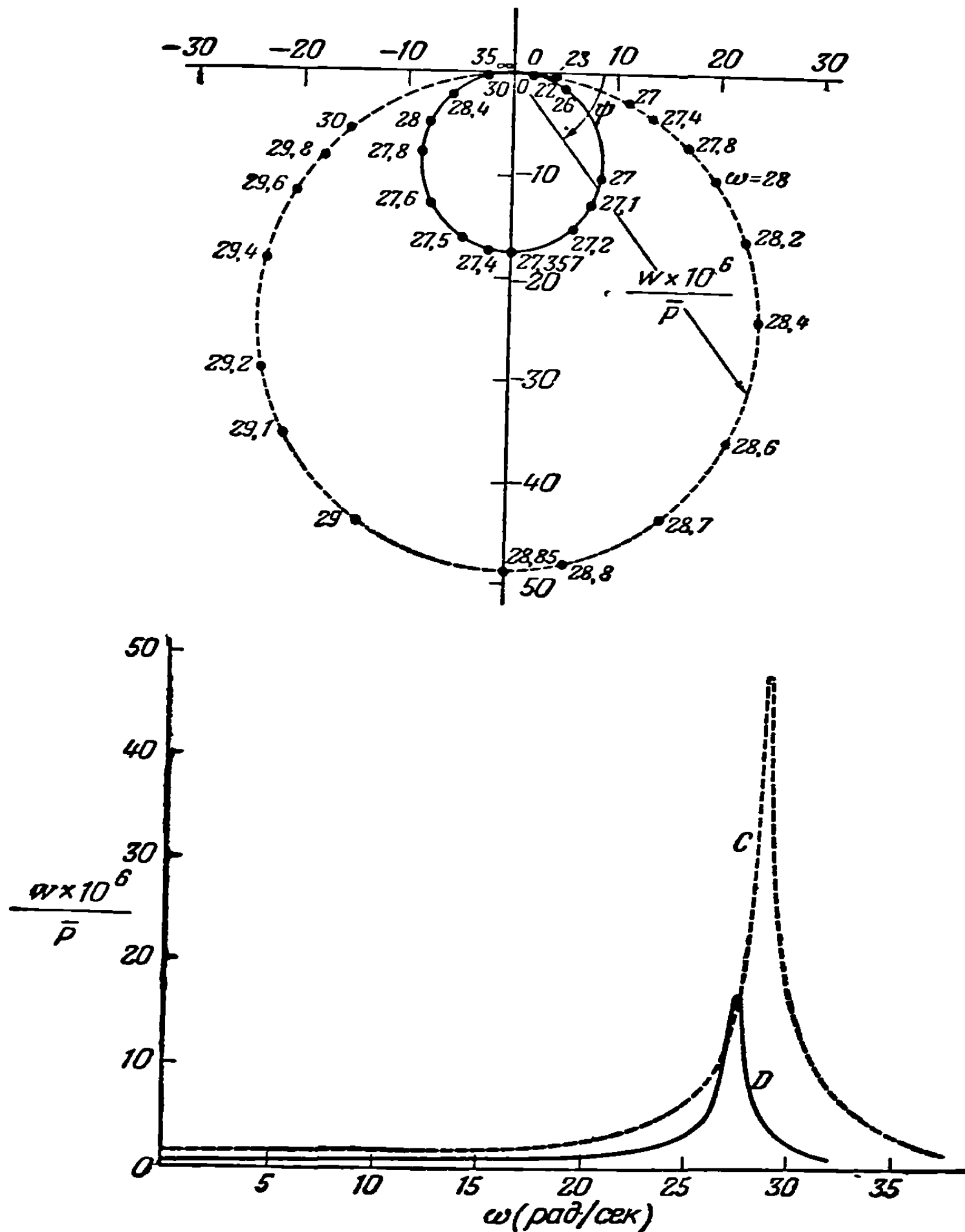
Фиг. 13-9. Те же самые реакции, что и на предыдущей фигуре, но частота крутильных колебаний равна  $27,36 \text{ рад/сек}$ .

точек на правом и левом крыльях при частоте пика кручения для  $A$  указывает на разницу фаз в  $90^\circ$ .

Два основных метода подхода к задаче разделения пары колебаний заключаются в том, что возбуждающую силу прикладывают таким образом, чтобы свести к минимуму реакцию в нежелательной форме и наблюдать движение тех точек на крыле, на которые эта форма оказывает наименьшее влияние. В нашем примере наконечник возбудителя, помещенный на линии узлов формы кручения

в сечении 368, вызвал бы реакцию в форме чистого изгиба, показанную на фиг. 13-10 (кривая *C*). Тот же самый результат можно было бы наблюдать, если сместить возбуждающую силу к узловой точке, а точку наблюдения оставлять на прежнем месте.

(*b*) *Многоточечное возбуждение.* Все реакции, о которых говорилось выше, были реакциями на возбуждающую силу, приложенную к одной половине крыла. Если бы к крылу были приложены симметрично две силы, то



Фиг. 13-10. Реакции при изгибе (кривая *C*) и кручении (кривая *D*), отличающиеся друг от друга либо соответствующим приложением силы, либо соответствующим измерением реакции.

антисимметричная форма реакции была бы исключена, так как соответствующая обобщенная сила была бы равна нулю, и осталась бы только форма, соответствующая кручению (кривая *D* на фиг. 13-10). Если бы эти симметрично приложенные силы различались по фазе на  $180^\circ$ , то по тем же причинам была бы исключена симметричная форма, а форма изгиба была бы резко выражена (кривая *C* на фиг. 13-10).

Если вспомнить, что в действительности наш самолет имеет большое число форм нормальных колебаний и что многие из них могут быть сгруппированы в очень малом диапазоне частот, то можно увидеть, что, отделив надлежащим

образом симметричные формы от антисимметричных, мы все еще можем получить сложную реакцию для того, чтобы решить вопрос о размещении датчиков. Добавляя другую пару симметрично размещенных возбуждающих сил, действующих синхронно с первой парой, можно, подбирая отношение сил, приложенных на каждом крыле, сместить точку приложения равнодействующей приложенных сил. Если точка приложения равнодействующей попадет на линию узлов одной из интерферирующих форм<sup>1)</sup>, то эту форму можно исключить из реакции [13-2].

В принципе увеличение количества пар сил, колеблющих модель, позволит выразить реакцию в искомой форме и в то же самое время уменьшить реакции в интерферирующих формах. В предельном случае возбуждающая сила была бы распределена таким образом, что обобщенные силы, соответствующие всем формам, кроме искомой, были бы равны нулю. Сравним условие ортогональности для нормальных функций [ср. уравнение (3-182)]

$$\int_S \varphi_i \varphi_j \rho \, dx \, dy = 0 \quad i \neq j \quad (13-6)$$

с выражением (3-147с) для обобщенной силы, найдем, что необходимое распределение силы для  $i$ -й формы имеет вид

$$\bar{F}_z(x, y) \sim \varphi_i(x, y) \rho(x, y), \quad (13-7)$$

т. е. амплитуда возбуждающей силы в каждой точке конструкции должна быть пропорциональна произведению амплитуды нормированной искомой формы на плотность самолета в этой точке. При таком распределении возбуждающей силы реакция независимо от частоты возбуждения представляет собой в точности  $i$ -ю форму. Амплитуда и фаза реакции в любой точке (за исключением узловой точки) изменяются так, как показано на фиг. 13-6 и 13-7.

Другой путь рассуждений [13-3], который приводит к тому же самому заключению, начинается с предположения о том, что сложная конструкция вынуждается к колебаниям с такой формой и частотой, которые соответствуют искомой форме колебаний. В каждый данный момент поперечные силы и моменты, обусловленные распределенной инерционной нагрузкой, в точности уравновешиваются поперечными силами и моментами упруго деформированной конструкции. Если нет демпфирующих сил, то колебания будут продолжаться, не затухая и не требуя внешнего возбуждения. Если же в конструкции имеет место демпфирование, то тогда колебания не будут изменяться только в том случае, если демпфирующие поперечные силы и моменты в точности погашаются внешними силами. В основе понятия конструктивного демпфирования лежит предположение, заключающееся в том, что любая упругая поперечная сила и момент сопровождаются пропорциональными им поперечной силой и моментом демпфирования. Поскольку упругие поперечные силы и моменты уравновешиваются инерционной нагрузкой, то можно доказать, что демпфирующие поперечные силы и моменты могут быть уравновешены внешними силами, распределенными подобно инерционной нагрузке и сдвинутыми относительно нее по фазе на  $90^\circ$ . Так как инерционная нагрузка в данной точке пропорциональна произведению амплитуды колебаний на плотность в этой точке, то этот путь рассуждения также приводит к распределению силы, которое описывается соотношением (13-7).

(с) *Выделение и измерение нормальных форм колебаний.* До сих пор в этой главе исследовались реакции на внешнее возбуждение таких конструкций, формы колебаний которых были известны. Однако задача, с которой обычно приходится сталкиваться, состоит в изучении реакций конструкции на соответствующим образом приложенные возбуждающие силы в том случае, когда

<sup>1)</sup> Или „мешающая“ форма. — Прим. ред.



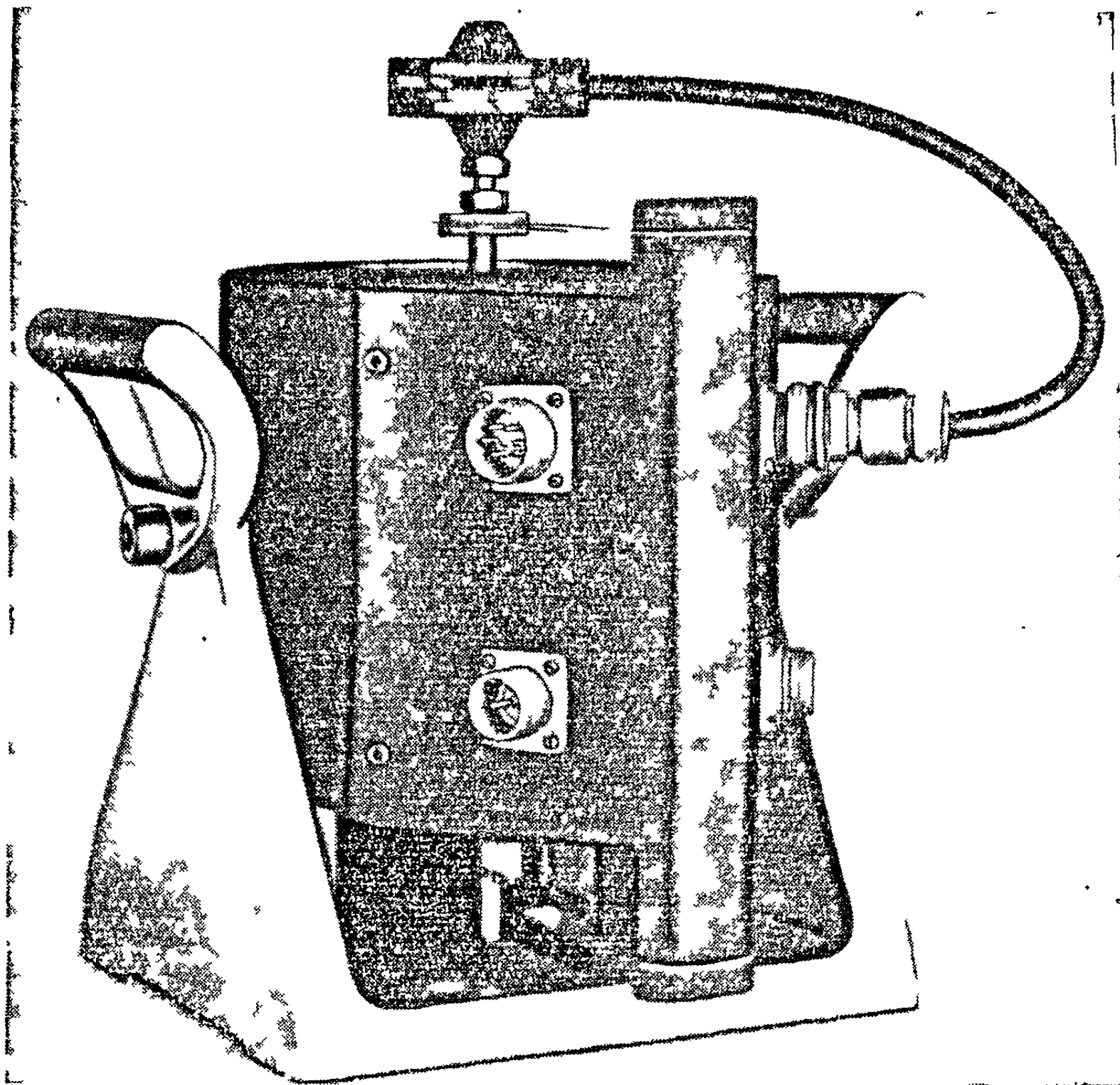
мы пытаемся определить формы колебаний конструкции. Эта задача и будет сейчас рассмотрена.

Требующиеся при вибрационных испытаниях конструкции искусство и оборудование очень сильно зависят от характеристик конструкции в исследуемом диапазоне частот. Если различные нормальные формы колебаний хорошо отделяются друг от друга и конструктивное демпфирование мало, то требуется только одна возбуждающая сила, хотя для конструкций, имеющих плоскость симметрии, обычно очень выгодно использовать две симметрично расположенные возбуждающие силы. (Это позволяет, как было указано в предыдущем пункте, независимо исследовать симметричные и несимметричные формы.) Если частота возбуждения меняется медленно, а величина возбуждающей силы сохраняется примерно постоянной, то воспринимающий реакцию датчик будет указывать на приближение к собственной частоте. Пара связанных, симметрично расположенных датчиков непосредственно покажет, является ли форма симметричной. Форму колебаний можно определить, если поддерживать установившиеся колебания с частотой, соответствующей пику реакции, и фиксировать показания датчика, помещенного в сечениях, последовательно расположенных вдоль конструкции. Конечно, если имеется какое-либо подозрение, что форма, возможно, была пропущена вследствие того, что возбуждающая сила была приложена в узле, то нужно также исследовать реакции в случае приложения силы в какой-либо другой точке.

Если в небольшом интервале частот оказываются две или большее число форм, то задача определения свойств каждой формы в отдельности становится гораздо более трудной. Это особенно справедливо в том случае, когда конструктивное демпфирование сравнительно велико. В этом случае главная проблема состоит в выделении всех форм, а не в измерении их свойств, поскольку все формы тождественны друг другу. Как видно из результатов расчета форм реакций в виде изгибных и крутильных колебаний для реактивного транспортного самолета (см. фиг. 13-9), приближение к частоте нормальной формы не обязательно проявляется в виде отчетливого резонансного пика. Отчетливые пики могут быть слегка смещены от собственных частот колебаний, и часто формы колебаний, измеренные при пике резонанса, оказываются очень сильно искаженными вследствие влияния реакций в соседних формах. Как указано в [13-2], в этом случае часто собственные частоты при резонансном пике можно определить гораздо проще и точнее по кривым изменения производной от амплитуды реакции по частоте в зависимости от частоты. При выделении форм колебаний в затруднительных случаях помогает также опыт по расшифровке полярных диаграмм реакций.

Когда используются только одна или две пары возбуждающих сил, то в не особенно трудных случаях опытный экспериментатор с помощью подходящего процесса подбора может отделить интерферирующие формы. Однако все чаще и чаще становится необходимым определять формы колебаний весьма сложных конструкций, например большого упругого самолета со многими упруго-подвешенными моторами и баками. В таких случаях, для того чтобы соответствующим образом выделить и акцентировать искомую форму, экспериментатору необходимо применить гораздо большее число возбуждающих сил. Это обусловлено тем, что даже при самом внимательном исследовании реакции на небольшое число строго контролируемых возбуждающих сил нельзя отождествить все формы в сложной группе и, конечно, нельзя дать точных сведений относительно форм колебаний. Простое увеличение возбуждающих сил само по себе не решает задачи, поскольку в этом случае оператор сталкивается с необходимостью правильного распределения большого числа сил. Число возможных распределений чрезвычайно велико, и для того чтобы выделить искомую форму с затратой приемлемого количества труда, необходимо некоторый систематический итерационный метод подкрепить экспериментально.

Один из таких систематических методов был успешно развит Льюнсом и Рисли [13-3]; они же предложили и оборудование, необходимое для его осуществления. Оборудование включает двадцать четыре независимо управляемых электромагнитных вибратора, к каждому из которых присоединен акселерометр (фиг. 13-11). Все вибраторы приводятся от одного источника с переменной частотой колебаний и либо колеблются в фазе друг с другом, либо сдвинуты по фазе на  $180^\circ$ .



Фиг. 13-11. Электромагнитный вибратор с максимальной силой в 25 фунтов с акселерометром, прикрепленным к „звуковой катушке“

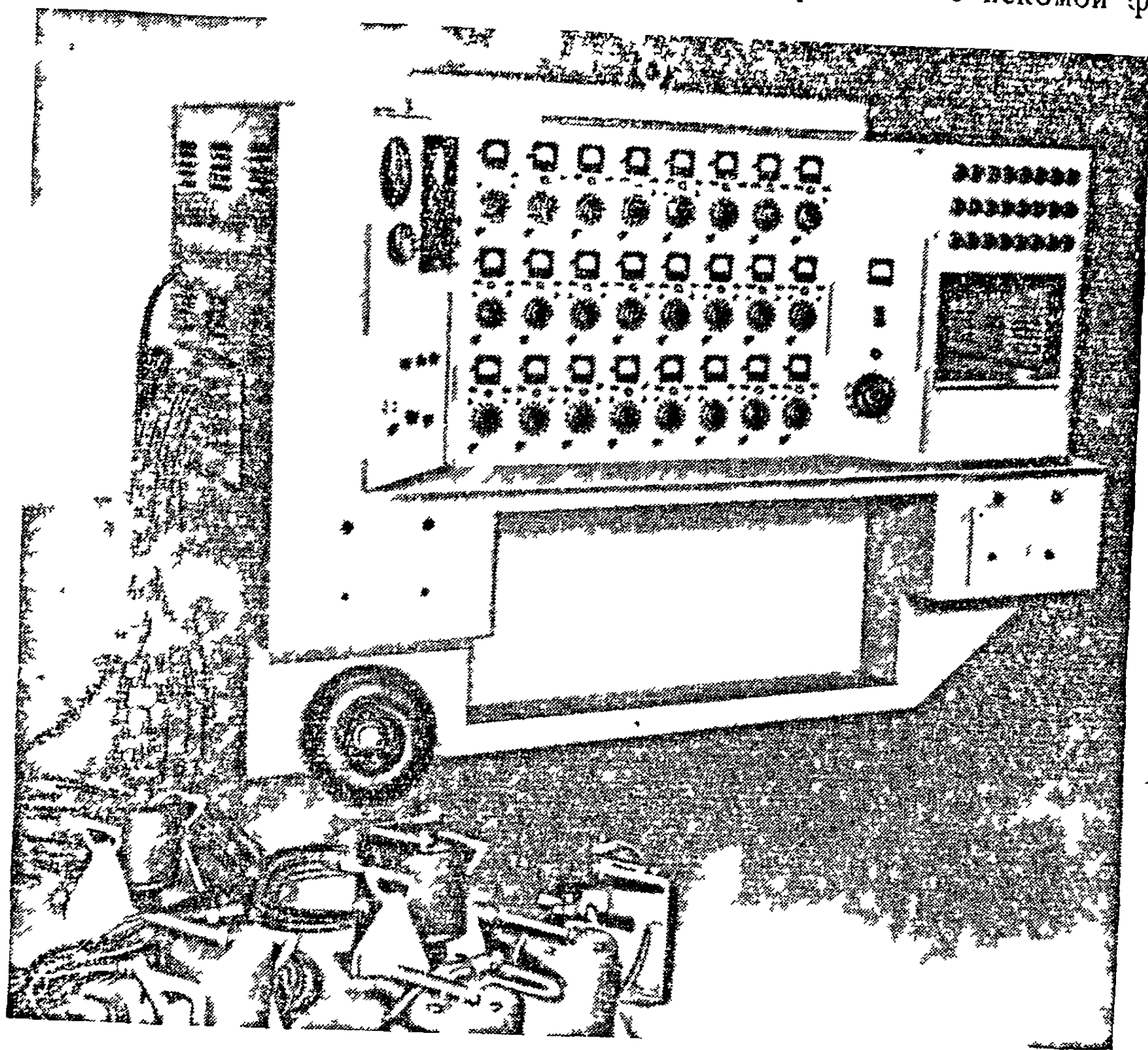
Предложенный итерационный процесс основан на попытке получить для искомой формы выведенное выше единственное распределение сил

$$\bar{F}_z(x, y) \sim \varphi_i(x, y) \rho(x, y). \quad (13-7)$$

Непрерывное распределение возбуждающей силы заменяется двадцатью четырьмя сосредоточенными силами, и суммарная масса считается распределенной среди вибраторов соответственно тому, какую часть конструкции можно отнести к каждому вибратору. Эти данные используются для настройки двадцати четырех массовых потенциометров, которые затем ослабляют сигналы, указывающие силу вибратора. О величине амплитуд реакций, расположенных вблизи вибраторов, судят по акселерометрам, показания которых интегрируются, для того чтобы сделать их пропорциональными скорости. С помощью переключателей скорость реакции в любой точке и соответствующим образом модифицированная сила возмущения могут быть нанесены на вертикальной и горизонтальных осях катодно-лучевого осциллографа. Наклон получающейся в результате такой

развертки эллиптической фигуры характеризует отношение сигналов, а ширина эллипса является мерой разности их фаз. (На фиг. 13-12 приведен измерительный стенд.)

Процесс выделения и измерения искомой формы, близкой к другим формам, происходит обычно следующим образом. Оператор (который должен, однако, обладать известным опытом и знаниями, для того чтобы решать эту прежде неразрешимую задачу) в первый раз мельком встречается с искомой формой



Фиг. 13-12. Измерительный стенд для системы со многими вибраторами; здесь же изображены некоторые из 24 вибраторов, которые присоединяются к стенду.

при просмотре исследуемого интервала частот. При этом он использует различные комбинации вибраторов и отмечает резонансы и сдвиги фаз в соответствующих сечениях. Выбрав наилучшую с точки зрения выявления резонанса частоту возбуждения, оператор выбирает возбуждаемое сечение, реакция которого дает наилучшие указания относительно резонанса. Он называет это сечение главным сечением и укрепляет осциллограф таким образом, чтобы эллипс был наклонен под углом  $45^\circ$ . Затем он по очереди включает каждое из оставшихся сечений и добивается того, чтобы амплитуда каждой силы давала эллипс, наклоненный под углом в  $45^\circ$  к своей реакции. Конечно, введение дополнительных возбуждающих сил влияет на реакцию главного сечения, и отношение силы к амплитуде в этом сечении изменяется. Эта трудность хорошо обходится с помощью автоматического нормализатора, приводящегося в действие сигналами от главного сечения и соответствующим образом изменяющего каждый сигнал скорости и, прежде чем он появляется на осциллографе. Таким образом, каждая возбуждающая сила будет иметь такое же отношение к скорости реакции,

каким обладает главное сечение. Такая настройка влияет на отношения в ранее отрегулированных сечениях, но несколько итераций этого процесса регулирования быстро сходятся к чистому возбуждению искомой формы. На это указывает тот факт, что по мере хода процесса регулирования скорости все больше и больше подходят по фазе к возбуждающим силам. Если возбуждение внезапно снимается, то во всех сечениях реакции плавно, без биений затухают, что является другим хорошим указанием на то, что была возбуждена чистая форма. Возможно, что между двумя итерациями оператор может счесть желательным подвести частоту возбуждения ближе к резонансу. Когда, наконец, чистая форма возбуждается удовлетворительно, оператор одновременно записывает реакции со всех датчиков на осциллограмму. Интересно отметить, что в процессе определения и измерения формы колебаний оператор обычно считает ненужным смотреть на колеблющуюся конструкцию.

(d) *Вибраторы и датчики.* В предшествующем изложении принималось, что возбуждающие силы могут быть приложены к конструкциям без учета того обстоятельства, как эти силы могут быть получены и где их в действительности можно приложить к существующей конструкции. Рассмотрим теперь требования к идеальному вибратору и классифицируем существующие типы по их характеристикам.

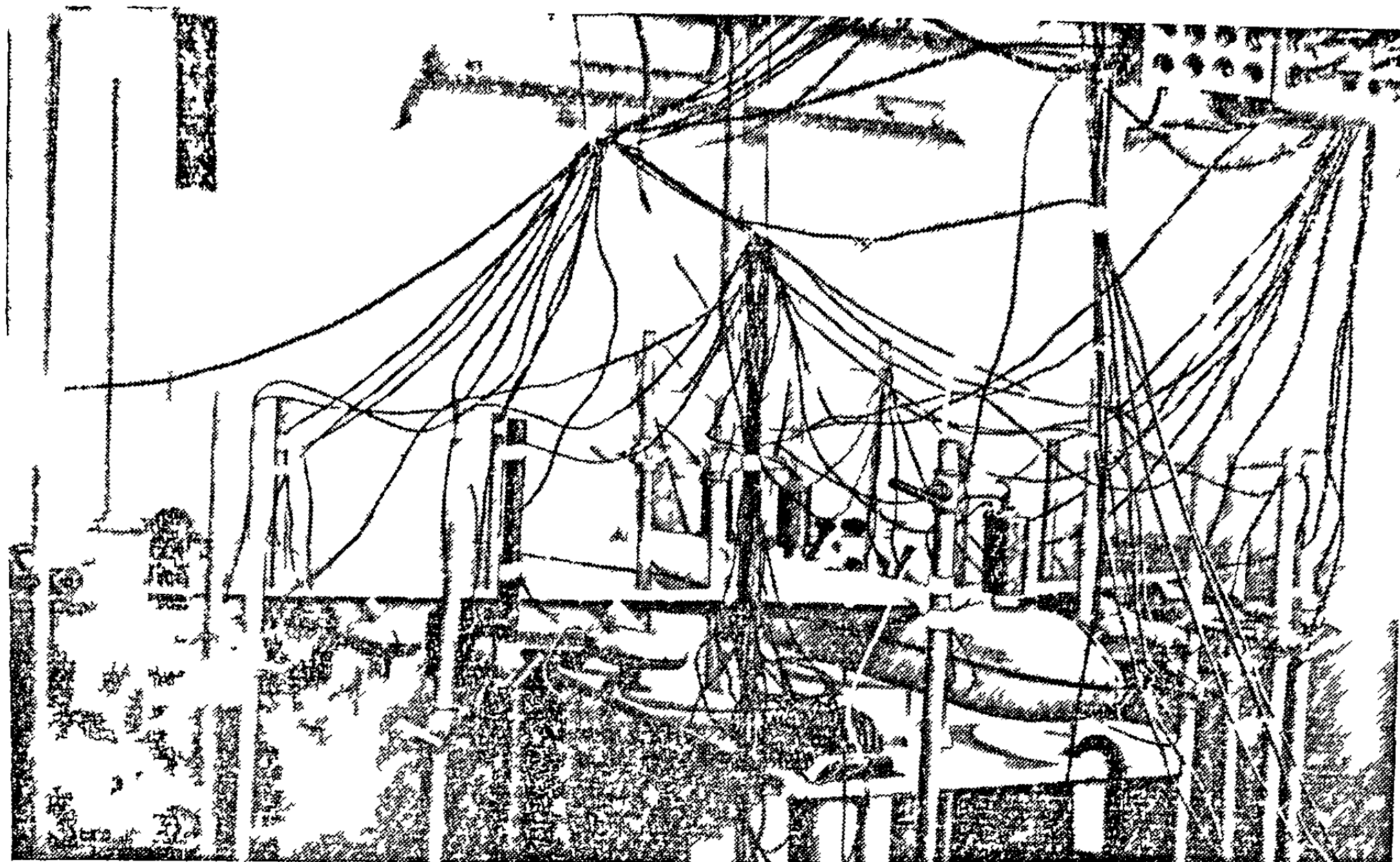
Самое важное требование, предъявляемое к вибратору, заключается в том, чтобы при передаче конструкции необходимого усилия он не оказывал значительного влияния на массу и жесткостные свойства конструкции. Другими словами, наличие возбуждающей и измерительной аппаратуры не должно изменять и искажать те величины, которые стремятся измерить. Таким образом, следует соблюдать известную осторожность и применять аппаратуру подходящего размера для той конструкции, которая должна подвергнуться испытанию и которая может представлять собой небольшую модель, легкий самолет или тяжелый бомбардировщик. В каждом отдельном случае можно оценить величину той дополнительной массы, которую можно добавить в некоторой точке конструкции, не опасаясь изменения ее форм колебаний. Достигается это путем оценки массы элемента конструкции, который совершает в основном такое же движение, как и рассматриваемая точка. Конечно, относительная величина искажения в окружающей конструкции обычно увеличивается по мере увеличения частоты колебания, так что оценку величины местной жесткости нужно производить, используя типичные формы колебаний, обладающие наивысшей частотой из всех исследуемых форм колебаний. Если дополнительная масса составляет несколько процентов от местной жесткой массы, то ее влиянием можно пренебречь.

Аналогично, если возбуждающее приспособление увеличивает жесткость крыла, которая не влияет на измеряемую возбуждающую силу, то эта дополнительная жесткость приведет к возникновению сил, которые по сравнению с упругими поперечными силами являются величинами второго порядка. Поскольку в случае собственных колебаний упругие поперечные силы уравновешиваются инерционными поперечными силами, достаточно сказать, что дополнительная жесткость должна быть мала по сравнению с произведением местной жесткой массы на квадрат частоты. Этот критерий может быть наиболее жестким критерием для форм колебаний с малой частотой.

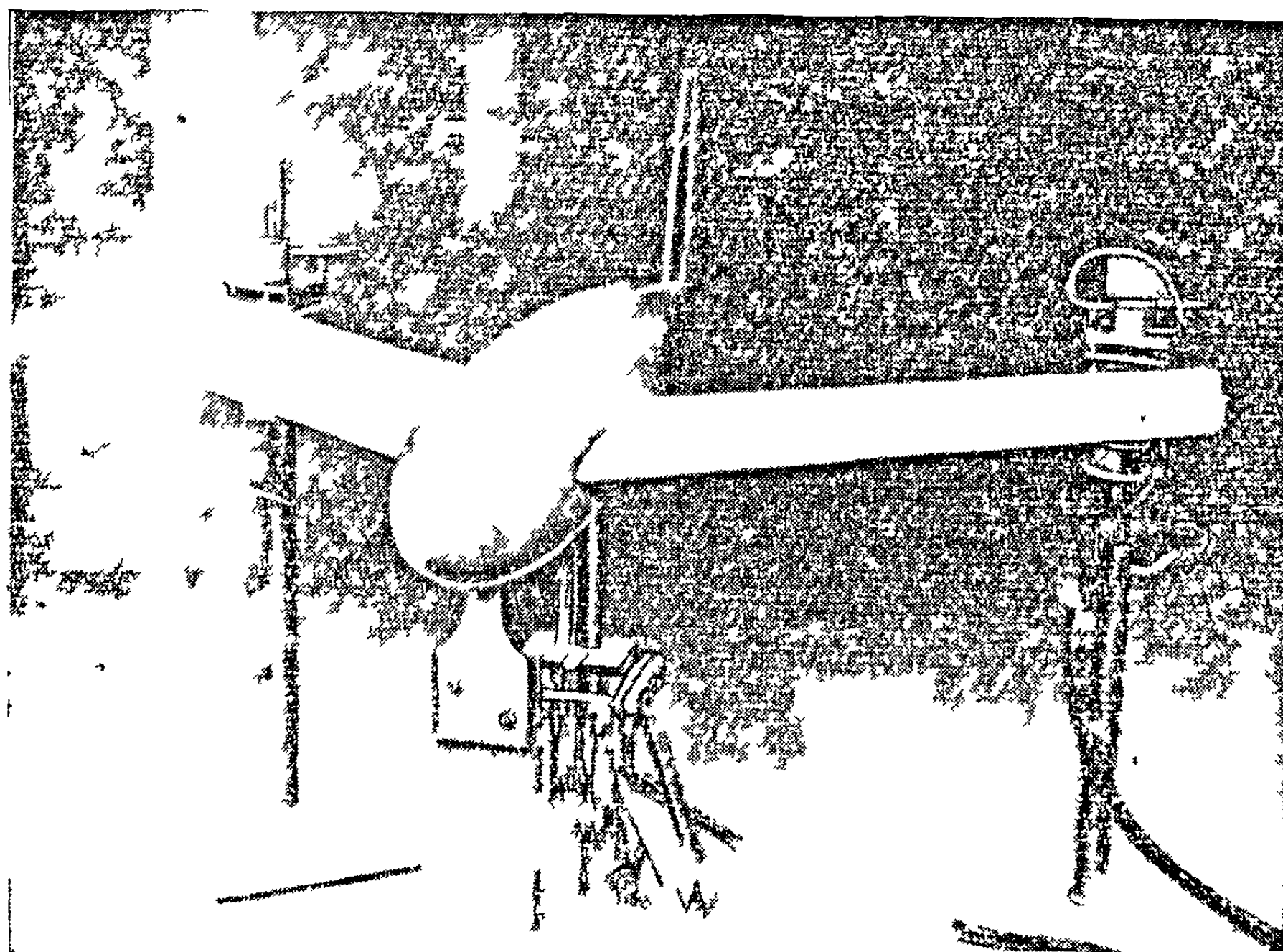
Другое ограничение для идеального вибратора состоит в способности к синхронизации с другими вибраторами той же разновидности. При совместной работе многих вибраторов различные вибраторы должны иметь не только одинаковую частоту, но также и одинаковую фазу. Далее, на всем необходимом диапазоне частот вибратор должен иметь соответствующую и контролируемую силу на выходе и не должен требовать чрезмерного количества вспомогательного оборудования и приспособлений.

Рассматривая сначала вибраторы небольшого размера, такие, которые используются на типовых моделях, предназначенных для исследования флаттера





Фиг. 13-13. Сложная установка для испытания модели для исследования флаттера (с использованием электромагнитного возбуждения).



Фиг. 13-11 Пульсирующие воздушные струи переменной частоты могут обеспечить соответствующее возбуждение во многих случаях вибрационных испытаний моделей.

на малых скоростях, мы увидим, что обычно они устраиваются и работают на следующих принципах:

(1) Электромагнитное возбуждение, при котором очень легкая „звуковая“ катушка смонтирована на конструкции, а катушка и сердечник электромагнита укреплены вне конструкции (фиг. 13-13). Синусоидально меняющийся ток в звуковой катушке возбуждает в конструкции соответствующее усилие. Этот тип вибратора очень разносторонен и особенно приспособлен к синхронизированному использованию многих единиц. Для очень легких моделей масса звуковых катушек может оказаться чрезмерно большой. Используемый диапазон частот может без помех простирается от нескольких колебаний до нескольких сотен колебаний в секунду.

(2) Воздушный струйный вибратор, в котором конструкция отражает пульсирующие потоки воздуха, направленные на ее противоположные поверхности (фиг. 13-14). Вращающиеся клапаны в воздухопроводах регулируют тональность потока на каждой стороне таким образом, чтобы получить чистую синусоидальную реакцию конструкции. Диапазон частот этого устройства, которое может использоваться в комплектах, состоящих из большого числа единиц, лежит в пределах от 1 до 200 колебаний в секунду. Его основное преимущество заключается в отсутствии непосредственной связи с конструкцией, а главный недостаток — в том, что невозможно измерить истинную фазу и амплитуду приложенной силы.

(3) Для вибрационных испытаний модели, в особенности тогда, когда возбуждающая сила должна создаваться также и в потоке воздуха, иногда применяются вибраторы с несбалансированными вращающимися массами и вибраторы с реактивными струями. Соответствующие методы анализируются в пункте, посвященном летным испытаниям на флаттер.

Обращаясь теперь к вибраторам больших размеров, подобным тем, которые применяются на самолетах, найдем среди них следующие типы.

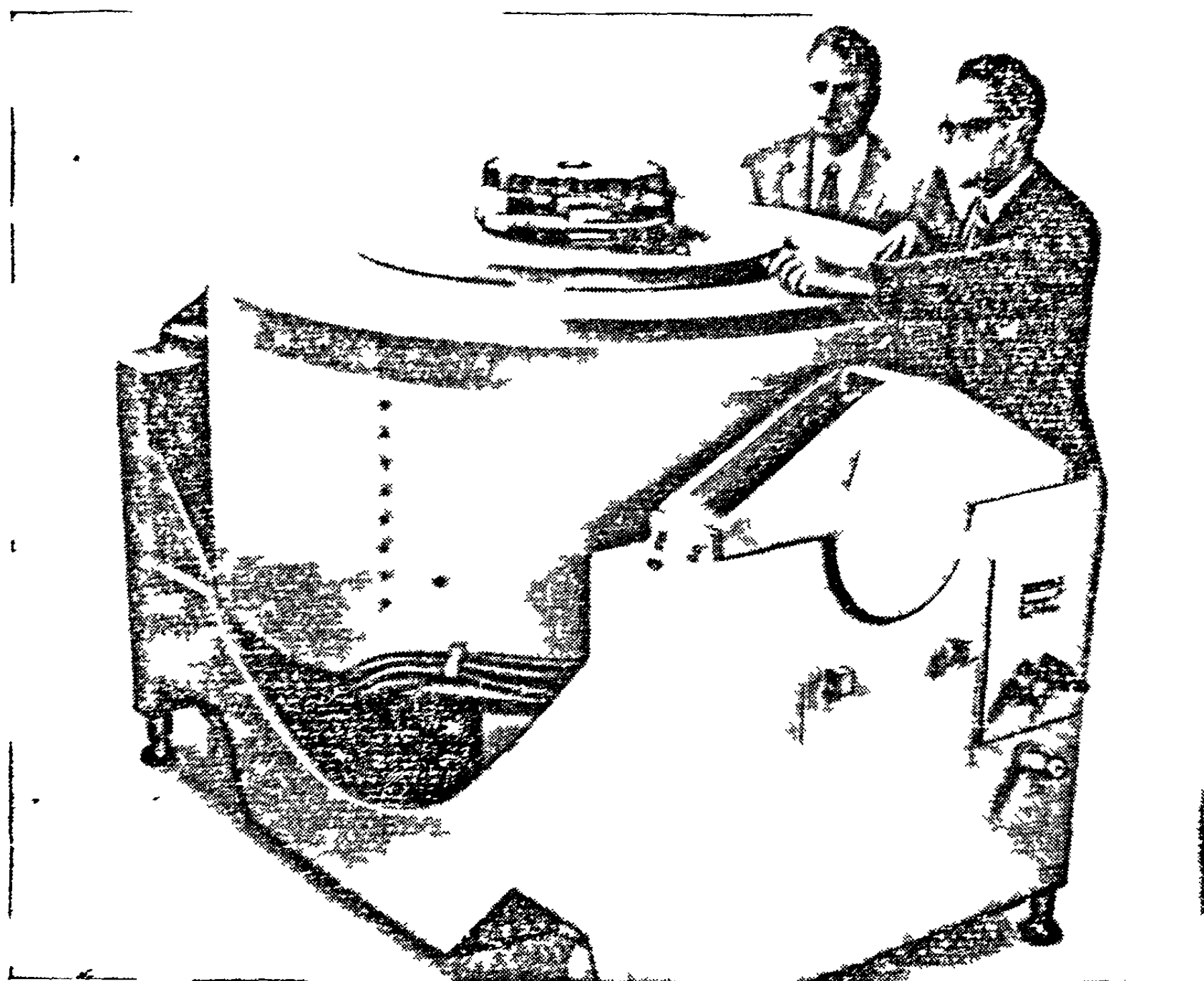
(1) Электромагнитные вибраторы, подобные описанному выше, но почти любых желаемых размеров (фиг. 13-15). Эти вибраторы обладают большой разносторонностью и широко применяются, несмотря на трудности создания вибраторов соответствующей мощности, в натуральных установках для испытаний при низших частотах колебания самолета.

(2) Вибратор с вращающимся неуравновешенным грузом, представляющий собой приводимый в движение упругим валом неуравновешенный маховик, прикрепленный к конструкции. Это приспособление применяется главным образом для довольно грубого определения собственной частоты при отсутствии лучшего оборудования. Оно не может быть быстро приспособлено к многократному использованию и имеет сравнительно высокую массу, особенно при низких частотах возмущения. Кроме того, в этом случае трудно регулировать амплитуду силы и фазу.

(3) Пружинно-эксцентриковый вибратор, у которого один конец пружины присоединен к конструкции, а другой перемещается по закону синусоиды. Амплитуда силы и фаза зависят от относительного перемещения конструкции и приводимого в движение конца пружины и поэтому не могут быстро контролироваться. Прибор может иметь сравнительно небольшую массу, однако всегда изменяет жесткостные свойства конструкции. Совместное использование этих вибраторов затруднительно.

Измерение нормальной формы колебаний конструкции (когда она возбуждена) включает измерение относительных амплитуд колебаний в многочисленных сечениях либо в течение установившегося возбуждения при частоте резонанса, либо в течение переходного режима, следующего за внезапным прекращением возмущения. Обычным измерительным инструментом является прибор, представляющий собой некоторую модификацию сейсмического датчика, подобный акселерометру, который дает электрический сигнал, пропорциональный амплитуде колебаний

конструкции, на которой он укреплён. Обычно такой датчик достаточно мал, так что его масса становится препятствием только для очень малых лёгких конструкций. Если желательно измерить только нормальные частоты и элементарных характеристики форм колебаний, то достаточно воспользоваться одним или двумя датчиками или даже одним проволочным датчиком сопротивления. Они применяются для определения резонанса, а линии узлов экспериментатор может отмечать либо на глаз, либо на ощупь. Однако при натуральных испытаниях почти всегда

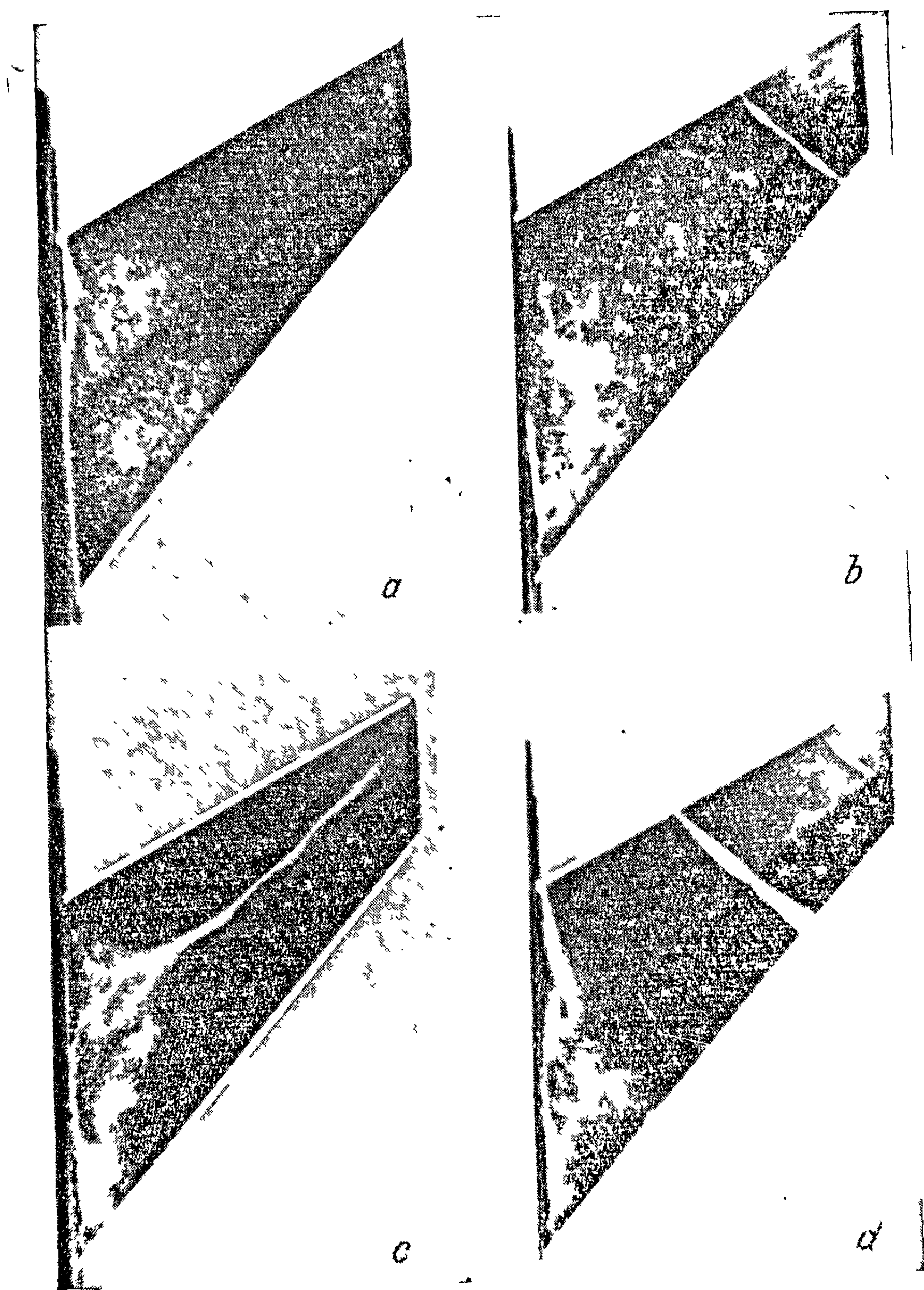


Фиг 13-15. Электромагнитные вибраторы могут служить практическими средствами возбуждения для конструкции различных размеров. Максимальная сила 12500 фунтов.

следует использовать два спаренных датчика, которые можно легко перемещать от одной точки конструкции к другой и определять относительную разность фаз любой пары точек. Это даёт простой, непосредственный и точный метод определения наличия или отсутствия симметрии у исследуемой формы колебаний и поможет наносить невидимые линии узлов. Прекрасную отчетливую картину узловых линий при испытании модели часто можно получить, разбрасывая по вибрирующей поверхности соль или какой-либо другой аналогичный материал. Если поверхность примерно горизонтальна, то частички будут собираться на узловых линиях и их можно фотографировать так, как это показано на фиг. 13-16. В диапазоне частот примерно от 10 до 100 колебаний в секунду для „замедления“ колебаний можно применить стробоскопическое освещающее устройство, так чтобы глазу наблюдателя стали доступны подробности формы колебаний.

(е) Крепление конструкции при вибрационных испытаниях. Задача правильного закрепления конструкции при вибрационных испытаниях часто представляет большую трудность. Для того чтобы получить желаемый ряд нормальных форм, необходимо не только приложить соответствующее возбуждение, но и точно воспроизвести граничные условия.





Фиг. 13-16. Узловые линии для четырех различных форм стреловидной сверхзвуковой модели для испытания на флаттер, полученные с помощью кристаллов соли, разбросанных по поверхности модели, при установленном возбуждении на каждой из собственных частот.

Наиболее часто встречающимися (и наиболее трудными) граничными условиями, которые требуется воспроизвести, являются условия, соответствующие конфигурации самолетной конструкции в условиях свободного полета. В этом случае вес конструкции должен поддерживаться без внесения каких-либо внешних стеснений или возмущений, которые будут воздействовать на измеряемые формы колебаний. Идеально нужны такие приспособления, которые могут передать различным частям конструкции постоянные вертикальные усилия, не увеличивая ни ее массу, ни жесткость. Практически масса и жесткость, добавляемые в некоторой точке конструкции, должны быть достаточно малы, чтобы их влияние на измеряемые формы колебаний было пренебрежимо мало. Критерий в этом случае остается тем же самым, какой был указан выше для узлов крепления вибраторов.

Таким образом, добавляемая масса должна быть мала по сравнению с массой окружающей части конструкции, которая в основном движется так же, как и точка крепления. Приращения сил, обусловленные добавляемой жесткостью, должны быть малы по сравнению с местными упругими поперечными силами, или, что эквивалентно, малы по сравнению с силой инерции местной жесткой массы.

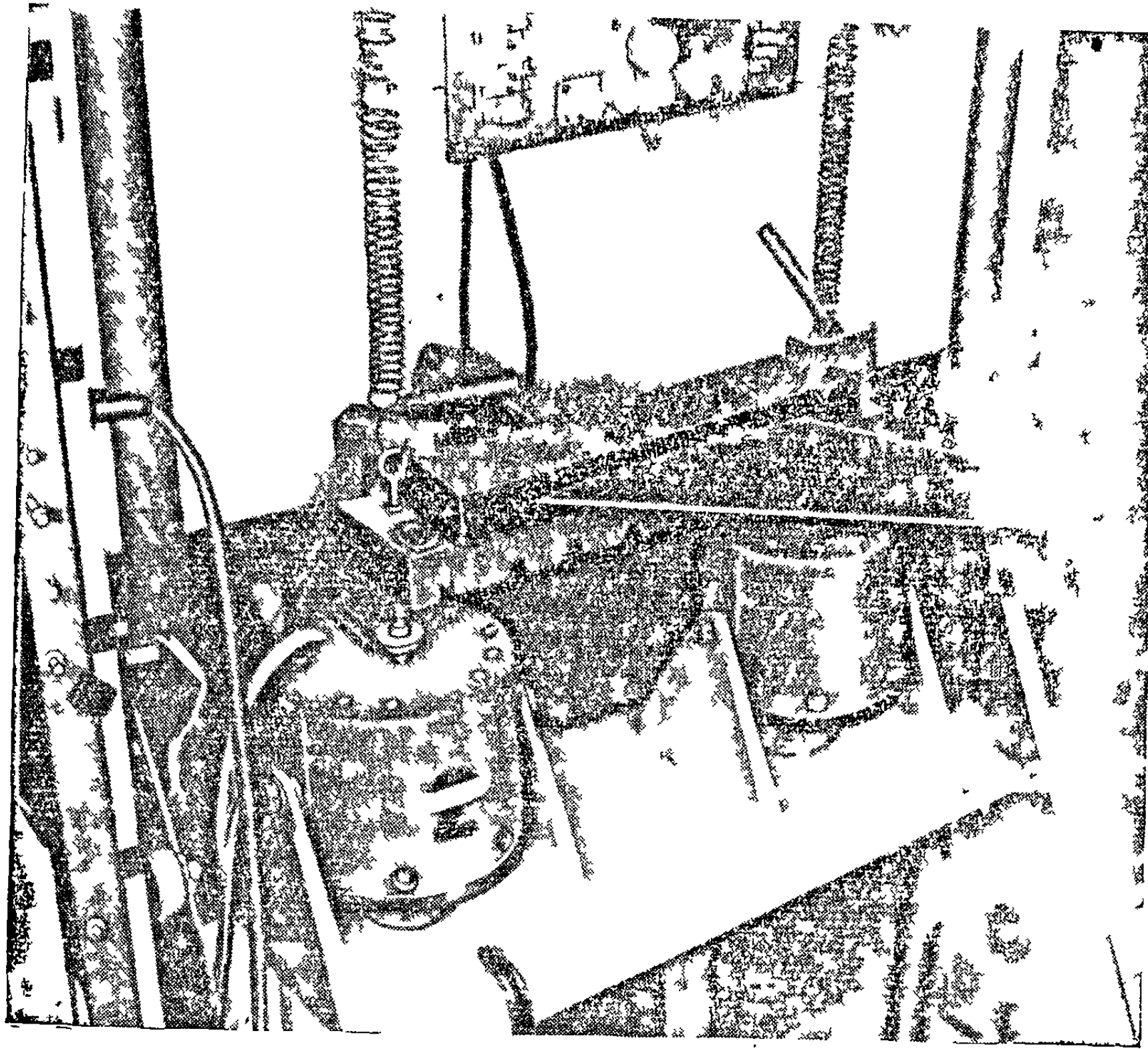
Допустим, например, что мы хотим определить нормальные формы колебаний в условиях полета небольшого самолета типа истребителя. Его полный вес равен 15 000 фунтов, двигатель размещается в фюзеляже. В этом случае удобно подвесить самолет за точку позади кабины пилота. Сначала нужно оценить массу сечения фюзеляжа, прилегающего к точке крепления, которая, по существу, остается невозмущенной в процессе колебаний. Естественно принять эту массу равной 300 фунтам. Если предполагается, что самая низкая интересующая нас частота равна примерно 3 колебаниям в секунду, то жесткость державки должна быть очень мала по сравнению с величиной  $(2\pi \times 3)^2 (3000/32)$ , или 36 000 фунт/фут. Выбирая величину жесткости в 3000 фунт/фут, найдем, что статический прогиб под действием веса самолета равен 5 футам. Таким образом, нужно иметь пружину с жесткостью в 3000 фунт/фут, способную нести нагрузку 15 000 фунтов. Кроме того, если измеряются только несколько первых форм колебаний, эффективная масса пружины должна быть мала по сравнению с 3000 фунтов. Другими словами, в худшем случае она должна быть мала по сравнению с сосредоточенной жесткой массой.

Собственная частота самолета на этой державке равна примерно  $1/3$  колебания в секунду и мала по сравнению с наименьшей искомой частотой (которая предполагается равной 3 колебаниям в секунду). Однако вообще недостаточно сказать, что поддерживающая пружина достаточно слаба, если она обеспечивает такую частоту державки, которая по сравнению с наименьшей искомой частотой является малой величиной. Если бы, например, этот истребитель был подвешен на двух пружинах, расположенных для обеспечения той же самой частоты колебаний державки вблизи концов крыла, то вполне возможно, что вследствие сильного уменьшения местной жесткой массы жесткость державки была бы достаточно велика, чтобы привести к значительному изменению некоторых из низших форм колебаний.

Если возможно закрепить конструкцию только в узловых точках, то можно использовать жесткие опоры, но обычно положение узловых линий данной формы колебаний заранее не известно. Исключением является случай исследования антисимметричных форм, когда в плоскости симметрии находится единственная опора, не ограничивающая вращение.

Наряду с тем, что воспроизведение граничных условий в свободном полете обычно очень трудно, воспроизведение других граничных условий может также иногда потребовать достаточно большого напряжения инженерной мысли. В качестве иллюстрации рассмотрим задачу возбуждения свободнонесущих форм очень легкой жесткой небольшой модели, показанной на фиг. 12-4. Имеющиеся вибраторы не могут быть присоединены к крылу, не изменяя серьезно его

характеристик, а воздушнотруйный вибратор, который не требует крепления, не способен возбудить требуемые высокие частоты. Найденное в конце концов решение показано на фиг. 13-17. Масса и моменты инерции основания державки крыла увеличивались до тех пор, пока не стали по порядку больше, нежели соответствующие характеристики крыла. Это массивное основание было затем подвешено на очень мягких пружинах и прикреплено к паре больших электромагнитных вибраторов самолетного типа. Возбуждение прикладывалось



Фиг 13-17. Пример применения электромагнитного возбуждения к легким жестким сверхзвуковым моделям для испытания на флаттер с моделированием закрепления корня свободнонесущего крыла.

к основанию, а от него передавалось и к крылу. При собственной частоте колебаний крыла амплитуда колебаний основания была пренебрежимо малой величиной, тогда как амплитуды колебаний крыла были довольно значительны. Для всех практических целей крыло испытывалось на одном и том же основании, а следовательно, и при одних и тех же свободнонесущих формах.

(f) *Влияние изменений конструкции и граничных условий.* Знание качественного влияния модификаций структуры „вибрационных испытаний“ представляет значительную ценность тогда, когда нельзя полностью обеспечить требуемых условий. Таким образом, попытка воспроизвести граничные условия в свободном полете часто означает, что к испытуемому образцу нужно прибавить некоторую массу или некоторую жесткость, для того чтобы только аппроксимировать граничные условия. Тогда возникают два вопроса: какое влияние оказывает добавленная масса, пусть даже малая, на собственные частоты и формы колебаний и какое влияние оказывает увеличение жесткости конструкции. Рэлей [13-4], в числе прочих исследователей, подробно рассмотрел задачу

подобного рода, и помещаемый ниже анализ следует основному плану его рассуждений.

Для упругой системы, обладающей конечным числом степеней свободы и совершающей малые колебания около своего положения равновесия, можно сделать следующие общие заключения.

(1) Добавление массы к системе приводит к уменьшению всех собственных частот системы или, в самом худшем случае, не оказывает влияния на те частоты, для которых добавленная масса попадает в узел колебаний.

(2) Увеличение жесткости системы увеличивает или не изменяет собственные частоты колебаний системы.

(3) Собственные частоты измененной системы в указанных выше случаях (1) или (2) либо вообще заменяют собственные частоты исходной системы, либо чередуются с ними.

(4) Подавление степени свободы уменьшает на единицу число собственных частот так, что  $(n - 1)$  оставшихся частот заменяют  $n$  частот исходной системы.

(5) Добавление степени свободы увеличивает на единицу число собственных частот так, что  $n$  частот исходной системы заменяются  $(n + 1)$  частотами расширенной системы.

(6) Если к системе добавляется комбинация пружина—масса (подобно упруго-подвешенному двигателю), то частоты, которые первоначально были выше основной частоты системы пружина—масса, т. е. больше нежели  $\sqrt{K/m}$ , увеличиваются, те же частоты, которые были ниже этой частоты, уменьшаются. Кроме того, появляется новая частота, лежащая между парой первоначальных частот, ближайшей к частоте системы масса—пружина.

(7) Если к системе добавляется пружина, чтобы прикрепить ее к фиксированной базе, и в точке прикрепления пружины к системе добавляется также масса, то все частоты исходной системы сдвигаются в сторону основной частоты системы пружина—масса ( $\sqrt{K/m}$ ). (Это может соответствовать мягкой пружинной подвеске, описанной выше, и является так называемым „вибратором“ Рэлея.)

При применении высказанных выше соображений полезно представить в сущности непрерывную конструкцию самолета или модели с помощью системы с сосредоточенными параметрами (см. п. 4-6) с большим, но конечным числом степеней свободы. Точность этого представления является достаточной во всех практических случаях.

Для того чтобы показать справедливость этих соображений, рассмотрим систему с  $n$  степенями свободы. Кинетическую и потенциальную энергии системы можно выразить через нормальные координаты  $\xi$ , обобщенные массы  $M$  и собственные частоты  $\omega$ :

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{\xi}_2^2 + \dots + \frac{1}{2} M_n \dot{\xi}_n^2, \quad (13-8)$$

$$U = \frac{1}{2} M_1 \omega_1^2 \xi_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \omega_2^2 \xi_2^2 + \dots + \frac{1}{2} M_n \omega_n^2 \xi_n^2. \quad (13-9)$$

Допустим, что на систему наложены такие связи, что у ней осталась только одна степень свободы. Поскольку любое движение этой системы может быть представлено наложением ее нормальных форм, то эти связи можно представить в виде соотношений между нормальными координатами и единственной переменной  $\theta$ . Таким образом,

$$\xi_1 = A_1 \theta, \quad \xi_2 = A_2 \theta, \quad \dots, \quad \xi_n = A_n \theta, \quad (13-10)$$

где для данной связи  $A$  являются заданными величинами. Для того чтобы найти частоту  $\omega$ , при которой система при данной связи будет совершать синусои-



дальные колебания, положим  $\theta = \cos \omega t$  и подставим величины (13-10) в выражения (13-8) и (13-9). В результате получим

$$T = \left\{ \frac{1}{2} M_1 A_1^2 + \frac{1}{2} M_2 A_2^2 + \dots \right\} \omega^2 \sin^2 \omega t, \quad (13-11)$$

$$U = \left\{ \frac{1}{2} M_1 \omega_1^2 A_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \omega_2^2 A_2^2 + \dots \right\} \cos^2 \omega t. \quad (13-12)$$

Так как при колебаниях консервативной системы амплитуды вариаций кинетической и потенциальной энергий равны, квадрат частоты вынужденных колебаний системы будет равен

$$\omega^2 = \frac{M_1 \omega_1^2 A_1^2 + M_2 \omega_2^2 A_2^2 + \dots + M_n \omega_n^2 A_n^2}{M_1 A_1^2 + M_2 A_2^2 + \dots + M_n A_n^2}. \quad (13-13)$$

По виду этого уравнения или с помощью дифференцирования его можно определить, что частота не зависит от связи  $A_m$  ( $\partial \omega / \partial A_m = 0$ ), когда все другие  $A$  равны нулю, т. е. когда колебания системы определяются нормальной формой  $\varphi_m$  с частотой  $\omega_m$ . Другими словами, если связи системы таковы, что ее форма близка к нормальной форме, то разность между частотой несвободной системы и собственной частотой является величиной второго порядка по сравнению с разностью в формах колебания.

Воспользуемся этой мыслью для того, чтобы выяснить, что получится в том случае, когда к системе добавляется очень малая масса. Хотя нормальные формы слегка изменятся, наложением подходящих связей систему можно заставить колебаться с любой исходной нормальной формой. Добавленная масса будет уменьшать частоту любой из этих исходных форм, если эта масса не попадает в точку нулевого смещения. Если теперь связи ослабить, то сдвиг частот, сопровождающий изменение форм колебаний, будет величиной второго порядка и общее уменьшение собственных частот все еще будет заметно.

Суммирование этого эффекта ведет к первому из перечисленных выше заключений. Аналогичное рассуждение, касающееся увеличения жесткости или потенциальной энергии, ведет ко второму заключению, указанному выше.

Для того чтобы пояснить третье утверждение, касающееся относительных положений собственных частот до и после прибавления массы и жесткости, допустим, что мы добавляем массу  $m$  в точке  $A$ , перемещение которой выражается через нормальные координаты в виде

$$q = \varphi_1(A) \xi_1 + \varphi_2(A) \xi_2 + \dots + \varphi_n(A) \xi_n. \quad (13-14)$$

Тогда кинетическая энергия будет равна

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{\xi}_1^2 + \dots + \frac{1}{2} M_n \dot{\xi}_n^2 + \frac{1}{2} m (\varphi_1 \dot{\xi}_1 + \varphi_2 \dot{\xi}_2 + \dots + \varphi_n \dot{\xi}_n)^2. \quad (13-15)$$

Выражение для потенциальной энергии системы остается неизменным. Если одновременно рассмотреть случай добавления жесткости  $K$  между точками системы  $A$  и  $B$  и использовать следующее обозначение:  $\varphi(A) - \varphi(B) = \varphi'$ , то выражение для кинетической энергии останется прежним, а потенциальная энергия примет вид

$$U = \frac{1}{2} M_1 \omega_1^2 \xi_1^2 + \dots + \frac{1}{2} M_n \omega_n^2 \xi_n^2 + \frac{1}{2} K (\varphi'_1 \xi_1 + \varphi'_2 \xi_2 + \dots + \varphi'_n \xi_n)^2. \quad (13-16)$$

Подстановка приведенных выше выражений в уравнение Лагранжа для свободных незатухающих колебаний системы

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad (13-17)$$

приводит к уравнениям движения модифицированной системы

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{\xi}_1 + m\varphi_1 (\varphi_1 \ddot{\xi}_1 + \varphi_2 \ddot{\xi}_2 + \dots + \varphi_n \ddot{\xi}_n) + M_1 \omega_1^2 \xi_1 + K\varphi'_1 (\varphi'_1 \xi_1 + \dots + \varphi'_n \xi_n) &= 0, \\ M_2 \ddot{\xi}_2 + m\varphi_2 (\varphi_1 \ddot{\xi}_1 + \varphi_2 \ddot{\xi}_2 + \dots + \varphi_n \ddot{\xi}_n) + M_2 \omega_2^2 \xi_2 + K\varphi'_2 (\varphi'_1 \xi_1 + \dots + \varphi'_n \xi_n) &= 0, \\ \vdots & \\ M_n \ddot{\xi}_n + m\varphi_n (\varphi_1 \ddot{\xi}_1 + \varphi_2 \ddot{\xi}_2 + \dots + \varphi_n \ddot{\xi}_n) + M_n \omega_n^2 \xi_n + K\varphi'_n (\varphi'_1 \xi_1 + \dots + \varphi'_n \xi_n) &= 0. \end{aligned} \quad (13-18)$$

Допуская существование синусоидального решения с частотой  $\omega$ , запишем уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} M_1 (\omega_1^2 - \omega^2) \xi_1 - m\omega^2 \varphi_1 (\varphi_1 \xi_1 + \dots + \varphi_n \xi_n) + K\varphi'_1 (\varphi'_1 \xi_1 + \dots + \varphi'_n \xi_n) &= 0, \\ M_2 (\omega_2^2 - \omega^2) \xi_2 - m\omega^2 \varphi_2 (\varphi_1 \xi_1 + \dots + \varphi_n \xi_n) + K\varphi'_2 (\varphi'_1 \xi_1 + \dots + \varphi'_n \xi_n) &= 0, \\ \vdots & \\ M_n (\omega_n^2 - \omega^2) \xi_n - m\omega^2 \varphi_n (\varphi_1 \xi_1 + \dots + \varphi_n \xi_n) + K\varphi'_n (\varphi'_1 \xi_1 + \dots + \varphi'_n \xi_n) &= 0. \end{aligned} \quad (13-19)$$

Положим, что добавленная жесткость  $K$  равна нулю, и умножим первое уравнение на  $\varphi_1/M_1(\omega_1^2 - \omega^2)$ , второе на  $\varphi_2/M_2(\omega_2^2 - \omega^2)$  и т. д. и сложим. Общий множитель  $(\varphi_1 \xi_1 + \dots + \varphi_n \xi_n)$  сократится, и в результате получим

$$1 - \frac{m\omega^2 \varphi_1^2}{M_1(\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{m\omega^2 \varphi_2^2}{M_2(\omega_2^2 - \omega^2)} + \dots + \frac{m\omega^2 \varphi_n^2}{M_n(\omega_n^2 - \omega^2)} = 0. \quad (13-20)$$

Переписывая это характеристическое уравнение для модифицированной системы, имеем

$$\begin{aligned} &M_1 M_2 M_3 \dots M_n (\omega_1^2 - \omega^2) (\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_n^2 - \omega^2) - \\ &- m\omega^2 \varphi_1^2 M_2 M_3 \dots M_n (\omega_2^2 - \omega^2) (\omega_3^2 - \omega^2) \dots (\omega_n^2 - \omega^2) - \\ &- M_1 m\omega^2 \varphi_2^2 M_3 \dots M_n (\omega_1^2 - \omega^2) (\omega_3^2 - \omega^2) \dots (\omega_n^2 - \omega^2) - \dots = 0. \end{aligned} \quad (13-21)$$

Первая строка является левой частью характеристического уравнения немодифицированной системы и равна нулю, когда  $\omega$  равна исходной собственной частоте, причем равны нулю также и все остальные члены, кроме одного. Знак этого члена определяет знак выражения. Заметим, что когда  $\omega = 0$ , выражение положительно, когда  $\omega = \omega_1$  — оно отрицательно, когда  $\omega = \omega_2$  — опять положительно и т. д. Следовательно, один корень уравнения (13-21) и поэтому одна собственная частота системы с добавленной массой лежит ниже  $\omega_1$ , следующая — между  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и все новые частоты системы — ниже исходных и чередуются с ними.

В качестве примера допустим, что к свободнонесущему крылу добавлен концевой топливный бак <sup>1)</sup>. Все новые собственные частоты будут ниже частот для свободного крыла, но, однако, будут чередоваться с ними независимо от величины массы концевого бака. Это легко проверить в предельном случае, сравнивая собственные частоты свободнонесущей однородной балки с частотами той же самой балки, шарнирно-опертой на свободном конце.

<sup>1)</sup> Хотя рассматриваемый здесь пример представляет непрерывную систему, которая в идеальном случае обладает бесконечным числом степеней свободы, результаты этого пункта можно применить к любому количеству низших форм, потому что непрерывную систему с любой степенью точности можно аппроксимировать системой с конечным числом степеней свободы.



Возвращаясь к уравнению (13-21), положим добавочную массу равной нулю и исследуем влияние добавленной жесткости. Характеристическое уравнение можно получить аналогичным путем, исключая член  $(\varphi'_1 \xi_1 + \varphi'_2 \xi_2 + \dots + \varphi'_n \xi_n)$ . Оно будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & M_1 M_2 M_3 \dots M_n (\omega_1^2 - \omega^2) (\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_n^2 - \omega^2) + \\ & + K (\varphi'_1)^2 M_2 M_3 \dots M_n (\omega_2^2 - \omega^2) (\omega_3^2 - \omega^2) \dots (\omega_n^2 - \omega^2) + \\ & + M_1 K (\varphi'_2)^2 M_3 \dots M_n (\omega_1^2 - \omega^2) (\omega_3^2 - \omega^2) \dots (\omega_n^2 - \omega^2) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (13-22)$$

В этом случае, когда  $\omega = 0$ , выражение положительно и продолжает оставаться положительным, когда  $\omega = \omega_1$ . Знак выражения меняется при более высоких частотах, что указывает на то, что собственные частоты выше собственных частот немодифицированной системы, но чередуются с ними. Интересно отметить, что переход от собственных частот балки со свободными концами к балке с защемленными концами можно представить как результат добавления на концах пружин с бесконечными жесткостями. В этом случае частоты балки со свободными концами, включая нулевую частоту, увеличиваются, тогда как аналогичные результаты были получены при добавлении массы, когда наблюдалось уменьшение частот.

Утверждения (6) и (7) можно проверить аналогичным способом, после того как выражения энергий будут видоизменены следующим образом. Для случая (7), в котором пружина присоединяется между фиксированной базой и точкой конструкции, в которой добавлена масса  $\varphi = \varphi'$ , выражения для энергий могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M_1 \dot{\xi}_1^2 + \dots + \frac{1}{2} M_n \dot{\xi}_n^2 + \frac{1}{2} m (\varphi_1 \dot{\xi}_1 + \dots + \varphi_n \dot{\xi}_n)^2, \\ U &= \frac{1}{2} M_1 \omega_1^2 \xi_1^2 + \dots + \frac{1}{2} M_n \omega_n^2 \xi_n^2 + \frac{1}{2} K (\varphi_1 \xi_1 + \dots + \varphi_n \xi_n)^2. \end{aligned} \quad (13-23)$$

В случае (6), для того чтобы описать движение массы относительно точки крепления, нужно ввести другую координату  $x$ . Так как кинетическая энергия массы должна быть отнесена к фиксированному уровню, выражения для энергий примут вид

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{\xi}_1^2 + \dots + \frac{1}{2} M_n \dot{\xi}_n^2 + \frac{1}{2} m (\varphi_1 \dot{\xi}_1 + \dots + \varphi_n \dot{\xi}_n + \dot{x})^2, \quad (13-24)$$

$$\ddagger U = \frac{1}{2} M_1 \omega_1^2 \xi_1^2 + \dots + \frac{1}{2} M_n \omega_n^2 \xi_n^2 + \frac{1}{2} K x^2. \quad (13-25)$$

Доказательство утверждения (4) сводится к доказательству утверждения (7), приведенному выше, если отправляться от системы с  $(n+1)$  степенями свободы и представлять подавление одной степени свободы в виде алгебраического соотношения между нормальными координатами. Используя это соотношение, можно исключить  $\xi_{n+1}$ . В результате получим

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{\xi}_1^2 + \dots + \frac{1}{2} M_n \dot{\xi}_n^2 + \frac{1}{2} M_{n+1} (A_1 \dot{\xi}_1 + \dots + A_n \dot{\xi}_n)^2, \quad (13-26)$$

$$U = \frac{1}{2} M_1 \omega_1^2 \xi_1^2 + \dots + \frac{1}{2} M_n \omega_n^2 \xi_n^2 + \frac{1}{2} M_{n+1} \omega_{n+1}^2 (A_1 \xi_1 + \dots + A_n \xi_n)^2. \quad (13-27)$$

Доказательство утверждения (5) вытекает из утверждения (4), если показать для рассмотренной системы, что получается, когда добавленная степень свободы подавляется

**13-4. Аэроупругий эксперимент при установившемся состоянии.** В этом пункте мы будем рассматривать экспериментальное исследование в присутствии воздушного потока, характер которого является в основном установившимся или не колебательным. В эту категорию входят эксперименты по определению распределения нагрузки по поверхности конструкции, эффективности управления, скорости движения крена, дивергенции и производных, характеризующих устойчивость. Ограничим наше исследование почти целиком техникой испытаний на моделях, поскольку техника летных испытаний в этой области хорошо известна. Техника модельных испытаний, следуя общему направлению развития аэроупругости в нашу эпоху высокоскоростных полетов, усложняется и приобретает все большее значение.

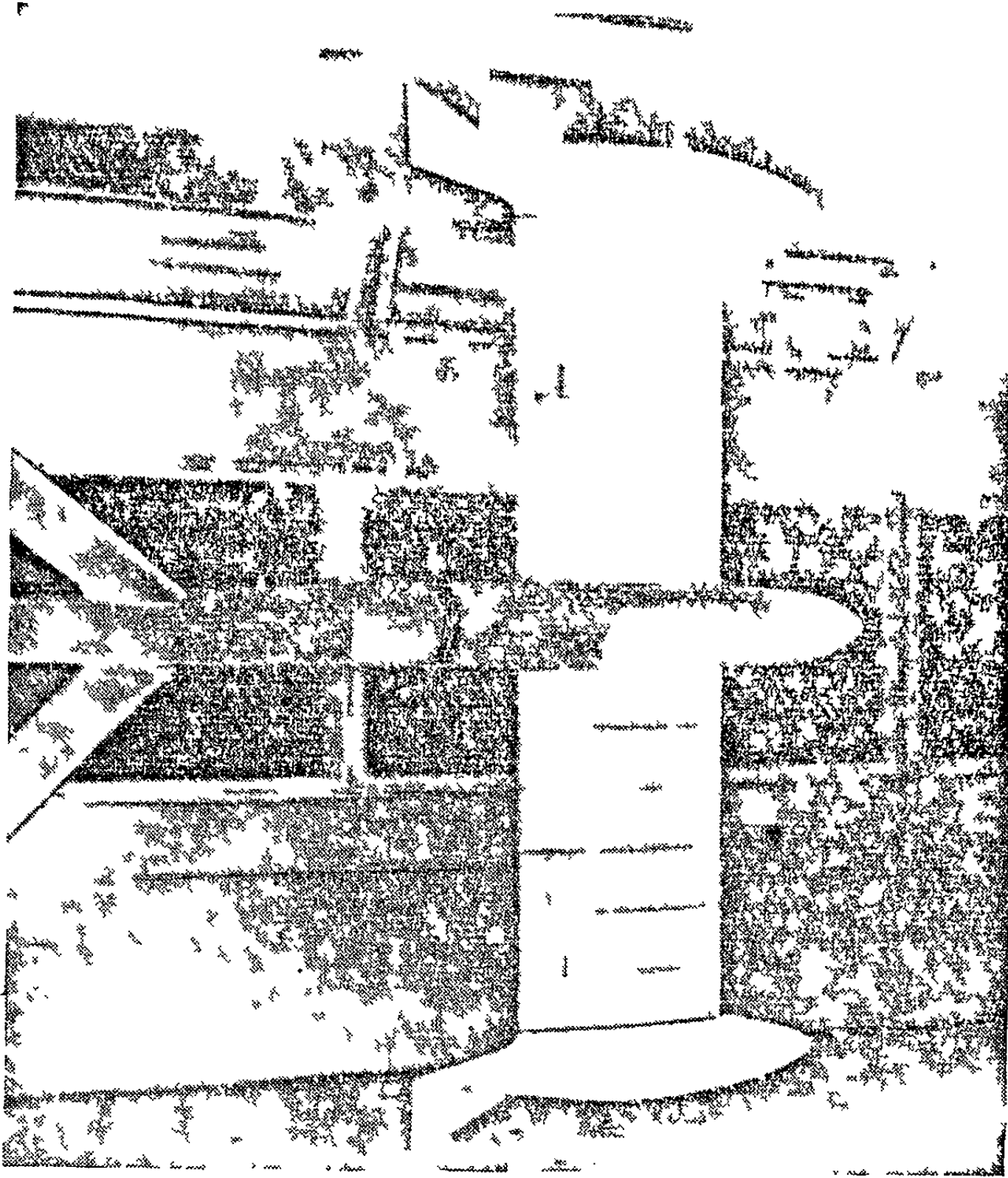
Все упомянутые выше задачи аэроупругости имеют ту общую черту, что касаются вопроса упругих деформаций, обусловленных воздушными нагрузками, и последующих изменений воздушных нагрузок, до тех пор пока не будет достигнуто состояние равновесия. Модель должна воспроизводить аэродинамическую форму самолета, распределение жесткости и отношение упругой жесткости к аэродинамической. Она должна помещаться в такой поток воздуха, в котором число Рейнольдса было бы по возможности наибольшим. Если же необходимо воспроизвести и влияние сжимаемости, то число Маха потока должно быть равно числу Маха природы. Распределения массы и веса воспроизводить не нужно, но они должны быть такими, чтобы предотвратить флаттер в пределах опыта. Линейный масштаб фиксируется отношением предполагаемых размеров модели к размерам самолета. Масштаб сил определяется линейным масштабом и отношением динамического давления в натуре к динамическому давлению, которое может быть получено при испытаниях модели.

Если влияние сжимаемости не воспроизводится, то модели обычно испытываются на сравнительно малых скоростях и, следовательно, должны обладать соответствующей гибкостью. Если модельные испытания проводятся при натурном числе Маха, то динамическое давление достаточно велико и модель должна быть жесткой. Прочность моделей для малых скоростей обычно больше прочности самолета, тогда как для высокоскоростных моделей справедливо обратное. В обоих случаях обычно используются сравнительно простые модели (п. 12-2).

Двумя наиболее простыми методами испытания этих моделей являются испытания в соответствующей аэродинамической трубе или в свободном полете на испытательном аппарате с ракетным двигателем. Если обратиться сначала к моделям, предназначенным для испытаний на малых скоростях в аэродинамической трубе, то обнаружим, что система стандартной подвески модели должна быть изменена. Если мы хотим использовать весовую систему аэродинамической трубы для измерения суммарных сил и моментов, то она должна быть связана с моделью таким образом, чтобы позволить ей упруго деформироваться. Для того, чтобы оценить влияние аэроупругости, опыты обычно охватывают по возможности наибольший диапазон динамических давлений. Этот диапазон часто сильно ограничивается снизу неспособностью весовой системы точно измерять нижние уровни сил и моментов [13-5]. Измерение величин, подобных силам и моментам, распределенным по размаху, можно просто осуществить на секционных однолонжеронных моделях, размещая датчики сопротивления вдоль лонжерона; при такой конструкции все воздушные нагрузки на данное сечение крыла непосредственно передаются на лонжерон [13-6].

Интересно попутно отметить, что первый эксперимент с упругой моделью оказывает сильное впечатление на персонал, обслуживающий аэродинамическую трубу. Упругая модель очень наглядно иллюстрирует многие несовершенства воздушного потока в рабочей части трубы. Аналогичным образом модель, имеющая возможность при исследовании движения крена вращаться вокруг продольной оси (фиг. 13-18), является поразительно чувствительным индикатором к закрутке воздушного потока.

Жесткая подвеска и внутренняя система чувствительных элементов типичной высокоскоростной аэродинамической трубы хорошо приспособлены для испытания упругих моделей. Наиболее серьезной трудностью является сравнительная слабость моделей. С одной стороны, трудность заключается в том, что модели должны выдерживать пусковые нагрузки сверхзвуковых труб; с другой стороны, серьезным ограничением является также неспособность моделей противостоять воздушным нагрузкам на больших углах атаки.



Фиг. 13-18. Однолонжеронное секционное крыло с отклоняемыми элеронами, которое может вращаться с постоянной скоростью крена.

Использование ракетных аппаратов для испытания упругих моделей особенно выгодно при трансзвуковом режиме скоростей. Отсутствие стенок аэродинамической трубы, плавность и однородность воздушного потока компенсируют невыгоды, вызванные необходимостью проведения измерений на малой, удаленной и быстро движущейся системе.

**13-5. Динамические аэроупругие испытания в натуре.** Обратимся теперь к динамическим аэроупругим опытам и рассмотрим сначала испытания на полномасштабном самолете. Наиболее важные из этих испытаний предназначаются для исследования вероятных условий флаттера, оценки динамической устойчивости и реакции на порывы ветра и определения границ бафтинга. Точнее говоря, эти испытания могут быть разделены на две категории, согласно их основному назначению. К первой категории относятся испытания на флаттер и динамическую устойчивость, касающиеся характеристик устойчивости самолета. Вторая категория включает реакцию на порыв ветра и испытания на бафтинг, которые главным образом предназначены для оценки прочности самолета.

(а) *Летные испытания на флаттер.* Рассматривая в первую очередь задачи, связанные с летными испытаниями на флаттер [13-7], следует отметить, что обычно имеют дело с прототипом самолета, испытания которого должны быть завершены возможно быстрее. Однако такие самолеты стоят огромных затрат как средств, так и времени, и поэтому их не следует подвергать опасностям, которые можно избежать. Тот факт, что летные испытания на флаттер могут быть очень опасны даже при осторожном подходе, подтверждается несколькими несчастными случаями, происшедшими в процессе таких испытаний. Во многих случаях испытания должны проводиться вблизи предельных проектных скоростей, которые достигаются самолетом в первый раз, так как действительное проявление флаттера может привести к разрушению конструкции. В некоторых случаях оказывается выгодным изменить конструкцию опытного самолета, чтобы уменьшить вероятность наступления флаттера. Для того чтобы определить поведение немодифицированного самолета, это новое стабилизирующее влияние изменения конструкции можно устранить из результатов испытаний аналитическим путем. Конечно, вероятность наступления флаттера, за исключением низшей формы флаттера триммера или рулевой поверхности, невелика благодаря многим предупредительным мерам, принятым конструктором в результате аналитических исследований и модельных испытаний. Тем не менее вероятность такого случая нельзя упускать из виду. Таким образом, процесс испытания должен основываться на следующих принципах.

(1) Испытания должны проводиться по возможности быстро, без излишне большого элемента опасности.

(2) Приближение к критическому условию флаттера должно распознаваться по наблюдению докритической реакции.

(3) Должны использоваться такие средства возбуждения, которые допускают полное наблюдение за докритической реакцией самолета.

(4) Добавляемая масса экспериментального оборудования не должна располагаться таким образом, чтобы увеличивать вероятность опасного флаттера.

Использующиеся и предполагаемые средства возбуждения меняются в широких пределах от просьбы к пилоту потрясти или толкнуть управление до установки сложного и дорогостоящего возбуждающего оборудования, весящего много сотен фунтов. Частная схема, подходящая к данному случаю, зависит от вероятности и ожидаемой серьезности флаттера, от той части самолета, которая охватывается флаттером, от требуемого диапазона частот, от средств и времени, отпускаемых на летные испытания, и от параллельного проведения аналитических исследований или модельных испытаний. Наиболее важные методы испытаний с их преимуществами и недостатками описаны в следующих пунктах.

*Возбуждение с помощью возмущения системы управления.* Этот метод используется во многих случаях, в которых, чтобы доказать отсутствие флаттера, необходимо провести лишь беглое исследование. Метод может иметь разнообразные формы. В случае систем с ручным управлением пилот, как упоминалось выше, может „сообщить импульс“, толкнуть или резко дернуть ручку управления и возбудить формы колебания с частотой 6 или 7 колебаний в секунду. Если на самолете установлен автопилот, то к нему может быть присоединен простой источник сигналов, для того чтобы создавать ударные или синусоидальные возбуждения примерно в том же диапазоне частот. Для самолетов, у которых рулевые поверхности приводятся в движение специальными двигателями, могут быть успешно применены аналогичные генераторы сигналов с низким уровнем мощности вплоть до частот приблизительно от 10 до 12 колебаний в секунду, что зависит от характеристик сервомоторов. В систему этого типа легко вводятся различные улучшения, такие, например, как приспособления для симметричного и антисимметричного возбуждений с помощью элеронов. Однако с помощью существующих или специально видоизмененных систем

Можно легко проверить, что решение уравнения (8-102) в замкнутой форме, удовлетворяющее граничным условиям  $\theta(0) = \theta'(l) = 0$ , имеет вид

$$\theta(y) = \frac{1}{\lambda^2} \left( \lambda^2 \frac{p}{U} + k_1 \dot{p} \right) \left( y - \frac{\sin \lambda y}{\lambda \cos \lambda l} \right) - k_2 \left[ 1_a(y) (1 - \cos \lambda (y - l_1)) - \frac{\sin \lambda (l - l_1)}{\cos \lambda l} \sin \lambda y \right] \beta, \quad (8-103)$$

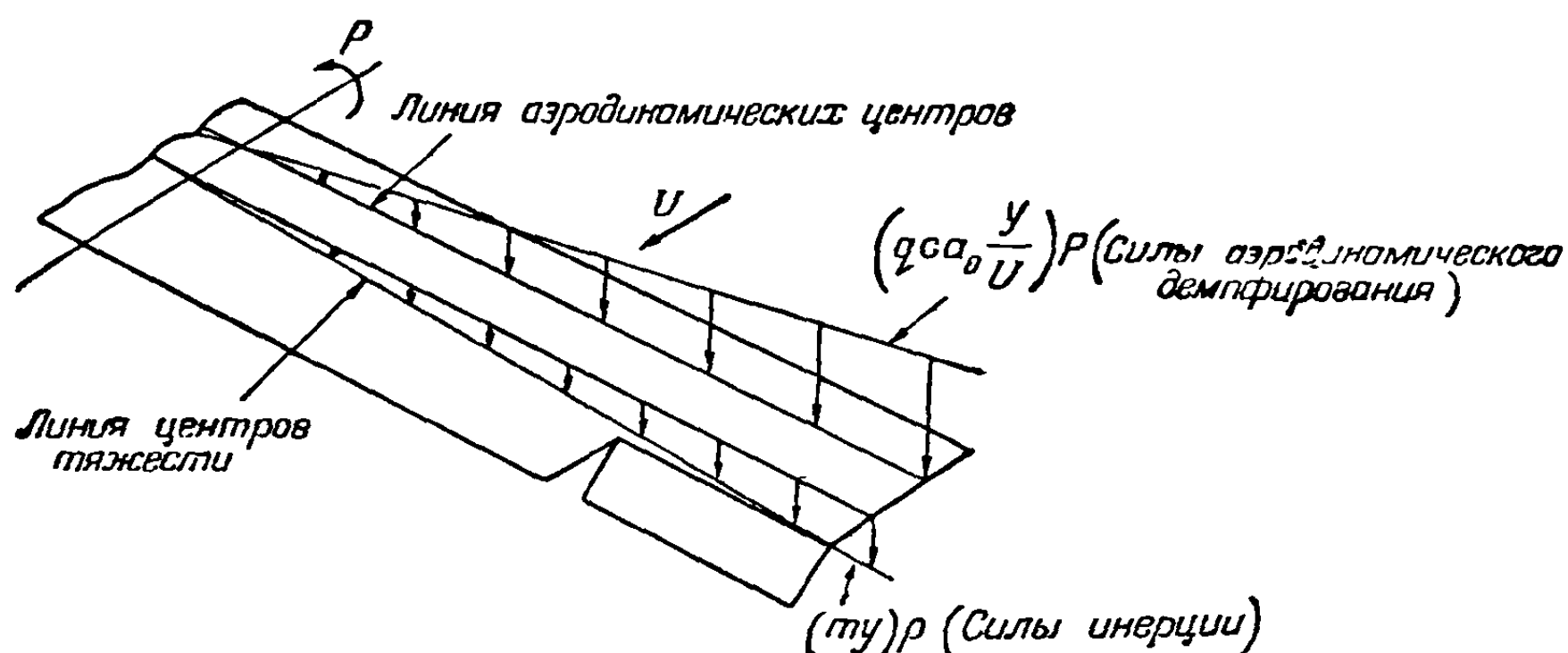
где  $\cos \lambda (y - l_1) = 0$ , когда  $y < l_1$ . Следовательно, для однородного крыла, в обозначениях уравнения (8-94), имеем следующие соотношения

$$C_1(y) = -k_2 \left[ 1_a(y) (1 - \cos \lambda (y - l_1)) - \frac{\sin \lambda (l - l_1)}{\cos \lambda l} \sin \lambda y \right], \quad (8-104)$$

$$C_2(y) = \left( \frac{y}{l} - \frac{\sin \lambda y}{\lambda \cos \lambda l} \right), \quad (8-105)$$

$$C_3(y) = \frac{k_1}{\lambda^2} \left( y - \frac{\sin \lambda y}{\lambda \cos \lambda l} \right). \quad (8-106)$$

Антисимметричное распределение подъемной силы, обусловленное упругим закручиванием, определяется из уравнения (8-95). Для случая, когда теория

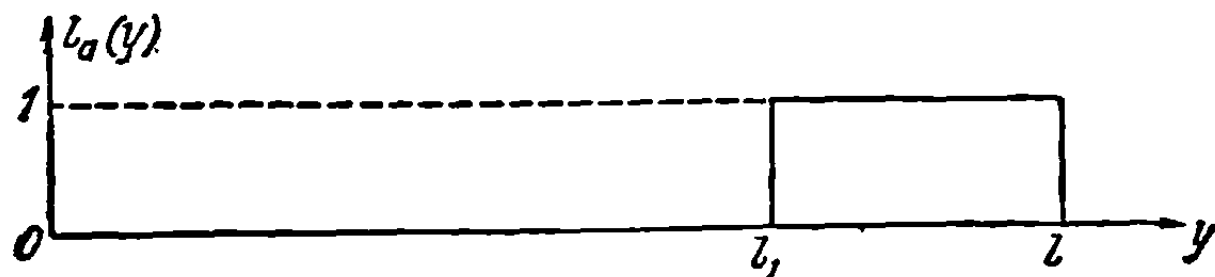


Фиг. 8-13. Силы демпфирования и силы инерции на крыле, совершающем движение крена

несущей полосы применена к однородному крылу, уравнение (8-95) упрощается:

$$c c_i^r(y) = a_0 c C_1(y) \beta + a_0 c C_2(y) \frac{p l}{U} + a_0 c C_3(y) \dot{p}, \quad (8-107)$$

где  $C_1(y)$ ,  $C_2(y)$  и  $C_3(y)$  определяются соответственно равенствами (8-104), (8-105) и (8-106). Уравнение (8-107) может быть использовано для расчета



Фиг. 8-14. Ступенчатая функция, используемая при представлении сил и моментов, действующих на элерон.

распределения нагрузки по размаху, обусловленной упругим закручиванием для любых заданных значений  $\beta$ ,  $p l / U$  и  $\dot{p}$ .

**Внезапное отклонение элерона.** Предположим, например, что хотят найти распределение подъемной силы на однородном крыле в результате внезапного отклонения элерона на угол  $\beta$ . Возникающее в начале движения ускорение до



производится серия рейсов при постоянной частоте. За счет усложнения и без того очень сложного оборудования можно уменьшить время опыта, планируя медленное продвижение через диапазон частот.

Тип синусоидального вибратора, о котором часто говорят, но который редко применяют, представляет собой некоторую массу, которую с помощью либо механических, либо электромагнитных средств заставляют линейно колебаться по отношению к самолету. В случае электромагнитного привода часто предлагается использовать в качестве колеблющейся массы тяжелую катушку электромагнита вместе с ее железным кожухом. Так как использование необходимой массы в этой схеме в смысле образования возбуждающей силы менее эффективно, чем в схеме с вращающимися дисбалансами, то обычно предпочитается эта последняя схема.

В качестве средств возбуждения, которые в диапазоне малых частот могут давать синусоидальный крутящий момент, предельная величина которого пропорциональна частоте возбуждения, применяются также вращающиеся маховики, но способ применения отличается от указанного выше. В этом методе маховик вращается с очень большой постоянной угловой скоростью вокруг оси, перпендикулярной к плоскости крыла (в случае установки на крыле). Он укрепляется на кардановом подвесе, вращающемся около продольной оси, так, чтобы момент, стремящийся закрутить крыло, можно было передать от маховика к крылу. Эти крутящие моменты образуются за счет того, что к карданову подвесу через линейный возбудитель прикладывается синусоидально изменяющееся усилие, стремящееся повернуть его вокруг продольной оси. С помощью вращающегося маховика этот крутящий момент преобразуется в момент, скручивающий крыло. Амплитуда момента кручения ограничивается амплитудой углового колебания маховика около продольной оси, которая в свою очередь определяется свободным пространством около установки. Этот момент является также функцией угловой скорости, инерции маховика и величины крутящего момента, подводимого к колесу. Верхняя граница частоты возмущения определяется главным образом характеристиками приспособления, которое используется для образования крутящего момента, передаваемого маховику.

*Случайное возмущение.* Бичом всех упомянутых до сих пор методов является наличие неизбежных случайных „мазков“, затрудняющих получение необходимых данных. Большая часть этих мазков обуславливается реакцией самолета на турбулентность воздуха, и по этой причине испытания часто производятся в „свободные от турбулентности“ ранние утренние часы. С ростом технических приложений методов статистического анализа, особенно в области турбулентности, бафтинга и реакций на порыв ветра, оказывается очень выгодным использовать при летных испытаниях на флаттер в качестве источника возбуждения саму атмосферную турбулентность. Вместо борьбы за сведение к минимуму влияния турбулентности можно использовать турбулентности в своих собственных интересах.

Если известны определенные статистические характеристики воздействующего на самолет турбулентного потока и возникающего вследствие этого движения крыла, то с помощью этого метода можно рассчитать кривую частотной реакции самолета, аналогичную той, которая получается методом синусоидальных возбуждений (см. гл. 10 и [13-8]). Из картины изменения во времени входных и выходных величин, носящих существенно случайный характер, можно получить автокорреляционные функции. Как для выхода, так и для входа эти функции можно представить в виде кривой зависимости спектральной плотности энергии от частоты. Отношение ординат кривых для входа и выхода равно квадрату ординаты кривой, изображающей частотную характеристику самолета. Если картины изменения по времени для входа и выхода измерены одновременно, то можно найти кривые перекрестной корреляции и перекрестной спектральной плотности, которые позволяют определить как фазовые, так и амплитудные характеристики частотной реакции самолета.



Основная трудность этого метода заключается в невозможности контроля амплитудных и частотных характеристик входной турбулентности. Есть некоторые указания на то, что в большинстве случаев свободная турбулентность имеет приблизительно одинаковую спектральную плотность, и поэтому, возможно, в каждом частном случае опытов нельзя пытаться отыскать турбулентность такого рода, которая связана с требуемым диапазоном частот. Тем не менее возможность летного испытания на флаттер без изготовления специального возбуждающего оборудования очень заманчива.

Другой трудностью является измерение характеристик турбулентности по мере приближения ее к самолету. Колеблющийся и совершающий резкие движения самолет, который своим движением возмущает поле течения на некотором расстоянии впереди себя (при дозвуковой скорости полета), оказывается не очень удобной системой отсчета. Однако усилия, которые делаются в настоящее время в направлении разрешения задачи теми научными работниками, которые интересуются влиянием турбулентности и порывов ветра на напряжения в крыле, на системы управления ракетами и самолетами и на проблему усталости, обещают дать хорошие результаты.

*Наблюдение и объяснение.* Весь подход к проблеме измерения и интерпретации данных, полученных при летном испытании на флаттер, определяется тем коротким промежутком времени анализа, который имеет инженер в своем распоряжении. Из ряда данных при некоторой заданной скорости полета он должен быстро сделать заключение о том, опасно или не опасно переходить к другому опыту на большей скорости. В простой обстановке, когда не ожидается серьезного флаттера и когда достаточен метод возбуждения ручкой управления, инженер, если он летит на самолете, может в качестве „датчиков“ использовать свои собственные чувства и положиться на свой опыт и интуицию. Однако при определении возможной опасности флаттера требуются более точные методы.

В случае импульсивного возбуждения реакция самолета выражается в виде частот и скоростей затухания различных форм колебаний, составляющих реакцию. В принципе приложенный импульс возбуждает все формы и, таким образом, только одна запись реакции дает полное описание устойчивости самолета. На практике, однако, это не имеет места по множеству причин. Положение, продолжительность и тип импульса служат для того, чтобы выделить некоторые формы за счет других. Амплитудная и частотная характеристики „мазка“<sup>1)</sup> так же, как расположение и частотные характеристики датчиков, стремятся подавить и внести искажение в записи результатов. Эти эффекты могут быть сведены к минимуму как соответствующим выбором продолжительности импульса и аккуратным размещением датчика, так и использованием аналитических методов исследования и исследований на моделях, для того чтобы *заранее* описать то докритическое поведение, которое можно ожидать. В процессе напряженной программы летных испытаний на флаттер большого тела трудно переоценить пользу данных о вероятной субкритической реакции самолета на специальные применяемые в данном случае средства возбуждения. Нужно использовать каждое средство для того, чтобы свести к минимуму поглощающий время процесс анализирования записей и ускорить процесс технического истолкования результатов и принятия решения.

В случае синусоидального возбуждения аналогичный анализ в форме отношений частот и коэффициентов демпфирования может быть быстро проделан для данной воздушной скорости, если записи затухания сделаны описанным ниже образом. Частота возбуждения варьируется до тех пор, пока реакция не укажет на появление резонанса. Тогда возбуждение внезапно снимается и наблюдается затухание колебаний. Этот процесс повторяется при всех интересующих исследователя резонансных пиках. Во многих случаях этот метод может дать

<sup>1)</sup> Или всплеска. — *Прим. ред.*

лучшие результаты, нежели импульсное возбуждение. Однако он редко используется по двум причинам. Во-первых, он требует серьезного инженерного решения в очень сложных полетных условиях. Во-вторых, если установлены синусоидальные вибраторы, то их лучше использовать для того, чтобы примерно в тот же промежуток времени испытаний в полете получить полную частотную реакцию при заданной воздушной скорости. Эти кривые частотной реакции связывают фазу и частоту синусоидальной реакции в тщательно выбранной на самолете точке с возмущением на входе в виде функции частоты. Интерпретации результатов можно помочь различными графическими методами. Кривые, выражающие амплитуду реакции на единицу амплитуды возбуждения в зависимости от частоты и фазу реакции в функции от частоты для каждой скорости испытания, позволяют быстро оценить тенденции к флаттеру, особенно в тех случаях, когда эти кривые можно сравнить с аналогичными кривыми, полученными из аналитических исследований или испытаний моделей. Несколько более мощным графическим методом для этой цели является полярная диаграмма амплитуды возбуждения, приходящейся на единицу амплитуды реакции при постоянной скорости потока воздуха [13-9]. В этом случае приближение кривых для больших скоростей к началу координат указывает на уменьшение устойчивости. Иногда выгодно использовать логарифмические шкалы [13-10].

(b) *Динамическая устойчивость, реакция на порыв ветра и баффтинг.* Поскольку эффекты аэроупругости не имеют первостепенного значения при натуральных исследованиях динамической устойчивости, мы только вкратце остановимся на этом вопросе. Основное различие между летными испытаниями на динамическую устойчивость и испытаниями на флаттер (первые касаются докритической устойчивости, последние имеют дело с управляемым приближением к критической неустойчивости) находит выражение в методах, используемых при испытаниях. При испытании на динамическую устойчивость чувства спешки и опасности в значительной степени отсутствуют и результаты опытов могут быть исследованы на досуге, после того как завершена серия испытаний. В этом случае можно применять более сложные методы исследования и испытания могут охватывать большой диапазон чисел Маха, полетных весов и распределений масс.

Такая полнота стала необходимой только с появлением понятий „систем“ в связи с проектированием автопилотов и автоматических систем управления. Для того чтобы обеспечить соответствующий подбор автопилота к самолету, мы должны знать для всего летного диапазона как динамические, так и установившиеся характеристики „черного ящика“, представляющего самолет. Техника эксперимента в основном остается такой же, как и при летном исследовании флаттера, за исключением того обстоятельства, что в данном случае редко возникает необходимость устанавливать специальные системы возбуждения. Частоты колебаний, важные с точки зрения динамической устойчивости, хорошо согласуются с возможностями сервомоторов систем управления.

Однако и в этом случае некоторые эффекты аэроупругости могут иметь важное значение. Несмотря на то, что частоты упругих колебаний могут быть значительно выше частот колебаний, характеризующих динамическую устойчивость, самолетная конструкция изгибается и закручивается под действием воздушных и инерционных нагрузок. Этот эффект может оказывать сильное влияние на размещение датчиков и интерпретацию их сигналов. В случаях больших упругих самолетов частоты упругих колебаний могут быть очень низкими и движение, характеризующее динамическую устойчивость, может быть больше похоже на докритический флаттер, существенным образом связанный с движением самолета как твердого тела. Особенно в этих последних случаях автоматическая система управления может еще больше осложнить положение вследствие того, что ее частотные возможности могут простирались и в диапазон частот упругих колебаний, что может явиться причиной усиления аэроупругих эффектов [13-11].

Натурные исследования реакции на порывы ветра по различным причинам еще слабо развиты. Во-первых, существующие методы исследования реакции на порывы ветра в сочетании с другими расчетными критериями весьма успешно служили для целей предотвращения поломок конструкции при полете в турбулентном потоке воздуха. Таким образом, обширный летный эксперимент был не нужен. Во-вторых, еще не были развиты удовлетворительные методы измерения и объяснения порывистости воздуха, которую встречает самолет [13-8]. Растущая потребность в лучших методах анализа и более совершенных критериях для реакции на порывы ветра на больших упругих самолетах с высокими летными характеристиками в соединении с распространением знаний и использованием статистических методов исследования обуславливает необходимость развития в ближайшем будущем соответствующих методов летных испытаний. Тесная связь между реакцией на порывы ветра и бафтингом и важность последнего при трансзвуковом полете также стимулируют такое развитие.

Развитию методов летных испытаний сильно способствовали и конструкторы автоматических систем управления, которые должны были получать системы с оптимальными характеристиками как в беспокойном, так и в спокойном воздухе.

**13-6. Динамические аэроупругие испытания на моделях.** Испытание динамических моделей представляет собой быстро развивающуюся область знаний. Неспособность многих методов теоретического исследования дать точные предсказания для диапазона больших скоростей и для постоянно увеличивающегося разнообразия форм самолета привела к большой потребности в экспериментальных исследованиях. В области динамической устойчивости самолета сильным стимулом развития является требование точного описания характеристик самолета, выставляемое инженерами систем наведения и управления. При исследовании флаттера монтаж больших массивных деталей на лишь слегка подкрепленных крыльях сильно ухудшает и без того трудное положение. Использование моделей при динамическом испытании уже дало очень полезные результаты и много обещает в будущем. Цель этого пункта состоит в том, чтобы исследовать фундаментальные принципы, лежащие в основе многих уже развитых методов.

Имеются два принципиально различных подхода к использованию моделей в динамических задачах. При одном подходе испытания модели предназначены для определения коэффициентов дифференциального уравнения, описывающего задачу. Решения при этом получаются численными методами. При другом подходе испытание модели является аналогом полноразмерной задачи и предназначено для непосредственного ее решения. Модели могут воспроизводить такие части самолета, как, например, крылья или хвостовое оперение, а также целые самолеты. Они могут укрепляться в аэродинамических трубах, на ракетных аппаратах, на бомбах, бросаемых с большой высоты, на тележках, скользящих по горизонтальным путям, помещаться в отдельных областях потока на испытуемом самолете или в ударных трубах. Они могут даже представлять собой настоящие летающие модели. Каждая схема имеет свои присущие ей преимущества и недостатки, так же как и обычные задачи возбуждения, крепления и измерения.

Для того чтобы получить необходимую перспективу для исследования основ испытания, рассмотрим общую задачу динамического поведения упругого самолета в свободном полете. Высокочастотную составляющую этого упругого устойчивого движения мы будем связывать с явлением флаттера, а составляющую движения свободного тела, обладающую низкой частотой, — с явлением реакции и динамической устойчивости. Реакция на порывы ветра и нагрузки при посадке относятся скорее к вопросу прочности, нежели к вопросу устойчивости самолета. Перейдем теперь к рассмотрению различных методов испытаний в связи с их способностью освещать многие неясные места в этой общей задаче.

(а) *Определение коэффициентов в аэродинамической трубе.* По-видимому, наиболее важные методы исследования основаны на использовании аэродинамической трубы для создания потока воздуха около модели. Однако рабочая часть аэродинамической трубы должна обеспечивать не только приемлемые граничные условия для воздушного потока, но также и подходящие средства крепления модели. Если мы обратим сначала внимание на испытания, предназначенные для определения коэффициентов уравнений, описывающих движение, то увидим, что в обычном случае потребные данные включают измерение аэродинамических реакций колеблющихся жестких поверхностей и тел. Эти жесткие модели либо вынуждаются к специфическому синусоидальному движению, либо им сообщается некоторое возмущение, для того чтобы наблюдать потом затухающие колебания. Испытания подобного рода всегда становятся более трудными по мере роста потребных частот колебаний. Эти частоты диктуются сохранением чисел Рейнольдса во всем желаемом диапазоне приведенной частоты, имеющем по крайней мере порядок  $4 \times 10^5$  (для самолетов, за исключением, может быть, лопаток турбин, лопастей винтов и некоторых ракет).

При испытании на малых скоростях возбуждение модели может осуществляться с помощью жестких звеньев, присоединенных к системам с соответствующим механическим приводом [13-12, 13-13, 13-14, 13-15]. В этом случае можно измерять либо суммарные силы и моменты, либо распределение давлений. Суммарные силы и моменты определяются с помощью измерения давления модели на ее опоры чувствительными датчиками сопротивления и измерения изменений затрачиваемой мощности привода. Колебания давления могут измеряться с помощью установки соответствующего датчика внутри крыла [13-16]. В любом случае очень трудно исключить влияние на результаты измерений высоких ускорений, которым подвержены модель и измерительная аппаратура.

При испытаниях на больших скоростях потребные частоты очень велики и вследствие больших скоростей испытания и меньших размеров моделей сохранить приведенную частоту не представляется возможным. Становится очень трудно строить жесткие модели и еще труднее изготовлять механизмы, чтобы приводить их в движение. В этих случаях в систему крепления и привода полезно вводить упругие элементы, для того чтобы собственная частота модели на державке находилась в диапазоне частот опыта. Тогда, чтобы получить соответствующую амплитуду колебаний вблизи резонанса, достаточно сравнительно небольшой возбуждающей силы. Проблемы точного контролирования частоты и амплитуды при этих условиях представляют достаточную трудность и наилучшим образом могут быть разрешены с помощью подходящей системы с обратной связью, учитывающей разницу между желаемым и действительным движениями модели [13-17]. Очень высокие частоты опыта также усложняют задачу измерения. Измерение реакций модели или изменений в затрачиваемой мощности менее практичны вследствие сильного уменьшения отношения аэродинамических сил к силам инерции. В этом случае по возможности должны быть использованы методы прямого исследования потока. Они могут включать измерение давления с помощью датчиков, установленных в теле модели или в стационарном зонде вблизи нее. В известных случаях для измерения применяются также и интерферометры.

Техника крепления и возбуждения модели при испытаниях на больших скоростях, описанная выше, оказывается наиболее простой в том случае, когда модели крепятся не на державках, которые обычно имеются в высокоскоростных аэродинамических трубах, а на стенке трубы. Вследствие гибкости державки и большого расстояния между источником мощности и моделью трудно заставить модель совершать заданное движение. Задача несколько облегчается, если упругость стойки не препятствует, а способствует передаче заданного движения. Таким образом, если модель должна совершать чистое движение тангажа около своего центра тяжести, то гибкость державки должна быть подобрана таким



образом, чтобы собственная форма колебаний системы державка — модель имела узел в центре тяжести модели и частота ее колебаний находилась в середине исследуемого диапазона частот.

(b) *Влияние стенок аэродинамической трубы.* Модели, применяемые при динамических испытаниях в аэродинамической трубе, должны иметь такие размеры, чтобы влияние стенок было приемлемо малой величиной. При испытаниях на сверхзвуковых скоростях модель должна быть достаточно мала для того, чтобы возмущения, исходящие от модели, сносились вниз по потоку от модели до того, как они достигли стенки и отразились от нее. В дозвуковом потоке интерференция никогда не может быть равна нулю и является сложной функцией размеров трубы, размеров и формы модели, числа Маха и приведенной частоты. При очень низкой приведенной частоте интерференция может быть определена для квазиустановившегося состояния на основе поправочных коэффициентов для установившегося состояния. При высоких частотах можно ожидать резонансного эффекта, если время, за которое возмущения распространяются от модели к стенке и обратно, равно как раз половине периода колебаний. В двумерном потоке [13-18], когда модель расположена посередине между параллельными стенками, эта резонирующая частота  $\omega$  выражается через высоту рабочей части трубы  $H$ , скорость звука  $a$  и число Маха в виде

$$\frac{\omega H}{a} = \pi \sqrt{1 - M^2}. \quad (13-28)$$

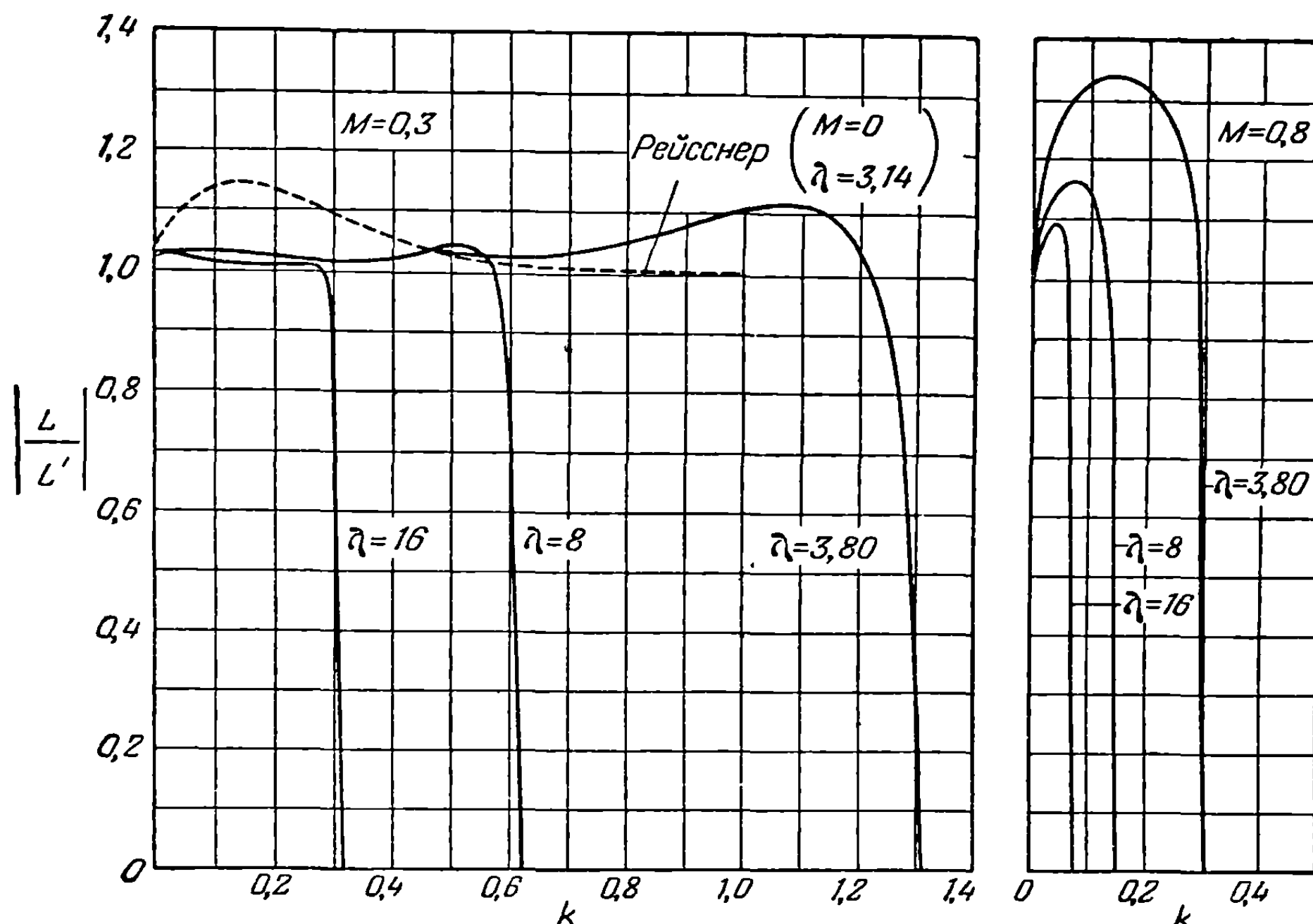
Это соотношение, определяющее наступление резонанса, может быть выражено также через приведенную частоту, число Маха и отношение высоты рабочей части к хорде модели ( $\lambda = H/2b$ )

$$\frac{M}{\sqrt{1 - M^2}} k\lambda = \frac{\pi}{2}. \quad (13-29)$$

При промежуточных частотах дозвуковая интерференция на практике может быть грубо оценена по результатам для двумерного потока, подобным тем, которые приведены на фиг. 13-19. Здесь нанесена зависимость отношения подъемной силы для движения тангажа (около середины хорды) к величине подъемной силы в свободном потоке от приведенной частоты для различных чисел Маха и отношений высоты трубы к хорде модели. По мере роста числа Маха влияние стенок становится более заметным и может оказаться достаточно большим даже при частотах, весьма удаленных от частоты резонанса. Увеличение высоты трубы уменьшает влияние стенок, но уменьшает также и резонансную частоту.

(c) *Воспроизведение свободного полета в аэродинамической трубе.* Рассмотрим теперь использование аэродинамической трубы при динамических испытаниях, цель которых состоит не в измерении коэффициентов, а в решении уравнений, описывающих движение. Обратимся к достаточно трудной общей задаче воспроизведения динамического поведения упругого самолета в свободном полете и рассмотрим в последующих пунктах более простые частные случаи. Рабочая часть аэродинамической трубы и связанные с ней приборы не должны оказывать на модель заметного влияния, которого не должно было бы быть в свободном полете. Таким образом, модель должна быть достаточно мала для того, чтобы свести к минимуму влияние стенок и оставить необходимое пространство для соответствующих отклонений от прямолинейного горизонтального полета. Должны иметься средства имитации тяги, позволяющие прикладывать к модели силу, которая либо не зависит от движения модели, либо является заданной функцией скорости. Поскольку обычно при правильном моделировании массы вес правильно не моделируется (п. 11-7), то для того, чтобы заставить модель лететь в том положении и при том коэффициенте подъемной силы, которые соответствуют горизонтальному полету, к модели должна быть приложена вертикальная сила, совершенно независимая от движения модели. Для

большинства моделей для низких скоростей необходимо прикладывать силу, направленную вверх, тогда как модели для больших скоростей требуют приложения силы, направленной вниз. Некоторые модели для малых скоростей больших бомбардировщиков и транспортных самолетов не требуют приложения никаких вертикальных сил. Если необходимо моделировать отклонения от режима полета с ускорением, то требуется приложить большие вертикальные силы, а иногда даже и боковые силы, независимые от движения модели. В дополнение к этим требованиям модель должна управляться и должна иметь соответствующие средства возбуждения и измерения.

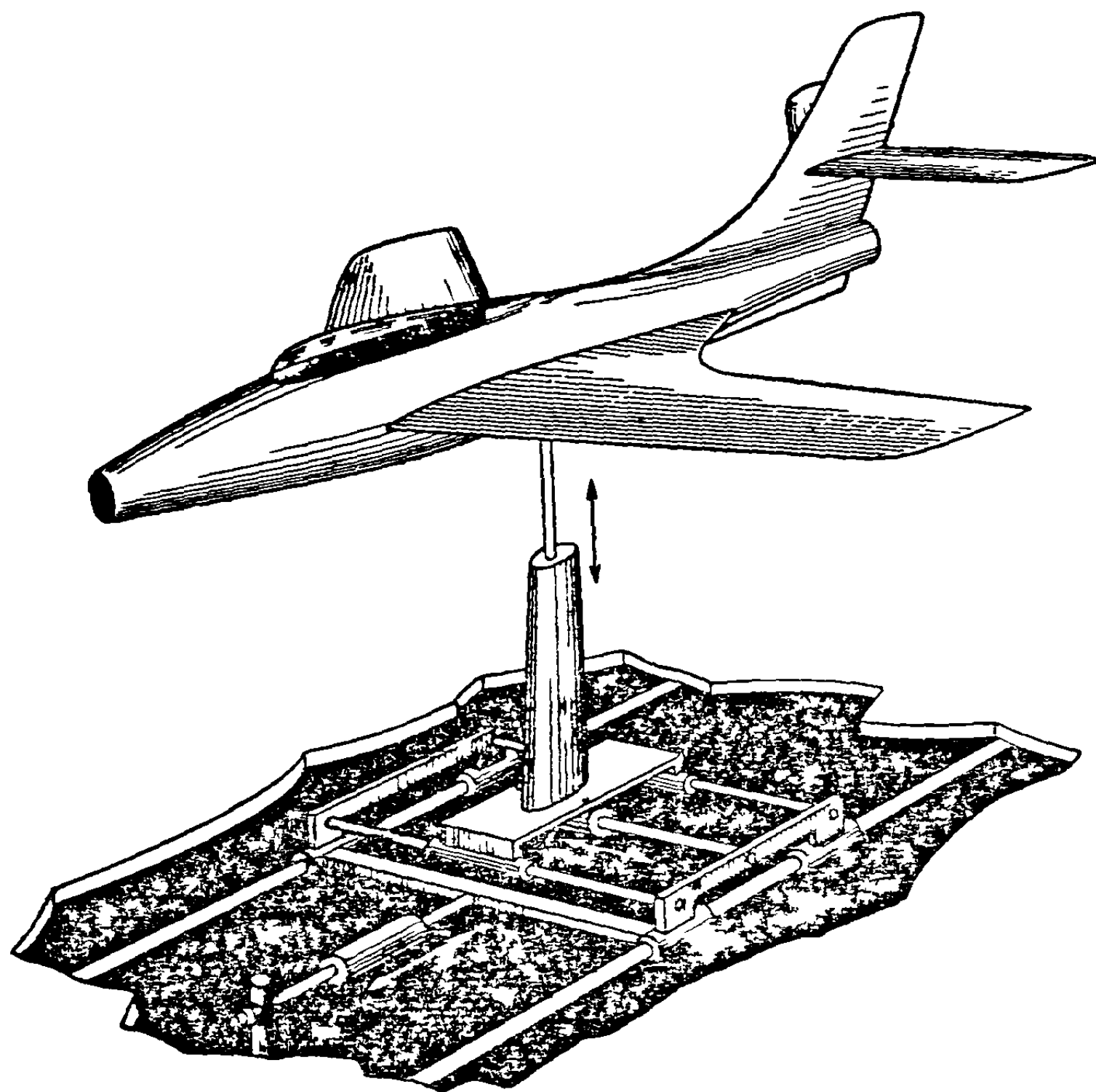


Фиг. 13-19. Отношение подъемной силы при движении тангажа (около середины хорды) в аэродинамической трубе к величине подъемной силы в свободном потоке в виде функции приведенной частоты (для различных значений чисел Маха и отношений ( $\lambda$ ) высоты трубы к хорде крыла).

Обеспечение постоянного вертикального поддерживающего усилия является нелегкой задачей. Конструкторы моделей для испытания флаттера на малых скоростях пытались разрешить эту задачу в течение многих лет и не имели успеха по двум причинам. Во-первых, их работа по созданию соответствующего поддерживающего модель механизма всегда строго лимитировалась временем и деньгами и считалась делом второстепенной важности. Во-вторых, создание силы, независимой от перемещения модели на расстояние свыше примерно дюйма, требует устройств, движущая масса которых сравнима с массой модели. Любая масса, которая действительно прикреплена к модели и движется вместе с ней, должна быть включена в массу модели в качестве ее части. Поэтому конструктор поддерживающего устройства попадает в безвыходное положение, за исключением, быть может, случая моделей, в которых вблизи точки крепления в распоряжении конструктора имеются большие нагрузки в виде топлива или бомб. Среди испытанных приспособлений были свободный воздушный поршень, модифицированный электромагнитный вибратор и различные пружинные устройства. Комбинированные требования больших постоянных усилий, значительных перемещений и малой движущей массы всегда приводят к серьезным компромиссам.



В таких случаях очевидно, что модель не может должным образом обеспечить большие усилия, необходимые для перемещения достаточно большой массы державки, и легкие поддерживающие приспособления, создающие постоянное усилие, являются практичными только при малых амплитудах. Можно разрешить задачу, если обратиться к новой идее, заключающейся в том, что для перемещения основной массы державки по приблизительно правильному закону используется внешний источник энергии, а легкое приспособление, создающее



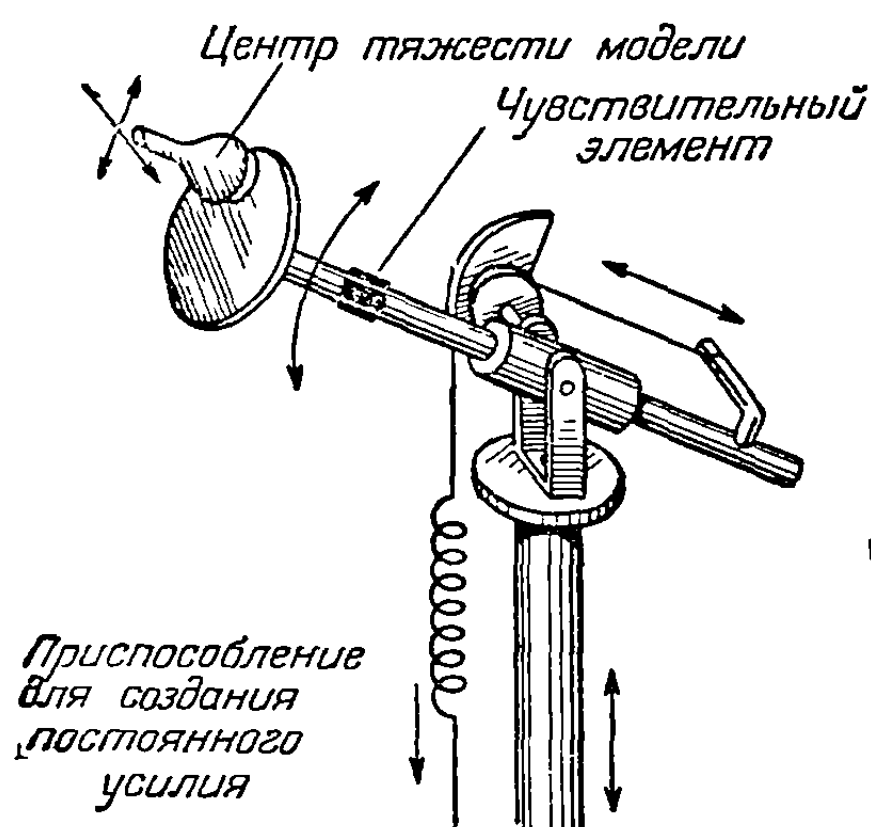
Фиг. 13-20. Схема серводержавки для аэродинамической трубы малых скоростей, пригодная для моделирования сводного полета при условии создания необходимых постоянных горизонтальной и вертикальной сил (см. фиг. 13-21).

постоянное усилие, восполняет оставшийся разрыв. Поскольку движения модели с большой амплитудой являются в основном движениями ее тела, то приводная система основной массы державки должна быть введена только с точки зрения частот движений, характеризующих динамическую устойчивость. Движения с меньшими амплитудами, связанные с упругими реакциями модели и имеющие большую частоту, могут поглощаться устройством, создающим постоянное усилие.

На фиг. 13-20 показана схема возможного поддерживающего механизма для моделирования полета в аэродинамической трубе малых скоростей. Три отдельных гидравлических сервомотора управления стандартных самолетных типов обеспечивают три компонента линейного перемещения основной массы державки. Приспособление, создающее постоянное усилие, и чувствительные элементы гидравлических усилителей расположены на верхушке державки и показаны на фиг. 13-21. Для того чтобы независимо от угловой ориентации модели передать ей желаемые усилия, направленные вперед, по вертикали и вбок, постоянное усилие прикладывается под соответствующим углом к

шарику, вмонтированному в модель. Чувствительные элементы измеряют перемещение тяги, к которой приложено постоянное усилие, и деформации изгиба, обусловленные отклонением шарика от оси тяги. Эти элементы посылают соответствующие сигналы в гидравлические усилители.

Устройство, более приспособленное к установке в трансзвуковой аэродинамической трубе, показано на фиг. 13-22. Механизм, создающий постоянное усилие, расположен в головке вертикальной державки, и усилие с помощью троса передается к центру тяжести модели. Угловые и линейные перемещения троса используются для генерации сигналов, идущих к трем сервомоторам. Частотные характеристики этих сервомоторов должны быть гораздо лучше



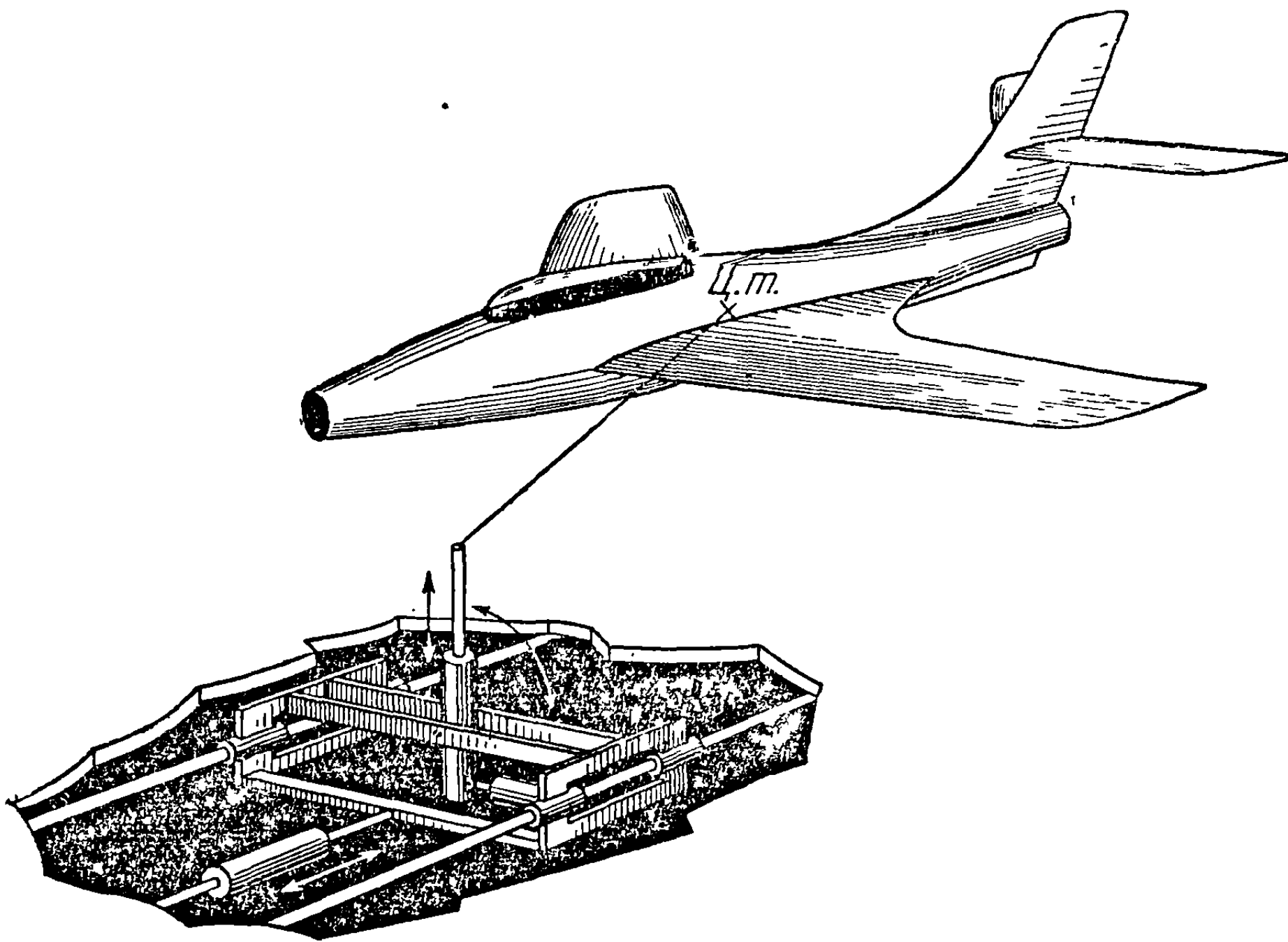
Фиг. 13-21. Схематическое изображение верхней части поддерживающего механизма, служащего для передачи постоянной силы к центру тяжести модели независимо от его движения. Приспособление кулачок — пружина создает постоянное необходимое усилие на маленьком диске, который передает его через подвижной контакт на модель.

характеристик тех сервомоторов, которые применяются в аэродинамической трубе малых скоростей, потому что частоты, соответствующие движениям, характеризующим динамическую устойчивость высокоскоростных моделей, гораздо выше частот колебаний моделей для малых скоростей тех же размеров.

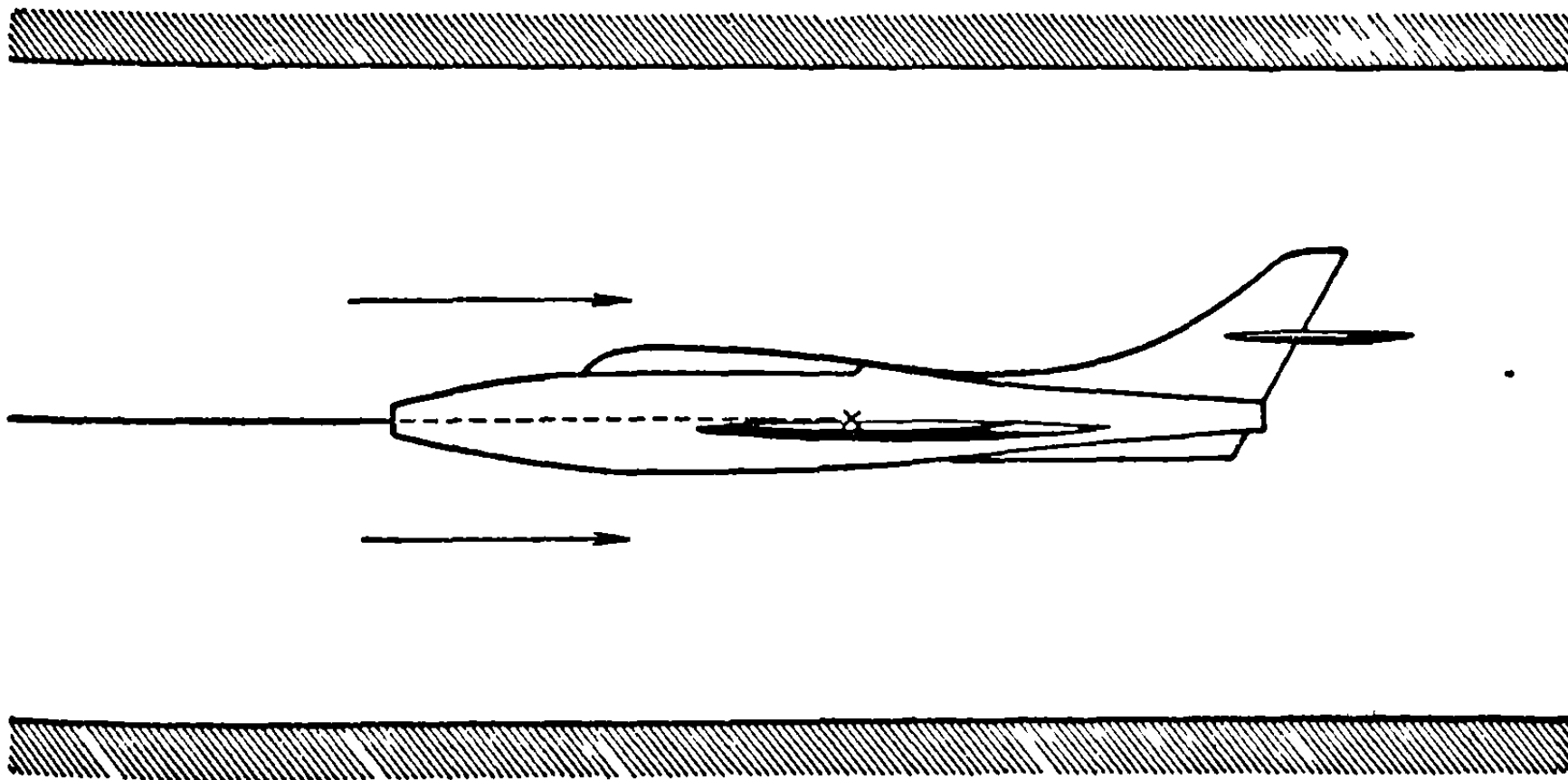
(d) Модели для испытания на флаттер в аэродинамической трубе. Для малых моделей при испытании на флаттер нет необходимости обеспечивать полное воспроизведение свободного полета, используя при этом такие державки, какие показаны на фиг. 13-20 и 13-22. Когда число Фруда модели ( $U/\sqrt{gL}$ ) примерно равно или больше натурального числа Фруда, как это бывает при всех испытаниях на очень малых скоростях, модель будет летать при коэффициентах подъемной силы, значительно меньших тех, которые соответствуют срыву. Поскольку при испытаниях на флаттер точное моделирование коэффициента подъемной силы требуется редко, то для этого класса моделей не требуется создавать внешнее постоянное вертикально направленное усилие.

В этом случае необходимо только уравновесить лобовое сопротивление. Это можно сделать с помощью „тяги лобового сопротивления“, как показано на фиг. 13-23. Если тягу нельзя легко пропустить через носок модели, то для того, чтобы передать силу к желаемой точке модели, можно использовать поводок. Для того чтобы обеспечить свободу перемещения в продольном направлении, можно смонтировать механизмы постоянного усилия на каждом конце тяги.

Если можно ожидать, что изменение характеристик динамической устойчивости, обусловленное наложением ограничений на степени свободы модели, соответствующие движениям твердого тела, не повлияет на характеристики флаттера, то можно использовать много других державок. В превосходной системе крепления, разработанной фирмой «Боинг» (см. фиг. 13-24 и [13-19]), на степени свободы, обеспечивающие продольное и боковое перемещения, наложена упругая связь, обуславливаемая изгибом натянутой вертикальной тяги. Вертикальное движение и движение тангажа не ограничены. Особенную осторожность следует проявить при ограничении степеней свободы модели для того, чтобы не только предотвратить изменение характеристик флаттера, но и не сделать модель динамически неустойчивой. Чрезвычайно легко создать неустойчивость, исключая степень свободы продольного движения и накладывая некоторую упругую связь на вертикальное перемещение. Подобное положение может случиться при испытании моделей малых скоростей, для которых во избежание



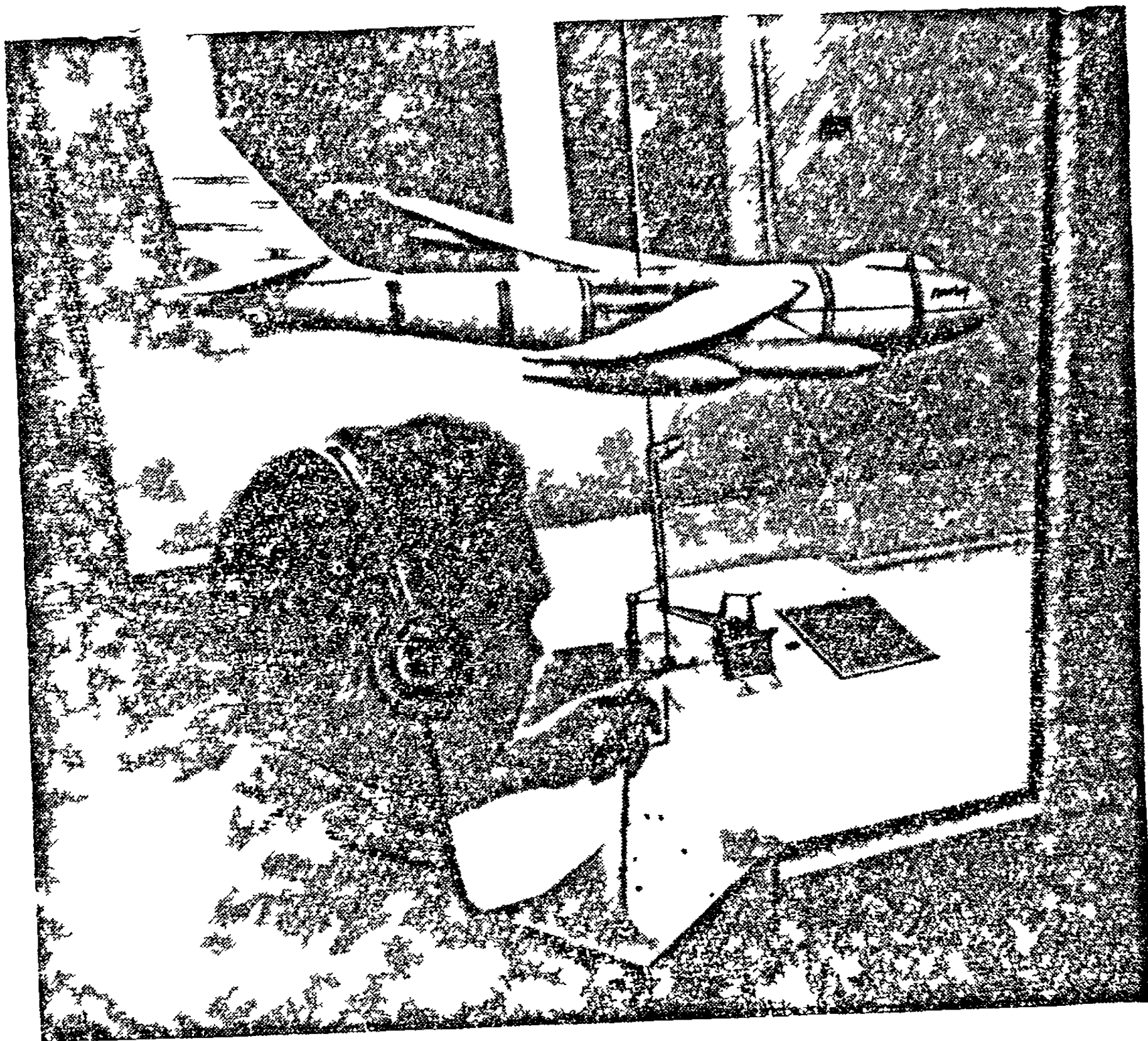
Фиг. 13-22. Серводержавка для моделирования свободного полета в аэродинамической трубе больших скоростей.



Фиг. 13-23. Простая проволочная державка, воспринимающая лобовое сопротивление, служащая для частичного моделирования свободного полета в аэродинамической трубе при больших скоростях.

серьезного изменения характеристик флаттера необходима свобода движений тангажа и свобода вертикального перемещения (фиг. 13-25 и 13-26). В некоторых случаях непосредственное влияние жесткости державки и излишней массы на характеристики флаттера можно оценить, исследуя их влияние на соответствующие собственные частоты согласно п. 13-3.

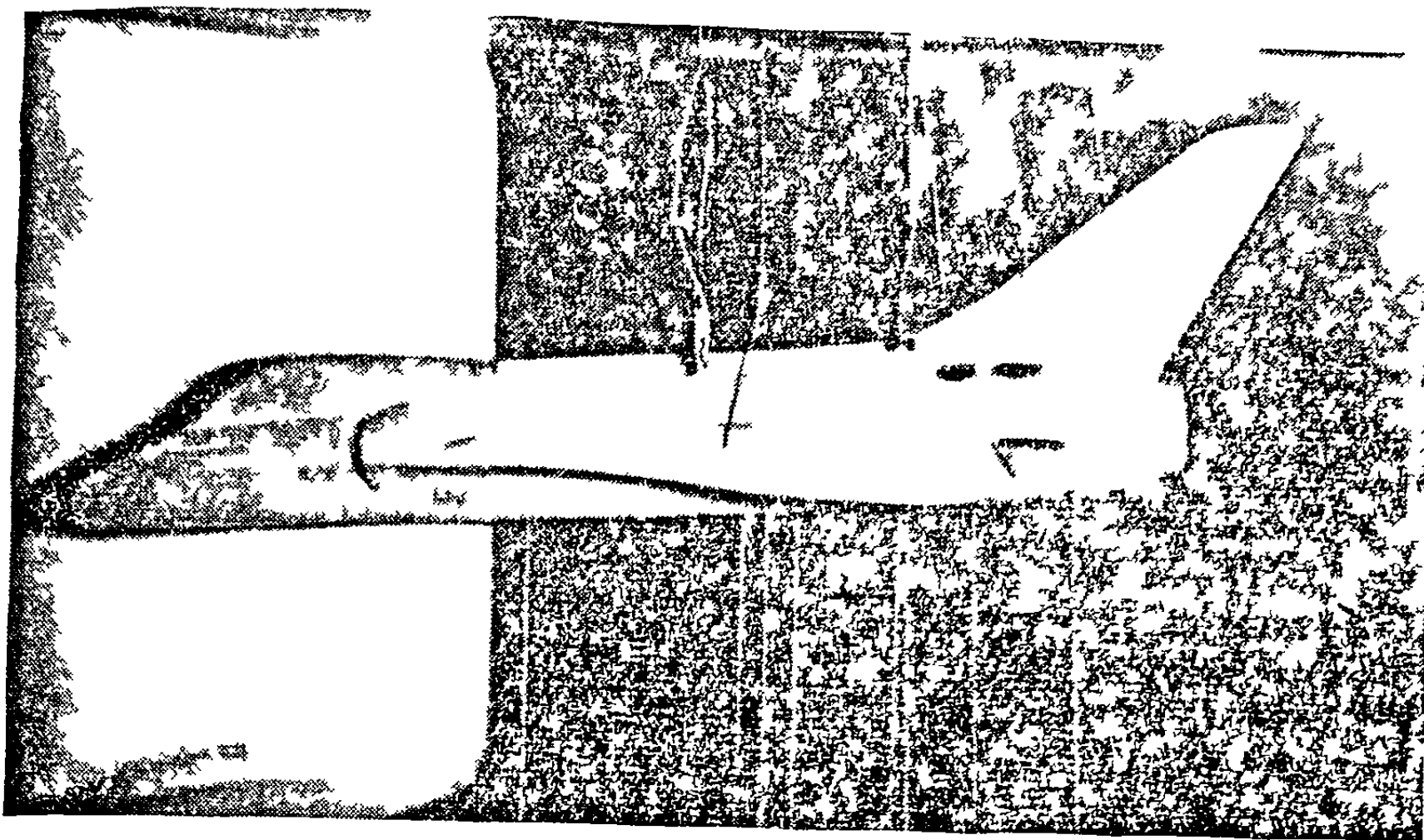
Часто представляется законным испытание не целых моделей, а частей их, особенно тогда, когда опыты предназначены для проверки расчетов, а не для



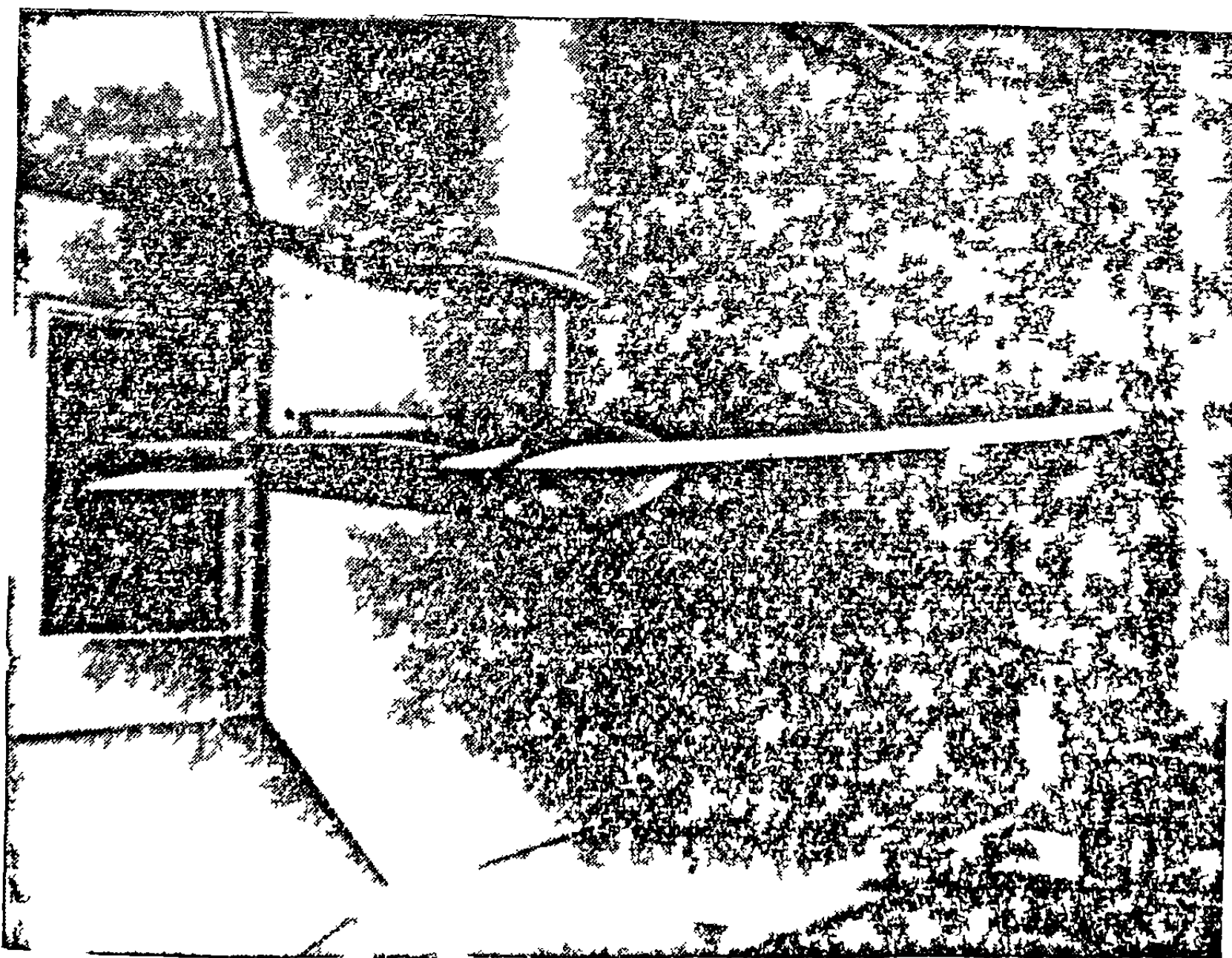
Фиг. 13-24. Один из первых вариантов вертикальной рычажной державки для больших моделей для испытания на флаттер при умеренных скоростях потока в аэродинамической трубе.

непосредственного использования их результатов в натурном самолете. Типичные модели хвостового оперения и крыла показаны на фиг. 13-27 — 13-30. Державка модели хвостового оперения предназначена для моделирования упругости фюзеляжа. Крепление к стенке на фиг. 13-28 обеспечивает как свободу движения крена, так и свободу вертикального перемещения. Это позволяет проводить раздельное исследование симметричных и антисимметричных форм колебаний. Следует заметить, что модель, укрепленная на стенке, независимо от свободы движений у корня, имеет там действительно симметричное граничное условие. Там, где это необходимо, компонентам моделей можно искусственно сообщить „устойчивость твердого тела“. Вертикальное перемещение прямого крыла на фиг. 13-29 обеспечивается за счет механизма, составленного из параллельных стержней, а свобода движения крена обеспечивается наличием соответствующей оси вращения. Небольшая устойчивость конфигурации достигается за счет некоторого нарушения параллельности стержней механизма. Таким образом, движение вверх уменьшает угол атаки, а движение вниз уве-

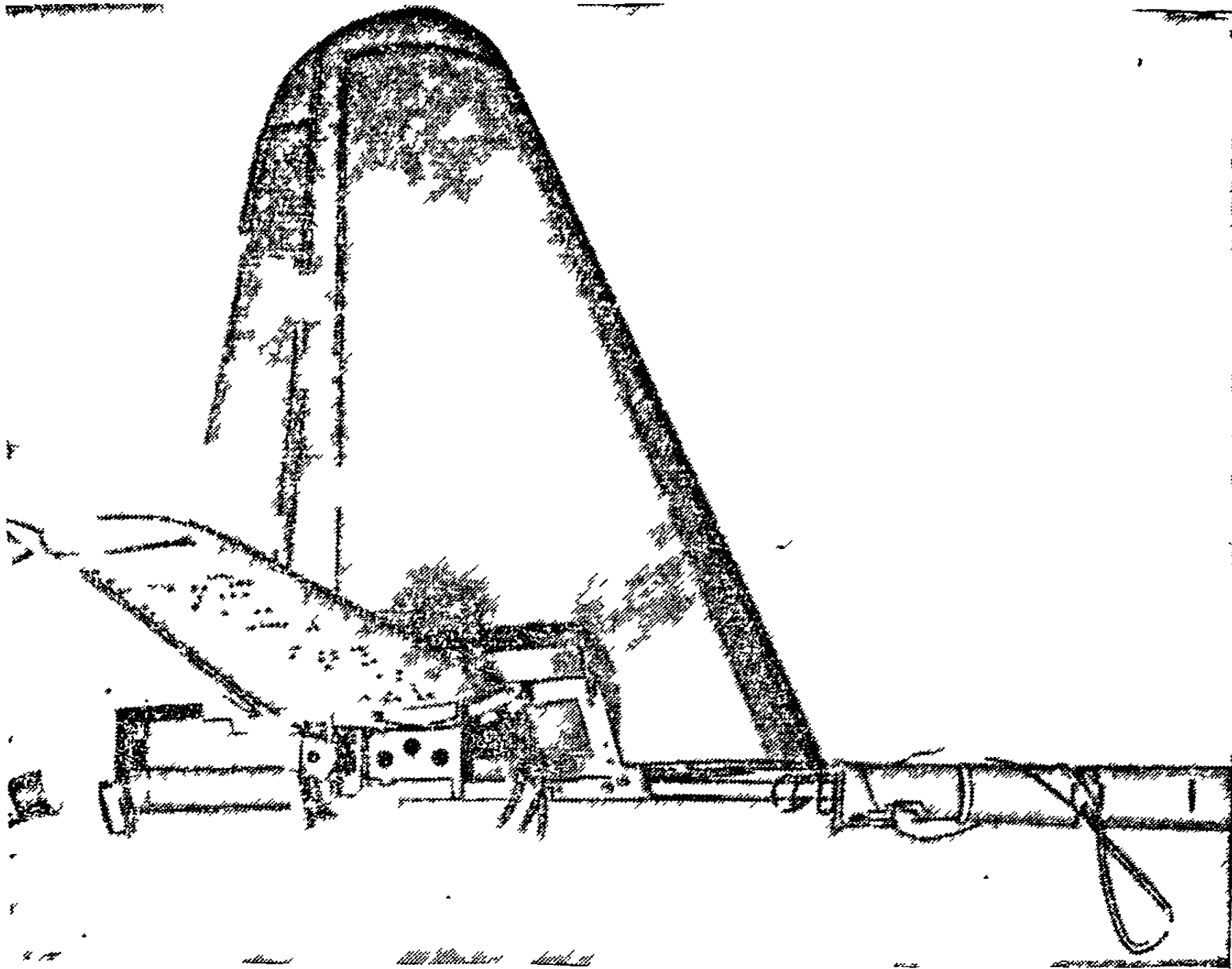




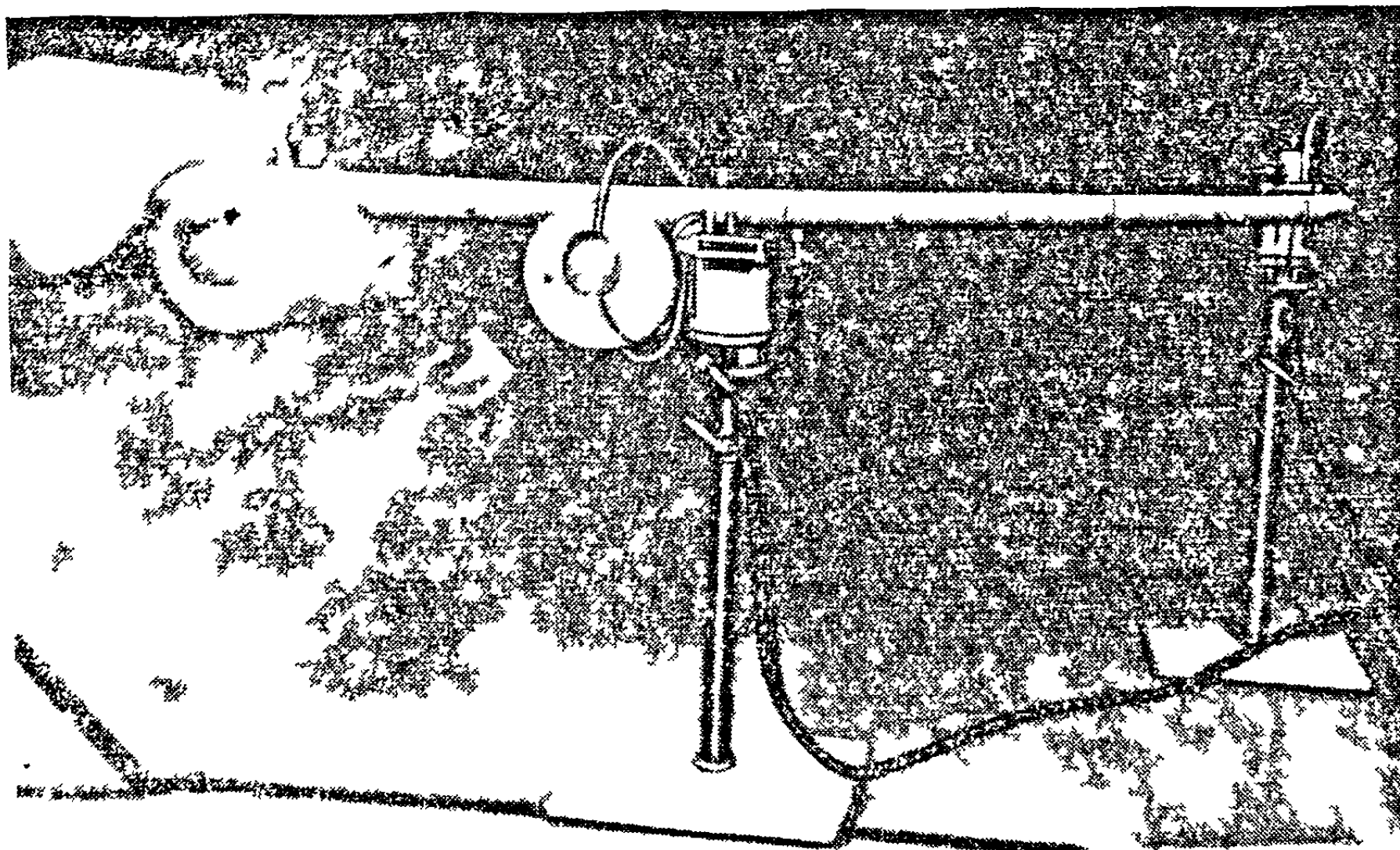
Фиг. 13-25. Модель для испытания на флаттер, смонтированная на пружинных тягах в малоскоростной аэродинамической трубе для обеспечения "движения твердого тела". Конструкция крыла состоит из составной пластины из пластика, которая поддерживает внешнюю секционную оболочку.



Фиг. 13-26. Модель крыла для испытания на флаттер с жестким фюзеляжем и регулируемым горизонтальным хвостовым оперением. Расположенная сверху державка обеспечивает модели свободу движения тангажа, крена, вертикального и горизонтального перемещения.



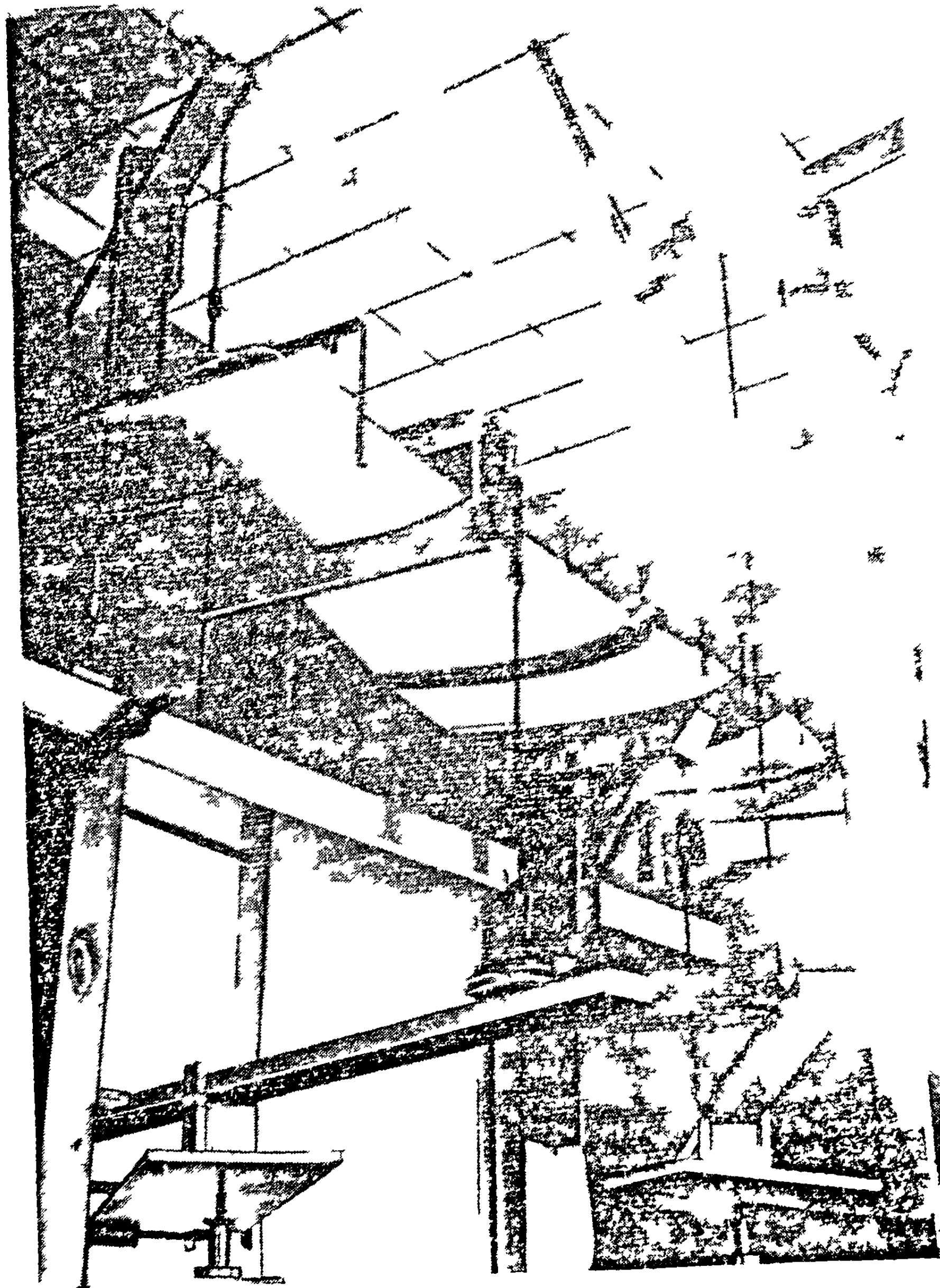
Фиг. 13-27. Одна из ранних моделей горизонтального оперения для исследования флаттера, включающая стержневую державку, которая моделирует упругость фюзеляжа.



Фиг. 13-28. Модель полукрыла для испытания на флаттер, ограниченная у корня крыла в свободе движения крена или вертикального перемещения для того, чтобы моделировать либо симметричное, либо антисимметричное условие у корня.



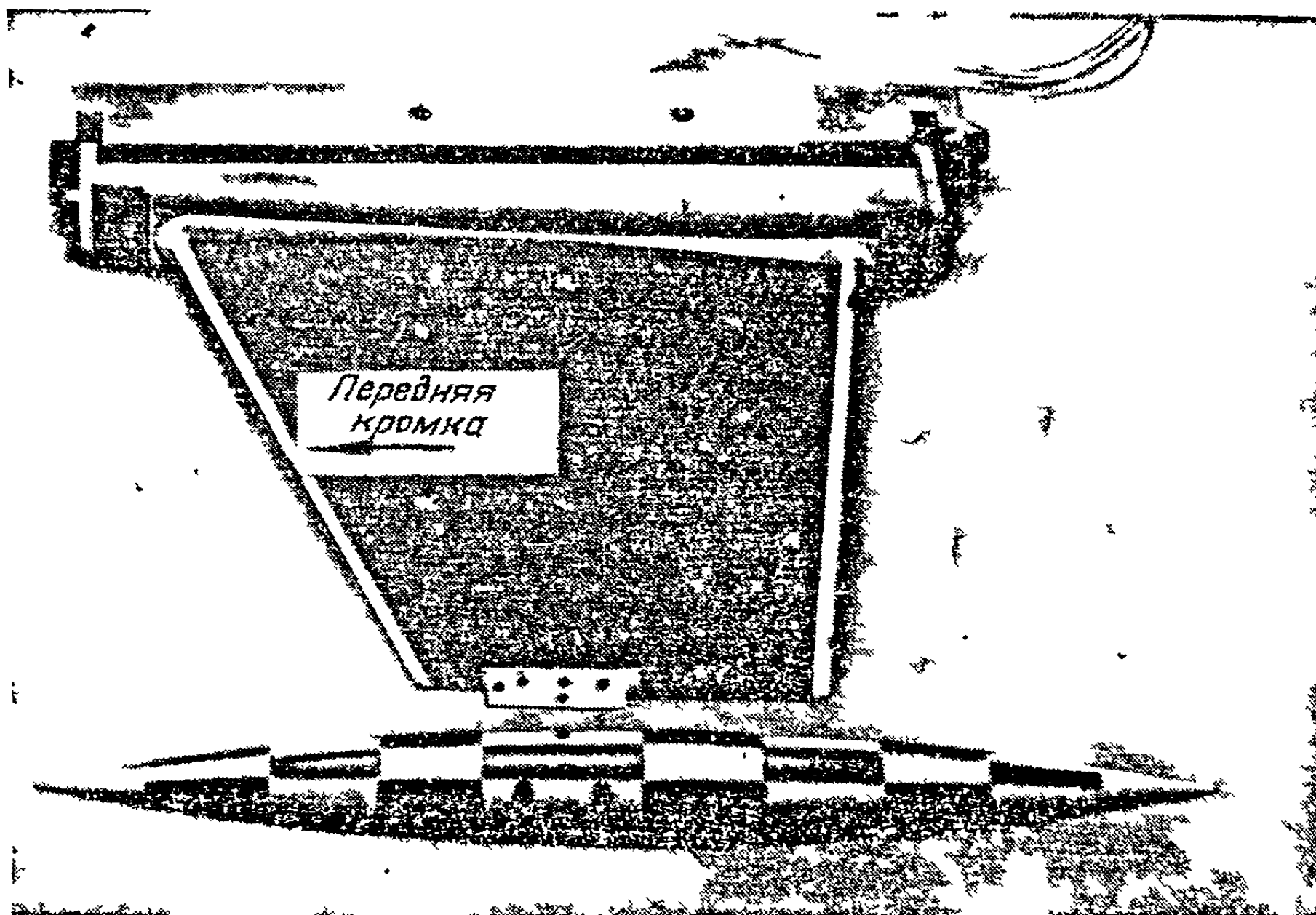
личивает его. Небольшой положительный наклон оси графика дает некоторую устойчивость движения крыла.



Фиг. 13-29. Непараллельный четырехзвонный механизм измерения деформации. Вращательные моменты искусственно обеспечивают этой модели.

Модель для испытания на флаттер при свободных колебаниях свободно вращаться около продольной оси (см. фиг. 13-3) стабилизируется в этом движении с помощью примагнитов, расположенных вдоль продольной оси. Скользящие в нескольких градусах от продольной оси в виде полумодели, что позволяет просто втачивать ее в ударный звуковой поток. Эта модель не могла бы выдержать ударных воздушных

нагрузок, связанных с пуском сверхзвуковой трубы. Наилучшим типом аэродинамической трубы для сверхзвуковых испытаний на флаттер является труба с соплом, которое можно легко устанавливать во время работы трубы [13-20]. Это позволяет помещать модель в условия установившегося потока. Затем можно изменять число Маха до тех пор, пока не наступит режим флаттера. Это как раз и желательно — обнаружить режим сверхзвукового флаттера, изменяя режим течения, а не параметры модели, как это делается при испытаниях на дозвуковых скоростях [13-1].



Фиг. 13-30 Эта сверхзвуковая модель для испытания на флаттер имеет возможность свободно вращаться вокруг оси, повернутой на несколько градусов от направления потока, чтобы обеспечить самоцентрировку модели

(е) *Управление и возбуждение модели в аэродинамической трубе.* Управление моделью, предназначенной для исследования флаттера, в процессе испытания может быть очень затруднено, особенно в случае моделей со многими степенями свободы. Часто эти модели пилотируются с помощью довольно сложной системы рулевых поверхностей и усилителей. Пилоты, находясь снаружи аэродинамической трубы, могут весьма успешно управлять теми низкоскоростными моделями, временные масштабы которых не слишком отличаются от природы. Высокоскоростные модели, по-видимому, выходят за пределы контроля с помощью человека и должны управляться гиросtabilизирующими контурами или даже автопилотами.

Возбуждение модели с целью измерения степени ее устойчивости или определения близости к режиму флаттера можно осуществить средствами, аналогичными уже описанным при испытании на флаттер (п. 13-4). Однако испытание модели в аэродинамической трубе часто позволяет пользоваться менее сложными средствами. У многих низкоскоростных моделей докритическое возбуждение можно осуществить резким подергиванием свободных шнуров, прикрепленных к лонжеронам вблизи концов крыла. Туго натягивая эти же шнуры, их можно использовать для подавления флаттера и предотвратить разрушение модели. В большинстве аэродинамических труб поток обладает достаточной турбулентностью, исключающей необходимость специального возбуждаю-

шего оборудования. В случае необходимости в поток можно ввести регулируемый порыв.

Для предотвращения разрушения моделей в процессе флаттера требуется очень осторожное регулирование скорости потока воздуха. Во многих случаях амплитуда автоколебаний при флаттере быстро меняется со скоростью в очень малом диапазоне, лежащем вслед за критической скоростью. Этот диапазон скоростей, характеризующийся неразрушительными амплитудами, по величине может составлять доли процента от скорости флаттера, хотя случается, что он доходит и до десяти процентов. В случае больших дорогих моделей может оказаться желательной установка на модели предохранительного устройства, которое обеспечило бы внезапное изменение параметров, гарантирующее существенное расширение докритического диапазона. Так, например, с помощью соленоида можно быстро изменить положение массы или внезапно ограничить соответствующим образом прецессионное движение маховика, вращающегося с большой скоростью.

*(f) Испытание на ракетах и тележках.* Кроме аэродинамической трубы, имеются еще два способа, с помощью которых можно поставить модель в условия управляемого полета. Эти способы приобрели большое значение особенно в диапазоне больших скоростей. Первый способ, представляющий некоторые преимущества перед испытанием в аэродинамической трубе, состоит в том, что аэроупругие модели частей самолета укрепляют на свободнолетающем ракетном аппарате. При внимательном регулировании полета ракеты, особенно в диапазонах больших дозвуковых и сверхзвуковых скоростей, модель подвергается воздействию такого же спокойного неограниченного потока воздуха, как и натурный самолет. Кроме того, обычно испытания проводятся в плотном воздухе на малых высотах, что приводит к увеличению чисел Рейнольдса модели и большой допустимой массе. Графики изменения полета ракеты со временем могут программироваться в довольно широких пределах.

К числу серьезных недостатков испытания на ракетных аппаратах относятся общие затруднения измерения и наблюдения над моделью, движущейся в воздухе на больших расстояниях от наблюдателя. Основные из этих затруднений заключаются в следующем. Полет происходит в течение короткого промежутка времени. Пространство, отводимое для размещения оборудования, и допустимый вес его невелики. Шансы обратного получения модели и оборудования часто очень малы. Нагрузки от ускорений очень велики и границы ошибки сужены. Если полет начался, то его уже нельзя остановить. Вместо трудностей монтажа модели в аэродинамической трубе возникает необходимость обеспечить устойчивость свободного полета ракетного аппарата при любой конфигурации модели.

Промежуточным способом испытания между испытанием с помощью ракеты, находящейся в свободном полете, и испытанием в аэродинамической трубе отчасти является испытание аэроупругих моделей на ракетных тележках, скользящих по прямолинейным горизонтальным рельсам. Модель может быть поставлена в условия плавного, сравнительно неограниченного воздушного потока с большой скоростью и высокой плотностью. На тележках можно установить менее сложное и менее дорогое оборудование, чем на ракете, и, кроме того, оно сохраняется после опыта. Сохраняются даже модели, если они не разрушаются во время флаттера. Однако испытания на тележках не отличаются той легкостью наблюдения и управления, которая свойственна испытаниям в аэродинамической трубе. Испытания на тележках, по-видимому, более всего похожи на испытания в кратковременно действующих аэродинамических трубах.

И тележки, и ракетный аппарат могут быть приспособлены как к измерениям коэффициентов, так и к исследованию аэроупругой устойчивости. При этом с небольшими изменениями или без всяких изменений могут быть использованы многие из методов возбуждения и измерения, рассмотренные в предыдущих

пунктах. Исследование отдельных частей самолета на свободнолетающем ракетном аппарате очень мало отличается от испытания аэроупругой модели с ракетным двигателем. К сожалению, такое испытание может оказаться очень дорогим и рискованным делом. Оно осложняется трудностями, связанными с поисками пространства для запуска ракет и соответствующего оборудования, с обеспечением правильного распределения массы в течение времени полета, с получением достаточного количества данных, которое оправдывало бы полет, и особенно трудностью, связанной с одновременной безотказной работой всех элементов, необходимой для того, чтобы небольшая поломка не свела к нулю весь опыт. Тем не менее идея испытания совершенно свободной аэроупругой модели в высокоскоростном неограниченном потоке очень заманлива.

(g) *Техника измерения и установка оборудования.* Для авиационного инженера наиболее необычной особенностью задачи измерения при динамических аэроупругих испытаниях является большой диапазон частот, с которым приходится иметь дело. Большие малоскоростные модели могут обладать частотами колебаний порядка 2 или 3 колебаний в секунду, тогда как частота колебаний небольших моделей малого удлинения для сверхзвуковых скоростей может быть порядка 200 колебаний в секунду. За исключением задач, связанных с высокими частотами колебаний, инженер может извлечь много пользы из применения обычных методов измерения для летных испытаний. Основным инструментом является при этом фотографирующая система, которая обычно представляет собой многоканальный записывающий осциллограф. Это приспособление при наличии соответствующих гальванометров может охватить желаемый диапазон частот и для того же самого промежутка времени записать изменение любой из измеряемых величин, которые могут быть выражены в подходящей „электрической форме“.

Если определенные сигналы с точки зрения их дальнейшего прохождения через волновой анализатор, измеритель фаз и т. п. выгодно оставить в электрической форме, то превосходным прибором для этой цели будет многоканальный автоматический самописец. Он не может просто заменить осциллограф, так как не дает оператору результатов полной качественной картины процесса, но является незаменимым в смысле способности воспроизведения в соответствующей электрической форме и в подходящее для этого время любых сигналов на входе. Каждому, кто сталкивается с подробным исследованием осциллограмм, известна утомительность и дороговизна этой операции.

Не совсем обычными величинами, которые должны быть измерены при испытании на флаттер, являются частота колебаний при флаттере и форма флаттера. В смысле очень точного определения частоты флаттера можно полагаться на проволочные датчики сопротивления, укрепленные на основной конструкции. При соответствующем размещении и ориентировке они легко дадут качественную картину формы колебаний. Наилучшим средством определения формы колебаний при флаттере является высокоскоростная фотографическая камера. Несмотря на то, что по снимкам нельзя сразу получить точных количественных данных, они дают неоценимую качественную картину флаттера и часто ясно указывают на неожиданные явления, которые иначе и не были бы обнаружены или не были бы правильно истолкованы. Правильному истолкованию результатов эксперимента сильно помогает также синхронизация кинокамеры с осциллограммами.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
ПРИЛОЖЕНИЯ





## МАТРИЦЫ

**А-1. Введение.** Приложение А написано главным образом для того, чтобы служить удобной сводкой операций над матрицами, встречающихся в задачах аэроупругости, причем авторы не пытались включить сюда строгие выводы и определения; все операции проиллюстрированы простыми числовыми примерами. Более полное рассмотрение вопроса читатель может найти в соответствующих источниках, помещенных в конце указателя литературы.

**А-2. Определения.** Матрицы определяются как таблицы чисел или других элементов, размещенных в строках и столбцах, подчиняющиеся определенным законам алгебры матриц [А-1]. Рассмотрим, например, такую систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} 3x + 5y - z &= 6, \\ -9x - 4y + 5z &= 7. \end{aligned} \quad (1)$$

Часто для более глубокого исследования этой системы ее следует переписать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -9 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

которая тотчас же приводит к понятию таблицы чисел. Первая таблица чисел в уравнении (2), представляющая коэффициенты линейной системы, состоит из двух строк и трех столбцов. Таблица чисел в правой части уравнения (2), представляющая постоянные члены правой части уравнения (1), имеет две строки и один столбец. Подобные таблицы чисел называются *матрицами*, и если таблица имеет  $m$  строк и  $n$  столбцов, то она называется матрицей порядка  $m \times n$ . Например, некоторые из основных типов матриц и их сокращенные обозначения имеют следующий вид:

Столбцовая матрица ( $3 \times 1$ ):

$$\{A\} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Строчная матрица ( $1 \times 3$ ):

$$\underline{A} = [5 \quad -2 \quad 7].$$

Квадратная матрица ( $3 \times 3$ ):

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

Диагональная матрица ( $3 \times 3$ ):

$$\underline{\Sigma A \underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Единичная матрица ( $3 \times 3$ ):

$$[I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### А-3. Алгебра матриц. (а) Равенство матриц.

Равными считаются матрицы одинакового порядка, имеющие равные соответствующие элементы.

(b) *Сложение и вычитание.* Сложение и вычитание двух матриц может быть выполнено только над матрицами одного порядка. Сложение осуществляется с помощью простого сложения соответствующих элементов. Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 9 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Вычитание осуществляется аналогичным образом, простым вычитанием соответствующих элементов.

(c) *Скалярные множители.* При умножении матрицы на скалярную величину каждый элемент матрицы умножается на эту величину. Например,

$$2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

(d) *Умножение матриц.* Две матрицы  $[A]$  и  $[B]$  могут быть перемножены в заданном порядке

$$[A][B] = [C] \quad (5)$$

в том случае, если выполнено определенное условие. Если число столбцов в  $[A]$  равно числу строк в  $[B]$ , то говорят, что матрицы являются соответствующими, и тогда они могут быть перемножены в порядке  $[A]$  на  $[B]$ . Для того чтобы определить процесс умножения, положим, что  $[A]$  и  $[B]$  определены равенствами:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица  $[C]$  будет равна

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

где, например, элемент

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \quad (6)$$

матрицы  $[C]$  получается из элементов матриц  $[A]$  и  $[B]$  с помощью умножения элементов первой строки  $[A]$  на соответствующие элементы первого столбца  $[B]$  и последующего сложения результатов. Вообще, элемент  $c_{ik}$  определяется по правилу строки и столбца, которое может быть выражено формулой

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}, \quad (7)$$

где  $n$  — число столбцов матрицы  $[A]$  и число строк матрицы  $[B]$ . Вдобавок, если порядок матрицы  $[A]$  есть  $m \times n$ , а порядок матрицы  $[B]$  равен  $n \times r$ , то порядок матрицы произведения  $[C]$  будет  $m \times r$ .

Операция умножения матриц, в общем случае, обладает сочетательным и распределительным свойствами, но не обладает свойством переместительности, т. е.

$$\begin{aligned} [A]([B][C]) &= ([A][B])[C], \\ [A]([B] + [C]) &= [A][B] + [A][C], \\ [A][B] &\neq [B][A]. \end{aligned} \quad (8)$$

Формулу (7), как видно из приведенных ниже примеров, можно применять для вычисления произведения всех типов матриц.

*Умножение строчной матрицы на столбцовую матрицу:*

$$[1 \quad -3 \quad 5] \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = (1 \times -2) + (-3 \times 4) + (5 \times 6) = 16. \quad (9)$$

*Умножение квадратной матрицы на столбцовую матрицу:*

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \times 1) + (-1 \times -2) + (2 \times 1) \\ (1 \times 1) + (0 \times -2) + (-2 \times 1) \\ (2 \times 1) + (1 \times -2) + (0 \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

*Умножение прямоугольной матрицы на квадратную матрицу:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} (1 \times 1) + (2 \times 0) + (-3 \times -1) & (1 \times 2) + (2 \times 1) + (-3 \times 3) \\ (2 \times 1) + (-1 \times 0) + (3 \times -1) & (2 \times 2) + (-1 \times 1) + (3 \times 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

(e) *Блочные матрицы.* Данная матрица с помощью горизонтальных и вертикальных линий может быть разбита на меньшие подматрицы следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{A\} & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где

$$\{A\} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [C] = [-3], \quad [D] = [2 \quad -4]$$

являются подматрицами<sup>1)</sup> исходной матрицы. Вообще блочные матрицы могут складываться, вычитаться и перемножаться так, как если бы составляющие их подматрицы были обыкновенными элементами матриц, и результат будет таким же, как и в случае выполнения этих операций над исходными не разбитыми на блоки матрицами. Для умножения блочных матриц необходимо, конечно, чтобы матрицы удовлетворяли требованию соответствия, сформулированному выше для обычных матриц.

(f) *Транспонирование.* Матрица, транспонированная из матрицы  $[A]$ , обозначается через  $[A]'$  и получается с помощью перемены мест строк и столбцов в матрице  $[A]$ . Когда матрица равна транспонированной из нее матрице, она называется симметричной.

(g) *Обращение.* Операция деления в алгебре матриц не аналогична, подобно другим элементарным операциям, соответствующей операции над числами. Деление выполняется с помощью обратных матриц. Матрица  $[A]^{-1}$ , обратная матрице  $[A]$ , определяется соотношением

$$[A][A]^{-1} = [\Sigma I]. \quad (13)$$

Рассмотрим, например, систему линейных уравнений в матричной форме следующего вида:

$$[A]\{x\} = \{a\}, \quad (14)$$

<sup>1)</sup> Иначе они называются блоками.— *Прим. ред.*

где

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \{x\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \{a\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решение этой системы уравнений относительно неизвестного  $x_i$  может быть получено обращением матрицы  $[A]$ :

$$\{x\} = [A]^{-1} \{a\} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 7 \\ -13 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}$$

является матрицей, обратной матрице коэффициентов  $[A]$ . Можно легко проверить, что произведение  $[A]$  на  $[A]^{-1}$  является единичной матрицей. Численные методы получения обратных матриц проанализированы в работах [А-2] и [А-3]. Метод Крута [А-3], например, является очень удобным методом для расчета на машинах.

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ВЕСОВЫХ ЧИСЕЛ

**В-1. Введение.** При решении практических задач аэроупругости часто бывает необходимо вычислить определенные интегралы вида

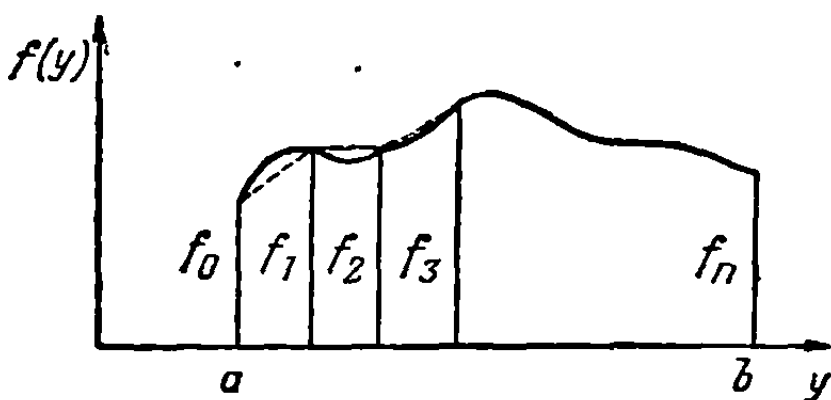
$$I = \int_a^b f(y) dy, \quad (1)$$

где явная форма функции  $f(y)$  неизвестна или функция  $f(y)$  такова, что определенный интеграл от нее не может быть вычислен с помощью других известных функций. Если ординаты кривой  $f(y) — f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$  известны в  $(n + 1)$  точках внутри интервала  $(a, b)$ , то определенный интеграл может быть приближенно выражен с помощью суммы

$$\int_a^b f(y) dy \approx \sum_{i=0}^n f_i W_i, \quad (2)$$

где  $W_i$  называются весовыми числами и зависят от применяемого метода численного интегрирования. В следующих пунктах рассмотрено несколько методов определения весовых чисел, полезных в задачах аэроупругости.

**В-2. Правило трапеций.** Метод трапеций основан на допущении, что соответствующая функции  $f(y)$  кривая между соседними ординатами может быть заменена прямолинейными отрезками (см. фиг. В-1). Таким образом, определенный интеграл может быть аппроксимирован суммой площадей трапеций, образованных ординатами кривой



Фиг. В-1. Представление площади с помощью суммы трапеций.

$f(y)$  и отрезками прямых, соединяющих начала и концы ординат. Если выбрать  $(n + 1)$  равноотстоящих друг от друга ординат (см. фиг. В-1), то, согласно правилу трапеций, площадь будет равна

$$\int_a^b f(y) dy \approx \lambda \left( \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right), \quad (3)$$

где  $\lambda$  — интервал между ординатами.

**В-3. Правило Симпсона.** Если интервал  $(a, b)$  разделен на четное число  $n$  равных интервалов  $\lambda$ , и если кривая  $f(y)$  между соседними ординатами аппроксимирована дугами парабол, то площадь вычисляется по приближенной формуле, известной под названием правила Симпсона [В-1]:

$$\int_a^b f(y) dy \approx \frac{\lambda}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n). \quad (4)$$

Правило Симпсона, вероятно, является наиболее часто применяемой формулой из всех приближенных интегральных формул. Оно дает точный результат, если функция, подлежащая аппроксимации, является полиномом третьей или меньшей степени.

**В-4. Интерполяционная формула Лагранжа.** Другой полезный метод приближенного интегрирования основан на выражении функции  $f(y)$  внутри интервала  $(a, b)$  через ординаты кривой, согласно интерполяционной формуле Лагранжа, в виде

$$f(y) \approx \sum_{j=0}^n L_j(y) f_j, \quad (5)$$

где  $f_j$  — ординаты кривой  $f(y)$  в  $(n+1)$  точках и  $L_j(y)$  — функции  $y$ , называемые интерполяционными функциями Лагранжа [В-2]. Представление функций в форме, подобной выражению (5), возможно только в том случае, если

$$\begin{aligned} L_j(y_i) &= 0, & (i \neq j), \\ L_j(y_i) &= 1, & (i = j). \end{aligned} \quad (6)$$

Удобной формой интерполяционной функции  $L_j(y)$  является форма полинома степени  $n$ . Очевидно, что для выполнения первого условия (6) полином должен быть представлен в форме произведения

$$L_j(y) = B_k (y - y_0) (y - y_1) \dots (y - y_{j-1}) (y - y_{j+1}) \dots (y - y_n). \quad (7)$$

Постоянные  $B_k$  можно определить, используя второе условие (6),

$$B_k (y_j - y_0) (y_j - y_1) \dots (y_j - y_{j-1}) (y_j - y_{j+1}) \dots (y_j - y_n) = 1. \quad (8)$$

Комбинируя соотношения (7) и (8), получим

$$L_j(y) = \frac{(y - y_0) (y - y_1) \dots (y - y_{j-1}) (y - y_{j+1}) \dots (y - y_n)}{(y_j - y_0) (y_j - y_1) \dots (y_j - y_{j-1}) (y_j - y_{j+1}) \dots (y_j - y_n)}. \quad (9)$$

Определенный интеграл в равенстве (1) может быть вычислен с помощью интерполяционной формулы Лагранжа, определяемой равенствами (5) и (9):

$$\int_a^b f(y) dy \approx \sum_{j=0}^n \left\{ \int_a^b L_j(y) dy \right\} f_j. \quad (10)$$

В результате вычисления определенных интегралов, входящих в формулу (10), получаются явные численные соотношения, и формула (10) принимает форму (2). В том случае, когда ординаты кривой отстоят друг от друга на одинаковых расстояниях, таких, что

$$y_1 - y_0 = y_2 - y_1 = \dots = y_n - y_{n-1} = \lambda, \quad (11)$$

явная форма выражения (10) сильно упрощается. Например, для  $n=5$

$$\int_{y_0}^{y_5} f(y) dy \approx \frac{5\lambda}{288} (19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 75f_4 + 19f_5), \quad (12)$$

а для  $n=10$

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} f(y) dy \approx & \frac{\lambda}{3,7266} (f_0 + 6,61605f_1 - 3,02017f_2 + 16,95401f_3 - 16,21647f_4 + \\ & + 26,59910f_5 - 16,21647f_6 + 16,95401f_7 - 3,02017f_8 + 6,61605f_9 + f_{10}). \end{aligned} \quad (13)$$

Формулы для других значений  $n$  даны, например, в [В-3].





## ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

**С-1. Определение.** Линейная система есть некоторая ясно выделенная часть окружающего нас физического мира, обладающая свойством линейности. Для того чтобы показать, что мы подразумеваем под линейностью, нужно описать систему количественно одной или несколькими переменными  $y(t)$ , которые можно измерить. Этими переменными  $y(t)$  могут быть положения или скорости точек системы, температура, напряжения, показания приборов, или что-либо другое, что характеризует мгновенное состояние системы. Эти величины часто называются выходными величинами<sup>1)</sup>. Каждая величина  $y$  является функцией по крайней мере одной независимой переменной  $t$ , которая в большинстве приложений обозначает время, но может обозначать также длину, измеряемую вдоль балки, величину, определяющую положение точки на кривой, или некоторую подобную векторную или скалярную величину в пространстве.

Систему характеризуют также одно или несколько „входных“ переменных  $x(t)$ , которые определяют возбуждение системы за счет контакта с ее окружением. Этими переменными могут быть напряжения, приложенные к электрическому контуру, движения ручки управления на самолете, скорости порывов ветра, действующих на крыло или хвостовое оперение, и т. п. В самом общем случае пространственного и временного изменения любая выходная величина будет совершенно произвольным образом зависеть от ряда входных величин.

Часть системы, генерирующая определенную выходную величину  $y_r(t)$  в качестве реакции на входные величины  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$ , называется линейной, если эффекты ряда различных входных величин могут накладываться линейно. Таким образом, если  $y_r^1(t)$  и  $y_r^2(t)$  обозначают реакции на приложенные отдельно входные величины  $x_1^1(t)$ ,  $x_2^1(t)$ , ...,  $x_n^1(t)$  и  $x_1^2(t)$ ,  $x_2^2(t)$ , ...,  $x_n^2(t)$ , то входные величины  $[x_1^1(t) + x_1^2(t)]$ ,  $[x_2^1(t) + x_2^2(t)]$ , ...,  $[x_n^1(t) + x_n^2(t)]$  приведут к реакции, равной  $[y_r^1(t) + y_r^2(t)]$ . Так как в пределах физических ограничений, которым подчиняется система, можно произвольно выбирать два ряда входных величин, то отсюда следует, что эффекты любого количества этих величин могут накладываться линейно. Это позволяет приравнять все входящие величины, за исключением одной, нулю и сосредоточить внимание на линейной связи между одной входной и одной выходной величинами.

Факт линейности может быть установлен чисто экспериментальными методами, но обычно связи между выходными и входными величинами выражаются с достаточной для инженерных целей точностью с помощью линейных математических формул. В теоретической аэроупругости встречаются четыре типа этих формул: обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения и интегро-дифференциальные уравнения, в которых зависимая переменная входит как под знак дифференциала, так и под знак интеграла. В настоящем приложении внимание будет сосредоточено на обыкновенном дифференциальном уравнении с постоянными коэффициентами, одной выходной и одной входной величинах. Однако для чита-

<sup>1)</sup> Или выходными сигналами.— *Прим. ред.*

теля станет очевидным, что различные приемы решения, основывающиеся на фундаментальном принципе наложения, могут применяться к любой какой бы то ни было линейной системе.

На практике мы должны исследовать большое количество различных математических форм входных величин. Когда система нелинейна, выходные величины должны вычисляться все одновременно, и часто аналитические трудности делают этот процесс практически невозможным. В противоположность этому линейность системы дает нам право вычислять реакции на несколько простых входных функций и затем, применяя правило наложения, находить с их помощью любую другую желаемую выходную величину. Более того, изучая выходные величины для нескольких простейших входных величин, таких, как ступенчатая функция и синусоидальная функция от времени, можно многое узнать об устойчивости и качестве линейной системы.

**С-2. Интеграл Дюамеля.** Наиболее ясным приложением принципа наложения к задачам аэроупругости является использование интеграла Дюамеля для вычисления реакции на приложенную силу, произвольно изменяющуюся во времени. Рассмотрим  $r$ -ю нормальную форму линейного упругого самолета, вынужденное движение которого для  $\Sigma_r^M = 0$  описывается уравнением

$$M_r \ddot{\xi}_r + M_r \omega_{r,r}^2 \xi_r = \Sigma_r^D(t) = f(t). \quad (1)$$

Здесь  $\xi_r$  играет роль  $y(t)$ , а  $f(t)$  — роль  $x(t)$ . Сначала допустим, что при  $t < 0$  форма находилась в покое, и с помощью элементарных методов определим ее реакцию на единичную ступенчатую функцию

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

и на единичный импульс при  $t = 0$ . Этот последний входной сигнал равен нулю для всех значений  $t$ , за исключением бесконечно малой окрестности момента его приложения. Если этот момент есть  $t = t_1$ , то единичный импульс  $\delta(t - t_1)$  можно определить с помощью уравнения

$$\int_0^t \delta(t - t_1) dt = \begin{cases} 0, & \text{если интервал от } 0 \text{ до } t \text{ исключает } t_1, \\ 1, & \text{если интервал от } 0 \text{ до } t \text{ включает } t_1. \end{cases} \quad (3)$$

Из уравнения (3) следует, что

$$\int_0^t f(t) \delta(t - t_1) dt = \begin{cases} 0, & \text{если интервал от } 0 \text{ до } t \text{ исключает } t_1, \\ f(t_1), & \text{если интервал от } 0 \text{ до } t \text{ включает } t_1. \end{cases} \quad (4)$$

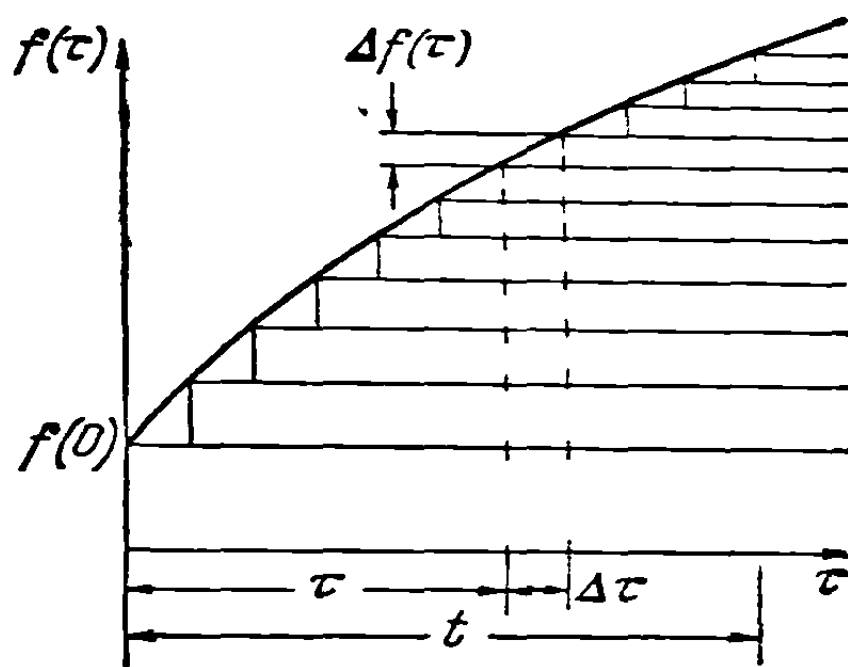
Для системы, определяемой уравнением (1) и находившейся первоначально в покое, импульс  $\delta(t)$  при  $t_1 = 0$  физически эквивалентен системе с начальными условиями

$$\xi_r(0) = 0, \quad (5a)$$

$$\dot{\xi}_r(0) = \frac{1}{M_r}, \quad (5b)$$

так как импульс создает единичное обобщенное количество движения  $M_r \dot{\xi}_r$ .

Обозначим реакции на единичную ступеньку и единичный импульс через  $A_r(t)$  и  $h_r(t)$  соответственно. Часто  $A_r(t)$  называют переходной проводимостью системы. Если теперь рассмотреть реакцию на произвольную обобщенную силу  $f(t)$ , то можно наложить несколько ступенчатых функций таким образом, чтобы построить характеристику  $f(t)$  во времени. Фиг. С-1 иллюстрирует процесс



Фиг. С-1. Наложение ступенчатых функций.

суперпозиции ступенчатых функций; в качестве независимой переменной взята величина  $\tau$ , определяющая положение каждого отдельного шага.

Реакция на ступенчатую функцию с ординатой  $\Delta f(\tau)$ , приложенную в момент  $\tau + \Delta\tau$ , определяется выражением

$$\Delta\xi_r(t) = \Delta f(\tau) A_r[t - (\tau + \Delta\tau)]. \quad (6)$$

Реакция на всю совокупность ступенчатых функций от  $\tau = 0$  до  $\tau = t$  находится с помощью наложения

$$\begin{aligned} \xi_r(t) &= f(0) A_r(t) + \sum_{\tau=\Delta\tau}^{\tau=t} \Delta f(\tau) A_r(t - (\tau + \Delta\tau)) = \\ &= f(0) A_r(t) + \sum_{\tau=\Delta\tau}^{\tau=t} \frac{\Delta f(\tau)}{\Delta\tau} A_r(t - (\tau + \Delta\tau)) \Delta\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Полагая  $\Delta\tau \rightarrow 0$  и используя понятие определенного интеграла, получаем

$$\xi_r(t) = f(0) A_r(t) + \int \frac{df(\tau)}{d\tau} A_r(t - \tau) d\tau. \quad (8)$$

Интегрируя по частям, сведем выражение (8) к следующему:

$$\xi_r(t) = - \int_0^t f(\tau) \frac{d}{d\tau} A_r(t - \tau) d\tau \quad (9)$$

или

$$\xi_r(t) = \int_0^t f(\tau) A_r'(t - \tau) d\tau, \quad (10)$$

где

$$A_r'(t - \tau) = \frac{dA_r(t - \tau)}{d(t - \tau)}. \quad (11)$$

Интегралы в формулах (9) и (10) известны под названием интегралов Дюамеля. Из метода их получения очевидно, что они применимы к любому выходному и любому входному сигналу любой линейной системы, если  $\xi_r(t)$  заменить на  $y(t)$ ,  $f(t)$  — на  $x(t)$  и  $A_r(t)$  — на функцию переходной проводимости, связывающую  $x(t)$  и  $y(t)$ . Для системы, описываемой уравнением (1), в гл. 10 показано (уравнение 10-17), что

$$A_r(t) = \frac{1}{M_r \omega_r^2} [1 - \cos \omega_r t]. \quad (12)$$

Таким образом, равенство (10) примет вид

$$\xi_r(t) = \frac{1}{M_r \omega_r} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_r (t - \tau) d\tau. \quad (13)$$

Подобно тому как мы построили силу  $f(\tau)$  с помощью наложения ряда ступенчатых функций, можно рассматривать  $f(\tau)$  как результат последовательности импульсов

$$\Delta\delta(t - \tau) = f(\tau) \Delta\tau, \quad (14)$$

действующих в равноотстоящие друг от друга моменты времени  $t/\Delta\tau$  в интервале  $\tau$  от 0 до  $t$ . Суммарная реакция на эти импульсы равна

$$\xi_r(t) = \sum_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau) \Delta\tau h_r(t - \tau). \quad (15)$$

Полагая  $\Delta\tau \rightarrow 0$  и число импульсов стремящимся к бесконечности, получим интегральное представление реакции системы

$$\xi_r(t) = \int_0^t f(\tau) h_r(t - \tau) d\tau. \quad (16)$$

Как и прежде, формула (16) может применяться к какой бы то ни было линейной системе, если  $\xi_r(t)$ ,  $f(t)$  и  $h_r(t)$  заменены соответствующими выходной и входной величинами и реакцией на единичный импульс.

**С-3. Реакция на гармонический входной сигнал.** Другим входным сигналом, имеющим фундаментальное значение, является случай силы, изменяющейся по гармоническому закону

$$f(t) = a \sin \omega t. \quad (17)$$

Если такая сила действует на устойчивую линейную систему достаточно долгое время, то все переходные процессы, связанные с ее первоначальным приложением, затухнут и реакция системы будет иметь синусоидальный характер

$$\xi_r(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (18a)$$

Соотношения между амплитудой входной величины  $a$  и постоянными  $A$  и  $B$ , определяющие амплитуду и относительную фазу выходной величины, содержат величину  $\omega$ , которая может быть найдена из уравнений движения или измерена экспериментально. Например, для  $r$ -й нормальной формы упругого самолета имеем<sup>1)</sup>

$$\frac{A}{a} = \frac{1}{M_r(\omega_r^2 - \omega^2)}, \quad \frac{B}{a} = 0. \quad (18b)$$

Вследствие эффективности комплексного представления простого гармонического движения уравнение (17) часто заменяют следующим:

$$f(t) = ce^{i\omega t}, \quad (19)$$

где  $c$  — комплексное число. Физический смысл уравнения (19) заключается в том, что действительная или мнимая части его определяют реальную возмущающую силу. Но операция вычисления действительной части линейна и может быть переменена местами со всеми другими операциями, необходимыми для вычисления реакции линейной системы. Таким образом, выходную величину можно определить в комплексной форме, действительная часть которой будет описывать реальное движение. Комплексная выходная величина, обусловленная входной величиной, выражаемой уравнением (19), может быть записана в виде

$$\xi_r(t) = H_r(i\omega) ce^{i\omega t}. \quad (20)$$

Например, для  $r$ -й формулы упругого самолета имеем

$$H_r(i\omega) = \frac{1}{M_r[\omega_r^2 + (i\omega)^2]}. \quad (21)$$

Комплексная функция  $H_r(i\omega)$  называется механической проводимостью той части системы, которая соединяет рассматриваемые вход и выход. Термин „проводимость“ выбран потому, что величина этой функции является мерой количества энергии, которой система позволяет проходить через нее, или мерой количества

<sup>1)</sup> Поскольку уравнение (1) не учитывает рассеяние энергии, неустановившаяся часть реакции теоретически не должна никогда затухнуть. На практике одна, конструктивное или аэродинамическое демпфирование в конечном счете уничтожит все составляющие, за исключением установившегося вынужденного движения.

энергии, генерирующейся в ответ на заданную амплитуду входной величины, изменяющейся по закону синуса. Обратную величину проводимости

$$Z_r(i\omega) = \frac{1}{H_r(i\omega)} \quad (22)$$

естественно рассматривать как импеданс. Таким образом,

$$\xi_r(t) = \frac{1}{Z_r(i\omega)} c e^{i\omega t}. \quad (23)$$

**С-4. Интеграл Фурье.** В рядах Фурье мы имеем естественное средство, с помощью которого можно использовать принцип наложения для нахождения реакции на периодическую входную величину. Если период равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (24)$$

то любая подобная входная величина может быть записана в форме

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega_0 t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\omega_0 t, \quad (25a)$$

где

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \sin(n\omega_0 \tau) d\tau, \quad (25b)$$

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) d\tau, \quad (25c)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \cos(n\omega_0 \tau) d\tau, \quad \text{для } n \geq 1. \quad (25d)$$

Если ввести в уравнения (25) комплексные величины с помощью формул Эйлера

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}, \quad (26)$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}, \quad (27)$$

то получим ряды Фурье в комплексной форме

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad (28a)$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-in\omega_0 \tau} d\tau. \quad (28b)$$

Из уравнения (20) видно, что для линейной системы реакция на периодическое усилие в форме (28a) должна иметь вид

$$\xi_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_r(in\omega_0) c_n e^{in\omega_0 t}. \quad (29)$$

В этой формуле не встает вопрос о том, брать ли действительную или мнимую ее части. Суммирование дает действительное число, потому что  $c_n$  и  $c_{-n}$  являются сопряженными комплексными величинами (см. уравнение 28b), так же, как

$$H_r(in\omega_0) \quad \text{и} \quad H_r(-in\omega_0).$$



Для возмущающих сил, которые не обладают свойством периодичности, интеграл Фурье приводит к обобщению рядов Фурье. Переход от рядов Фурье к интегралу Фурье можно осуществить с помощью функции  $f(t)$ , представленной уравнением (28a). Подставив выражение (28b) в равенство (28a), получим

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-in\omega_0\tau} d\tau e^{in\omega_0 t}. \quad (30)$$

В этом равенстве  $T$  может быть сделано произвольно большим. Если возьмем результат при  $T \rightarrow \infty$ , то получим интеграл Фурье. В этом случае  $\omega_0$  становится весьма малым и может быть заменено малым приращением  $\Delta\omega$ . В пределе  $\Delta\omega$  становится дифференциалом в определенном интеграле, который заменяет сумму от  $n = -\infty$  до  $n = +\infty$ . Подстановка

$$n\omega_0 = n\Delta\omega = \omega \quad (31)$$

приводит тогда к следующему выражению:

$$f(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} e^{i\omega t} d\omega, \quad (32)$$

которое является комплексной формой интеграла Фурье. Выражение (32) может быть записано в другой форме:

$$f(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} G(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (33)$$

где <sup>1)</sup>

$$G(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (34)$$

и  $G(i\omega)$  называется преобразованием Фурье функции  $f(t)$ , и наоборот. В математическом смысле выражение (34) можно рассматривать как решение или обращение интегрального уравнения (33).

Нетрудно показать, что если  $f(t)$  есть четная функция  $t$ , то уравнения (33) и (34) переходят в совершенно симметричную пару преобразований Фурье с косинусами

$$f_E(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} G_E(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (35)$$

$$G_E(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_E(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (36)$$

Аналогично нечетная функция  $f(t)$  представляется парой преобразований Фурье с синусами

$$f_0(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} G_0(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (37)$$

$$G_0(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_0(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (38)$$

<sup>1)</sup> Из выражения (34) ясно видно свойство величины  $G(i\omega)$ , заключающееся в том, что ее значения для равных отрицательных и положительных  $\omega$  являются комплексно-сопряженными.

Существенной слабостью метода интеграла Фурье является то обстоятельство, что для многих практически интересных входных величин интегралы, определенные выражениями (33) и (34), не сходятся и поэтому не имеют смысла. Действительно, условие сходимости этих интегралов заключается в требовании абсолютной интегрируемости  $f(\tau)$  в интервале от  $\tau = -\infty$  до  $\tau = +\infty$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| d\tau = \text{конечная величина.} \quad (39)$$

Это условие не выполняется строго, например, для ступенчатой функции. Если допустить, что интегралы будут сходиться, то выражение для выходной величины  $\xi_r(t)$ , соответствующей входной величине  $f(t)$ , можно найти с помощью наложения. Один путь решения этой задачи заключается в следующем. Заметив, что реакция на бесконечно малую составляющую

$$df = G(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (40)$$

спектра частот между  $\omega$  и  $\omega + d\omega$  в уравнении (33) выражается уравнением (20) в виде

$$d\xi_r = H_r(i\omega) G(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (41)$$

найдем, что суммарная реакция на весь спектр должна быть равна

$$\xi_r(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} d\xi_r = \int_{-\infty}^{\infty} H_r(i\omega) G(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (42)$$

Интеграл в равенстве (42) будет сходиться всякий раз, когда сойдется выражение (33), потому что обычно для больших значений аргумента  $H_r(i\omega)$  ведет себя как  $1/i\omega$  или  $1/(i\omega)^2$ .

Функция  $H_r(p)$ , в которой вместо  $i\omega$  подставлена действительная или комплексная независимая переменная  $P$ , называется функцией проводимости линейной системы. Она дает связь между методами отыскания реакций с помощью интеграла Фурье и преобразования Лапласа. Сравнивая этапы расчета установившейся выходной величины, соответствующей входной величине  $e^{i\omega t}$ , с теми этапами, которые имеют место при преобразовании уравнений движения с помощью преобразования Лапласа, можно доказать, что для любой системы, описываемой дифференциальными или интегральными линейными уравнениями, функция  $H_r(p)$  является знаменателем (и притом многочленом) выражения, служащего для преобразования реакции в любую входную величину с нулевыми начальными условиями при  $t=0$ . Более того, мы, естественно, придем к идее преобразования Лапласа, если попытаемся применить интеграл Фурье при определении переходной проводимости  $A_r(t)$ . Известно, что ступенчатая функция может быть записана в форме

$$1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} d\omega. \quad (43)$$

Сходимость здесь обеспечивается требованием, чтобы путь интегрирования от  $-\infty$  до  $+\infty$  вблизи начала координат проходил по малой полуокружности. Согласно уравнению (42), реакция на входную величину, определяемую соотношением (43), равна

$$A_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_r(i\omega) e^{i\omega t}}{i\omega} d\omega. \quad (44)$$

Это выражение, известное под названием интегральной формулы Бромвича, можно использовать для вычисления переходной проводимости в том случае, когда известна функция проводимости. Подобные приложения к задачам аэроупругости рассмотрены в гл. 10, в п. 10—5 (b).

**С-5. Реакция на случайную входную величину.** В связи с явлениями бафтинга, нагрузками от порывов ветра на самолет, летящий в турбулентном потоке воздуха, долговечностью конструкционных материалов и другими аналогичными проблемами мы встречаемся с входными величинами, которые являются так называемыми случайными функциями времени. Они изменяются чрезвычайно нерегулярным образом и могут быть определены с помощью некоторых средних величин. Вычисляются эти функции с помощью математического аппарата статистической теории. Подробное изложение этого вопроса выходит за рамки этой книги, однако здесь можно воспроизвести, соблюдая известную строгость, некоторые определения и соотношения, которые играют важную роль в аэроупругости.

Пусть  $f(t)$  означает случайную входную величину. Если измерять значения  $f(t)$  в течение достаточно большого промежутка времени  $2T$ , то тогда во многих случаях  $n$ -е среднее значение  $f$

$$\bar{f}^n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^n(t) dt \quad (45)$$

будет стремиться к определенному пределу. Установившимся случайным процессом называется такой процесс, в котором величина  $\bar{f}^n$  не зависит от того, в каком месте на диапазоне изменения  $f(t)$  выбирается тот интервал времени, который используется для вычисления среднего значения. Настоящее рассуждение ограничивается именно такими процессами. Часто масштаб для измерения  $f$  выбирается таким образом, что первое среднее значение или просто среднее значение

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt, \quad (46)$$

равно нулю. Тогда наиболее важным свойством  $f$  является среднее значение ее квадрата

$$\bar{f}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt, \quad (47)$$

где  $\bar{f}^2$  дает оценку энергии или мощности, содержащейся во входной величине  $f$ . Если бы, например, этой входной величиной была скорость порыва  $w$ , то  $\frac{1}{2} \bar{w}^2$  равнялась бы средней кинетической энергии единицы массы турбулентного воздуха. Если  $\bar{w}^2$  и другие статистические свойства турбулентности не зависят от положения в выбранном объеме воздуха и от направления осредняемой компоненты  $w$ , то говорят, что турбулентность статистически однородна и изотропна.

Статистическая зависимость между значениями  $f(t)$  в различные промежутки времени определяется автокорреляционной функцией

$$\varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) f(t + \tau) dt. \quad (48)$$

Очевидно, что  $\varphi(0)$  равно среднему значению квадрата  $\bar{f}^2$ .

Следует ожидать, что для больших значений  $\tau$  (всякий раз, когда  $\bar{f} = 0$ )  $\varphi$  стремится к нулю, потому что значения случайной величины в моменты

времени, весьма удаленные друг от друга, не должны быть связаны друг с другом. Таким образом, для положительной  $f(t)$  функция  $f(t - \tau)$  могла бы быть в равной степени как положительной, так и отрицательной величиной. В стационарных случайных процессах  $\varphi$  не зависит от того, где выбран интервал  $2T$ , и таким образом является только функцией  $\tau$  и притом четной, так как статистические свойства не изменяются при изменении направления течения времени. Вообразим на один момент, что случайная величина  $f(t)$  допускает анализ методом Фурье. Так как она не является периодической функцией, то ее спектр или распределение частот необходимо определять с помощью интеграла Фурье. Принимая во внимание выражение (34), можно было бы определить функцию

$$F(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (49)$$

которая для достаточно больших  $T$  дала бы нам некоторое представление об относительных величинах различных простых гармонических компонент  $f(t)$ . К сожалению, предельное значение  $F(i\omega)$  при  $T \rightarrow \infty$  оказывается математически неопределенным. Однако, если рассмотреть предельное поведение функции

$$|F(i\omega)|^2 = F(i\omega) F(-i\omega), \quad (50)$$

то можно прийти к полному смыслу описанию спектра  $f(t)$ . Для некоторого конечного значения  $T$  обращение преобразования Фурье [уравнение (33) с заменой  $t$  на  $\tau$ ] этой функции имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} F(i\omega) F(-i\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} F(-i\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\omega t} dt \right\} d\omega. \quad (51)$$

Изменив порядок интегрирования и произведя замену переменных  $\omega' = -\omega$ , получим

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} |F(i\omega)|^2 d\omega = \int_{-T}^T f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega'(t-\tau)} F(i\omega') d\omega' \right\} dt. \quad (52)$$

Теперь внутренний интеграл уравнения (52) можно рассматривать как обращение интеграла Фурье (49)<sup>1)</sup>.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega'(t-\tau)} F(i\omega') d\omega' = f(t - \tau). \quad (53)$$

Поэтому выражение (52) примет вид

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} |F(i\omega)|^2 d\omega = \int_{-T}^T f(t) f(t - \tau) dt. \quad (54)$$

Интеграл в правой части выражения (54) сам по себе расходится, когда  $T \rightarrow \infty$ , однако тот же самый интеграл, умноженный на  $\frac{1}{2} T$ , стремится к (четной) автокорреляционной функции  $\varphi(\tau)$ . Следовательно, мы пришли к тому, чтобы функцию  $|F(i\omega)|^2$ , предел которой не имеет смысла, заменить другой величиной

$$\Phi(\omega) = \frac{2\pi |F(i\omega)|^2}{T}, \quad (55)$$

<sup>1)</sup> Этот шаг будет более естественным, если представить себе что функция  $f(t)$ , входящая в уравнение (49), не является случайной функцией, а лишь совпадает с ней в интервале  $-T \leq t \leq T$ . Всюду вне этого интервала  $f(t)$  равна 0.

которая при подстановке в соотношение (54) приводит его к виду

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \Phi(\omega) d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) f(t - \tau) dt = \varphi(-\tau) = \varphi(\tau). \quad (56)$$

Величина  $\Phi(\omega)$  известна под названием спектральной плотности энергии, так как она пропорциональна квадрату модуля (энергия в некоторых приложениях к задачам электротехники) компоненты  $f(t)$ , имеющей частоту  $\omega$ . Можно было бы определить  $\Phi(\omega)$  прямо как преобразование Фурье автокорреляционной функции, однако такой метод частично скрыл бы ее физический смысл. С помощью равенства (34) соотношение инверсии между  $\Phi(\omega)$  и  $\varphi(t)$  может быть записано в виде

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (57)$$

Последнее выражение обусловлено четностью автокорреляционной функции. Так как очевидно, что  $\Phi(\omega)$  также является четной функцией  $\omega$ , то из уравнения (56) следует, что

$$\varphi(0) = \overline{f^2} = \int_0^{\infty} \Phi(\omega) d\omega. \quad (58)$$

Физически выражение (58) истолковывается в том смысле, что средняя энергия или мощность функции  $f(t)$  является интегральной суммой энергий, связанных со всеми частотными компонентами.

Определив некоторые из статистических свойств случайной входной величины в линейной системе, допустим, что соответствующая выходная величина  $\xi_r(t)$  является также случайной функцией, и попытаемся связать ее свойства со свойствами функции  $f(t)$ . Обозначим через  $\psi(\tau)$  и  $\Psi(\omega)$  автокорреляционную функцию и спектральную плотность энергии. Они связаны с помощью соотношения

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \Psi(\omega) d\omega. \quad (59)$$

Для любого момента времени  $\xi_r(t)$  можно вычислить через  $f(t)$  с помощью соотношения для реакции на единичный импульс (ср. уравнение 16)

$$\xi_r(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) h_r(t - \tau) d\tau, \quad (60)$$

в котором нижний предел заменен через  $\tau = -\infty$ , поскольку приложенное усилие является стационарным и действовало все время. Выражение (60) не изменится, если положить верхний предел равным  $+\infty$ , так как  $h_r$ , очевидно, равно нулю для отрицательного аргумента и поэтому для  $t < \tau < +\infty$  подынтегральное выражение также равно нулю. Выполнив эту подстановку и введя переменную интегрирования  $\sigma = t - \tau$ , в результате получим

$$\xi_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h_r(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \sigma) h_r(\sigma) d\sigma. \quad (61)$$

Наконец, воспользовавшись соотношением (61), вычислим автокорреляционную функцию выходной величины

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi_r(t) \xi_r(t + \tau) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \sigma) f(t + \tau - \sigma') h_r(\sigma) h_r(\sigma') d\sigma d\sigma' dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\sigma) h_r(\sigma') \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t - \sigma) f(t + \tau - \sigma') dt \right\} d\sigma d\sigma' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\sigma) h_r(\sigma') \varphi(\tau + \sigma - \sigma') d\sigma d\sigma'. \quad (62) \end{aligned}$$

Подстановка автокорреляционной функции входной величины в последний член выражения (62) оправдывается стационарным характером процесса. Так как положение интервала  $2T$  осреднения не влияет на результат, то, положив  $t' = t - \sigma$ , получим

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t - \sigma) f(t + \tau - \sigma') dt &= \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{(-T-\sigma)}^{(T-\sigma)} f(t') f(t' + (\sigma + \tau - \sigma')) dt' = \varphi(\tau + \sigma - \sigma'). \quad (63) \end{aligned}$$

Соотношение (62) связывает автокорреляционные функции. Более простой и более важной зависимостью является соотношение между спектральными плотностями энергии. Это соотношение можно вывести, заменив  $\psi$  и  $\varphi$  через интегралы Фурье (56) и (59):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega\tau} h_r(\sigma) e^{i\omega\sigma} h_r(\sigma') e^{-i\omega\sigma'} d\sigma' d\sigma d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega\tau} \left\{ \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\sigma) e^{i\omega\sigma} d\sigma \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\sigma') e^{-i\omega\sigma'} d\sigma' \right] \right\} d\omega. \quad (64) \end{aligned}$$

Два интеграла во внутренних скобках являются выражениями для реакции линейной системы на входную величину единичной амплитуды, изменяющуюся по закону синуса и действующую в течение значительного промежутка времени. Поэтому эти интегралы связаны с механической проводимостью  $H_r(i\omega)$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\sigma') e^{-i\omega\sigma'} d\sigma' &= \int_0^{\infty} h_r(\sigma') e^{-i\omega\sigma'} d\sigma' = - \int_t^{-\infty} h_r(t - \tau) e^{i\omega(\tau - t)} d\tau = \\ &= e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^t e^{i\omega\tau} h_r(t - \tau) d\tau = H_r(i\omega) \quad (65) \end{aligned}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_r(\sigma) e^{i\omega\sigma} d\sigma = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^t e^{-i\omega\tau} h_r(t - \tau) d\tau = H_r(-i\omega), \quad (66)$$



так что

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\sigma) e^{i\omega\sigma} d\sigma \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\sigma') e^{-i\omega\sigma'} d\sigma' \right] = H_r(-i\omega) H_r(i\omega) = |H_r(i\omega)|^2. \quad (67)$$

Подставляя выражение (67) в (64), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |H_r(i\omega)|^2 \Phi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (68)$$

Так как соотношение (68) должно иметь место для всех значений  $\tau$ , то под-интегральные выражения должны быть равны:

$$\Psi(\omega) = |H_r(i\omega)|^2 \Phi(\omega) = \frac{1}{|Z_r(i\omega)|^2} \Phi(\omega). \quad (69)$$

Последнее соотношение показывает, что спектральные плотности энергии входных и выходных величин отличаются только множителем, который равен квадрату величины механической проводимости системы.

## ЛИТЕРАТУРА

### Глава 1

- 1-1. Collar A. R., The expanding domain of aeroelasticity, J. Royal Aeronaut. Soc., L. 613—636 (August, 1946).
- 1-2. Hill G. T. R., Advances in aircraft structural design, Proceedings of the Third Anglo-American Aeronautical Conference, Brighton, England, September, 1951.
- 1-3. Brewer G., The collapse of monoplane wings, Flight, 1913.
- 1-4. Lancheater F. W., Torsional vibration of the tail of an airplane Br. A. R. C., R. & M. 276, Part 1, July, 1916.
- 1-5. Bairstow L., Fage A., Oscillations of the tailplane and body of an aeroplane in flight, Br. A. R. C., R. & M. 276, Part 2, July, 1916.
- 1-6. Fokker A. H. G., The flying dutchman, Henry Holt and Co., Inc., 1931.
- 1-7. Baumhauer A. F., Koning C., On the stability of oscillations of an airplane wing International Air Congress, London, 1922.
- 1-8. Reissner H., Neuere probleme aus der Flugzeugstatik, Z. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 17, No 7 (April, 1926).
- 1-9. Roxbee Cox H., Pugsley A. G., Theory of loss of lateral control due to wing twisting, Br. A. R. C., R. & M. 1506, October, 1932.
- 1-10. Glauert H., The force and moment of an oscillating airfoil, Br. A. R. C., R. & M. 1216 November, 1928.
- 1-11. Frazer R. A., Duncan W. J., The flutter of aeroplane wings, Br. A. R. C., R. & M. 1155, August, 1928.
- 1-12. Küssner H. G., Schwingungen von Flugzeugflügeln, Luftfahrtforschung, 4 (June, 1929).
- 1-13. Theodorsen T., General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter, N. A. C. A. Report 496, 1935.

### Глава 2

- 2-1. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А., Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, ИЛ, Москва, 1950.
- 2-2. Niles A. S., Newell J. S., Airplane structures, Vol. 1, New York, 1945.
- 2-3. Sokolnikoff I. S., Mathematical theory of elasticity, New York, 1946.
- 2-4. Ловитт У., Линейные интегральные уравнения, Гостехиздат, М.—Л., 1958.
- 2-5. Bencotter S. U., Gossard M. L., Matrix methods for calculating cantilever-beam deflections, N. A. C. A. T. N. 1827, March 1949.
- 2-6. Tables of Lagrangian interpolation coefficients, National Bureau of Standards, New York, 1944.
- 2-7. Милн В. Э., Численный анализ, ИЛ, Москва, 1951.
- 2-8. Timoshenko S., Goodier J. N., Theory of Elasticity, New York, 1951.
- 2-9. Карслоу Х., Егер Д., Операционные методы в прикладной математике, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
- 2-10. Peery D. J., Aircraft structures, New York, 1950.
- 2-11. Kuhn P., Deformation analysis of wing structures, N. A. C. A. T. N. 1361, July, 1947.
- 2-12. Levy S., Computation of influence coefficients for aircraft structures with discontinuities and sweepback, J. Aeronaut. Sci., 14, No 10, 547—560 (October, 1947).
- 2-13. Lang A. L., Bisplinghoff R. L., Some results of swept-back wing structural studies, J. Aeronaut. Sci., 18, No 11, 705—717 (November, 1951).
- 2-14. Langefors B., Analysis of elastic Structures by matrix transformation with special regard to semimonocoque structures, Journ. Aeronautical Sci, 19, No 7, 451—458 (July, 1952).
- 2-15. Wehle L. B., Lansing W., A method for reducing the analysis of complex redundant structures to a routine procedure, J. Aeronaut. Sci., 19, No 10, 677—684 (October, 1952).

- 2-16. Schuerch H. U., Delta wing design analysis, S. A. E. National Aeronautic Meeting, Los Angeles September 29—October 3, 1953, Preprint No 141.
- 2-17. Levy S., Structural analysis and influence coefficients for delta wings, J. Aeronaut. Sci., 20, No 7, 449—454 (July, 1953).
- 2-18. Turner M. J. Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J., Stiffness and deflection analysis of complex structures (Institute of Aeronautical Sciences, New York).
- 2-19. Reissner E., Stein M., Torsion and transverse bending of cantilever plates, N. A. C. A. T. N. 2369, June, 1951.
- 2-20. Fung Y. C., Elastostatic and aeroelastic problems relating to thin wings of high-speed airplanes, Ph. D. thesis, California Institute of Technology, 1948.
- 2-21. Fung Y. C., Bending of thin elastic plates of variable thickness, J. Aeronaut. Sci., 20, No 7, 455—468 (July, 1953).
- 2-22. Schuerch H. U., Structural analysis of swept, low aspect-ratio multi-spar aircraft wings, Aeronaut. Engineering Review, 11, No 11, pp. 34—41, November, 1952.

## Глава 3

- 3-1. Hildebrand F. B., Advanced calculus for engineers, New York 1949.
- 3-2. Siddall J. N., Isakson G., Approximate analytical methods for determining natural modes and frequencies of vibration. Report of M. I. T. Aeroelastic and Structures Research Laboratory for Office of Naval Research, January 15 1951.
- 3-3. Pinney E., Vibration modes of tapered beams, American Mathematical Monthly, p. 391, August—September, 1947.
- 3-4. Watson G. N., Treatise on the theory of Bessel functions, p. 107, Cambridge, England, 1932.
- 3-5. Bisplinghoff R. L., Isakson G., O'Brien T. F., Gust loads on rigid and elastic airplanes. Report of M. I. T., Aeroelastic and Structures Research Laboratory for Navy Bureau of Aeronautics, August, 1949.
- 3-6. Карслоу Х., Егер Д., Операционные методы в прикладной математике, Гостехиздат, М. — Л., 1948.
- 3-7. Ловитт У., Линейные интегральные уравнения, Гостехиздат, М. — Л., 1958.
- 3-8. Levy S., Computation of influence coefficients for aircraft structures with discontinuities, J. Aeronaut. Sci., 14, No 10, 547—560 (October, 1947)
- 3-9. Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, Гостехиздат, М. — Л., 1937.

## Глава 4

- 4-1. Siddall J. N., Isakson G., Approximate analytical methods for computing natural modes and frequencies of vibration. Report of M. I. T. Aeroelastic and Structures Laboratory for the Office of Naval Research, January, 1951.
- 4-2. Collatz L., Eigenwertprobleme. New York, 1948.
- 4-3. Reissner E., Note on the method of complementary energy, J. Math. Phys., 27, 159—160 (1948).
- 4-4. Duncan W. J., Mechanical admittances and their application to oscillation problems, Br. A. R. C., R. & M., 2000, 1947.
- 4-5. Williams D., The use of the principle of minimum potential energy in problems of static equilibrium, Br. A. R. C., R. & M., 1827, 1937.
- 4-6. Rauscher M., Station functions and air density variations in flutter analysis, J. Aeronaut. Sci., 16, No 6, 345—353 (June, 1949).
- 4-7. Beskin L., Rosenberg R. M., Higher modes of vibration by a method of sweeping, J. Aeronaut. Sci., 13, No 11, 597—604 (November, 1946).
- 4-8. Duncan W. J., Gaerkin's method in mechanics and differential equations Br. A. R. C., R. & M., 1798, 1937.
- 4-9. Holzer H., Die Berechnung der Drehschwingungen, Berlin, 1921.
- 4-10. Myklestad N. O., Vibration analysis, New York, 1944.
- 4-11. Wayland H., Expansion of determinantal equations into polynomial form, Quarterly of Appl. Math., 11, No 4, 277—306 (January, 1945)
- 4-12. Isakson G., A method for accelerating the convergence of an iteration procedure, J. Aeronaut. Sci., 16, 443 (July, 1949).
- 4-13. Flomenhoft H. I., A method for determining mode shapes and frequencies above the fundamental by matrix iteration, J. Appl. Mech., 17, No 3 249—256 (September 1950)
- 4-14. Levy S., Computation of influence coefficients for aircraft structures with discontinuities, J. Aeronaut. Sci., 14, No 10, 547—560 (October, 1947).

## Глава 5

- 5-1. Rauscher M., Introduction to aeronautical dynamics, New York 1953.
- 5-2. Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат М. — Л. 1947.
- 5-3. Кеелая J. H., Theodynamics, New York, 1941.

- 5-4. Phillips H. B., Vector analysis, New York, 1933.
- 5-5. Lichtenstein L., Grundlagen der Hydromechanik, Berlin, 1929.
- 5-6. Munk M. M., The aerodynamic forces on airship hulls, N. A. C. A. Report 184, 1924.
- 5-7. Theodorsen T., Impulse and momentum in an infinite fluid, Theodore von Kármán anniversary volume, California institute of technology, 1941, pp. 49—58.
- 5-8. Allen H. J., Pressure distribution and some effects of viscosity on slender inclined bodies of revolution, N. A. C. A. T. N. 2044, 1950.
- 5-9. Карман Т., Бюргерс И., Теоретическая аэродинамика идеальных жидкостей, "Аэродинамика" (ред. Дюрэнд В.), т. II, Изд-во оборонной промышленности, М. — Л., 1939.
- 5-10. Страттон Дж., Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М. — Л., 1948.
- 5-11. Mangler K. W., Improper integrals in theoretical aerodynamics, British royal aircraft establishment report aero 2424, 1951.
- 5-12. Allen H. J., General theory of airfoil sections having arbitrary shape or pressure distributions, N. A. C. A. Report 833, 1945.
- 5-13. Söhngen H., Die Lösungen der Integralgleichung und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie, Math. Z., 45, 245—264 (1939).
- 5-14. Abbott I. A., von Doenhoff A. E., Stivers L. S., Summary of Airfoil data, N. A. C. A. Report 824, 1945.
- 5-15. Reissner E., Effect of finite span on the airload distributions for oscillating wings, I—Aerodynamic theory of oscillating wings of finite span, N. A. C. A. T. N. 1194, 1947.
- 5-16. Reissner E., On the general theory of thin airfoils for nonuniform motion, N. A. C. A. T. N. 946, 1944.
- 5-17. Kinner W., Die kreisförmige Tragfläche auf potential-theoretischer Grundlage, Ingenieur Archiv, VIII, 47—80 (1937).
- 5-18. Jones W. P., The calculation of aerodynamic derivative coefficients for wings of any planform in nonuniform motion, Br. A. R. C., R. & M. 2470, 1952.
- 5-19. Reissner E., Note on the theory of lifting surfaces, Proc. of the Nat. Acad. of Sci., 35, No 4 (April, 1949).
- 5-20. Sears W. R., Pai S. I., Some aeroelastic properties of swept wings, J. of the Aeronaut. Sci., 16, No 2 (February, 1949).
- 5-21. Multhopp H., Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln, Luftfahrtforschung, 15, No 4 (June, 1938).
- 5-22. De Young J., Harper C. W., Theoretical symmetrical span loading at subsonic speeds for wings having arbitrary planform, N. A. C. A. Report 921, 1948.
- 5-23. Weissinger J., The lift distribution of swept-back wings, N. A. C. A. T. M. 1120, 1947.
- 5-24. Jones R. T., Properties of low aspect-ratio pointed wings at speeds below and above the speed of sound, N. A. C. A. Report 835, 1946.
- 5-25. Lawrence H. R., The lift distribution on low aspect-ratio wings at subsonic speeds, J. of the Aeronaut. Sci., 18, No 10 (October, 1951).
- 5-26. Laidlaw W. R., Theoretical and experimental pressure distributions on low aspect-ratio wings oscillating in an incompressible flow, Technical Report 51-2 of the M. I. T. Aeroelastic and structures research laboratory for Naval Bureau of Aeronautics, September, 1954.
- 5-27. Diederich F. W., A planform parameter for correlating certain aerodynamic characteristics of swept wings, N. A. C. A. T. N. 2335, 1951.
- 5-28. Diederich F. W., Budiansky B., Divergence of swept wings, N. A. C. A. T. N. 1680, 1948.
- 5-29. Theodorsen T., General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter, N. A. C. A. Report 496, 1935.
- 5-30. Glauert H., The force and moment on an oscillating aerofoil, Br. A. R. C., R. & M. 1242, 1929.
- 5-31. Cicala P., Le Azioni aerodinamiche sui profili di ala oscillanti in presenza di corrente uniforme, Mem. R. Accad. Torino, Ser. 2, 1, 68, (1934—1935).
- 5-32. Ellenberger G., Bestimmung der Luftkräfte auf einen ebenen Tragflügel mit Querruder, Z. angew. Math. Mech., 16, Heft 4 (August, 1936).
- 5-33. von Borbely S., Mathematischer Beitrag zur Theorie der Flügelschwingungen, Z. angew. Math. Mech., 16, Heft 1 (February, 1936).
- 5-34. Kassner R., Fingado H., Das ebene Problem der Flügelschwingung, Luftfahrtforsch., 13, Nr. 11 (November, 1936).
- 5-35. Küssner H. G., Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln, Luftfahrtforsch., 13, Nr. 12. (December, 1936).
- 5-36. Грэй А., Мэтьюз Г., Мак-Роберт Т., Функции Бесселя и их приложение в физике и механике, Изд. иностр. лит., М., 1953.
- 5-37. Schwarz L., Berechnung der Druckverteilung einer harmonisch sich verformenden Tragfläche in ebener Strömung Luftfahrtforsch., 17, Nr 11, 12 (December, 1940).

- 5-38. Bisplinghoff R. L., Isakson G., Pian T. H. H., Flomenhoft H. I., O'Brien T. F., An investigation of stresses in aircraft structures under dynamic loading, Report of the M. I. T. aeroelastic and structures research laboratory for Naval Bureau of Aeronautics, 1949.
- 5-39. Theodorsen T., Garrick I. E. Nonstationary flow about a wing-aileron-tab combination, including aerodynamic balance, N. A. C. A. Report 736, 1942.
- 5-40. Küssner H. G. Schwarz L., Der schwingende Flügel mit aerodynamischem ausgeglichenem Ruder, Luftfahrtforschung, 17, Nr 11/12 (1940).
- 5-41. Smilg B., Wasserman L. S., Application of three-dimensional flutter theory to aircraft structures, Air Force Technical Report 4798, 1942.
- 5-42. Wasserman L. S., Mykytow W. S., Spielberg I. N., Tab flutter theory and applications, Air Force Technical Report 5153, 1944.
- 5-43. Halfman R. L., Experimental aerodynamic derivatives of a sinusoidally oscillating airfoil in two-dimensional flow, N. A. C. A. Report 1108, 1952.
- 5-44. Greidanus J. H., van de Vooren A. I., Bergh H., Experimental determination of the aerodynamic coefficients of an oscillating wing in incompressible, two-dimensional flow, Parts I-IV, National Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam, Reports F-101, 102, 103, and 104, 1952.
- 5-45. Andreopolis T. C., Cheilek H. A., Donovan A. F., Measurements of the aerodynamic hinge moments of an oscillating flap and tab, Air Force Technical Report 5784, 1949.
- 5-46. Spielberg I. N., The two-dimensional incompressible aerodynamic coefficients for oscillatory changes in airfoil camber, Wright air development Center, U. S. Air Force Technical Note WCNS 52-7, 1952.
- 5-47. Luke Y. L., Dengler M. A., Tables of the Theodorsen circulation function for generalized motion, J. of the Aeronaut. Sci., 8, No 7 (July, 1951).
- 5-48. Söhngen H., Bestimmung der Auftriebsverteilung für beliebige instationäre Bewegungen (Ebenes Problem), Luftfahrtforsch., 17, Nr 11, 12 (December, 1940).
- 5-49. Jones W. P., Aerodynamic forces on wings in nonuniform motion, Br. A. R. C., R. & M. No 2117, 1945.
- 5-50. Fraeys de Veubeke B., Aérodynamique instationnaire des profils minces déformables, Bulletin du Service Technique de l'Aéronautique (Brussels, Belgium), No 25, November, 1953.
- 5-51. Hildebrand F. B., Advanced calculus for engineers, New York, 1948.
- 5-52. Снеддон И., Преобразования Фурье. Изд. иностр. лит., М., 1955.
- 5-53. Wagner H., Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln, Z. angew. Math. Mech., 5, Heft 1 (February, 1925).
- 5-54. Garrick I. E., On some Fourier transforms in the theory of nonstationary flows, Proceedings of the Fifth international congress for applied mechanics, New York, 1939, pp. 590—593.
- 5-55. Sears W. R., Operational methods in the theory of airfoils in nonuniform motion, J. of the Franklin Inst., 230, 95—111 (1940).
- 5-56. von Kármán T., Sears W. R., Airfoil theory for nonuniform motion, J. of the Aeronaut. Sci., 5, No 10 (August, 1938).
- 5-57. Neumark S., Pressure distribution on an airfoil in nonuniform motion, J. of the Aeronaut. Sci., Readers'Forum, 19, No 3 (March, 1952).
- 5-58. Churchill R. V., Modern operational mathematics in engineering, New York, 1944.

## Глава 6

- 6-1. Hildebrand F. B., Advanced calculus for engineers, New York, 1948.
- 6-2. De Young J., Harper C. W., Theoretical symmetric span loading at subsonic speeds for wings having arbitrary planform, N. A. C. A. Report 921, 1948.
- 6-3. Липман Г., Пакет А., Введение в аэродинамику сжимаемой жидкости, ИЛ, М., 1949.
- 6-4. Katzoff S., Wind-tunnel wall corrections (Appendix A), N. A. C. A. — University conference on aerodynamics, Langley Field Virginia, June, 1948.
- 6-5. Heaslet M. A., Lomax H., Spreiter J. R., Linearized compressible flow theory for sonic flight speeds, N. A. C. A. Report 956, 1950.
- 6-6. Diederich F. W., A planform parameter for correlating certain aerodynamic characteristics of swept wings, N. A. C. A. T. N. 2333, 1951.
- 6-7. Vincenti W., Comparison between theory and experiment for wings at supersonic speeds, N. A. C. A. T. N. 2100, 1950.
- 6-8. Ackeret J., Air forces on airfoils moving faster than sound, N. A. C. A. T. M. 317, 1925.
- 6-9. Puckett A. E., Supersonic wave drag of thin airfoils, J. of the Aeronaut. Sci. 13, No 9 (September, 1946).
- 6-10. Eyyard J. C., Use of source distributions for evaluating theoretical aerodynamics of thin finite wings at supersonic speeds, N. A. C. A. Report 951, 1950.



- 6-11. Lagerstrom P. A., Linearized supersonic theory of conical wings, N. A. C. A. T. N. 1685, 1950.
- 6-12. Lighthill M. J., Supersonic theory of wings of finite span, Br. A. R. C., R. & M. 2001, 1944.
- 6-13. Heaslet M. A., Lomax H., Jones A. L., Volterra's solution of the wave equation as applied to three-dimensional supersonic airfoil problems, N. A. C. A. Report 889, 1947.
- 6-14. Lomax H., Heaslet M. A., Fuller F. B., Formulas for source, doublet, and vortex distributions in supersonic wing theory, N. A. C. A. T. N. 2252, 1950.
- 6-15. Heaslet M. A., Lomax H., The use of source-sink and doublet distributions extended to the solution of boundary-value problems in supersonic flow, N. A. C. A. Report 900, 1948.
- 6-16. Lapin E., Charts for the computation of lift and drag of finite wings at supersonic speeds, Douglas Aircraft Co., Report No SM-13480, 1949.
- 6-17. Possio C., L'azione aerodinamica sul profilo oscillante in un fluido compressibile a velocità iposonora, L'Aerotecnica, XVIII, fasc. 4 (April, 1938).
- 6-18. Dietze F., Die Luftkräfte der harmonisch schwingenden in sich verformbaren Platte (Ebenes Problem), Luftfahrtforsch., 16, Lfg. 2, 84—96 (1939).
- 6-19. Fettis H. E., An approximate method for the calculation of nonstationary air forces at subsonic speeds, U. S. Air Force, Wright Air Development Center Technical Report 52—56, 1952.
- 6-20. Reissner E., Sherman S., Compressibility effects in flutter, Report No. S. B. 240-S-1, Airplane Division, Curtiss-Wright Corp., January, 1944.
- 6-21. Хаскин Д. М., Колебания крыла в дозвуковом потоке газа, Прикл. матем. и мех., XI, № 1, 129—149 (1947).
- 6-22. Reissner E., On the application of Mathieu functions in the theory of subsonic compressible flow past oscillating airfoils, N. A. C. A. T. N. 2363, 1951.
- 6-23. Timman R., van de Vooren A. I., The oscillating wing with aerodynamically balanced control surface in a two-dimensional subsonic, compressible flow, Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam, Report F. 54, 1949.
- 6-24. Timman R., van de Vooren A. I., Greidanus J. H., Aerodynamic coefficients of an oscillating airfoil in two-dimensional subsonic flow, J. of the Aeronaut. Sci., 18, No 12 (December, 1951).
- 6-25. Van Spiegel E., van de Vooren A. I., On the theory of the oscillating wing in two-dimensional subsonic flow, Nationaal luchtvaartlaboratorium, Amsterdam, Report F. 142, 1953.
- 6-26. Karp S. N., Shu S. S., Weil H., Aerodynamics of the oscillating airfoil in compressible flow., U. S. Air Force, Air Materiel Command, Technical Report F-TR-1167-ND, 1947.
- 6-27. Янке Э., Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, М. — Л., 1948.
- 6-28. Fettis H. E., Tables of lift and moment coefficients for an oscillating wing-aileron combination in two-dimensional subsonic flow, Air Force Technical Report 6688 (с добавлением), 1951.
- 6-29. Smilg B., Wasserman L. S., Application of three-dimensional flutter theory to aircraft structures, Air Force Technical Report 4798, 1942.
- 6-30. Luke Y. L., Tables of coefficients for compressible flutter calculations, Air Force Technical Report 6200, 1950.
- 6-31. Turner M. J., Rabinowitz S., Aerodynamic coefficients for an oscillating airfoil with hinged flap, with tables for a mach number of 0.7, N. A. C. A. T. N. 2213, 1950.
- 6-32. Мак-Лаклан Н., Теория и приложения функций Матье, ИЛ, М., 1953.
- 6-33. Tables relating to Mathieu functions, Computation Laboratory, U. S. National Bureau of Standards, Columbia University Press, New York, 1951.
- 6-34. Mazelsky B., Numerical determination of indicial lift of a twodimensional sinking airfoil at subsonic Mach numbers from oscillatory lift coefficients with calculations for Mach number 0.7, N. A. C. A. T. N. 2562, 1951.
- 6-35. Mazelsky B., Determination of indicial lift and moment of a twodimensional pitching airfoil at subsonic Mach numbers from oscillatory coefficients with numerical calculations for a Mach number of 0.7, N. A. C. A. T. N. 2613, 1952.
- 6-36. Mazelsky B., Drischler J. A., Numerical determination of indicial lift and moment functions for a two-dimensional sinking and pitching airfoil at Mach numbers 0.5 and 0.6, N. A. C. A. T. N. 2793, 1952.
- 6-37. Lomax H., Heaslet M. A., Fuller F. B., Sluder L., Two-and three-dimensional unsteady lift problems in high-speed flight, N. A. C. A. Report 1077, 1952.
- 6-38. Goodman T. R., The lift distribution on conical and nonconical flow regions of thin finite wings in a supersonic stream, J. of the Aeronaut. Sci., 16, No 6 (June, 1949)
- 6-39. Garrick I. E., On some Fourier transforms in the theory of nonstationary flows,



- Proceedings of the Fifth International Congress for Applied Mechanics, New York, 1939, pp. 590—593.
- 6-40. von Borbely S., Über die Luftkräfte, die auf einen harmonisch schwingenden zweidimensionalen Flügel bei Überschallgeschwindigkeit wirken, *Z. angew. Math. Mech.*, 22, Nr 4 (August, 1942)
- 6-41. Garrick I. E., Rubinow S. I., Flutter and oscillating air-force calculations for an airfoil in two-dimensional supersonic flow, N. A. C. A. Report 846, 1946.
- 6-42. Schwarz L., Untersuchung einiger mit den Zylinderfunktionen nullter Ordnung verwandter Funktionen, *Luftfahrtforsch.*, 20, Lfg. 12 (February, 1944).
- 6-43. Huckel V., Durling B. J., Tables for wing-aileron coefficients of oscillating air forces for two-dimensional supersonic flow, N. A. C. A. T. N. 2055, 1950.
- 6-44. Van Dyke M. D., Supersonic flow past oscillating airfoils including nonlinear thickness effects, N. A. C. A. T. N. 2982, 1953.
- 6-45. Jones W. P., The influence of thickness chord ratio on supersonic derivatives for oscillating aerofoils, *Br. A. R. C., R. & M* 2679, 1947.
- 6-46. Лайтхилл М., Колебания профилей при больших числах  $M$ , сб. „Механика“, ИЛ, М., № 5 (27), 134—140 (1954).
- 6-47. Temple G., Jahn H. A., Flutter at supersonic speeds: derivative coefficients for a thin aerofoil at zero incidence, *Br. A. R. C., R. & M.* 2140, 1945.
- 6-48. Stewartson K., On the linearized potential theory of unsteady supersonic motion, *Quart. J. of Mech. and Appl. Math.*, III, Part 2 (June, 1950).
- 6-49. Гарднер М., Бэрнс Дж., Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
- 6-50. Biot M. A., Loads on a supersonic wing striking a sharp-edged gust, Cornell Aeronautical Laboratory Report SA-247-S-7, 1948.
- 6-51. Chang C. C., Transient aerodynamic behavior of an airfoil due to different arbitrary modes of nonstationary motions in a supersonic flow, N. A. C. A. T. N. 2333, 1951.
- 6-52. Rott N., Flügelschwingungsformen in ebener kompressibler Potentialströmung, *Z. angew. Math. Phys.*, 1, Fasc. 6, 380—410 (1950).
- 6-53. Nelson H. C., Berman J. H., Calculations on the forces and moments for an oscillating wing-aileron combination in two-dimensional potential flow at sonic speed, N. A. C. A. T. N. 2590, 1952.

## Глава 7

- 7-1. Schade T., Krienes K., The oscillating circular airfoil on the basis of potential theory, N. A. C. A. T. M. 1098, 1947.
- 7-2. Küssner H. G., A general method for solving problems of the unsteady lifting surface theory in the subsonic range, *J. of the Aeronaut. Sci.*, 21, No 1 (January, 1954).
- 7-3. Cicala P., Comparison of theory with experiment in the phenomenon of wing flutter, N. A. C. A. T. M. 887, 1939.
- 7-4. Reissner E., Effect of finite span on the airload distributions for oscillating wings, I—Aerodynamic theory of oscillating wings of finite span, N. A. C. A. T. N. 1194, 1947
- 7-5. Reissner E., Stevens J. E., Effect of finite span on the airload distributions for oscillating wings, II—Methods of calculation and examples of application, N. A. C. A. T. N. 1195, 1947.
- 7-6. Ashley H., Zartarian G., Neilson D. O., Investigation of certain unsteady aerodynamic effects in longitudinal dynamic stability, Air Force Technical Report 5986, 1951.
- 7-7. Bisplinghoff R. L., Isakson C., Pian T. H. H., Flomenhoft H. I., O'Brien T. F., An Investigation of stresses in aircraft structures under dynamic loading, Report by Aeroelastic and structures research laboratory, M. I. T. for U S Navy Bureau of Aeronautics, 1949.
- 7-8. Jones R. T., The unsteady lift of a wing of finite aspect ratio, N. A. C. A. Report 681, 1940.
- 7-9. Shen S. F., A new lifting-line theory for the unsteady lift of a swept or unswept wing in an incompressible fluid, Part X of Air Force Technical Report 6378 (General title: Effect of structural flexibility on aircraft loading), 1953.
- 7-10. Turner M. J., Aerodynamic theory of oscillating swept-back wings, *J. of Math and Phys.*, XXVIII, No 4 (January, 1950).
- 7-11. Hildebrand F. B., Reissner E., Studies for an aerodynamic theory of oscillating swept-back wings of finite span, Part III, Chance Vought Aircraft Report 7039, 1948.
- 7-12. Dengler M. A., Golland M., The subsonic calculation of circulatory spanwise loading for oscillating airfoils by lifting-line techniques, *J. of the Aeronaut. Sci.*, 19, No 11 (November, 1952).
- 7-13. Jones W. P., The calculation of aerodynamic derivative coefficients for wings of any planform in nonuniform motion, *Br. A. R. C., R. & M.* 2470, 1952.

- 7-14. Fettis H. E., Calculations of the flutter characteristics of swept wings at subsonic speeds, Air Force Air Materiel Command Memorandum Report TSEAC 5-4595-2-9, 1946.
- 7-15. Spielberg I. N., Fettis H. E., Toney H. S., Methods for calculating the flutter and vibration characteristics of swept wings at subsonic speeds, Air Force Air Materiel Command Memorandum Report No. MCREXA 5-4595-8-4, 1948.
- 7-16. Spielberg I. N., The two-dimensional incompressible aerodynamic coefficients for oscillatory changes in airfoil camber, U. S. Air Force, Wright Air Development Center, Technical Note WCNS 52-7, 1952.
- 7-17. Broadbent E. G., Some considerations of the flutter problems of highspeed aircraft, Second international aeronautical conference. Published by Institute of the aeronautical sciences, Inc., New York, 1949.
- 7-18. Barmby J. G., Cunningham H. J., Garrick I. E., Study of effects of sweep on the flutter of cantilever wings, N. A. C. A. Report 1014, 1951.
- 7-19. Лоуренс Г., Гербер Е., Аэродинамические силы, действующие на колеблющееся крыло малого удлинения в несжимаемой жидкости, сб. „Механика“, ИЛ, М., № 2 (24), 48—71 (1954).
- 7-20. Laidlaw W. R., Theoretical and experimental pressure distributions on low-aspect ratio wings oscillating in an incompressible flow, Technical Report 51-2 of the M. I. T. Aeroelastic and structures research laboratory for Naval Bureau of Aeronautics, September, 1954.
- 7-21. Lomax H., Sluder L., Chordwise and compressibility corrections to slender-wing theory, N. A. C. A. T. N. 2295, 1951.
- 7-22. Voss H. M., Hassig H. J., Introductory study of flutter of low aspect-ratio wings at subsonic speeds, M. I. T. Aeroelastic and structures research laboratory Report on Contract NOa(s) 51-109c, 1952.
- 7-23. Merbt H., Landahl M., Aerodynamic forces on oscillating low aspect-ratio wings in compressible flow, Swedish K. T. H. AERO T. N. 30, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1953.
- 7-24. Bryson A. E., Stability derivatives for a slender missile with application to a wing-body-vertical-tail configuration, J. of the Aeronaut. Sci., 20, No 5 (May, 1953).
- 7-25. Miles J. W., On nonsteady motion of slender bodies, Aeronaut. Quarterly, 2, 183—194 (November, 1950).
- 7-26. Laidlaw W. R., Hsu P. T., A semi-empirical method for determining delta wing pressure distributions in an incompressible flow, J. of the Aeronaut. Sci., Readers' Forum, 21, No 12 (December, 1954).
- 7-27. Miles J. W., On the compressibility correction for subsonic unsteady flow, J. of the Aeronaut. Sci., Readers' Forum, 17, No 3 (March, 1950).
- 7-28. Reissner E., On the theory of oscillating airfoils of finite span in subsonic compressible flow, N. A. C. A. T. N. 1953, 1949.
- 7-29. Watkins C. E., Runyan H. L., Woolston D. S., On the kernel function of the integral equation relating the lift and downwash distributions of oscillating finite wings in subsonic flow, N. A. C. A. T. N. 3131, January, 1954.
- 7-30. Garrick I. E., Watkins C. E., Some recent developments in the aerodynamic theory of oscillating wings. Preprint of Proceedings of N. A. C. A. — University conference on aerodynamics, Construction and propulsion, Lewis flight propulsion laboratory, Cleveland, Ohio, October, 1954.
- 7-31. Voss H. M., Low aspect-ratio flutter, Sc. D. Thesis, M. I. T., June, 1954.
- 7-32. Voss H. M., Zartarian G., Hsu P. T., Application of numerical integration techniques to the low aspect-ratio flutter problem in subsonic and supersonic flows, M. I. T., Aeroelastic and structures research laboratory Report on Contract NOa(s) 53-564-c, October, 1954.
- 7-33. Walsh J., Zartarian G., Voss H. M., Generalized aerodynamic forces on the delta wing with supersonic leading edges, Institute of the aeronautical sciences preprint No 433, January, 1954.
- 7-34. Garrick I. E., Rubinow S. I., Theoretical study of air forces on an oscillating or steady thin wing in a supersonic main stream, N. A. C. A. T. N. 1383, 1947.
- 7-35. Nelson H. C., Lift and moment on oscillating triangular and related wings with supersonic edges, N. A. C. A. T. N. 2494, 1951.
- 7-36. Miles J. W., On harmonic motions of wide delta airfoils at supersonic speeds, U. S. Naval ordnance laboratory report NAVORD, 1234, 1950.
- 7-37. Froehlich J. E., Nonstationary motion of purely supersonic wings, J. of the Aeronaut. Sci., 18, No 5 (May, 1951).
- 7-38. Stewart H. J., Li T. Y., Source-superposition method of solution of a periodically oscillating wing at supersonic speed. Quart. of Appl. Math., IX, No 1 (April, 1951).
- 7-39. Stewart H. J., Li T. Y., Periodic motions of a rectangular wing moving at supersonic speed, J. of the Aeronaut. Sci., 17, No 9 (September, 1950).

- 7-40. Li T. Y., Purely rolling oscillations of a rectangular wing in supersonic flow, *J. of the Aeronaut. Sci.*, 18, No 3 (March, 1951).
- 7-41. Chang C. C., The aerodynamic behavior of a harmonically oscillating finite swept-back wing in supersonic flow, N. A. C. A. T. N. 2467, 1951.
- 7-42. Watkins C. E., Effect of aspect-ratio on the air forces and moments of harmonically oscillating thin rectangular wings in supersonic potential flow, N. A. C. A. Report 1028, 1951.
- 7-43. Nelson H. C., Rainey R. A., Watkins C. E., Lift and moment coefficients expanded to the seventh power of frequency for oscillating rectangular wings in supersonic flow and applied to a specific flutter problem, N. A. C. A. T. N. 3076, 1954.
- 7-44. Watkins C. E., Berman J. H., Air forces and moments on triangular and related wings with subsonic leading edges oscillating in supersonic potential flow, N. A. C. A. Report 1099, 1952.
- 7-45. Watkins C. E., Berman J. H., Velocity potential and air forces associated with a triangular wing in supersonic flow, with subsonic leading edges, and deforming harmonically according to a general quadratic equation, N. A. C. A. T. N. 3009, 1953.
- 7-46. Хаскинд М. Д., Фалькович С. В., Колебания крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке, *Прикл. матем. и мех.*, XI, № 3, 371—376 (1947).
- 7-47. Красильщикова Е. А., Возмущенное движение воздуха при вибрациях крыла, движущегося со сверхзвуковой скоростью, *Докл. АН СССР*, XVI, № 6 (1947).
- 7-48. Франкль Ф. И., Карпович Е. А., *Газодинамика тонких тел*, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
- 7-49. Rott N., On the unsteady motion of a rectangular wing in supersonic flow, *J. of the Aeronaut. Sci.*, Readers' Forum 18, No 11 (November, 1951).
- 7-50. Lomax H., Heaslet M. A., Fuller F. B., Sluder L., Two- and three-dimensional unsteady lift problems in high-speed flight, N. A. C. A. Report 1077, 1952.
- 7-51. Liban E., Neuringer J., Rabinowitz S., Flutter analysis of an elastic wing with supersonic edges, Republic Aviation Corp. Report E-SAF-1, April, 1953.
- 7-52. Pines S., Dugundji J., Application of aerodynamic flutter derivatives to flexible wings with supersonic and subsonic edges, Republic Aviation Corp. Report E-SAF-2, April, 1954.
- 7-53. Miles J. W., The oscillating rectangular airfoil at supersonic speeds, U. S. Naval Ordnance Laboratory Report NAVORD 1170, 1949.
- 7-54. Miles J. W., A general solution for the rectangular airfoil in supersonic flow, *Quart. of Appl. Math.*, XI, No 1 (April, 1953).
- 7-55. Stewartson K., On the linearized potential theory of unsteady supersonic motion, *Quart. J. of Mech. and Appl. Math.*, III, 182—199 (1950)
- 7-56. Темпль Дж., Неустойчившееся движение, „Современное состояние аэродинамики больших скоростей“ (ред. Л. Хойарт), т. I, гл. IX, ИЛ, М., 1955, стр. 336—385.
- 7-57. Heaslet M. A., Spreiter J. R., Reciprocity relations in aerodynamics, N. A. C. A. T. N. 2700, May, 1952.
- 7-58. Flach A. H., Reverse flow and variational theorems for lifting surfaces in nonstationary compressible flow, *J. of the Aeronaut. Sci.*, 20, No 2 (February, 1953)
- 7-59. Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S., On two-dimensional nonsteady motion of a slender body in a compressible fluid, *J. of Math. and Phys.*, 27, No 3 (October, 1948).
- 7-60. Miles J. W., Monograph on unsteady flow (готовится к печати).
- 7-61. Ламб Г., *Гидродинамика*, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
- 7-62. Miles J. W., Unsteady supersonic flow past slender pointed bodies (unclassified paper). Proceedings of the Naval Bureau of Ordnance Symposium on Aeroballistics, Report NAVORD 1651, pp. 429—480, 1950.
- 7-63. Zahm A. F., Flow and force equations for a body revolving in a fluid, N. A. C. A. Report 323, 1928.

## Глава 8

- 8-1. Theodorsen T., General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter, N. A. C. A. Report 496, 1935.
- 8-2. Niles A. S., Newell J. S., *Airplane structure*, Vol. I, 3rd ed., 1935.
- 8-3. Reissner H., Neuere Probleme aus der Flugzeugstatik, *Z. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt*, 17, No 7, 154—169 (1926).
- 8-4. Cox H. R., Pugsley A. G., Theory of loss of lateral control due to wing twisting, *Br. A. R. C., R. & M.*, 1506, October, 1932.
- 8-5. Cox H. R., Pugsley A. G., Stability of static equilibrium of elastic and aerodynamic actions on a wing, *Br. A. R. C., R. & M.* 1059, April, 1934.
- 8-6. Pugsley A. G., Cox H. R., The aileron power of a monoplane, *Br. A. R. C., R. & M.* 1640, April, 1934.

- 8-7. Dätwyler G., Der Einfluss der elastischen Deformationen auf die Luftkräfte am Tragflügel, Schweizer Aero-Revue, 6, No 20, 264 (October, 1931).
- 8-8. Dätwyler G., Calculations of the effect of wing twist on the air forces acting on a monoplane wing, N. A. C. A. T. N. 520, 1935.
- 8-9. Flax A. H., The influence of structural deformation on airplane characteristics, J. of the Aeronaut. Sci., 12, No 1 (January, 1945).
- 8-10. Hildebrand F. B., Reissner E., The influence of the aerodynamic span effect on the magnitude of the torsional divergence velocity and on the shape of the corresponding deflection mode, N. A. C. A. T. N. 926, February, 1944.
- 8-11. Lawrence H. R., Sears W. R., Three-dimensional wing theory for the elastic wing, Report No A-59, June, 1944.
- 8-12. Pines S., A unit solution for the load distribution of a nonrigid wing by matrix methods, J. of the Aeronaut. Sci., 16, No 8 (August, 1949).
- 8-13. Карман Т. и Био М., Математические методы в инженерном деле, Гостехиздат, М., 1948.
- 8-14. Pearson H. A., Aiken W. S., Jr., Charts for the determination of wing torsional stiffness required for specified rolling characteristics of aileron reversal speed, N. A. C. A. Report 799, 1944.
- 8-15. Groth E., Evaluation of methods for calculating the rolling effectiveness and aileron reversal speed of a straight wing, Air Materiel Command Engr. Division Memorandum Report, Ser. No MCREXA5-4595-8-6, December, 1948.
- 8-16. Collar A. R., Aeroelastic problems at high speed, J. of the Royal Aeronaut. Soc., 51, No 1 (January, 1947).
- 8-17. Diederich F. W., Budiansky B., Divergence of swept wings, N. A. C. A. T. N. 1680, August, 1948.
- 8-18. Pai S. I., Sears W. R., Some aeroelastic properties of swept wings, J. of the Aeronaut. Sci., 16, No 2 (February, 1949).
- 8-19. Miles J. W., A formulation of the aeroelastic problem for a swept wing, J. of the Aeronaut. Sci., 16, No 8 (August, 1949).
- 8-20. Pian T. H. H., Lin H., Effect of structural flexibility on aircraft loading, Part II — Spanwise airload distribution, Air Force Technical Report No 6358, Part II, May, 1951.
- 8-21. Hildebrand F. B., Advanced calculus for engineers, Prentice-Hall, Inc., New York, 1949.
- 8-22. Ловитт У., Линейные интегральные уравнения, Гостехиздат, М.—Л., 1958.
- 8-23. Diederich F. W., Foss K. A., Charts and approximate formulas for the estimation of aeroelastic effects on the loading of swept and unswept wings, N. A. C. A. T. N. 2608, February, 1952.
- 8-24. De Young J., Theoretical antisymmetric span loading for wings of arbitrary planform at subsonic speeds, N. A. C. A. T. N. 2140, July, 1950.
- 8-25. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, М.—Л., 1951, т. 2, М.—Л., 1951.
- 8-26. Flax A. H., Aeroelastic problems at supersonic speeds, Proceedings of 2nd International Aeronautical Conference, New York, 1949.
- 8-27. Seifert G., A third order boundary value problem arising in aeroelastic wing theory, Quart. Appl. Math., IX, No 2 (1951).
- 8-28. Brown R. B., Holtby K. F., Martin H. C., A superposition method for calculating the aeroelastic behavior of swept wings, J. Aeronaut. Sci., 18, No 8 (August 1951).
- 8-29. Biot M. A., Aeroelastic stability of supersonic wings, Report No 1, Chordwise divergence—the two-dimensional case, Cornell Aeronautical Laboratory Report, CAL/CM-427, CAL-1-E-1, December 8, 1947.
- 8-30. Timoshenko S., Goodier J. N., Theory of elasticity, 2nd ed., 1951.
- 8-31. Biot M. A., Aeroelastic stability of supersonic wings, Report No 2, An approximate treatment of some simple three-dimensional cases, Cornell Aeronautical Laboratory Report CAL/CM-470, CAL-1-E-1, May 12, 1948.
- 8-32. Fung Y. C., On the behavior of a sharp leading edge, J. of the Aeronaut. Sci., Readers Forum, 20, No 9 (September, 1953).
- 8-33. Biot M. A., Aeroelastic stability of supersonic wings, Report No 3, General method for the two-dimensional case and its application to the chordwise divergence of a biconvex section, Cornell Aeronautical Laboratory Report, CAL/CM-506, CAL-1-E-1, September 23, 1948.
- 8-34. Lin H., Pian T. H. H., Effect of structural flexibility on aircraft loading, Air Force Technical Report 6358, Part VIII, September, 1953.

## Глава 9

- 9-1. Smilg B., Wasserman L. S., Application of three-dimensional flutter theory to aircraft structures, Air Force Technical Report, 4798, 1942.



- 9-2. Smilg B., The instability of pitching oscillations of an airfoil in subsonic incompressible potential flow, *J. Aeronaut. Sci.*, 16, No 11 (November, 1949)
- 9-3. Theodorsen T., Garrick I. E., Mechanism of flutter a theoretical and experimental investigation of the flutter problem, N. A. C. A. Report 685, 1940.
- 9-4. Theodorsen T., General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter, N. A. C. A. Report 496, 1935.
- 9-5. Myklestad N., *Vibration analysis*. New York, 1944.
- 9-6. Goland M., The flutter of a uniform cantilever wing, *J. Appl. Mech.*, 12, No 4 (December, 1945).
- 9-7. Woolston D. S., Castile G. E., Some effects of variations in several parameters including fluid density on the flutter speed of light, Uniform cantilever wings, N. A. C. A. T. N. 2558, 1951.
- 9-8. Goland M., Luke Y. L., The flutter of a uniform wing with tip weights, *J. Appl. Mech.*, 15, No 1 (March, 1948).
- 9-9. Runyan H. L., Watkins C. E., Flutter of a uniform wing with an arbitrarily placed mass according to a differential-equation analysis and a comparison with experiment. N. A. C. A. T. N. 1848, 1949.
- 9-10. Goland M., Luke Y. L., A study of the bending-torsion aeroelastic modes for airplane wings, *J. Aeronaut. Sci.*, 16 No 7 (July, 1949).
- 9-11. Scanlan R. H., Rosenbaum R., *Introduction to the study of aircraft vibration and flutter*, New York, 1951.
- 9-12. Broadbent E. G., The elementary theory of aeroelasticity, Part III—Flutter of control surfaces and tabs, *Aircraft Engineering*, XXVI, No 303 (May, 1954).
- 9-13. Woolston D. S., Huckel V., A calculation study of wing-aileron flutter in two degrees of freedom for two-dimensional supersonic flow, N. A. C. A. T. N. 3160 1954.
- 9-14. Goland M., Dengler M. A., Comparison between calculated and observed flutter speeds, *Air Force Technical Report 6184*, 1950.
- 9-15. Broadbent E. G., Some considerations of the flutter problems of highspeed aircraft, *Second International Aeronautical Conference*, published by Institute of the Aeronautical Sciences, Inc., New York, 1949.
- 9-16. Woolston D. S., Runyan H. L., On the use of coupled modal functions in flutter analysis, N. A. C. A. T. N. 2375, 1951.
- 9-17. Williams J., *Aircraft flutter*, Br. A. R. C., R. & M. 2492, 1951
- 9-18. Reissner E., Stevens J. E., Effect of finite span on the airload distributions for oscillating wings, II—Methods of calculation and examples of application, N. A. C. A. T. N. 1195, 1947.
- 9-19. Van de Vooren A. I., Theory and practice of flutter calculations for systems with many degrees of freedom, *Doctoral Thesis Technical Institute of Delft*, published by Eduard Ijdo Leiden, 1952.
- 9-20. Luke Y. L., Tables of coefficients for compressible flutter calculations, *Air Force Technical Report 6200* 1950.
- 9-21. Garrick I. E., Rubinow S. I., Flutter and oscillating airforce calculations for an airfoil in two-dimensional supersonic flow, N. A. C. A. Report 846, 1 46.
- 9-22. Nelson H. C., Berman J. H., Calculations on the forces and moments for an oscillating wing-aileron combination in two-dimensional potential flow at sonic speed, N. A. C. A. T. N. 2590, 1952.
- 9-23. Flax A. H., Aeroelastic problems at supersonic speed, *Second International Aeronautical Conference*, published by Institute of the Aeronautical Sciences Inc., New York, 1949.
- 9-24. Diederich F. W., A planform parameter for correlating certain aerodynamic characteristics of swept wings, N. A. C. A. T. N. 2335, 1951.
- 9-25. Barmby J. G., Cunningham H. J., Garrick I. E., Study of effects of sweep on the flutter of cantilever wings, N. A. C. A. Report 1014, 1951
- 9-26. Beckley L. E. Report on the design of sectional type flutter and dynamic modes of aircraft structures, M. I. T. Aeroelastic and Structures Research Laboratory Report on Contract NOa(s) 7493, 1948.
- 9-27. Ashley H., Zartarian G., Neilson D. O. Investigation of certain unsteady aerodynamic effects in longitudinal dynamic stability. *Air Force Technical Report 5986*, 1951
- 9-28. Cunningham H. J., Analysis of pure-bending flutter of a cantilever swept wing and its relation to bending-torsion flutter, N. A. C. A. T. N. 2461, 1951
- 9-29. Voss H. M., Hassig H. J., Ashley H., Introductory study of flutter of low aspect-ratio wings at subsonic speeds M. I. T. Aeroelastic and Structures Research Laboratory Report on Contract NOa(s) 51—109-c. 1952
- 9-30. Кочин Н. Е., Теория круглого крыла, *Прикл. мат. и мех.*, 9. вып. 1, 13—66 (1945)
- 9-31. Schade T., Krenes K. The oscillating circular airfoil on the basis of potential theory, N. A. C. A. T. M. 1098, 1947.

- 9-32. Voss H. M., Zartarian G., Hsu P. T., Application of numerical integration techniques to the low aspect-ratio flutter problem in subsonic and supersonic flows, M. I. T., Aeroelastic and Structures Research Laboratory, Report on Contract NOa(s) 53—564c, October, 1954.
- 9-33. Runyan H. L., Cunningham H. J., Watkins C. E., Theoretical investigation of several types of single-degree-of-freedom flutter, *J. of the Aeronaut. Sci.*, 19, No 2 (February, 1952).
- 9-34. Runyan H. L., Single-degree-of-freedom flutter calculations for a wing in subsonic potential flow and comparison with an experiment, N. A. C. A. T. N. 2396, 1951.
- 9-35. Watkins C. E., Effect of aspect ratio on the air forces and moments of harmonically oscillating thin rectangular wings in supersonic potential flow, N. A. C. A. T. N. 2064, 1950.
- 9-36. Runyan H. L., Effect of various parameters including Mach number on the single-degree-of-freedom flutter of a control surface in potential flow, N. A. C. A. T. N. 2551, 1951.
- 9-37. Broding W. C., Criteria for single-degree-of-freedom flutter in bending of a cantilever swept wing, Chance Vought Aircraft Report SISM, No 1211, March, 1953.
- 9-38. Krzywoblocki M. Z., Investigation of the wing-wake frequency with application of the Strouhal number, *J. of the Aeronaut. Sci.*, 12, No 1 (January, 1945).
- 9-39. Rauscher M., Model experiments on flutter at the Massachusetts Institute of Technology, *J. of the Aeronaut. Sci.*, 3, No 2 (March, 1936).
- 9-40. Studer H. L., Experimentelle Untersuchungen über Flügelschwingungen, *Mitt. Inst. Aerodyn. Zürich*, No 4/5, 1936.
- 9-41. Victory M., Flutter at high incidence, *Br. A. R. C., R. & M.* 2048, 1943.
- 9-42. Halfman R. L., Johnson H. C., Haley S. M., Evaluation of high-angle-of-attack aerodynamic-derivative data and stall-flutter prediction techniques, N. A. C. A. T. N. 2533, 1951.
- 9-43. Schnittger J. R., The aerodynamic mechanism of vibrating compressor blades, Sc. D. Thesis, M. I. T., *J. Aeronaut. Sci.*, 1953.
- 9-44. Miles J. W., Dynamic chordwise stability at supersonic speeds, North American Aviation Report AL-1140, 1950.
- 9-45. Shen S. F., Flutter of a two-dimensional simply supported uniform panel in a supersonic stream, M.I.T., Aeroelastic and structures Research Laboratory Report on Contract N5-ori-07833, 1952.
- 9-46. Hedgepeth J. M., Budiansky B., Analysis of flutter in compressible flow of a panel on many supports, Institute of the Aeronautical Sciences Preprint *J. Aeronaut. Sci.*, No 443 (January, 1954).
- 9-47. Fung Y. C., The static stability of a two-dimensional curved panel in a supersonic flow, with an application to panel flutter, *J. Aeronaut. Sci.*, 21, No 8 (August, 1954).
- 9-48. Farquharson F. B., et al., Aerodynamic stability of suspension bridges with special reference to the Tacoma Narrows Bridge, University of Washington Engineering Experiment Station Bulletin No 116, Parts I through V, 1954.
- 9-49. Frazer R. A., Scruton C., A summarized account of the severn bridge aerodynamic investigation, British National Physical Laboratory Report N. P. L. (Aero.) 222, 1952.
- 9-50. Steinman D. B., Suspension bridges: the aerodynamic problem and its solution, *American Scientist*, 42, No 3 (July, 1954).
- 9-51. Sisto F., Stall flutter in cascades, *J. of the Aeronaut. Sci.*, 20, No 9 (September, 1953).
- 9-52. Thoma D., Why does the flag flutter?, Cornell Aeronautical Laboratory translation 1949 [*Mitt. hydraul. Inst. Münch.* No 9, 30—34 (1939)].

## Глава 10

- 10-1. Bush V., Operational circuit analysis, New York, 1936.
- 10-2. von Kármán T., Biot M. A., Mathematical methods in engineering, New York, 1940.
- 10-3. Jones R. T., Calculation of the motion of an airplane under the influence of irregular disturbances, *J. Aeronaut. Sci.*, 3, No 12 (October, 1936).
- 10-4. Williams D., Dynamic loads in aeroplanes under given impulsive loads with particular reference to landing and gust loads on a large flying boat, Great Britain Royal Aircraft Establishment Reports SME 3309 and 3316, 1945.
- 10-5. Bisplinghoff R. L., Isakson G., O'Brien T. F., Gust loads on rigid and elastic airplanes, M. I. T., Aeroelastic and Structures Research Laboratory Report for the Navy Bureau of Aeronautics, August 15, 1950.
- 10-6. Stowell E. Z., Schwartz E. B., Houbolt J. C., Bending and shear stresses developed by the instantaneous arrest of a moving cantilever beam, N. A. C. A. A. R. R., No L4127, 1944.



- 10-7. Biot M. A., Bisplinghoff R. L., Dynamic load on airplane structures during landing, N. A. C. A. A. R. R., No 4H10, 1944.
- 10-8. Ramberg W., McPherson A. E., Experimental verification of theory of landing impact. Paper presented at the Sixth International Congress of Applied Mechanics, Paris, 1946.
- 10-9. Wasserman L. S., The prediction of dynamic landing loads, Proceedings of the Seventh International Congress of Applied Mechanics, London, 1948.
- 10-10. Kroll, Wilhemina D., Levy S., A step-by-step method of determining the dynamic response of aircraft in landing, National Bureau of Standards Report, No 6. 4/1—181 PR6.
- 10-11. Pian T. H. H., Flomenhofs H. I., Analytical and experimental studies on dynamic loads in airplane structures during landing, J. Aeronaut. Sci., 17, No 12 (December, 1950).
- 10-12. O'Brien T. F., Pian T. H. H., Effect of structural flexibility on aircraft loading-ground loads, Air Force Technical Report 6358, Part 1, July, 1951.
- 10-13. Houbolt J. C., A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, J. Aeronaut. Sci., 17, No 9 (September, 1950).
- 10-14. McPherson A. E., Evans J. Jr., Levy S., Influence of wing flexibility on force-time relation in shock strut following vertical landing impact, N. A. C. A. T. N. 1995, November, 1949.
- 10-15. Bisplinghoff R. L., Isakson G., Pian T. H. H., Flomenhofs H. I. and O'Brien T. F., An investigation of stresses in aircraft structures under dynamic loading, M. L. T., Aeroelastic and Structures Research Laboratory Report for the Navy Bureau of aeronautics, January 21, 1949.
- 10-16. Hildebrand F. G., Advanced calculus for engineers, New York, 1949.
- 10-17. Duncan W. J., Mechanical admittances and their application to oscillation problems, Br. A. R. C., R. & M. 2000, 1946.
- 10-18. Seamans R. C., Bromberg B. G., Payne L. E., Application of the performance operator to aircraft automatic control, J. Aeronaut. Sci., 15, No 9 (September, 1948).
- 10-19. Houbolt J. C., A recurrence matrix solution for the dynamic response of aircraft in gusts. N. A. C. A. T. N. 2060, March, 1950.
- 10-20. Donely Phillip, Summary of information relating to gust loads on airplanes, N. A. C. A. report 997, 1950.
- 10-21. Küssner H. G., Stresses produced in airplane wings by gusts, N. A. C. A. T. M. 654. 1932.
- 10-22. Bryant L. W., Jones I. M. W., Stressing of aeroplane wings due to symmetrical gusts, Br. A. R. C., R. & M. 1690, February, 1936.
- 10-23. Williams D., Hanson J., Gust loads on wings and tails, Br. A. R. C., R. & M. 1823, 1937.
- 10-24. Sears W. R., Sparks B. O., On the reaction of an elastic wing to vertical gusts, J. Aeronaut. Sci., 9, No 2 (December, 1941).
- 10-25. Perce H. B., Investigation of the dynamic response of airplane wings to gusts, N. A. C. A. T. N. 1320, June, 1947.
- 10-26. Putnam A. A., An improved method for calculating the dynamic response of flexible airplanes to gusts, N. A. C. A. T. N. 1321, May, 1947.
- 10-27. Goland M., Luke Y. L., Kahn E. A., Prediction of wing loads due to gusts including aeroelastic effects, Midwest Research Institute Report 1-S36-E-9, 1947.
- 10-28. Jenkins E. S., Pancu C. D. P., Dynamic loads on airplane structures, S. A. E. Quart. Trans., 3, No 3, (July, 1949).
- 10-29. Houbolt J. C., Kordes E. E., Gust response analysis of an airplane including wing bending flexibility, N. A. C. A. T. N. 2736, September, 1952.
- 10-30. Kordes E. E., Houbolt J. C., Evaluation of gust response characteristics of some existing aircraft with wing bending flexibility included, N. A. C. A. T. N. 2897, February, 1953.
- 10-31. Codik A., Lin H., Pian T. H. H., The gust response of a sweptback tapered wing including bending flexibility, Air Force Technical Report 6358, Part XII, October, 1953.
- 10-32. Bisplinghoff R. L., Isakson G., O'Brien T. F., Gust loads on rigid airplanes with pitching neglected, J. Aeronaut. Sci., 18, No 1 (January, 1951).
- 10-33. Wiener N., Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series, New York, 1950.
- 10-34. Clementson Gerhardt C., An investigation of the power spectral density of atmospheric turbulence, Sc. D., Thesis, M. I. T., 1950.
- 10-35. Liepmann H. W., On the application of statistical concepts to the buffeting problem, J. Aeronaut. Sci., 19, No 12 (December, 1952).
- 10-36. Press H., Mazelsky B., A study of the application of powerspectral methods of generalized harmonic analysis to gust loads on airplanes, N. A. C. A. T. N. 2853, 1953.

- 10-37. Fung Y. C., Statistical aspects of dynamic loads, *J. Aeronaut. Sci.*, 20, No 5 (May, 1953).

## Глава 11

- 11-1. Bridgeman P. W., Dimensional analysis, Yale University Press (вновь просмотренное издание), 1931.  
 11-2. Buckingham E., On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations, *Phys. Rev.*, IV, No 4 (1914).

## Глава 12

- 12-1. Timoshenko S., Goodier J. N., Theory of elasticity (chapter 11 — Torsion), 1951.  
 12-2. Rauscher M., Report on the suitability of various materials and methods of construction for wind tunnel models representing flutter characteristics of actual airplanes, M. I. T., Aeroelastic and Structures Research Laboratory Report, June, 1942.

## Глава 13

- 13-1. McCarthy J. F., Jr., Halfman R. L., Prigge J. S., Jr., Levey G. M., Supersonic flutter model tests, Part 1 — Model design and testing techniques, Wright Aeronautical Development Center TR 54-113, 1955.  
 13-2. Kennedy C. C., Pancu C. D. P., Use of vectors in vibration measurement and analysis, *J. Aeronaut. Sci.*, 14, No 11 (November, 1947).  
 13-3. Lewis R. C., Wrisley D. L., A system for the excitation of pure natural modes of complex structures, *J. Aeronaut. Sci.*, 17, No 11 (November, 1950).  
 13-4. Рэлей, Теория звука, т. I, Гостехиздат, М. — Л., 1956.  
 13-5. Pengeley C. D., Benum D., Aeroelastic studies on high-performance swept-wing airplane, Proceedings of the First U. S. National Congress of Applied Mechanics June, 1951.  
 13-6. Johnson H. C., Fotieo G., Rolling effectiveness and aileron reversal characteristics of straight and swept-back wings, Air Force Technical Report 6198, February, 1951.  
 13-7. Schwartz M. D., Investigation of flight flutter testing techniques, M. I. T., Aeroelastic and Structures Research Laboratory Report on Contract NOa(s) 10921, September, 1951.  
 13-8. Summers R. A., A statistical description of large-scale atmospheric turbulence, Sc. D. Thesis, M. I. T., May, 1954.  
 13-9. Pepping R. A., A theoretical investigation of the oscillating control surface frequency response technique of flight flutter testing, Aircraft Industries Association ATC Report ARTC-6, January, 1953.  
 13-10. Draper C. S., McKay W., Lees S., Instrument engineering, Vol. 2, New York, 1953.  
 13-11. White R. J., Investigation of lateral dynamic stability in the XB-47 airplane, *J. Aeronaut. Sci.* 17, No 3 (March, 1950).  
 13-12. Halfman R. L., Experimental aerodynamic derivatives of a sinusoidally oscillating airfoil in two-dimensional flow, N. A. C. A. Report 1108, 1952.  
 13-13. Ashley H., Zartarian G., Neilson D. O., Investigation of certain unsteady aerodynamic effects in longitudinal dynamic stability, Air Force Technical Report 5986, December, 1951.  
 13-14. Bratt J. B., Scruton C., Measurements of pitching moment derivatives for an airfoil oscillating about the halfchord axis, Br. A. R. C., R & M. 1921, November, 1938.  
 13-15. Greidanus J. H., van de Vooren A. I., Bergh H., Experimental determination of the aerodynamic coefficients of an oscillating wing in incompressible, two-dimensional flow (в четырех частях), National Aeronautical Research Institute Reports F. 101-4, Amsterdam, 1952.  
 13-16. Laidlaw W. R., Theoretical and experimental pressure distributions on oscillating low-aspect ratio wings, M. I. T. Aeroelastic and Structures Research Laboratory Report 51-2 on Contract NOa(s) 52-576c, November, 1954.  
 13-17. Mollo-Christensen E. L., An experimental and theoretical investigation of unsteady transonic flow, Sc. D. Thesis, M. I. T., May, 1954.  
 13-18. Woolston D. S., Runyan H. L., Some considerations on the air forces on a wing oscillating between two walls for subsonic compressible flow, Institute of the Aeronautical Sciences Preprint No 446, January, 1954.  
 13-19. Kinnaman E. B., Flutter analysis of complex airplanes by experimental methods, *J. Aeronaut. Sci.*, 19, No 9 (September, 1952).

- 13-20. Halfman R. L., McCarthy J. F., Jr., Prigge J. S., Jr., Wood. G. A., Jr., A variable Mach number supersonic test section for flutter research, Wright Air Development Center TR 54-114, November, 1954.

## Приложение А

- A-1. Perlis S., Theory of matrices, Cambridge, Mass., 1952.  
A-2. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А., Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, ИЛ, Москва, 1950.  
A-3. Crout P. D., A short method of evaluating determinants and solving systems of linear equations with real or complex coefficients, Trans. A. I. E. E., 60, 1235—1240 (1941).

## Приложение В

- B-1. Margenau H., Murphy G. H., The mathematics of physics and chemistry, New York, 1943.  
B-2. Милн В. Э., Численный анализ, ИЛ, Москва, 1951.  
B-3. Tables of Lagrangian interpolation coefficients, National Bureau of Standards, New York 1944.  
B-4. Multhopp H., Die Anwendung der Tragflügel Theorie auf Fragen der Flugmechanik, Bericht S2 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung, Preisausschreiben, 53-64, 1938—1939.

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КОНСТРУКЦИИ И АЭРОУПРУГОСТИ ПРИ ПОЛЕТЕ С БОЛЬШОЙ СКОРОСТЬЮ <sup>1)</sup>

БИСПЛИНГХОФФ Р. Л.

*Массачусетский технологический институт*

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Факторы, оказывающие решающее влияние на конструкцию высокоскоростного самолета, в основе своей имеют тепловые и аэроупругие явления. Тема лекции заключается главным образом в обсуждении этих факторов и их взаимодействия друг с другом. В лекции резюмированы некоторые аналитические и экспериментальные результаты, имеющиеся в распоряжении авиационных инженеров для удовлетворения требований, предъявляемых к конструкциям высокоскоростных самолетов. В ней обсуждаются состояние вопроса о теплоотдаче из пограничного слоя к конструкции, формы разрушений при сложной нагрузке, а также вопросы, касающиеся притока тепла и явления аэроупругости, и суммированы методы подхода к решению конструктивных задач и задач аэроупругости. Наконец, предложены некоторые направления фундаментального исследования этих задач.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время, когда мы осуществили сверхзвуковой полет, авиационные конструкции представляют больший интерес, чем до сих пор. Обычно принято думать, что улучшение летных характеристик самолета является непосредственным следствием технического прогресса в области двигателей и аэродинамики. Поэтому исследования в этих областях и развитие шли усиленными темпами. Усовершенствования конструкций играют менее непосредственную роль и обычно являются результатом усилий, направленных на создание такого каркаса, на котором можно было бы эксплуатировать новую силовую установку и использовать аэродинамические новшества. Успехи в области двигателей и аэродинамики со времени окончания второй мировой войны весьма значительны. Проистекающие отсюда требования безопасности и адекватности конструкции приближаются к пределу того, что могут получить инженеры-конструкторы от имеющихся или даже будущих материалов.

Эта статья преследует три цели: дать обзор некоторых требований, предъявляемых к конструкции, совершающей сверхзвуковой полет, обсудить эти требования и оценить по крайней мере качественно их влияние на конструкцию. Я ограничиваюсь здесь задачами, относящимися к самолету, пилотируемому летчиком, и не рассматриваю очень больших скоростей и высот, соответствующих баллистическим ракетам.

Я осведомлен о секретном характере многих материалов, относящихся к рассматриваемому вопросу. Однако некоторые из секретных сведений относятся к характеристикам и деталям вооружения и не обязательно связаны с более общими соображениями, на которые здесь делается упор. Таким образом, имеется много такого, что можно и нужно сказать о не-секретной части нашей темы. Статья не представляет полный обзор всех задач.

---

<sup>1)</sup> Bisplinghoff R. L., Some structural and aeroelastic considerations of high-speed flight (The nineteenth Wright brothers lecture), J. of the Aeronaut. Sci., 23, No 4 (April, 1956).

связанных с конструкцией, предназначенной для высокоскоростного полета, так как ее объем позволяет рассмотреть только небольшую часть из относящихся сюда основных вопросов.

## 2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $AF$  — коэффициент облегчения;  
 $b$  — полухорда;  
 $BM$  — изгибающий момент;  
 $c$  — удельная теплоемкость;  
 $e$  — безразмерное расстояние упругой оси (назад) от середины хорды;  
 $EI$  — изгибная жесткость;  
 $E_{сек.}$  — секущий модуль;  
 $GJ$  — крутильная жесткость;  
 $h$  — коэффициент теплопередачи;  
 $J$  — постоянная Джоуля; постоянная кручения;  
 $k$  — коэффициент теплопроводности; приведенная частота;  
 $l$  — конструктивный полуразмах крыла;  
 $M$  — число Маха;  
 $p$  — давление, момент крена;  
 $Pr$  — число Прандтля;  
 $q$  — поток тепла, динамическое давление;  
 $Q$  — общее количество тепла;  
 $r$  — коэффициент восстановления;  
 $RN$  — число Рейнольдса;  
 $s$  — безразмерное расстояние в полухордах;  
 $S$  — энтропия, площадь крыла;  
 $t$  — время; толщина;  
 $T$  — температура;  
 $u, v, w$  — перемещения в направлениях  $x, y, z$ ;  
 $U$  — скорость самолета, энергия;  
 $V$  — объем;  
 $\omega$  — перемещение; интенсивность порыва;  
 $W$  — вес самолета; возможная работа;  
 $x, y, z$  } — прямоугольные координаты точки;  
 $x_1, x_2, x_3$  }  
 $\alpha$  — коэффициент термического расширения; коэффициент поглощения, угол атаки;  
 $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей;  
 $\delta$  — толщина, относительная толщина профиля;  
 $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  
 $\epsilon$  — излучение; деформация;  
 $\zeta$  — приведенная частота, основанная на масштабе турбулентности;  
 $\theta$  — безразмерная проводимость соединения; угол падения радиации;  
 $\mu$  — безразмерный параметр массы;  
 $\nu$  — кинематическая вязкость; коэффициент Пуассона;  
 $\rho$  — плотность;  
 $\sigma$  — напряжение; постоянная Стефана — Больцмана;  
 $\varphi$  — поток тепла радиации; функция напряжения Эйри;  
 $\omega$  — частота.

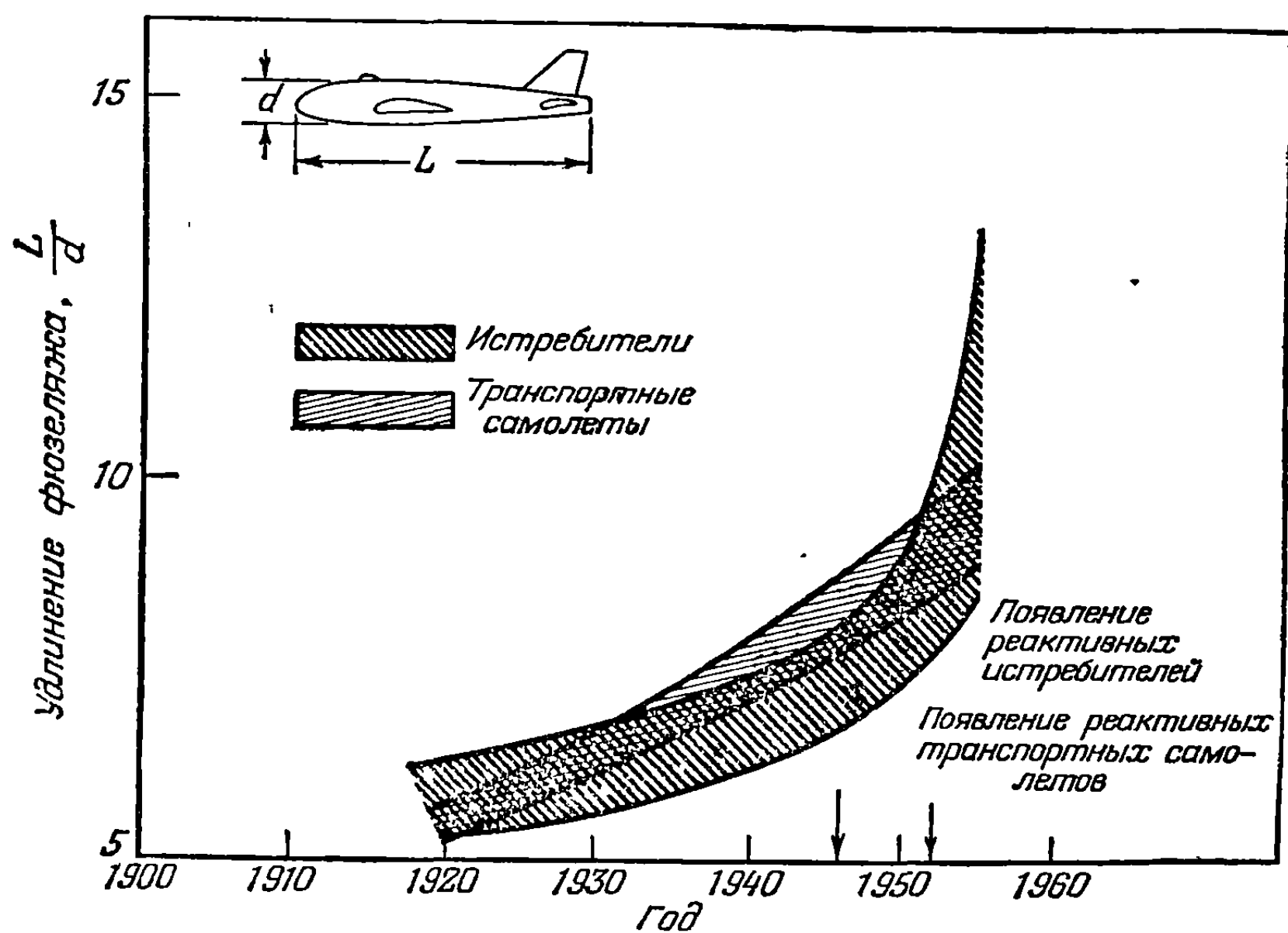
### Индексы

- $a$  — воздух; окружающая среда;  
 $a\omega$  — адиабатическая стенка;  
 $e$  — равновесие;  
 $F$  — упругий;

- $h$  — изгиб;  
 $H$  — максимальная скорость горизонтального полета;  
 $O$  — комнатная температура;  
 $R$  — жесткий;  
 $s$  — состояние покоя.  
 $\alpha$  — кручение.

### 3. ТЕНДЕНЦИИ В РАЗВИТИИ ФОРМЫ АППАРАТОВ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ВОПРОСЫ

История эволюции конструктивной формы самолета со времен биплана Райта 1903 г. известна. Успех Райта явился причиной того, что конструкторы приняли схему расчаленного биплана и придерживались ее, главным образом по конструктивным соображениям, свыше 30 лет. Несущая бипланная коробка и схема самолета с тянущим винтом Блерио объединились и привели к созданию известного самолета времен первой мировой войны и 20-х годов. Полумонококковая конструкция из алюминиевого сплава появилась в начале 30-х годов, и последующий 25-летний период был периодом ее совершенствования.



Фиг. 3-1. Удлинение фюзеляжа.

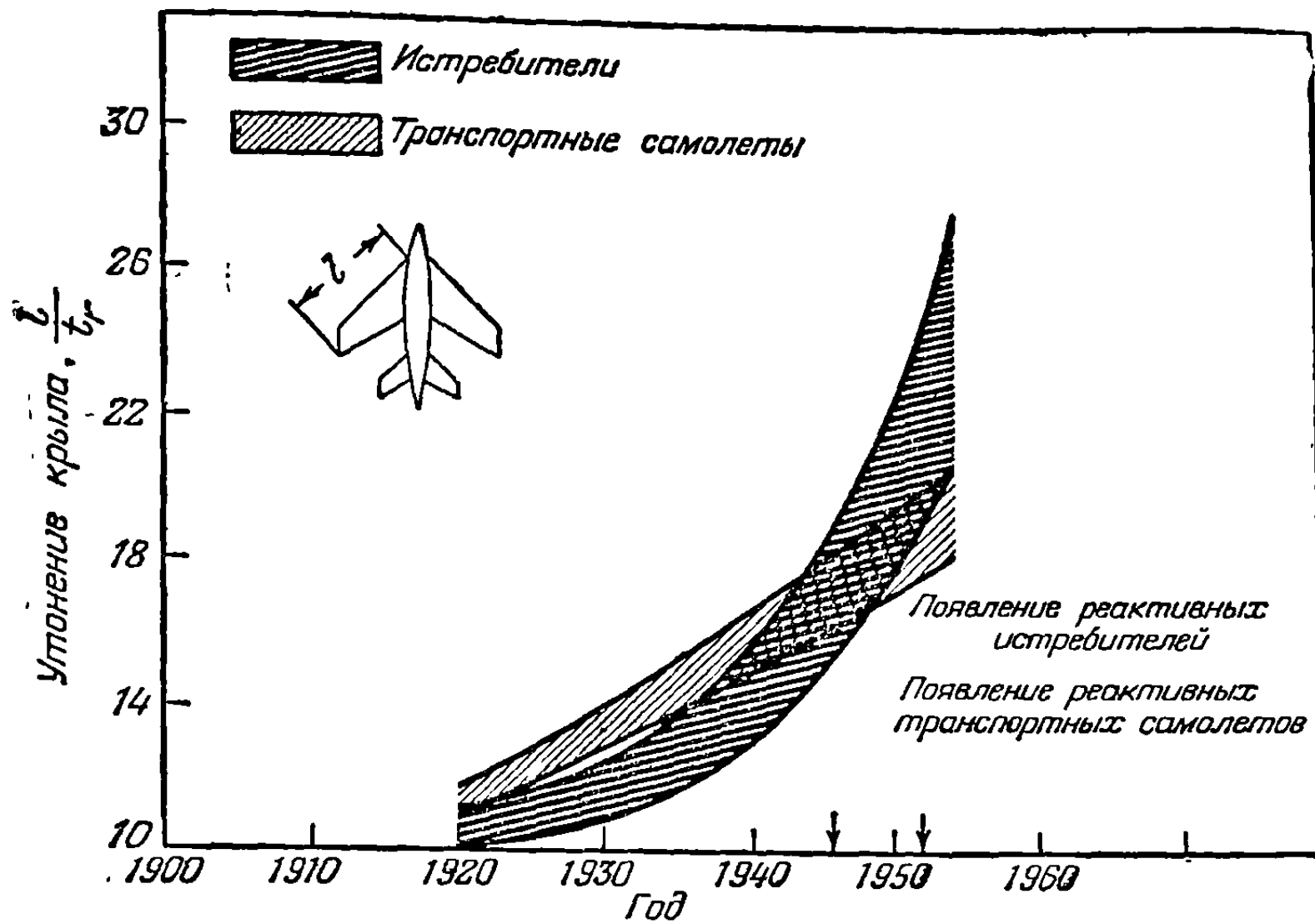
Самолетная конструкция, подобно большинству инженерных конструкций, воспринимает нагрузку посредством балок. В течение периода совершенствования полумонококковой конструкции произошли заметные изменения размеров балок фюзеляжа и крыла. Некоторые из этих изменений следует отметить.

Фиг. 3-1 иллюстрирует среднюю тенденцию увеличения удлинения фюзеляжа истребителей и транспортных самолетов. Удлинение фюзеляжа определяется как отношение длины фюзеляжа к максимальной толщине. Мы заметим, что в настоящее время балка среднего фюзеляжа почти в два раза тоньше, чем она была в 1920 г., и что если эта тенденция будет продолжаться, то к 1965 г. величины удлинений порядка 10—15 будут обычным явлением. Интересно отметить, что в настоящее время относительные размеры конструкции фюзеляжей самолетов и корпусов морских судов почти одинаковы.

Фиг. 3-2 иллюстрирует среднюю тенденцию уменьшения толщины крыла, т. е. роста отношения конструктивного полуразмаха к максимальной толщине



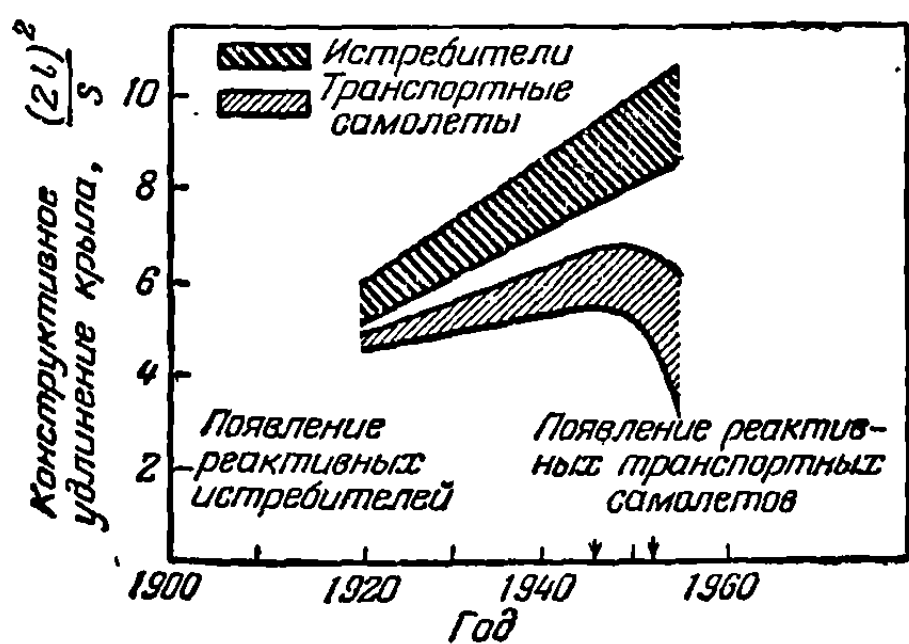
корневого сечения крыла. Термин «конструктивный полуразмах» означает, что расстояние измеряется вдоль оси лонжерона крыла. В соответствии с техническими нормами прочности лонжероны крыла в основном направлении изгиба



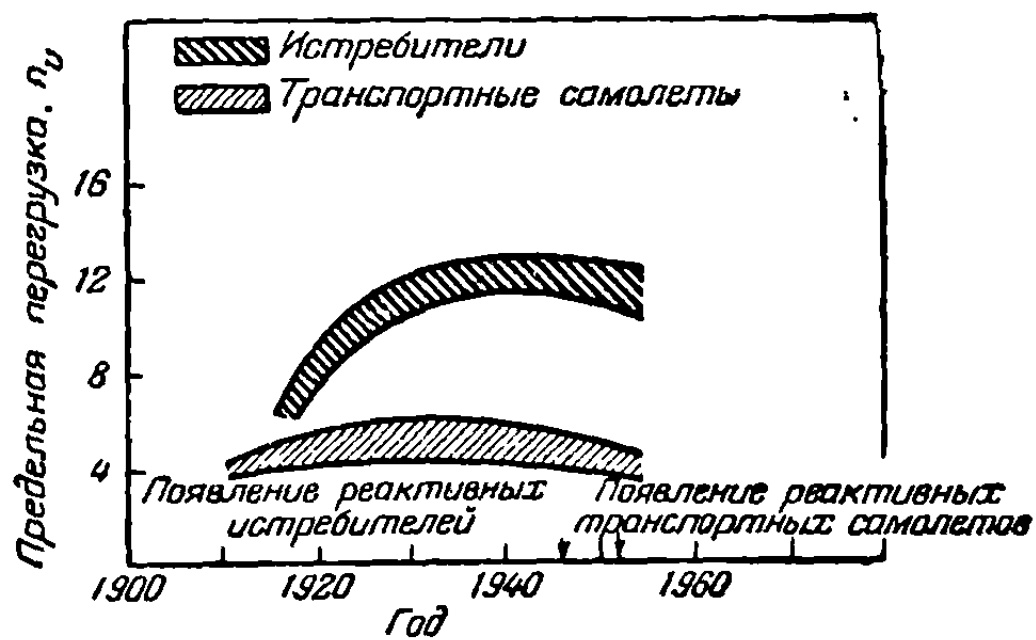
Фиг. 3-2. Утонение крыла.

стали очень тонкими; вследствие этого возросло влияние аэроупругости. Из этих общих тенденций можно заключить, что относительная толщина крыла транспортных самолетов и истребителей к 1965 году приблизится соответственно к величинам 20 и 30. В противоположность этому можно отметить, что для гражданских инженерных конструкций эта величина редко превышает 15.

Фиг. 3-3 иллюстрирует общее направление изменения конструктивного удлинения. Конструктивное удлинение крыла определяется как отношение квадрата конструктивного размаха к площади крыла. Заметим здесь, что у лонжерона крыла наблюдается тенденция к большим удлинениям, т. е. к большим



Фиг. 3-3. Конструктивное удлинение крыла.

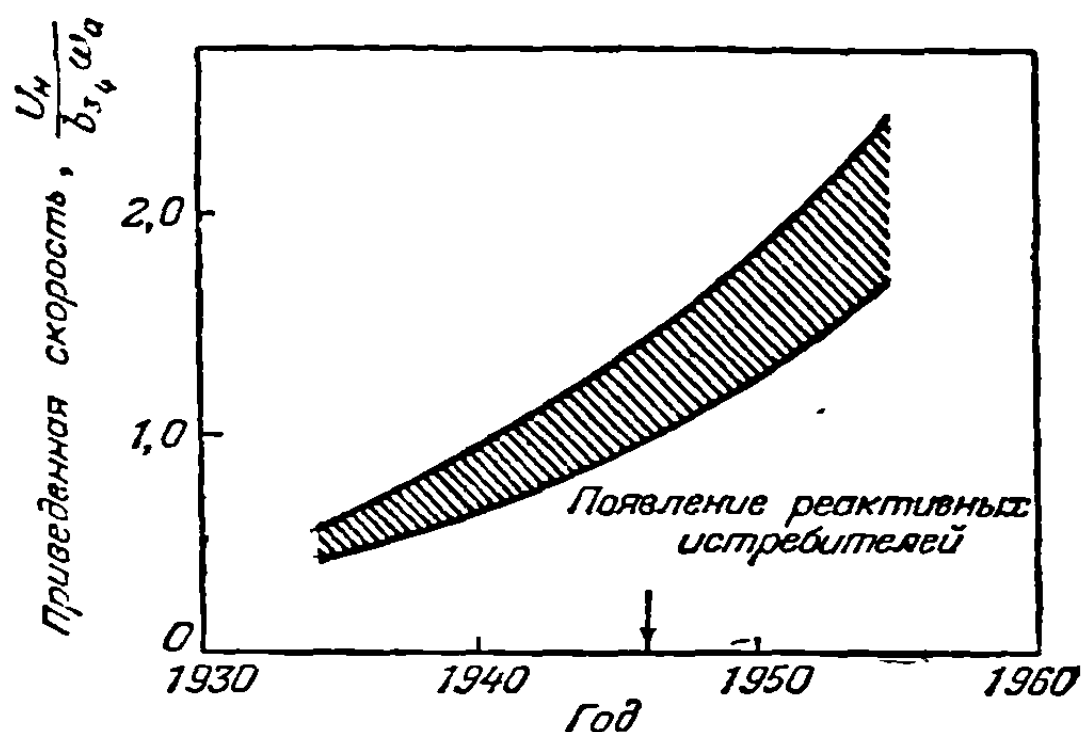


Фиг. 3-4. Предельный коэффициент перегрузки.

степеням утонения в направлении хорды вплоть до сверхзвуковых истребителей, когда появляется обратная тенденция. Эта обратная тенденция обусловлена в большей степени конструктивными причинами, хотя, конечно, следует учесть и уменьшение роли индуктивного сопротивления на сверхзвуковых скоростях полета.

В дополнение к изменению во внешней форме интересно отметить соответствующие тенденции в изменении прочности и жесткости. Например, несмотря

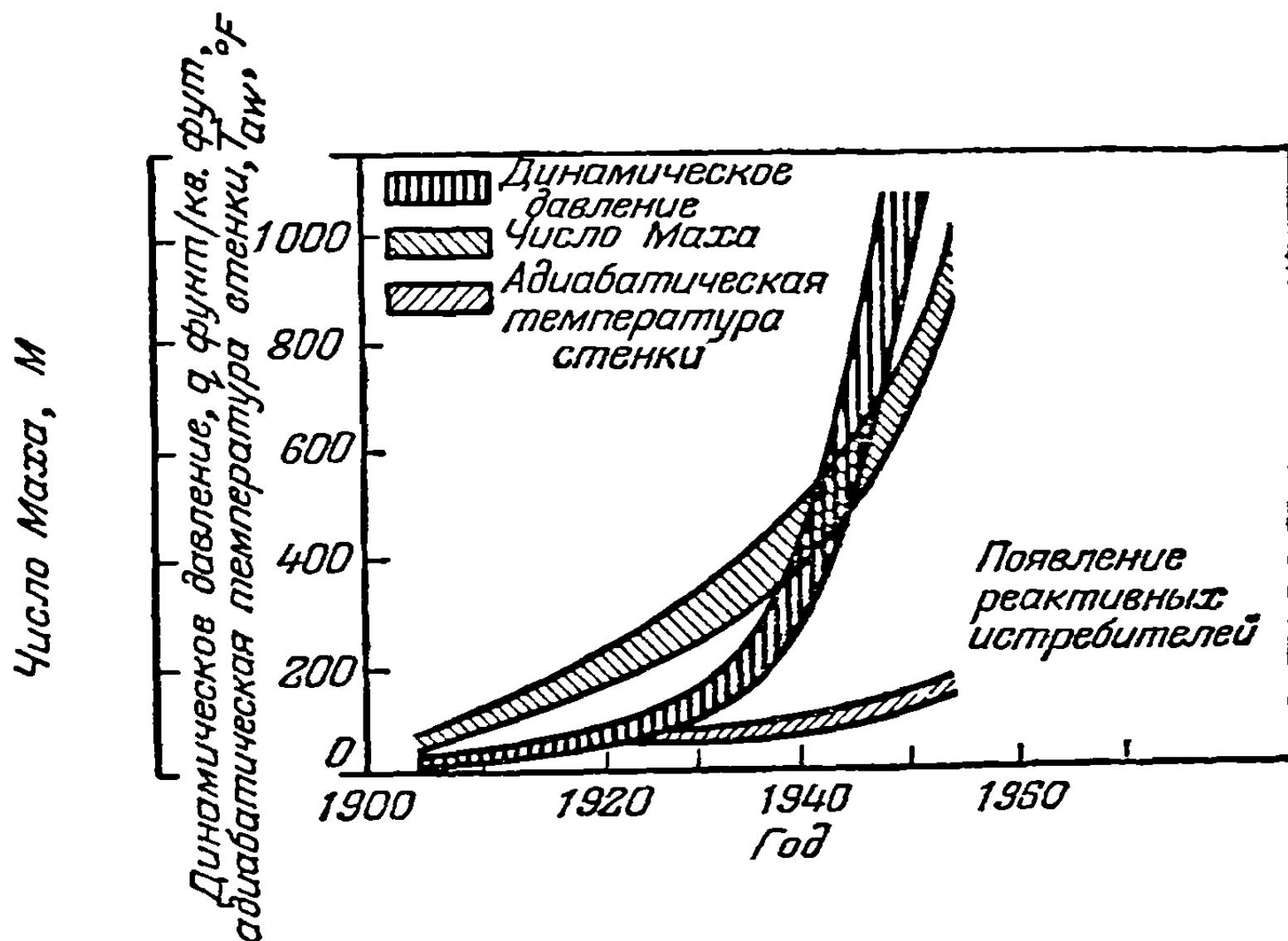
на происшедшее весьма значительное увеличение максимальной скорости, в коэффициентах перегрузки значительного изменения не произошло. Фиг. 3-4 изображает среднюю тенденцию изменения предельных положительных перегрузок



Фиг. 3-5. Приведенная скорость для истребителей с максимальной скоростью на уровне моря.

повышения приведенной скорости  $U_n b_{1/4} \omega_a$  для самолетов-истребителей. Здесь нанесена максимальная скорость горизонтального полета на уровне моря, разделенная на полухорду крыла в сечении, находящемся на три четверти полуразмаха, и на частоту первого тона крутильных колебаний крыла. Такой параметр имеет особую важность для инженера по флаттеру. Вышеуказанная

истребителей и транспортных самолетов. На основании способности человеческого организма противостоять перегрузкам большие величины перегрузок были установлены для истребителей в 1930 г., и с тех пор эти величины мало изменились. Перегрузки для транспортных самолетов медленно уменьшались от максимального значения 6, принятого в 1925 г. Весьма важное обстоятельство, которое усвоили конструкторы, заключается в том, что по мере роста скорости должны приниматься во внимание как жесткость конструкции и частоты ее колебаний, так и ее прочность. Фиг. 3-5 иллюстрирует интересную тенденцию



Фиг. 3-6. Максимальное полетное число Маха для горизонтального полета, динамическое давление и адиабатическая температура стенки при полете истребителей на уровне моря.

тенденция также имеет довольно простое объяснение. Можно сказать, что для самолетов одного типа максимальная скорость горизонтального полета увеличивается быстрее, нежели частота крутильных колебаний крыла. Такая тенденция может означать, что имеют место один или другой из следующих случаев: либо границы флаттера для современного самолета-истребителя суживаются, либо проектные требования по флаттеру удовлетворяются скорее за счет целесообразного распределения массы крыла, нежели за счет увеличения частоты крутильных колебаний. Возможно, что имеют место оба случая.

Стало традиционным сравнение самолетов по их максимальным скоростям горизонтального полета на уровне моря. Параметрами, представляющими для инженеров-конструкторов наибольший интерес, являются число Маха, динамическое давление и адиабатическая температура стенки. Фиг. 3-6 показывает в хронологическом порядке изменение этих параметров на уровне моря для истребителей. Из этой фигуры видно, что с 1940 г. произошло чрезвычайно сильное повышение динамического давления, и аэродинамический нагрев, как это следует из величины адиабатической температуры стенки, достиг такого уровня, когда его нельзя более игнорировать. Адиабатическая температура стенки ниже температуры торможения и является теоретической верхней границей температуры конструкции в случае установившегося режима полета и пренебрежения потерями на радиацию.

#### 4. АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИИ ПРИ ЗНАЧИТЕЛЬНЫХ ЧИСЛАХ МАХА

Влияние возросшего динамического давления на реакцию и устойчивость конструкции не вносит новых фундаментальных проблем. Правда, для отдельных конфигураций и отдельных диапазонов скоростей может оказаться трудным найти точные аэродинамические коэффициенты, тем не менее конструктивные проблемы, возникшие вследствие более высоких динамических давлений, были успешно решены в 1903 г. Однако аэродинамический нагрев ставит новые задачи, которые сильно отличаются от прошлых задач.

Анализируя поведение деформируемого тела, находящегося под одновременным воздействием теплового и силового потоков, инженер оказывается на границе между упругостью и термодинамикой. К счастью, для части задач взаимодействие упругой деформации с вопросами, касающимися теплопередачи, невелико и обычно им можно пренебречь. Общую задачу исследования поведения самолетной конструкции, работающей в упругой области и находящейся под комбинированным действием аэродинамических давлений и аэродинамического нагрева, можно отнести к задаче аэротермоупругости. Обычно можно допустить, что эта задача может быть разделена на аэротермическую задачу и задачу аэроупругости. Аэротермическая задача касается теплового равновесия и теплопередачи между конструкцией и пограничным слоем, включая влияние излучения. С другой стороны, задача аэроупругости имеет дело с равновесием аэродинамических, упругих и инерционных сил.

Это подразделение на две отдельные, несвязанные задачи покоится на двух допущениях.

Во-первых, принимается, что термодинамическое взаимодействие между процессами теплопередачи и упругих деформаций пренебрежимо мало. Оправдание этому допущению можно найти в работе лорда Кельвина [1], написанной в 1857 г., и более поздней работе Уилларда Гиббса [2]. Работы этих двух ученых образуют основу предмета термоупругости. Можно сказать, что когда тепло вносится в упругое тело одновременно с приложением внешних сил, то происходит изменение внутренней энергии. Последняя является функцией среднего положения молекул, находящихся под действием внутримолекулярных сил, и кинетической энергии молекул при колебаниях относительно среднего положения. Для единицы объема изотропного упругого тела, находящегося под комбинированным воздействием силовой и тепловой нагрузок, первый закон термодинамики требует, чтобы

$$\delta U = \delta Q + \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4-1)$$

где  $\delta U$  — приращение внутренней энергии и  $\delta Q$  — внесенное тепло; обе эти величины относятся к промежутку времени  $\delta t$ . Величина  $\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}$  <sup>1)</sup> равна работе.

<sup>1)</sup> Правило суммирования для  $\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}$  показывает, что эта величина представляет сумму шести членов.

совершаемой над единицей объема тела окружающей жидкостью за промежуток времени  $\delta t$ . Напряжения и деформации в трехмерном упругом теле обозначены соответственно  $\sigma_{ij}$  и  $\epsilon_{ij}$  и отнесены к ортогональной системе осей  $x_1, x_2, x_3$ . Если изменение состояния обратимо и адиабатично, то  $\delta Q$  равно нулю и  $U$  становится полным дифференциалом:

$$\delta U = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}. \quad (4-2)$$

Таким образом, можно принять, что существует функция, характеризующая энергию деформации  $W$ , представляющая потенциальную энергию, приходящуюся на единицу объема, и обладающая такими свойствами, что

$$\sigma_{ij} = \partial W / \partial \epsilon_{ij}. \quad (4-3)$$

Вариации  $W$ , когда тело деформируется адиабатически, идентичны вариациям внутренней энергии. Можно также показать, что если процесс является обратимым и изотермическим, то для него справедливо то же самое заключение [3]. Таким образом, при использовании функции, характеризующей энергию деформации, неявно используются предположения об обратимости и адиабатичности или изотермичности процессов. Очень быстро прикладываемые нагрузки представляют почти адиабатические условия, нагрузки же, которые прикладываются очень медленно, — изотермические условия. Упругие постоянные, входящие в функцию  $W$ , в обоих случаях отличаются незначительно. Например, при растяжении стали модуль Юнга в случае адиабатического растяжения только на  $1/3—1\%$  превышает модуль при изотермическом растяжении. Используя второй закон термодинамики, получаем

$$T \delta S = \delta U - \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}, \quad (4-4)$$

где изменение энтропии за время  $\delta t$  обозначено через  $\delta S$  и  $T$  означает абсолютную температуру. С помощью функции Гиббса и уравнений Максвелла [2] уравнение (4-4) можно записать в виде

$$T \delta S = c_v \delta T + l_{ij} \delta \sigma_{ij}, \quad (4-5)$$

где  $c_v$  — удельная теплоемкость на единицу объема при постоянном напряжении,  $l_{ij}$  — скрытая теплота изменения деформации при постоянном напряжении. Влияние нагружения на температуру можно оценить по уравнению (4-5), считая, что нагрузка прикладывается быстро, или принимая нагружение почти адиабатическим:

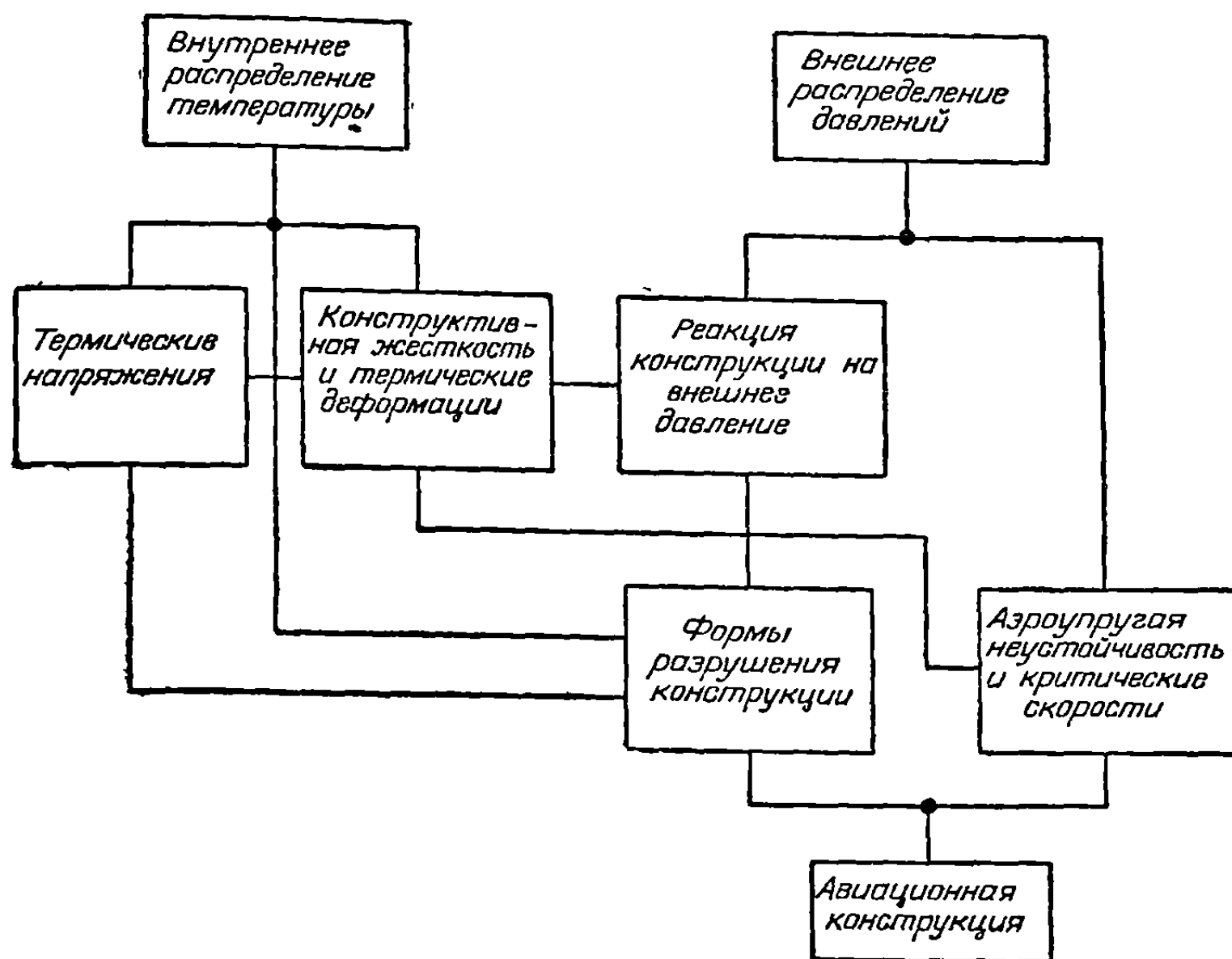
$$\delta T = - (l_{ij} / c_v) \delta \sigma_{ij}. \quad (4-6)$$

В практических приложениях изменение температуры, даваемое соотношением (4-6) для данного условия нагружения, пренебрежимо мало.

Второе допущение, которое требуется сделать, чтобы разделить задачу аэротермоупругости на отдельные, несвязанные задачи, заключается в том, что статическое и динамическое взаимодействие аэротермоупругих явлений мало. Под малым статическим аэротермоупругим взаимодействием мы подразумеваем такое взаимодействие, при котором суммарные упругие отклонения настолько малы, что не могут изменить поток до такой степени, чтобы распределение температуры внутри конструкции и термические деформации, обусловленные этим распределением, изменились. Малое динамическое аэротермоупругое взаимодействие означает, что характерные отрезки времени аэротермической системы велики по сравнению с периодом собственных форм колебаний аэроупругой системы.

Второе допущение, за исключением, быть может, очень специальных случаев, будет, вероятно, справедливым для самолетов ближайшего будущего, пилотируемых летчиками.

Диаграмма, изображенная на фиг. 4-1, представляет возможное деление по тематике задач, относящихся к области исследования авиационных конструкций при повышенных температурах. Темы, связанные друг с другом, соединены на диаграмме линиями. Если проследить линии связи, то становится очевидным решающее влияние, которое оказывает внутреннее распределение температур



Фиг. 4-1. Тематическое деление задачи исследования авиационной конструкции при повышенной температуре.

на все фазы прочностного и аэроупругого анализа. Последующее обсуждение большей части рассматриваемых вопросов будет происходить согласно подразделению тем, изображенному на фиг. 4-1.

## 5. ТЕРМИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ В ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Задачи конструктивного характера в самолетостроении, возникающие в тех случаях, когда мы имеем дело с повышением температуры, до известной степени всегда существовали в ближайшем прошлом при проектировании элементов конструкции, например в силовых установках или в противообледенительных системах. Однако эти задачи вследствие их локального значения были относительно мало важны по сравнению с более серьезными задачами, которые должны возникнуть в связи с аэродинамическим нагревом.

**5-1. Конвективный перенос тепла из пограничного слоя.** С тех пор как Осборн Рейнольдс впервые в 1874 г. указал на аналогию между процессами теплопередачи и переносами количества движения в турбулентном пограничном слое, было проведено много экспериментальных и теоретических исследований, посвященных вопросу теплопередачи в пограничном слое. На основе приобретенного запаса знаний можно с достаточной для целей прочностного анализа точностью определить окружающие термические условия при высокоскоростном полете. Превосходные сводки результатов и методов, применяемых при исследованиях конструкции, даны, например, Эккертом [4], Дэвисом и Монагханом [5], а также Блюмом [6].

Если принимается, что процесс уменьшения скорости в пограничном слое идеального газа происходит таким образом, что частицы жидкости в пограничном



слое не обмениваются теплом с окружающей жидкостью, то температура твердой границы будет равна температуре торможения  $T_s$  потока. Обычно это простое предположение не удовлетворяется, поскольку имеется заметный отвод тепла от твердой границы в пограничный слой. Вследствие этого действительная температура на стенке меньше температуры торможения. Если принять, что поток тепла через границу между твердой стенкой и газом отсутствует, то температура на твердой стенке называется равновесной, или адиабатической, температурой  $T_{aw}$  стенки. Она связана с температурой торможения  $T_s$  и температурой

окружающей среды  $T_a$  с помощью коэффициента восстановления температуры  $r$ , определяемого равенством

$$r = \frac{(T_{aw} - T_a)}{T_s - T_a}. \quad (5-1)$$

Коэффициент восстановления температуры является главным образом функцией числа Прандтля  $Pr$ . Вид функции зависит от характера потока (ламинарный или турбулентный). Величина коэффициента восстановления с достаточной точностью определяется выражением  $r = (Pr)^{1/2}$  для ламинарного течения и  $r = (Pr)^{1/3}$  — для турбулентного течения.

Адиабатическую температуру стенки можно вычислять по формуле

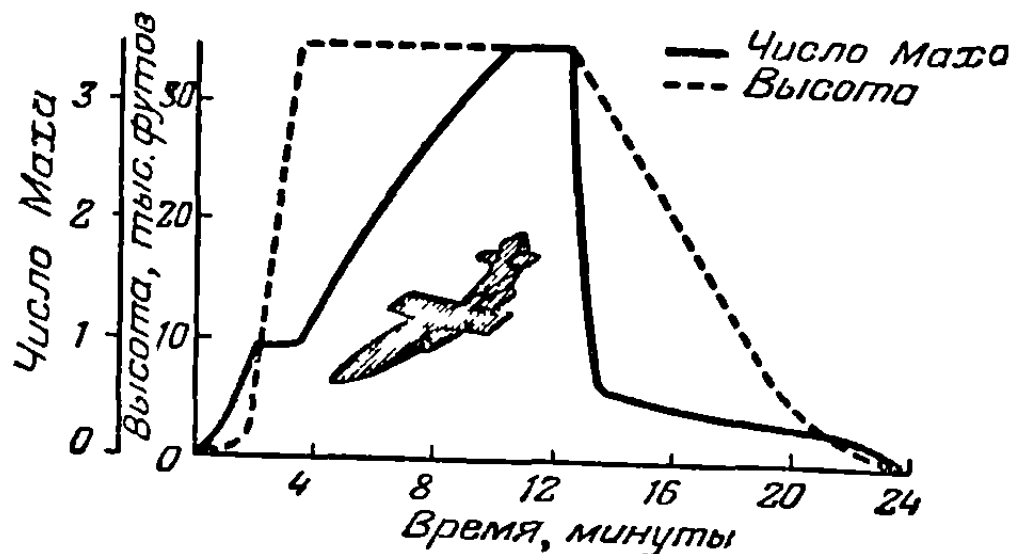
$$T_{aw} = \left[ 1 + \frac{r(\gamma - 1)M^2}{2} \right] T_a, \quad (5-2)$$

где  $M$  — местное число Маха снаружи пограничного слоя и  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей. Если принять, что  $M$  есть число Маха невозмущенного потока, то среднюю адиабатическую температуру стенки можно вычислить для каждого числа Маха и для каждой высоты полета. Для того чтобы оценить порядок указанных величин, можно представить себе гипотетический самолет-

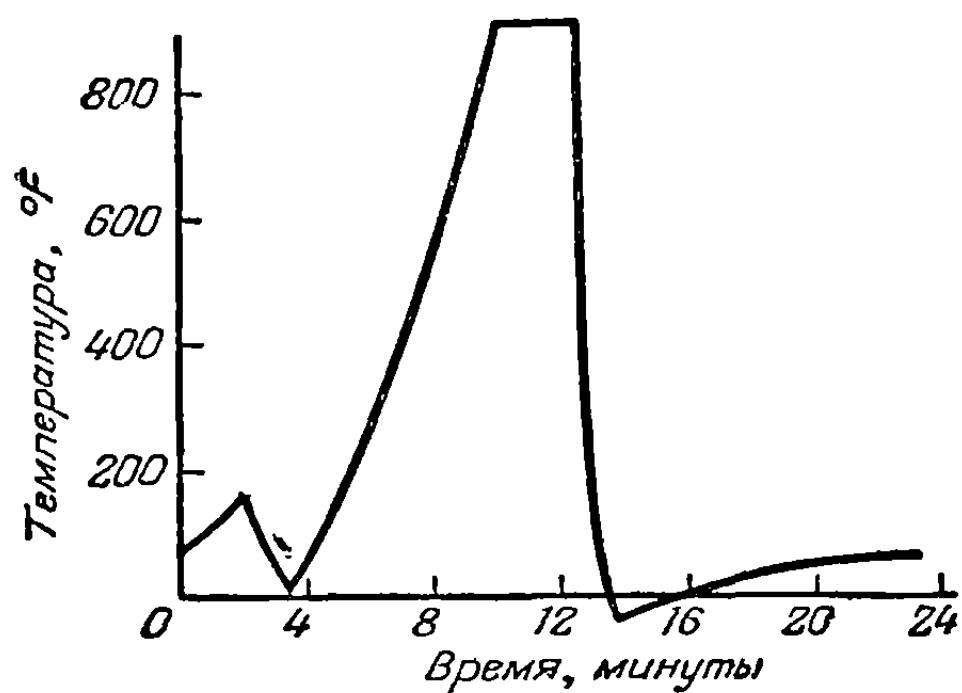
истребитель ближайшего будущего, изображенный на фиг. 5-1, совершающий заданный маневр (профиль которого также показан на фиг. 5-1). Маневр состоит из набора высоты при  $M = 0,95$  до высоты 35 000 футов, за которым следует горизонтальный полет на полной тяге до  $M = 3,5$ . После 2-минутного горизонтального полета на этом числе Маха заслонка закрывается, делается разворот, и самолет медленно снижается до уровня моря. На фиг. 5-2 для этой эволюции показано изменение с временем средней адиабатической температуры стенки для числа Прандтля 0,72 и коэффициента восстановления 0,9. Адиабатическая кривая изменения температуры стенки служит исходным пунктом для оценки действительной температуры конструкции.

В полете с ускорением наблюдается заметный обмен теплом между газом и твердой границей, и, за исключением периодов установившегося полета, адиабатическая температура стенки и ее действительная температура оказываются совершенно различными. При расчете скорости теплопередачи  $q$  от пограничного слоя к изотермической границе с температурой поверхности  $T_w$  в качестве приближения можно применить закон охлаждения Ньютона

$$q = h(T_{aw} - T_w), \quad (5-3)$$



Фиг. 5-1. Профиль маневра гипотетического истребителя.



Фиг. 5-2. Изменение средней адиабатической температуры стенки в зависимости от времени для гипотетического истребителя.



где  $h$  — коэффициент теплопередачи. Для теплопередачи в пограничном слое  $h$  не постоянно и является функцией многих переменных. Опыт показал, что для ограниченного диапазона условий получаются достаточно точные результаты, если коэффициент теплопередачи  $h$ , определяемый соотношением (5-3), вычислять из опытных данных, получаемых в этом диапазоне. В настоящее время уже имеются данные, позволяющие с достаточной для инженерных исследований точностью определять коэффициенты теплопередачи плоских пластин, конусов, цилиндров и параболических тел вращения в диапазоне скоростей полета, которые, вероятно, будут достигнуты самолетами, пилотируемыми летчиками, в ближайшие несколько лет. Величина этих коэффициентов зависит от характера течения в пограничном слое (ламинарный или турбулентный). Для течения на изотермической полубесконечной плоской пластинке при ламинарном пограничном слое полезна следующая приближенная формула для коэффициента теплопередачи:

$$h = 0,332k_a \left(\frac{U}{\nu x}\right)^{1/2} (Pr)^{1/3}. \quad (5-4)$$

В случае турбулентного пограничного слоя обмен энергией значительно больше и соответствующая приближенная формула имеет вид

$$h = 0,0296k_a x^{-1/5} \left(\frac{U}{\nu}\right)^{4/5} (Pr)^{1/3} \left(\frac{T_a}{T_w}\right)^{0,44}. \quad (5-5)$$

В приведенных выше формулах  $k_a$  есть коэффициент теплопроводности воздуха,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости и  $U$  — скорость потока. Все свойства жидкости являются локальными статистическими свойствами на внешней границе пограничного слоя. В формуле (5-4) расстояние  $x$  измеряется от передней кромки пластинки, а в формуле (5-5) — от действительной точки перехода.

Когда температура по поверхности пластинки не постоянна, то простой „закон“, выражаемый соотношением (5-3), строго говоря, не применим, так как он определяет местную теплопередачу в точке только в зависимости от условий в этой точке. Для ламинарного пограничного слоя это явление было исследовано Чепменом и Рубезиным [7], Лайтхиллом [8] и другими. Важным результатом работы Лайтхилла является приближенное решение для неизотермической плоской пластинки, выраженное через интеграл Стильтеса:

$$q = -0,332 \left(\frac{U}{\nu x}\right)^{1/2} (Pr)^{1/3} k_a \int_{\xi=0}^{\xi=x} \frac{d[T_w(\xi) - T_{aw}]}{\left[1 - \left(\frac{\xi}{x}\right)^4\right]^{1/3}}. \quad (5-6)$$

Можно проверить, что соотношение (5-6) переходит в соотношения (5-3) и (5-4), когда  $T_w$  является постоянной.

Указанные выше формулы выведены из предположения установившегося течения, и прежде чем их можно будет применить к задачам о неустановившемся течении, должны быть поставлены определенные условия. Согласно Муру [10], при условии, что величины

$$\frac{x^n}{U^{n+1}} \left(\frac{dnU}{dt^n}\right)_{\text{ламинарн.}}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

малы по сравнению с единицей, ламинарный пограничный слой можно считать квазиустановившимся. Эти величины, по всей вероятности, будут очень малы для пилотируемых летчиками самолетов ближайшего будущего [9].

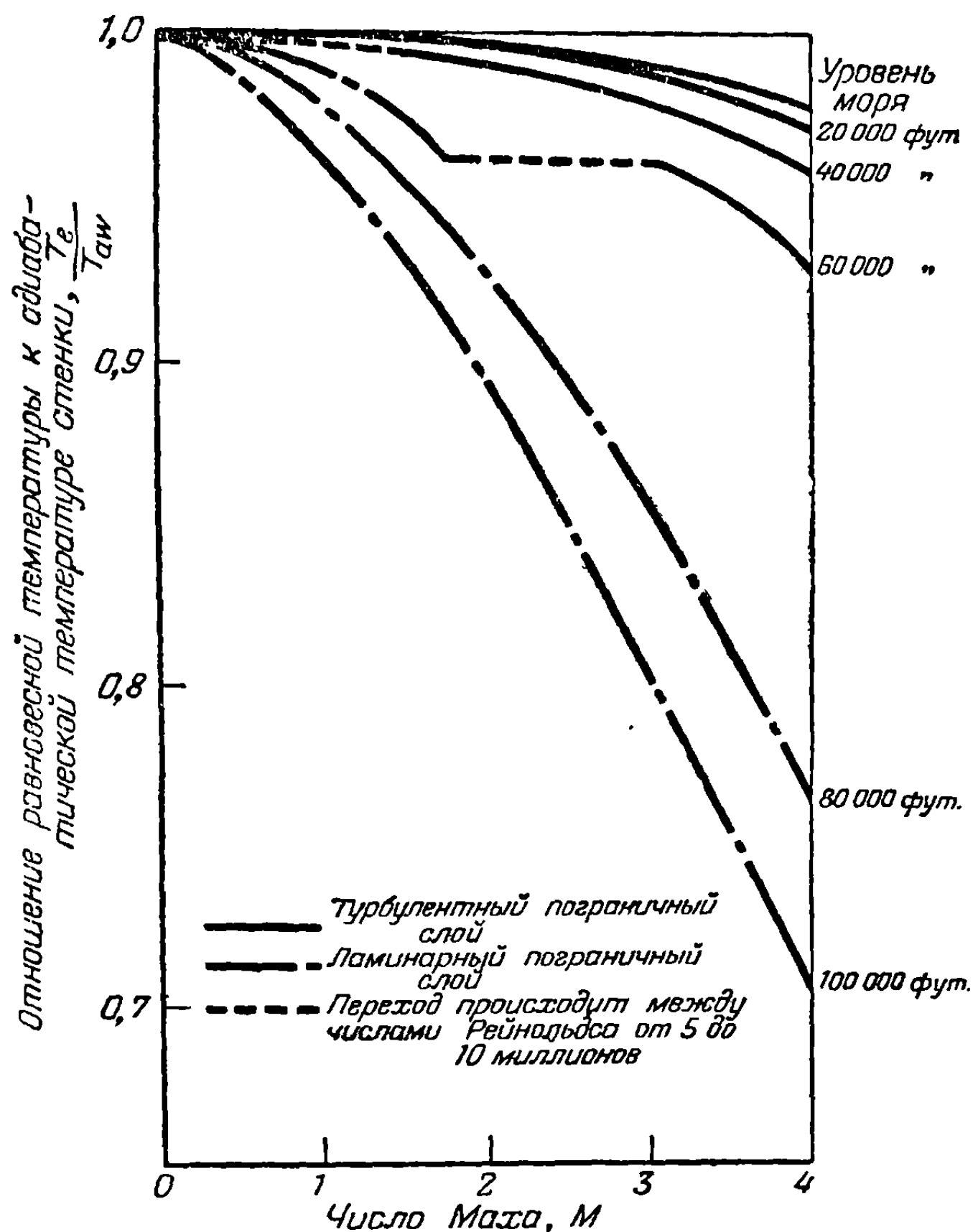
Допущения и трудности, возникающие при применении к сложной самолетной конструкции результатов, подобных тем, которые изложены выше, весьма многочисленны. Основная трудность, которую следует отметить, состоит в определении точки перехода. Это, возможно, самое слабое место аэродинамической

теории, и в настоящее время оценки точек перехода на трехмерных телах немногим лучше тех, которые получаются на основе рациональных соображений [6]. Вследствие большой разницы между коэффициентами теплопередачи для ламинарного и турбулентного течений положение точки перехода оказывает существенное влияние на количество подводимого тепла и на характер протекающих отсюда конструктивных задач.

**5-2. Внешняя теплопередача с помощью излучения.** Когда тепловая энергия излучения попадает на поверхность самолета, то тепловой поток  $q$ , поглощаемый обшивкой, определяется соотношением

$$q = \alpha \varphi_r \cos \theta, \quad (5-7)$$

где  $\alpha$  — коэффициент поглощения обшивки,  $\varphi_r$  — поток излучения на единицу площади поверхности, нормальной к линии зрения, идущей от самолета к излучающему объекту, и  $\theta$  — угол между внешней нормалью к поверхности и падающими лучами. Когда приходящее излучение обусловлено солнечной энергией, поток  $\varphi_r$  равен приблизительно 440 В. т. и. <sup>1)</sup> на кв. дюйм в час на высоте свыше 50 000 футов. В сравнительно ясный день поток уменьшается до 300 В. т. и. на кв. фут в час, когда излучение достигнет уровня земли. Атомные бомбы являются другим источником термической радиации, воздействующей на военные самолеты. Светящийся огненный шар горячих газов, образующийся при атомном взрыве, излучает тепловую энергию, которая



Фиг. 5-3. Влияние высоты и числа Маха на равновесную температуру плоской пластинки. Коэффициент излучения равен 0,5.

распространяется через атмосферу почти со скоростью света. Данные по прямому потоку излучения номинальных атомных бомб приведены в [11].

Для сравнительно больших чисел Маха и высот потеря тепловой энергии за счет радиации становится существенным фактором. Радиационный тепловой поток, излучаемый поверхностью с коэффициентом излучения  $\epsilon$  и с абсолютной температурой  $T_w$ , определяется по закону Стефана — Больцмана

$$q = - \epsilon \sigma T_w^4, \quad (5-8)$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана. Фиг. 5-3, основанная на результатах, опубликованных Дэвисом и Монагхэном [5], иллюстрирует влияние числа Маха и высоты на отношение равновесной температуры к адиабатической температуре стенки плоской пластинки с учетом радиационных потерь. Равно-

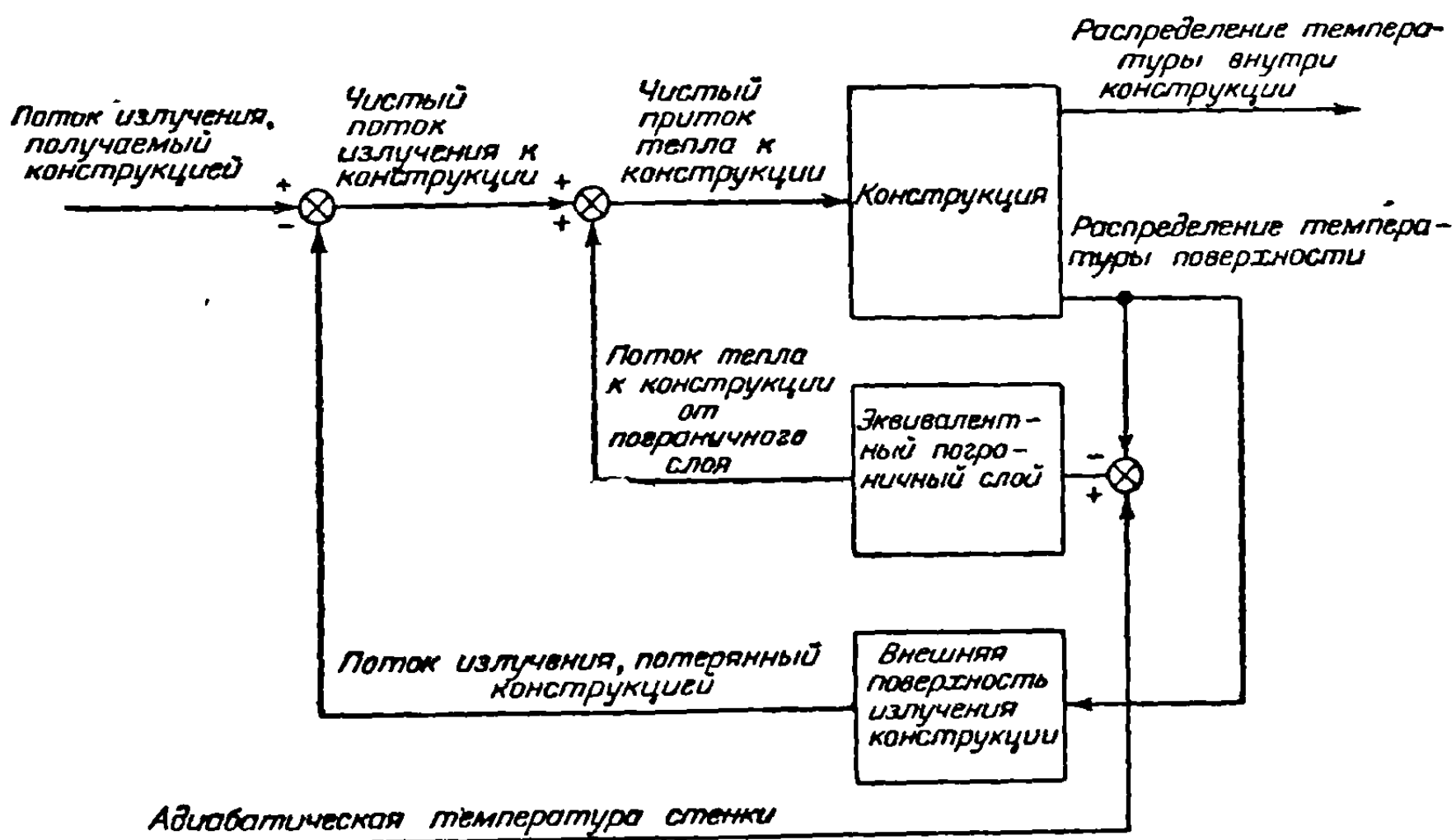
<sup>1)</sup> В. т. и. — British thermal unity — британская тепловая единица, равная 0,252 ккал. — Прим. ред.

весная температура определяется как температура, которую достигает пластинка после достаточно длительного периода нагревания, при котором конвективная теплопередача к телу от пограничного слоя в точности компенсирует теплопередачу от тела за счет излучения. Упомянутая выше фигура показывает, что потери за счет излучения от конструкции на больших скоростях и предельных высотах могут явиться важным фактором в уменьшении температуры конструкции.

**5-3. Относительный приток и потеря тепла.** Полезно сравнить относительную важность различных притоков и потерь тепла для гипотетической эволюции истребителя, изображенной на фиг. 5-1. Полный приток тепла за счет конвективной теплопередачи от пограничного слоя вплоть до момента закрытия дроссельной заслонки и выполнения разворота ( $t = 12,5$  мин) равен приблизительно 1000 В. т. и. на кв. фут. Суммарные потери на излучение в течение этого периода составляют приблизительно 100 В. т. и. на кв. фут при условии, что коэффициент излучения равен 0,4 и солнечная радиация равна 30 В. т. и. на кв. фут. Полная тепловая энергия, поглощенная самолетом от номинальной атомной бомбы, может быть порядка 30 В. т. и. на кв. фут, если коэффициент поглощения равен 0,4. Однако последняя действует в течение периода, продолжающегося менее 5 сек [11]. Максимальная скорость конвективной теплопередачи от пограничного слоя в течение той части эволюции, где имеет место полет с ускорением, равна почти 13 000 В. т. и. на кв. фут в час, а максимальная скорость излучения от атомной бомбы может приближаться к 50 000 В. т. и. на кв. фут в час. Скорость теплопередачи за счет солнечной радиации постоянна и равна примерно 160 В. т. и. на кв. фут в час. Таким образом, видно, что конвективная теплопередача от пограничного слоя, за исключением особых случаев взрыва атомной бомбы, является доминирующим фактором в аппаратах рассматриваемого типа.

## 6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР ВНУТРИ КОНСТРУКЦИИ

Решение аэротермической задачи, т. е. предсказание распределения температур внутри конструкции осложняется фактом взаимодействия теплопе-



Фиг. 6-1. Функциональная диаграмма процесса теплопередачи.

редачи из окружающей среды с теплопередачей внутри конструкции. Эффекты взаимодействия показаны на функциональной диаграмме фиг. 6-1. Важными элементами диаграммы являются конструкция, эквивалентный пограничный слой и внешняя поверхность излучения конструкции. Процессы

внутренней теплопередачи представлены конструкцией, а процессы внешней теплопередачи — эквивалентным пограничным слоем и внешней поверхностью излучения. Процессы теплопередачи за счет излучения и конвекции могут способствовать либо нагреванию, либо охлаждению конструкции. Если потерянное за счет излучения тепло превышает полученное, то имеет место чистое радиационное охлаждение, а если местная температура поверхности превышает местную адиабатическую температуру стенки, то имеет место чистое конвекционное охлаждение.

**6-1. Теплопередача внутри конструкции.** Внутренние процессы теплопередачи могут быть процессами теплопроводности, излучения и свободной конвекции. В случае сплошной конструкции процесс теплопередачи целиком является процессом теплопроводности. Для построенных конструкций, представляющих в настоящее время общий интерес, процесс теплопроводности играет главную роль при низких температурах, причем по мере роста температур излучение играет все более значительную роль.

(а) *Теплопередача за счет теплопроводности.* Теория теплопередачи за счет теплопроводности была основана Фурье [12] в 1822 г. С того времени теория интенсивно развивалась, и авиационный инженер имеет теперь в своем распоряжении несколько исчерпывающих исследований относительно общих принципов и методов решения задач теплопроводности [13]. Превосходными руководствами по этому вопросу служат книги Якоба [14] и Карслоу и Егера [15].

Для однородного изотропного твердого тела с распределением температур в момент времени  $t$  в виде  $T(x_1, x_2, x_3, t)$  уравнение в частных производных, описывающее передачу тепла в ортогональной системе координат, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] = c\rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6-1)$$

где  $x_1, x_2$  и  $x_3$  — ортогональные координаты и  $k, c$  и  $\rho$  — соответственно теплопроводность, удельная теплоемкость на единицу массы и плотность материала. Если суммарную поверхность тела обозначить через  $S = S_1 + S_2 + S_3$ , то граничные условия можно сформулировать в следующем виде:

$S_1$  — граница, где температура задана,  $T = T_0$ ,

$S_2$  — изолированная граница,  $k(\partial T / \partial n) = 0$ ,

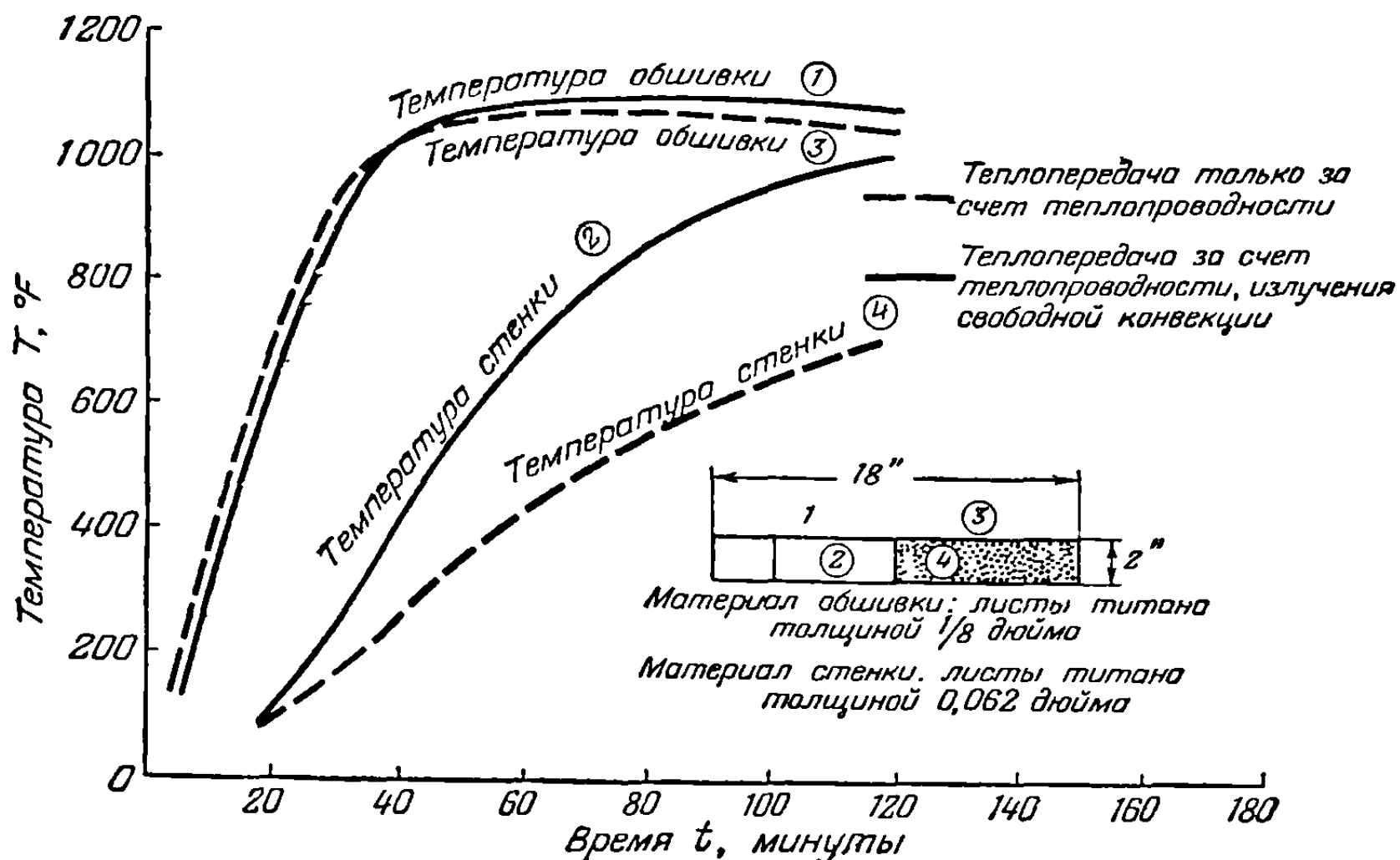
$S_3$  — граница, где происходит передача тепла,  $k(\partial T / \partial n) + q = 0$ ,

где  $n$  — направление внутренней нормали к поверхности тела.

Были разработаны изящные аналитические методы решения уравнения теплопроводности. Однако такие методы, как метод преобразования Фурье, метод Дюамеля, метод функции Грина [15] почти неприменимы для тел сложной формы или для тел, у которых термические свойства меняются от точки к точке. Для некоторых задач можно найти строгое решение в виде рядов Фурье, но в практическом случае нужно удерживать непомерно большое число членов [16]. Для получения решений в случае тел сложной формы и с переменными свойствами можно использовать релаксационные методы, подобные тому, который предложил Эммонс [17]. Вейнер [18] с успехом использовал метод Галеркина. Для решения задачи о неустановившемся процессе теплопередачи Васидзу [16] предложил вариационный принцип. Этот принцип, аналогичный вариационным принципам теории упругости и динамики, основывается на выборе форм распределения температур. Для практических конструкций решение уравнения (6-1) можно обычно получить, сведя непрерывную систему к системе с сосредоточенными параметрами. Это эквивалентно применению метода конечных разностей к переменным, изменяющимся в пространстве.

(б) *Теплопередача излучением.* Радиационная теплопередача внутри существующей конструкции сложным образом зависит от спектра излучения мате-

риалов и геометрии конструкции. Когда излучение, исходящее от одной поверхности, попадает на другую, часть его проникает внутрь поверхности, а остальная часть отражается зеркальным или диффузным образом. Отраженное излучение попадает как на первоначальную, так и на другие поверхности, и процесс отражения и поглощения продолжается до тех пор, пока не достигнуто равновесное состояние. Таким образом, процесс теплопередачи излучением значительно сложнее, чем процесс теплопроводности, и методы анализа не развиты еще до такой степени, чтобы их можно было легко применять при инженерных исследованиях. Для получения рациональных ответов можно использовать понятия черного и серого тел, в которых излучение и поглощение не зависят от длины волны. В недавнем своем исследовании в Национальном бюро стандартов Гудман [19] сообщил, что скорости теплопередачи излучением между



Фиг. 6-2. Сравнение форм теплопередачи для титановой балки с большим числом отсеков.

бесконечными параллельными пластинками, вычисленные в широком диапазоне температур и разностей температур по спектрам излучения, оказались на 2—29% выше соответствующих скоростей, вычисленных на основе допущения о сером теле.

(с) *Относительная важность форм внутренней теплопередачи.* Относительная важность различных форм теплопередачи внутри конструкции зависит от уровня температуры материалов и геометрической конфигурации. Для конструкций из алюминиевых сплавов можно, вероятно, допустить, что вплоть до температур обшивки около 600 F имеет место чистое явление теплопроводности. Однако для других материалов и более высоких температур приобретает важность явление излучения.

Для того чтобы оценить ошибку, проистекающую от допущения явления чистой теплопроводности, в Массачусетском технологическом институте на приборе для исследования теплового излучения был проведен соответствующий эксперимент. Для гипотетического истребителя, изображенного на фиг. 5-1, была придумана рациональная конструкция крыла. В качестве материала был выбран титановый сплав RC—130A. Были изготовлены шесть внешних отсеков модели титанового крыла в масштабе 1/4. Три отсека были заполнены изолирующим материалом, а другие оставлены открытыми, как показано на вставке фиг. 6-2. Скорости нагрева верхней и нижней поверхности балки, определенные по законам моделирования явлений теплопроводности, были одинаковы, для



того чтобы приближенно представить профиль маневра. Температурные реакции изолированных и неизолированных областей изображены на этой же фигуре. Температура обшивки в обеих областях коробки в пределах ошибки эксперимента почти одинакова, тогда как температуры стенок значительно отличаются. Основным интересом на фиг. 6-2 с точки зрения термических напряжений представляет максимальная разность температур обшивки и стенки. За счет влияния излучения и свободной конвекции эта разность уменьшается приблизительно на 30%. Интересно отметить, что расчеты, учитывающие теплопроводность и излучение и пренебрегающие конвекцией, хорошо согласуются с этими результатами.

Если говорить о зависимости от свойств материала, то отношение теплопередачи излучением к теплопередаче путем теплопроводности велико для больших значений отношения  $\epsilon/k$  — коэффициента излучения к коэффициенту теплопроводности. Поэтому для данной конфигурации и распределения температур можно ожидать, что отношение теплопередачи излучением к теплопередаче путем теплопроводности будет значительно выше для титана и чистой стали, чем для алюминия.

**6-2. Равновесие между внешней и внутренней теплопередачами для тонких обшивок.** Анализ сильно упрощается, если можно допустить, что обшивка является термически тонкой, т. е. по толщине обшивки нет заметной разницы температур. Для термически тонкой обшивки чистый тепловой поток  $q$  на единицу площади поверхности связан с производными от температуры  $T_w$  по координатам и времени соотношением

$$q = c_p \delta \frac{\partial T_w}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \delta \frac{\partial T_w}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1, 2), \quad (6-2)$$

где  $\delta$  — толщина обшивки.

Основное несоответствие возникает при совместном рассмотрении уравнений (6-2) и (5-3), поскольку последнее основывается на допущении изотермической поверхности. Оценки ошибок в распределении температур, проистекающих от применения коэффициентов теплопередачи для ламинарного течения на изотермических поверхностях к неизотермическим поверхностям, были произведены Чэпменом и Рубезиным [7] и Брисоном и Эдвардсом [9]. Для уравнений, которые получаются в результате подстановки выражения (5-6) в уравнение (6-2), Брисон и Эдвардс, пренебрегая проводимостью тепла вдоль обшивки, получили решения в явной форме. Сравнение этих решений с результатами анализа, основанного на коэффициентах теплопередачи для изотермической поверхности, указывает, что последняя аппроксимация приводит к сравнительно небольшой ошибке в распределении температур.

Если допустить, что, применяя коэффициенты теплопередачи для изотермической поверхности, можно обеспечить достаточную точность расчета, то чистый тепловой поток, приходящийся на единицу площади обшивки, приближенно выражается в виде

$$q = h (T_{\infty} - T_w) + \alpha \varphi_r \cos \theta - \epsilon \sigma T_w^4 + \varphi_i, \quad (6-3)$$

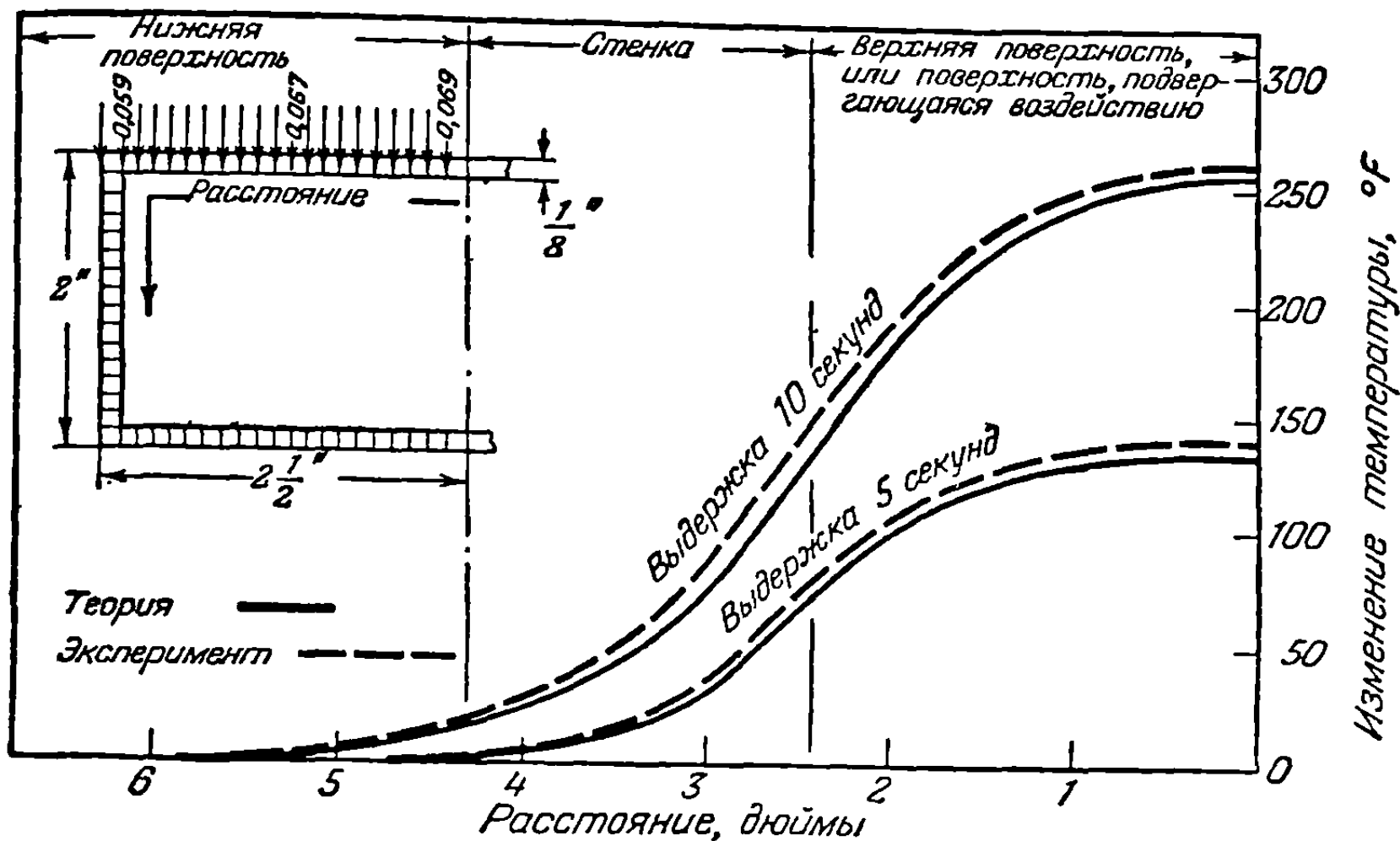
где  $\varphi_i$  — поток от источников тепла, расположенных внутри конструкции. Комбинируя уравнения (6-2) и (6-3), получим задачу об уравнивании внешней и внутренней теплопередачи тонкой обшивки. Численные решения уравнений (6-2) и (6-3) могут быть получены с помощью нескольких упомянутых ранее методов. В практических задачах удобным приближением является сведение (с помощью метода конечных разностей) непрерывной системы к системе с сосредоточенными параметрами. Рассмотрим, например, элемент крыла обшивки с постоянными толщиной и проводимостью, в котором можно пренебречь потоком тепла вдоль размаха. Первое приближение в конечных разностях для



уравнения (6-2) в случае одномерного теплового потока имеет вид

$$q_n = c\rho\delta \frac{\partial T_n}{\partial t} - \frac{k}{(\Delta x)^2} (T_{n-1} - 2T_n + T_{n+1}) \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (6-4)$$

Это уравнение описывает теплопередачу через  $N$  равных элементов обшивки длиной  $\Delta x$ . Температура в сечении  $n$  обозначается через  $T_n$ . Давая  $n$  последовательные значения, получим  $N$  совместных обыкновенных дифференциальных уравнений. Если, как предложил Якоб [14], заменить независимое переменное время тоже через его конечно-разностную форму, то для решения уравнений (6-3) и (6-4) можно использовать вычислительные машины. Для того чтобы оценить пригодность этого приближения для простой коробки при умеренных температурах, Шмидт и Уильямс [20] сравнили данный эксперимент с теорией для



Фиг. 6-3. Сравнение расчетного распределения температуры с экспериментальным.

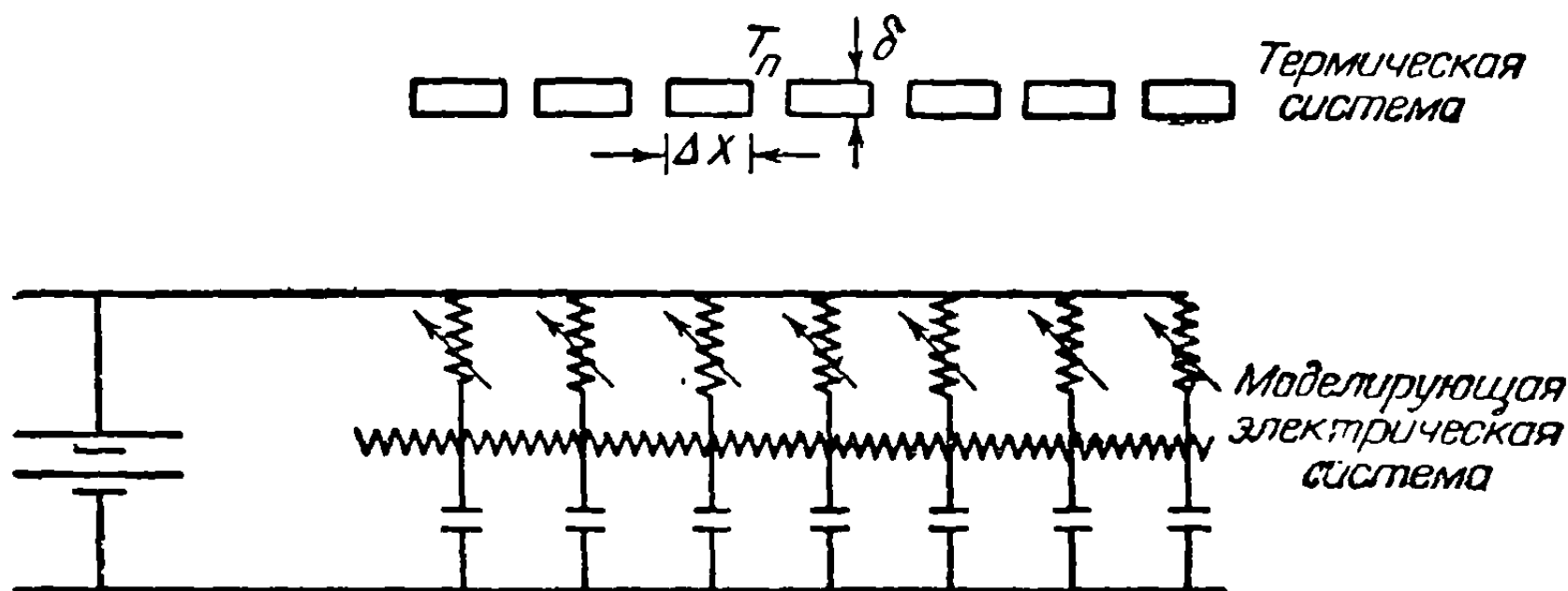
коробчатой прессованной балки 63S-T5,  $2 \times 5$  дюймов, с одной стороны подверженной радиационному нагреву ( $q = \alpha \varphi_r \cos \theta$ ). Для решения уравнений в конечных разностях в Массачусетском технологическом институте была использована автоматическая вычислительная машина Wirlwind I. Вставка на фиг. 6-3 показывает сетку из 54 сечений, использованную при исследовании распределения температуры. Поток тепла вдоль размаха не принимался во внимание. На вставке иллюстрируется изменение поглощаемой тепловой энергии излучения на верхней части коробки. На фиг. 6-3 показаны также экспериментальные и теоретические мгновенные распределения температуры для времени в 5 и 10 сек. Для этого простого случая видно удовлетворительное совпадение теории и эксперимента.

Эксперимент, описанный выше, не учитывает важных эффектов соединений, которые всегда присутствуют в готовой конструкции. Термическое сопротивление соединения в готовой конструкции уменьшает термические градиенты  $dT/dx$  повсюду, за исключением самих соединений, и оказывает значительное влияние на распределение температуры, которым нельзя обычно пренебрегать. Экспериментальные исследования коэффициентов теплопередачи соединений показали, что они зависят от таких факторов, как способ сборки, температура и уровень напряжений. Единственным надежным средством оценки этих факторов является испытание рассматриваемого соединения. Для решения уравнений (6-2) и (6-3) могут быть использованы моделирующие машины общего назначения или специальные

моделирующие приспособления. Амброзио, Расселл и Мак-Иннес [21] показали, как сконструировать специальные моделирующие приспособления при решении конструктивных задач для самолета. В качестве примера можно указать, что для случая конвективного аэродинамического нагрева

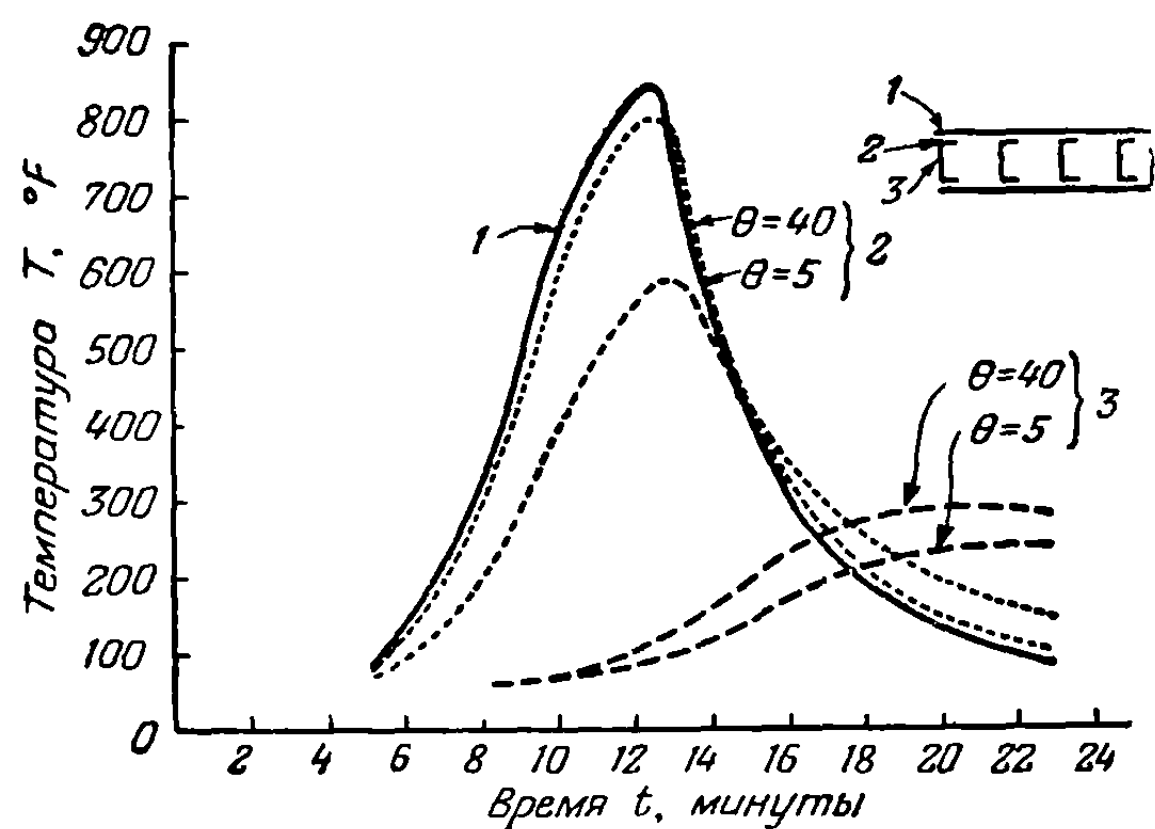
$$q = h (T_{aw} - T_w)$$

уравнение (6-4) можно моделировать на электрическом моделирующем устройстве, состоящем из простой сетки  $R-C^1$ , элементы которой показаны на упрощенной диаграмме фиг. 6-4.



Фиг. 6-4. Электрическая модель аэротермической системы.

**6-3. Некоторые практические приложения исследования распределения температуры.** Для того чтобы получить практические решения уравнений (6-2) и (6-3), можно и нужно использовать множество разнообразных упрощающих предположений. Пренебрежение излучением приводит к гораздо более простой задаче.



Фиг. 6-5. Типичные зависимости температура — время вблизи корневого сечения крыла гипотетического истребителя.

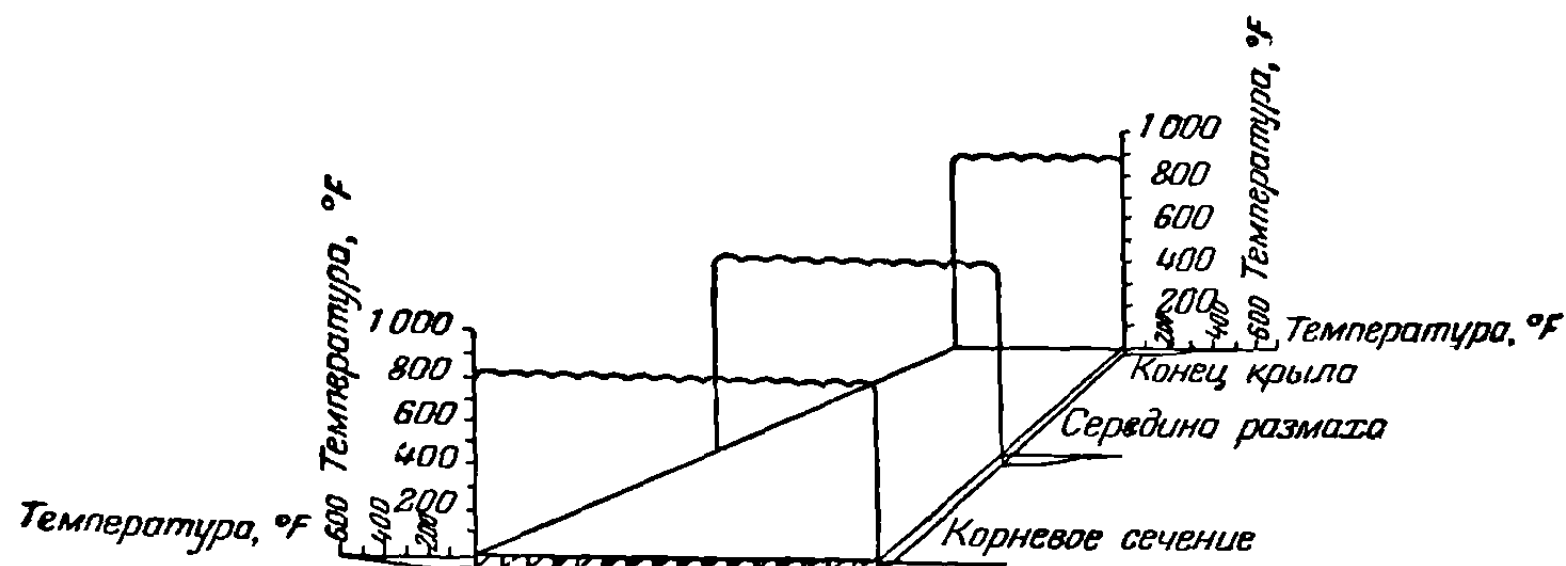
Теплопроводностью вдоль внешней обшивки часто можно пренебречь, за исключением областей с большими температурными градиентами, подобных передним и задним кромкам крыльев. Часто можно вычислить внешние температуры обшивки, пренебрегая внутренней конструкцией, а затем использовать температуру внешней обшивки в качестве температурного граничного условия для внутренней конструкции. Ошибки, которые вносятся такими упрощениями, можно оценить только сравнением численных решений друг с другом и с экспериментальными данными.

Фиг. 6-5 и 6-6 показывают характер изменения температуры во времени и ее распределение для гипотетического истребителя, совершающего маневр указанного на фиг. 5-1 профиля. Эти результаты получены для турбулентного пограничного слоя из расчетов, при которых учитывалась только теплопроводность и пренебрегалось всеми видами излучения. На фиг. 6-5 показаны результаты для двух значений безразмерной проводимости соединения  $\theta$ . Эти величины являются предельными значениями диапазона изменения проводимости соединения, которые можно получить, варьируя конструкцию деталей в титановой кон-

Фиг. 6-5 и 6-6 показывают характер изменения температуры во времени и ее распределение для гипотетического истребителя, совершающего маневр указанного на фиг. 5-1 профиля.

<sup>1)</sup> Сетка, состоящая из омических сопротивлений и емкостей. — Прим. ред.

струкции рассматриваемого здесь типа. Ясно видно важное влияние деталей соединения на распределение температуры. Распределение температуры в крыле на фиг. 6-6 соответствует соединению с наименьшей безразмерной теплопроводностью  $\theta = 5$ .



Фиг. 6-6. Типичное распределение температуры для конструкции крыла гипотетического истребителя;  $t = 12,5$  мин.

## 7. НАГРУЗКИ НА БОЛЬШИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Любой обзор конструктивных проблем должен содержать по крайней мере несколько замечаний относительно нагрузок. Главные нагрузки на конструкцию при сверхзвуковых скоростях могут быть, как обычно, подразделены на категории нагрузок от порывов ветра и маневренных нагрузок.

**7-1. Нагрузки, обусловленные атмосферной турбулентностью.** Относительно строения порывов ветра и обусловленных ими нагрузок можно сформулировать две точки зрения. Первая из них связана с понятием одиночного порыва, а вторая — с понятием непрерывной атмосферной турбулентности. Первая точка зрения исторически старше и твердо вошла в прочностные расчеты конструкций. Вторая является новой, более рациональной точкой зрения, и хотя применение ее при расчетах отчасти неясно, она оказывается полезным дополнением к понятию одиночного порыва.

(а) *Одиночный порыв.* Реакция самолета на одиночные порывы различных форм подробно изучалась на дозвуковых скоростях [22]. Основными частями таких исследований являются функции, характеризующие приращение подъемной силы, обусловленные проникновением в порыв и внезапным изменением угла атаки [23]. Первые определяют нагрузки на крыло вследствие порыва, а вторые — нагрузки на крыло, обусловленные движением самолета в ответ на порыв. Для несжимаемого потока функции Кюсснера определяют приращение подъемной силы для резко ограниченного порыва, а функции Вагнера — приращения подъемной силы за счет внезапного изменения угла атаки. Аналогичные результаты имеются для больших дозвуковых и сверхзвуковых скоростей. При больших сверхзвуковых числах Маха теория поршня и ее различные усовершенствования позволяют произвести громадные упрощения в форме этих функций и учесть некоторые эффекты второго порядка, которыми пренебрегают в линеаризированной сверхзвуковой теории крыла. Эти вопросы обсуждались в статьях Лайтхилла [24], Майлса [25] и Ландаля [26] и были применены в задачах аэроупругости Ландалем, Моллк-Кристенсенем и Эшли [27], а также Зартаряном, Хеллером и Эшли [28]. Теория поршня применима для двумерного течения около тонких тел, когда выполняется какое-либо из условий

$$M^2 \gg 1, \quad kM^2 \gg 1, \quad k^2M^2 \gg 1, \quad (7-1)$$

где  $k$  — приведенная частота неустановившегося движения, отнесенная к полухорде. Когда делается допущение о двумерности течения, то для случая тонкого профиля, имеющего начальный угол атаки  $\alpha_0$ , симметричное распределение

толщины  $2z_\delta(x)$  и среднюю линию, зависящую от времени (ср. фиг. 7-1), выводится особенно простое точечное соотношение между разностью давлений и нормальной скоростью (см. [28]):

$$\frac{\Delta p_a}{\Delta p_\infty} = - \left[ 2\gamma + \gamma(\gamma + 1) \frac{v_\delta}{a_\infty} + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2} \left( \frac{v_\delta}{a_\infty} \right)^2 + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2} \left( \frac{U\alpha_0}{a_\infty} \right)^2 \right] \frac{v_1}{a_\infty} \quad (7-2)$$

где

$\Delta p_a$  — разность давлений, положительная в направлении оси  $z$  (фиг. 7-1),

$p_\infty$  — давление в невозмущенном потоке,

$\gamma = \rho a_\infty / p_\infty = c_p / c_v$  — отношение удельных теплоемкостей,

$a_\infty$  — скорость звука в невозмущенном потоке,

$v_\delta = U (dz_\delta / dx)$ ,

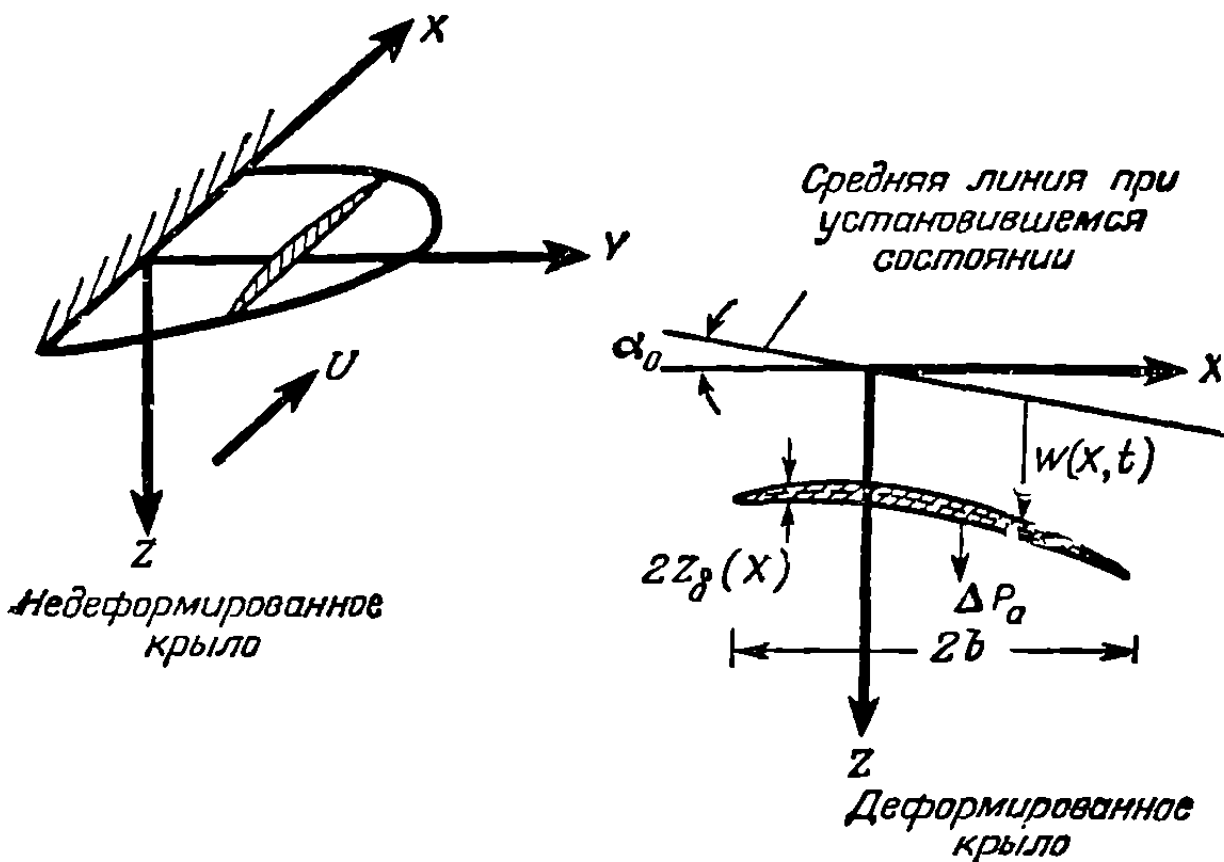
$v_1 = (\partial w / \partial t) + U (\partial w / \partial x)$ ,

$w(x, t)$  — перемещение точки поверхности крыла.

Аналогичная трехмерная теория поршня была предложена Ландалем, Моллк-Кристенсенем и Эшли, но простой функциональной связи в каждой точке между давлением и нормальной скоростью не существует. Однако, если условия (7-1) выполнены и относительная толщина не слишком мала для данного числа Маха, то можно показать, что соотношение (7-2) справедливо для всей поверхности трехмерного крыла, за исключением области в непосредственной близости к его концам.

Для профиля нулевой толщины функция, аналогичная функции Кюсснера и характеризующая рост подъемной силы, выводится из уравнения (7-2) в виде

$$\left. \begin{aligned} \Psi(s) &= \frac{s}{2} & s \leq 2 \\ \Psi(s) &= 1(s) & s \geq 2 \end{aligned} \right\} (7-3)$$



Фиг. 7-1. Система осей для задач аэроупругости.

где

$s(2U/\bar{b})t$  — безразмерное расстояние в полухордах, проходимое крылом,  
 $\bar{b}$  — средняя полухорда крыла.

В случае внезапного изменения угла атаки функция, аналогичная функции Вагнера и характеризующая рост подъемной силы, проста равна

$$\Phi(s) = 1(s) \quad (7-4)$$

Можно легко проверить, что вышеуказанные формулы близко аппроксимируют точные решения для чисел Маха, превышающих примерно 2,5.

Самая общая формулировка уравнений возмущенного движения упругого самолета в полете включает рассмотрение трехмерного упругого тела с шестью степенями свободы поступательного и вращательного движений в дополнение ко многим степеням свободы упругих движений. Часто для аэроупругих исследований принимается более простая математическая модель, в которой конструкция представляется недеформированной упругой пластиной в плоскости  $xu$ . Допустим, что самолет обладает свободой перемещений по вертикали и свободой движения тангажа и крена. Давление возмущения  $\Delta p^D(x, y, t)$  с произвольной зависимостью от координат и времени прикладывается в виде порыва. В результате перемещений, обусловленных возмущением, возникнут скорости,

ускорения и аэродинамические давления, которые мы будем обозначать через  $\Delta p^M(x, y, t)$ .

Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \int_S \int \ddot{w}(x, y, t) \rho dx dy + \int_S \int (\Delta p^D + \Delta p^M) dx dy &= 0, \\ \int_S \int \ddot{w}(x, y, t) \rho x dx dy + \int_S \int (\Delta p^D + \Delta p^M) x dx dy &= 0, \\ \int_S \int \ddot{w}(x, y, t) \rho y dx dy + \int_S \int (\Delta p^D + \Delta p^M) y dx dy &= 0, \\ w(x, y, t) - w(0, 0, t) - x \frac{\partial w(0, 0, t)}{\partial x} - y \frac{\partial w(0, 0, t)}{\partial y} + \\ + \int_S \int C(x, y; \xi, \eta) [\Delta p^D(\xi, \eta, t) + \Delta p^M(\xi, \eta, t) + \rho(\xi, \eta) \ddot{w}(\xi, \eta, t)] d\xi d\eta &= 0. \end{aligned} \right\} (7-5)$$

В этой системе уравнений неизвестная величина  $w(x, y, t)$  представляет собой малое перемещение самолета от его первоначальной равновесной конфигурации, вызванное возмущением. Массовая плотность самолета, приходящаяся на единицу площади, обозначена через  $\rho(x, y)$ , а функция влияния, исправленная на уменьшение жесткости, обусловленное тепловыми эффектами, выражается в виде  $C(x, y; \xi, \eta)$ . Принимается, что изменение возмущения от порыва  $\Delta p^D$  как в пространстве, так и во времени известно. Аэродинамические давления  $\Delta p^M$  при больших сверхзвуковых скоростях определяются просто по соотношению (7-2). Решение уравнений (7-5) обычно получают, допуская, что пространственное очертание деформированной конструкции, являющейся в действительности системой с бесконечным числом степеней свободы, можно аппроксимировать эквивалентной системой с конечным числом степеней свободы. Если сделан этот первоначальный шаг, уравнения переходят в обыкновенные дифференциальные уравнения; роль независимого переменного в этих уравнениях играет время. Хорошо известно, что взаимодействие упругих и инерционных сил можно исключить, если нормальные формы перемещения выбрать в качестве степеней свободы:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x, y) \xi_i(t), \quad (7-6)$$

где  $\varphi_i(x, y)$  — собственные формы недеформированного самолета и  $\xi_i(t)$  — нормальные координаты.

Для того чтобы проиллюстрировать явление реакции на порыв ветра, мы для простоты можем исключить все степени свободы, кроме вертикального перемещения и изгиба крыла. Решение такой системы удобно выразить в зависимости от безразмерной величины, называемой коэффициентом облегчения. Эта величина обозначается символом  $AF$  и определяется соотношением

$$\Delta BM = (AF) (\Delta BM)_s, \quad (7-7)$$

где

$\Delta BM$  — действительное максимальное приращение изгибающего момента у корня крыла, обусловленное порывом,

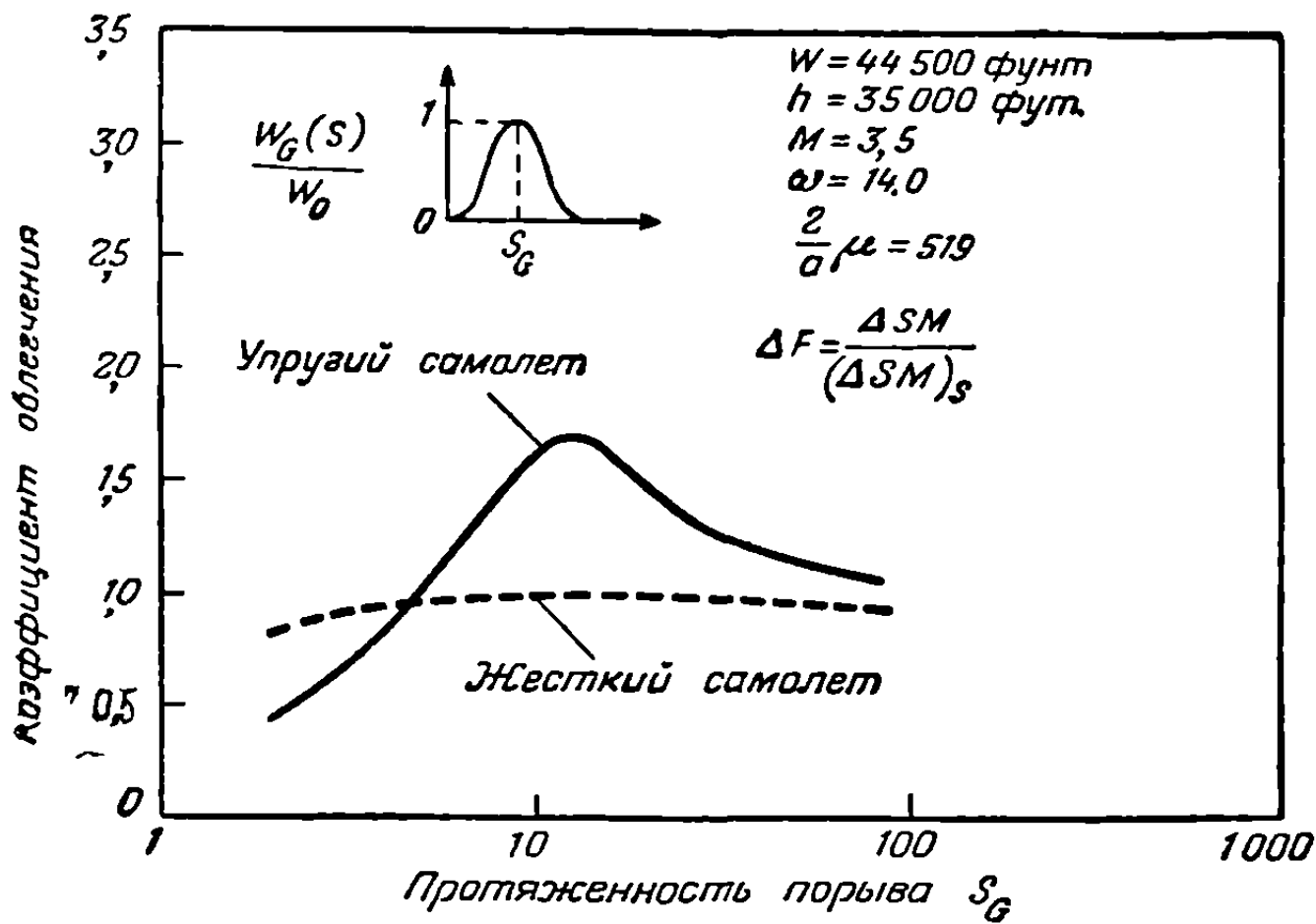
$$(\Delta BM)_s = (BM)_g \left[ \frac{(\rho/2) U w_0}{W/S} \frac{dC_L}{d\alpha} \right],$$

$(BM)_g$  — изгибающий момент в корневом сечении в горизонтальном полете,

$\left[ \frac{(\rho/2) U w_0}{W/S} \frac{dC_L}{d\alpha} \right]$  — формула резко ограниченного порыва.



Если принять, что гипотетический истребитель входит в порыв „единица минус косинус“ при  $M = 3,5$  на высоте 35 000 футов, то можно получить результаты, изображенные на фиг. 7-2. Для случая жесткого самолета фиг. 7-2 указывает, что для всех практических целей коэффициент облегчения для широкого диапазона протяженностей порыва равен единице. С другой стороны, если у крыла имеется свобода перемещения в его основной форме колебаний, то коэффициент облегчения сильно зависит от протяженности порыва и имеет максимальное значение около 1,7. Отношение коэффициентов облегчения упругого и жесткого самолетов называется динамической перегрузкой. Из этого простого примера следует, что при полете на больших



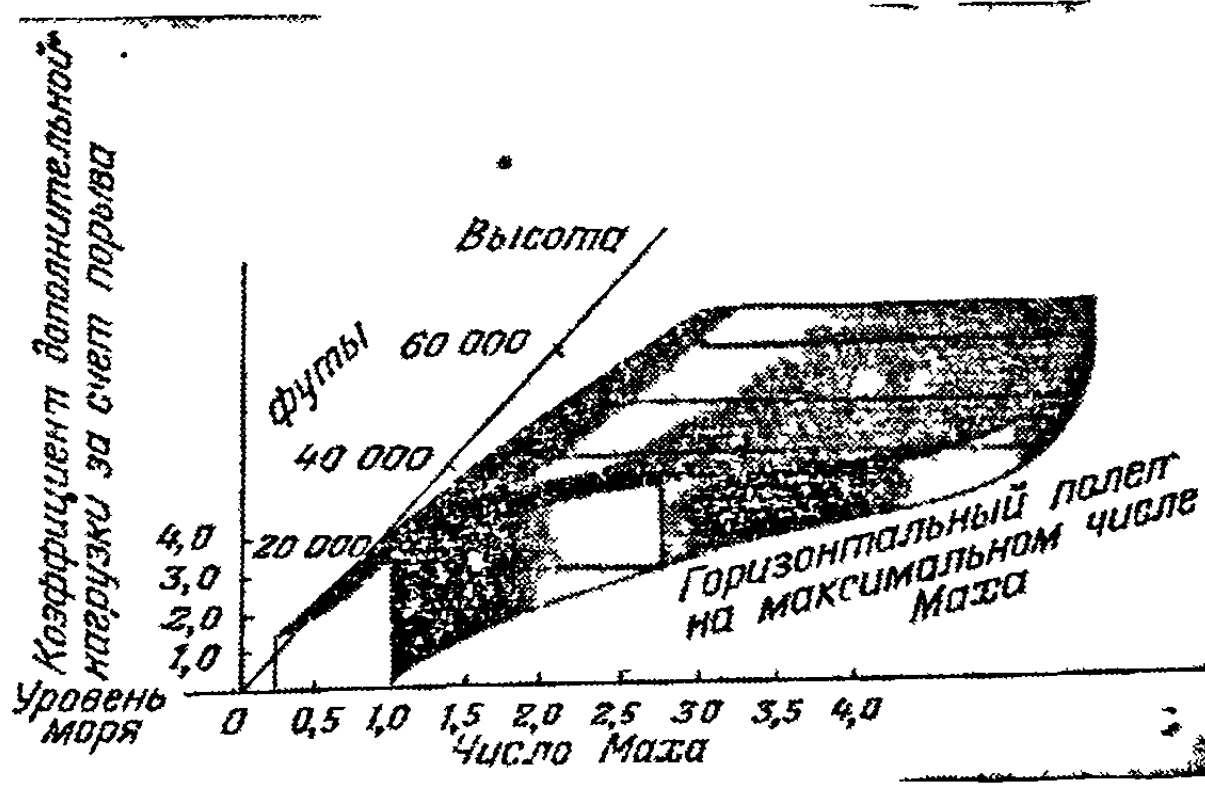
Фиг. 7-2. Коэффициент облегчения порыва (в основу расчета положено понятие дискретного порыва).

сверхзвуковых скоростях возможны динамические перегрузки, несколько превышающие величины, обычно встречающиеся при дозвуковом полете.

Трехмерная диаграмма, показанная на фиг. 7-3, полезна при оценке относительных уровней нагрузок от порывов на различных скоростях и высотах. Она дает дополнительные перегрузки для жесткого гипотетического истребителя, возникающие за счет порыва „единица минус косинус“. Принимается, что на уровне моря порыв имеет интенсивность 50 фут/сек с соответствующим уменьшением по мере увеличения высоты [29]. С увеличением высоты предельная величина коэффициента перегрузки от порыва значительно уменьшается. На больших высотах — около 40 000 футов — увеличение числа Маха не оказывает заметного влияния на коэффициент перегрузки для жесткого самолета. Однако при выводе заключений из результатов, основывающихся на допущении жесткого самолета, следует соблюдать осторожность, поскольку из фиг. 7-2 мы видели, что влияние упругости приводит к изменению напряжения, особенно на больших скоростях и высотах.

Трехмерная диаграмма, показанная на фиг. 7-3, полезна при оценке относительных уровней нагрузок от порывов на различных скоростях и высотах. Она дает дополнительные перегрузки для жесткого гипотетического истребителя, возникающие за счет порыва „единица минус косинус“. Принимается, что на уровне моря порыв имеет интенсивность 50 фут/сек с соответствующим уменьшением по мере увеличения высоты [29]. С увеличением высоты предельная величина коэффициента перегрузки от порыва значительно уменьшается. На больших высотах — около 40 000 футов — увеличение числа Маха не оказывает заметного влияния на коэффициент перегрузки для жесткого самолета. Однако при выводе заключений из результатов, основывающихся на допущении жесткого самолета, следует соблюдать осторожность, поскольку из фиг. 7-2 мы видели, что влияние упругости приводит к изменению напряжения, особенно на больших скоростях и высотах.

На больших высотах — около 40 000 футов — увеличение числа Маха не оказывает заметного влияния на коэффициент перегрузки для жесткого самолета. Однако при выводе заключений из результатов, основывающихся на допущении жесткого самолета, следует соблюдать осторожность, поскольку из фиг. 7-2 мы видели, что влияние упругости приводит к изменению напряжения, особенно на больших скоростях и высотах.



Фиг. 7-3. Поверхность порыва.

(b) Непрерывная атмосферная турбулентность.

Искусственность использования понятия одиночного порыва в качестве основы для проектирования конструкции была признана давно. Поскольку атмосферная турбулентность непрерывна и носит случайный характер, то методы ее исследования должны иметь статистическую природу. Один из таких методов — теория обобщенного гармонического анализа — был развит Винером [30] и другими в связи с теорией коммуникаций. С тех пор он применялся при изучении турбулентности малого



масштаба в аэродинамических трубах и при исследовании явления бафтинга [31]. Принципы обобщенного гармонического анализа впервые были применены к изучению атмосферной турбулентности Клеменстоном [32], который из летных экспериментов определил спектр мощности атмосферы. При объединении теории поршня и принципов обобщенного гармонического анализа получаются сравнительно простые результаты. Например, можно вывести следующее явное выражение для среднего квадрата дополнительного изгибающего момента у корня крыла жесткого самолета:

$$\overline{(\Delta BM)_R^2} = \left[ \frac{(\Delta BM)_S}{\omega_0} \right]^2 \omega_G^2 I_R(x, a), \quad (7-8)$$

где

$$I_R(x, a) = \frac{1}{\pi x^2} \int_0^\infty \frac{(1 + 3\zeta^2) \sin^2 x\zeta}{(1 + \zeta^2)^2 (a^2 + \zeta^2)} d\zeta,$$

$$a = \frac{1}{x(M/2)\mu} \quad x = \frac{\bar{b}}{L},$$

$\bar{b}$  — средняя полухорда крыла,  
 $M$  — число Маха,  
 $\mu$  — безразмерный параметр массы,  
 $L$  — интегральный масштаб турбулентности.

Интеграл  $I_R(x, a)$  может быть просто вычислен в явной форме. Если принять, что распределения вероятностей  $\Delta BM$  и  $\omega_G$  одного и того же типа, то коэффициент облегчения жесткого самолета при больших сверхзвуковых скоростях можно представить в виде

$$(AF)_R = \sqrt{I_R}. \quad (7-9)$$

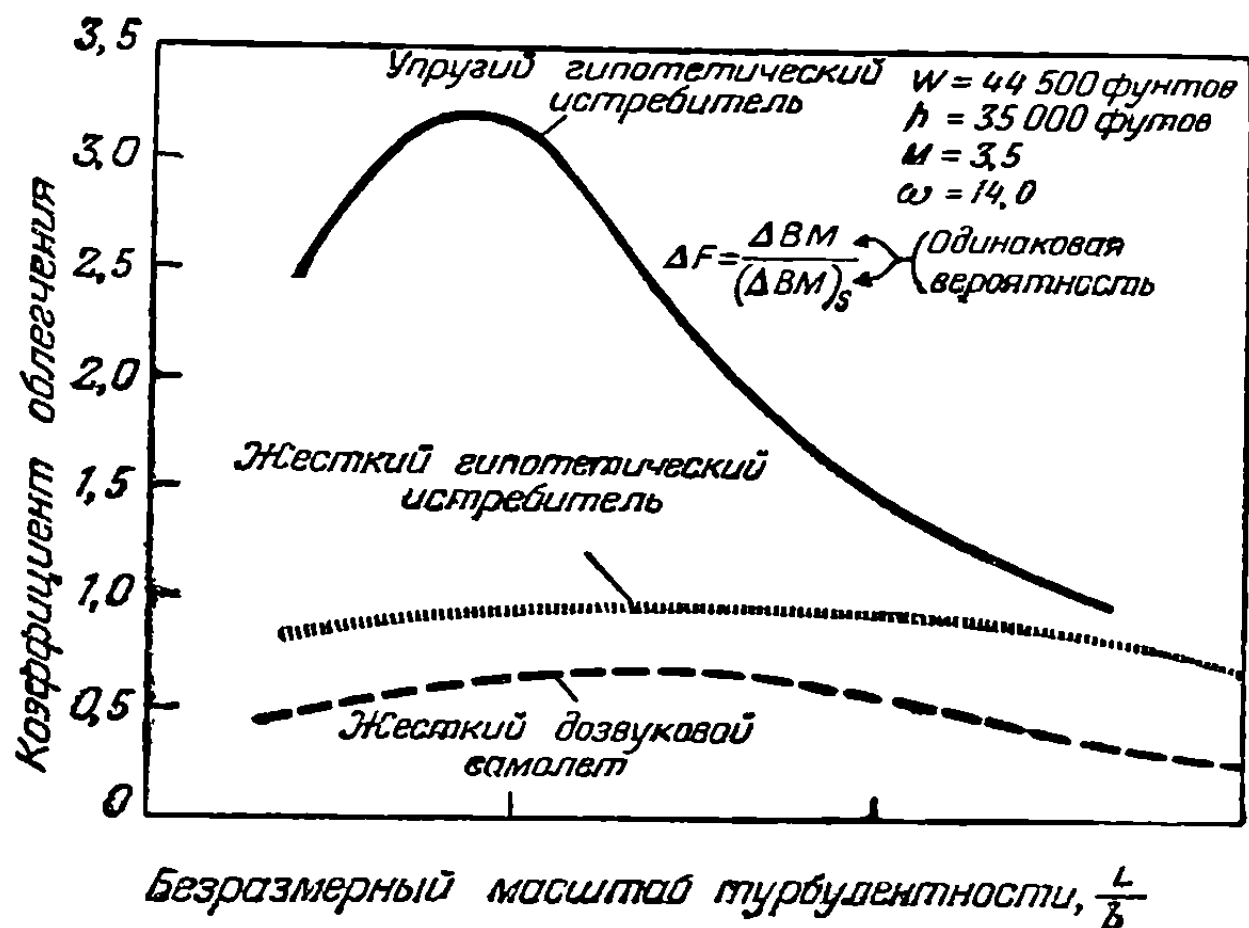
На фиг. 7-4 показана кривая уравнения (7-9) в зависимости от безразмерного масштаба турбулентности для гипотетического истребителя при  $M = 3,5$  на высоте 35 000 футов. Для целей сравнения на той же фигуре нанесена аналогичная кривая Фына [33] для типичного дозвукового самолета. Общий более высокий уровень коэффициентов облегчения на сверхзвуковых скоростях очевиден. Из сравнения фиг. 7-2 и 7-4 можно видеть, что нет заметной разницы между коэффициентами облегчения жесткого самолета, вычисленных на основе понятия одиночного порыва и понятия спектральной мощности.

Если принято, что самолет упругий и имеет одну форму собственных колебаний и если вероятности распределения  $\Delta BM$  и  $\omega_G$  одного типа, то коэффициент облегчения упругого самолета дается выражением

$$(AF)_F = \sqrt{I_F}, \quad (7-10)$$

где

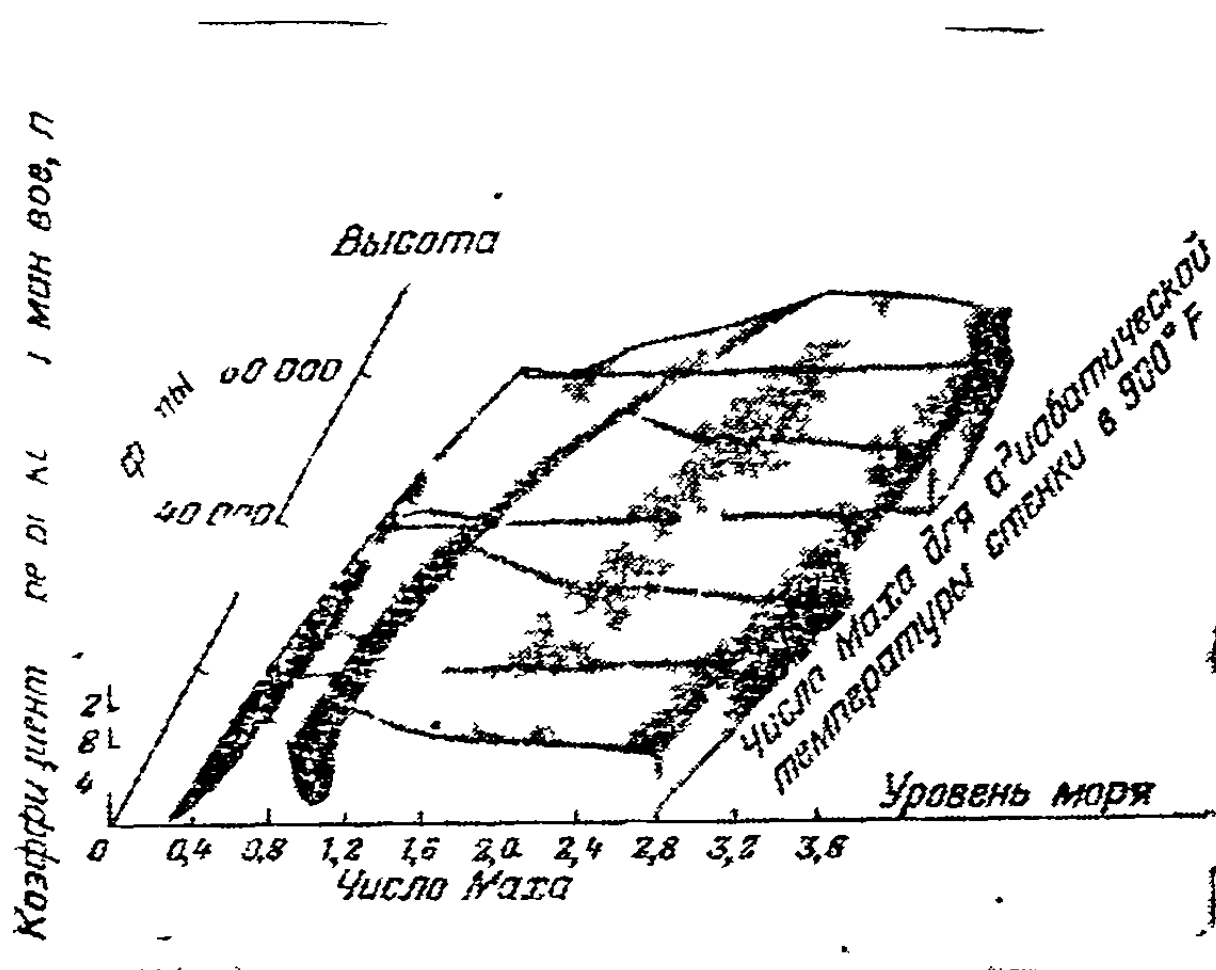
$$I_F = \frac{1}{\pi x^2} \int_0^\infty \frac{(1 + 3\zeta^2) |H(\zeta)|^2 \sin^2 x\zeta}{(1 + \zeta^2)^2 \zeta^2} d\zeta,$$



Фиг. 7-4. Коэффициент облегчения порыва (в основу расчета положено понятие спектральной мощности).

$H(\zeta)$  — функция проводимости упругого самолета на единичный синусоидальный порыв.

На фиг. 7-5 нанесена также кривая уравнения (7-10) для гипотетического истребителя. Максимальная динамическая перегрузка упругого самолета, вычисленная по обобщенному гармоническому анализу, несколько выше того значения, которое получено на основе теории одиночного порыва. Если масштаб турбулентности  $L$  будет порядка 1000, то оба метода дадут для динамической перегрузки результаты одного и того же порядка. Не вполне ясно, какой подход дает лучший результат, хотя некоторые данные, полученные из летных



Фиг. 7-5. Поверхность маневра.

тину кривых маневров гипотетического истребителя, изображенную в системе осей коэффициента перегрузки, числа Маха и высоты полета. Поверхность, охватывающая левую часть диаграммы, определяется аэродинамическими ограничениями, т. е. максимальной подъемной силой. В окрестности числа Маха, равного 1, параллельно оси высот простирается ветвь бафтинга. Форма этой ветви зависит от поведения самолета на околозвуковом режиме. Поверхность, охватывающая правую часть диаграммы, определяется прочностными возможностями самолета. Она имеет скат направо, обусловленный влиянием аэродинамического нагрева на прочность конструкции. Вертикальная поверхность, ограничивающая правую сторону фигуры, определяется ограничениями либо по летным, либо по конструктивным характеристикам. Последние могут заключаться в предельной температуре, определяющейся по соображениям, связанным с прочностью материала, или в предельном динамическом давлении. На фиг. 7-5 для правой границы использована предельная адиабатическая температура стенки в  $900^{\circ}\text{F}$ . Если летные характеристики самолета таковы, что они могут достигнуть правой границы, то самолет „полетно-ограничен“ по температуре.

## 8. ПРОБЛЕМЫ КОНСТРУКЦИИ И АЭРОУПРУГОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ПОЛЕТЕ НА БОЛЬШОЙ СКОРОСТИ

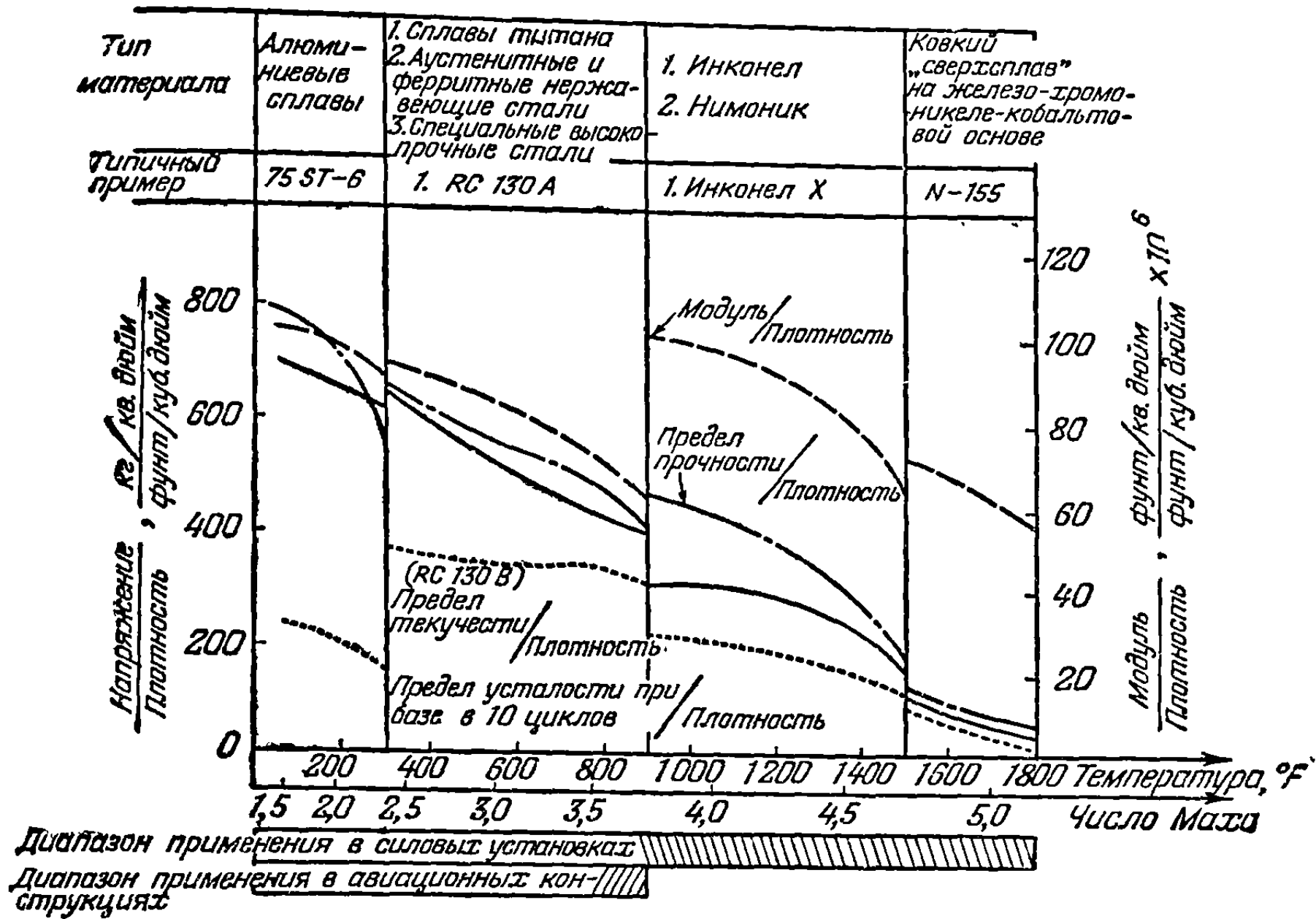
При больших скоростях возникают некоторые совершенно новые проблемы конструкции и аэроупругости, являющиеся результатом окружающей высокой температуры и природы аэродинамических сил.

8-1. Ухудшение механических свойств материала при повышенной температуре. Наиболее очевидным и самым важным эффектом повышенной температуры является ухудшение механических свойств материала. На фиг. 8-1

испытаний на малых дозвуковых скоростях, указывают, что результат, который получается на основе понятия спектральной мощности, может быть ближе к действительности.

7-2. Нагрузки, возникающие во время маневра. Кривые маневров самолета определяются как аэродинамическими и летными характеристиками, так и его прочностью. Последняя определяется проектными нормами, установленными на основе статистических исследований экспериментальных летных данных. Фиг. 7-5 можно использовать для иллюстрации этих ограничений и возможностей для сверхзвукового самолета. Она представляет качественную кар-

изображены диаграммы примерных областей применимости листового материала из четырех сплавов, годных для авиационных конструкций, и указаны характерные изменения свойств с изменением температуры. Из фигуры видно, что с повышением температуры у всех четырех материалов наблюдается резко выраженная тенденция падения отношений предела текучести к плотности материала. Интересно заметить, что тенденции падения отношений модуля упругости к плотности и усталостной прочности к плотности не так резко выражены.



Фиг. 8-1. Изменение свойств сплавов, которые могут использоваться для авиационной конструкции.

Эти кривые показывают, что кратковременная прочность конструкции при больших числах Маха будет довольно низка по сравнению с существующими в настоящее время нормами.

**8-2. Термические напряжения.** Среди прочих нежелательных эффектов, происходящих от повышения температуры окружающей конструкцию среды, мы находим термические напряжения. Термические напряжения возникают в конструкциях в результате того факта, что большинство технических материалов расширяется с увеличением температуры. Температурные градиенты внутри конструкций обуславливают различные степени расширения в различных частях конструкции. Если конструкция статически неопределима, то она сопротивляется этому расширению и образует систему с самоуравновешивающимися напряжениями.

(а) *Теория упругих термических напряжений.* Дюамель (1838 г.) был первым ученым, который содействовал развитию теории термических напряжений. Со времени первой работы Дюамеля к теории были сделаны многочисленные добавления. Изложение основных сведений авиационный инженер может найти в нескольких источниках, например в [35].

Прямой подход к исследованию термических напряжений заключается в том, чтобы использовать обычные уравнения теории упругости с видоизмененными соотношениями между напряжениями и деформациями [35]. Обозначим ортогональные оси координат через  $x_1, x_2$  и  $x_3$ , перемещения через  $u_i$ , напряжения и деформации соответственно через  $\sigma_{ij}$  и  $\epsilon_{ij}$ . Превышение температуры тела над

температурой окружающей среды обозначим через  $\Delta T(x_1, x_2, x_3)$  и направляющие косинусы углов между нормалью к поверхности и осями  $x_j$  — через  $l_j$ . Соответствующие уравнения для однородного изотропного тела имеют следующий вид:

$$\text{уравнение равновесия: } \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0;$$

$$\text{соотношения между деформациями и перемещениями: } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right);$$

$$\text{граничные условия: } \sigma_{ij} l_j = 0;$$

соотношения между напряжениями и деформациями:

$$\begin{cases} \epsilon = [(1 - 2\nu)/E] \sigma + \alpha \Delta T, \\ \sigma'_{ij} = 2G\epsilon'_{ij}, \end{cases} \quad (8-1)$$

где  $i$  и  $j$  изменяются от 1 до 3. Соотношения между напряжениями и деформациями делятся на две части. Первая представляет увеличение или уменьшение объема, где  $\sigma = (1/3) \sigma_{ii}$  и  $\epsilon = (1/3) \epsilon_{ii}$  являются соответственно главным напряжением и главной деформацией. Вторая относится к девиаторной части напряжений и деформаций, т. е. к тем же напряжениям и деформациям, которые связаны с изменением формы материала, а не с изменением его объема. Они определяются равенствами  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$  и  $\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Поскольку тепловое расширение и сжатие не деформирует материала, температура не появляется во втором соотношении между напряжениями и деформациями. Эту систему уравнений можно разрешить обычным методом теории упругости и получить напряжения, соответствующие заданному повышению температуры  $\Delta T(x_1, x_2, x_3)$ .

При другом подходе, который основан на принципе суперпозиции, задача формулируется с помощью обычных соотношений между напряжениями и деформациями с фиктивными объемными и поверхностными силами [35]. Интересно отметить, что этот метод был описан Дюамелем в его первоначальной работе [34] и, возможно, является самым ранним приложением принципа наложения при исследовании напряжений.

Энергетические теоремы всегда являлись полезными инструментами при инженерных исследованиях напряжений, так как с их помощью часто можно получить приближенные решения там, где другие методы непригодны. Из двух принципов, на которых основываются энергетические теоремы, один, относящийся к дополнительной энергии, получил более широкое применение при исследованиях термических напряжений. Можно утверждать, что среди всех напряженных состояний, удовлетворяющих уравнениям равновесия и граничным условиям, действительное состояние термического напряжения, т. е. состояние, которое удовлетворяет также условию совместности, является таким состоянием, при котором достигается минимум дополнительной энергии [36]. Если обозначить дополнительную энергию через  $U_c$ , то

$$\delta U_c = 0, \quad (8-2)$$

где

$$U_c = \int_V (U_0 + \alpha \Delta T \sigma_{ii}) dV \quad (i = 1, 2, 3).$$

Таким образом, теорема о минимуме дополнительной энергии может применяться в ее обычной форме, если вместо плотности энергии деформации  $U_0$ , выраженной через напряжения, использовать производную от нее величину, прибавляя к ней член  $\alpha \Delta T \sigma_{ii}$ . Например, для важного случая плоского напряженного состояния, который используется для термически тонких листов, дополнительная

управления редко оказывается возможным возбудить достаточное количество форм колебаний с частотой, превосходящей 15 колебаний в секунду.

*Импульсное возбуждение.* Простейшим типом возбуждающей аппаратуры, устанавливаемой на самолете, является генератор импульсов. Это приспособление может принимать форму пулемета или пушки, которая стреляет в направлении, противоположном направлению желаемого импульса. Снаряды могут выстреливаться поодиночке или залпами. Для получения различной картины распределения сил и моментов несколько орудий могут быть синхронизированы. Другим типом генератора импульсов может служить одна или несколько взрывных камер, в которых могут взрываться соответствующим образом устроенные заряды. Подходящим выбором пороха и формы его зерен можно получить весьма большое разнообразие форм импульсов и их продолжительности. Регулирование продолжительности импульса оказывается особенно выгодным, так как оно обеспечивает хороший селективный выбор формы реакции во всем интересующем нас диапазоне частот. При плавном изменении силы в течение промежутка времени действия импульса, равного примерно половине периода данной формы, энергия, которая поглощается этой формой, стремится к максимуму.

Некоторые преимущества возмущения импульсного типа заключаются в том, что при этом методе самолет только в течение короткого промежутка времени опыта должен летать на скоростях вблизи предельных скоростей, опасных при испытаниях на флаттер. Необходимое оборудование может быть сделано очень легким и не громоздким и вследствие этого может устанавливаться во многих свободных местах. Главный недостаток этого метода испытаний заключается в сравнительно трудном извлечении необходимых сведений из полученных результатов.

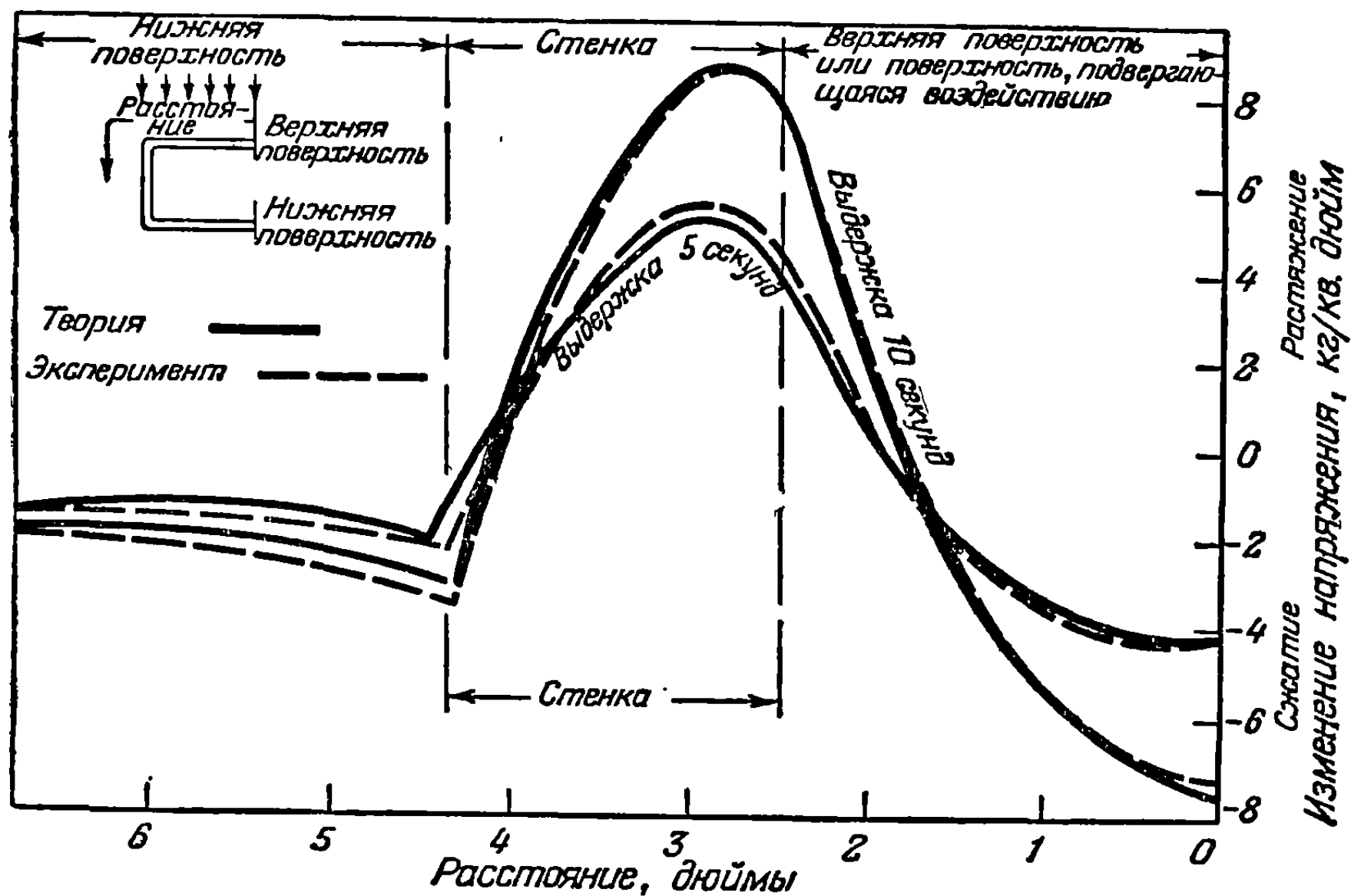
*Синусоидальное возбуждение.* В противоположность методу, заключающемуся в сообщении самолету коротких импульсов и в наблюдении переходных реакций, существует метод непрерывного синусоидального возбуждения во всем диапазоне важных частот и наблюдения амплитуды и фазы вынужденной реакции. Наиболее распространенное приспособление состоит в основном из вращающегося неуравновешенного маховика, передающего конструкции, к которой он прикреплен, переменное по направлению усилие в виде вращающегося вектора силы. Основная трудность состоит в том, что амплитуда возбуждения пропорциональна величине дисбаланса и квадрату частоты. Таким образом, при высоких частотах имеется значительный избыток возбуждающей силы, тогда как при низких частотах имеется только необходимый минимум. Это свойство, присущее такому методу, заставляет вносить различные усовершенствования, подобные, например, приспособлениям для изменения дисбаланса, которые могут управляться автоматически в зависимости от частоты. Использование спаренных, противоположно вращающихся дисбалансов дает простую синусоидальную возбуждающую силу вместо силы в виде вращающегося вектора.

Главная трудность при использовании вибратора этого типа состоит в необходимости иметь легкий мощный мотор с очень хорошей регулировкой частот. При синусоидальном возбуждении, кроме того, что требуется непрерывная и большая затрата мощности, возникает большая трудность, связанная с регулированием частоты возбуждающей силы в окрестности пиков резонанса. Очень трудным делом является также синхронизация многих единиц, удаленных друг от друга на некоторое расстояние, особенно в диапазоне малых частот и больших мощностей. Вращающиеся дисбалансы и связанные с ними приводы становятся тяжелыми и громоздкими, и поэтому их трудно разместить внутри несущих поверхностей, не производя больших изменений конструкции. Часто наилучшим решением для установки оборудования на крыле может явиться помещение его в специальном наружном кожухе. Для симметричного возбуждения хвостового оперения часто применяется установка оборудования в хвосте фюзеляжа.

Летное испытание с синусоидальным вибратором требует сравнительно продолжительного полета вблизи критической скорости, в течение которого

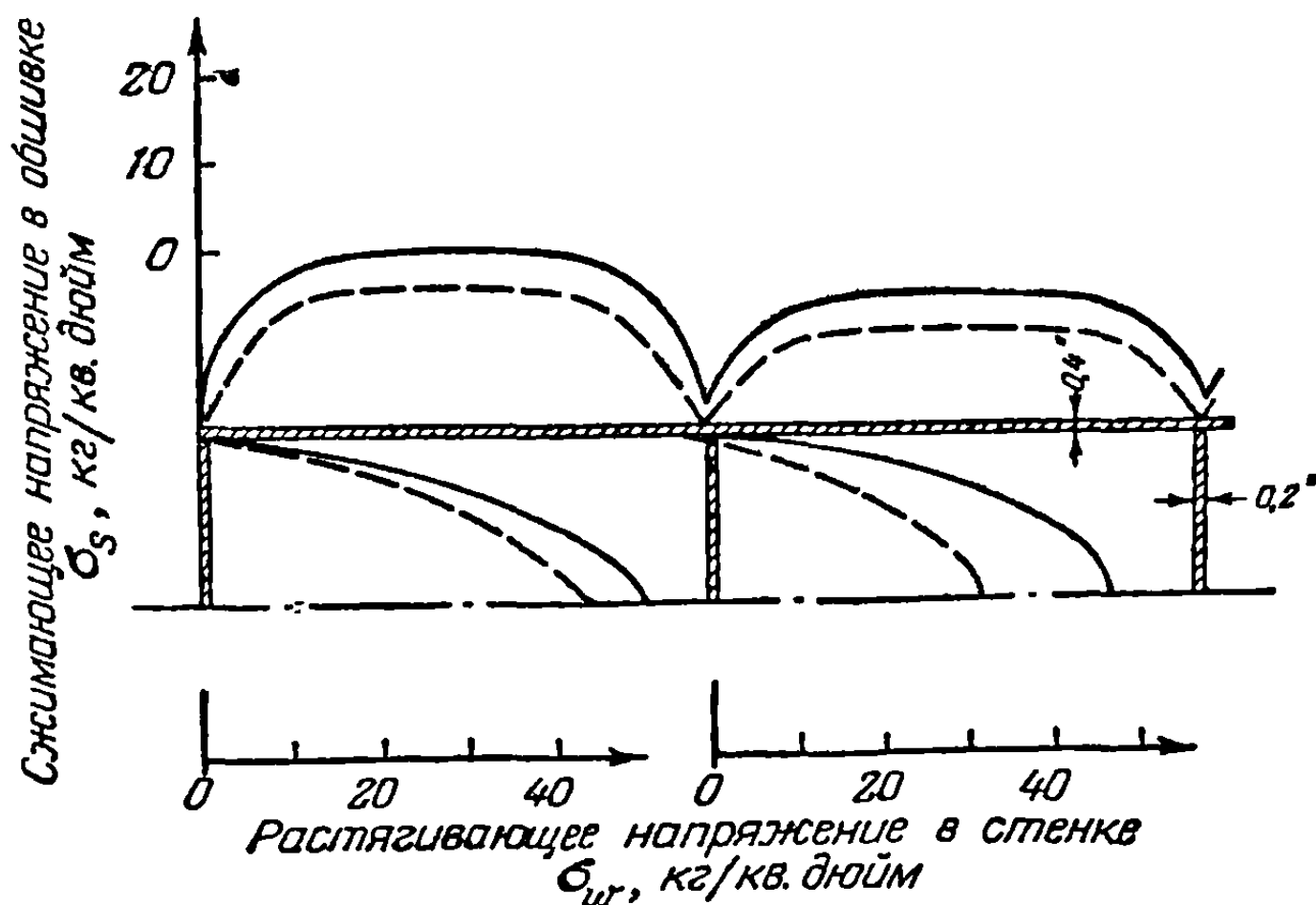


На фиг. 8-3 показаны величина и распределение термических напряжений, обусловленных аэродинамическим нагревом. Эта фигура показывает распределение упругих термических напряжений в стенке и обшивке крыла гипотетического истребителя, соответствующее распределению температуры, указанному



Фиг. 8-2. Распределение напряжений, соответствующее распределению температуры, приведенному на фиг. 6-3.

на фиг. 6-6. Сплошные линии получены на основе распределения температуры, вычисленного только с учетом внутренней теплопроводности. Пунктирные линии



Фиг. 8-3. Типичные распределения термических напряжений в конструкции крыла гипотетического истребителя.

дают распределение термических напряжений с учетом как внутреннего излучения, так и внутренней теплопроводности. Уменьшение напряжений, обусловленное влиянием излучения, в этом случае оказывается значительным. В некоторый момент времени, для которого производились эти вычисления, стенка почти целиком оказывается растянутой, а покрывающая ее обшивка — почти целиком сжатой. Фиг. 8-3 подтверждает заключения, ранее высказанные другими авторами,



например Хоффом [37], о том что в ускоренном сверхзвуковом полете возможно возникновение значительных термических напряжений. Распределение напряжений, показанное на фиг. 8-3, является типичным распределением, возникающим при внешнем нагревании конструкции, покрытой сверху обшивкой. Нагреваемая обшивка стремится расширяться, но ее ограничивают относительно более холодные стенки. Таким образом, в обшивке возникают нормальные напряжения, а в стенках — касательные. Обратная картина возникает, если в начальном состоянии у первоначально нагретой конструкции внезапно охлаждается обшивка. Последнее соответствует внезапному уменьшению скорости полета.

(с) *Теория неупругих термических напряжений.* Когда говорят, что материал ведет себя как упругий, это означает, что всякая деформация его исчезает при удалении приложенных сил, и подразумевается, что между компонентами напряжений и деформаций существует линейное соотношение. Такое представление свойств материала почти отвечает действительности для многих материалов при сравнительно низких уровнях температуры и напряжений. Однако при более высоких уровнях температуры и напряжений допущение об упругости материала часто является плохой аппроксимацией действительного поведения материала, и в этом случае материал считается неупругим. Тот факт, что системы термических напряжений являются самоуравновешивающимися системами, делает их более чувствительными к неупругим свойствам материала, по сравнению с системой напряжений, обусловленных извне приложенными нагрузками.

Формулировка общего закона связи между напряжениями и деформациями, который мог бы в целом описать свойства технического материала в широком диапазоне температур и напряжений, была бы непосильной задачей. Даже если бы такой закон и мог быть сформулирован, он был бы слишком сложен, чтобы быть полезным при исследовании технических задач. По этой причине следует использовать сравнительно простые законы, отражающие только те черты, которые являются существенными для рассматриваемой частной задачи. При оценке влияния неупругих свойств материала на термические напряжения самый большой интерес представляют свойства упругости и ползучести. В упрощенном виде эти свойства включаются в линейные соотношения между напряжениями и деформациями для вязко-упругих тел. Подобные соотношения между напряжениями и деформациями и мысль о представлении свойств материала с помощью аналогичных механических моделей, состоящих из пружин и демпферов, принадлежат Максвеллу [38]. Испытание материала на растяжение при определенной температуре можно представить как испытание, при котором постоянное напряжение  $\sigma$  прикладывается от момента времени  $t = 0$  до момента  $t = t_1$ , а затем снимается. На фиг. 8-4 сплошными линиями изображена идеализированная картина изменения деформации с временем. Отрезок кривой  $OA$  изображает упругую деформацию, возникающую в результате приложения нагрузки. Кривая  $AB$  изображает первоначальную деформацию ползучести, происходящую с переменной скоростью деформации. Линия  $BC$  представляет вторичную деформацию ползучести при постоянной скорости деформации. Когда в момент  $t_1$  напряжение снимается, то происходит немедленное восстановление упругой деформации вдоль  $CD$ , а за этим следует частичное восстановление деформации вдоль  $DE$ . Особенности упруго-пластического поведения материала, изображенные на фиг. 8-4 сплошными линиями, могут быть в различной степени аппроксимированы механическими моделями, состоящими из пружин и демпферов. Например, если к демпферу и пружине по очереди прикладывается напряжение в виде ступенчатой функции (модель Максвелла), то получается результат, изображенный на фиг. 8-4 пунктирными линиями. Когда ступенчатая функция прикладывается к демпферу и пружине параллельно (модель Кельвина), то получается реакция в виде кривой, изображенной точками. Наконец, если модели Максвелла и Кельвина соединить последовательно (модель Максвелла — Кельвина), то получим сплошную линию.

В общем случае можно написать следующее соотношение между напряжением и деформацией для вязко-упругих моделей:

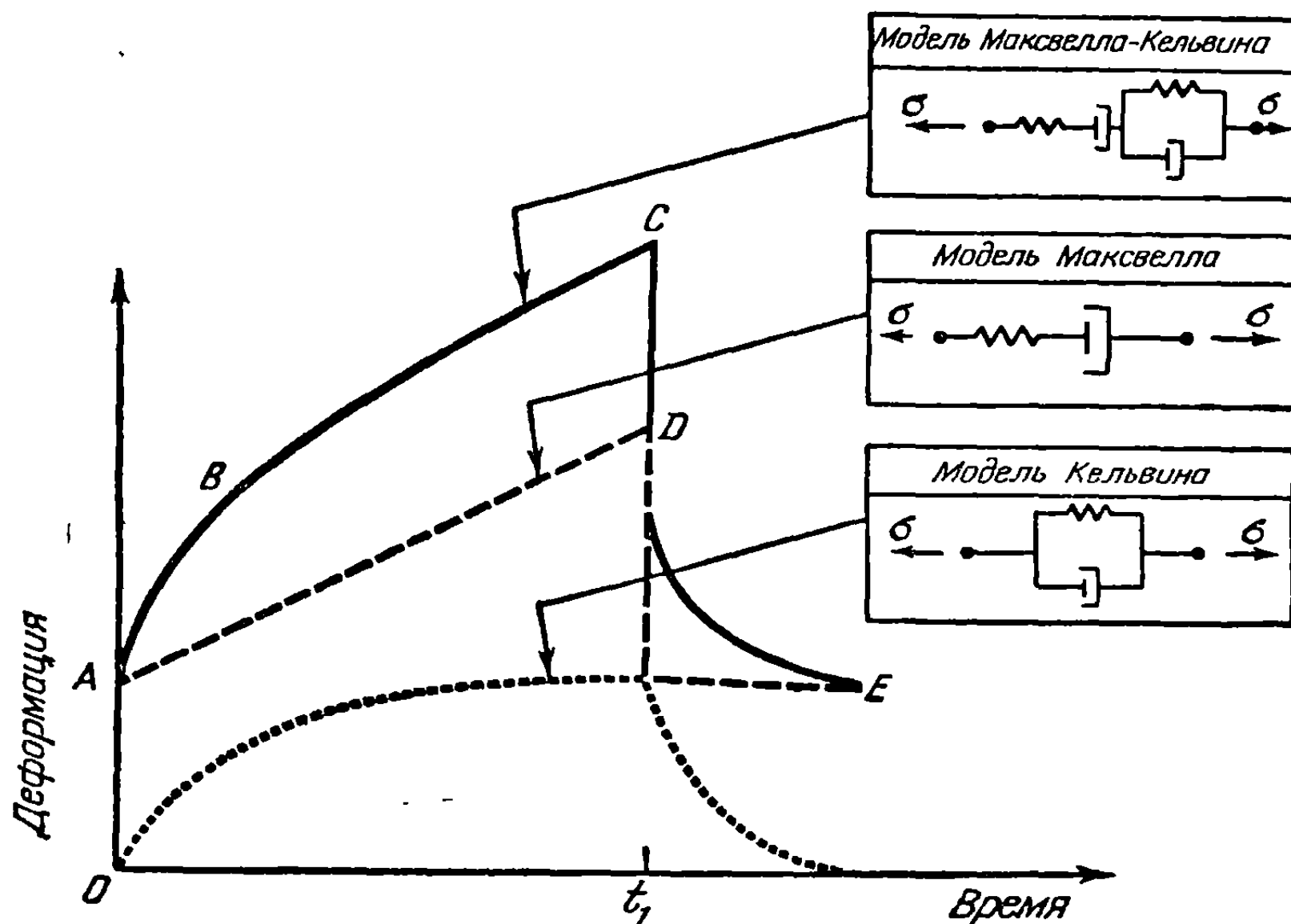
$$\mathfrak{P}[\sigma] = 2Q[\epsilon], \quad (8-5)$$

где  $\sigma$  — суммарное напряжение и  $\epsilon$  — суммарная деформация, а  $\mathfrak{P}$  и  $Q$  — линейные дифференциальные операторы. Для модели Максвелла — Кельвина они имеют вид

$$\mathfrak{P} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_1 \tau_2}, \quad (8-6)$$

$$Q = \frac{E}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_3} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad (8-7)$$

где  $E$  — эффективный модуль упругости,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$  — характеристические времена, характеризующие свойства релаксации и запаздывания материала [39].



Фиг. 8-4. Реакция вязко-упругих моделей на ступенчатый импульс на входе.

Эти четыре постоянные могут быть подобраны так, чтобы удовлетворить свойствам ползучести данного материала при заданной температуре и напряжении.

При применении вязко-упругой модели к задачам о термических напряжениях, включающих сложные напряженные состояния, нужно составить соотношения между напряжениями и деформациями, которые включают дифференциальные операторы  $\mathfrak{P}$  и  $Q$ . Эксперименты с чисто гидростатическим напряженным состоянием показывают, что для всех практических уровней температуры и напряжения технические материалы в основном ведут себя как упругие. Поэтому закон ползучести применяется к девиаторной части соотношения между напряжениями и деформациями. Соотношения между напряжениями и деформациями имеют вид

$$\epsilon = [(1 - 2\nu)/E] \sigma + \alpha \Delta T, \quad (8-8)$$

$$\mathfrak{P}[\sigma'_{ij}] = 2Q[\epsilon'_{ij}]. \quad (8-9)$$

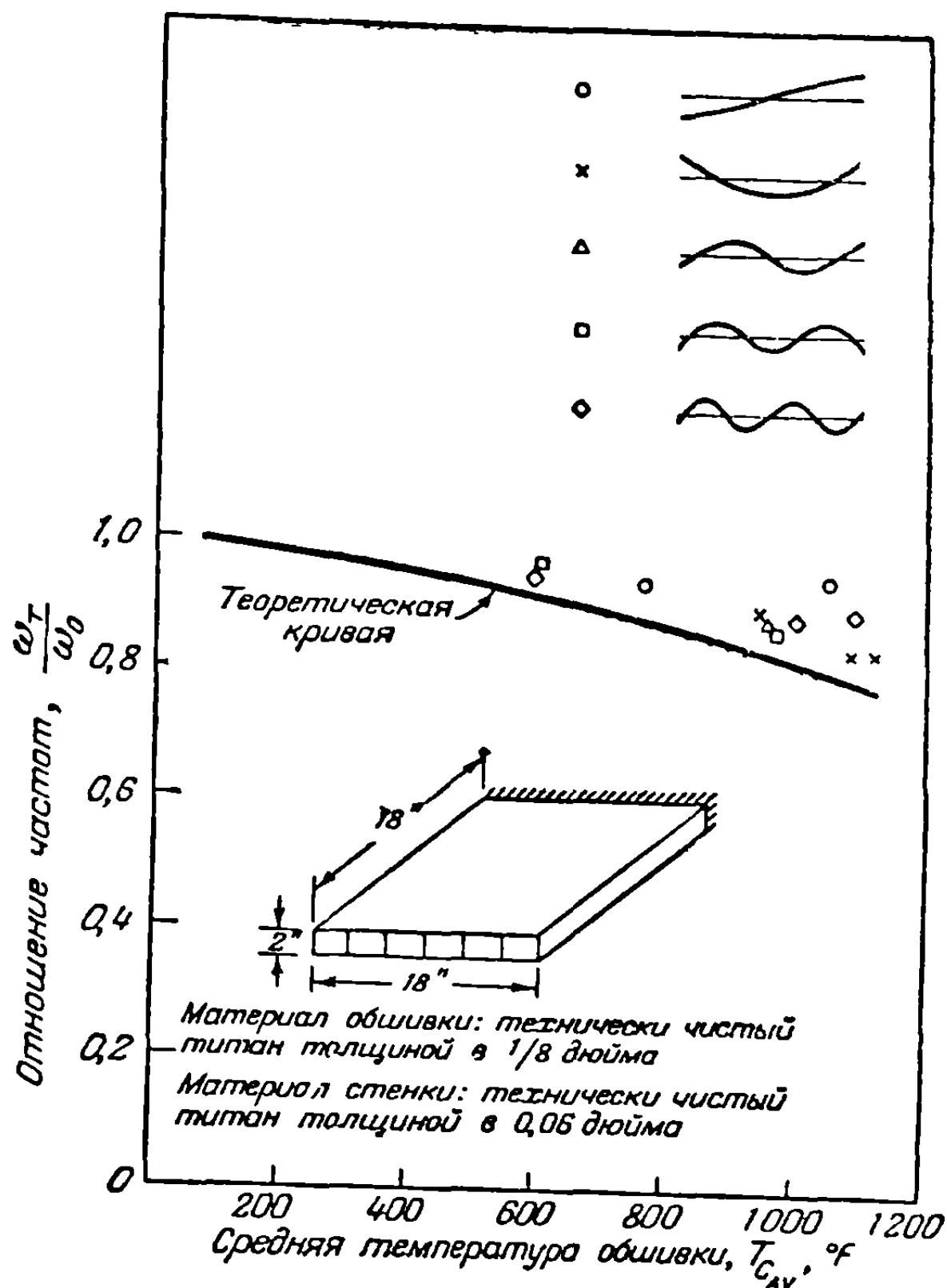
Таким образом, заменяя соотношения между напряжениями и деформациями (8-1) соотношениями, написанными выше, мы получим теорию термических напряжений при вязко-упругой ползучести. При применении этой теории к инженерным конструкциям возникают серьезные осложнения. Время релаксации и время запаздывания авиационных материалов являются функциями как температуры,

так и напряжения. Вследствие этого связь между напряжениями и деформациями и их производными по времени нелинейна и линейные соотношения между напряжениями и деформациями для вязко-упругих тел, строго говоря, не применимы. Однако их можно применять в процессе приращения, при котором допускается, что линейное соотношение имеет место на малом интервале изменения температуры и напряжения. Хофф [40] предложил упругий аналог для практических конструктивных задач и показал, как его можно применять для решения

Этот подход имеет то преимущество, что при нем используется более общий закон, распространяющийся на все уровни напряжения.

Следует ожидать, что в результате учета влияния ползучести при исследовании термических напряжений гипотетического истребителя в процессе одного цикла его маневра пик термических напряжений уменьшится и появятся остаточные термические напряжения обратного знака. Однако для частной формы конструкции, выбранной для гипотетического истребителя, термические напряжения настолько низки (10% от комнатной температуры  $F_{tu}$ ), что в процессе маневра, изображенного на фиг. 5-1, заметной ползучести, а следовательно, и перераспределения упругих термических напряжений не наблюдается. Это было подтверждено испытанием на ползучесть материала крыла. Если допустить, что геометрия крыла изменяется до такой степени, что пик упругих термических напряжений в обшивке составляет 30% от комнатной температуры  $F_{tu}$ , то по упрощенной теории вязко-упругих термических напряжений пик термических напряжений уменьшится примерно на 5%. Такое высокое термическое напряжение было бы неприемлемым по другим конструктивным соображениям. Вообще, вероятно, можно сделать заключение о том, что перераспределение упругих термических напряжений, обусловленное влиянием ползучести, будет играть минимальную роль в летательном аппарате, подобном рассматриваемому гипотетическому истребителю.

**8-3. Жесткость и колебания конструкций типа оболочек при повышенных температурах.** Другим нежелательным эффектом повышенной температуры является уменьшение жесткости и частот колебаний конструкции. Здесь происходят два явления. Первое из них, упомянутое ранее, заключается в уменьшении модуля Юнга. Все нагретые компоненты конструкции подвержены этому уменьшению жесткости. Например, фиг. 8-5 показывает влияние повышенной температуры на частоты изгибных колебаний вдоль хорды коробчатого лонжерона из титана с большим числом стенок. Точки обозначают экспериментальные



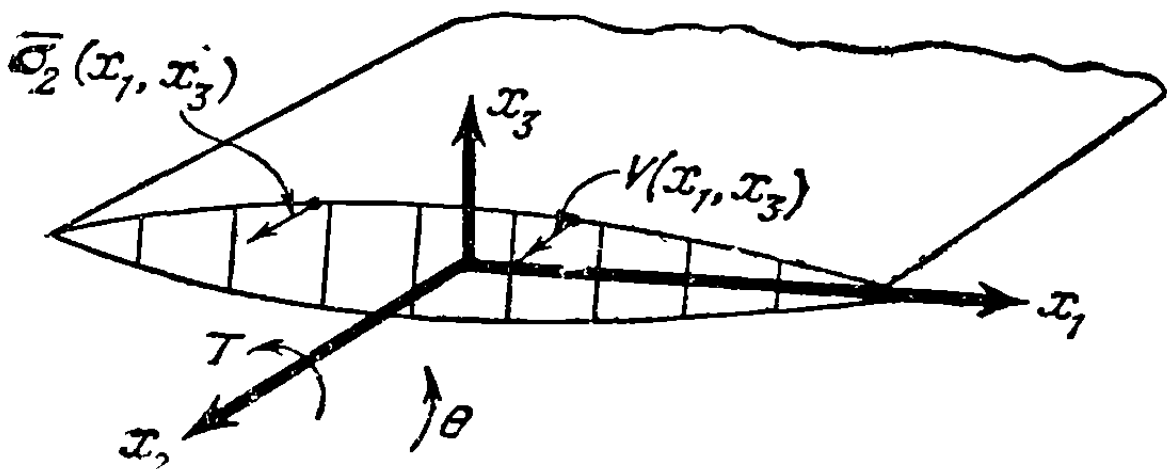
Фиг. 8-5. Изменение частот колебаний вдоль хорды с температурой.

значения отношения частот при повышенной и комнатной температурах. Они могут быть сравнены со сплошной линией, изображающей зависимость квадратного корня из отношения модулей Юнга при повышенной и комнатной температурах.

Второе явление заключается в уменьшении жесткости за счет термических напряжений. Хорошо известно, что наличие термических напряжений в элементе конструкции, подобной, например, пластине, может привести к выпучиванию. Логично поэтому ожидать, что в определенных случаях изменение жесткости может тоже обуславливаться термическими напряжениями. Потери жесткости при наличии термических напряжений можно исследовать аналитически с помощью принципа возможной работы [35]. Он может быть сформулирован в следующем виде: если тело находится в равновесии под действием заданных сил, то возможная работа, совершаемая этими силами на малом дополнительном перемещении, совместимом с геометрическими связями (возможное перемещение), равна изменению энергии деформации. Математическое выражение принципа возможной работы имеет вид

$$\delta \int_V U_0 dV = \delta \int_V (X_1 u_1 + X_2 u_2 + X_3 u_3) dV + \delta \int_S (\bar{X}_1 u_1 + \bar{X}_2 u_2 + \bar{X}_3 u_3) dS, \quad (8-10)$$

где  $U_0$  — относительная энергия деформации, выраженная через деформации,  $X_i$  — объемные силы, приходящиеся на единицу объема,  $\bar{X}_i$  — поверхностные силы, приходящиеся на единицу площади и  $u_i$  — перемещения вдоль осей  $x_i$ .



Фиг. 8-6. Поперечное сечение нагретой балки, нагруженной внешним крутящим моментом.

В случае монококковой балки термические напряжения не оказывают значительного влияния на изгибную жесткость до тех пор, пока не произойдет термическое выпучивание внешней обшивки. Однако для определенных изменений термического напряжения вдоль хорды [41] уменьшение крутильной жесткости может

наблюдаться даже при отсутствии термического выпучивания. Рассмотрим, например, монококковую балку с постоянным поперечным сечением, нагруженную самоуравновешивающейся системой термических напряжений  $\bar{\sigma}_2(x_1, x_3)$  (см. фиг. 8-6). Для того чтобы испытать крутильную жесткость, приложим фиктивный крутящий момент. Допустим, что используется теория Сен-Венана, так что

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial x_2} = 0$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = 0,$$

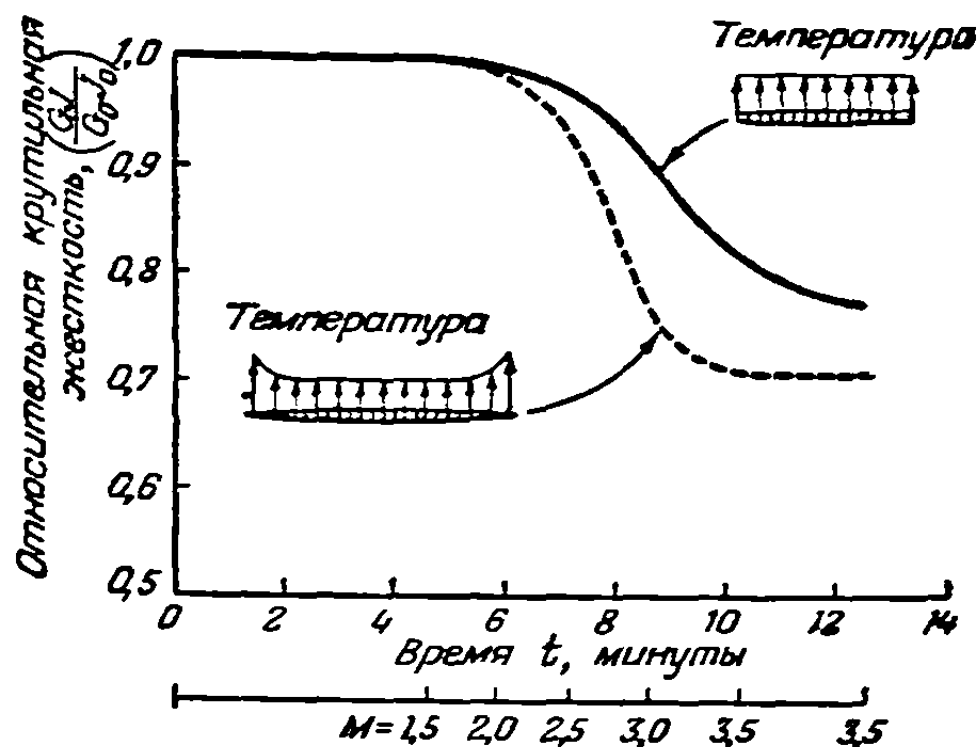
где  $v$  — искажение. Тогда для единицы длины балки получим из уравнения (8-10)

$$\delta \left[ \frac{GJ_0}{2} \left( \frac{d\theta}{dx_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dx_2} \right)^2 \int_A \int \bar{\sigma}_2 (x_1^2 + x_3^2) dx_1 dx_3 \right] = \delta \left( T \frac{d\theta}{dx_2} \right). \quad (8-11)$$

Из уравнения (8-11) следует, что отношение эффективной крутильной жесткости  $GJ$  к крутильной жесткости при отсутствии термического напряжения  $GJ_0$  равно:

$$\frac{GJ}{GJ_0} = 1 + \frac{1}{GJ_0} \int_A \int \bar{\sigma}_2 (x_1^2 + x_3^2) dx_1 dx_3. \quad (8-12)$$

Знак и величина поправочного члена в уравнении (8-12) зависят от формы поперечного сечения крыла, распределения температуры и термических напряжений. Для прямоугольной коробки с равномерным распределением температуры обшивки вдоль хорды поправочный член мал. Если допустить, что лонжерон гипотетического истребителя имеет в основном форму прямоугольника, показанного в верхнем правом углу, фиг. 8-7, то уменьшение крутильной жесткости с временем в процессе маневра (включая уменьшение  $G$ ) происходит по сплошной кривой. С другой стороны, если секции крыла, составляющие переднюю и заднюю кромки крыла, являются, как показано в нижнем левом углу фиг. 8-7, частью коробки, воспринимающей нагрузку по размаху, то уменьшение крутильной жесткости более заметно (пунктирная кривая).



Фиг. 8-7. Потеря крутильной жесткости для двух типов лонжеронов крыла.

На изгибную жесткость и частоты колебаний термически-тонкой пластинки оказывают влияние самоуравновешивающиеся термические напряжения в срединной плоскости. На вставке фиг. 8-8 для тонкой плоской пластинки с подкрепляющими элементами доказано распределение термических напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{22}$  и  $\bar{\sigma}_{12}$ . Пластика нагружена боковым давлением  $p$  и колеблется с собственной частотой  $\omega$ . Соответствующее выражение возможной работы, выведенное из уравнения (8-10), имеет вид

$$\delta \left[ \int_S \int U_0 dx_1 dx_2 + \frac{t}{4} \int_S \int \bar{\sigma}_{ij} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} + \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \right) dx_1 dx_2 \right] = \\ = \delta \left[ \rho \omega^2 \int_S \int u_3^2 dx_1 dx_2 + \int_S \int p u_3 dx_1 dx_2 \right] \quad (i, j = 1, 2), \quad (8-13)$$

где

$U_0$  — энергия деформации, приходящаяся на единицу площади пластинки, обусловленная боковой деформацией (см. [42], стр. 391);

$\rho$  — масса пластинки, приходящаяся на единицу площади пластинки,

$t$  — толщина пластинки.

Первый интеграл представляет полную энергию деформации пластинки, обусловленную боковой деформацией. В общем случае это выражение включает как энергию деформации растяжения срединной плоскости, так и энергию деформации изгиба. Второй интеграл представляет энергию деформации, обусловленную термическими напряжениями в срединной плоскости. Третий и четвертый интегралы представляют соответственно слагаемые от инерционных сил и приложенных давлений.

Условие для термического выпучивания и влияние термических напряжений на жесткость и собственные частоты можно вывести из уравнения (8-13). Например, свойства деформируемости тонкой пластинки большого удлинения с неподвижными опорами изменяются при изменении  $\Delta T \Delta T_{cr}$  так, как показано на фиг. 8-8, где  $\Delta T$  — действительное приращение температуры пластинки,  $\Delta T_{cr}$  — увеличение температуры пластинки, потребное для термического выпучивания,  $p$  — нормальное давление на пластинку и  $dp du_3$  — нормальное давление на единицу отклонения точки срединной поверхности. В расчеты, на которых основывается фиг. 8-8, включено расстояние срединной плоскости пластинки.



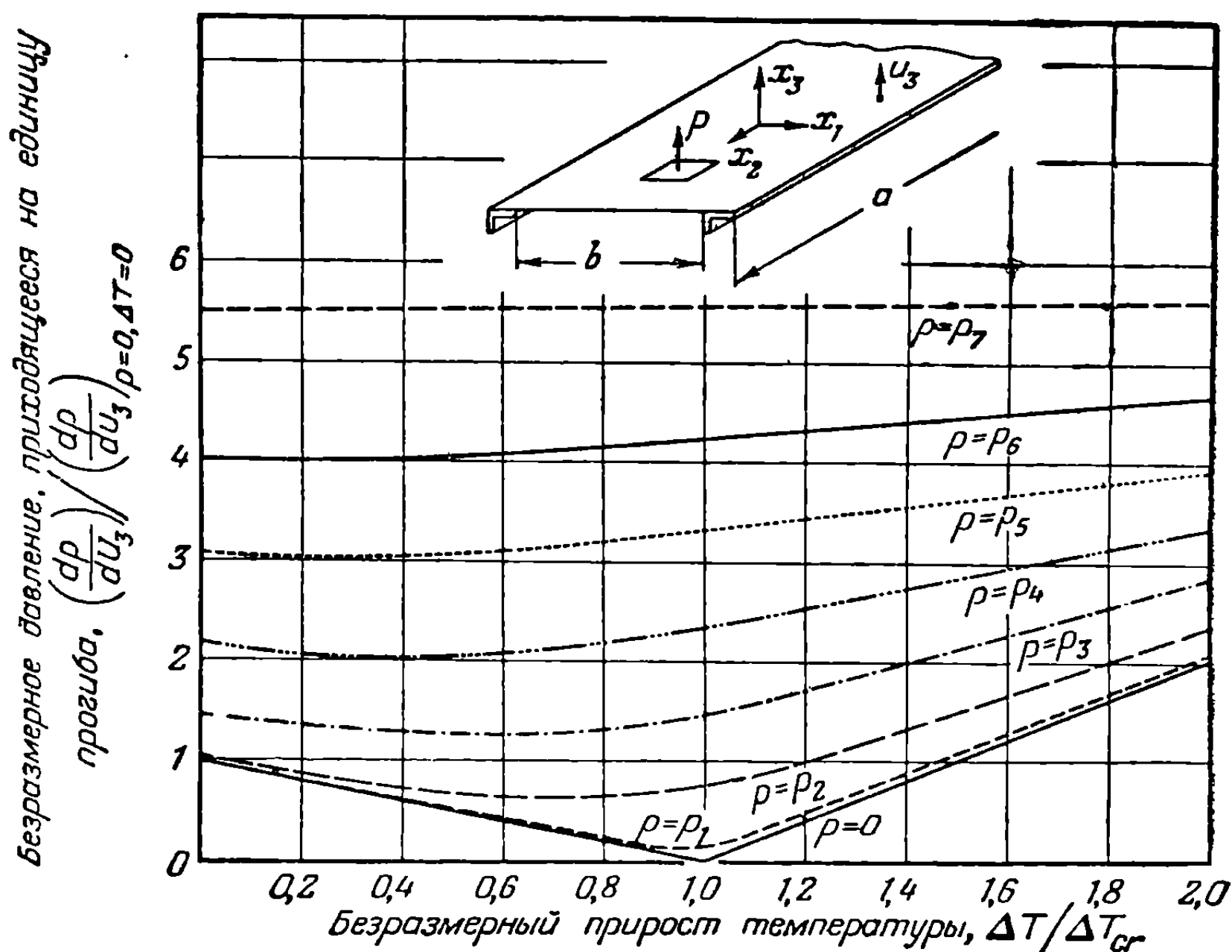
Эта особенность теории приводит к увеличению эффективной жесткости пластинки после термического выпучивания и заметной зависимости ее от величины нормального давления на пластинку.

Когда форма термического выпучивания и форма основного колебания пластинки могут считаться одинаковыми, то, считая амплитуды колебаний малыми, найдем, что уменьшение частоты  $\omega$  дается в виде

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{E}{E_0}} \sqrt{1 - \frac{\Delta T}{\Delta T_{cr}}}, \quad (8-14)$$

где

$\omega_0$  — частота колебаний пластинки при комнатной температуре;  
 $E/E_0$  — отношение модуля упругости пластинки при повышенной температуре к модулю упругости при комнатной температуре.



Фиг. 8-8. Жесткостные свойства шарнирно-опертой пластинки большого удлинения при недеформирующихся опорах.

Результаты, даваемые формулой (8-14), справедливы только для малых значений отношения  $\Delta T / \Delta T_{cr}$ .

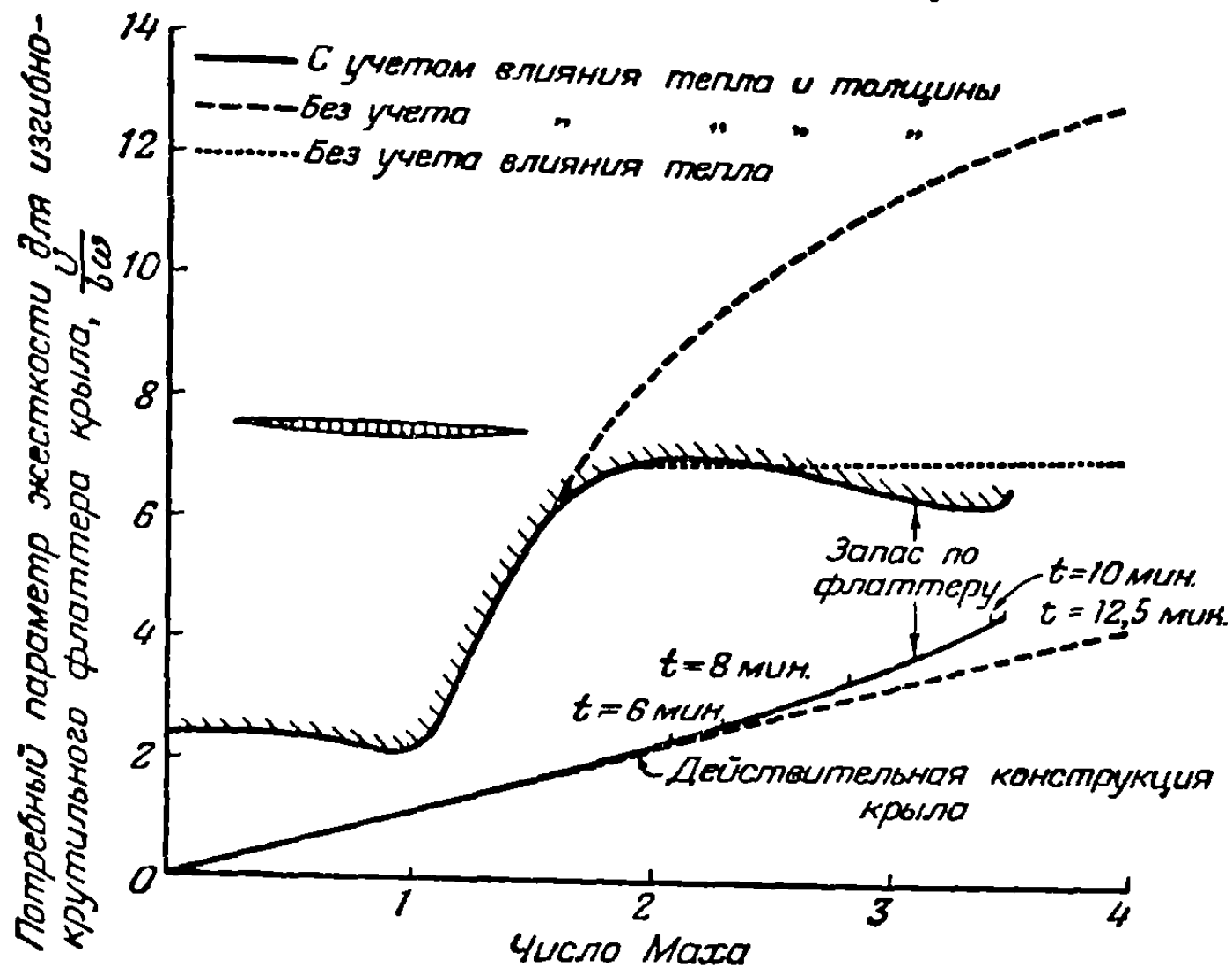
**8-4. Аэроупругая неустойчивость и критические скорости.** Уменьшение жесткости и частот колебаний конструкции, обусловленное падением модуля Юнга и наличием термических напряжений, оказывает значительное влияние на все стороны аэроупругого поведения конструкции. Это влияние обычно можно оценить введением соответствующих жесткостных характеристик в существующие теории аэроупругости. При больших сверхзвуковых скоростях возникают также аэродинамические осложнения. Было показано, что существует много случаев, когда линеаризованная теория сверхзвуковой аэродинамики неудовлетворительна. Поршневая теория и ее различные улучшения, по-видимому, удовлетворяют новым требованиям по крайней мере в гиперзвуковом диапазоне скоростей, где  $M\delta \ll 1$  ( $\delta$  — относительная толщина или угол атаки).

(а) **Флаттер.** Флаттер несущей поверхности, аналогично изгибно-крутильному флаттеру тонких крыльев, является реальной возможностью, которая не может игнорироваться при больших сверхзвуковых числах Маха. Следует принять во внимание два новых фактора. К ним относятся влияние толщины и угла атаки крыла на аэродинамические силы и влияние аэродинамического нагрева



на жесткость конструкции. Возможность аэротермоупругого взаимодействия в задаче о флаттере маловероятна, поскольку время протекания неустановившихся тепловых явлений велико по сравнению с периодами собственных колебаний несущей поверхности.

Анализ флаттера незакрепленной упругой поверхности может быть проведен с помощью однородной формы уравнения (7-5), т. е. формы, получаемой в результате приравнивания нулю  $\Delta p^D$ . Скорость и частота флаттера определяются соответственно как наименьшая скорость воздуха и соответствующая ей



Фиг. 8-9. Влияние толщины и термических эффектов на границу флаттера.

круговая частота, при которой конструкция будет совершать незатухающие простые гармонические колебания

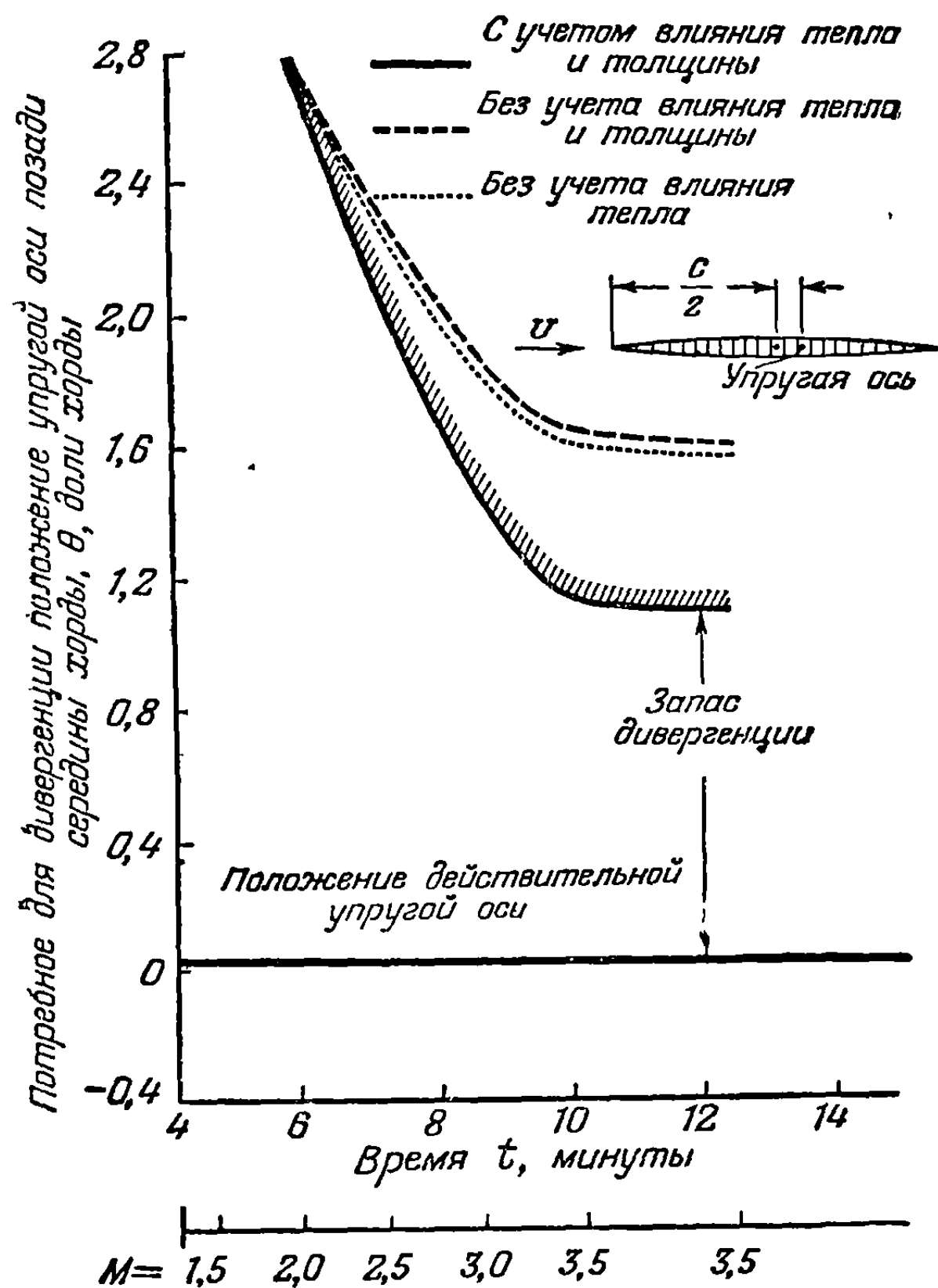
$$\omega(x, y, t) = \bar{\omega}(x, y) e^{i\omega t}. \quad (8-15)$$

Требуется дополнительное уравнение, связывающее аэродинамическую нагрузку и деформацию. Символически оно может быть записано в виде

$$i\omega \bar{\omega} + U \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} = \frac{1}{4\pi r} \int_S \Delta p_a(\xi, \eta) K(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (8-16)$$

или в обращенной форме этого выражения, которую тотчас же можно получить с помощью линеаризованной теории сверхзвуковой аэродинамики. В уравнении (8-16) функция  $K(x, y; \xi, \eta)$  или ее обращение является функцией аэродинамического влияния, и обычно форма ее очень сложна [23]. Задача, возникающая из совместного рассмотрения уравнений (7-5), (8-15) и (8-16), оказывается достаточно трудной, и разработке методов приближенных численных решений ее была посвящена большая часть теоретических исследований по сверхзвуковому флаттеру. Например, метод сверхзвуковых коэффициентов влияния [43] является самым новейшим численным способом, разработанным для этой цели. При больших числах Маха теория поршня позволяет сильно упростить форму уравнения (8-16) и учесть эффекты второго порядка, которыми пренебрегают в линеаризованной теории крыла в сверхзвуковом потоке. Уравнения (7-2), (7-5) и (8-15) приводят к замечательно простой теории флаттера, справедливой для чисел Маха, превосходящих приблизительно 2,5.

Фиг. 8—9 иллюстрирует полученное расчетами влияние толщины крыла и термических эффектов на границу изгибно-крутильного флаттера крыла гипотетического истребителя на заданном маневре. Фигура указывает, что если этими эффектами пренебрегают, то вблизи  $M=1$  существует минимальная граница флаттера, после чего она расширяется. Это позволяет предполагать, что несущая поверхность, удовлетворительная с точки зрения трансзвукового флаттера, будет удовлетворительной и при более высоких скоростях. Однако совместное влияние толщины и термических эффектов суживает зазор на больших сверхзвуковых скоростях. Верхняя линия, представляющая границу флаттера, опускается за счет влияния толщины и увеличения отношения частот изгибных и крутильных колебаний, обусловленных термическими эффектами. Нижняя линия, представляющая кривую зависимости приведенной скорости полета  $U/b\omega\alpha$  от числа  $M$  на высоте 35 000 футов, поднимается за счет уменьшения частоты крутильных колебаний с ростом числа Маха. При значительных сверхзвуковых скоростях следует учесть возможность рулевого флаттера и флаттера панелей обшивки. Влияние, которое оказывают на рулевой флаттер толщина обшивки и термические эффекты, аналогично влиянию, которое они оказывают на изгибно-крутильный флаттер. В дополнение следует отметить, что на рулевой флаттер влияют импеданцы систем управления как с открытым, так и с замкнутым контуром. На эти импеданцы тоже может оказывать влияние повышенная температура окружающей среды.



Фиг. 8-10. Влияние толщины и термических эффектов на границу дивергенции.

По-видимому, панельный флаттер возможен при сверхзвуковых скоростях; считают, что он наблюдался на ракетах V-2, а также и при испытаниях в аэродинамических трубах. В настоящее время теория панельного флаттера находится в переходном и неопределенном периоде. Один теоретический результат, который, по-видимому, можно считать установленным, заключается в том, что объединение линеаризированной аэродинамической теории с теорией малых деформаций пластины показывает, что флаттер невыпущенных панелей не может иметь места при больших сверхзвуковых числах Маха [44]. Поэтому следует сделать вывод, заключающийся в том, что если в действительности панельный флаттер существует при больших сверхзвуковых числах Маха, то это обусловливается причинами, которые не учитывает обычная линеаризованная теория флаттера.

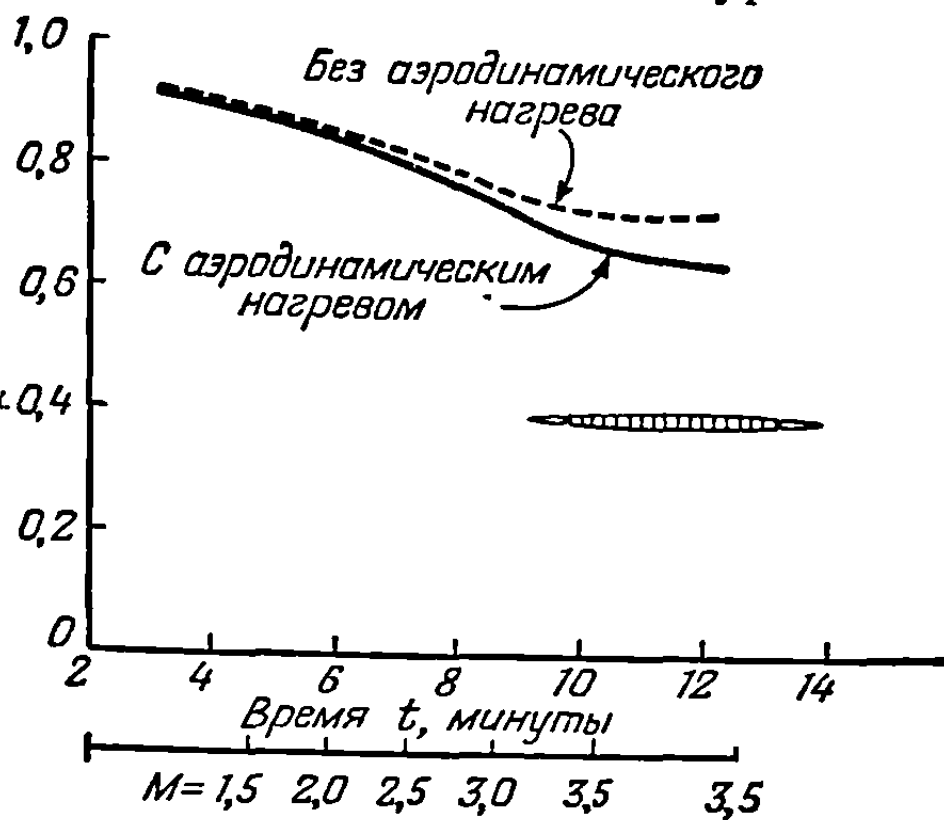
(в) *Явления статической аэроупругости.* Все обычные явления статической аэроупругости существуют при больших сверхзвуковых числах Маха и так же, как это имеет в случае флаттера, на них оказывают влияние толщина крыла, первоначальный угол атаки и аэродинамический нагрев.

(1) *Статические аэроупругие явления в случае пониженной жесткости.* Формулировка задачи о статическом аэроупругом поведении несущей поверх-

ности заключена в уравнениях равновесия (7-5), в которых члены, зависящие от ускорения  $\ddot{w}(x, y, t)$ , положены равными нулю. Решение этих уравнений становится возможным при наличии дополнительного соотношения, связывающего аэродинамические нагрузки в установившемся состоянии с деформацией. Если приемлема допущения поршневой теории, то выражение (7-2) дает дополнительное соотношение для установившегося течения в виде

$$v_1 = U \frac{\partial w}{\partial x}$$

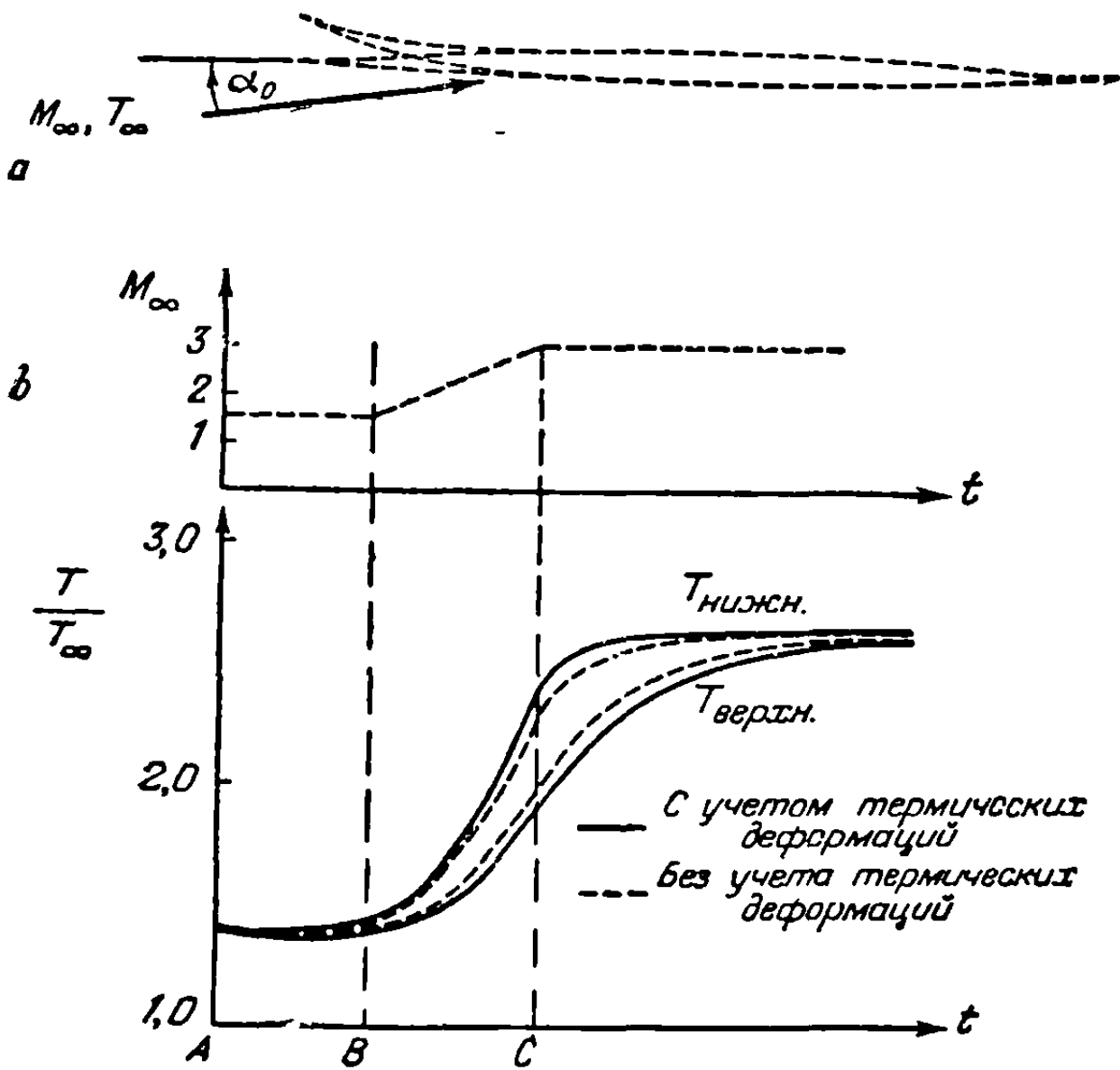
$$\frac{P\delta}{2U} / \left( \frac{P\delta}{2U} \right)_{жестк. 0,4}$$



Фиг. 8-11. Потеря эффективности элеронов.

Эта система уравнений образует простую теоретическую основу для оценки скорости дивергенции, распределения воздушной нагрузки и эффективности управления для чисел Маха, превосходящих примерно 2,5.

Фиг. 8-10 показывает общие направления изменения дивергенции гипотетического истребителя. Хотя обычно дивергенция и не является решающим конструктивным соображением, она тем не менее характеризует явления статической аэроупругости. Ордината кривой на фиг. 8-10 представляет положение упругой



Фиг. 8-12. Механизм аэротермоупругого взаимодействия.

оси позади середины хорды, которое необходимо для того, чтобы возникла дивергенция при соответствующем числе Маха. Из фигуры видно также дестабилизирующее влияние конечной толщины крыла и аэродинамического нагрева. Из сравнения фиг. 8-9 и 8-10 следует, что толщина крыла оказывает на дивергенцию относительно меньшее влияние, нежели на флаттер.

Фиг. 8-11 показывает потерю эффективности элеронов с учетом и без учета аэродинамического нагрева для гипотетического истребителя, выполняющего заданный маневр. Принимается, что крыло представляет собой прямоугольную коробку. При этом учтено влияние

относительной толщины на аэродинамические силы. Потеря эффективности элеронов, обусловленная аэродинамическим нагревом, для этой конфигурации не кажется неприемлемо большой.

(2) *Явления аэротермоупругости.* Возможный механизм взаимодействия аэротермоупругих явлений изображается простой моделью передней кромки крыла, показанной на фиг. 8-12, а. При полете с постоянным числом Маха и

с малым углом атаки температура обшивки на верхней и нижней поверхностях модели сравнительно мала, что качественно иллюстрирует фиг. 8-12, *b* в промежутке времени *AB*. Однако в неустановившемся состоянии при конечном угле атаки, как например в области *BC*, может существовать значительная разница в тепловом потоке через верхнюю и нижнюю поверхности, изменяющаяся с течением времени. Изменение температур верхней и нижней поверхностей от времени качественно должно быть таким, как показано на фигуре. Если число Маха близко к числу Маха, соответствующему условию дивергенции, то возможно, что возникшее в результате термических деформаций закручивание поверхности вызовет аэродинамические нагрузки, превышающие нагрузки, которым способна противостоять конструкция. При сверхзвуковом установившемся полете с конечным углом атаки возможно также возникновение явления дивергенции ползучести в направлении хорды. Это явление аналогично явлению выпучивания вследствие ползучести и описывается аналогичным по форме дифференциальным уравнением.

**8-5. Формы разрушений конструкции.** В течение многих лет инженеры-механики стояли перед задачей определения форм разрушения при комбинированном воздействии силовых и тепловых нагрузок. Примером важной задачи в этой области является задача проектирования лопаток газовой турбины. В этом случае конструкция в течение продолжительных отрезков времени подвергается воздействию почти постоянной температуры и постоянной нагрузки и важное значение приобретают формы разрушения, обусловленные ползучестью. Определение форм разрушения конструкции самолета представляет несколько более трудную задачу вследствие большой сложности конструкции и вследствие того, что она подвержена целому спектру силовых и тепловых импульсов, которые редко являются постоянными для больших промежутков времени.

(а) *Упругое пластическое выпучивание.* В монококковых конструкциях сверхзвуковых самолетов вследствие вероятности возникновения высоких термических напряжений сжатия формой разрушения, играющей первостепенное значение, будет кратковременное выпучивание. Кратковременное сопротивление выпучиванию элементов конструкции при повышенной температуре можно вычислить с помощью того же самого аппарата, который был использован при вычислениях в случаях комнатной температуры. Нужно только использовать подходящие соотношения между напряжениями и деформациями для соответствующей температуры и времени опыта.

Упругое термическое выпучивание тонких пластин может быть вызвано температурным градиентом на поверхности пластины или разностью температур пластины и ее опор. Например, упругое термическое выпучивание тонкой пластины толщиной  $t$  и шириной  $b$ , подкрепленной в одном направлении, будет иметь место тогда, когда разность  $\Delta T$  температур обшивки и подкрепляющего элемента дается выражением

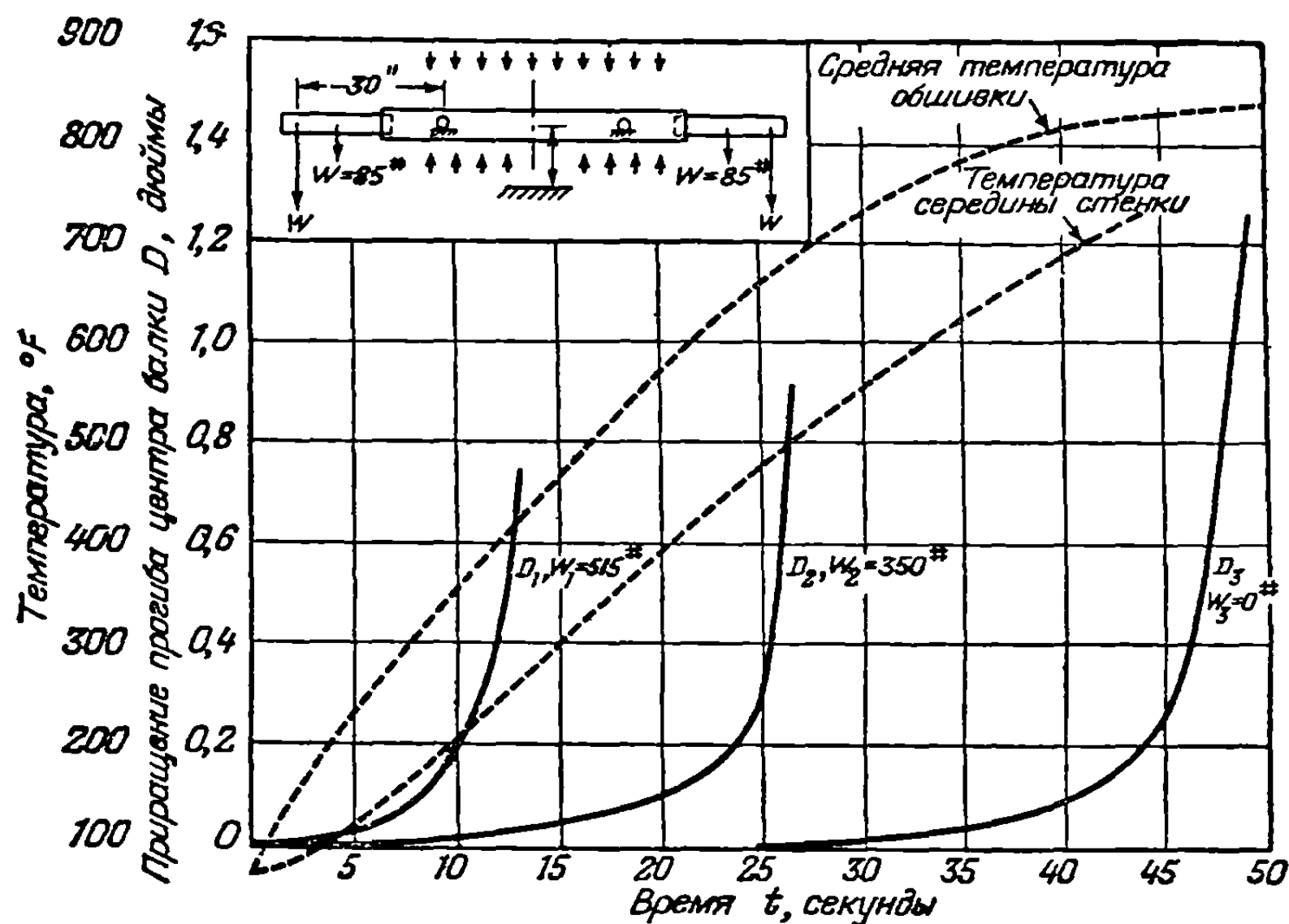
$$\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 (t/b)^2}{3(1-\nu^2) \alpha \left[ \frac{1}{1 + (E_p b t / E_s A_s)} \right]}, \quad (8-17)$$

где  $E_p$  и  $E_s$  суть соответственно модули упругости пластинки и стрингера,  $A_s$  — площадь стрингера и  $\alpha$  — коэффициент термического расширения материала пластины стрингера. Интересно отметить, что в уравнение (8-17) модуль упругости пластины входит только в виде отношения к модулю упругости элемента. В том случае, когда в летном диапазоне упругое выпучивание разрешается, возникают важные вопросы, касающиеся аэроупругой устойчивости обшивки и глубины допустимой волны; возможно, что любое выпучивание, даже если оно номинально упругое, приведет в случае высокой температуры окружающей среды к остаточным деформациям.

Крылья, предназначенные для сверхзвуковых самолетов, обычно будут иметь обшивку из толстых пластин, которые выпучиваются в пластической области. Пластическое выпучивание и разрушение будут происходить почти одновременно. Результаты НАСА, опубликованные Хельденфелсом, Матаузером и Бруксом [45], указывают, что критерий для разрушения шарнирно-опертой пластины может быть выражен с помощью эмпирического соотношения

$$1,60 (E_{sec} \sigma_{cy})^{1/2} (t/b) = \sigma_L + \sigma_T, \quad (8-18)$$

где  $\sigma_L$  и  $\sigma_T$  представляют соответственно напряжение сжатия за счет силовой нагрузки и температуры,  $E_{sec}$  — секущий модуль, соответствующий разрушающему напряжению, и  $\sigma_{cy}$  — напряжение, на 0,2% отличающееся от напряжения



Фиг. 8-13. Изменение температуры и прогиба балок с течением времени при комбинированном действии силовых и тепловых импульсов.

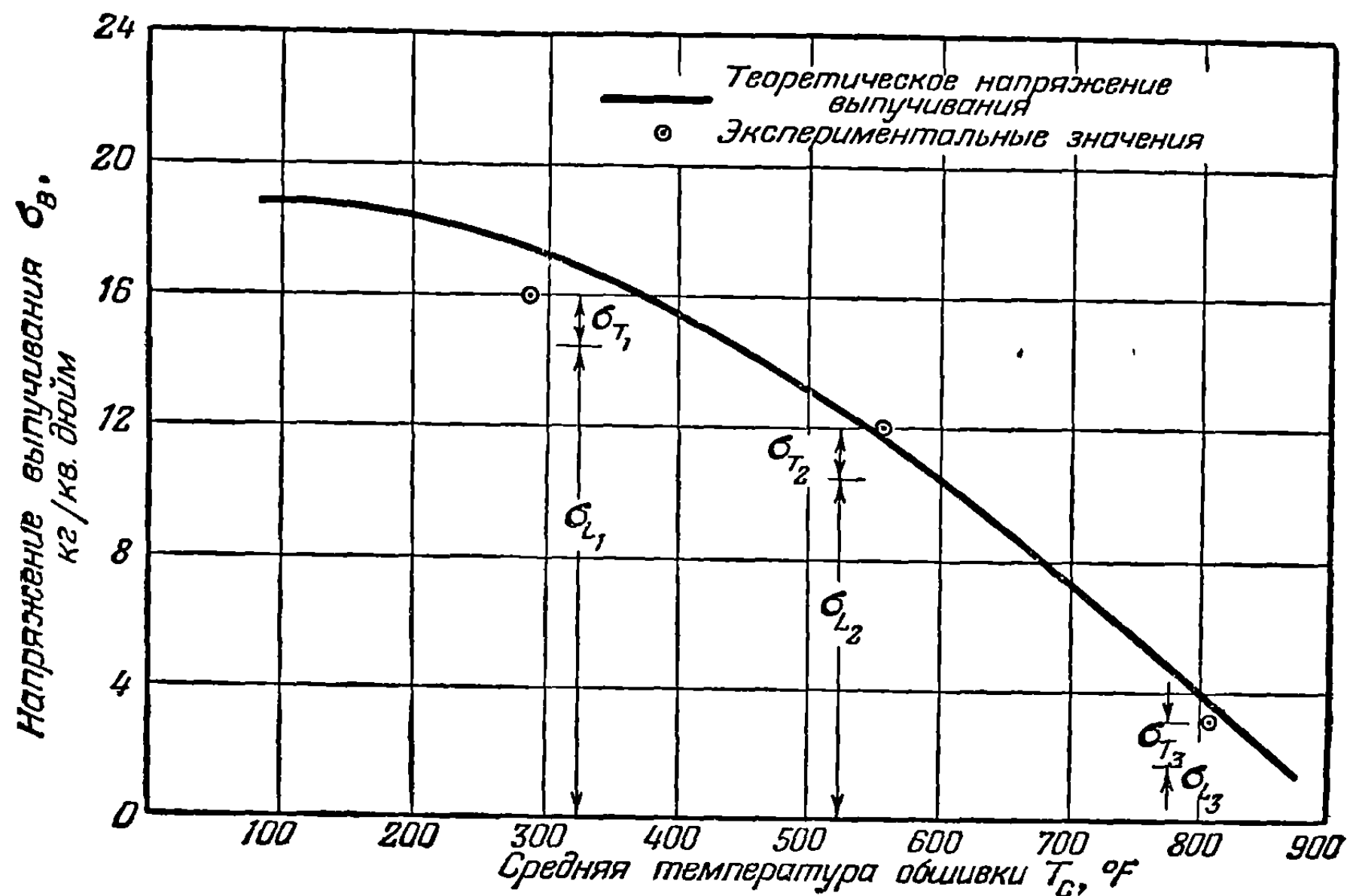
предела текучести при сжатии. Указанные выше свойства материала должны соответствовать температуре и времени опыта.

Результаты опытов, проведенных в Массачусетском технологическом институте для изучения форм разрушений монококковой балки под общим воздействием внешних нагрузок и нагрева, показаны на фиг. 8-13, 8-14, и 8-15. Три шарнирно-опертые прямоугольные балки 63ST-6 при различных значениях внешнего изгибающего момента были подвергнуты воздействию симметричных неустановившихся излучающих тепло источников. Фиг. 8-13 показывает изменение во времени температур обшивки и стенки и деформаций в средних точках балок. Деформация балки определяется уменьшением модуля упругости, обусловленного увеличением температуры до момента наступления выпучивания, после которого жесткость балки быстро падает. На фиг. 8-14 нанесен график уравнения (8-18), согласующийся с экспериментальными точками. На фиг. 8-15 показана картина квадратных выпучин, типичная для результатов, полученных в этих опытах.

Фиг. 8-16 получена в результате применения уравнения (8-18) к гипотетическому истребителю. Она позволяет сравнить в различные моменты времени маневра напряжение в обшивке при выпучивании с действительным напряжением сжатия, включая тепловые и силовые напряжения. Напряжения в обшивке



при выпучивании падают по мере выполнения самолетом маневра. В конце сверхзвуковой пунктирной линии по условию маневра самолет совершает разворот с перегрузкой  $6g$ . Очевидно, что если в конце сверхзвуковой пунктирной

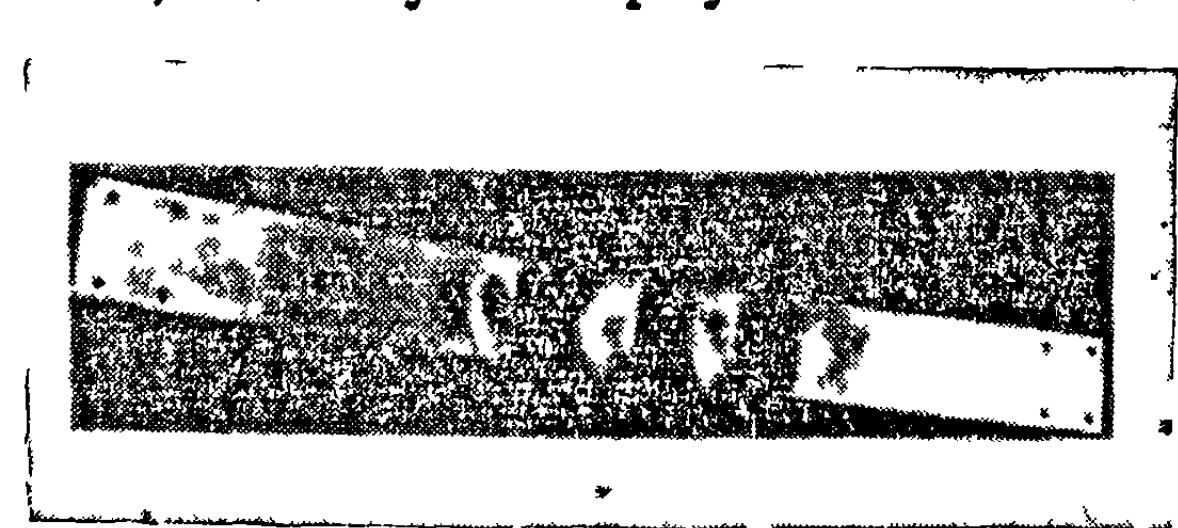


Фиг. 8-14. Сравнение теоретической и экспериментальной границы выпучивания балки.

линии взять обычный коэффициент безопасности 1,5, то коэффициент безопасности для того же самого маневра на малой скорости будет чрезмерно велик, т. е. будет порядка 3.

При оценке прочности конструкций при повышенной температуре в случае быстро прикладываемых нагрузок влияние скорости деформации на допустимое напряжение оказывается более значительным, нежели при комнатной температуре.

Фиг. 8-17 показывает влияние скорости деформации на границу выпучивания, оцененную по результатам эксперимента с отожженным 7-процентным магниевым сплавом на титановой основе [46]. Там же приводится кривая изменения от времени расчетных напряжений от порыва ветра на высоте 35 000 футов с учетом термических напряжений.



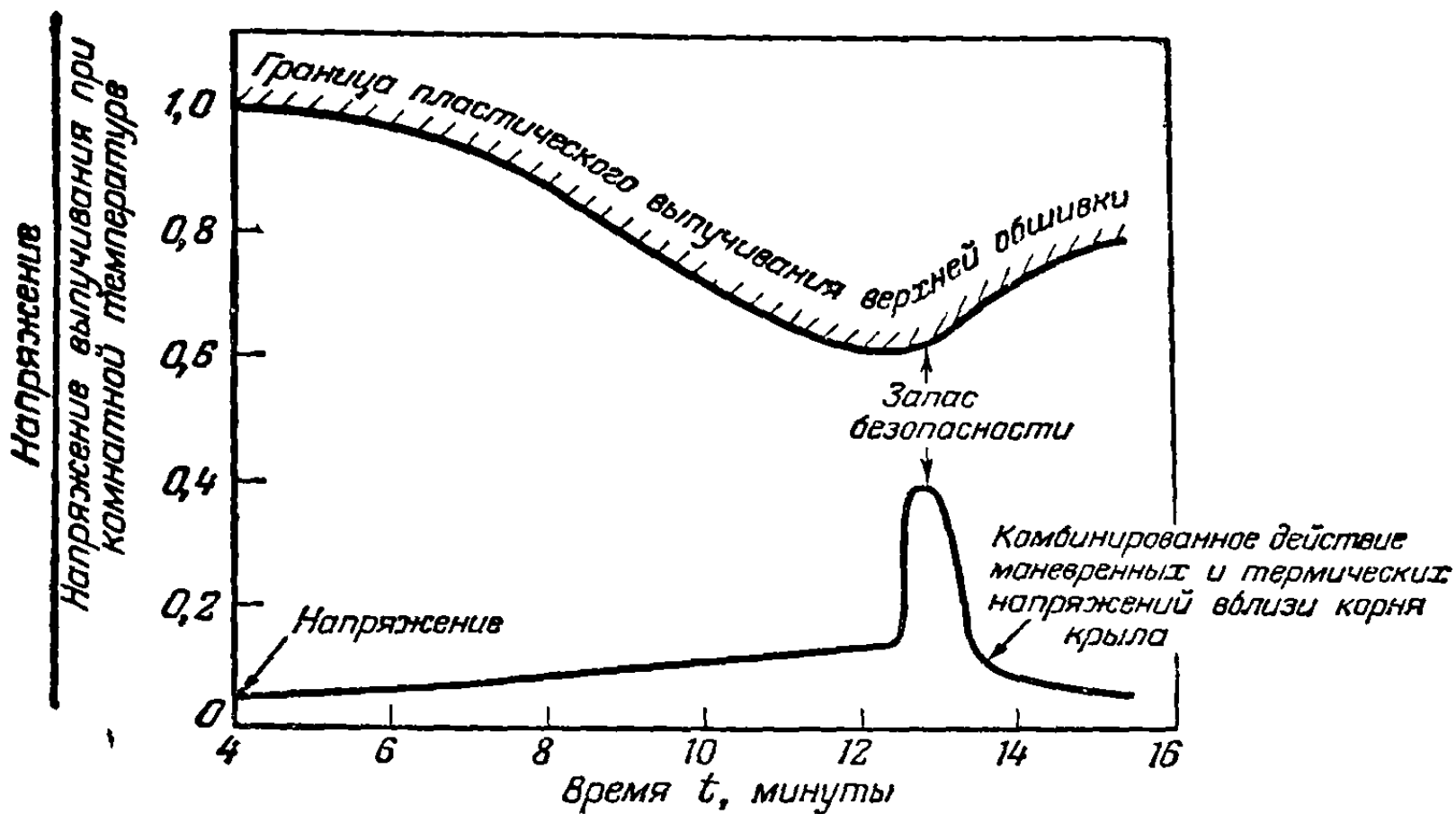
Фиг. 8-15. Картина выпучивания при комбинированном действии силовых и тепловых импульсов.

Фиг. 8-17 указывает, что для гипотетического истребителя граница безопасности в отношении нагрузок от порывов ветра на большой высоте была бы более чем достаточна.

(в) *Ползучесть*. Ранее было упомянуто, что ползучесть может оказывать влияние на интенсивность напряжений в самоуравновешивающихся системах термических напряжений. Поскольку это касается внешних сил, важное последствие ползучести заключается в том, что конструкция медленно и непрерывно деформируется с течением времени. Критерий, которым следует пользоваться при определении момента, когда вследствие этих деформаций следует прекратить эксплуатировать конструкцию, должен специально определяться в каждом отдель-

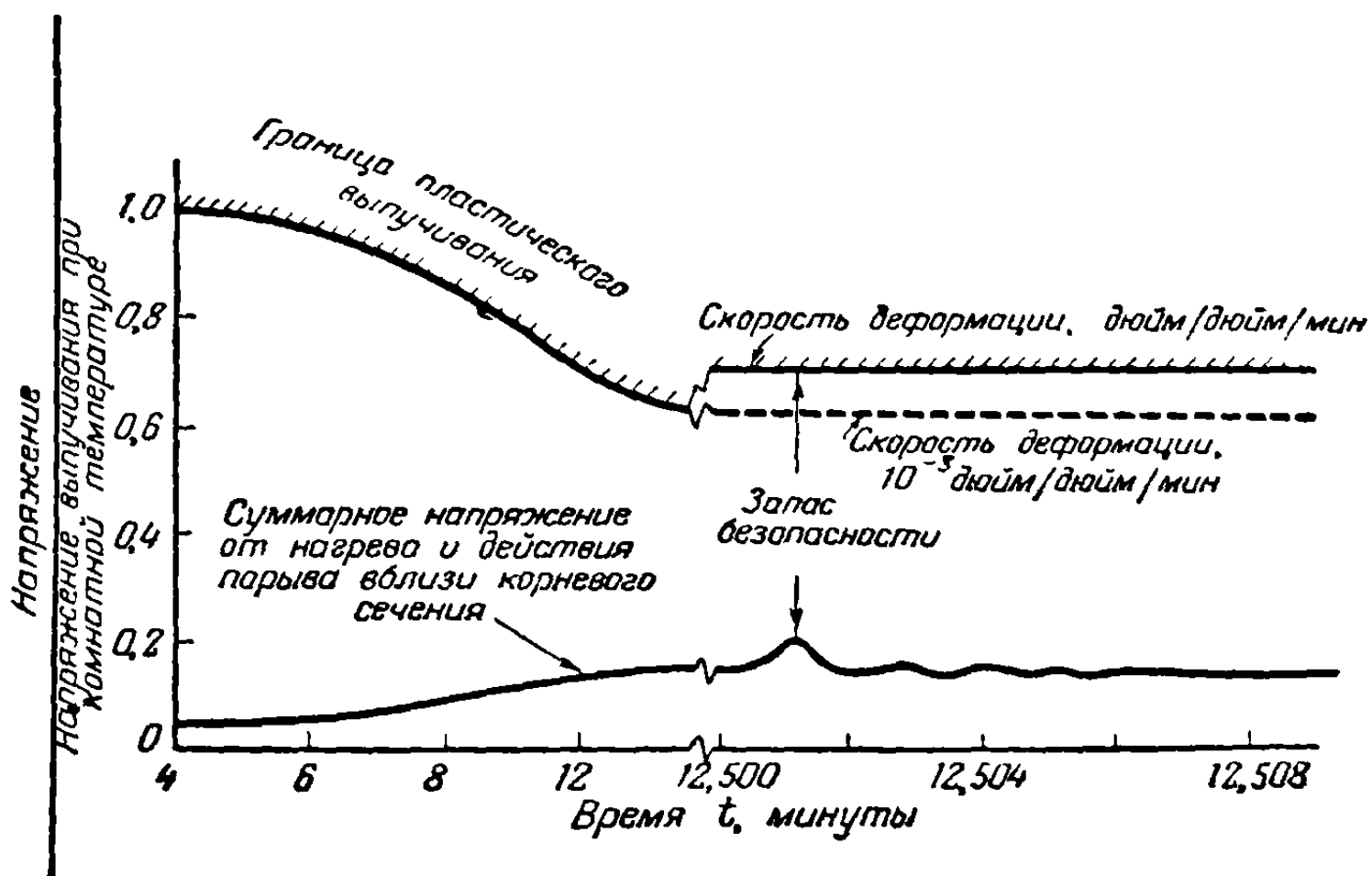


ном случае. Остаточные деформации могут настолько возрасти, что конструкция будет неудовлетворительной с точки зрения аэродинамического сопротивления, устойчивости или управляемости. До того момента, когда деформации



Фиг. 8-16. Граница маневров гипотетического истребителя.

станут неприемлемо велики, может произойти разрушение конструкции вследствие действия местных напряжений или выпучивание вследствие ползучести. При оценке продолжительности работы конструкции сверхзвукового самолета при наличии ползучести нужно использовать спектр напряжение — температура почти таким же образом, как используется спектр нагрузок при расчете на



Фиг. 8-17. Граница безопасности при комбинированном действии тепловых напряжений и напряжений от порыва.

усталость. Это значит, что необходимо знать не только ту часть суммарного времени, в течение которого конструкция находится на каждом уровне напряжений, то также и ту часть суммарного времени, в течение которого конструкция находится на каждом температурном уровне. В принципе это может быть выражено в форме одного трехмерного спектра, форма которого будет зависеть от условий опыта.

Имеется очень мало основных сведений, касающихся поведения материала при ползучести при различных условиях напряжения и температуры. Джерар [47]

предложил представлять всю накопленную ползучесть в виде суммы отдельных ползучестей, обусловленных временем пребывания на каждом уровне напряжений и температуры. Он предполагает, что напряжения и температуры могут прикладываться произвольно и порядок приложения несущественен. Количество экспериментальных результатов здесь ограничено, они указывают, что такая гипотеза может быть принята в качестве первого приближения.

При отсутствии надежных данных о напряжении и температуре можно сделать оценку ползучести в течение заданного цикла. Суммарная остаточная деформация ползучести за 1 цикл равна

$$\varepsilon = \int_0^{t_1} \dot{\varepsilon}(\sigma, T) dt, \quad (8-19)$$

где  $t_1$  — полное время цикла и  $\dot{\varepsilon}(\sigma, T)$  — минимальная скорость ползучести материала. Последняя является функцией изменения напряжения и температуры в процессе цикла. В качестве примера может быть взят гипотетический истребитель. Если титановая обшивка RC-130A спроектирована так, что нормальное напряжение при предельной нагрузке равно одной четвертой первоначальной прочности при комнатной температуре, то деформация ползучести за цикл составляет только около  $7,5 \cdot 10^{-6}$  дюйм/дюйм. С другой стороны, если уровень напряжения при предельной нагрузке составляет две трети первоначальной прочности при комнатной температуре, то деформация ползучести за цикл равна примерно  $1000 \times 10^{-6}$  дюйм/дюйм. Если в качестве критерия разрушения принять ползучесть, равную 5%, то меньшее допускаемое напряжение позволит осуществить 6700 циклов, тогда как более высокое допускаемое напряжение позволит осуществить только 50 циклов. Очевидно, что ползучесть является важным ограничительным фактором продолжительности жизни конструкции при большом допускаемом напряжении.

(с) *Усталость*. При любом обсуждении форм разрушения авиационной конструкции необходимо сказать о явлении усталости. Следует отметить ряд появившихся недавно замечательных работ по этому вопросу, в особенности 18-ю лекцию, посвященную братьям Райт, прочитанную Ландбергом [48]. Естественно, что в большинстве исследований задачи усталости самолетной конструкции температура принималась равной комнатной температуре, а максимальное напряжение за цикл предполагалось относительно низким. Задача исследования усталости готовых конструкций даже при комнатной температуре оказалась настолько сложной, что усложнение, которое возникает, если добавить температуру в качестве новой переменной, кажется обескураживающим. Однако имеется несколько экспериментально установленных тенденций, о которых следует упомянуть.

При оценке поведения материалов под нагрузкой двумя наиболее важными переменными являются температура и скорость деформации. Естественно ожидать, что изменение этих переменных может повлиять на результаты опытов по исследованию усталости. Основное влияние повышенных температур на усталость выражается в понижении кривой  $SN$  с повышением температуры. Несмотря на то, что с повышением температуры имеет место общее уменьшение усталостной прочности, оно не настолько значительно, как уменьшение предела прочности и текучести. Экспериментальным путем было также показано влияние скорости цикла на продолжительность усталостной жизни конструкции.

(d) *Взаимодействие явлений ползучести и усталости*. Зависимость явлений ползучести и усталости от температуры наводит на мысль о возможности существования взаимной связи между двумя явлениями. Долен [49] указал, что разрушение конструкции при высокой температуре может произойти либо вследствие ползучести, либо вследствие усталости, либо вследствие комбинации этих

двух явлений. Скорость прогрессирующего разрушения, обусловленного взаимодействием ползучести и усталости, может отличаться от той скорости, которая определялась простым наложением эффектов, полученных в отдельных опытах.

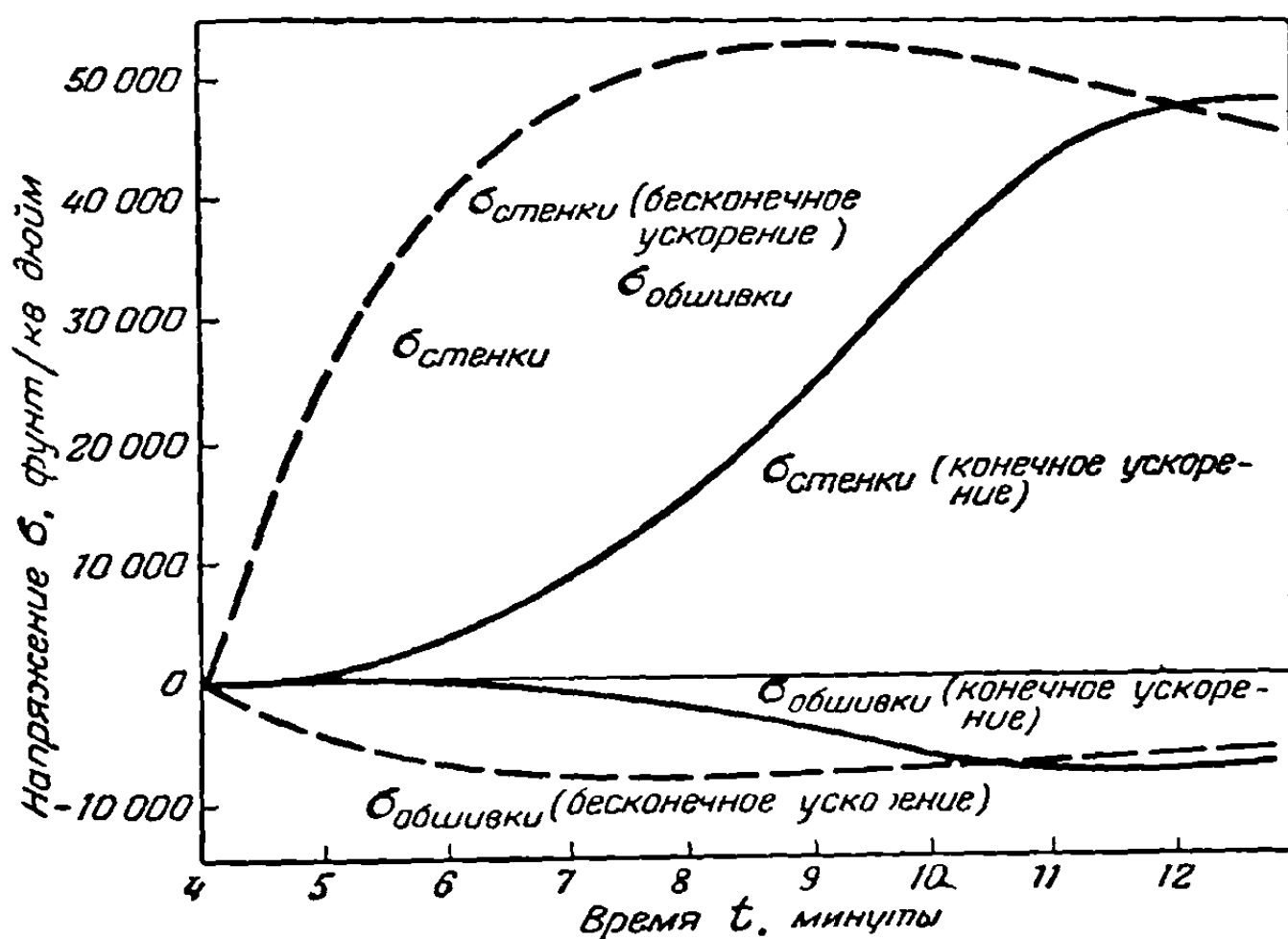
Гровер, Гордон и Джексон [50] указали, что для инженерных целей можно считать, что процесс нагружения, в котором напряжение в течение каждого цикла меняет знак, не зависит от явления ползучести. Однако когда цикл происходит вблизи среднего напряжения, эффекты взаимодействия могут быть заметными. Для оценки эффектов взаимодействия Тапселл [51] рекомендовал пользоваться эллиптической кривой взаимодействия.

## 9. РЕШЕНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ АЭРОУПРУГОСТИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ И ДОВОДКЕ

В предыдущем пункте были описаны в общих чертах некоторые вероятные конструктивные задачи и задача аэроупругости, которые могут встретиться при высокоскоростном полете. В большинстве дискуссий, посвященных этим задачам, было поднято много таких вопросов, на которые нельзя дать удовлетворительных ответов. Однако некоторые достаточно хорошо определенные направления решения этих задач очевидны.

**9-1. Уменьшение притока тепла.** При подходе к решению конструктивных задач, возникающих в результате аэродинамического нагрева, естественно сначала рассмотреть, как можно уменьшить суммарный приток тепла или скорость притока тепла.

Планирование маневра, в особенности если он определяет темп возрастания скорости самолета, может иметь важное влияние на скорость притока тепла и обусловленное им изменение термических напряжений с течением времени.

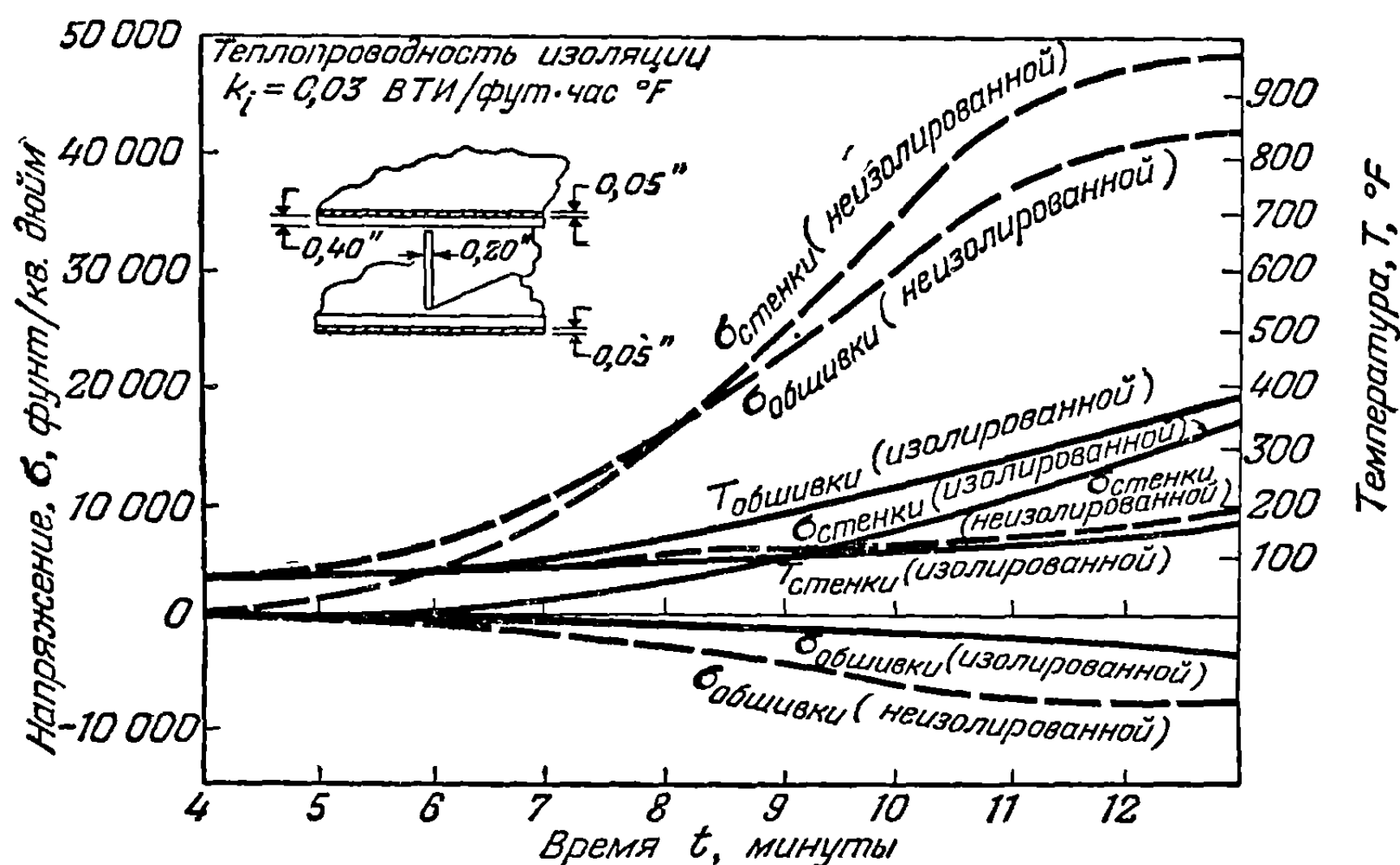


Фиг. 9-1. Влияние конечного и бесконечного ускорений на термические напряжения.

Например, на фиг. 9-1 производится сравнение влияния, оказываемого конечным и бесконечным ускорениями на изменение с временем термических напряжений в стенке и обшивке крыла гипотетического истребителя. Результат для конечного ускорения относится к маневру, изображенному на фиг. 5-1, тогда как результат для бесконечного ускорения относится к случаю мгновенного увеличения скорости до числа Маха 3,5. Уменьшение максимального напряжения, обусловленного конечным ускорением, в этом случае незначительно, хотя общий характер изменения напряжения во времени совершенно различный.

В общем случае нельзя сделать заключение о том, что максимальные напряжения, обусловленные мгновенным ускорением, всегда только лишь слегка превышают напряжения для конечного ускорения. Результат сильно зависит как от теплопроводности материала конструкции, так и от других факторов, таких, как проводимость соединений и геометрия конструкции. Если, например, гипотетическое крыло было изготовлено из алюминиевого сплава, то тогда, даже в том случае, когда самолет разгоняется до числа Маха 2,5 вместо 3,5, уменьшение максимального напряжения, обусловленное конечным ускорением, должно быть порядка 50%.

Прямое средство уменьшения притока тепла заключается в том, что между пограничным слоем и конструкцией помещается тонкий слой изоляции. На фиг. 9-2 показано уменьшение как термического напряжения, так и температуры,



Фиг. 9-2. Влияние изоляции на температуру и термические напряжения гипотетического истребителя.

которое можно ожидать для гипотетического истребителя, если поместить на верхней и нижней поверхности крыла слой изоляции толщиной в 0,05 дюйма с коэффициентом теплопроводности  $k = 0,03$  В.т.у./фут. час. °F. При этом предполагается, что пограничный слой турбулентный. В настоящем примере изоляция очень эффективна в смысле уменьшения как термического напряжения, так и температуры. В вычислениях, изображенных на фиг. 9-2, принято, что теплоемкость изоляции пренебрежимо мала по сравнению с теплоемкостью конструкции. Таким образом, анализ упрощается и сводится к задаче, в которой используется эффективный коэффициент теплопроводности  $h_e$ :

$$h_e = \frac{h}{(t_i/k_i)h + 1}, \quad (9-1)$$

где  $t_i$  — толщина,  $k_i$  — коэффициент теплопроводности изолирующего покрытия и  $h$  — коэффициент теплопередачи пограничного слоя. Изоляция является эффективной для коротких периодов нагрева. Для значительно более продолжительных периодов эффективной комбинацией может оказаться комбинация изоляции с охлаждением.

Сохранение ламинарного пограничного слоя на основной конструкции является чрезвычайно эффективным средством сведения к минимуму теплового потока, поглощаемого конструкцией. Например, для гипотетического истребителя коэффициенты теплопередачи ламинарного пограничного слоя являются величинами того же порядка, что и для турбулентного пограничного

слоя с изоляцией. Таким образом, влияние пограничного слоя как средства уменьшения температуры и напряжения приблизительно таково, как изображено на фиг. 9-2 для случая изоляции. Влияние охлаждения поверхности на устойчивость пограничного слоя можно отметить в качестве одного из методов подхода к решению задачи затягивания момента перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

Охлаждение конструкции путем впрыскивания газа или жидкости в пограничный слой может явиться эффективным способом охлаждения горячих участков конструкции, подобных передним кромкам крыла и носовым капотам. Одним из приложений этого метода является система „отпотевания“, при которой газ или жидкость проходит сквозь поры охлаждаемого материала, образуя на поверхности непрерывно возобновляемую защитную пленку [52].

**9-2. Замечания относительно проектирования конструкции.** Проектирование и разработка авиационных конструкций, предназначенных для глубокого проникновения в сверхзвуковой диапазон скоростей полета, потребуют подхода с различных сторон. Чисто эмпирический подход с большими коэффициентами безопасности оказывается непрактичным вследствие ухудшения летных качеств. Чисто аналитический подход в настоящее время невозможен вследствие отсутствия подходящего аналитического аппарата. Для того чтобы компенсировать недостатки аналитических методов, потребуется комбинация этих двух методов с большим объемом опытов.

(а) *Ослабление термических эффектов.* При искусном проектировании конструкции имеются бесчисленные возможности для того, чтобы ослабить влияние тепловых явлений. Задача состоит в таком размещении основных элементов конструкции и таком выборе материалов, которые позволили бы получить минимальное повышение и минимальный градиент температуры. Одним очевидным примером такой конструкции является однородная конструкция, в которой нагрузки воспринимаются внутренним набором конструкций, окруженным тугоплавкой оболочкой.

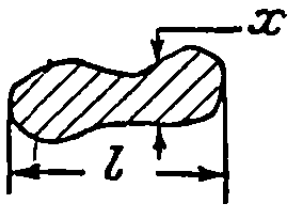
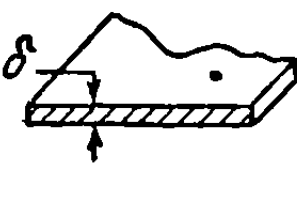
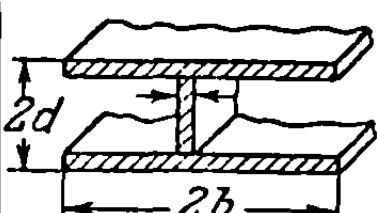
Для уменьшения интенсивности термических напряжений можно использовать различные средства. В основном они сводятся к трем: (1) такой выбор материалов и устройства конструкции, который обеспечил бы по возможности наименьшие термические градиенты; (2) выбор материалов с низкими значениями  $E\alpha/(1-2\nu)$  и (3) выбор такого устройства конструкции, при которой она не будет термически перегруженной.

Влияние выбора материала на термические напряжения можно оценить, исследуя безразмерные параметры, от которых зависят термические напряжения в термоупругой системе. Для произвольного однородного изотропного тела, пластины и двутавровой балки с широкой полкой эти параметры указаны в табл. 9-1. Считается, что первоначальная температура этих тел была равна  $T_0$ . Произвольное тело окружено жидкостью, имеющей температуру  $T_f$ ; пластина подвержена воздействию температуры  $T_f$  на одной стороне; вторая сторона ее изолирована, двутавровая балка подвержена воздействию температуры  $T_f$  на внешних сторонах верхней и нижней полок. Важными параметрами, включающими свойства материала, являются безразмерное напряжение, числа Био и Фурье. Последний параметр в таблице, характеризующий эквивалентность механической и тепловой энергий, пренебрежимо мал. В общем случае, чем больше число Био и чем меньше число Фурье, тем больше температурный градиент и следовательно, тем больше термическое напряжение. Чем больше величина фиктивного термического напряжения  $E\alpha/(1-2\nu)$ , тем больше термическое напряжение. Таким образом, с термической точки зрения желательны материалы с большим значением  $k$  и малым значением  $E\alpha$ . Влияние выбора материала можно проиллюстрировать количественно, рассматривая термические напряжения в плоской пластине с четырьмя полностью заземленными краями. Фиг. 9-3, основанная на результатах Айзаксона [53], показывает изменение



Таблица 9-1

Безразмерные параметры при исследовании термических напряжений

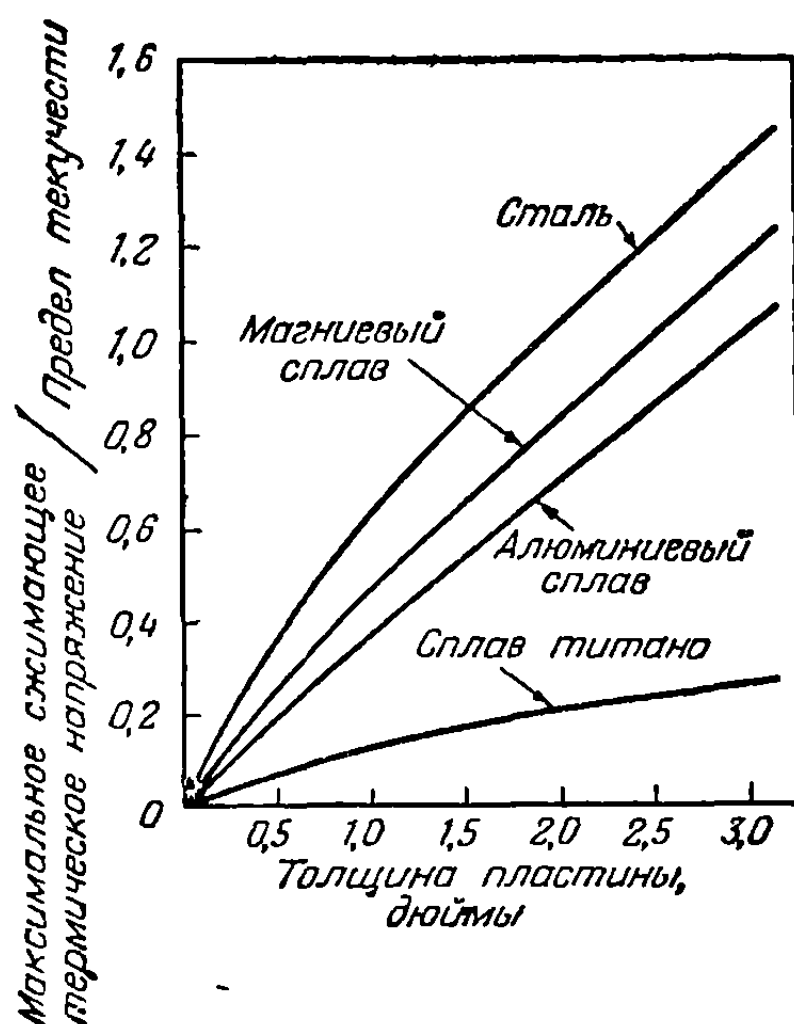
	Произвольное тело	Пластина	Балка с широкой полкой
			
Безразмерное напряжение	$\frac{\sigma(1-2\nu)}{E\alpha(T_f-T_0)}$	$\frac{\sigma(1-\nu)}{E\alpha(T_f-T_0)}$	$\frac{\sigma(1-\nu)}{E\alpha(T_f-T_0)}$
Число Био	$\frac{hl}{k}$	$\frac{h\delta}{k}$	$\frac{hd^2}{k\delta_f}$
Безразмерная длина	$\frac{x}{l}$	$\frac{x}{\delta}$	$\frac{x}{d}$
Число Фурье	$\frac{kt}{cl^2}$	$\frac{kt}{c\delta^2}$	$\frac{kt}{cd^2}$
Безразмерный эквивалент механической и тепловой энергии	$\frac{E\alpha}{c}$	$\frac{E\alpha}{c}$	$\frac{E\alpha}{c}$

отношения максимального термического напряжения к пределу текучести при повышенной температуре для четырех различных материалов в зависимости от толщины пластины. Считается, что пластина находится на аппарате, взлетающем на уровне моря и мгновенно достигающем числа Маха 3 на высоте

50 000 футов. Очевидно преимущество титана по сравнению с магнием, алюминием и сталью. Между числами Маха 3 и 4 титан сохраняет свое преимущество, тогда как сплавы алюминия и магния быстро теряют прочность, а термические напряжения в стали становятся чрезвычайно большими.

Для широкой полки двутавровой балки число Био имеет вид  $h/k(d/\delta_f)d$ . Таким образом, в дополнение к малой величине  $h/k$  желательна малая величина отношения высоты к толщине обшивки  $d/\delta_f$ . Дополнительный множитель  $d$  является масштабным множителем, который показывает, что термические напряжения будут становиться более опасными с увеличением размеров конструкции.

Паркес [54] предположил, что составные конструкции, у которых обшивка и стенки сделаны из различных материалов, способствуют уменьшению термических напряжений. Желательной комбинацией явилась бы обшивка из титана со стенками из алюминиевого сплава. Другими методами уменьшения термических



Фиг. 9-3. Отношение термического напряжения к напряжению предела текучести при аэродинамическом нагревании плоской пластинки,  $M = 3$ .

напряжений являются увеличение отношения площадей полки и стенки или уменьшение степени взаимного ограничения подвижности между стенкой и полкой. Идеальной внутренней конструкцией является такая конструкция, которая противостоит выпучиванию обшивки, но в то же время представляет минимальное



ограничение для термического расширения обшивки. Примером такой конструкции является „термически ненагруженная“ конструкция, подобная, например, балке-стенке Уоррена (предложенной Паркесом [54]), ребру жесткости или сотовому заполнителю.

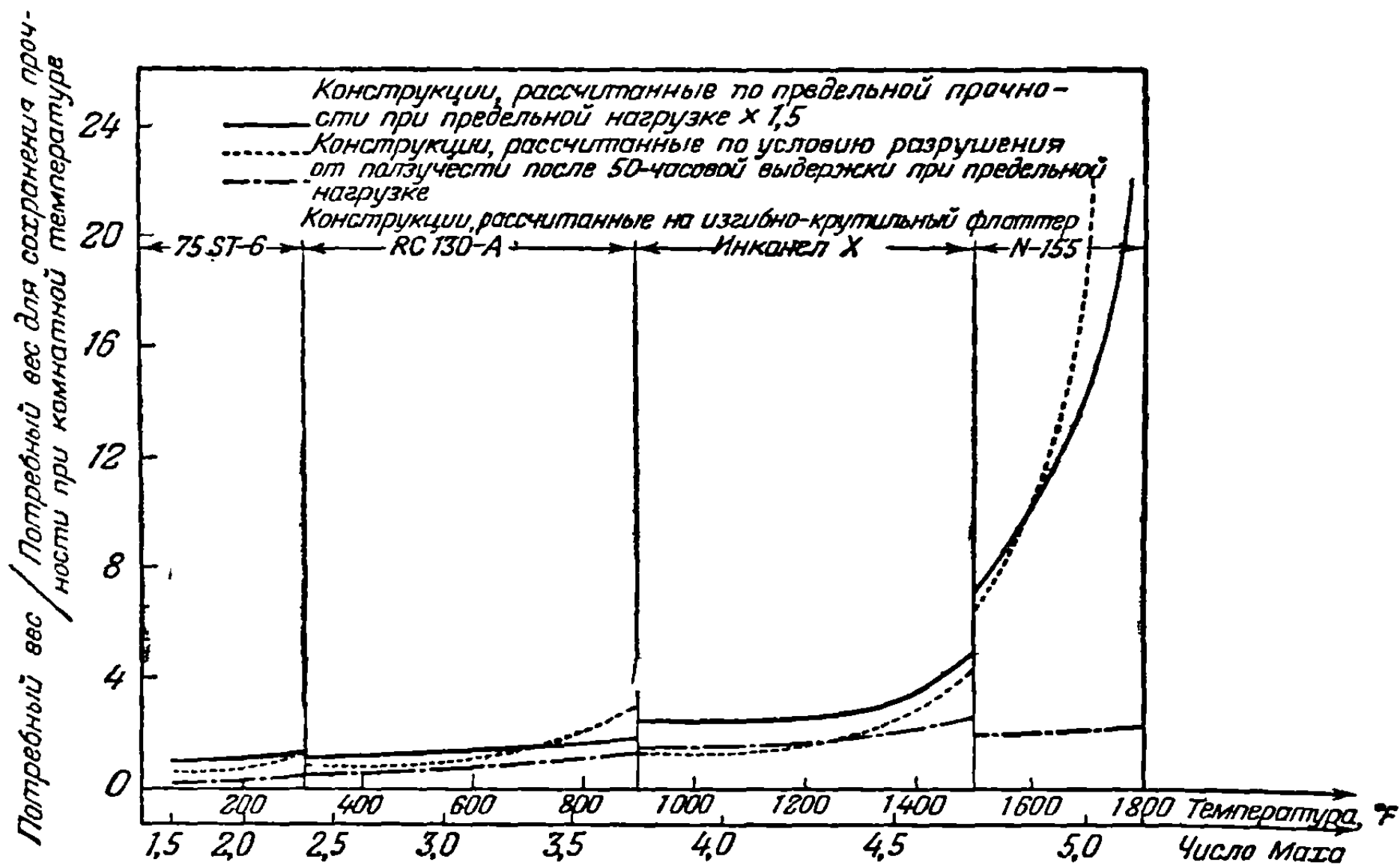
**9-3. Проектирование, имеющее цель свести к минимуму явления аэроупругости.** Сравнительно легко перечислить условия, необходимые для того, чтобы свести к минимуму явления аэроупругости, но совсем другое дело воплотить их в конструкции с минимальным весом. Практически от каждого явления аэроупругости можно избавиться или избежать его за счет большого увеличения масс, жесткости или демпфирования, которые все влекут за собой увеличение веса. Наиболее важным решением при проектировании является выбор формы несущей поверхности. В общем случае можно сказать, что для крыльев малого удлинения возникает минимальное, тогда как для крыльев большого удлинения — максимальное количество задач аэроупругости.

Если форма установлена, то задача проектирования заключается в том, чтобы попытаться сделать самолет удовлетворительным с точки зрения аэроупругости без увеличения массы или жесткости сверх тех, которыми обладает первоначальная конструкция, спроектированная, исходя из соображений прочности и других эксплуатационных требований. Процесс проектирования, имеющий целью свести к минимуму явления аэроупругости и, в частности, предотвратить флаттер, не является, к сожалению, таким процессом, который можно свести к простым правилам. Если мы стремимся создать оптимальную конструкцию, то при решении этой задачи следует придерживаться трех основных направлений: (1) теоретических методов, подкрепленных автоматическими вычислительными машинами, которые используются для того, чтобы исследовать некоторое число распределений масс и жесткостей с целью выбора конфигурации с минимальным весом, (2) динамических испытаний в аэродинамических трубах или в свободном полете с целью получения количественных данных, подобных, например, критическим скоростям, и (3) проведение в полете на полноразмерном самолете исследовательских поверочных испытаний.

**9-4. Критические проектные условия для конструкции.** При выборе материалов и устройства конструкции вопросом первостепенной важности является вопрос о том, какое условие прочности, жесткости или ползучести будет критическим для конструкции. Преобладание какого-либо фактора зависит от множества других факторов, свойственных каждой новой конструкции, и обобщение этого вопроса с какой-либо степенью определенности затруднительно. Можно получить некоторые общие тенденции, основывающиеся на анализе самолетов частного вида. На фиг. 9-4 изображена кривая изменения относительного веса крыла гипотетического истребителя в зависимости от температуры. Относительный вес крыла определяется как отношение проектного веса крыла при соответствующем уровне температуры к проектному весу крыла при комнатной температуре. Проектный вес крыла при комнатной температуре есть вес многостеночного крыла из сплава 75S-T6, который может воспринять предельный изгибающий момент из расчета коэффициента перегрузки, равного 6, и коэффициента безопасности, равного 1,5. На фигуре изображены кривые для трех относительных весов. Сплошные линии соответствуют весу крыла, который необходим для того, чтобы крыло могло выдержать один и тот же предельный изгибающий момент при различных уровнях температуры. Считается, что конструкция выдерживается при повышенной температуре в течение получаса. Учтено влияние повышенной температуры на элементы конструкции, воспринимающие сжимающую, растягивающую и срезающую нагрузки. Пунктирные линии соответствуют весу крыла, предназначенного для того, чтобы воспринимать предельный изгибающий момент в течение 50 часов без разрушения вследствие ползучести. Линии, изображенные точками, представляют вес крыла, спроектированного при соблюдении условия жесткости, потребной для предот-

вращения изгибно-крутильного флаттера при соответствующем числе Маха, которое дается на оси абсцисс.

Из этого приближенного анализа вытекает, что предельная прочность является доминирующим проектным условием на значительной части практического летного диапазона. Явление ползучести становится важным в диапазоне температур от 700 до 900° F для титанового материала RC-130A и свыше 1600 F для N-155. Конечно, если увеличить время, в течение которого конструкция должна проработать без разрушения вследствие ползучести, то явление ползучести приобрело бы более важное значение. Сравнительно малый вес конструкции, потребный для того, чтобы предотвратить изгибно-крутильный флаттер, по сравнению с тем весом, который необходим для обеспечения требований прочности и ползучести, обусловлен двумя основными причинами.



Фиг. 9-4. Тенденция изменения критических условий проектирования для крыла гипотетического истребителя.

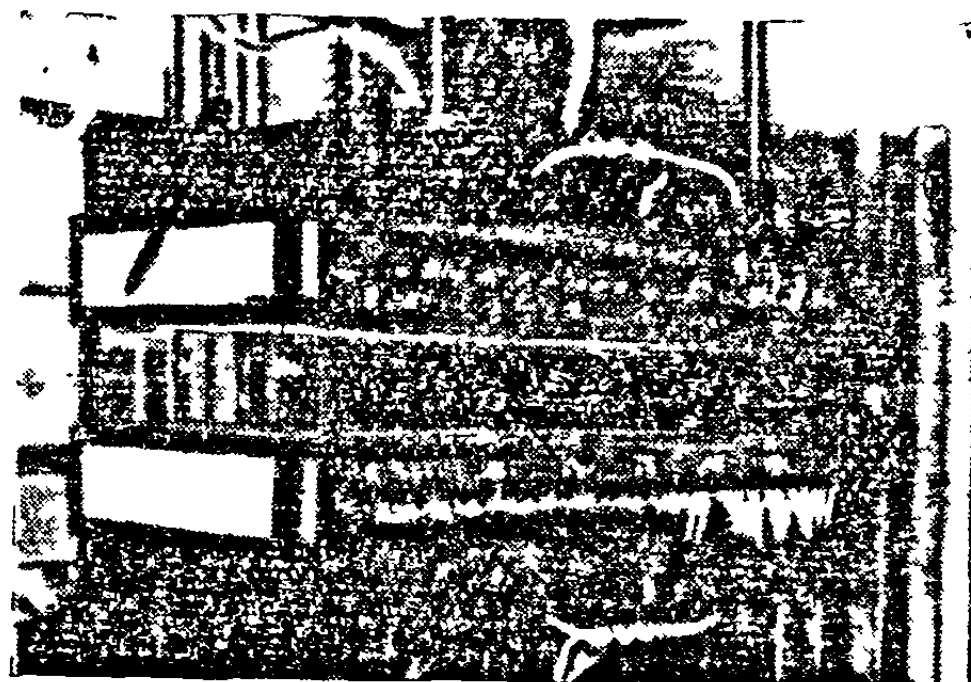
Во-первых, уменьшение модуля Юнга с увеличением температуры не так резко выражено, как уменьшение прочностных свойств, во-вторых, увеличение массивности крыла при более высоких числах Маха и температурах увеличивает относительную плотность  $\rho$ . Увеличение  $\rho$  оказывает благоприятное влияние в смысле увеличения скорости флаттера. При исследовании флаттера, на основе которого получены эти кривые, расстояние от упругой оси до центра тяжести крыла для всех конструкций крыльев принималось постоянным.

**9-5. Экспериментальное исследование как вспомогательное средство при проектировании конструкции.** Для того чтобы получить эффективные конструкции для высоких температур, требуется необычайно большое количество экспериментальных исследований моделей и компонентов конструкции. Испытания моделей полезны при разработке оптимальных конфигураций и в качестве дополнения и подтверждения аналитических результатов. Испытание элементов конструкции может состоять как из обычных, так и из приемочных испытаний. При оценке испытаний, которые необходимы и возможны при разработке конструкции для высокой температуры, очевидно, что полное воспроизведение настоящих моделей, работающих в сверхзвуковом воздушном потоке, очень сложно и может быть достигнуто только с помощью моделей, по размерам приближающихся к размерам прототипа. Таким образом, необходимо подумать о некотором количестве „ограниченных“ по своим целям моделей,

каждая из которых испытывается с оборудованием различного рода. Можно отметить три типа моделей. Существуют модели, на которых исследуется теплопередача из пограничного слоя, модели, на которых изучается поведение конструкции при повышенной температуре, и модели для исследования аэроупругого поведения.

(а) *Модели для изучения теплопередачи.* Знание количества тепла, подводимого к конструкции, является основной предпосылкой для проектирования. Сверхзвуковая аэродинамическая труба непрерывного действия является идеальным средством исследования теплопередачи в случае простых моделей, подобных пластинам, конусам или цилиндрам. Для того чтобы достичь полного подобия между прототипом и соответствующей ему моделью для аэродинамической трубы в случае ламинарного потока с учетом теплопередачи между пограничным слоем и телом, нужно удовлетворить шести безразмерным условиям подобия [55]. Полное подобие обычно не осуществимо. Различные степени приближения можно получить, выбирая четыре переменные: давление и температуру в аэродинамической трубе, длину и материал модели.

(б) *Конструктивная модель и ее элементы; испытание узлов.* Задача создания аппаратуры для этой цели, вероятно, окажется одной из наиболее сложных задач лабораторного оборудования, до сих пор встречавшихся авиационному инженеру. Нужно решить три задачи. Первая состоит в том, чтобы подвести требуемое количество тепла к поверхности конструкции. Вторая заключается в том, чтобы приложить потребную силовую нагрузку одновременно с подводом тепла. Третья состоит в измерении реакции конструкции.



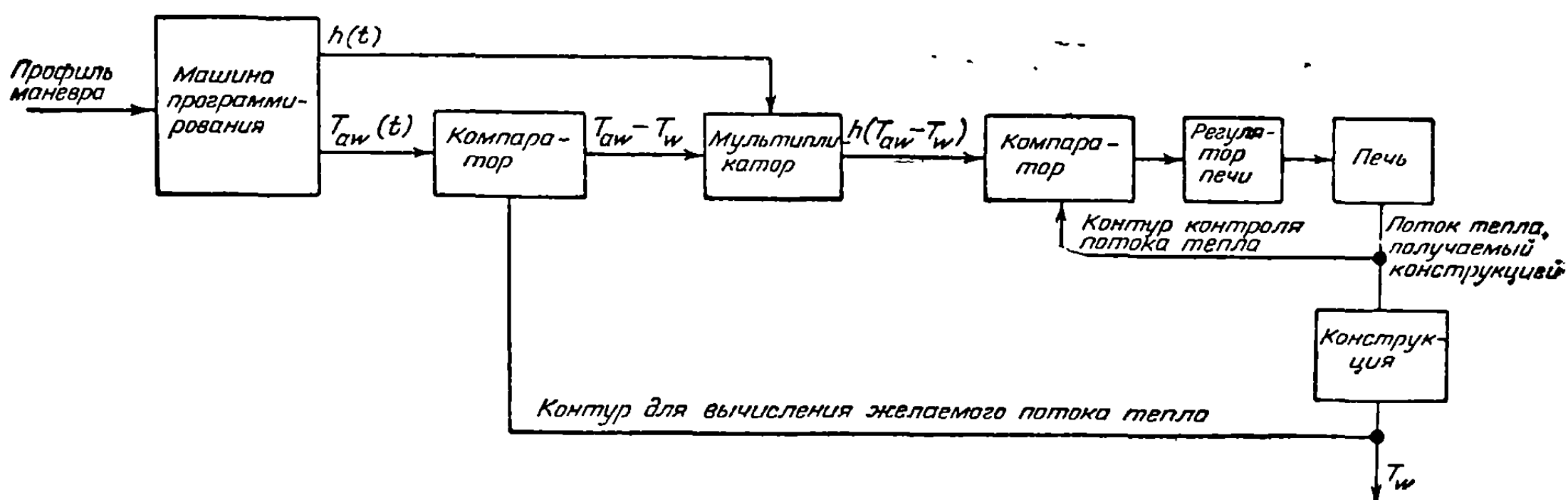
Фиг. 9-5. Радиационный нагревательный прибор для испытания конструкции.

Из различных способов получения теплового потока только немногие удовлетворяют всем специальным условиям, которые должны быть наложены на практическое лабораторное оборудование. Возможно, что в настоящее время наиболее удобное решение задачи дают радиационные нагреватели. На фиг. 9-5 показано радиационное нагревательное устройство, построенное в Массачусетском институте по заданию Воздушных сил. В этом аппарате, имеющем поверхность излучения 14 кв. футов, используются кремнисто-угольные нагревающие элементы, смонтированные на постели из огнеупорного кирпича. Изменение теплового потока к модели во времени регулируется с помощью механического перемещения источника тепла по отношению к модели. На фиг. 9-6 показана функциональная диаграмма системы для программирования движения, обеспечивающего моделирование аэродинамического нагрева в процессе заданного маневра. В больших аппаратах была бы необходима схема регулирования мощности, подводимой к нагревающим элементам, и в дополнение к малоинерционным нагревающим элементам потребовалось бы сложное электронное контрольное оборудование. Кроме кремнисто-угольных элементов, можно использовать некоторые другие радиационные источники нагрева. Среди них можно упомянуть нихроновые нити, угольные элементы, газовые излучающие панели, лампы с вольфрамовыми нитями, трубы с вспышкой и источники, использующие солнечную энергию [56].

При определении потребной мощности радиационных источников тепла мы получаем представление об эффективности сверхзвукового самолета в качестве источника тепла. Например, для маневра гипотетического истребителя, указанного

в настоящей статье, достигается максимальная плотность теплового потока, равная  $3,8 \text{ квт/кв. фут.}$  Принимая во внимание средние потери на излучение и считая обшивку полированной с коэффициентом поглощения  $0,2$ , получим, что при испытании полноразмерной конструкции к радиационному нагревательному устройству нужно подвести электрическую энергию около  $40 \text{ квт/кв. фут.}$  Если обшивка покрыта веществом черного цвета, так что ее коэффициент поглощения увеличивается до  $0,8$ , необходимая мощность уменьшается до  $10 \text{ квт/кв. фут.}$  Очевидно, что если нужно испытывать большие элементы конструкции, то требуемые мощности будут величинами того же порядка, что и те, которые требуются для больших сверхзвуковых аэродинамических труб.

Нужно много изобретательности для того, чтобы создать схемы одновременного приложения силовых нагрузок и теплового потока. Поскольку при испытаниях при повышенной температуре скорость деформации является важным



Фиг. 9-6. Функциональная диаграмма системы программирования для радиационного нагревательного прибора.

параметром для механизмов, передающих силовую нагрузку, желательно моделировать как скорости нагружения, так и интенсивность пиков нагрузки.

Измерение реакции конструкции включает измерения параметров, характеризующих температуру и деформацию. Принцип термопары дает надежное средство измерения температур в широком диапазоне. Однако проволочные тензодатчики сопротивления, так широко применяемые при экспериментальных исследованиях напряжений при комнатной температуре, к сожалению, не обеспечивают той же степени надежности, даже с теми недавними усовершенствованиями, которые были сделаны с целью применения этих датчиков при высокой температуре. Необходимы новые усовершенствования в области тензометров, прежде чем будет достигнуто удобное и надежное измерение деформаций при высокой температуре.

Могут представить интерес два типа испытаний конструкции в лаборатории. В первом случае, для того чтобы получить сведения о распределении температур, термических напряжениях и коэффициентах влияния при повышенной температуре, можно использовать сравнительно малую модель в соединении с радиационными нагревательными приборами. Модель, работающую целиком в упругой области, можно несколько раз подвергать воздействию изменяющегося с временем теплового потока, имеющего место в процессе маневра самолета и, таким образом, можно измерить различные интересующие нас величины. В термоупругой модели безразмерное распределение температуры  $(T - T_0)/(T_{aw} - T_0)$ , распределение напряжений  $\sigma/E$  и распределение деформаций  $\delta/L$  являются функциями безразмерного параметра нагружения  $P/EI^2$  в добавление к пяти параметрам, перечисленным в табл. 9-1. Если пренебречь параметром  $E\alpha/c$ , то можно достигнуть подобия, взяв модель, геометрически подобную прототипу, и используя тот же самый материал. Если опыт ведется

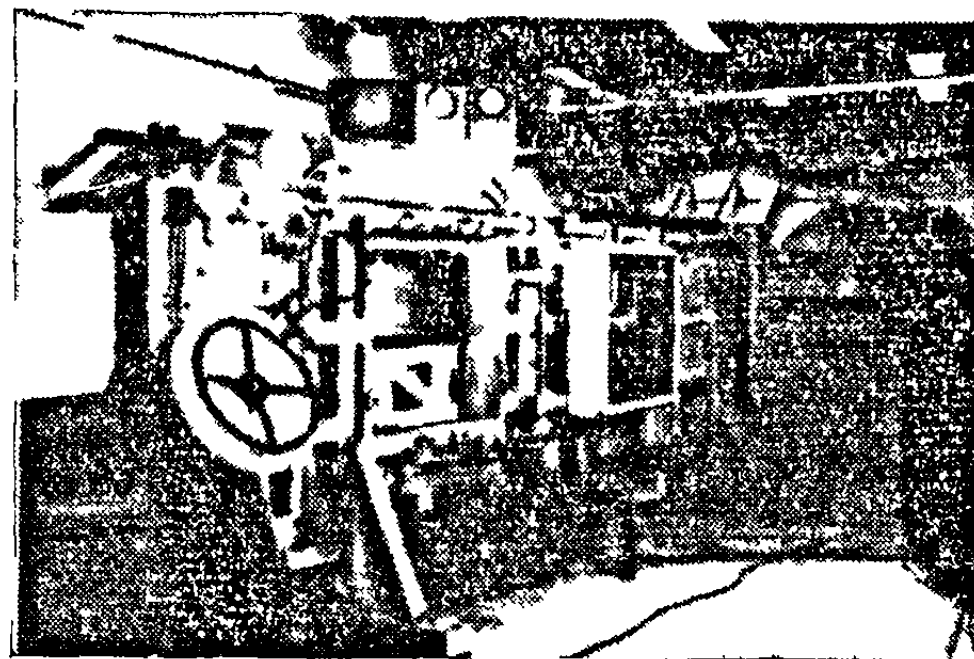


при достаточно высокой температуре, так что происходит значительное изменение упругих постоянных с изменением температуры, то использование одинакового материала в модели и прототипе необходимо. При опытах встречается затруднение, заключающееся в том, что промежутки времени  $t_M$  для модели уменьшаются обратно пропорционально квадрату масштаба длины  $l_M/l_P$

$$\frac{t_M}{t_P} = \left( \frac{l_M}{l_P} \right)^2. \quad (9-2)$$

Для турбореактивных самолетов это уменьшение промежутков времени для модели может, вероятно, быть приемлемым в случае испытания моделей с радиационными источниками нагрева, поскольку скорости теплового потока прототипа будут сравнительно низки.

Второй тип лабораторных испытаний конструкции может потребоваться для того, чтобы определить формы разрушения элементов конструкции или даже полных узлов при комбинированном действии теплового и силового импульсов. Эти испытания могут принимать самую разнообразную форму. Примером являются испытания моделей для определения форм разрушения элементов конструкции прототипа при условии постоянной температуры и коротко-периодического приложения силовой нагрузки. Если модель и прототип конструкции подобны, сделаны из того же самого материала и испытаны при одинаковой температуре, то безразмерное напряжение  $\sigma l^2/P$  и распределение деформаций  $\delta/l$  являются функциями единственного параметра нагружения  $P/l^2$ . Таким образом, если эти функции определяются из испытаний модели, то они будут такими же и для прототипа. Испытание „ограниченных“ по своим целям моделей, проанализированное Сандорффом [57], и контрольные испытания целых агрегатов конструкции при повышенной температуре являются другими примерами лабораторных испытаний, проводимых с целью определения форм разрушения.



Фиг. 9-7. Рабочая часть сверхзвуковой аэродинамической трубы с изменяемым числом Маха.

Законы подобия, сформулированные выше, справедливы только при наличии одной формы передачи тепла внутри конструкции путем теплопроводности. Если важную роль играет внутреннее излучение, то полное подобие невозможно и необходимо идти на определенные уступки.

(с) *Аэроупругие модели.* Испытание моделей, „ограниченных“ по своему назначению, и в особенности моделей для исследования флаттера, стало необходимым вспомогательным средством при проектировании конструкций, с помощью которого можно избежать явлений аэроупругости. Имеются два основных различных подхода к использованию моделей в исследовательской работе по аэроупругости. В одном случае испытания моделей имеют своей целью оценку коэффициентов, которые используются в теоретических расчетах. В другом — испытание модели предназначено служить аналогом полноразмерной задачи.

Сверхзвуковая труба кратковременного действия является примером оборудования, используемого для исследовательской работы в области флаттера при сверхзвуковых числах Маха. На фиг. 9—7 изображена рабочая часть, с помощью которой можно регулировать число Маха; она предназначена для совместной работы с аэродинамической трубой кратковременного действия Масса-

чусетского технологического института [58]. Сопло — асимметричное со скользящими вкладышами; передвигая вкладыши по направляющим, можно регулировать число Маха во время работы на всем диапазоне скоростей от  $M = 1,25$  до  $M = 2,10$ , не изменяя размеров рабочей части. Продолжительность работы трубы достигает приблизительно 35 сек. Модель несущей поверхности помещается в поток воздуха после того, как установится сверхзвуковое течение, и форма сопла изменяется до тех пор, пока не наступит флаттер.

До сих пор сверхзвуковые испытания моделей на флаттер в большинстве случаев проводились при числах Маха, меньших тех, при которых имеет место заметное аэродинамическое нагревание. Ранее мы видели, что в простом случае изгибно-крутильного флаттера нагрев может заметно изменить картину явления. Могут возникнуть другие формы флаттера, которые до сих пор не имели места. Например, Драйден и Дибберг [59] сообщают о флаттере многостеночного крыла в направлении хорды типа „развевающегося флага“. Создать настоящую флаттерную модель, воспроизводящую все свойства прототипа: упругие, инерционные, неустановившиеся аэродинамические явления и явления теплопередачи — фактически невозможно, за исключением тех случаев, когда геометрические масштабы приближаются к единице. Таким образом, опять становится очевидным, что должны использоваться модели „ограниченной“ цели. Каждая модель предназначается для исследования частной формы флаттера, которая должна быть известна заранее. Задача заключается в проектировании модели, которая удовлетворяет законам подобия флаттера [23] и в то же самое время учитывает потерю жесткости, обусловленную аэродинамическим нагревом. В принципе это может быть осуществлено с помощью придания такой жесткости серии флаттерных моделей при нормальной температуре, которая имеет место в одной или нескольких точках вдоль профиля маневра и определяется расчетным путем или путем испытания модели конструкции (выполненной в соответствующем масштабе) в нагревательном устройстве. Каждая модель может быть помещена в установившийся воздушный поток трубы непрерывного или кратковременного действия при числе Маха, соответствующем жесткости модели.

## 10. РЕШЕНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ АЭРОУПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Фундаментальное исследование является другим основным элементом в решении конструктивных задач и задач аэроупругости при больших сверхзвуковых скоростях. Персонал проектных и исследовательских групп, как бы способен он ни был, должен обладать глубокими знаниями, которые также необходимы, как материалы для изготовления конструкции.

Самыми главными вопросами фундаментального исследования должны быть вопрос улучшения материалов, предназначенных для высоких температур, и вопрос более полного понимания поведения всех материалов при повышенной температуре. Первый является задачей металлургии; очевидно, что результаты, которые могут быть здесь достигнуты, носят ограниченный характер. Независимо от наших усилий в направлении смещения компонентов сплава, предназначенного для увеличения предела прочности металлов при повышенной температуре, мы всегда встречаемся с препятствием в виде точек плавления основных металлических элементов. Температура плавления главного металлического элемента — железа — равна только  $2800^{\circ}\text{F}$ . Большинство чистых металлов, имеющих точки плавления с температурой выше  $3000^{\circ}\text{F}$ , плохо подходят для авиационных конструкций вследствие хрупкости и способности к быстрому окислению. Черметс дает некоторую надежду получить в будущем значительно более высокие точки плавления. Однако нет уверенности в том, что будут сделаны существенные шаги в области развития новых листовых материалов, способных выдерживать высокую температуру, и авиационный инженер должен



приготовиться к тому, чтобы более эффективно использовать материалы, имеющиеся в настоящее время.

Рациональное проектирование требует основательного знания механики деформируемых тел при повышенной температуре — механики, которая включает не только классическую теорию упругости, но также учитывает наряду с пластичностью время и температуру. Настоящее положение инженера-конструктора аналогично тому, в котором находился аэродинамик лет 15 назад, когда он был вынужден оставить теорию несжимаемой жидкости и заменить ее аэродинамической теорией, в которой важным параметром являлась температура. Фундаментальные исследования уже предоставили в его распоряжение хорошо проверенное уравнение состояния. Здесь аналогия кончается, потому что инженер-конструктор не имеет такого уравнения состояния, по крайней мере для инженерных материалов. Проблема материалов является гораздо более сложной, нежели проблема жидкости. Теория пластичности получила сильное развитие на базе идеально пластических материалов, однако авиационные инженеры извлекли из нее очень мало пользы вследствие ограничивающих ее упрощений. Запас знаний во всей этой области на самом деле очень низок. Все это заставляет желать более быстрого накопления фундаментальных знаний относительно поведения материалов и исследования инженерных конструкций в неупругой области.

Проектирование сложных конструкций для повышенной температуры требует понимания процессов теплопередачи внутри конструкции. Перенос тепла путем теплопроводности вследствие природы управляющих им физических законов может быть проанализирован, и существуют методы, позволяющие получить инженерные решения задачи. С другой стороны, явление передачи тепла излучением, хотя и хорошо понятное, более сложно, и в настоящее время инженер не имеет аппарата, позволяющего анализировать сложные конструкции.

Поведение монококковых конструкций при наличии совместного действия силовых и температурных факторов требует основательного изучения. Особое внимание должно быть направлено на то, чтобы получить лучшее представление о формах разрушения и потерях конструктивной жесткости.

В аэроупругости мы соприкасаемся с растущим количеством явлений, которые нельзя объяснить в рамках классических линеаризованных теорий. Очевидно, что в определенные задачи следует включить нелинейные зависимости как в конструктивных, так и в аэродинамических членах. Применение классических методов Рэлея—Ритца или Галеркина к решению несамоспряженных задач аэроупругости, подобных флаттеру, в строгом смысле незаконно. Создание новых методов потребует исследований в области прикладной механики, которые должны проводиться на самом высоком уровне. Панельный флаттер является замечательным примером, где требуется более высокий уровень подхода к решению задачи. При решении новых задач аэроупругости непрерывно возникают вопросы, касающиеся интенсивности и распределения нестационарных воздушных сил. В прошлом каждый аэродинамический диапазон скоростей требовал интенсивного исследования, прежде чем можно было решить вопрос об аэродинамических коэффициентах. Диапазон гиперзвуковых скоростей представляет новейший пример такого рода.

Другой областью, в которой запас фундаментальных знаний незначителен, является реакция конструкции на случайные аэродинамические импульсы. В процессе высокоскоростного полета самолетные конструкции подвержены воздействию широкого спектра случайных возмущений от атмосферной турбулентности до шума высокой интенсивности. В этом случае обещающим методом исследования является обобщенный гармонический анализ. Однако исследование еще не дошло до такого уровня, когда можно ясно сформулировать метод проектирования.

При высокоскоростном полете для инженера-конструктора приобретают значение все стороны явления теплопередачи в пограничном слое. Следует указать,

что при настоящем состоянии знаний самым слабым местом является неопределенность точки перехода.

Наконец, для того чтобы дать практическое подтверждение всем сторонам наших основных знаний, крайне необходим летный эксперимент на исследовательских аппаратах.

## 11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Существующие в настоящее время оценки конструктивных задач, которые будут встречаться при высокоскоростном полете, в значительной степени основываются на аналитических и лабораторных исследованиях. До тех пор пока не произведены летные испытания, такие исследования являются единственной базой для планирования научных изысканий и работ по усовершенствованию конструкций. Результаты некоторых из этих исследований описаны в настоящей статье.

Даже на этой ранней стадии наших знаний можно и нужно сделать некоторые заключения и высказать некоторые предположения. Во-первых, искусство конструирования будет играть чрезвычайно важную роль в решении конструктивных задач при больших сверхзвуковых скоростях. Температурные уровни элементов конструкции в значительной степени будут регулироваться с помощью изоляции, комбинации изоляции с охлаждением и разумным проектированием с использованием разнородных конструкций. Температурные градиенты и термические напряжения могут быть уменьшены за счет использования не перегруженных термически конструкций, осторожного выбора материалов и за счет летных ограничений положительных и отрицательных ускорений.

Что касается вопроса о нагрузках, то маневренные нагрузки на максимальных скоростях требуется ограничить во избежание чрезмерного веса. Большие динамические реакции при больших скоростях и высотах будут возникать в умеренно сильных порывах в свободном потоке воздуха и в турбулентном струйном течении. Однако возникновения серьезных конструктивных затруднений не ожидается.

По сравнению с другими условиями проектирования влияние аэроупругости не будет усиливаться. При оценке этого заключения следует, конечно, вспомнить, что при любой скорости влияние аэроупругости на конструкции зависит от формы самолета и запаса прочности, выбранного для маневра.

Основываясь на имеющихся материалах, можно сказать, что главным фактором для самолета, предназначенного для значительных маневренных перегрузок, продолжают оставаться свойства кратковременной статической прочности. Есть основание полагать, что усталость основных элементов конструкции при высоких температурах будет иметь относительно меньшее значение, нежели в настоящее время. Ползучесть является новым требующим учета фактором, особенно при полете самолетов, имеющих малые коэффициенты перегрузки. Для конструкций, проектирующихся с учетом ползучести, необходима более рациональная основа проектирования, которая не связана произвольным коэффициентом безопасности, а исходит из спектра напряжение-температура. Пока еще нельзя ответить на вопрос о том, когда придется отказаться от монококковой конструкции из-за разрушений вследствие ползучести.

При отсутствии изолирующих и охлаждающих устройств проигрыш в весе за счет потери прочности существующих материалов будет, вероятно, ограничивать полет в изотермической атмосфере до чисел Маха порядка 3,5.

Несмотря на то, что относительно технических деталей будут, естественно, различия во мнениях, достаточно уверенно можно сделать одно общее заключение. Если мы желаем летать быстро в период несущего полета в пределах земной атмосферы, то потребуются большая техническая работа в области материалов и конструкций. По самой природе так называемый „тепловой барьер“

вряд ли можно преодолеть в результате одного открытия. Его можно преодолеть либо с помощью полетов вне земной атмосферы, либо постепенно, шаг за шагом, причем каждый последующий шаг будет требовать больше усилий, нежели предыдущий. При таком положении дел ключ к решению задачи заключается в координированных усилиях исследовательских, испытательских и проектных групп. Прежде чем будет достигнут существенный прогресс, потребуются новые уникальные установки для испытания конструкций. Они будут дорого стоить и будут требовать больших затрат мощности.

Более важным обстоятельством, нежели установки, является потребность в новых фундаментальных знаниях и квалифицированных инженерах, которые смогут применить эти знания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Thomson Sir William (Lord Kelvin), *Mathematical and physical papers*, vol. I, Cambridge University Press, 1882, p. 291.
2. *A commentary on the scientific writings of J. Willard Gibbs*, vol. I. Yale University Press, 1936.
3. Love A. E. H., *Mathematical theory of elasticity*, Dover Publications, 1944 (Ляв А., *Математическая теория упругости*, М.—Л., ОНТИ 1935).
4. Eckert E. R. G., *Survey on heat transfer at high speeds*, WADC T. R. 54—70, April 1954.
5. Davies F. V., Monaghan R. J., *The determination of skin temperatures attained in high speed flight*, Royal Aircraft Establishment Report No. Aero 2454, February 1952.
6. Bloom M., *Thermal conditions associated with aircraft in flight*, PIBAL Report No. 241, Dept. Aero. Engrg. and Appl. Mech., Polytechnic Institute of Brooklyn, January, 1954.
7. Chapman D. R., Rubesin M. W., *Temperature and velocity profiles in the compressible laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature*. *J. of the Aeronaut. Sci.*, 16, No. 9, p. 547 (September, 1949).
8. Lighthill M. J., *Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer*, *Proc. Royal Society A*, vol. 202, No. 1070, August, 1950, p. 359.
9. Bryson A. E., Edwards R. H., *The effect of nonuniform surface temperature on the transient aerodynamic heating of thin-skinned bodies*, *J. of the Aeronaut. Sci.*, 19, No. 7, p. 471 (July, 1952).
10. Moore F. K., *Unsteady laminar boundary layer flow*, NACA T. N. 2471, September, 1951.
11. *The effects of atomic weapons*, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, September, 1950.
12. Fourier J., *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, France, 1822.
13. Hoff N. J., *The structural effects of aerodynamic heating*, London, England, September, 1953. (Доклад, прочитанный на третьей общей ассамблее AGARD).
14. Jakob Max., *Heat transfer*, vol. I. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1949.
15. Carslaw H. S., Jaeger J. C., *Conduction of heat in solids*, First Ed., Clarendon Press, Oxford, 1950.
16. Washizu K., *Application of the variational method to transient heat conduction problems*, M. I. T. Aeroelastic and Structures Research Laboratory Report No. 25—17 for The Office of Naval Research, March, 1955.
17. Emmons H. W., *Numerical solution of heat conduction problems*, *Trans. A. S. M. E.*, 65, p. 607 (1943).
18. Weiner J. H., *A method for the approximate solution of the heat equation*, Technical Report No. 5, Contract No AF 33(616)—2071, Columbia Univ. New York, March, 1955.
19. Goodman S., *Radiant heat transfer between infinite parallel plates*, National Bureau of Standards Report No. 4239, August, 1955.
20. Schmit L. A., Williams F. L., *The effects of thermal radiation on aircraft structures*, Part II—The response of a simple structure to radiant heating, Air Force Technical Report 54—384, Part II, February, 1955.
21. Ambrosio Alphonso, Russell Bertram, MacInnes W. F., *Temperature distribution in a typical aircraft structure due to transient external heating*, vol. I, T-33 Airplane, WADC Technical Report No. 52—216, April, 1953.
22. Rhode R. V., Donely Phillip, *Frequency of occurrence of atmospheric gusts and of related loads on airplane structures*, NACA ARR No. L4121 (Unclassified), November, 1944.

23. Bisplinghoff R. L., Ashley H., Halfman R. L., Aeroelasticity, Addison Wesley Publishing Co., Inc., Cambridge, Mass., 1955.
24. Lighthill M. J., Oscillating airfoils at high Mach numbers, J. of the Aeronaut. Sci., 20, No. 6, p. 402 (June, 1953).
25. Miles J. W., Unsteady supersonic theory, Report for the ARDC, USAF, Contract AF18(600)—432, March, 1955.
26. Landahl M. T., Unsteady flow around thin wings at high Mach numbers, M.I.T. Fluid Dynamics Research Group Report for the Office of Scientific Research, USAF, Contract AF18(600)—961, June 1955.
27. Landahl M., Møllø-Christensen E., Ashley H., Parametric studies of viscous and nonviscous unsteady flows, USAF O. S. R. Technical Report, No. 55—13, April, 1955.
28. Zartarian G., Heller A., Ashley H., Application of piston theory to certain elementary aeroelastic problems. (Статья, представленная на конференцию по механике твердых и жидких тел.) Purdue Univ., September, 1955.
29. Tolefson Harold B., Press Harry, A review of flight data on atmospheric turbulence, Cleveland, Ohio, November, 1954. (Доклад, прочитанный на конференции по некоторым вопросам эксплуатации самолетов.)
30. Wiener Norbert, Generalized harmonic analysis, Acta Math., 55, p. 117 (1930).
31. Liepmann H. W., On the application of statistical concepts to the buffeting problems, J. of the Aeronaut. Sci., 19, No. 12, p. 793 (December, 1952).
32. Clementson G. C., An investigation of the power spectral density of atmospheric turbulence, Sc. D. Thesis, M. I. T., 1950.
33. Fung Y. C., Statistical aspects of dynamic loads, J. of the Aeronaut. Sci., 20, No. 5, p. 317 (May, 1953).
34. Duhamel J. M. C., Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides, Mém. Acad. sci. savants étrangers, 5, p. 440 (1838).
35. Timoshenko S. P. Goodier J. N., Theory of elasticity, Second Ed.; McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1951.
36. Sokolnikoff I. S., Mathematical theory of elasticity; McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1946.
37. Hoff N. J., Structural problems of future aircraft, Third Anglo-American Aeronautical Conference at Brighton, England, The Royal Aeronautical Society, 1951, p. 77.
38. Maxwell J., On the dynamical theory of gases, Phil. Mag., 4, 1868.
39. Freudenthal A. M., The inelastic behavior of engineering materials and structures, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1950.
40. Hoff N. J., Approximate analysis of structures in the presence of moderately large creep deformations, Quart. Appl. Math., 12, No. 1, p. 49 (April, 1954).
41. Vosteen L. F., Fuller K. E., Behavior of a cantilever plate under rapid heating conditions, NACA Research Memorandum, RM L55E20C, July, 1955.
42. Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М.—Л. Гостехиздат, 1946.
43. Pines S., Dugundji J., Neuringer J., Aerodynamic flutter derivatives for a flexible wing with supersonic and subsonic edges, J. of the Aeronaut. Sci. 22, No. 10, p. 693 (October, 1955).
44. Goland Martin, Luke Y. L., An exact solution for two-dimensional linear panel flutter at supersonic speeds, Reader's Forum, J. of the Aeronaut. Sci., 21, No. 4, p. 275, (April, 1954).
45. Heldenfels R. R., Mathauser E. E., Brooks W. A., Some structural effects of aerodynamic heating, NACA-University Conference on Aerodynamics, Construction and Propulsion, vol. 1, Aircraft Structures and Materials, October, 1954.
46. Luster D. R., Wentz W. W., Catlin J. P., Effect of strain rate on the mechanical properties of titanium base materials, WADC Technical Report 53—71, ARDC, USAF, Wright-Patterson Air Force Base, September, 1953.
47. Gerard George, Some structural aspects of thermal flight. The Aviation Division of the ASME Symposium on the Thermal Barrier, November 28—December 3, 1954.
48. Lundberg B. O., Fatigue life of airplane structures, The Eighteenth Wright Brothers Lecture, J. of the Aeronaut. Sci., 22, No. 6, p. 349 (June 1955).
49. Dolan T. J., How can we appraise metals for high temperature service, Metals Progress, 61, p. 56 (March, 1952).
50. Grover H. J., Gordon S. A., Jackson L. R., Fatigue of metals and structures, NAVAER 00-25-534, 1954. (Статья подготовлена для Отдела Аэродинамики морского флота.)
51. Tapscott H. J., Fatigue at high temperatures, Symposium on High Temperature Steels and Alloys for Gas Turbines, Iron and Steel Institute, 4 Grosvenor Gardens, London, S. W. 1, p. 169, 1950.

52. Rubesin Morris W., An analytical estimation of the effect of transpiration cooling on the heat-transfer and skin-friction characteristics of a compressible, turbulent boundary layer, NACA Technical Note 3341, December, 1954.
53. Isakson Gabriel, A study of thermal stresses in aircraft structures due to aerodynamic heating, Sc. D. Thesis, M. I. T., June, 1953.
54. Parkes E. W., The design of wings for minimum thermal stress, University of Bristol, Aircraft Engineering, 26, No. 300, p. 52 (February, 1954). (Резюме доклада, прочитанного на конференции по термическим напряжениям.)
55. Mahoney J. J., Some aspects of similarity conditions for supersonic flows with heat transfer, S. M. Thesis, Dept. of Aero. Engrg., M. I. T., June, 1954.
56. Horton W. H., Laboratory simulation of kinetic heating, Aircraft Engineering, 26, No. 302, p. 138, April, 1954.
57. Sandorff P. E., Design of structural models, with application to stiffened panels under combined shear and compression, January, 1955. (Доклад, представленный на ежегодное 23-е собрание Аэродинамического института.)
58. McCarthy J. F., Halfman R. L., The design and testing of supersonic flutter models, January, 1955. (Доклад, представленный на ежегодное 23-е собрание Аэродинамического института.)
59. Dryden H. L., Duberg J. E., Aeroelastic effects of aerodynamic heating, Ottawa, Canada, June, 1955. (Доклад, представленный на пятую общую ассамблею AGARD).



## КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ ПЕРЕВОДА АНГЛИЙСКИХ МЕР В МЕТРИЧЕСКИЕ И ОБРАТНО <sup>1)</sup>

Численные значения величин, приведенные ниже, в основном взяты из таблиц переводных коэффициентов [3], выпущенных Британским институтом стандартов. Полезные данные о переводе единиц измерения в метрическую систему можно найти в работе [1].

### 1) Длина:

$$\begin{aligned} 1 \text{ фут} &= 0,304800 \text{ м}; & 1 \text{ м} &= 3,28084 \text{ фута.} \\ 1 \text{ дюйм} &= 2,54 \text{ см}^2); & 1 \text{ см} &= 0,393701 \text{ дюйма.} \end{aligned}$$

### 2) Площадь:

$$\begin{aligned} 1 \text{ фут}^2 &= 0,092903 \text{ м}^2; & 1 \text{ м}^2 &= 10,7639 \text{ фута}^2. \\ 1 \text{ дюйм}^2 &= 6,4516 \text{ см}^2; & 1 \text{ см}^2 &= 0,15500 \text{ дюйм}^2. \end{aligned}$$

### 3) Объем:

$$\begin{aligned} 1 \text{ фут}^3 &= 0,0283169 \text{ м}^3; & 1 \text{ м}^3 &= 35,3147 \text{ фута}^3. \\ 1 \text{ дюйм}^3 &= 16,3871 \text{ см}^3; & 1 \text{ см}^3 &= 0,061024 \text{ дюйм}^3. \\ 1 \text{ мл} &= 1,000028 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

### 4) Скорость:

$$\begin{aligned} 1 \text{ фут/сек} &= 0,304800 \text{ м/сек}; & 1 \text{ м/сек} &= 3,28084 \text{ фут/сек.} \\ 1 \text{ миля/час} &= 1,60934 \text{ км/час}; & 1 \text{ км/час} &= 0,62137 \text{ миля/час.} \\ 1 \text{ фут/сек} &= 0,68182 \text{ миля/час}; & 1 \text{ миля/час} &= 1,46667 \text{ фут/сек.} \\ &88 \text{ фут/сек} &= 60 \text{ миля/час.} \\ 1 \text{ фут/сек} &= 0,592105 \text{ узла}; & 1 \text{ узел} &= 1,68889 \text{ фут/сек.} \\ &76 \text{ фут/сек} &= 45 \text{ узлам.} \end{aligned}$$

### 5) Масса:

$$\begin{aligned} 1 \text{ слаг} &= 32,17 \text{ фунта (масса);} & 1 \text{ фунт (масса)} &= 0,03108 \text{ слага.} \\ 1 \text{ фунт (масса)} &= 0,453592 \text{ кг}; & 1 \text{ кг} &= 2,20462 \text{ фунта (масса).} \\ 1 \text{ слаг} &= 14,592 \text{ кг}; & 1 \text{ кг} &= 0,06853 \text{ слага.} \\ 1 \text{ ньютон} &= 0,672 \text{ слага}; & 1 \text{ слаг} &= 1,488 \text{ ньютон}^3). \end{aligned}$$

### 6) Плотность:

$$\begin{aligned} 1 \text{ слаг/фут}^3 &= 32,17 \text{ фунта (масса)/фут}^3. \\ 1 \text{ фунт (масса)/фут}^3 &= 0,03108 \text{ слаг/фут}^3. \\ 1 \text{ фунт (масса)/фут}^3 &= 16,0185 \text{ кг/м}^3. \\ 1 \text{ кг/м}^3 &= 0,062428 \text{ фунт (масса)/фут}^3. \\ 1 \text{ слаг/фут}^3 &= 515,3 \text{ кг/м}^3. \\ 1 \text{ кг/м}^3 &= 0,001941 \text{ слаг/фут}^3. \end{aligned}$$

Стандартная плотность воздуха на уровне моря:

$$(0,002378 \text{ слаг/фут}^3) = 0,1250 \text{ ньютон/м}^3.$$

### 7) Сила:

$$\begin{aligned} 1 \text{ фут (сила)} &= 0,453592 \text{ кгГ.} \\ 1 \text{ кгГ} &= 2,20462 \text{ фунта (сила).} \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Приведенная здесь таблица взята из книги: Р. Пэнкхёрст и Д. Холдер. Техника эксперимента в аэродинамических трубах, ИЛ, Москва, 1955, стр. 623.

<sup>2)</sup> С точностью до  $2 \cdot 10^{-6}$ .

<sup>3)</sup> Здесь один ньютон оказывается равным 9,805 кг, так как ускорение  $32,17 \text{ фут/сек}^2 = 9,805 \text{ м/сек}^2$ .



## 8) ДАВЛЕНИЕ:

$$1 \text{ фут вод. ст. при } 4^{\circ} \text{ C} = 0,4335 \text{ фунт (сила)/дюйм}^2.$$

$$1 \text{ фунт (сила)/дюйм}^2 = 2,307 \text{ фута вод. ст. при } 4^{\circ} \text{ C}.$$

$$1 \text{ дюйм рт. ст. при } 0^{\circ} \text{ C} = 1,133 \text{ фута вод. ст. при } 4^{\circ} \text{ C} = \\ = 0,4912 \text{ фунт (сила)/дюйм}^2.$$

$$1 \text{ фунт (сила)/фут}^2 = 4,8824 \text{ кг/м}^2.$$

$$1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт. ст. при } 0^{\circ} \text{ C} = \\ = 33,90 \text{ фут вод. ст. при } 4^{\circ} \text{ C} = \\ = 29,92 \text{ дюйма рт. ст. при } 0^{\circ} \text{ C} = \\ = 14,696 \text{ фунт (сила)/дюйм}^2 = \\ = 2116,2 \text{ фунт (сила)/фут}^2 = \\ = 1013,2 \text{ мб.}$$

Зависимость плотности воды и ртути от температуры имеется в работе [4].

## 9) РАБОТА И ЭНЕРГИЯ:

$$1 \text{ фунт (сила)} \cdot \text{фут} = 0,138255 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

$$1 \text{ кг} \cdot \text{м} = 7,2330 \text{ фунт (сила)} \cdot \text{фут}.$$

## 10) МОЩНОСТЬ:

$$1 \text{ л. с.} = 550 \text{ фут} \cdot \text{фунт (сила)/сек} = \\ = 745,70 \text{ вт}^1) = 1,01387 \text{ франц. л. с.}^2).$$

$$1 \text{ квт} = 737,56 \text{ фунт (сила)} \cdot \text{фут/сек} = \\ = 1,34102 \text{ л. с.} = 1,35962 \text{ франц. л. с.}$$

$$1 \text{ франц. л. с.} = 542,48 \text{ фунт (сила)} \cdot \text{фут/сек} = \\ = 0,98632 \text{ л. с.} = 735,50 \text{ вт}.$$

## 11) ОБЪЕМНЫЙ И МАССОВЫЙ РАСХОДЫ:

Для воздуха, если его относительная плотность есть  $\sigma$  (истинная плотность, деленная на плотность при стандартных условиях, равную  $0,002378 \text{ слаг/фут}^3 = 1,2257 \text{ кг/м}^3$  на уровне моря),

$$1 \text{ фут}^3/\text{сек} = 4,591 \sigma \text{ фунт (масса)/мин.}$$

$$1 \text{ фунт (масса)/мин} = (0,2178/\sigma) \text{ фут}^3/\text{сек}.$$

## 12) ТЕМПЕРАТУРА. Перевод градусов Фаренгейта в градусы Цельсия:

$$^{\circ}\text{C} = \frac{5}{9} \cdot (^{\circ}\text{F} - 32);$$

градусов Цельсия в градусы Фаренгейта:

$$^{\circ}\text{F} = 32 + \frac{9}{5} (^{\circ}\text{C});$$

градусов Цельсия в градусы Кельвина:

$$^{\circ}\text{K} = ^{\circ}\text{C} + 273 \text{ (приблизенно);}$$

градусов Фаренгейта в градусы Рэнкина  
(т. е. в абсолютные градусы Фаренгейта):

$$\text{Рэнкина} = ^{\circ}\text{F} + 459,4 \text{ (приблизенно).}$$

## 13) ЕДИНИЦЫ ТЕПЛА; МЕХАНИЧЕСКИЙ ЭКВИВАЛЕНТ ТЕПЛА:

$$1 \text{ В. т.у. (британская единица тепла)} =$$

$$= 778 \text{ фут} \cdot \text{фунт (сила)} =$$

$$= 107,560 \text{ кг} \cdot \text{м} =$$

$$= 0,2520 \text{ ккал} =$$

$$= 0,0002930 \text{ квтч};$$

<sup>1)</sup> Принято, что значение ускорения силы тяжести на уровне моря равно  $980,665 \text{ см/сек}^2$  ( $32,1740 \text{ фут/сек}^2$ ), согласно международному стандарту.

<sup>2)</sup> Известна также немецкая л. с., или метрическая л. с., которая принимается равной  $75 \text{ кг м/сек}.$

$$1 \text{ квтч} = 3413 \text{ В. т. у.} = 1896 \text{ С. Н. У. } ^1);$$

$$1 \text{ кг/м} = 0,009297 \text{ В. т. у.} = 0,005165 \text{ С. Н. У.};$$

$$1 \text{ ккал} = 3,968 \text{ В. т. у.} = 2,205 \text{ С. Н. У.}$$

$$1 \text{ В. т. у.} = \frac{5}{9} \text{ ккал}; \quad 1 \text{ ккал} = \frac{9}{5} \text{ В. т. у.}$$

## 14) Динамическая и кинематическая вязкости:

$$1 \text{ слаг/фут} \cdot \text{сек} = 478,7 \text{ пуаза } ^2).$$

$$1 \text{ пуаз} = 0,002089 \text{ слаг/фут} \cdot \text{сек.}$$

$$1 \text{ фут}^2/\text{сек} = 929,03 \text{ стокса } ^3).$$

$$1 \text{ стокс} = 0,0010764 \text{ фут}^2/\text{сек.}$$

## 15) Угловые меры:

$$1 \text{ радиан} = 57,29578^\circ; \quad 1^\circ \approx 0,01745329 \text{ радиана.}$$

$$2\pi \text{ радиан} = 360^\circ.$$

## 16) Логарифмы:

$$\ln x = 2,302585 \lg x; \quad \lg x = 0,4342945 \ln x.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. National Physical Laboratory, The Inclusion of Equivalent Metric Values in Scientific Papers, H. M. Stationary Office (1948).
2. См., например Glauert H., The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory, 1st ed., p. 9, 1926. (Глауэрт Г., Теория крыльев и винта, М., 1931.)
3. British Standards Institution, Conversion Factors and Tables, B. S. 350, 1944 (B. S. I.).
4. Kaue G. W. C., Laby T. H., Tables of Physical and Chemical Constants, 10th ed., p. 31, 1948.

<sup>1)</sup> С. Н. У. — начальные буквы слов: Centigrade Heat Units. — Прим. рв д

<sup>2)</sup> 1 пуаз = 1 кг/см · сек.

<sup>3)</sup> 1 стокс = 1 см<sup>2</sup>/сек.

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аббот (Abbott I. A.) 716  
 Айзаксон (Isakson G.) 1499583, 715, 719, 724, 725  
 Аккерет (Ackeret J.) 274, 717  
 Аллен (Allen H. J.) 217, 220, 716  
 Амброзио (Ambrosio A.) 744  
 Андреополис (Andreopolis T. C.) 247, 717  
  
 Бай Ши-и (Pai S. I.) 205, 415, 436, 716, 722  
 Баккингем (Buckingham E.) 604, 726  
 Барби (Barbby J. G.) 350, 523, 720, 722  
 Барнс (Barnes J. L.) 719  
 Баумхауер (Baumhauer A. F.) 13, 714  
 Бекли (Beckley L. E.) 723  
 Бенскотер (Benscoter S. U.) 714  
 Бенум (Benum D.) 726  
 Берг (Bergh H.) 246, 717, 726  
 Берман (Berman J. H.) 329, 719, 721  
 Бескин (Beskin L.) 715  
 Био (Biot M. A.) 326, 379, 451, 453, 454, 455, 563, 719, 722, 725  
 Бисплингхофф (Bisplinghoff R. L.) 49, 563, 583, 714, 715, 717, 719, 724, 725  
 Блум (Bloom M.) 735  
 Борбей (von Borbely S.) 221, 716, 719  
 Брайант (Bryant L. W.) 582, 726  
 Брайсон (Bryson A. E.) 354, 363, 720  
 Братт (Bratt J. B.) 726  
 Браун (Brown R. B.) 449, 722  
 Бриджмен (Bridgmen P. W.) 602, 726  
 Бродбент (Broadbent E. G.) 348, 497, 720, 722  
 Бродинг (Broding W. C.) 724  
 Бромберг (Bromberg B. G.) 725  
 Бруер (Brewer G.) 11, 714  
 Брукс (Brooks W. A.) 765  
 Будянский (Budiansky B.) 220, 415, 424, 425, 427, 534, 716, 722  
 Буш (Bush V.) 724  
 Бэрстоу (Bairstow L.) 11, 714  
 Бюргерс (Burgers J. M.) 207, 221, 716  
 Бянь (Pian T. H. H.) 415, 458, 563, 564, 583, 717, 719, 722, 725  
  
 Вагнер (Wagner H.) 253, 717  
 Васидзу (Washizu K.) 740  
 Вассерман (Wasserman L. S.) 246, 488, 563, 717, 718, 722, 725  
 Вейнер (Weiner J. H.) 740  
 Вейссингер (Weissinger J.) 209, 210, 219, 716  
 Веле (Wehle L. B.) 49, 714  
 Виктори (Victory M.) 542, 724  
 Винер (Wiener N.) 592, 725  
 Винченти (Vincenti W.) 273, 717  
 Ворен (van de Vooren A. I.) 246, 291, 511, 717, 718, 726  
  
 Восс (Voss H. M.) 351, 356, 357, 530, 533, 720, 723, 724  
 Вуд (Wood G. A. Jr.) 726  
 Вулстон (Woolston D. S.) 356, 505, 510, 516, 720, 722, 726  
  
 Гарднер (Gardner M. F.) 719  
 Гаррик (Garrick I. E.) 246, 252, 306, 309, 314, 350, 356, 357, 464, 483, 505, 518, 523, 543, 717, 718, 719, 720, 723  
 Гербер (Gerber E. H.) 351, 720  
 Гиббс (Gibbs J. W.) 733  
 Гильберт (Hilbert D.) 722  
 Глауэрт (Glauert H.) 13, 216, 221, 714, 716  
 Голанд (Goland M.) 345, 470, 474, 476, 506, 511, 583, 719, 722, 725  
 Гордон (Gordon S. A.) 769  
 Госсард (Gossard M. L.) 714  
 Грей (Gray A.) 716  
 Грейданус (Greidanus J. H.) 246, 291, 717, 718, 726  
 Гровер (Grover H. J.) 769  
 Грот (Groth E.) 722  
 Гудмен (Goodman T. R.) 302  
 Гудьер (Goodier J. N.) 714, 722, 726  
  
 Даганджи (Dugundji J.) 721  
 Дайк (van Dyke M. D.) 316, 719  
 Данн (Dunn L. G.) 545  
 Денглер (Dengler M. A.) 345, 506, 717, 719  
 Детвилер (Dätwyler G.) 374, 722  
 Джан (Jahn H. A.) 315, 719  
 Джексон (Jackson L. R.) 769  
 Дженкинс (Jenkins E. S.) 583, 725  
 Джонс (Jones A. L.) 718  
 Джонс (Jones I. M. W.) 582, 725  
 Джонс (Jones R. T.) 214, 219, 351, 366, 552, 716, 719, 724  
 Джонс (Jones W. P.) 247, 316, 345, 716, 717, 719  
 Джонсон (Johnson H. C.) 542, 724, 726  
 Дидерих (Diedrich F. W.) 220, 266, 415, 424, 425, 427, 433, 552, 716, 717, 722  
 Дитц (Dietz F.) 279, 285, 286, 304  
 Долен (Dolan T. J.) 768  
 Донли (Donely P.) 725  
 Донован (Donovan A. F.) 247, 717  
 Драиден (Dryden H. L.) 778  
 Дрейпер (Draper C. S.) 726  
 Дришлер (Drischler J. A.) 304, 305  
 Дункан (Duncan W. J.) 13, 125, 166, 574, 714, 715, 725, 727  
 Дунхофф (van Doenhoff A. E.) 716  
 Дурлинг (Durling B. J.) 719  
 Дьюберг (Duberg J. E.) 778

- Дэвис (Davies F. V.) 735  
 Дюамель (Duhamel J. M. C.) 751, 752
- Егер (Jaeger J. C.) 714, 715, 740
- Зартарян (Zartarian G.) 341, 345, 357, 363, 535, 719, 720, 723, 724, 726, 745  
 Зёнген (Söhngen H.) 191, 216, 247, 255, 716, 717
- Кан (Kahn E. A.) 583, 725  
 Каннингем (Cunningham H. J.) 350, 523, 530, 534, 540, 720, 723, 724  
 Карман (von Kármán T.) 221, 253, 265, 379, 545, 716, 717, 722, 724  
 Карп (Karp S. N.) 718  
 Карпович Е. А. 359, 721  
 Карслоу (Carslaw H. S.) 714, 715, 740  
 Касснер (Kassner R.) 221, 716  
 Кастайл (Castile G. E.) 723  
 Катцов (Katzoff S.) 717  
 Кельвин (Lord Kelvin) 733  
 Кеннеди (Kennedy C. C.) 726  
 Кинан (Keenan J. H.) 715  
 Кинман (Kinnaman E. B.) 726  
 Киннер (Kinner W.) 225, 716  
 Клаф (Clough R. W.) 50, 715  
 Клементсон (Clementson G. C.) 592, 725  
 Кодик (Codik A.) 583, 725  
 Коллар (Collar A. R.) 9, 415, 714, 722, 727  
 Коллатц (Collatz L.) 715  
 Конинг (Koning C.) 13  
 Кордес (Kordes E. E.) 583, 725  
 Кочин Н. Е. 530, 723  
 Красильщикова Е. А. 359, 721  
 Криенес (Krienes K.) 530, 719  
 Кролл (Kroll W. D.) 563, 725  
 Крут (Crout P. B.) 698, 727  
 Кун (Kuhn P.) 714  
 Курант (Courant R.) 722  
 Кшивоблоцкий (Krzywoblocki M. Z.) 724  
 Кюсснер (Küssner H. G.) 13, 246, 250, 253, 582, 714, 716, 717, 719, 725
- Лагерстром (Lagerstrom P. A.) 275, 718  
 Лаитхилл (Lighthill M. J.) 316, 718, 719, 737, 745  
 Ламб (Lamb H.) 172, 177, 178, 363, 715, 721  
 Ланг (Lang A. L.) 49  
 Лангли (Langley S. P.) 11  
 Лангфорс (Langefors B.) 49, 714  
 Ландаль (Landahl M.) 354, 362, 720, 745, 746  
 Ландберг (Lundberg B. O.) 768  
 Лансинг (Lansing W.) 49, 714  
 Ланчестер (Lanchester F. W.) 11, 714  
 Лапин (Lapin E.) 279, 718  
 Леви (Levey G. M.) 726  
 Леви (Levy S.) 90, 155, 563, 564, 714, 715, 725  
 Лайдло (Laidlaw W. R.) 219, 351, 354, 716, 720  
 Ли (Li Y. T.) 359, 721  
 Либан (Lban E.) 720  
 Ли (Lees S.) 726  
 Линь (Lin H.) 415, 458, 583, 722, 725  
 Линь Ця-цзо (Lin C. C.) 362, 721  
 Липман (Liermann H. W.) 592, 595, 717, 725
- Лихтенштейн (Lichtenstein L.) 716  
 Ловитт (Lovitt W. V.) 714, 715, 722  
 Ломакс (Lomax H.) 265, 295, 301, 325, 329, 351, 359, 717, 718, 720  
 Лоренс (Lawrence H. R.) 219, 391, 375, 406, 716, 720, 722  
 Льюис (Lewis R. C.) 659, 726  
 Льюк (Luke Y. L.) 286, 315, 476, 583, 717, 718, 722, 725
- Мазельский (Mazelsky B.) 293, 304, 305, 306, 592, 718, 725  
 Майклстэд (Myklestad N. O.) 144, 470, 715, 722  
 Майлс (Miles J. W.) 354, 355, 359, 360, 363, 449, 543, 720, 721, 724, 745  
 Маккарти (McCarthy J. F., Jr.) 727  
 Мак — Иннес (Mac Innes W. F.) 744  
 Маккей (McKay W.) 726  
 Маклахлан (McLachlan N. W.) 718  
 Мак-Роберт (McRobert T. N.) 716  
 Макферсон (McPherson A. E.) 563, 564, 725  
 Манглер (Mangler K. W.) 215, 716  
 Маргенау (Margenay H.) 727  
 Мартин (Martin H. C.) 50, 449, 715, 722  
 Мартучелли (Martuccelli J. R.) 527  
 Матхаузер (Mathauser E. E.) 765  
 Мербт (Merbt H.) 354, 362, 720  
 Мёрфи (Murphy G. H.) 727  
 Микитов В. С. 717  
 Милн (Milne W. E.) 714, 727  
 Молло-Кристенсен (Mollo-Christensen E. L.) 726, 745, 746  
 Монаган (Monaghan R. J.) 735  
 Мультихопп (Multhopp H.) 701, 716, 727  
 Мунк (Munk M. M.) 200, 363, 366, 716  
 Мур (Moore F. K.) 737  
 Мэтьюз (Matthews G. B.) 716
- Найлс (Niles A. S.) 714, 721  
 Нейлсон (Neilson D. O.) 341, 345, 363, 535, 719, 723, 726  
 Неймарк (Neumark S.) 255, 717  
 Нельсон (Nelson H. C.) 329, 359, 719, 721, 722  
 Нейрингер (Neuringer J.) 721  
 Ньюэлл (Newell J. S.) 714, 721
- О'Брайен (O'Brien T. F.) 563, 583, 715, 724, 725
- Пагсли (Pugsley A. G.) 13, 374, 375, 721  
 Пайнс (Pines S.) 359, 375, 721, 722  
 Паккетт (Puckett A. E.) 276, 717  
 Панку (Pancu C. D. P.) 583, 725, 726  
 Паркс (Parkes E. W.) 772, 773  
 Патнем (Putnam A. A.) 583, 725  
 Пейн (Payne L. E.) 725  
 Пенджелли (Pengelly C. D.) 726  
 Пеппинг (Pepping R. A.) 726  
 Перлис (Perlis S.) 727  
 Пири (Peery D. J.) 714  
 Пирс (Pierce H. B.) 582, 725  
 Пирсон (Pearson H. A.) 722  
 Поссио (Possio C.) 279, 718  
 Прандтль (Prandtl L.) 176, 219, 229  
 Пресс (Press H.) 592, 725  
 Пригге (Prigge J. S. Jr.) 726, 727

- Рабинович (Rabinowitz S.) 286, 718, 720  
 Рамберг (Ramberg W.) 563, 725  
 Раньян (Runyan H. L.) 356, 510, 534, 535, 536, 720, 722, 723, 724, 726  
 Расселл (Russell B.) 744  
 Раушер (Rauscher M.) 134, 542, 632, 715, 723, 725  
 Рейни (Rainey R. A.) 359, 721  
 Рейнольдс (Reynolds O.) 735  
 Рейсснер (Reissner E.) 50, 123, 226, 279, 287, 290, 333, 340, 341, 345, 355, 362, 375, 385, 511, 715, 716, 718, 719, 720, 722  
 Рейсснер (Reissner H.) 13, 375  
 Рисли (Wrisley D. L.) 659, 726  
 Розенбаум (Rosenbaum R.) 488, 722  
 Розенберг (Rosenberg R. M.) 715  
 Роксби Кокс (Roxbee Cox H.) 13, 374, 375, 714  
 Ротт (Rott N.) 328, 359, 719, 721  
 Рубезин (Rubesin M. W.) 737, 742  
 Рубинов С. И. 314, 357, 516, 518, 543, 719, 720, 722
- Саммерс (Summers R. A.) 726  
 Сейферт (Seifert G.) 448, 722  
 Сидделл (Siddall J. N.) 715  
 Сименс (Seamans R. C.) 725  
 Сирс (Sears W. R.) 233, 253, 255, 256, 375, 406, 415, 436, 582, 716, 717, 722, 725  
 Систо (Sisto F.) 542, 724  
 Сканлан (Scanlan R. H.) 488, 722  
 Скратон (Scruton C.) 545, 724, 726  
 Слудер (Sluder L.) 351, 718, 720, 721  
 Смиг (Smig B.) 246, 461, 488, 717, 718, 722, 723  
 Снеддон (Sneddon I. N.) 248, 717  
 Сокольников И. С. 714  
 Спаркс (Sparks B. O.) 582, 725  
 Стайверс (Stivers L. S.) 716  
 Стивенс (Stevens J. E.) 340, 719, 723  
 Стоуелл (Stowell E. Z.) 563, 724  
 Стретт /Рэлен/ (Strutt J. W.) 667, 726  
 Страттон (Stratton J. A.) 207, 716  
 Стюарт (Stewart H. J.) 359, 720  
 Стюартсон (Stewartson K.) 319, 360, 719, 721  
 Сюи (Hsu P. T.) 357, 720, 724
- Тапселл (Tapsell H. J.) 769  
 Темпл (Temple G.) 315, 360, 719, 720  
 Теодорсен (Theodorsen T.) 13, 201, 221, 246, 369, 464, 483, 505, 714, 716, 717, 721, 723  
 Тёрнер (Turner M. J.) 50, 150, 286, 345, 715, 718, 719  
 Тимман (Timman R.) 279, 291, 718  
 Тимошенко С. П. 714, 322, 726  
 Тома (Thomas D.) 575, 724  
 Тони (Toney H. S.) 342, 720  
 Топп (Topp L. J.) 50, 715
- Уайт (White R. J.) 726  
 Уейл (Weil H.) 718  
 Уилленд (Wayland H.) 147, 715  
 Уильямс (Williams D.) 125, 556, 563, 582, 715, 722, 724, 725  
 Уильямс (Williams F. L.) 743, 753  
 Уильямс (Williams J.) 511
- Уиттекер (Whittaker E. T.) 715  
 Уолш (Walsh J.) 357, 362, 720  
 Уоткинс (Watkins C. E.) 356, 359, 511, 534, 535, 720, 721, 722, 723, 724
- Фалькович С. В. 359, 721  
 Фаркуарсон (Farquharson F. B.) 545, 724  
 Фейдж (Fage A.) 11  
 Ферри (Ferri A.) 167  
 Феттис (Fettis H. E.) 279, 286, 397, 718, 720  
 Филлипс (Phillips H. B.) 168, 716  
 Фингадо (Fingado H.) 221  
 Флакс (Flax A. H.) 361, 375, 411, 445, 446, 519, 719, 722, 725  
 Фломенхофт (Flomenhoft H. I.) 563, 561, 583, 715, 717, 719, 725  
 Фоккер (Fokker A. H. G.) 13, 714  
 Фосс (Foss K. A.) 433, 722  
 Фотьео (Fotieo G.) 726  
 Фрайс-де-Вебеке (Fraeys de Veubeke B.) 247, 717  
 Франкль Ф. И. 359, 721  
 Фрезер (Frazer R. A.) 13, 545, 714, 724, 727  
 Фрелих (Froelich J. E.) 359, 720  
 Фуллер (Fuller F. B.) 718, 721  
 Фурье (Fourier J.) 740  
 Фын (Fung Y. C.) 50, 59, 454, 544, 595, 717, 722, 724, 726
- Хаккель (Huckel V.) 505, 516, 719  
 Харпер (Harper C. W.) 213, 214, 264, 716, 717  
 Халфман (Halfman R. L.) 246, 542, 717, 724, 726, 727  
 Хауболт (Houbolt J. C.) 563, 578, 579, 583, 724, 725  
 Хейли (Haley S. M.) 542, 724  
 Хансон (Hanson J.) 582, 725  
 Хаскинд М. Д. 279, 291, 359, 718, 721  
 Хассиг (Hassig H. J.) 351, 720, 723  
 Хеджпет (Hedgepeth J. M.) 544  
 Хеллер (Heller A.) 745  
 Хельденфелс (Heldenfels R. R.) 765  
 Хилл (Hill G. T. R.) 714  
 Хильдебранд (Hildebrand F. B.) 345, 375, 385, 715, 717, 719, 722, 725  
 Хислет (Heaslet M. A.) 265, 359, 361, 717, 718, 721  
 Холтби (Holtby K. F.) 449, 722  
 Хольцер (Holzer H.) 144, 715  
 Хофф (Hoff N. J.) 755, 757
- Цам (Zahn A. F.) 367, 721  
 Цянь Сюэ-сэнь (Tsyen H. S.) 27, 2, 7-1
- Чанлек (Chen H. A.) 247, 717  
 Черчилль (Churchill R. V.) 27, 717  
 Чжан (Chang C. C.) 327, 359, 717, 721  
 Чикала (Cicala P.) 21, 333, 716, 719  
 Чэпмен (Chapman D. R.) 737, 742
- Шаде (Schade T.) 530, 719  
 Шварц (Schwartz E. B.) 63, 724  
 Шварц (Schwarz L.) 239, 241, 246, 314, 716, 717, 718  
 Шварц (Schwartz M. D.) 726

- Шень (Shen S. F.) 344, 543, 719, 724  
Шерман (Sherman S.) 279, 718  
Шмит (Schmit L. A.) 743, 753  
Шниттгер (Schnittger J. R.) 542, 724  
Шпигель (van Spiegel E.) 718  
Шпильберг (Spielberg I. N.) 246, 347, 717, 720  
Шпрейтер (Spreiter J. R.) 265, 329, 361, 717, 721  
Штейн (Stein M.) 50, 715  
Штейман (Steinman D. B.) 545, 724  
Штудер (Studer H. L.) 542, 724  
Шу (Shu S. S.) 718  
Шюрх (Schuerch H. V.) 50, 62, 715
- Эванс (Evans J. Jr.) 564, 725
- Эввард (Evvard J. C.) 279, 717  
Эдвардс (Edwards R. H.) 742  
Эйкен (Aiken W. S. Jr.) 722  
Эккерт (Eckert E. R. G.) 735  
Элленбергер (Ellenberger G.) 221, 716  
Эмде (Emde F.) 286, 718  
Эммонс (Emmons H. W.) 740  
Эшли (Ashley H.) 341, 345, 363, 365, 719, 723, 726, 745, 746
- Юнг (de Joung J.) 213, 214, 264, 716, 717, 722
- Якоб (Jakob M.) 740, 743  
Янке (Jahnke E.) 286, 718



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автокорреляция 709  
 Аэроупругая неустойчивость 760  
 Аэроупругость  
   история 11  
   определения 9
- Балки**  
   дифференциальные уравнения движения 63  
   интегральные уравнения движения 80  
   тонкие  
     вращающиеся  
       динамическое равновесие при изгибе 86  
       нормальные функции и частоты 164  
     динамическое равновесие при кручении 89  
     дифференциальное уравнение вынужденных колебаний 77  
     дифференциальное уравнение собственных колебаний 64  
     интегральное уравнение вынужденных колебаний 85  
     интегральное уравнение собственных колебаний 82  
     стреловидные  
       ограничения подвижности у корня 47, 48  
       эффективное условие у корня 47, 48  
       упрощающие допущения 40
- Баротропное течение 170  
 Баффтинг 541  
   воздействие на конструкцию 14  
   определение 10
- Бернулли — Эйлера формула для деформаций при изгибе 24  
 Био и Савара закон 182  
 Бредта формула 44  
 Бромвича интегральная формула 576, 710
- Вагнера функция 249  
 Вейссингера L-метод 209  
 Весовые числа 699  
 Вихревое течение 180  
 Возможная работа 36  
 Возможное перемещение 35  
   приложение к динамическим системам 101
- Галеркина метод 140  
   для вращающейся балки 164  
 Гамильтона принцип 104  
 Гильберта — Шмидта теория интегральных уравнений 81
- Голономные системы 104  
 Грина функция 27
- Давления функция, см. Потенциал ускорений  
 Даламбера принцип 63  
 Деформации  
   крыльев самолета 30  
   изгиб и кручение 40  
   кручение 42  
   малого удлинения 48  
   сложной конструкции 57  
   сплошных, переменной толщины 57  
   тонких  
     нестреловидных 39  
     стреловидных 47  
   функции и коэффициенты влияния 42  
   при распределенных нагрузках 27  
   теорема Кастильяно 38  
   энергетические методы 34
- Дивергенция 13  
   влияние на конструкцию 16  
   в направлении хорды 453  
   крыла реактивного транспортного самолета 382  
   начальная стадия 11  
   однородного крыла с передней стреловидностью 431  
   определение 10  
   при кручении 370  
   прямых крыльев 377  
   решения, основанные на теории несущей полосы 377  
   скорость, сравнение со скоростями флаттера и реверса 19  
   стреловидного крыла 422  
   энергетические методы решения 387  
   эффект конечности размаха 381
- Динамическая реакция  
   обусловленная дискретным порывом 582  
   обусловленная непрерывной турбулентностью 592  
   определение 10
- Динамическая устойчивость самолета  
   модели для исследования 618  
   экспериментальные исследования на моделях 679  
   на полноразмерном самолете 673
- Динамические нагрузки, влияние на конструкцию 14  
 Динамическое равновесие, см. Балки; Крылья; Самолеты  
 Диполь 198  
 Дирака дельта-функция 79

- Дифференциальный изгиб многолонжеронных моделей 630  
 Дополнительная энергия 123  
 Дюамеля интеграл 552, 703
- Жесткость на кручение** 43, 89  
 критерий 11, 14  
 Жуковского конформное преобразование 222
- Задаваемые функции** 113  
 выбор 124  
 метод совмещения 132  
 Звука скорость 171  
 Зёнгена формула обращения 191
- Изгибная жесткость** 23, 68  
 Инерционный вращающий момент 63, 64  
 История аэроупругости 11  
 Источник точечный 186  
 Итерация 138  
 матриц 147
- Кастильяно теорема** 38, 40, 42, 49  
 Квазиустановившаяся подъемная сила и момент на колеблющемся профиле 245  
 Кельвина теорема 168  
 Кельвина уравнение (уравнение Бернулли для случая неустановившегося течения) 170  
**Колебания** 170  
 испытания 650  
 вибраторы и датчики 661  
 влияние изменений в конструкции или в граничных условиях 667  
 многоточечное возбуждение 656  
 нормальные формы 657  
 одноточечное возбуждение 651  
 опоры конструкции 664
- Коллара треугольник сил 9, 10  
 Конвективный перенос тепла из пограничного слоя 735  
 Конечные разности 578  
 Конструктивные модели для определения коэффициентов влияния 50  
 Коэффициент теплопередачи 737  
**Коэффициенты влияния** 22, 26  
 аэродинамические 209  
 в двух измерениях 29  
 в одном измерении 28  
 двухлонжеронного крыла с трубами, работающими на кручение 55  
 жесткости 23  
 крыльев  
 малого удлинения 48  
 реактивного транспортного самолета 44  
 сложной конструкции  
 расчет по принципу минимальной энергии деформации 50  
 расчет по принципу минимальной потенциальной энергии 55  
 стреловидных тонких 47  
 определение с помощью конструктивных моделей 50  
 свободного самолета 99  
 свойства 29  
 симметрия 25
- энергия деформации, выражение через коэффициенты влияния 26  
**Кручение, жесткость на кручение** 42, 64  
**Крылья**  
 аэроупругое поведение в сверхзвуковом потоке 451  
 деформации, см. Деформации закрепленные, динамическое равновесие 93  
 колебания  
 в дозвуковом потоке 279  
 в несжимаемом потоке 221  
 в сверхзвуковом потоке 407  
 теорема об обращении течения 361  
 малого удлинения 214  
 аэроупругие свойства 451  
 деформации и коэффициенты влияния 48  
 деформации типа деформаций пластины 49  
 изгиб дужки 49  
 неустановившееся движение 350  
 ограничения подвижности корня крыла 49  
 уравнения равновесия 453  
 модели многолонжеронные, дифференциальный изгиб 629  
 однородные свободные, изгибно-крутильный флаттер 469  
 произвольной формы  
 малые колебания 247  
 в дозвуковом потоке 291  
 в сверхзвуковом потоке 321  
**прямые**  
 антисимметричное распределение подъемной силы 396  
 аэроупругие свойства 374  
 дивергенция при кручении 375  
 решение задач в обобщенных координатах 410  
 симметричное распределение подъемной силы 388  
 уравнения равновесия 375  
 распределение массы, влияние на флаттер 14  
 распределение нагрузки  
 влияние на конструкцию 16  
 постановка задачи 10  
**стреловидные**  
 аэроупругие свойства 414  
 дивергенция 422  
 распределение подъемной силы 433  
 уравнения равновесия 416  
 функции и коэффициенты влияния 47  
 эффективность элеронов 441  
 установившееся движение 195  
 в дозвуковом потоке 260, 354  
 в несжимаемом потоке 333  
 в сверхзвуковом потоке 266, 357  
 крыльев очень малого удлинения 214  
 применение L-метода Вейссингера 209  
 теория Мультхоппа 207  
 теория несущей линии 202  
 форма в плане, влияние на флаттер 14
- Кутта гипотеза** 180, 191  
 для дозвукового потока 262  
 для несжимаемого потока и крыльев

- очень малого удлинения 354  
 для сверхзвукового потока 270  
 Кюсснера функция порыва 252
- Лагранжа интерполяционная формула 700  
 Лагранжа уравнение 101  
 для вынужденного движения свободного самолета 111  
 для непрерывной системы 109  
 для системы с сосредоточенными параметрами 107
- Лапласа преобразование 571, 701  
 Линейная система, определение 702
- Малое возмущение 172, 173
- Матрицы  
 алгебра 696  
 весовых чисел, для численного интегрирования 23, 701  
 определения 695
- Маха конус 267
- Метод прямой жесткости 49, 50  
 Метод сверхзвуковой аналогии 298, 330  
 Метод сосредоточенных параметров 113  
 использование при приближенных решениях 116
- Минимальная потенциальная энергия, принцип 35, 50
- Модели аэроупругие, моделирование внешней формы 639  
 моделирование конструкции 625  
 моделирование распределения массы 643  
 сложные составные 50  
 упругие свойства  
 функции двух переменных 635  
 функции одной переменной 626
- Моделирование  
 законы подобия 604  
 для динамически устойчивой модели 618  
 для колеблющихся моделей 604  
 для моделей, предназначенных для исследования флаттера 612  
 для систем, находящихся под действием установившихся аэродинамических нагрузок 609  
 масштабные множители 604
- Мультхоппа квадратичная формула 701
- Мунка аэродинамическая теория 214  
 интегральная формула 198
- Напряжения  
 методов перемещений 554  
 метод ускорений 556  
 переходные, в процессе посадки 563
- Несущая линия, теория 202
- Неустановившийся поток, см. Поток неустановившийся; см. также Крылья, Функции проводимости
- Нормальные координаты 77, 110
- Нормированные формы 66
- Обобщенная координата 22  
 Обобщенная масса 78, 94  
 Обобщенная сила 22, 78, 94  
 Обращенный поток, теорема 361
- Оперение, флаттер, первые примеры 13
- Органы управления  
 реверс 17  
 эффективность, определение 10; см. также Элероны, эффективность
- Ортогональность 77, 82, 100  
 биортогональные функции 431  
 собственные функции 65  
 собственные функции присоединенных уравнений 430  
 условие, общая форма 430
- Оси координат, соотношение между осями, связанными с телом, и осями аэродинамической трубы 294
- Переходная проводимость, см. также Крылья, Поток неустановившийся  
 в дозвуковом потоке 292  
 в несжимаемом потоке 247  
 в сверхзвуковом потоке 321  
 для эллиптического крыла 344  
 начальные и асимптотические значения 295  
 при числе Маха, равном единице 327
- Плоская пластинка в установившемся потоке 273
- Подъемная сила  
 распределение на прямых крыльях  
 антисимметричное 388  
 реактивного транспортного самолета 394, 409  
 симметричное 388  
 распределение на стреловидных крыльях  
 антисимметричное 441  
 симметричное 433
- Поршневая теория 317, 338
- Порыв ветра  
 нагрузки от порыва, влияние на конструкцию 15  
 проникновение в порыв 247  
 в дозвуковом потоке 308  
 в сверхзвуковом потоке 327  
 резко ограниченный 252  
 реакция на порыв 582  
 измерение 678  
 коэффициент облегчения 586  
 реактивного транспортного самолета 589
- Поссио интегральное уравнение 281, 285
- Потенциал скоростей 168  
 возмущения 173
- Потенциал ускорений 168, 175  
 колеблющегося дозвукового потока 280
- Поток  
 дозвуковой 266  
 встреча с порывом ветра 307, 308  
 колебания профилей 279  
 критическое число Маха 265  
 произвольные малые движения профилей 291  
 несжимаемый  
 вихревой 180  
 колебания крыльев конечного размаха 333  
 колебания стреловидных крыльев  
 произвольное движение тонких профилей 247  
 неустановившийся

- крылья очень малого удлинения 350  
 несущие тела 362  
 сжимаемый, линейаризированные  
 дифференциальные уравнения 174  
 сверхзвуковой 266  
 волновое сопротивление 274  
 встреча с порывом ветра 326  
 колебания профилей 309  
 переходные движения профилей 321  
 Правило трапеций 699  
 Прандтля — Глауэрта  
 поправка на сжимаемость 214, 264, 265  
 преобразование 266  
 Предельный коэффициент перегрузки 731  
 Приближенные методы в динамических  
 задачах 112  
 Приведенная частота 239  
 Принцип наложения 22  
 Присоединенная масса 177, 231  
 Проводимость; см. также Переходная про-  
 водимость  
 механическая 574, 713  
 II-теорема 604
- Размерностей анализ, теория моделиро-  
 вания 601  
 Райт братья 11  
 Реактивный транспортный самолет, при-  
 меры расчета 44, 157, 161, 162, 382, 394,  
 409, 487, 502, 589  
 Реакция  
 на гармонический входной сигнал 705  
 на случайный импульс 709  
 Реверса скорость, сравнение со скоро-  
 стями флаттера и дивергенции 13  
 Реверс, см. Элероны, реверс; Органы управ-  
 ления, реверс  
 Рэлея — Ритца метод 50, 113  
 видоизмененная форма 120, 123  
 для определения собственных форм и  
 частот 120  
 получение приближенных решений  
 113  
 применение 35
- Самолет  
 конструкция, влияние явлений аэро-  
 упругости 13  
 свободный  
 вынужденное движение 101  
 динамическое равновесие 96  
 интегральное уравнение свободных  
 колебаний 97  
 устойчивость, влияние аэроупругости  
 10  
 Самолет Фоккер Д-8, разрушение крыла 12  
 Сдвига центр 44  
 Сен-Венана теория кручения 40, 89  
 Сжимаемость потока воздуха, поправки  
 265  
 Симпсона правило 699  
 Системы с сосредоточенными массами 131;  
 см. также Системы с сосредоточенными  
 параметрами  
 Системы с сосредоточенными параметра-  
 ми 50  
 Скорость дивергенции, сравнение со ско-  
 ростями флаттера и реверса 19
- Случайный входной сигнал, реакция 709  
 Собственные значения 65  
 комплексные 460  
 Собственные формы и частоты колеба-  
 ний 65  
 вращающихся стержней 164  
 исследование с помощью дифферен-  
 циального уравнения 142  
 исследование с помощью интеграль-  
 ного уравнения 131  
 исследование с помощью итерацион-  
 ных методов 138  
 исследование с помощью энергетиче-  
 ских методов 119  
 крыльев реактивного транспортного  
 самолета 157  
 сложной самолетной конструкции 154  
 сужающейся свободонесущей балки  
 126, 135, 151  
 характеристическое уравнение 121  
 Совмещения метод 117, 124  
 Сопряженность задач аэроупругости 422,  
 428  
 биортогональные собственные функ-  
 ции 446  
 влияние на метод Рэлея — Ритца 444  
 Спектральная плотность энергии 593, 711  
 Срывной флаттер 14, 541  
 Статистический анализ 592 709  
 Статический момент 95  
 Стационарные случайные функции 593  
 Стационарный случайный процесс 709  
 Стефана — Больцмана  
 закон 738  
 постоянная 738  
 Стодолы и Вианелло метод 138, 143  
 Стокса теорема 169
- Теплопередача внутри конструкции 740  
 с помощью излучения 738  
 Температура, распределение внутри кон-  
 струкции 739  
 Тонкие крылья, см. Крылья
- Удлинение крыла, влияние на флаттер 14  
 Удлинение фюзеляжа 730  
 Упругая ось 44, 95  
 Упругие свойства конструкций 21  
 Уравнения движения, см. Балки, Крылья,  
 Самолеты  
 Устойчивость статическая продольная  
 упругого стреловидного крыла 435, 436  
 Утонение крыла 730
- Флаттер 459  
 висячих мостов 645  
 влияние на конструкцию самолета 13  
 влияние сжимаемости 515  
 выбор функций деформаций при флат-  
 тере 506  
 детерминант, решение 489  
 законы моделирования 609  
 несжимаемый поток 613  
 свободной модели 615  
 сжимаемый поток 615  
 изгибно-крутильный элерона транс-  
 портного реактивного самолета 502  
 «изображающего» сечения 464

- крыльев малого удлинения 530  
 метод вариации плотности 519, 520  
 метод заданных форм 478  
 однородного круглого крыла 531  
 определение 10  
 панелей. сверхзвуковой  
 примеры первых случаев флаттера  
 12, 13  
 при отрыве потока 13, 341  
 рулевой поверхности 497, 536  
 скорость  
 влияние конечности размаха 512  
 влияние сжимаемости 520  
 крыла реактивного транспортного  
 самолета 487  
 сравнение со скоростью диверген-  
 ции и реверса 19  
 с одной степенью свободы 519, 533, 539  
 стреловидных крыльев 522  
 изгибный 539  
 с учетом влияния степеней свободы  
 твердого тела на деформацию фю-  
 зеляжа 491  
 с учетом конечности размаха 511  
 экспериментальные исследования  
 на моделях 684  
 на полноразмерном самолете 673  
 Формы колебаний 65  
 нормированные 66, 73, 103  
 нормальные координаты 84  
 твердого тела 71  
 Функции веса 65, 66  
 Функции проводимости 708  
 Функции узловые 132  
 Фурье интеграл 576, 706
- Характерное сечение, определение 367  
 Характеристическое уравнение. реше-  
 ние 146  
 Хольцера — Майклстэда метод 144
- Циркуляция 169, 176
- Частоты и формы колебаний, измерение  
 650  
 Чикала функция 337  
 Численное интегрирование с помощью  
 матрицы весовых чисел 32
- Эварда теорема 278
- Элероны  
 реактивного транспортного самолета  
 409  
 реверс 17, 373  
 на прямом крыле 406  
 на стреловидном крыле 441  
 «тряска» 621  
 эффективность 373, 399, 406; см. также  
 Подъемная сила, распределение  
 антисимметричное
- Эллипсоиды вращения, коэффициенты  
 инерции 179
- Энергетические методы  
 возможная работа, приложение к ди-  
 намическим системам 114  
 выбор задаваемых форм 124  
 для нормальных функций и частот 119  
 коэффициенты влияния  
 вычисление по принципу минималь-  
 ной потенциальной энергии 55  
 вычисление по принципу минималь-  
 ной энергии деформации 50  
 при вычислении деформации 34, 35  
 принцип минимальной потенциальной  
 энергии 35  
 Рэлея — Ритца 34, 57
- Энергия деформации, выражение через  
 коэффициенты влияния 26

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Из предисловия авторов . . . . .	6
<b>Глава 1. Введение в аэроупругость . . . . .</b>	<b>9</b>
1- 1. Определения . . . . .	9
1- 2. Краткий исторический обзор . . . . .	11
1- 3. Влияние явлений аэроупругости на конструкцию . . . . .	13
1- 4. Сравнение критических скоростей крыла . . . . .	19
<b>Глава 2. Деформации конструкций самолета под действием статических нагрузок . . . . .</b>	<b>20</b>
2- 1. Введение . . . . .	20
2- 2. Упругие свойства конструкций . . . . .	21
2- 3. Деформация под действием нескольких сил. Коэффициенты влияния . . . . .	22
2- 4. Свойства коэффициентов влияния . . . . .	25
2- 5. Выражение энергии деформации через коэффициенты влияния . . . . .	26
2- 6. Деформации под действием распределенных сил. Функции влияния . . . . .	27
2- 7. Свойства функций влияния . . . . .	29
2- 8. Упрощенная схема упругого самолета . . . . .	30
2- 9. Деформации крыльев самолета . . . . .	30
2-10. Интегрирование при помощи весовых матриц . . . . .	32
2-11. Энергетические методы вычисления прогибов . . . . .	34
2-12. Деформации тонких нестреловидных крыльев . . . . .	39
2-13. Функции и коэффициенты влияния тонких стреловидных крыльев . . . . .	47
2-14. Деформации и коэффициенты влияния крыльев малого удлинения . . . . .	48
2-15. Определение коэффициентов влияния сложных составных крыльев при помощи принципа минимума энергии деформации . . . . .	50
2-16. Определение коэффициентов влияния сложных составных крыльев при помощи принципа минимума потенциальной энергии . . . . .	55
2-17. Вычисление деформаций сплошных крыльев переменной толщины и сложных составных крыльев методом Рэлея—Ритца . . . . .	57
<b>Глава 3. Деформации конструкций самолета под действием динамических нагрузок . . . . .</b>	<b>63</b>
3- 1. Введение . . . . .	63
3- 2. Дифференциальные уравнения движения балки . . . . .	63
3- 3. Интегральное уравнение колебаний тонкой балки . . . . .	80
3- 4. Динамическое равновесие вращающихся тонких балок при изгибе . . . . .	86
3- 5. Динамическое равновесие тонкой балки при кручении . . . . .	89
3- 6. Динамическое равновесие закрепленного крыла самолета . . . . .	93
3- 7. Динамическое равновесие незакрепленного упругого самолета . . . . .	96
3- 8. Энергетические методы . . . . .	104
3- 9. Приближенные методы решения практических задач . . . . .	112
3-10. Приближенное решение методом Рэлея—Ритца . . . . .	113
3-11. Приближенное решение по методу сосредоточенных параметров . . . . .	116
<b>Глава 4. Приближенные методы вычисления нормальных функций и частот собственных колебаний . . . . .</b>	<b>119</b>
4- 1. Введение . . . . .	119
4- 2. Вычисление нормальных функций и частот собственных колебаний при помощи энергетических методов . . . . .	119
4- 3. Определение нормальных функций и частот собственных колебаний из интегрального уравнения . . . . .	131
4- 4. Получение нормальных функций и частот собственных колебаний из дифференциальных уравнений . . . . .	142

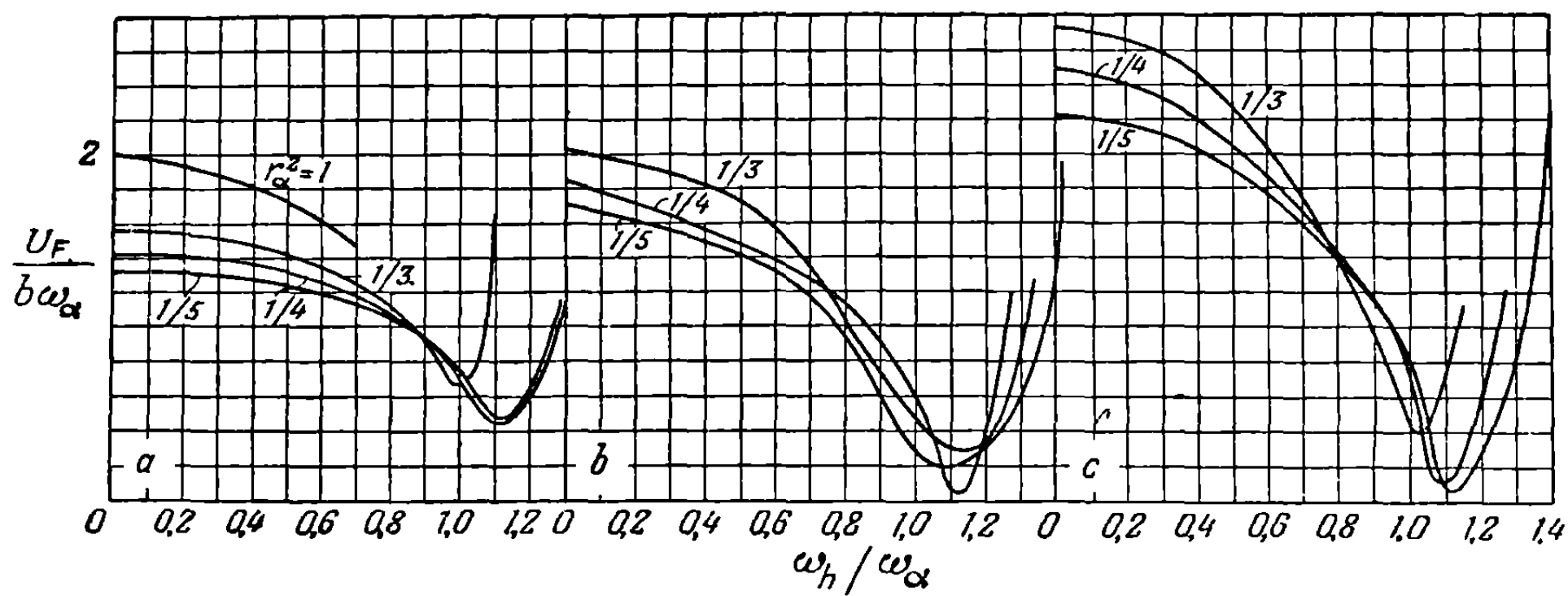


4- 5. Решение характеристических уравнений . . . . .	146
4- 6. Нормальные функции и частоты колебаний сложных конструкций самолета . . . . .	154
4- 7. Нормальные функции и частоты колебаний вращающихся балок . . . . .	164
<b>Глава 5. Сведения из аэродинамики: двумерное и трехмерное течения несжимаемой жидкости . . . . .</b>	<b>167</b>
5- 1. Основные представления: понятие о малых возмущениях . . . . .	167
5- 2. Свойства течения несжимаемой жидкости с циркуляцией и без нее . . . . .	176
5- 3. Вихревое течение . . . . .	180
5- 4. Установившееся движение тонких профилей . . . . .	183
5- 5. Крылья конечного размаха в установившемся движении . . . . .	195
5- 6. Колебания тонких профилей в потоке несжимаемой жидкости . . . . .	221
5- 7. Общий случай движения тонких профилей в потоке несжимаемой жидкости; задача о порыве . . . . .	247
<b>Глава 6. Сведения из аэродинамики: течение сжимаемой жидкости . . . . .</b>	<b>258</b>
6- 1. Введение . . . . .	258
6- 2. Установившееся обтекание крыльев и профилей дозвуковым потоком; преобразование Прандтля — Глауэрта . . . . .	260
6- 3. Обтекание профилей и крыльев установившимся сверхзвуковым потоком . . . . .	266
6- 4. Колебания профилей в дозвуковом потоке . . . . .	279
6- 5. Произвольные малые движения профиля в дозвуковом потоке . . . . .	291
6- 6. Колебания профилей при сверхзвуковых скоростях . . . . .	309
6- 7. Переходные движения профиля в сверхзвуковом потоке . . . . .	321
6- 8. Неустановившееся движение профилей при числе Маха, равном единице . . . . .	327
<b>Глава 7. Крылья и тела в трехмерном неустановившемся потоке . . . . .</b>	<b>332</b>
7- 1. Введение . . . . .	332
7- 2. Колебания крыльев конечного размаха в потоке несжимаемой жидкости . . . . .	333
7- 3. Влияние стреловидности . . . . .	345
7- 4. Неустановившееся движение крыльев очень малого удлинения . . . . .	350
7- 5. Влияние сжимаемости на колебания крыльев конечного размаха . . . . .	354
7- 6. Неустановившееся движение тел с нулевой подъемной силой . . . . .	362
<b>Глава 8. Статическая аэроупругость . . . . .</b>	<b>369</b>
8- 1. Введение . . . . .	369
8- 2. Кручение простого двумерного крыла с элероном . . . . .	369
8- 3. Тонкие прямые крылья . . . . .	374
8- 4. Стреловидные крылья . . . . .	414
8- 5. Несущие поверхности малого удлинения произвольной формы в плане и произвольной жесткости . . . . .	450
<b>Глава 9. Флаттер . . . . .</b>	<b>459</b>
9- 1. Введение. Природа флаттера . . . . .	459
9- 2. Флаттер простой системы с двумя степенями свободы . . . . .	464
9- 3. Точное решение задачи об изгибно-крутильном флаттере однородного свободонесущего крыла . . . . .	469
9- 4. Формы аэроупругих колебаний . . . . .	475
9- 5. Анализ флаттера с помощью методов заданных функций деформаций . . . . .	478
9- 6. Учет влияния конечности размаха в расчетах флаттера . . . . .	511
9- 7. Влияние сжимаемости на флаттер . . . . .	515
9- 8. Флаттер стреловидных крыльев . . . . .	522
9- 9. Крылья малого удлинения . . . . .	530
9-10. Флаттер с одной степенью свободы . . . . .	533
9-11. Некоторые другие интересные типы флаттера . . . . .	541
<b>Глава 10. Динамическая реакция . . . . .</b>	<b>547</b>
10-1. Введение . . . . .	547
10-2. Уравнения возмущенного движения упругого самолета . . . . .	548
10-3. Системы с заданной зависимостью внешних сил от времени . . . . .	550
10-4. Переходные напряжения в процессе посадки . . . . .	563
10-5. Системы с внешними силами, зависящими от движения . . . . .	570
10-6. Динамическая реакция на одиночный порыв . . . . .	582
10-7. Динамическая реакция на непрерывную атмосферную турбулентность . . . . .	592

<b>Глава 11. Теория моделирования явлений аэроупругости</b> . . . . .	601
11-1. Введение . . . . .	601
11-2. Понятие о размерности . . . . .	601
11-3. Уравнения движения . . . . .	603
11-4. Законы подобия для колеблющейся модели . . . . .	604
11-5. Законы подобия для систем, нагруженных установившимися воздушными нагрузками . . . . .	609
11-6. Законы подобия для моделей, предназначенных для исследования флаттера . . . . .	612
11-7. Исследование флаттера на свободной модели . . . . .	615
11-8. Модели для изучения динамической устойчивости . . . . .	618
<b>Глава 12. Проектирование и конструкция моделей</b> . . . . .	620
12-1. Введение . . . . .	620
12-2. Моделирование конструкции . . . . .	625
12-3. Упругие свойства как функции одной переменной . . . . .	626
12-4. Упругие свойства конструкции являются функциями двух переменных . . . . .	635
12-5. Моделирование формы . . . . .	639
12-6. Моделирование инерционных свойств . . . . .	643
<b>Глава 13. Техника эксперимента</b> . . . . .	646
13-1. Введение . . . . .	646
13-2. Измерение жесткости конструкции . . . . .	646
13-3. Измерение собственных частот и форм колебаний . . . . .	646
13-4. Аэроупругий эксперимент при установившемся состоянии . . . . .	646
13-5. Динамические аэроупругие испытания в натуре . . . . .	646
13-6. Динамические аэроупругие испытания на моделях . . . . .	646
<b>Приложение А. Матрицы</b> . . . . .	646
А-1. Введение . . . . .	646
А-2. Определения . . . . .	646
А-3. Алгебра матриц . . . . .	646
<b>Приложение В. Интегрирование с помощью весовых чисел</b> . . . . .	699
В-1. Введение . . . . .	699
В-2. Правило трапеций . . . . .	699
В-3. Правило Симпсона . . . . .	699
В-4. Интерполяционная формула Лагранжа . . . . .	700
В-5. Интегральная формула Мультихуппа . . . . .	701
В-6. Матрицы весовых чисел . . . . .	701
<b>Приложение С. Линейные системы</b> . . . . .	702
С-1. Определение . . . . .	702
С-2. Интеграл Дюамеля . . . . .	703
С-3. Реакция на гармонический входной сигнал . . . . .	705
С-4. Интеграл Фурье . . . . .	706
С-5. Реакция на случайную входную величину . . . . .	709
<b>Литература</b> . . . . .	714
<b>Некоторые вопросы конструкции и аэроупругости при полете с большой скоростью. Бисплингхофф Р. Л.</b> . . . . .	728
<b>Краткое содержание</b> . . . . .	728
1. Введение . . . . .	728
2. Обозначения . . . . .	729
3. Тенденции в развитии формы аппаратов и связанные с ними вопросы . . . . .	730
4. Анализ прочности конструкции при значительных числах Маха . . . . .	733
5. Термические условия в окружающей среде . . . . .	735
5-1. Конвективный перенос тепла из пограничного слоя . . . . .	735
5-2. Внешняя теплопередача с помощью излучения . . . . .	738
5-3. Относительный приток и потеря тепла . . . . .	739
6. Распределение температур внутри конструкции . . . . .	739
6-1. Теплопередача внутри конструкции . . . . .	740
6-2. Равновесие между внешней и внутренней теплопередачами для тонких обшивок . . . . .	742
6-3. Некоторые практические приложения исследования распределения температуры . . . . .	744
7. Нагрузки на больших сверхзвуковых скоростях . . . . .	745
7-1. Нагрузки, обусловленные атмосферной турбулентностью . . . . .	745
7-2. Нагрузки, возникающие во время маневра . . . . .	750

---

8. Проблемы конструкции и аэроупругости, возникающие при полете на большой скорости . . . . .	75
8-1. Ухудшение механических свойств материала при повышенной температуре . . . . .	750
8-2. Термические напряжения . . . . .	751
8-3. Жесткость и колебания конструкций типа оболочек при повышенных температурах . . . . .	757
8-4. Аэроупругая неустойчивость и критические скорости . . . . .	760
8-5. Формы разрушений конструкции . . . . .	764
9. Решение конструктивных задач и задач аэроупругости при проектировании и доводке . . . . .	769
9-1. Уменьшение притока тепла . . . . .	769
9-2. Замечания относительно проектирования конструкции . . . . .	771
9-3. Проектирование, имеющее цель свести к минимуму явления аэроупругости . . . . .	773
9-4. Критические проектные условия для конструкции . . . . .	773
9-5. Экспериментальное исследование как вспомогательное средство при проектировании конструкции . . . . .	774
10. Решение конструктивных задач и задач аэроупругости с помощью фундаментального исследования . . . . .	778
11. Заключение . . . . .	780
Литература . . . . .	781
Коэффициенты для перевода английских мер в метрические и обратно . . . . .	784
Именной указатель . . . . .	787
Предметный указатель . . . . .	791

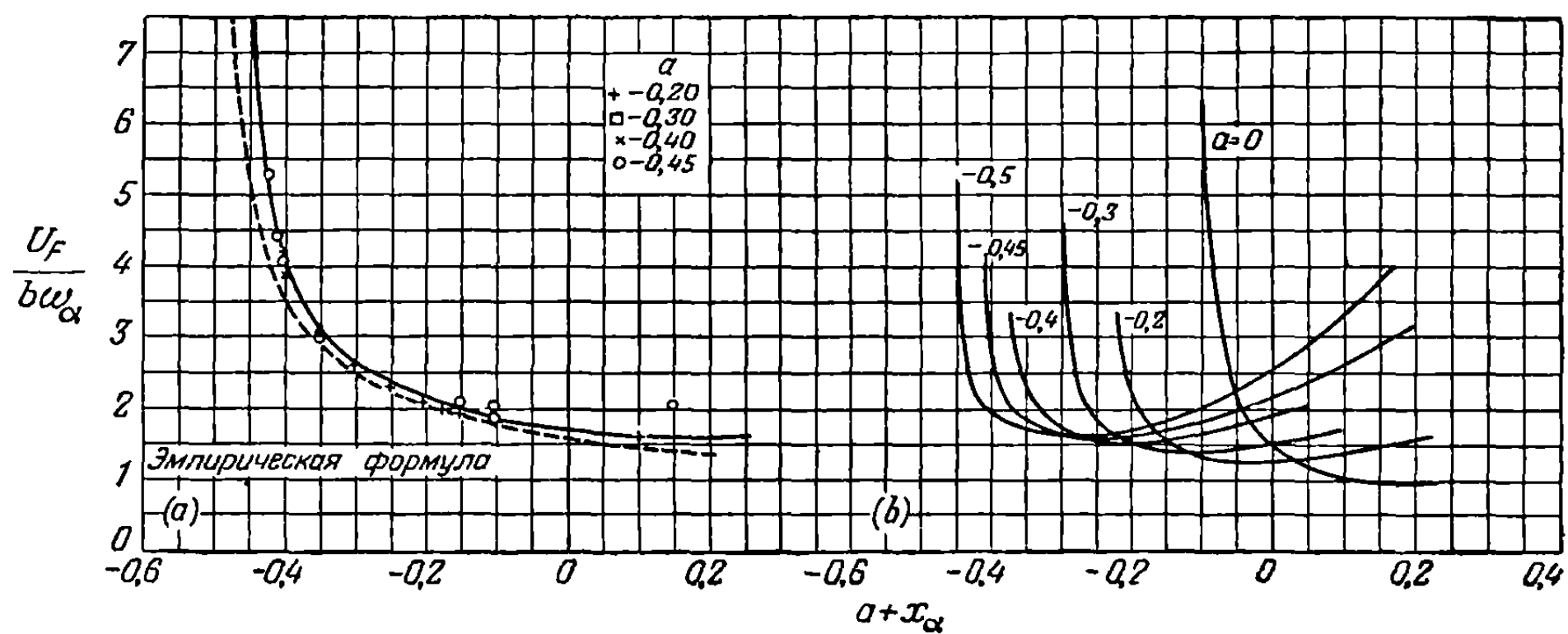


Фиг. 9-5 (С). Изменение безразмерной скорости флаттера  $U_F/b\omega_\alpha$  в зависимости от отношения частот  $\omega_h/\omega_\alpha$  для различных значений радиуса инерции  $r_\alpha^2$ ;  $a = -0,2$ ,  $x_\alpha = 0,1$ .

$$(a) \quad \frac{m}{\pi \rho b^2} = 5$$

$$(b) \quad \frac{m}{\pi \rho b^2} = 10$$

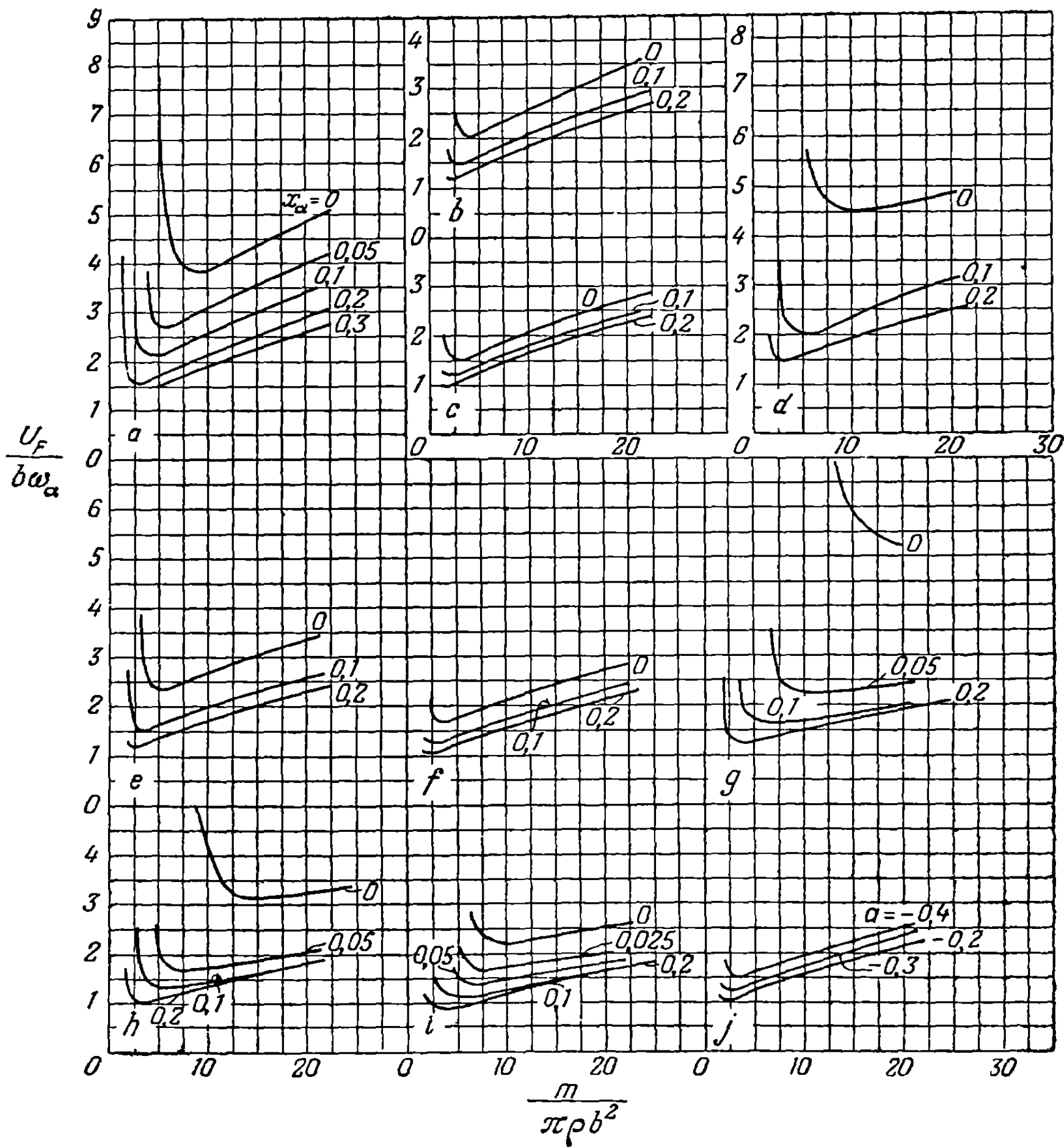
$$(c) \quad \frac{m}{\pi \rho b^2} = 20$$



Фиг. 9-5 (D). Изменение безразмерной скорости флаттера  $U_F/b\omega_\alpha$  в зависимости от положения центра тяжести  $a + x_\alpha$ ;  $r_\alpha^2 = \frac{1}{4}$ .

$$(a) \quad \left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}\right)^2 = 0; \quad \frac{m}{\pi \rho b^2} = 10$$

$$(b) \quad \left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2}; \quad \frac{m}{\pi \rho b^2} = 10.$$

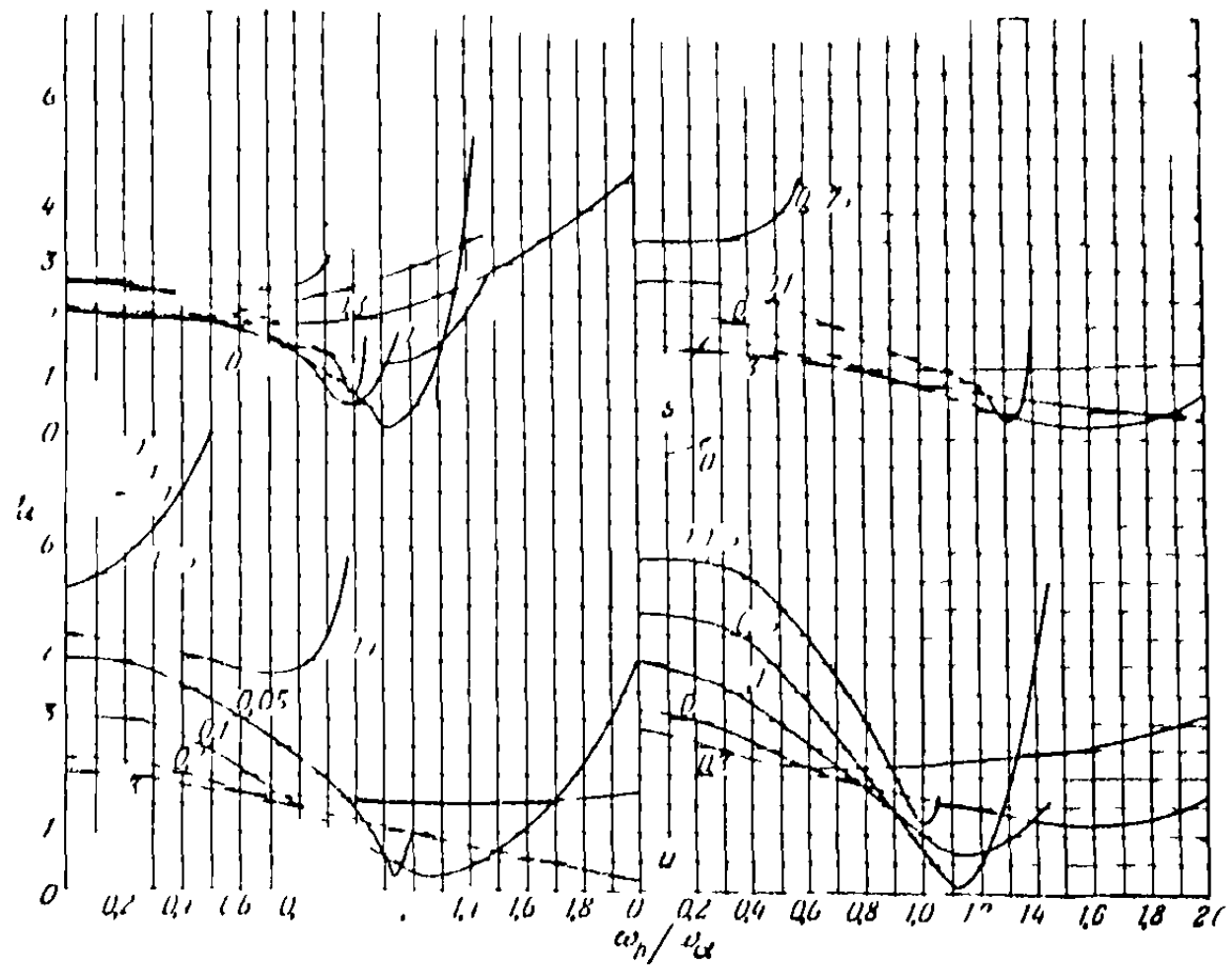
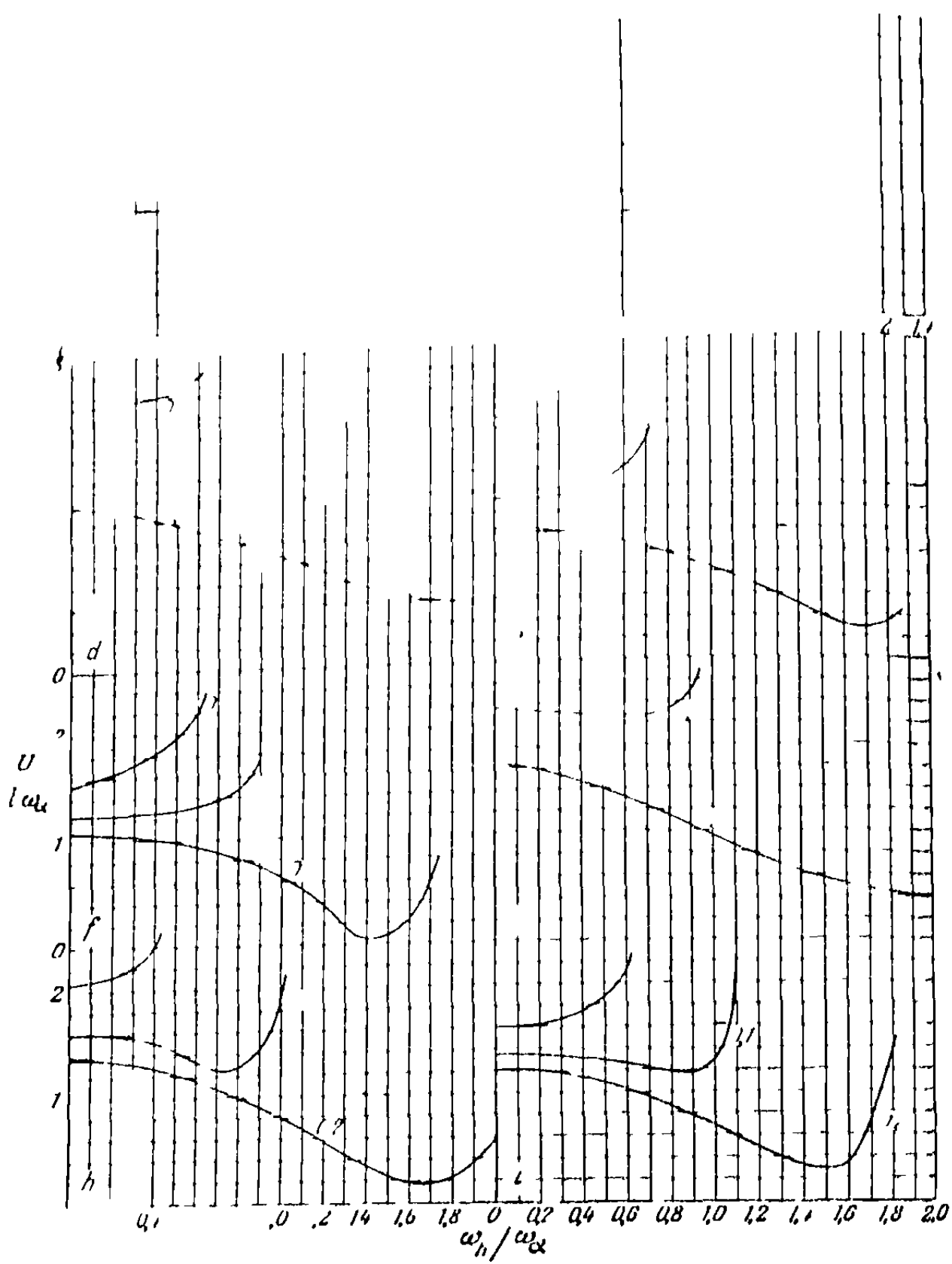


Фиг. 9-5 (В). Изменение безразмерной скорости флаттера  $U_F/b\omega_\alpha$  в зависимости от относительной плотности  $m/\pi r b^2$  для различных значений статического дисбаланса  $x_\alpha$ ;

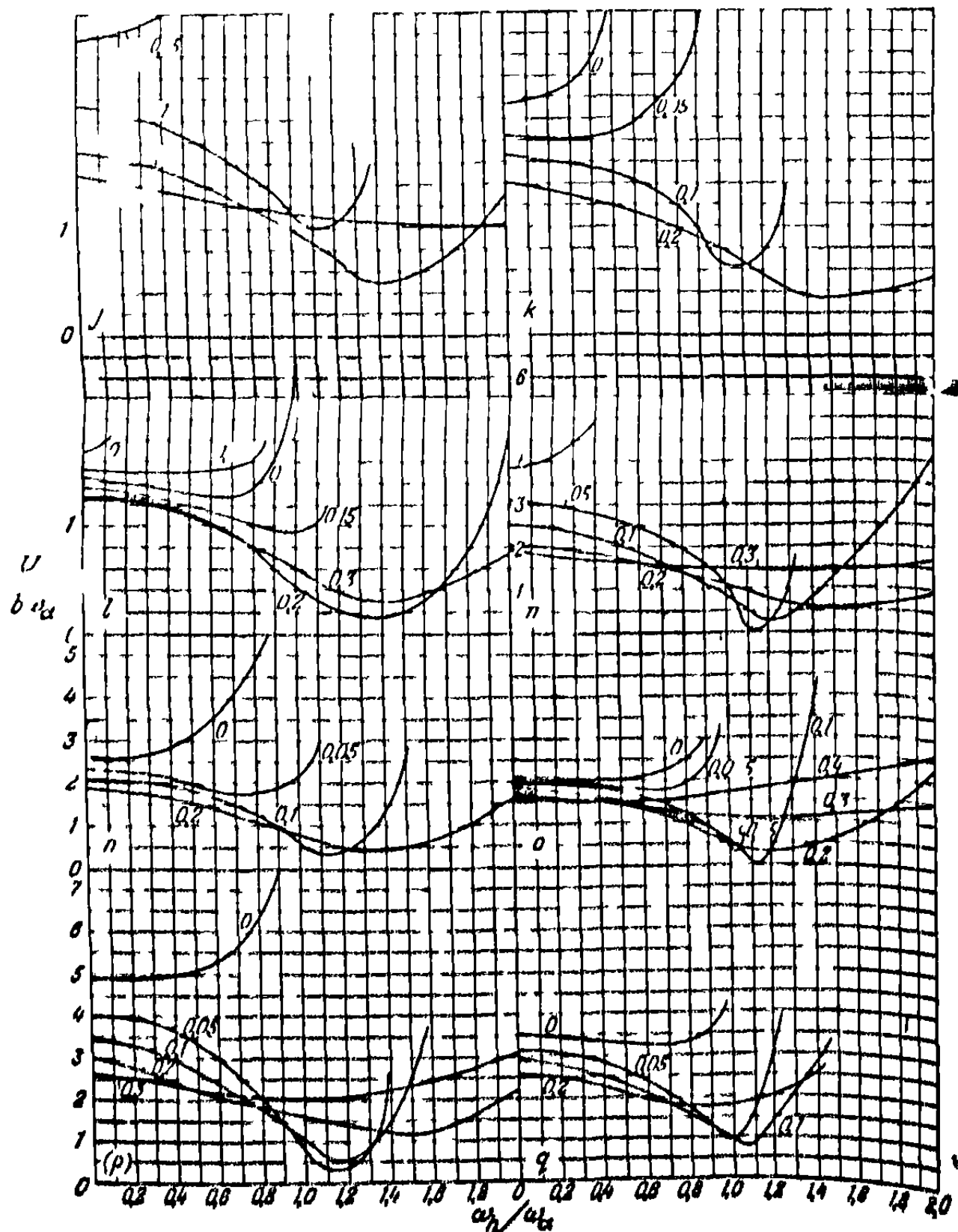
$$r_\alpha^2 = \frac{1}{4}.$$

- |     |   |            |     |   |                  |
|-----|---|------------|-----|---|------------------|
| (a) | $\left(\frac{\omega h}{\omega_\alpha}\right)^2 = 0;$            | $a = -0,4$ | (f) | $\left(\frac{\omega h}{\omega_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{10};$ | $a = -0,2$       |
| (b) | $\left(\frac{\omega h}{\omega_\alpha}\right)^2 = 0;$            | $a = -0,3$ | (g) | $\left(\frac{\omega h}{\omega_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2};$  | $a = -0,4$       |
| (c) | $\left(\frac{\omega h}{\omega_\alpha}\right)^2 = 0;$            | $a = -0,2$ | (h) | $\left(\frac{\omega h}{\omega_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2};$  | $a = -0,3$       |
| (d) | $\left(\frac{\omega h}{\omega_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{10};$ | $a = -0,4$ | (i) | $\left(\frac{\omega h}{\omega_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2};$  | $a = -0,2$       |
| (e) | $\left(\frac{\omega h}{\omega_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{10};$ | $a = -0,3$ | (j) | $\left(\frac{\omega h}{\omega_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{10};$ | $x_\alpha = 0,2$ |

(кривые приведены только для  $a = -0,4, -0,3$  и  $-0,2$ )



Фиг. 9. (А) Кривые, показывающие зависимость безразмерной скорости фильтра  $U/b\omega_\alpha$  и зависимости от отношения частот  $\omega_n/\omega_\alpha$  для различных значений безразмерного статического несбаланса  $x$ ,  $r_\alpha^2 = \frac{1}{4}$ .



- |     |                       |     |   |       |                      |   |
|-----|-----------------------|-----|---|-------|----------------------|---|
| (a) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 2,  | a | 0,1,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 1,58 (устойчиво для $x_\alpha = 0$ и 0,1)   |
| (b) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 2,  | a | 0,3,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 1,12 (устойчиво для $x_\alpha = 0$ )  |
| (c) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 2,  | a | 0,2,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 0,913   |
| (d) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 3,  | a | 0,1,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 1,94 (устойчиво для $x_\alpha = 0$ )  |
| (e) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 3,  | a | 0,3,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 1,37  |
| (f) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 3,  | a | 0,2,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 1,12  |
| (g) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 4,  | a | 0,1,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 2,24 (устойчиво для $x_\alpha = 0$ )  |
| (h) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 4,  | a | 0,3,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 1,58  |
| (i) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 4,  | a | 0,2,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 1,20  |
| (j) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 5,  | a | 0,4,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 2,5<br>(кривая для $x = 0$ начинается от $U_D/b\omega_\alpha = 6,9$ и идет вверх) |
| (k) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 7,  | a | 0,3,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 1,77  |
| (l) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 10, | a | 0,2,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 1,45  |
| (m) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 10, | a | 0,1,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 3,54  |
| (n) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 10, | a | 0,3,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 2,5   |
| (o) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 10, | a | 0,2,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 2,05  |
| (p) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 20, | a | 0,1,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 5,0   |
| (q) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 20, | a | 0,3,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 3,54  |
| (r) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 20, | a | 0,2,  | $U_D/b\omega_\alpha$ | 2,88  |
| (s) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 5,  | a | 0,45, | $U_D/b\omega_\alpha$ | 3,54  |
| (t) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 10, | a | 0,45, | $U_D/b\omega_\alpha$ | 5,0   |
| (u) | $\frac{m}{\pi r b^2}$ | 20, | a | 0,45, | $U_D/b\omega_\alpha$ | 7,07  |