

А. П. ФИЛИППОВ

# КОЛЕБАНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

*ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,  
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ*

540505



ИЗДАТЕЛЬСТВО «МАШИНОСТРОЕНИЕ»  
Москва 1970

953

**Колебания деформируемых систем.** Изд. 2-е переработанное А. П. Филипов. М., «Машиностроение», 1970, стр. 1—736.

В книге рассмотрены вопросы, связанные с колебаниями деформируемых систем, и приведены методы их расчета, удобные для практических приложений, с широким использованием электронных быстродействующих вычислительных машин. Часть книги посвящена расчету свободных и вынужденных колебаний стержней и стержневых систем (стержни, валы, рамы и т. д.).

Подробно изучены колебания плит: прямоугольных, в виде параллелограмма и неполного сектора, а также лежащих на упругом полупространстве. Рассмотрен панельный флаттер. Изучены колебания лопаток и дисков турбомашин. Подробно рассмотрены переходные процессы в механических системах. Кратко изложены основные методы нелинейных колебаний. Изучено воздействие движущейся нагрузки на балки конечной длины и бесконечно длинные, лежащие на упругом основании. Исследован неупругий удар по балкам и плитам, а также упругий удар с учетом деформаций в месте контакта на основе обычных неволновых и волновых уравнений колебаний.

Книга рассчитана на научных работников, инженеров-конструкторов, аспирантов и студентов вузов инженерно-физических и машиностроительных специальностей.

Табл. 40. Илл. 280. Библ. 150 назв.



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение колебательных процессов имеет большое значение для современной техники. Развитие ее связано с ростом скоростей движения, давлений, температур, с непрерывным возрастанием мощности и быстроходности машин и механизмов, увеличением аэродинамического воздействия потока протекающей среды. Вместе с тем наблюдается стремление к лучшему использованию несущей способности конструкций и уменьшению их веса. Это влечет за собой увеличение воздействия динамических нагрузок на элементы машин и сооружений.

При составлении книги автор взял за основу в значительной мере материалы своих исследований по колебаниям деформируемых систем, а в некоторых разделах книги — результаты совместных исследований со своими сотрудниками. Эти исследования были частично изложены в работах [21, 100, 101, 102 и 103], а также в ряде статей, опубликованных в периодической печати.

Автор стремился дать решение практически важных задач, доведенных до числовых расчетов с использованием в основном электронных цифровых быстродействующих машин (ЭЦВМ), а в некоторых случаях аналоговых машин.

Структура книги оставлена такой же, как в книге «Колебания механических систем», однако некоторые главы дополнены новыми результатами.

Главы 15 и 16 написаны совместно с Е. Г. Голоскоковым. Программы для расчета пластин составлены в основном Г. А. Марченко. Расчеты критических чисел вращающихся роторов проведены с участием Б. М. Лысенко.





## ГЛАВА I

# КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

### ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ КОЛЕБАНИЯ

Простейшим случаем колебательного движения является колебание консервативной линейной системы с одной степенью свободы.

Возьмем, например, груз, подвешенный на пружине, весом которой можно пренебречь по сравнению с весом груза (рис. 1.1), или груз, связанный с балкой, весом которой также можно пренебречь по сравнению с весом груза (рис. 1.2), и сообщим грузу некоторую начальную скорость и начальное отклонение. В таком случае груз будет находиться под действием восстанавливающей силы  $R$ , зависящей от величины смещения,

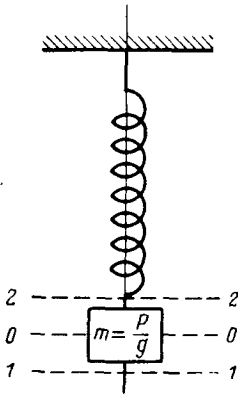


Рис. 1.1

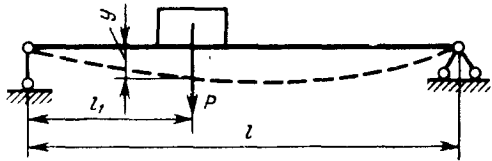


Рис. 1.2

и рассматриваемая система придет в колебательное движение. Такого рода колебания называются собственными, или свободными.

Например, для невесомой балки с сосредоточенным грузом  $P$  (рис. 1.2) восстанавливающая сила

$$R = -cy(l_1),$$

где  $y(l_1)$  — отклонение от положения равновесия;

$$y(l_1) = y_0 + y_1;$$

здесь  $y_0$  — статическое отклонение под действием силы  $P$ ;

$y_1$  — отклонение от статического положения равновесия.

Таким образом, мы имеем линейную зависимость между восстанавливающей силой и деформацией.

Коэффициент  $c$  представляет собой силу, которую необходимо приложить к балке, чтобы получить перемещение, равное единице. Он определяется из уравнения изогнутой оси балки. Например, для балки, свободно опертой на концах, имеем зависимость между деформацией в точке  $x = l_1$  и силой  $P$  в виде

$$y = \frac{Pl_1^2(l-l_1)^2}{3lEJ} \quad \left(y = \frac{P}{c}\right),$$

откуда

$$c = \frac{3lEJ}{l_1^2(l-l_1)^2}.$$

Применяя принцип Даламбера, получаем уравнение колебательного движения в виде

$$P - \frac{P}{g} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - c(y_0 - y_1) = 0. \quad (1.1)$$

Так как  $cy_0 = P$ , то

$$\frac{P}{g} y_1'' + cy_1 = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$y_1(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (1.2)$$

$$\text{где } \omega = \sqrt{\frac{cg}{P}}. \quad (1.3)$$

В дальнейшем вместо  $y_1$  будем писать  $y$ .

Уравнение (1.2) может быть записано и в виде

$$y = A_1 \sin(\omega t + \alpha), \quad (1.4)$$

где  $A_1$  — амплитуда;

$\alpha$  — начальная фаза.

Уравнение (1.2) представляет собой уравнение гармонического колебательного движения, имеющего синусоидальный характер (рис. 1.3), с периодом

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (1.5)$$

где  $\omega$  — круговая частота собственных, или свободных, колебаний.

Величина, обратная  $\tau$ ,  $\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$  — частота, соответствующая числу колебаний в единицу времени (например, в 1 сек). Если  $\tau$  измеряется в секундах, то  $\nu$  измеряется в герцах. Значение постоянных  $A$  и  $B$  (или  $A_1$  и  $\alpha$ ) определяется из начальных условий.

Например, когда в начальный момент масса отклонена от положения равновесия на величину  $y_0$  и ей сообщена начальная скорость  $y'_0$ , то амплитуда  $A_1$  и фаза  $\alpha$  определяются из выражения

$$A_1 = \sqrt{y_0^2 + \frac{y_0'^2}{\omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega y_0'}{y_0}.$$

Так как  $\frac{1}{c}$  представляет собой прогиб под действием силы, равной единице, то  $\frac{1}{c} P = f_{ст}$ , где  $f_{ст} = y_0$  — статический прогиб, получающийся под действием силы  $P$ .

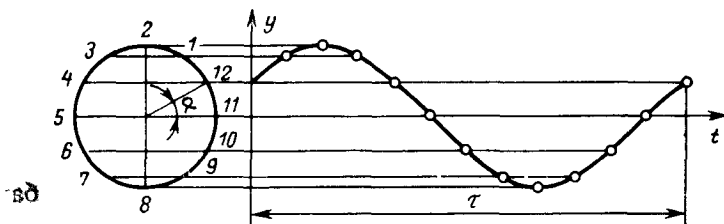


Рис. 1.3

На основании этого число колебаний в 1 мин будет

$$n = \frac{60}{2\pi} \omega = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}, \quad (1.6)$$

или

$$n = \frac{300}{\sqrt{f_{ст}}}, \quad (1.6')$$

где  $f_{ст}$  в см.

Формулой (1.6') пользуются в расчетах в тех случаях, когда система может быть сведена к системе с одной степенью свободы.

Например, при определении частот вертикальных колебаний лежащего на упругом основании сплошного фундамента массой  $m$  и площадью  $F$  (рис. 1.4) его можно рассматривать как систему с одной степенью свободы.

Частота колебаний определяется формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{c_2 F}{m}}, \quad (1.7)$$

где  $c_2$  — коэффициент упругого сжатия грунта в  $\kappa\Gamma/\text{см}^3$ .

Аналогичным образом можно с помощью формулы (1.6) определить число вертикальных (продольных) колебаний стойки, нагруженной грузом  $P$  (рис. 1.5), когда весом стойки можно пренебречь. Для этого случая

$$f_{ст} = \frac{Ph}{EF} \text{ см}, \quad (1.8)$$

где  $\bar{E}$  — модуль упругости материала стойки в  $\text{кг/см}^2$ ;  
 $F$  — площадь поперечного сечения в  $\text{см}^2$ ;  
 $h$  — высота стойки в  $\text{см}$ .

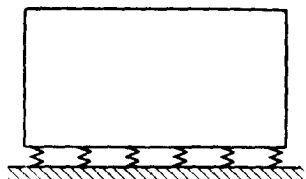


Рис. 1.4

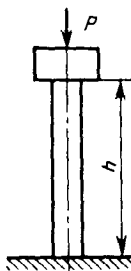


Рис. 1.5

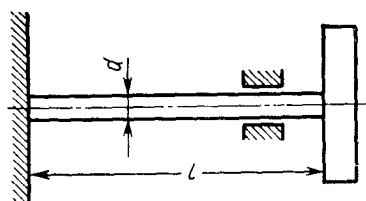


Рис. 1.6

### КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В качестве другого примера рассмотрим крутильные колебания диска, насаженного на вал (рис. 1.6).

Предположим, что один конец вала, длина которого  $l$  и диаметр  $d$ , закреплен, на другой насажен диск массой  $m$ . Если повернем диск на некоторый угол и предоставим его самому себе, то под действием восстанавливающего момента, вызванного упругостью вала, диск будет совершать крутильные колебания.

Восстанавливающий момент при отклонении диска на угол  $\varphi$

$$M_{кр} = -k\varphi, \quad (1.9)$$

где  $k$  — коэффициент, характеризующий жесткость ( $k$  численно равен скручивающему моменту вала при скручивании вала на один радиан; обратная ему величина  $e$  называется податливостью).

Угол закручивания

$$\varphi = \frac{Ml}{GJ_p}, \quad (1.10)$$

где  $J_p$  — полярный момент инерции сечения вала;

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32};$$

$G$  — модуль упругости при сдвиге.

Дифференциальное уравнение движения диска

$$J\varphi'' + k\varphi = 0, \quad (1.11)$$

где  $J$  — полярный момент инерции массы диска.

При толщине диска  $h(r)$

$$J = 2\pi\rho \int_0^{\frac{d}{2}} hr^3 dr. \quad (1.12)$$

Решение уравнения (1.11):

$$\varphi = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (1.13)$$

или

$$\varphi = C \sin (\omega t + \alpha). \quad (1.14)$$

Круговая частота

$$\omega = \sqrt{\frac{GJ_p}{IJ}}; \quad (1.15)$$

период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Если вал имеет переменное сечение, необходимо привести его длину к длине вала постоянного сечения. В частности,

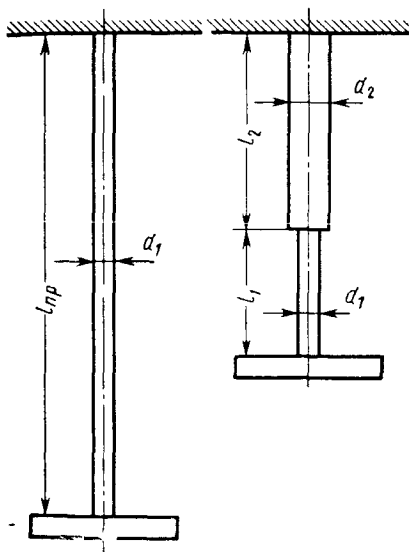


Рис. 1.7

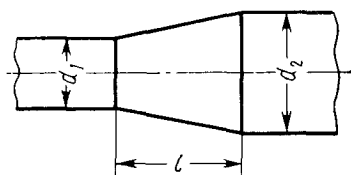


Рис. 1.8

длина участка вала диаметром  $d_2$  и длиной  $l_2$ , приведенная к диаметру  $d_1$  (рис. 1.7):

$$l_{np} = l_2 \frac{d_2^4}{d_1^4}. \quad (1.16)$$

Для сплошного конического участка (рис. 1.8) среднее значение полярного момента инерции

$$J_{pcp} = \frac{3J_{2p}}{\left(1 + \frac{c_1}{100}\right) \frac{d_2}{d_1} \left(1 + \frac{d_2}{d_1} + \frac{d_2^2}{d_1^2}\right)}, \quad (1.17)$$

где  $c_1$  — поправочный коэффициент, учитывающий влияние отношений  $\frac{l}{d_2}$  и  $\frac{d_2}{d_1}$ .

Зная  $J_{\text{пер}}$ , заменяем конический участок вала длиной  $l_1$  участком приведенной длины. Значения  $\frac{J_{\text{пер}}}{J_{2p}}$  в зависимости от отношения  $\frac{d_2}{d_1}$  для  $c_1 = 0$  приведены ниже.

$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{J_{\text{пер}}}{J_{2p}}$	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{J_{\text{пер}}}{J_{2p}}$
1,0	1,000	1,4	0,491
1,1	0,824	1,5	0,421
1,2	0,687	1,7	0,316
1,3	0,578	2,0	0,214

Значения коэффициента  $c_1$ , а также данные для других случаев сопряжения приведены в литературе [84, 118].

### СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ЗАТУХАНИИ

Выше предполагалось, что при колебании системы на нее действуют лишь восстанавливающие силы. Конечно, это соответствует лишь идеальному случаю отсутствия всякого рода сил сопротивления (диссипативных сил), при наличии которых происходит потеря энергии и постепенное погашение колебаний. Например, при колебании упругого тела такими силами будут силы внешнего затухания, зависящие от сопротивления среды (воздух), и силы затухания, зависящие от вязкости материала (внутреннее затухание). Для последнего случая в первом приближении принимается гипотеза, что сила затухания пропорциональна первой степени скорости, хотя это предположение обычно не совсем соответствует действительности. На вопросе о затухании колебаний остановимся подробнее ниже, а пока примем указанную гипотезу.

Дифференциальное уравнение (1.1) для колебательного движения системы с одной степенью свободы принимает вид

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha \frac{dy}{dt} + cy = 0 \quad (1.18)$$

или

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2h \frac{dy}{dt} + k^2 y = 0, \quad (1.19)$$

где  $m$  — масса груза;

$\alpha$  — коэффициент, характеризующий затухание;

$$\left. \begin{aligned} 2h &= \frac{\alpha}{m} \\ k^2 &= \frac{c}{m} \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Интегрирование этого уравнения производится по обычным правилам или с помощью подстановки

$$y = e^{-ht} u(t).$$

После подстановки получим

$$u'' + (k^2 - h^2) u = 0.$$

При этом надо различать несколько случаев.

**Случай 1.**  $k^2 - h^2 > 0$ .

В этом случае

$$u = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (1.21)$$

где  $\omega^2 = k^2 - h^2$ ;

или

$$y = e^{-ht} (A \cos \omega t + B \sin \omega t); \quad (1.22)$$

$$y = A_1 e^{-ht} \sin(\omega t + \varepsilon); \quad (1.23)$$

$A_1$  и  $\varepsilon$  определяются с помощью начальных условий  $y(0) = y_0$ ;  $y'(0) = y'_0$ ;

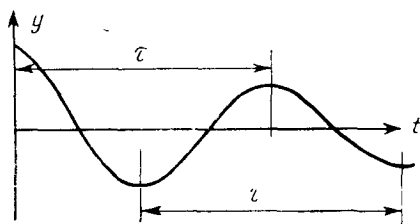


Рис. 1.9

$$A_1 = \sqrt{y_0^2 + \frac{(y'_0 + hy_0)^2}{\omega^2}}; \quad \operatorname{ctg} \varepsilon = \frac{y'_0 + hy_0}{y_0 \omega}; \quad (1.24)$$

период колебаний

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}. \quad (1.25)$$

Как видно из формулы (1.23), амплитуда колебаний все время убывает (рис. 1.9).

Отношение амплитуд  $y_i$  и  $y_{i+1}$  для  $i$ -го и  $(i+1)$ -го периода  $\tau$ :

$$\left| \frac{y_i}{y_{i+1}} \right| = e^{h\tau}; \quad (1.26)$$

натуральный логарифм этого отношения

$$\delta = \ln \left| \frac{y_i}{y_{i+1}} \right| = h\tau \quad (1.27)$$

называется логарифмическим декрементом затухания, и с его помощью экспериментально можно найти коэффициент затухания. При этом обычно пользуются выражением

$$h\tau = \frac{1}{k} \ln \frac{y_i}{y_{i+k}}. \quad (1.28)$$

Когда сопротивление сравнительно мало, период колебаний с учетом затухания будет очень мало отличаться от периода коле-

баний без затухания, между тем, амплитуды будут падать очень быстро, убывая в течение периода в отношении  $e^{h\tau}$  из формулы (1.26). Так, для малых  $h$

$$\tau \approx \frac{2\pi}{k} \left( 1 + \frac{h^2}{2k^2} \right) = T_0 \left( 1 + \frac{h^2}{2k^2} \right), \quad (1.29)$$

где  $T_0$  — период собственных колебаний без затухания; для  $\frac{h}{k} = 0,07$

$$\tau = 1,0025 T_0.$$

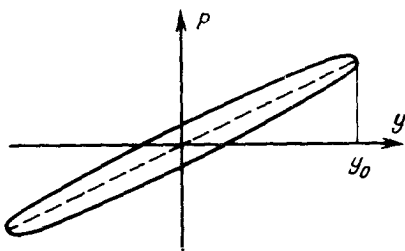


Рис. 1.10

Амплитуды для этого случая падают в отношении

$$\gamma_1 = e^{h\tau} = e^{1,0025 \cdot 2\pi \cdot 0,07} = 1,41.$$

**Случай 2.**  $k^2 - h^2 < 0$  ( $\omega_1^2 = h^2 - k^2$ ).

Решение уравнения будет иметь такой же вид, как и в предыдущем случае, но только в него взамен тригонометрических функций войдут гиперболические:

$$y = e^{-ht} (A \operatorname{ch} \omega_1 t + B \operatorname{sh} \omega_1 t). \quad (1.30)$$

Движение будет не колебательным, а аperiодическим (или, вернее, лимитационным), и с возрастанием  $t$  будет быстро убывать  $y$ , так как для больших  $\omega_1 t$

$$\operatorname{ch} \omega_1 t \approx \operatorname{sh} \omega_1 t = \frac{1}{2} e^{\omega_1 t}.$$

Для случая, когда  $h^2 - k^2 = 0$ , получим критическое значение коэффициента затухания, при котором происходит переход от колебательного к лимитационному движению.

В уравнении (1.19) затухание было принято пропорциональным скорости деформации.

Такая зависимость на диаграмме *сила—деформация* соответствует эллиптической петле гистерезиса (рис. 1.10).

В этом легко убедиться, если исключить  $\frac{dy}{dt}$  из выражения

$$P = cy + 2h \frac{dy}{dt}. \quad (1.31)$$

Действительно, для гармонических колебаний

$$y = A \sin(\omega t + \varphi);$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.32)$$



Следовательно, заменяя  $\cos(\omega t + \varphi)$  через  $\sin(\omega t + \varphi)$ , после подстановки уравнения (1.32) в уравнение (1.31) получим

$$P = cy \pm 2h\omega A \sqrt{1 - \frac{y^2}{A^2}}, \quad (1.33)$$

где знак «плюс» относится к верхней ветви, «минус» — к нижней. Площадь петли гистерезиса

$$\Delta W = 2h\omega A^2. \quad (1.34)$$

Вычислим значение потери энергии за один период:

$$W_i - W_{i+1} = \frac{c}{2} (y_i^2 - y_{i+1}^2).$$

Полагая

$$y_{i+1} = y_i - \Delta y, \quad (1.35)$$

получим

$$\frac{W_i - W_{i+1}}{2W_i} \approx \frac{\Delta y}{y_i};$$

так как

$$\delta = -\ln \frac{y_i - \Delta y}{y_i} \approx \frac{\Delta y}{y_i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta y}{y_i} \right)^2 + \dots \approx \frac{\Delta y}{y_i}, \quad (1.36)$$

то, сравнивая уравнение (1.35) с уравнением (1.30), получим соотношение

$$\delta = \frac{\Delta W}{2W}. \quad (1.37)$$

Из выражения (1.34) следует, что потеря энергии на внутреннее сопротивление пропорциональна частоте колебаний и квадрату амплитуды колебаний. Опыты, однако, показывают, что для многих материалов при сравнительно большом диапазоне частот потеря энергии не зависит от частоты колебаний. Поэтому некоторые авторы рекомендуют вместо коэффициента  $h$  принимать коэффициент  $\frac{h}{\omega} = \mu$ , т. е.

$$\Delta W = 2\mu A_1^2. \quad (1.38)$$

В технической литературе часто рассматривают вместо величины  $\delta$  коэффициент поглощения  $\psi$ , равный отношению рассеиваемой энергии за  $i$ -й период  $W_i - W_{i+1}$  к потенциальной энергии  $W_i$  в начале цикла. Следовательно,

$$\psi = 2\delta. \quad (1.39)$$

Помимо этих, имеется еще ряд гипотез, в которых предполагается, что силы затухания зависят от величины деформации. Они будут рассмотрены в гл. 6.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Для того чтобы изучить вынужденные колебания необходимо, учесть еще внешнюю силу  $f(t)$ . Тогда дифференциальное уравнение движения (1.1) должно быть записано в виде

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + cy = f(t) \quad (1.40)$$

или

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{1}{m} f(t), \quad (1.41)$$

где  $\omega^2 = \frac{c}{m}$ . (1.42)

Общее решение этого уравнения согласно обычным правилам нахождения решения уравнения с правой частью будет

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (1.43)$$

Если внешняя сила изменяется с течением времени по закону

$$f(t) = H \sin(kt + \gamma), \quad (1.44)$$

то решение (1.41) для случая, когда  $\omega \neq k$ , получается в виде

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \Phi(t), \quad (1.45)$$

где

$$\Phi(t) = \frac{H \sin(kt + \gamma)}{m(\omega^2 - k^2)}.$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются из начальных условий.

Так как фактически всегда имеет место внешнее и внутреннее затухание, при наличии которого свободные колебания постепенно исчезают, то по истечении некоторого времени будут иметь значение лишь вынужденные колебания.

Так как  $m\omega^2 = c$  и отношение  $\frac{H}{c}$  соответствует прогибу  $y_{ст}$  от силы  $H$ , если бы она была приложена статически, то

$$y(t) = \frac{y_{ст} \sin(kt + \gamma)}{1 - \frac{k^2}{\omega^2}}. \quad (1.46)$$

Из формулы (1.46) видно, что когда частота  $k$  вынужденной силы  $H \sin(kt + \gamma)$  приближается к частоте собственных колебаний  $\omega$ , то прогибы  $y$  начинают быстро возрастать и стремятся к бесконечности.

Коэффициент

$$\lambda = \frac{1}{1 - \frac{k^2}{\omega^2}} \quad (1.47)$$

называется коэффициентом увеличения деформаций.  
В частности, когда  $k$  отличается от  $\omega$  на 30%,

$$y_d \approx 2y_{ст.}$$

Когда частота вынужденных колебаний становится равной частоте собственных, то наступает явление резонанса и амплитуды колебаний стремятся к бесконечности. Закон нарастания амплитуд получим, если найдем решение уравнения для случая, когда  $k = \omega$ .

Частное решение уравнения (1.41) для случая, когда  $k = \omega$  и  $f(t)$  задано выражением (1.44), надо взять в виде

$$\Phi(t) = A_1 t \cos(kt + \gamma); \quad (1.48) \quad f(t)$$

тогда после подстановки решения (1.48) в уравнение (1.41) и определения  $A_1$  получим

$$\Phi(t) = -\frac{Ht \cos(kt + \gamma)}{2m\omega}, \quad (1.49)$$



Рис. 1.11

т. е. амплитуды возрастают неограниченно, увеличиваясь пропорционально времени.

Из общего решения уравнения (1.41), определяемого формулой (1.43), можно сделать ряд практически важных выводов.

Например, если внезапно в начальный момент времени приложить постоянную силу  $P$ , которая остается связанной с системой и для  $t > 0$ , то для вынужденных колебаний из формулы (1.43) получим

$$\Phi(t) = \frac{P}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) = y_{ст.} (1 - \cos \omega t),$$

для  $\omega t = \pi$   $y_{max} = 2y_{ст.}$ , т. е. при внезапном приложении к системе с одной степенью свободы нагрузки  $P$  прогиб получается в 2 раза больше статического.

В практике часто встречаются также случаи, когда силы действуют лишь в течение некоторого времени, причем система может рассматриваться как система с одной степенью свободы. Поэтому интересно выяснить, какие деформации возникают при приложении к системе такого рода нагрузок.

В общем случае нарастания нагрузок по какой-либо кривой (рис. 1.11) значение  $y$  может быть вычислено по формуле (1.43). В том случае, когда продолжительность действия нагрузки  $T$

будет мала по сравнению с периодом собственных колебаний системы, отклонение системы ( $t > T$ ) выражается формулой

$$\Phi(t) = \frac{I}{\omega m} \sin \omega t, \quad (1.50)$$

где  $I$  — импульс силы,  $I = \int_0^T f(\tau) d\tau$ .

Таким образом, величина отклонения  $y$  не зависит от максимального значения силы  $f(t)$ , а зависит лишь от значения  $I$ . Для случая, когда продолжительность нарастания нагрузки велика по сравнению с периодом собственных колебаний системы, отклонение системы может вычисляться как статическое [47].

### БИЕНИЯ

Если внешняя сила, вызывающая вынужденные колебания, состоит из нескольких слагающих, например двух:  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , изменяющихся по закону

$$f_1(t) = H_1 \sin(k_1 t + \gamma_1); \quad f_2(t) = H_2 \sin(k_2 t + \gamma_2),$$

то в некоторых случаях наблюдается явление биения, которое заключается в том, что амплитуда колебаний, достигнув некоторого максимального значения, начинает убывать почти до нуля, затем снова возрастает; при этом возрастание и убывание происходят периодически, но их период во много раз больше основного периода (рис. 1 12).

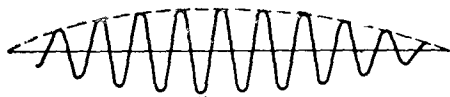


Рис 1 12

Причина возникновения этого явления заключается в том, что частоты двух возмущающих сил  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  мало отличаются одна от другой (рис. 1 13). В этом случае амплитуда вынужденных колебаний

$$y = N_1 \sin(k_1 t + \gamma_1') + N_2 \sin(k_2 t + \gamma_2'). \quad (1.51)$$

Выражение (1 51) можно представить в виде

$$y = \frac{N_1 + N_2}{2} [\sin(k_1 t + \gamma_1') + \sin(k_2 t + \gamma_2')] + \frac{N_1 - N_2}{2} [\sin(k_1 t + \gamma_1') - \sin(k_2 t + \gamma_2')]. \quad (1.52)$$

Пользуясь выражениями для сумм и разностей тригонометрических функций, формулу (1.52) можно переписать в виде

$$y = A \sin \left( \frac{k_1 + k_2}{2} t + \frac{\gamma_1' + \gamma_2'}{2} \right) + B \cos \left( \frac{k_1 - k_2}{2} t + \frac{\gamma_1' + \gamma_2'}{2} \right) \equiv \\ \equiv \sqrt{A^2 + B^2} \sin \left( \frac{k_1 + k_2}{2} t + \frac{\gamma_1' + \gamma_2'}{2} + \varepsilon \right), \quad (1.53)$$

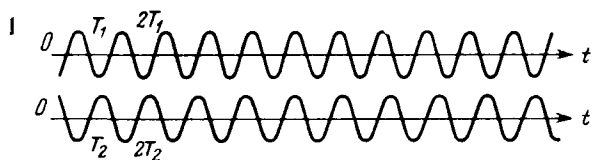


Рис. 1.13

где

$$A = (N_1 + N_2) \cos \left( \frac{k_1 - k_2}{2} t + \frac{\gamma_1' - \gamma_2'}{2} \right);$$

$$B = (N_1 - N_2) \sin \left( \frac{k_1 - k_2}{2} t + \frac{\gamma_1' - \gamma_2'}{2} \right);$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{B}{A} = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \operatorname{tg} \left( \frac{k_1 - k_2}{2} t + \frac{\gamma_1' - \gamma_2'}{2} \right),$$

а

$$|N_1 + N_2| \geq \sqrt{A^2 + B^2} \geq |N_1 - N_2|.$$

Из выражения (1.53) видим, что результирующее колебание будет гармоническим с частотой

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}. \quad (1.54)$$

Полупериод изменения амплитуды определяется выражением

$$\frac{\tau}{2} = \frac{2\pi}{k_1 - k_2} = \frac{1}{n_1 - n_2}, \quad (1.55)$$

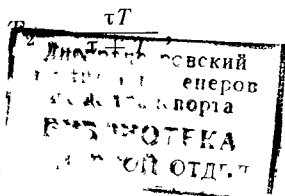
где  $n_1$  и  $n_2$  — числа колебаний в 1 сек.

Так как число колебаний результирующего колебания

$$n = \frac{n_1 + n_2}{2},$$

то из выражений (1.54) и (1.55) для периодов каждой гармонической составляющей получим

$$T_1 = \frac{\tau T}{\tau - T}; \quad (1.56)$$



где

$$T = \frac{4\pi}{k_1 + k_2}.$$

Явление биения на практике может наблюдаться, например, при установке в здании нескольких машин с мало отличающимися числами оборотов.

### ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ЗАТУХАНИИ

Выше предполагалось, что затухание отсутствует. При наличии затухания дифференциальное уравнение движения для вынужденных колебаний в соответствии с уравнениями (1.18) и (1.19) имеет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2h \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \frac{1}{m} f(t). \quad (1.57)$$

Решение уравнения (1.57) может быть найдено обычным путем с помощью вариации произвольных постоянных или согласно общим правилам символического или операционного исчисления [32, 58, 86, 101].

Уравнение (1.57) в символической форме:

$$p^2 y + 2hp y + \omega^2 y = \frac{1}{m} f(p). \quad (1.58)$$

Корни характеристического уравнения для  $\omega^2 - h^2 > 0$

$$\alpha_{1,2} = -h \pm ik,$$

где

$$k^2 = \omega^2 - h^2. \quad (1.59)$$

Определяя из уравнения (1.58)  $y$  и разлагая на простейшие дроби, получим

$$y = \frac{1}{m} \cdot \frac{f(p) \eta}{p^2 + 2hp + \omega^2} = \frac{\eta}{m} \left\{ \frac{f(p)}{2ik(p - \alpha_1)} - \frac{f(p)}{2ik(p - \alpha_2)} \right\},$$

где  $\eta$  — единичная функция ( $\eta = 1$  для  $t > 0$  и  $\eta = 0$  для  $t < 0$ ).

Заменяя  $(p - \alpha)^{-1} f(p)$  значением оригинала, получим частное решение (1.59) с правой частью

$$\Phi(t) = \frac{1}{mk} \int_0^t e^{-h(t-\tau)} f(k) \sin k(t - \tau) d\tau. \quad (1.60)$$

Прибавляя сюда решение без правой части (1.23), получим общее решение (1.57) в виде

$$y(t) = Ae^{-ht} \sin(kt + \beta) + \frac{1}{mk} \int_0^t e^{-h\tau} f(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau. \quad (1.61)$$

Аналогично находим решение и для случая, когда  $\omega^2 - h^2 < 0$ , путем замены  $k$  на  $ik$ , где  $k_1^2 = h^2 - \omega^2$ . В этом случае

$$y(t) = Ae^{-ht} \operatorname{sh}(k_1 t + \beta) + \frac{1}{mk_1} \int_0^t e^{-h(t-\tau)} f(\tau) \operatorname{sh} k_1(t-\tau) d\tau. \quad (1.62)$$

Для случая, когда  $\omega^2 - h^2 = 0$ ,

$$\Phi(t) = \frac{1}{m} \cdot \frac{f(t)}{(p+\omega)^2}. \quad (\text{это решение в обратном})$$

Применяя формулу (18) приложения для случая, когда степень кратности  $r = 2$ , получим частное решение с правой частью

$$\Phi(t) = \frac{1}{m} \int_0^t (t-\tau) e^{-\omega(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad (1.63)$$

в котором появляются члены, содержащие  $t$  в виде множителей.

Остановимся подробнее на случае, когда внешняя сила будет иметь вид

$$\frac{1}{m} f(t) = H \sin(pt + \gamma). \quad (1.64)$$

Частное решение уравнения (1.57) для этого случая (при  $\omega^2 - h^2 > 0$ ) находим из формулы (1.60) или непосредственно в виде

$$\Phi(t) = N \sin(pt + \gamma + \delta). \quad (1.65)$$

Для определения постоянных  $N$  и  $\delta$  подставляем значение (1.65) в (1.57) и сравниваем коэффициенты при  $\sin(pt + \gamma)$  в левой и правой частях (в правой части этот коэффициент равен  $H$ ), а коэффициент при  $\cos(pt + \gamma)$  приравняем нулю, так как в правой части согласно уравнению (1.65) этот коэффициент равен нулю.

В таком случае получим

$$N = \frac{H}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 h^2}}; \quad (1.66)$$

$$\sin \delta = -\frac{2hp}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 h^2}}; \quad \cos \delta = \frac{\omega^2 - p^2}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 h^2}}. \quad (1.67)$$

Величина статического отклонения  $y_{ст}$  для постоянной силы  $HM^*$  получается из (1.57) в предположении, что  $y = y_{ст}$ :

$$y_{ст} = \frac{H}{\omega^2}.$$

2\* \*)  $m \quad \delta = H/m$

В таком случае коэффициент увеличения деформаций  $\lambda = \frac{N}{y_{ст}}$  будет

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega^2} \cdot \frac{p^2}{\omega^2}}}. \quad (1.68)$$

Таким образом, коэффициент  $\lambda$  есть функция величин (рис. 1.14)

$$\frac{p}{\omega} = q, \quad \frac{2h}{\omega} = \alpha. \quad (1.69)$$

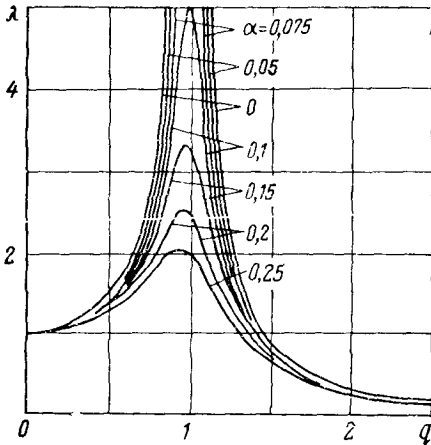


Рис. 1.14

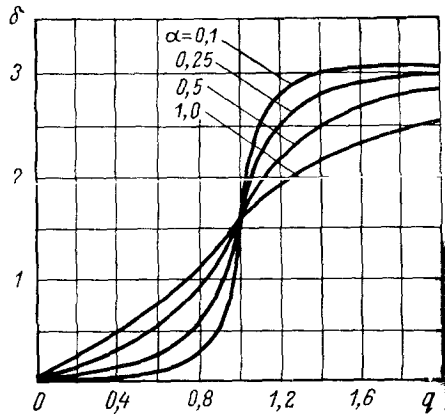


Рис. 1.15

Как видно из уравнения (1.68), амплитуда  $N = y_{ст} \cdot \lambda$  при наличии затухания всегда имеет конечную величину, так как

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + \alpha^2 q^2}}. \quad (1.70)$$

Разность фаз  $\delta$  между перемещением  $\Phi(t)$  (1.65) и возмущающей силой (1.64) согласно формуле (1.67) в зависимости от  $q$  и  $\alpha$  определяется значениями

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta &= \frac{1 - q^2}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + \alpha^2 q^2}} = (1 - q^2) \lambda; \\ \sin \delta &= -\frac{\alpha q}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + \alpha^2 q^2}} = -\alpha q \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

Изменение  $\delta$  в зависимости от  $q$  и  $\alpha$  дано на рис. 1.15. В табл. 1.1 приведены значения  $\lambda$  и  $\delta$  в зависимости от  $\alpha$  и  $q$ .



Таблица 1.1

Значения угла сдвига фаз  $\delta$  в град и коэффициента динамичности  $\lambda$   
 при вынужденных колебаниях с затуханием  $\eta = \frac{p}{\omega}$ ,  $\alpha = \frac{2h}{\omega}$

q	$\alpha = 0,0$		$\alpha = 0,10$		$\alpha = 0,15$		$\alpha = 0,20$		$\alpha = 0,30$		$\alpha = 0,40$		$\alpha = 0,50$	
	$\lambda$	$-\delta$	$\lambda$	$-\delta$	$\lambda$	$-\delta$	$\lambda$	$-\delta$	$\lambda$	$-\delta$	$\lambda$	$-\delta$	$\lambda$	$-\delta$
0,00	1,00	0,0	1,00	0,0	1,00	0,0	1,00	0,0	1,00	0,0	1,00	0,00	1,00	0,0
0,10	1,01	0,6	1,01	0,9	1,01	0,9	1,01	1,3	1,01	1,9	1,01	2,5	1,01	2,9
1,20	1,04	1,2	1,04	1,8	1,04	2,8	1,04	2,4	1,04	3,6	1,04	4,7	1,04	5,9
0,30	1,10	1,9	1,10	2,8	1,10	4,1	1,10	3,7	1,10	5,6	1,09	7,5	1,09	9,4
0,40	1,19	2,8	1,19	4,1	1,19	6,8	1,18	5,6	1,18	8,1	1,17	10,8	1,16	13,4
0,50	1,33	3,8	1,33	5,3	1,33	8,1	1,32	7,6	1,30	11,3	1,29	15,0	1,26	18,5
0,60	1,56	5,3	1,55	7,8	1,55	11,7	1,54	10,6	1,52	15,7	1,46	20,6	1,41	25,2
0,70	1,96	7,8	1,94	11,7	1,92	16,4	1,89	15,4	1,82	22,4	1,72	28,8	1,62	34,5
0,75	2,28	9,7	2,22	14,4	2,16	18,4	2,12	18,9	2,03	27,2	1,88	34,4	1,72	40,6
0,80	2,78	11,5	2,64	18,4	2,53	23,9	2,53	23,9	2,31	33,7	2,08	41,7	1,86	48,0
0,85	3,60	17,0	3,44	24,6	3,26	31,4	3,07	31,4	2,65	42,5	2,28	50,8	1,98	56,8
0,90	5,26	25,3	4,76	35,4	4,29	43,5	3,82	43,5	3,03	55,0	2,46	62,2	2,05	67,2
0,925	6,95	32,7	5,00	43,9	4,27	52,2	4,27	52,2	3,20	62,50	2,52	68,7	2,07	72,7
0,95	10,26	44,1	5,76	55,5	4,67	62,7	4,67	62,7	3,30	71,0	2,55	75,5	2,06	78,3
0,975	20,50	63,4	6,45	71,5	4,98	75,9	4,98	75,9	3,36	80,5	2,55	82,9	2,04	84,2
1,00		90,0	6,67	90,0	5,00	90,0	5,00	90,0	3,33	90,0	2,50	90,0	2,00	90,0
0,025	19,76	116,5	6,17	108,3	4,73	104,0	4,73	104,0	3,20	99,4	2,42	97,1	1,94	95,6
1,05	9,76	134,8	5,30	123,0	4,28	115,5	4,28	115,5	3,02	108,3	2,31	103,9	1,87	101,1
1,075	6,45	145,3	4,47	134,0	3,77	125,8	3,77	125,8	2,80	115,7	2,10	109,8	1,79	106,2
1,10	4,76	152,3	3,75	141,8	3,29	133,7	3,29	133,7	2,55	122,3	2,05	115,5	1,70	110,8
1,15	3,11	160,3	2,74	151,8	2,53	144,8	2,53	144,8	2,17	133,0	1,78	125,4	1,52	119,3
1,20	2,27	164,8	2,10	157,8	1,99	151,4	1,99	151,4	1,76	140,6	1,54	132,5	1,36	126,3
1,30	1,45	169,3	1,40	164,2	1,36	159,4	1,36	159,4	1,26	150,5	1,16	143,0	1,06	136,7
1,40	1,04	171,8	1,02	167,7	1,00	163,9	1,00	163,9	0,96	156,4	0,90	149,7	0,84	143,8
1,50	0,80	173,2	0,76	168,8	0,77	166,5	0,77	166,5	0,75	160,5	0,72	154,3	0,69	149,0
1,75	0,49	175,1	0,48	172,8	0,48	171,5	0,48	171,5	0,47	166,7	0,45	161,3	0,45	157,0
2,00	0,33	176,2	0,33	174,3	0,38	172,4	0,38	172,4	0,33	168,0	0,32	165,0	0,32	161,6
3,00	0,19	177,2	0,19	175,9	0,19	174,5	0,19	174,5	0,19	171,9	0,19	169,2	0,18	166,6
3,50	0,125	177,8	0,125	176,8	0,125	175,7	0,125	175,7	0,123	173,5	0,123	171,5	0,123	169,5
4,00	0,0667	178,5	0,067	177,6	0,067	177,0	0,067	177,0	0,066	175,5	0,066	174,0	0,066	172,3
5,00	0,032	178,9	0,032	178,1	0,032	177,6	0,032	177,6	0,032	176,4	0,032	175,3	0,032	175,0

Наибольшее значение  $\lambda$  (состояние резонанса) можно найти без затруднений, если вычислить минимум

$$\frac{1}{\lambda^2} = (1 - q^2)^2 + \alpha^2 q^2,$$

который будет равен  $\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{4}$  при  $q^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ . Тогда

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}}; \quad (1.72)$$

для малых  $\alpha$

$$\lambda_{\max} \approx \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{8} \right) \text{ при } q \approx 1 - \frac{\alpha^2}{4}.$$

### ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ УПРУГОМ ПОДВЕСЕ

В ряде случаев точки подвеса или точки опирания упругой системы, например, основание под прибор или фундамент машины, колеблются по заданному закону

$$\xi = \xi_0 \sin pt. \quad (1.73)$$

Уравнение движения в этом случае получим, если вместо  $y$  и  $\frac{dy}{dt}$  подставим относительные деформации и скорости, т. е.  $y - \xi$ ,  $y'_t - \xi'_t$ , следовательно,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2h \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 2h \frac{d\xi}{dt} + \omega^2 \xi. \quad (1.74)$$

После подстановки в уравнение (1.74) значения  $\xi$  из формулы (1.73) получим для возмущающей силы величину

$$\frac{1}{M} f(t) = (\omega^2 \sin pt + 2hp \cos pt) \xi_0; \quad (1.75)$$

следовательно,

$$H = \xi_0 \sqrt{\omega^4 + (2hp)^2}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{2hp}{\omega^2}. \quad (1.76)$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$N = \lambda \frac{H}{\omega^2} = \lambda \xi_0 \sqrt{1 + \alpha^2 q^2}, \quad (1.77)$$

где  $\lambda$  определяется формулой (1.70).

В развернутом виде формула (1.77) имеет вид

$$y_{дин} = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 \rho^2}}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + \alpha^2 q^2}} \xi_0, \quad (1.78)$$

где

$$\alpha = \frac{2h}{\omega}; \quad q = \frac{\rho}{\omega}.$$

Коэффициент  $\lambda$  может быть взят из табл. 1 или из графика на рис. 1.14.

Для сдвига фаз получим значения

$$\operatorname{tg}(\gamma + \delta) = -\frac{\alpha q^3}{1 - q^2 + \alpha^2 q^2}, \quad (1.79)$$

где  $\operatorname{tg} \gamma = \alpha q$ .

Иногда вместо коэффициента увеличения деформаций вводят величину коэффициента амортизации, равного отношению амплитуды колебаний массы  $m$

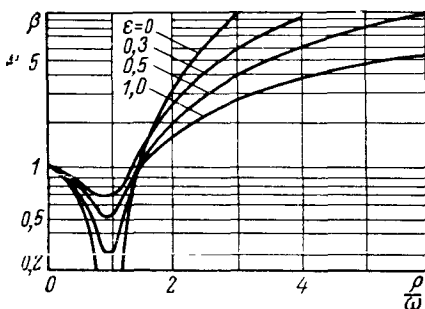


Рис. 1.16

$$\beta = \frac{\xi_0}{y_{дин}}, \quad (1.80)$$

который характеризует степень защиты от колебаний данной системы.

На графике (рис. 1.16) показана зависимость коэффициента амортизации от частоты для разных значений декремента затухания  $\delta$  при  $\varepsilon = \frac{\delta}{\pi} = \frac{h\tau}{\pi}$  [34].

## ГЛАВА 2

# КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ

#### Связи системы и обобщенные координаты

При изучении колебаний упругой системы в первую очередь необходимо установить число степеней свободы, которыми она обладает. Положим, что имеется система материальных точек  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , прямоугольные координаты которых  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ . Наличие связей ограничивает свободу перемещений и накладывает на систему ряд дополнительных условий. Как известно из механики, связи разделяются на голономные и неголономные. Система считается голономной, если связи, наложенные на нее, выражаются в конечных членах и записываются системой уравнений вида

$$F_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (2.1)$$

Если  $F_i$  не зависят от времени, то связи называются стационарными (склерономными), в противном случае они называются нестационарными (реономными).

Число степеней свободы для нашей системы  $h = 3n - k$ . В таком случае конфигурация и положение системы вполне определяется  $3n - k = h$  независимыми координатными параметрами  $q_1, q_2, \dots, q_h$ , т. е. координаты точек системы

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_h; t); \\ y_i &= \psi_i(q_1, q_2, \dots, q_h; t); \\ z_i &= \omega_i(q_1, q_2, \dots, q_h; t); \\ &(i = 1, 2, \dots, n); \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

независимые переменные  $q_1, q_2, \dots, q_h$ , которые определяют положение точек системы, называются обобщенными координатами.

Таким образом, число степеней свободы определяется числом независимых вариаций  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$  обобщенных координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . При этом бесконечно малые вариации перемещения  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$  являются возможными в данный момент.

Если подставить  $x_i, y_i, z_i$  из уравнения (2.2) в уравнение (2.1), то мы удовлетворим им тождественно.

Неголономными системами называются такие, в которых, например, некоторые связи выражаются дифференциальными зависимостями

$$f_1 \delta q_1 + f_2 \delta q_2 + \dots + f_k \delta q_k = 0, \quad (2.3)$$

где

$$f_i = f_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t).$$

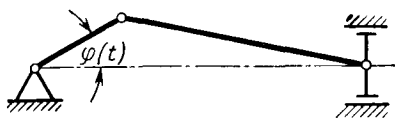


Рис. 2.1

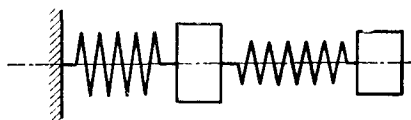


Рис. 2.2

В зависимости (2.3) левая часть не является полным дифференциалом, в ней также нет интегрирующего множителя.

К таким системам относится, например, тяжелое тело, катящееся по плоскости и вращающееся. В этом случае скорость точки, соприкасающейся с плоскостью, равна нулю, и мы получим соотношения вида (2.3) ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ).

Для голономной системы

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \delta q_n, \quad (2.4)$$

где  $\delta x_i$  является полным дифференциалом.

В каждом отдельном случае можно без составления уравнения связей в прямоугольных координатах выбрать обобщенные координаты и составить выражения координат точек системы. Обобщенные координаты, как известно, не обязательно имеют измерения длины.

В качестве примера системы с одной степенью свободы можно привести кривошипно-шатунный механизм (рис. 2.1), а также груз, подвешенный на пружине и колеблющийся вдоль оси пружины (см. рис. 1.11).

В качестве примеров системы с двумя степенями свободы можно привести двойной маятник, обобщенные координаты для которого — две массы, подвешенные на пружинах (рис. 2.2), которые колеблются вертикально. Сферический маятник, под которым понимается тяжелая материальная точка, движущаяся по сфере, также является системой с двумя степенями свободы (рис. 2.3).

В качестве обобщенных координат в этой системе могут быть взяты угловые координаты  $\varphi$  и  $\theta$  (долгота и широта).

Положение твердого тела, связанного с пружинами (рис. 2.4), вполне определяется шестью независимыми координатами; тремя, характеризующими положение центра тяжести, и тремя углами вращения  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ .

В общем случае упругая система является системой с неограниченным количеством степеней свободы. Положение такой системы также может быть выражено через обобщенные координаты. Так,

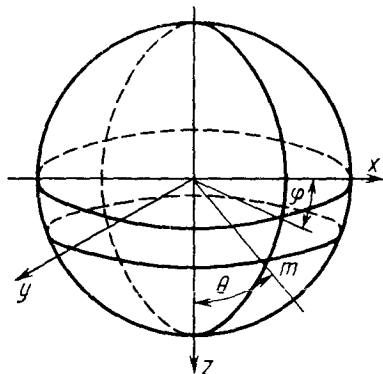


Рис. 2.3

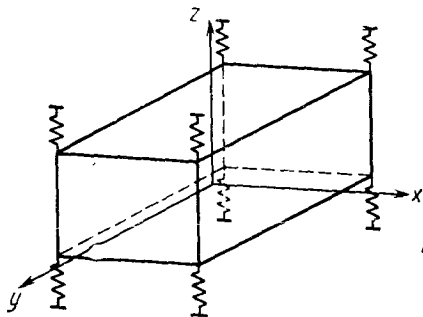


Рис. 2.4

например, уравнение изогнутой оси балки, опертой по концам, может быть записано в виде

$$y = q_1 \sin \frac{\pi x}{l} + q_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots,$$

где  $q_1, q_2, \dots$  можно принять за обобщенные координаты.

В каждом частном случае необходимо оценить влияние различных факторов, чтобы наиболее просто определить положение упругой системы через обобщенные координаты, и, если возможно, ограничить количество степеней свободы.

Например, если с весомой балкой связаны массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$  и массой балки по сравнению с массой груза можно пренебречь, то такую систему следует рассматривать как систему с  $n$  степенями свободы.

### Уравнения движения Лагранжа второго рода

При изучении колебаний систем с ограниченным количеством степеней свободы применяются уравнения движения Лагранжа второго рода. Эти уравнения могут быть получены и непосредственно из общего уравнения движения. При применении уравнений Лагранжа положение системы, имеющей  $n$  степеней свободы, опре-

деляется  $n$  параметрами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , не зависящими друг от друга (обобщенные координаты). В каждом частном случае можно установить, какими параметрами удобно определить положение системы.

Для системы с  $n$  степенями свободы координаты точек системы определяются выражениями (2.2):

$$\begin{aligned}x_i &= f_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t); \\y_i &= \Phi_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t); \\z_i &= \Psi_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t).\end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа получаются из общего уравнения движения динамики для заданной системы

$$\sum_{i=1}^n [(X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0, \quad (2.5)$$

где  $X_i, Y_i, Z_i$  — составляющие заданных сил;

$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  — проекции возможных перемещений, совместных со связями для данного момента времени;

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \delta q_n.$$

Аналогичные выражения получаются для  $\delta y_i, \delta z_i$ . После подстановки этих значений в уравнении движения (2.5) получим

$$(P_1 - Q_1) \delta q_1 + (P_2 - Q_2) \delta q_2 + \dots + (P_n - Q_n) \delta q_n = 0, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned}P_i &= \sum_k m_k \left( \frac{d^2 x_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{d^2 y_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{d^2 z_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right); \\Q_i &= \sum_k \left( X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).\end{aligned}$$

Так как вариации  $\delta q_i$  произвольны, то уравнения движения

$$P_1 - Q_1 = 0, \quad P_2 - Q_2 = 0, \quad \dots, \quad P_n - Q_n = 0.$$

Члены  $m_i \ddot{x}_i \delta x_i$  можно преобразовать следующим образом:

$$m x'' \delta x = \frac{d}{dt} (m x' \delta x) - m x' (\delta x)' = \frac{d}{dt} (m x' \delta x) -$$

$$- m x' \delta x' + m x' [(\delta x)' - (\delta x)'] = \frac{d}{dt} (m x' \delta x) - \frac{m}{2} \delta x'^2,$$

так как  $\delta x' - (\delta x)' = 0$ .

Аналогичные выражения получаются и для  $my''\delta y$ ,  $mz''\delta z$ . Таким образом, уравнение динамики (2.5) получает вид

$$\sum_i \left\{ \frac{d}{dt} [m_i (x'_i \delta x_i + y'_i \delta y_i + z'_i \delta z_i)] - \delta T - (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \right\} = 0, \quad (2.7)$$

где  $T$  — кинетическая энергия тела;

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2). \quad (2.8)$$

Переходим к обобщенным координатам  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Производные по времени от них  $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$ . Возможные перемещения, совместимые со связями для данного момента времени,

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \delta q_n. \quad (2.9)$$

Дифференцируя уравнения (2.2), получим

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} q'_n + \frac{\partial x_i}{\partial t}; \\ \frac{d}{dt} \sum m_i (x'_i \delta x_i + y'_i \delta y_i + z'_i \delta z_i) &= \\ &= \sum_k \frac{d}{dt} \sum_i m_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial y_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial z_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из уравнения (2.10) следует  $\frac{\partial x'_i}{\partial q_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ ,

поэтому

$$\begin{aligned} &\sum_k \frac{d}{dt} \sum m_i \left( x'_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + y'_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + z'_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k - \delta T = \\ &= \sum_k \frac{d}{dt} \sum_i m_i \left( x'_i \frac{\partial x'_i}{\partial q_k} + y'_i \frac{\partial y'_i}{\partial q_k} + z'_i \frac{\partial z'_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k - \delta T = \\ &= \sum_k \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q'_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k = \sum_k P_k \delta q_k. \end{aligned}$$

Уравнение движения принимает вид (2.6):

$$(P_1 - Q_1) \delta q_1 + (P_2 - Q_2) \delta q_2 + \dots + (P_n - Q_n) \delta q_n = 0.$$



Так как это уравнение остается в силе для любых  $\delta q_i$ , то должно быть

$$P_1 - Q_1 = 0, \quad P_2 - Q_2 = 0, \quad \dots, \quad P_n - Q_n = 0,$$

где

$$Q_i = \sum_k \left( X_k \frac{\partial X_k}{\partial q_i} + Y_k \frac{\partial Y_k}{\partial q_i} + Z_k \frac{\partial Z_k}{\partial q_i} \right).$$

Таким образом, уравнения Лагранжа второго рода получают вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.11)$$

где  $\dot{q}_i$  — производные по времени от обобщенных координат  $q_i$ ;  
 $T$  — кинетическая энергия системы;  
 $Q_i$  — обобщенная сила, значение которой получается из выражения для работы внешних сил после преобразования к новым координатам, т. е.

$$\sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n; \quad (2.12)$$

здесь  $\delta q_i$  — возможные перемещения системы для заданного момента времени, совместные со связями.

В случае, если работа сил на некотором перемещении зависит только от начального и конечного значений параметров  $q_1, q_2, \dots, q_n$  (но не зависит от промежуточных значений), то их работа будет определяться функцией  $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , представляющей потенциальную функцию системы.

Уравнение Лагранжа в этом случае можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0. \quad (2.13)$$

Уравнение Лагранжа пригодны для голономных систем.

В случае неголономных систем, для которых некоторые связи задаются соотношениями (2.3), уравнениями Лагранжа можно пользоваться в сочетании со способом множителей. Число множителей  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  определяется числом связей.

Основные уравнения динамики (2.2) для любых связей, голономных и неголономных, могут быть представлены в более общем виде:

$$\frac{dS}{dq_1} = Q_1; \quad \frac{\partial S}{\partial q_2} = Q_2; \quad \dots; \quad \frac{\partial S}{\partial q_n} = Q_n, \quad (2.14)$$

где  $S$  — энергия ускорения;

$$S = \frac{1}{2} \sum m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m J^2.$$

Эти уравнения в форме Аппеля вытекают из начала наименьшего принуждения Гаусса. Функция  $S$  не должна содержать никаких вторых производных, кроме  $q_1''$ ,  $q_2''$ , ...,  $q_n''$ .

### Канонические уравнения движения Гамильтона

В ряде случаев при изучении колебаний удобно представлять уравнения движения в форме Гамильтона. Пуассоном было предложено ввести новые переменные

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}, \dots, \quad (2.15)$$

через которые можно линейным образом выразить  $q_1'$ ,  $q_2'$ , ...  
Значение

$$\delta T = \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i p_i \delta \dot{q}_i,$$

полагая  $K = \sum p_i \dot{q}_i - T$ , запишем так:

$$\delta K = - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \dot{q}_i \delta p_i.$$

С другой стороны,

$$\delta K = \sum \frac{\partial K}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i,$$

откуда

$$- \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial K}{\partial q_i}; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial K}{\partial p_i},$$

так как

$$T = T(q, \dot{q}); \quad K = K(q, p),$$

то, следовательно, уравнения Лагранжа будут

$$\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i; \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_i}. \quad (2.16)$$

Принимая во внимание, что  $Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$ , где  $U = U(q_1, q_2, \dots, t)$  — силовая функция системы,  $K - U = H$ , получим уравнения Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{\partial p_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.17)$$

Если связи не зависят от времени, то, принимая во внимание, что  $T$  — однородная квадратическая функция от  $\dot{q}'$ , получим

$$\text{Следовательно, } \sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum p_i \dot{q}_i = 2T.$$

$$K = \sum p_i \dot{q}_i - T = T \text{ и } H = T - U.$$



Поэтому определитель системы (2.21) в дальнейшем будем писать в виде так называемого векового уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda^2 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda^2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.22)$$

где

$$a_{11} = -\frac{c_{11}}{m_1}; \quad a_{12} = -\frac{c_{12}}{m_1}; \quad \dots; \quad a_{n1} = -\frac{c_{n1}}{m_n}; \quad a_{n2} = -\frac{c_{n2}}{m_n}.$$

Можно доказать, что корни уравнения (2.22) отрицательны, причем все решения уравнений (2.19) при этом условии будут чисто периодическими, т. е. решение уравнений (2.19) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \delta_1^i &= A_{1i} \sin(\omega_i t + \varepsilon_i); & \delta_2^i &= A_{2i} \sin(\omega_i t + \varepsilon_i); \\ \delta_n^i &= A_{ni} \sin(\omega_i t + \varepsilon_i). \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Таким образом, мы получаем главные виды колебаний.

Основные методы решения характеристического уравнения в настоящее время хорошо разработаны и нахождение корней их с помощью электронных цифровых вычислительных машин никаких затруднений не представляет [98, 110].

## КОЛЕБАНИЯ НЕВЕСОМЫХ БАЛОК

### Составление уравнения частоты для невесомой балки с помощью коэффициентов влияния

Для балки, находящейся под действием  $n$  сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , приложенных в сечениях  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , прогиб под грузом  $P_k$  будет

$$y_k = \sum_{i=1}^n \delta_{ki} P_i \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.24)$$

где  $\delta_{ki}$  — коэффициент влияния, т. е. прогиб балки в сечении с абсциссой  $x_k$  под действием единичной силы, приложенной в точке  $x_i$ ; при этом из теоремы взаимности следует, что

$$\delta_{ki} = \delta_{ik}. \quad (2.25)$$

Для того чтобы получить уравнение частоты, вместо  $P_i$  необходимо в уравнение (2.24) подставить значение

$$P_i = -m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}. \quad (2.26)$$

где  $y_i(t)$  — прогиб в сечении с абсциссой  $x_i$ ;  $m_i = \frac{P_i}{g}$ .

Таким образом, получим систему дифференциальных уравнений

$$y_k(t) + \sum_{i=1}^n \delta_{ki} m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = 0. \quad (2.27)$$

Разыскивая решение системы уравнений (2.27) в виде

$$y_i(t) = Y_i \sin(\omega t + \varphi),$$

после подстановки в (2.27)  $y_i(t)$  получим систему однородных алгебраических уравнений относительно  $Y_i$ :

$$Y_k - \sum_{i=1}^n m_i \delta_{ki} \omega^2 Y_i = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (2.28)$$

Приравнявая определитель, составленный из коэффициентов при  $Y_k$ , нулю, получим уравнение частоты

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} m_1 \omega^2 - 1 & \delta_{12} m_2 \omega^2 & \dots & \delta_{1n} m_n \omega^2 \\ \delta_{21} m_1 \omega^2 & \delta_{22} m_2 \omega^2 - 1 & \dots & \delta_{2n} m_n \omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} m_1 \omega^2 & \delta_{n2} m_2 \omega^2 & \dots & \delta_{nn} m_n \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.29)$$

В частности, для одного груза  $m_1 \omega^2 \delta_{11} - 1 = 0$ , откуда  $\omega^2 = \frac{g}{P \delta_{11}} = \frac{g}{f}$ , где  $f$  — прогиб под грузом  $P$ .

Число колебаний в 1 мин

$$n \approx \frac{300}{\sqrt{f}}, \quad (2.30)$$

где  $f$  выражено в см.

Для того чтобы привести уравнение (2.29) к вековому уравнению, записанному в обратной форме, разделим все строки его на  $\omega^2$  и получим

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\omega^2} & m_2 \delta_{12} & \dots & m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{21} & m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega^2} & \dots & m_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} & m_2 \delta_{n2} & \dots & m_n \delta_{nn} - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.31)$$

Собственные значения можно определить одним из известных методов [98, 110].

## Дифференциальное уравнение поперечных колебаний

Перейдем теперь к изучению колебаний различных элементов конструкций. Помимо точных методов подсчета частот, будем излагать также и приближенные, которыми во многих случаях необходимо пользоваться при расчете конструкций на колебания.

В первую очередь изложим методы подсчета частот колебаний балок, исходя непосредственно из уравнения изогнутой оси стержня в главной плоскости. В этом случае, когда поперечные размеры балки малы сравнительно с длиной, прогиб  $y(x, t)$  изогнутой оси балки определяется известным дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = p, \quad (2.32)$$

причем предполагается, что колебание происходит в одной из главных плоскостей балки.

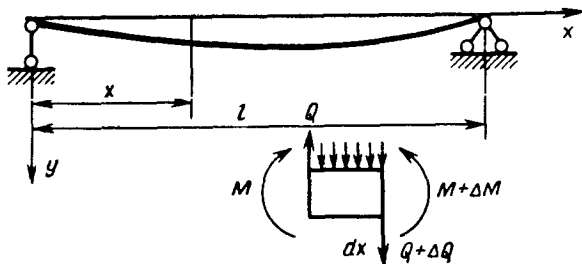


Рис. 2.5

В уравнении (2.32) и в дальнейшем обозначаем:

- $EJ$  — жесткость балки (в общем случае переменная);
- $p$  — интенсивность нагрузки, действующей на балку;
- $F$  — площадь поперечного сечения балки;
- $\rho$  — масса единицы объема ( $\gamma = \rho g$  — удельный вес).

Оси координат расположены, как указано на рис. 2.5 (левая координатная система). При этом момент  $M$  и перерезывающая сила  $Q$  будут

$$M = -EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \quad Q = -\frac{\partial}{\partial x} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right). \quad (2.33)$$

Уравнение движения получим согласно принципу Даламбера, прибавив к  $p$  силу инерции  $-\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ .

Если интенсивность внешних сил будет меняться во времени, т. е.  $p = p(x, t)$ , дифференциальное уравнение поперечных колебаний весомого стержня переменного сечения будет

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t). \quad (2.34)$$

Сначала изучим поперечные колебания стержня в предположении, что весом стержня можно пренебречь по сравнению с величиной нагрузок, действующих на него.

### Поперечные колебания невесомых балок постоянного сечения при наличии сосредоточенных масс

Во многих случаях масса балки мала по сравнению с сосредоточенными массами, связанными с балкой, и ею можно пренебречь или отнести ее к сосредоточенным нагрузкам. В таком случае определение частот колебаний сводится к нахождению решения дифференциального уравнения вида

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p(x, t), \quad (2.35)$$

где  $p(x, t)$  — внешняя нагрузка, отнесенная к погонной единице длины стержня.

Рассмотрим свободные колебания. Напишем сперва общее решение для уравнения изогнутой оси стержня, находящегося под действием нагрузки  $P(x) \cos \omega t$ , т. е. для уравнения

$$EJ \frac{d^4 Y}{dx^4} = P(x), \quad (2.36)$$

где

$$y(x, t) = Y(x) \cos \omega t.$$

Решение уравнения (2.36) удобно записать в виде

$$EJY(x) = A + Bx + C \frac{x^2}{2} + D \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-\xi)^3}{6} P(\xi) d\xi. \quad (2.37)$$

Здесь первые четыре члена соответствуют общему решению (2.36) без правой части, последний член — частному решению с правой частью, что легко проверяется непосредственной подстановкой.

Удобство такого рода решения заключается в том, что можно избежать составления условий сопряжения в местах приложения сосредоточенных нагрузок.

Предположим, что с балкой связаны  $n$  сосредоточенных нагрузок  $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_n$  в точках  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$  (рис. 2.6). Таким образом, допускаем, что нагрузка  $p(x)$  везде равна нулю, за исключением мест приложения нагрузок  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

Эти нагрузки будем рассматривать как предельное положение нагрузок  $p_1, p_2, \dots$ , распределенных в интервалах от  $x_1$  до  $x_1 + \sigma_1$ , от  $x_2$  до  $x_2 + \sigma_2$ , причем предполагаем, что в пределе,

когда  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  стремятся к нулю,  $p_1, p_2, \dots, p_n$  возрастают таким образом, что

$$p_1\sigma_1 \rightarrow P_1, \quad p_2\sigma_2 \rightarrow P_2, \quad \dots, \quad p_n\sigma_n \rightarrow P_n \quad \text{при } \sigma_i \rightarrow 0, \quad (2.38)$$

т. е. стремятся к заданным сосредоточенным нагрузкам.

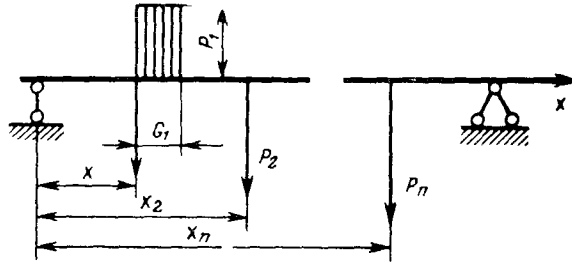


Рис. 2.6

Так как в первом интервале  $0 \leq x \leq x_1$  нагрузка  $p(x) = 0$ , то уравнение изогнутой оси в этом интервале имеет вид

$$EJY(x) = A + Bx + C \frac{x^2}{2} + D \frac{x^3}{6}. \quad (2.39)$$

Для второго интервала от  $x_1$  до  $x_2$ ,  $p(x)$  также везде равна нулю, за исключением участка от  $x_1$  до  $x_1 + \sigma$ , где она равна  $p_1$ . Следовательно, для  $x_1 + \sigma_1 < x < x_2$

$$EJY(x) = A + Bx + C \frac{x^2}{2} + D \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6} \int_{x_1}^{x_1 + \sigma_1} p_1(x - \xi)^3 d\xi.$$

Применяя теорему о среднем значении и принимая во внимание условие (2.38), получим уравнение изогнутой оси для второго интервала  $x_1 \leq x \leq x_2$

$$EJY(x) = A + Bx + C \frac{x^2}{2} + D \frac{x^3}{6} + \frac{P_1}{6} (x - x_1)^3. \quad (2.40)$$

Аналогичным образом для интервала между  $k$  и  $k + 1$  грузом найдем уравнение изогнутой оси

$$EJY(x) = A + Bx + C \frac{x^2}{2} + D \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^k P_i (x - x_i)^3. \quad (2.41)$$

С помощью выражений (2.39)—(2.41) можно получить решение уравнения (2.36).

Для свободных колебаний берем решение уравнения (2.35) в виде

$$y(x, t) = Y(x) \cos \omega t. \quad (2.42)$$



Если обозначим веса — силы тяжести, связанные с балкой в сечениях  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$  через  $G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_n$ , то силы, приложенные к балке, будут

$$P_i = G_i - \frac{G_i}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2_{x=x_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.43)$$

В дальнейшем постоянные нагрузки, действующие на балку, в расчет не принимаем, так как они не влияют на установившееся колебательное движение; в таком случае в сечениях  $x_1, x_2, \dots, x_n$  будут приложены сосредоточенные нагрузки

$$P_i = - \frac{G_i}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2_{x=x_i}} = \frac{G_i}{g} Y(x_i) \omega^2 \cos \omega t \quad (i = 1; 2, \dots, n). \quad (2.44)$$

Следовательно, на основании предыдущего в первом интервале  $0 \leq x \leq x_1$  уравнение изогнутой оси будет (2.39), для интервала  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$

$$EJY(x) = A + B(x) + C \frac{x^2}{2} + D \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^k \frac{G_i}{g} \omega^2 Y(x_i) (x - x_i)^3. \quad (2.45)$$

Пользуясь выражениями (2.39) и (2.45), можно составить в каждом отдельном случае уравнение частоты, из которого и определяются частоты собственных колебаний.

Можно применить еще следующий прием. Определяем последовательно из уравнения (2.45) значения  $Y(x_1), Y(x_2), \dots$ , в зависимости от двух произвольных постоянных, которые остаются после удовлетворения условий закрепления для левого конца и обозначены через  $A_1, B_1$ ; тогда для выбранного определенного значения  $\omega_1$

$$Y_1 = a_1 A_1 + b_1 B_1.$$

Удовлетворяя условиям закрепления на правом конце, получим два однородных уравнения относительно  $A_1, B_1$ .

Если определитель этой системы  $D(\omega_1)$  не будет равен нулю, то, давая  $\omega$  ряд других значений  $\omega_2, \omega_3, \dots$  и вычисляя  $D(\omega_i)$ , получим в ряде чисел  $D(\omega_1), D(\omega_2), \dots$  несколько перемен знака. Если, например, первая перемена будет в интервале  $[D(\omega_i), D(\omega_{i+1})]$ , то первое значение корня

$$\omega^{(1)} = \omega_i + \frac{(\omega_{i+1} - \omega_i) D(\omega_i)}{D(\omega_i) - D(\omega_{i+1})}.$$

Аналогичным образом можно определить и другие значения корней. При желании можно уточнить значение корней, сблизив интервалы и вычислив еще промежуточные значения  $\omega$ .

Если необходимо определить лишь основной тон, то удобнее использовать приближенные методы, которые изложим в дальнейшем.

### Изменение жесткости балки по ступенчатому закону

В том случае, если жесткость балки — величина переменная, решение задачи получаем после интегрирования уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = p(x, t). \quad (2.46)$$

Решение уравнения (2.46) никаких принципиальных трудностей не представляет.

Определение частот колебаний стержней со ступенчатым законом изменения жесткости имеет большое значение для расчета критических чисел оборотов многоопорных валопроводов.

В дальнейшем, в гл. 16, подробнее остановимся на определении частот колебаний этой упругой системы с применением ЭЦВМ.

### Невесомая балка, опертая по концам, с тремя сосредоточенными массами

Уравнение изогнутой оси для первого интервала от  $0 \leq x \leq x_1$  задано формулой (2.39).

Так как балка свободно оперта, то условия опирания для левого конца будут следующие:  $Y(0) = 0$ ,  $Y''(0) = 0$ , и, следовательно, для постоянных  $A$  и  $C$  в уравнении (2.39) получаем значения  $A = C = 0$ .

Уравнение изогнутой оси для последнего интервала  $x_3 \leq x \leq l$  согласно формуле (2.45) имеет вид

$$EJY(x) = Bx + \frac{D}{6}x^3 + \frac{\omega^2}{6} \sum_{i=1}^3 \frac{G_i}{g} Y(x_i)(x - x_i)^3. \quad (2.47)$$

Произвольные постоянные  $B$  и  $D$  определяем из условий опирания для правого конца  $Y(l) = 0$ ;  $Y''(l) = 0$ , откуда

$$D = -\frac{\omega^2}{l} \sum_{i=1}^3 \frac{G_i}{g} Y(x_i)(l - x_i);$$

$$Bl + D \frac{l^3}{6} = -\frac{\omega^2}{6} \sum_{i=1}^3 \frac{G_i}{g} Y(x_i)(l - x_i)^3.$$

После подстановки значений  $B$  и  $D$  в общее решение (2.47) получим для  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$  ( $k = 1, 2, 3$ ; причем  $x_4 = l$ )

$$EJY(x) = -\frac{x\omega^2}{6l} \sum_{i=1}^3 \frac{G_i}{g} Y(x_i)(l - x_i)[(l - x_i)^2 + (x^2 - l^2)] + \frac{\omega^2}{6} \sum_{i=1}^k \frac{G_i}{g} Y(x_i)(x - x_i)^3. \quad (2.47')$$

Полагая значения  $x$  соответственно равными  $x_1, x_2, x_3$ , т. е. вычисляя значения прогибов под грузами  $G_1, G_2, G_3$ , получим систему трех однородных уравнений относительно  $Y(x_1), Y(x_2), Y(x_3)$ . Эта система однородных уравнений допускает решение, отличное от нуля, лишь при условии обращения в нуль определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных  $Y(x_1), Y(x_2), Y(x_3)$ .

Система уравнений согласно формуле (2.47') будет

$$\begin{aligned}
 EJY(x_1) + \frac{\omega^2}{6} \sum_{i=1}^2 \frac{x_i}{l} (l-x_i) [(l-x_i)^2 + (x_i^2 - l^2)] \frac{G_i}{g} Y(x_i) = 0; \\
 EJY(x_2) - \frac{\omega^2}{6} \cdot \frac{G_1}{g} Y(x_1) (x_2 - x_1)^3 + \\
 + \frac{\omega^2}{6} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{l} (l-x_i) [(l-x_i)^2 + (x_i^2 - l^2)] \frac{G_i}{g} Y(x_i) = 0; \\
 EJY(x_3) - \frac{\omega^2}{6} \cdot \frac{G_1}{g} Y(x_1) (x_3 - x_1)^3 - \\
 - \frac{\omega^2}{6} \cdot \frac{G_2}{g} Y(x_2) (x_3 - x_2)^3 - \\
 + \frac{\omega^2}{6} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{l} (l-x_i) [(l-x_i)^2 + (x_i^2 - l^2)] \frac{G_i}{g} Y(x_i) = 0.
 \end{aligned}$$

Приравняв определитель этой системы, составленный из коэффициентов при  $Y(x_1), Y(x_2), Y(x_3)$  нулю, получим следующее уравнение частоты:

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} - v^2 & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} - \frac{m_1}{m_2} v^2 & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} - \frac{m_1}{m_3} v^2
 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.48)$$

где  $v^2 = \frac{6EJ}{m_1 l^3 \omega^2}$ ;  $m_1 = \frac{G_1}{g}$ ;  $m_2 = \frac{G_2}{g}$ ;  $m_3 = \frac{G_3}{g}$ .

Коэффициенты  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{23}$  имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned}
 a_{11} &= 2b_1^2 (1 - b_1)^2; \\
 a_{21} &= a_{12} = b_1 (1 - b_2) [2b_2 - (b_1^2 + b_2^2)]; \\
 a_{13} &= a_{31} = b_1 (1 - b_3) [2b_3 - (b_1^2 + b_3^2)]; \\
 a_{23} &= a_{32} = b_2 (1 - b_3) [2b_3 - (b_2^2 + b_3^2)]; \\
 a_{22} &= 2b_2^2 (1 - b_2)^2; \\
 a_{33} &= 2b_3^2 (1 - b_3)^2,
 \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

причем  $b_1 = \frac{x_1}{l}$ ;  $b_2 = \frac{x_2}{l}$ ;  $b_3 = \frac{x_3}{l}$ .

Следует отметить, что  $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$  с точностью до постоянной представляют собой коэффициенты влияния для смещений, т. е. перемещения точек  $x_1, x_2, x_3$  под действием единичной силы, приложенной в точке  $x_i$ .

Аналогично изложенному выше можно составить уравнение частоты при любых условиях заделки и другом числе грузов.

**Пример.** Рассмотрим балку с тремя грузами, заданными следующим образом:  $G_1 = G_3$ ;  $G_2 = 2G_1$ ;  $b_1 = \frac{x_1}{l} = 0,2$ ;  $b_2 = 0,5$ ;  $b_3 = 0,8$ .

Значения коэффициентов  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{23}, a_{33}$  согласно уравнениям (2.49) будут

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0,0512; & a_{12} &= 0,0710; & a_{13} &= 0,0368; \\ a_{21} &= 0,0710; & a_{22} &= 0,125; & a_{23} &= 0,0710; \\ a_{31} &= 0,0368; & a_{32} &= 0,0710; & a_{33} &= 0,0512. \end{aligned}$$

Определитель по уравнению (2.48) имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0,512 - \nu^2 & 0,0710 & 0,0368 \\ 0,0710 & 0,125 - \frac{\nu^2}{2} & 0,0710 \\ 0,0368 & 0,0710 & 0,0512 - \nu^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя этот определитель по обычным правилам и располагая его по степеням  $\nu^2$ , получим следующее кубическое уравнение относительно  $\nu^2$ :

$$\nu^6 - 0,3524\nu^4 + 0,006703\nu^2 - 0,00002644 = 0.$$

Корни этого уравнения имеют значения:

$$\nu_3^2 = 0,00554; \quad \nu_2^2 = 0,0143; \quad \nu_1^2 = 0,3324.$$

Значения частот колебаний  $\omega$  будут

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\sqrt{6}}{\nu_1} \sqrt{\frac{EJg}{G_1 l^3}} = 4,24 \sqrt{\frac{EJg}{G_1 l^3}}; \\ \omega_2 &= 20,5 \sqrt{\frac{EJg}{G_1 l^3}}; \quad \omega_3 = 32,9 \sqrt{\frac{EJg}{G_1 l^3}}. \end{aligned}$$

### Балка с $n$ равными массами $m$ , расположенными на одинаковых расстояниях

В том случае, когда все массы  $m$  равны и расположены на одинаковых расстояниях друг от друга (рис. 2.7),  $n$  частот колебаний, которыми обладает наша система с  $n$  массами, можно определить с помощью составления уравнения в конечных разностях.

Возьмем начало координат для  $k$ -й массы в точке, где находится масса  $m_k$ , и направим оси координат для  $k$  и  $(k+1)$ -го участков так, как указано на рис. 2.7.

В дальнейшем обозначим:

$$\left. \begin{aligned} Y_k(0) &= Y_{k+1}(0) = \eta_k; \\ Y_k^{II}(0) &= Y_{k+1}^{II}(0) = \mu_k. \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

В таком случае уравнение изогнутой оси для  $k$ -го участка между  $k$  и  $(k + 1)$ -м грузами согласно формуле (2.74) будет (2.50)

$$Y_k = \eta_k + B_k x + \mu_k \frac{x^2}{2} + D_k \frac{x^3}{6}; \quad (2.51)$$

для  $(k + 1)$ -го участка

$$Y_{k+1} = \eta_k + B_{k+1} x + \mu_k \frac{x^2}{2} + D_{k+1} \frac{x^3}{6}. \quad (2.52)$$

Кроме условий (2.50), необходимо еще удовлетворить в месте сопряжения участков  $k$  и  $k + 1$  условию равенства углов наклона касательных

$$-Y'_k(0) = Y'_{k+1}(0) \quad (2.50')$$

и условию равновесия изменения перерезывающей силы и силы инерции массы, приложенной в месте сопряжения участков, т. е.

$$-EJY''_{k+1}(0) - EJY''_k(0) + m\omega^2 Y_k(0) = 0. \quad (2.50'')$$

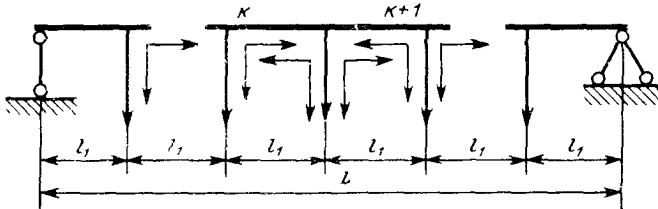


Рис. 2.7

После подстановки в уравнения (2.50') и (2.50'') значений  $Y(0)$ ,  $Y'(0)$ ,  $Y''(0)$ , которые вычисляются из формул (2.51) и (2.52), получим

$$B_{k+1} + B_k = 0, \quad D_{k+1} + D_k = \frac{m\omega^2}{EJ} \eta_k. \quad (2.53)$$

Для того чтобы найти зависимости между  $\eta_k$  и  $\mu_k$ , напомним следующие условия: ✓

$$Y_{k+1}(l_1) = \eta_{k+1}, \quad Y_k(l_1) = \eta_{k-1};$$

$$Y''_{k+1}(l_1) = \mu_{k+1}, \quad Y''_k(l_1) = \mu_{k-1};$$

$$\eta_{k+1} = \eta_k + B_{k+1} l_1 + \mu_k \frac{l_1^2}{2} + D_{k+1} \frac{l_1^3}{6}; \quad (2.54)$$

$$\eta_{k-1} = \eta_k + B_k l_1 + \mu_k \frac{l_1^2}{2} + D_k \frac{l_1^3}{6}; \quad (2.55)$$

$$\mu_{k+1} = \mu_k + D_{k+1} l_1; \quad (2.56)$$

$$\mu_{k-1} = \mu_k + D_k l_1. \quad (2.57)$$

Складывая уравнения (2.54) и (2.55)—(2.57) и принимая во внимание соотношения (2.53), получим

$$\left. \begin{aligned} \eta_{k+1} + \eta_{k-1} &= 2\eta_k + \mu_k l_1^2 + \frac{l_1^3 m \omega^2}{6EJ} \eta_k; \\ \mu_{k+1} + \mu_{k-1} &= 2\mu_k + \frac{l_1 m \omega^2}{EJ} \eta_k. \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Зависимость между  $\eta_k$  и  $\mu_k$  в трех соседних сечениях дают уравнения в конечных разностях, с помощью которых можно составить уравнение частоты для определения  $n$  частот колебаний.

Наиболее просто получается решение этой системы уравнений в конечных разностях для случая открытых концов. В этом случае необходимо взять для  $\eta_k$  и  $\mu_k$  следующие значения:

$$\eta_k = A \sin \frac{k v \pi}{n+1}; \quad \mu_k = \frac{B}{l_1^2} \sin \frac{k v \pi}{n+1}, \quad (2.59)$$

где  $v$  — целое число;  
 $n+1$  — число участков.

Условия опирания здесь удовлетворяются, так как для  $k=0$  и  $k=n+1$  (на концах балки)

$$\eta_k + \mu_k = 0.$$

После подстановки значения (2.59) в систему (2.58) и сокращения на  $\sin \frac{k v \pi}{n+1}$  получим

$$\begin{aligned} \left[ 2 \left( \cos \frac{v \pi}{n+1} - 1 \right) - \frac{l_1^3}{6} \cdot \frac{m \omega^2}{EJ} \right] A - B &= 0; \\ - \frac{l_1^3}{EJ} m \omega^2 A + 2 \left( \cos \frac{v \pi}{n+1} - 1 \right) B &= 0. \end{aligned}$$

Из условия совместности этих уравнений, приравнявая определитель нулю, получим значение квадрата частоты колебаний

$$\omega^2 = \frac{12(n+1)^3 EJ}{mL^3} \cdot \frac{\left( \cos \frac{v \pi}{n+1} - 1 \right)^2}{2 + \cos \frac{v \pi}{n+1}}, \quad (2.60)$$

где  $L$  — полный пролет стержня [ $L = l_1(n+1)$ ];  
 $m$  — масса одного сосредоточенного груза.

Аналогичным образом находим значение частоты для случая, когда две крайних массы расположены на расстоянии от опоры  $\frac{l_1}{2}$ .

Из соотношений (2.54)–(2.57) получим для первой массы для  $k = 1$

$$\eta_2 = \eta_1 + \frac{1}{2} B_2 l_1 + \mu_1 \frac{l_1^2}{8} + D_2 \frac{l_1^3}{48};$$

$$\eta_0 = \eta_1 + B_1 l_1 + \mu_1 \frac{l_1^2}{2} + D_1 \frac{l_1^3}{6} = 0;$$

$$\mu_2 = \mu_1 + \frac{l_1}{2} D_1, \quad \mu_0 = \mu_1 + l_1 D_1 = 0,$$

так как  $\eta_0 = \mu_0 = 0$ .

Учитывая соотношения (2.53), получим для  $k = 1$

$$\left. \begin{aligned} \eta_2 - 3\eta_1 &= \mu_1 l_1^2 + \frac{m\omega^2 l_1^3}{6EJ} \eta_1; \\ \mu_2 - 3\mu_1 &= \frac{m\omega^2 l_1}{EJ} \eta_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Система конечно-разностных уравнений (2.58) и (2.61) удовлетворяется, если принять

$$\eta_k = A \sin \frac{x_k v \pi}{n l_1}; \quad \mu_k = \frac{B}{l_1^2} \sin \frac{x_k v \pi}{n l_1},$$

где  $x_k$  — расстояние  $k$ -й массы от левой опоры.

Для квадрата частоты получим значение

$$\omega^2 = \frac{12n^3 E J}{m L^3} \cdot \frac{\left( \cos \frac{v \pi}{n} - 1 \right)^2}{2 + \cos \frac{v \pi}{n}}. \quad (2.62)$$

Давая для  $v$  значения 1, 2, 3, ...,  $n$ , получим все  $n$  частот колебаний балки, опертой на концах.

Если балка в местах, где расположены сосредоточенные массы, подперта упругими опорами, коэффициент упругости которых равен  $c$ , то в формулах (2.60) и (2.62) вместо  $\omega^2$  необходимо подставить

$$\omega^2 - \frac{c}{m}.$$

**Пример.** Рассмотрим балку с тремя массами на одинаковых расстояниях друг от друга.

1. Крайние массы находятся на расстоянии  $l_1$  от опор,  $n = 3$ . Взяв  $v = 1$ , получим значение частоты колебаний

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{12 \cdot 4^3 \left( \cos \frac{\pi}{4} - 1 \right)^2}{2 + \cos \frac{\pi}{4}}} \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}} = 4,933 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}.$$

Аналогично найдем для  $\nu = 2$  и  $\nu = 3$

$$\omega_2 = 19,596 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}; \quad \omega_3 = 41,067 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}.$$

2. Крайние массы находятся на расстоянии  $\frac{l_1}{2}$  от опор. По формуле (2.62) для  $\nu = 1, 2, 3$  получим

$$\omega_1 = 5,692 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}; \quad \omega_2 = 22,045 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}; \quad \omega_3 = 36,000 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}.$$

Расчеты показывают:  $p$ -я частота балки с распределенной нагрузкой отличается от  $p$ -й частоты балки с  $3p$  сосредоточенными массами всего лишь на 0,1%.

Для случая, когда концы балки заделаны каким-либо другим способом, решение системы в конечных разностях можно найти по обычным правилам с помощью подстановки в систему (2.58) зависимостей

$$\eta_k = A \xi^k; \quad \mu_k = B \xi^k.$$

### Вынужденные колебания

Выше нами рассматривались лишь свободные колебания стержня. Без всяких затруднений можно определить амплитуды вынужденных колебаний балки с сосредоточенными массами.

Допустим, например, что в сечении, где находится  $k$ -я сила  $G_k$ , действует периодическая сила  $H \sin k_1 t$ .

В этом случае уравнение изогнутой оси будет иметь прежний вид (см. 2.47):

$$JEY = A + Bx + C \frac{x^2}{2} + D \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m P_i (x - x_i)^3$$

$$\text{для } x_m \leq x \leq x_{m+1},$$

где только вместо  $P_i$  необходимо подставить его значение согласно (2.44), а именно:

$$P_i = m_i k_1^2 Y_i \quad \text{для } i \neq k;$$

$$P_i = m_i k_1^2 Y_i + H \quad \text{для } i = k.$$

Удовлетворяя условиям на правом конце, получим значения произвольных постоянных в зависимости от  $H$ .



## ГЛАВА 3

# ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

### ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕЙ

При изучении деформаций растяжения, сжатия и изгиба стержней обычно исходят из гипотезы плоских сечений. Однако при действии поперечных сил и при кручении стержня гипотеза плоских сечений при определении продольных деформаций волокон стержня не соблюдается. Происходит искривление поперечного сечения стержня или, как принято говорить, депланация сечения, которая зависит от степени кручения и меняется по длине. Переменность депланации по длине вызывает дополнительно к деформации растяжения-сжатия или изгиба еще изгибно-крутильную деформацию. Особенно сказывается эта деформация на тонкостенных профилях открытого сечения. Для стержня несимметричного поперечного сечения, имеющего начальную закрутку, деформации при изгибе, кручении и растяжении стержня оказываются связанными между собой, что также следует учитывать при исследовании колебаний стержней.

### Влияние касательных напряжений на деформацию

Согласно гипотезе плоских сечений при изгибе стержня в плоскости  $xz$  (рис. 3.1) напряжения  $\sigma_z$  линейно распределены по высоте сечения:

$$\sigma_z = E \frac{x}{\rho}. \quad (3.1)$$

При этом, очевидно, существует такой слой, называемый нейтральным, в котором  $\sigma_z = 0$ . Пересечение нейтрального слоя при изгибе бруса в плоскости  $xz$  и нейтрального слоя при изгибе в плоскости  $yz$  образует нейтральную ось стержня. Если ось  $z$  совпадает с нейтральной осью изотропного стержня, то

$$S_y = \int_F x dF = 0; \quad S_x = \int_F y dF = 0; \quad (3.2)$$

т. е. нейтральная ось изотропного стержня совпадает с осью центров тяжести поперечных сечений стержня. В этом случае она называется упругой осью стержня.

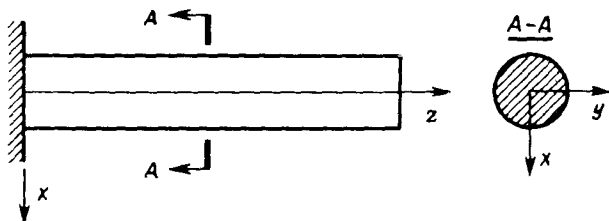


Рис. 3.1

В этом сечении при действии поперечных сил  $Q$  возникают касательные напряжения, которые согласно известной формуле Журавского будут

$$\tau_{xz} = \frac{Q}{J_y} \cdot \frac{S_y(x)}{b(x)}, \quad (3.3)$$

где  $S_y(x)$  — статический момент зачерпнутой части поперечного сечения (рис. 3.2);

$b(x)$  — ширина поперечного сечения на расстоянии  $x$  от начала координат.

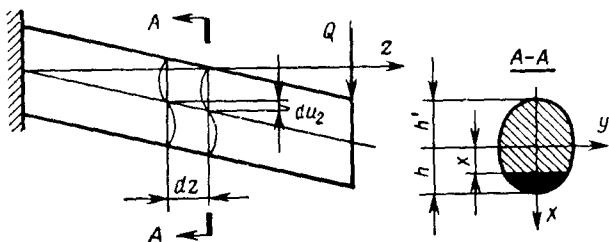


Рис. 3.2

Под действием касательных усилий каждая точка поперечного сечения совершает некоторое перемещение в направлении  $x$ . Обозначим перемещение точек нейтральной оси стержня вследствие сдвига через  $u_2$  в отличие от их перемещения  $u_1$  вследствие изгиба.

Потенциальная энергия из-за действия касательного усилия на площадке  $b(x) dx$  равна  $\frac{(\tau_{xz} b(x) dx)^2}{2Gb(x) dx} dz$ .

Потенциальная энергия элемента стержня, ограниченного двумя параллельными сечениями, на расстоянии  $dz$

$$dV = \int_{-h}^h \frac{\tau^2}{2G} b(x) dx dz.$$

Используя формулу (3.3), получим

$$dV = \frac{Q^2}{2G} \cdot \frac{1}{J_y^2} \int \frac{S_y^2(x)}{b(x)} dx dz = \frac{Q^2}{2GF} k dz, \quad (3.4)$$

где  $\frac{Q^2}{2GF} dz$  — обычное выражение потенциальной энергии элемента объема  $F dz$ , а коэффициент

$$k = \frac{F}{J^2} \int_{-h}^h \frac{S_y^2(x)}{b(x)} dx \quad (3.5)$$

учитывает неравномерность распределения касательных напряжений по поперечному сечению стержня. С другой стороны, работа силы  $Q$

$$dA = \frac{1}{2} Q du_2.$$

Так как  $dA = dV$ , можно записать

$$\frac{1}{2} Q du_2 = k \frac{Q^2}{2GF} dz; \quad \frac{du_2}{dz} = k \frac{Q}{GF}. \quad (3.6)$$

Это равенство выражает зависимость между деформацией сдвига на нейтральной оси и средним касательным напряжением в сечении  $\frac{Q}{F}$ .

С. Тимошенко вводит коэффициент  $k' = \frac{1}{k}$ .

Для прямоугольного поперечного сечения по формуле (3.5)  $k \cong 0,833$ . Согласно работе Миндлина для прямоугольного поперечного сечения  $k' = \frac{\pi^2}{12} \cong 0,822$ , для кругового сечения  $k' = 0,847$ , для овалов и эллипсов  $k'$  меняется в небольших пределах. В этой работе отмечается, что при колебаниях  $k'$  зависит от формы колебаний [151].


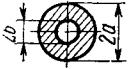

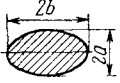



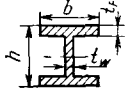
Каупер [120] при определении коэффициента формы поперечного сечения пришел к формуле

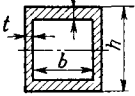
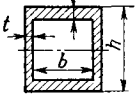
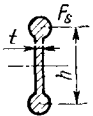
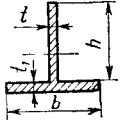
$$k' = \frac{2(1+\nu) J_y}{\frac{\nu(J_x - J_y)}{2} - \frac{E}{J_y} \int (\chi_c + xy^2) x dF}, \quad (3.7)$$

где  $\chi_c$  — функция изгиба Сен-Венана [59];  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Коэффициенты формы поперечного сечения для некоторых профилей, подсчитанные Каупером по этой формуле, приведены в табл. 3.1.

Коэффициент формы  $k'$  для учета неравномерности касательных напряжений по сечению  $c$

Сечение	Значение коэффициента $k'$	Форма и размеры поперечного сечения
Круг	$k' = \frac{6(1 + \nu)}{7 + 6\nu}$	
Кольцо	$k' = \frac{6(1 + \nu)(1 + m^2)^2}{(7 + 6\nu)(1 + m^2)^2 + (20 + 12\nu)m^2}$ $m = \frac{b}{a}$	
Прямоугольник	$k' = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu}$	
Эллипс	$k' = \frac{12(1 + \nu)a^2(3a^2 + b^2)}{(40 + 37\nu)a^4 + (16 + 10\nu)a^2b^2 + \nu b^4}$	
Полукруг	$k' = \frac{1 + \nu}{1,305 + 1,273\nu}$	
Тонкостенная круглая труба	$k' = \frac{2(1 + \nu)}{4 + 3\nu}$	
Тонкостенная прямоугольная труба	$k' = \frac{20(1 + \nu)}{48 + 39\nu}$	
Тонкостенный двутавр	$k' = \frac{10(1 + \nu)(1 + 3m)^2}{M_1 + \nu M_2 + 5mn^2 [6(1 + m) + \nu(8 + 9m)]}$ $m = \frac{2bt_F}{ht_w}; \quad n = \frac{b}{h}$ $M_1 = 12 + 72m + 150m^2 + 90m^3$ $M_2 = 11 + 66m + 135m^2 + 90m^3$	

Сечение	Значение коэффициента $k'$	Форма и размеры поперечного сечения
<p>Тонкостенный коробчатый профиль</p> 	$k' = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{M_1 + \nu M_2 + 10n^2m[3+\nu+3m]}$ $m = \frac{bt_1}{ht}$ $n = \frac{l}{h}$	
<p>Гантелеобразный профиль</p>	$k' = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{M_1 + \nu M_2}$ $m = \frac{2F_s}{ht}$ <p><math>F_s</math> — площадь утолщения</p>	
<p>Тонкостенный Т-образный профиль</p>	$k' = \frac{10(1+\nu)(1+4m)^2}{M_3 + \nu M_4 + 10mn^2(1+m)[3+\nu(1+4m)]}$ $m = \frac{bt_1}{ht}; \quad n = \frac{l}{h}$ $M_3 = 11 + 96m + 276m^2 + 192m^3$ $M_4 = 11 + 88m + 248m^2 + 216m^3$	

Для определения  $k'$  получена формула [100]

$$k' = \frac{1}{F} \int_F \left[ 1 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] dF; \quad (3.7')$$

здесь  $\chi$  — функция деформации поперечного сечения при сдвиге, определяющая распределение касательных напряжений в поперечном сечении стержня. Функция  $\chi$  и функция изгиба Сен-Венана  $\chi_s$  связаны соотношением

$$\chi = \frac{Fk'}{2(1+\nu)J_y} (\chi_s + xy^2) - x.$$

## Деформация при кручении

При закручивании на угол  $\theta$  точка  $A(x, y)$  поперечного сечения стержня (рис. 3.3) получит перемещение

$$\left. \begin{aligned} u &= \theta y; \\ v &= -\theta x. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Кроме того, при закручивании происходит деформация поперечного сечения. При этом перемещение волокон стержня вдоль оси  $z$  принимается пропорциональным относительному углу закручивания:

$$\omega = \frac{d\theta}{dz} \varphi(x, y), \quad (3.9)$$

где  $\varphi(x, y)$  — функция кручения, зависящая только от формы сечения.

Переменная по длине деформация сечений, т. е. переменность относительного угла закручивания  $\frac{d\theta}{dz}$ , приведет к возникновению изгибно-крутильной деформации.

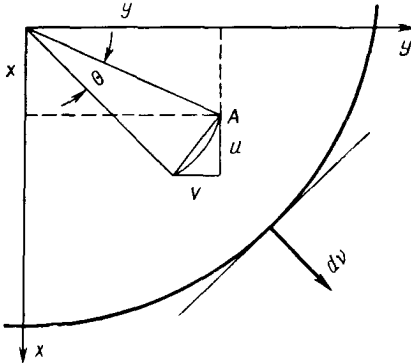


Рис. 3.3

Способы определения функции кручения для призм переменного сечения с произвольным контуром поперечного сечения не разработаны.

Считается возможным использовать для практических расчетов функцию кручения для призм постоянного поперечного сечения, имеющего форму того поперечного сечения стержня, для которого определяется функция кручения. Таким образом, каждое сечение стержня переменного сечения будет иметь свою функцию кручения, которая должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta^2 \varphi = 0 \quad (3.10)$$

и условию на контуре

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + y \cos(\nu, x) - x \sin(\nu, x) = 0. \quad (3.11)$$

Удобнее искать функцию кручения, удовлетворяя условию минимума интеграла:

$$J_0 = \iint_F \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x \right)^2 \right] dx dy. \quad (3.12)$$

При этом функция  $\varphi$ , найденная из условия  $\delta J_0 = 0$ , удовлетворяет уравнению (3.10) и граничному условию (3.11) тем

лучше, чем с большей точностью удовлетворяется вариационное уравнение.

Обычно задают  $\varphi(x, y)$  в виде

$$\varphi(x, y) = A\varphi_1 + B\varphi_2 + C\varphi_3 + \dots, \quad (3.13)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  — известные функции, чаще всего  $xy, yx, xy^3, x^3y, \dots$ ;

$A, B, C$  — неизвестные постоянные.

$$\text{Тогда } \delta J_0 = \frac{\partial J_0}{\partial A} \delta A + \frac{\partial J_0}{\partial B} \delta B + \frac{\partial J_0}{\partial C} \delta C + \dots = 0;$$

из условия независимости вариаций  $\delta A, \delta B, \delta C, \dots$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_0}{\partial A} &= 0, & \frac{\partial J_0}{\partial B} &= 0, \\ \frac{\partial J_0}{\partial C} &= 0, & \dots & \end{aligned} \quad (3.14)$$

Например, для эллиптического поперечного сечения, т. е. для контура  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , имеем  $\varphi = Axy$ , где  $A = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$ .

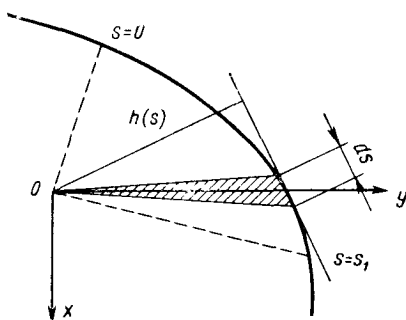


Рис. 3.4

Для тонкостенных стержней открытого профиля функция кручения может быть отождествлена с секториальной (секторной) площадью  $\omega(s)$ , которая равна [12]

$$\omega(s) = \int_0^s h(s) ds, \quad (3.15)$$

где  $s$  — длина средней линии контура, отсчитываемая от какой-либо фиксированной точки на контуре;

$h(s)$  — длина перпендикуляра, опущенного из полюса  $O$  на касательную к средней линии контура в точке с координатой  $s$ .

Величина  $h(s) ds$  равна удвоенной площади заштрихованного треугольника (рис. 3.4). Поэтому секторная площадь в точке координат равна удвоенной площади сектора, ограниченной линией контура и радиусами-векторами, проведенными из полюса  $O$  в точки с координатами  $s = 0$  и  $s = s_1$ .

В. З. Власов называет секторную площадь главной, если начало отсчета координаты  $s$  определено из условия  $\int_F \omega ds = 0$ , а полюс  $O$  находится в центре изгиба сечения.

## Центр изгиба

Если на стержень, поперечное сечение которого симметрично относительно какой-либо оси, действует в плоскости симметрии поперечная сила, то касательные напряжения сдвига распределены симметрично относительно этой оси. Тогда они могут быть сведены к одной равнодействующей, направленной вдоль оси симметрии. Момент касательных напряжений относительно центра тяжести сечения, лежащего всегда на оси симметрии,

$$M = \int \int_F [x\tau_{zy} - y\tau_{zx}] dF = 0, \quad (3.16)$$

и стержень испытывает только деформацию изгиба и сдвига в направлении оси симметрии.

Для несимметричного сечения условие (3.16) не имеет места и сила, приложенная в центре тяжести поперечного сечения, кроме изгиба и сдвига, вызовет закручивание стержня. Для обращения  $M$  в нуль необходимо сместить силу и приложить ее в точке, называемой центром изгиба. Таким образом, центром изгиба называется точка приложения силы в плоскости поперечного сечения (поперечной силы), вызывающей изгиб стержня без закручивания.

Если  $x_s$  и  $y_s$  координаты изгиба, то

$$\int \int [(x - x_s)\tau_{yz} - (y - y_s)\tau_{xz}] dF = 0, \quad (3.17)$$

отсюда

$$M - x_s Y + y_s X = 0,$$

где

$$\left. \begin{aligned} X &= \int \int \tau_{xz} dF; & Y &= \int \int \tau_{yz} dF; \\ M &= \int \int [x\tau_{zy} - y\tau_{zx}] dF. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Для точного определения центра изгиба следует решить задачу о распределении касательных напряжений в стержне несимметричного профиля. Эта задача в теории упругости решена в частных случаях для некоторых форм поперечного сечения. На практике пользуются приближенными методами [57].

Пусть требуется определить центр изгиба несимметричного профиля. Уравнения кривых, которыми ограничено поперечное сечение (рис. 3.5), можно записать так:

$$\begin{aligned} \text{кривые } ADB & \quad x = \xi_2(y); \\ \text{» } ACB & \quad x = \xi_1(y); \\ \text{» } DAC & \quad y = \eta_2(x); \\ \text{» } DBC & \quad y = \eta_1(x); \end{aligned}$$



причем функции  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$  непрерывные, но могут иметь изломы. Точки  $A$  и  $B$  контура наиболее удалены от оси  $x$ , а  $D$  и  $C$  — от оси  $y$ .

Примем параболический закон распределения напряжений  $\tau_{xz}$  вдоль оси  $x$  и  $\tau_{yz}$  — вдоль оси  $y$ . На контуре касательные напряжения, вызываемые поперечной силой, должны быть равны нулю (3.3):

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= C [(x - \xi_1)(x - \xi_2)]; \\ \tau_{yz} &= C_1 [(y - \eta_1)(y - \eta_2)].\end{aligned}$$

Исходя из формулы (3.17),

$$\iint [(x - x_s)\tau_{yz} - (y - y_s)\tau_{xz}] dx dy = 0.$$

Так как равенство должно выполняться независимо от значений постоянных  $C$  и  $C_1$ , получаем

$$\iint \tau_{yz}(x - x_s) dx dy = 0;$$

$$\iint \tau_{xz}(y - y_s) dx dy = 0.$$

Далее

$$\begin{aligned}\int_{-a}^b (x - x_s) dx \int_{\eta_2(x)}^{\eta_1(x)} (y - \eta_1)(y - \eta_2) dy &= \int_{-a}^b (x - x_s) [\eta_1(x) - \\ &- \eta_2(x)]^3 dx = 0,\end{aligned}$$

т. е.

$$x_s = \frac{\int_{-a}^b [\eta_1(x) - \eta_2(x)]^3 x dx}{\int_{-a}^b [\eta_1(x) - \eta_2(x)]^3 dx}. \quad (3.19)$$

Аналогично

$$y_s = \frac{\int_{-a}^b [\xi_1(y) - \xi_2(y)]^3 y dy}{\int_{-a}^b [\xi_1(y) - \xi_2(y)]^3 dy}. \quad (3.20)$$

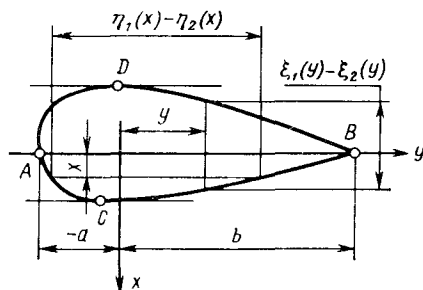


Рис. 3.5

Эти формулы дают возможность графо-аналитического определения центра изгиба поперечного сечения любой формы. Отрезок прямой, проведенный параллельно оси  $x$  на расстоянии  $y_1$  от нее и заключенный внутри контура, представляет собой величину  $[\xi_1(y_1) - \xi_2(y_1)]$  в масштабе чертежа. Проводя серии прямых параллельных осей  $x$  и  $y$ , заменяя интегралы соответствующими суммами, можно определить центр изгиба любого сечения, если дан чертеж его контура. Такая возможность представляет значительное удобство, так как на практике обычно имеется чертеж, а не уравнение контура сечения.

Если сечение симметрично, например, относительно оси  $x$  то  $x_s = 0$ . Для симметричного сечения известна формула Гриффиса и Тейлора:

$$y_{z\phi} = \frac{\int_0^b \xi_1(y)^3 y dy}{\int_a^b \xi_1(y)^3 dy}; \quad \xi_2(y) = -\xi_1(y), \quad (3.21)$$

которая является частным случаем формулы (3.20). А. С. Лейбензон [57], находя функцию изгиба, получил для симметричного профиля

$$y_s = \frac{4(4 + 5\nu)}{163(1 + \nu)} y_{z\phi}. \quad (3.22)$$

Вычисляя функцию напряжения С. Тимошенко, А. С. Лейбензон получил другую формулу

$$y_s = y_{z\phi} - \frac{2\nu}{1 + \nu} (y_0 - y_{z\phi}) \frac{1}{1 + \alpha}, \quad (3.23)$$

где  $y_0$  — координата центра тяжести, а

$$\alpha = 3 \frac{\int_0^b \xi_1^3(\xi_1') dy}{\int_0^b \xi_1^3 dy}; \quad (3.24)$$

если величиной  $\alpha$  пренебречь по сравнению с единицей, то получим неравенство для оценки  $y_s$ :

$$y_0 - y_{z\phi} < y_0 - y_s < \frac{1 + 3\nu}{1 + \nu} (y_0 - y_{z\phi}). \quad (3.25)$$

Для симметричного авиационного профиля, когда

$$\xi_1(y) = -\xi_2(y) = a \left(\frac{y}{b}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

получено

$$y_0 = \frac{3}{7} b, \quad y_{эф} = \frac{5}{13} b, \quad \alpha = \frac{11}{13} \left(\frac{a}{b}\right)^2;$$

$$y_0 - y_s \approx \frac{4b(1+3\nu)}{91(1+\nu)} \left[ 1 - \frac{22\nu}{13(1+3\nu)} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right],$$

Дунканом для того же профиля получено значение

$$y_0 - y_s \approx \frac{4b(1+3\nu)}{91(1+\nu)} \left[ 1 - \frac{6\nu}{1+3\nu} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right].$$

Для несимметричного профиля

$$\xi_1(y) = a \left(\frac{y}{b}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{y}{b}\right); \quad x_{эф} = 0,1556a;$$

$$\xi_2(y) = 0; \quad y_{эф} = 0,3920b,$$

$$x_s = \left[ 0,1547 + 0,0046 \frac{\nu}{1+\nu} \right] a;$$

$$y_s = \left[ 0,4073 - 0,0767 \frac{\nu}{1+\nu} \right] b.$$

Как видно из этих результатов, формула Грифиса и Тейлора дает ощутимые погрешности.

В. Власов предлагает определять координаты центра изгиба по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_s &= \frac{J(xy^2)}{J_x} \cdot \frac{J_x + J_y}{J_y - J_x}; \\ y_s &= \frac{J(x^2y)}{J_y} \cdot \frac{J_x - J_y}{J_y - J_x}, \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

где

$$J(xy^2) = \int xy^2 dF;$$

$$J(x^2y) = \int x^2y dF.$$

Для тонкостенных стержней центр изгиба можно с достаточной точностью найти по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_s &= x_b + \frac{J_{\omega BY}}{J_x}; \\ y_s &= y_b + \frac{J_{\omega BX}}{J_y}, \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

где

$$J_{\omega_B y} = \int_F \omega_B y \, dF;$$

$$J_{\omega_B x} = \int_F \omega_B x \, dF;$$

$\omega_B$  — секторная площадь с полюсом в точке  $B(x_B, y_B)$ .

В данном случае  $dF = \delta \, ds$ , где  $\delta$  — толщина стенки тонко-

стенного стержня. Интегралы типа  $\delta \int \omega_B y \, ds$  вычисляют следующим образом: площадь эпюры секторной площади  $\omega(s)$  умножают на величину  $y$ , соответствующую центру тяжести эпюры  $\omega(s)$  (рис. 3.6).

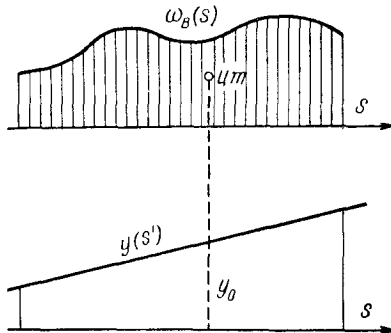


Рис. 3.6

Координату центра изгиба можно определить по формуле [103]

$$y_s = \int \left\{ \frac{1}{Fk'} \left[ \left( 1 + \frac{d\chi}{dx} \right) y - \frac{d\chi}{dy} x \right] + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} y \right\} dF,$$

где  $\chi$  — функция деформации поперечного сечения.

В частности, для полуэллипса с полуосями  $2a$  и  $2b$  ( $\kappa = \frac{b}{a}$ ),

расположенными по оси  $x$  и  $y$ , расстояние

$$y_s = \frac{16}{5} \cdot \frac{b}{\pi} \cdot \frac{(5 - \kappa^2) + \nu(5 + 3\kappa^2)}{(1 + \nu)(3 + \kappa^2)}.$$

Для полукруга

$$y_s = \frac{4}{15} \cdot \frac{d}{\pi} \cdot \frac{3 + 4\nu}{1 + \nu}.$$

## ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ СТЕРЖНЯ

### Компоненты перемещений

Рассмотрим правую систему координат  $xuz$ . Ось  $z$  направлена по длине стержня. Начало координат  $x_1y_1$  расположим в центре изгиба корневого сечения. Кроме того, используем систему координат  $xoy$  с началом в точке пересечения упругой линии стержня с корневым сечением, которая для изотропного стержня совпадает с центром тяжести сечения. Соотношения между координатами будут  $x = x_1 + x_s$ ,  $y = y_1 + y_s$ .

Введем еще две системы координат:  $\xi\eta$ , оси которого совпадают с главными осями инерции поперечного сечения, и  $\xi_1 O_1 \eta_1$  — с осями, параллельными осям  $\xi, \eta$  и с началом в центре изгиба поперечного сечения (рис. 3.7).

Угол между осями  $\xi$  и  $x$  является углом  $\alpha$  начальной закрутки стержня. Соотношения между координатами будут

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ \eta &= x \sin \alpha + y \cos \alpha.\end{aligned}$$

Обозначим компоненты перемещения по осям  $x, y, z$  соответственно через  $U(x, y, z, t), V(x, y, z, t), W(x, y, z, t)$ .

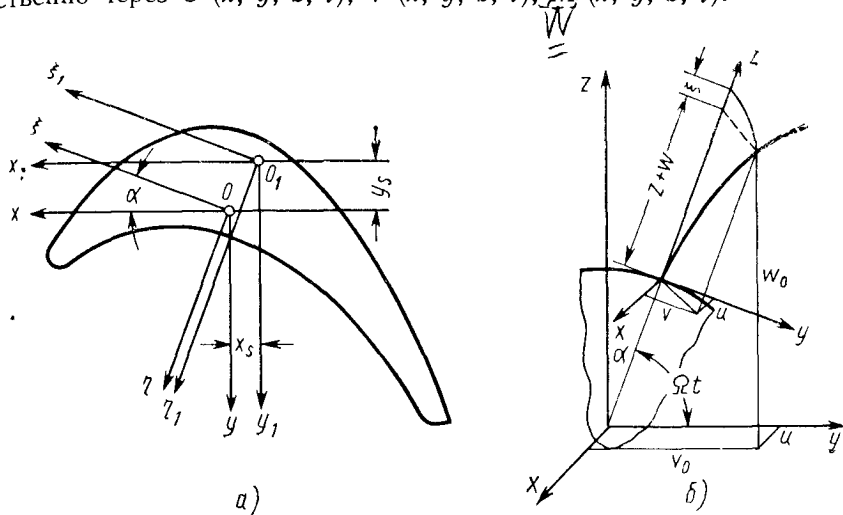


Рис. 3.7

В общем случае деформации стержня поперечное сечение может совершать поступательное перемещение вдоль оси  $z$ , поступательное перемещение при сдвиге в плоскости  $xy$ , поворот при изгибе вокруг осей  $x$  и  $y$  и поворот при кручении относительно оси  $z$ . Кроме того, при деформации происходит перемещение точек поперечного сечения вдоль оси  $z$ .

Обозначим перемещение центра изгиба поперечного сечения вдоль осей  $x, y$  вследствие изгиба через  $u_1(z, t), v_1(z, t)$ , вследствие сдвига через  $u_2(z, t), v_2(z, t)$ .

Кроме того, при повороте сечения относительно центра изгиба на угол  $\theta(z, t)$  его точки совершают перемещение вдоль  $x$  и  $y$  согласно формуле (3.8)  $u = \theta y$  и  $v = \theta x$ .

Поступательное смещение вдоль оси  $z$  обозначим через  $w(z, t)$ . При изгибе происходит поворот сечений вокруг осей  $x$  и  $y$ , берущих начало на нейтральной оси стержня, на углы  $\alpha_x(z, t)$  и

$\alpha_y(z, t)$ . При этом точки поперечного сечения совершают перемещение вдоль оси  $z$ , равное  $\alpha_x(z, t) y - \alpha_y(z, t) x$ .

Перемещение точек поперечного сечения вследствие деформации согласно формуле (3.9) равно  $\frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Phi(\xi_1, \eta_1)$ . Если учесть, что

$$\alpha_x(z, t) = -\frac{\partial v_1(z, t)}{\partial z}; \quad \alpha_y(z, t) = \frac{\partial u_1(z, t)}{\partial z},$$

то можно записать перемещения любой точки стержня в виде

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u_1(z, t) + u_2(z, t) + \theta(z, t) y; \\ V(x, y, z, t) &= v_1(z, t) + v_2(z, t) - \theta(z, t) x; \\ W(x, y, z, t) &= w(z, t) - \frac{\partial u_1(z, t)}{\partial z} x_1 - \frac{\partial v_1(z, t)}{\partial z} y_1 + \\ &+ \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} \Phi(\xi_1, \eta_1). \end{aligned} \right\} (3.28)$$

Влияние деформации сечения от сдвига не учтено. Позднее оно будет учтено интегрально при помощи коэффициента  $k'$ .

В наиболее общем виде выражения для перемещений и деформации поперечного сечения при сдвиге и поперечном сжатии приведены в работах [14, 15].

### Энергия деформации стержня

Потенциальная энергия деформации стержня

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{F(z)} (\sigma_z \varepsilon_z + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{zy} \gamma_{zy}) dF(z) dz. \quad (3.29)$$

Исходя из принятых выражений для перемещений (3.28), получим для относительных деформаций значения

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} x_1 - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} y_1 + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \Phi + \\ &+ \frac{\partial \theta}{\partial z} \tau_0 \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \eta_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} \xi_1 \right); \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial z} y - \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \cos \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} \sin \alpha + y_1 \right) + \frac{\partial u_2}{\partial z}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} \cos \alpha - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \sin \alpha - x_1 \right) + \frac{\partial u_2}{\partial z}; \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0; \end{aligned} \right\} (3.30)$$

здесь  $\xi_1$

$$\tau_0 = \frac{d\alpha}{dz} \quad /$$

Для стержней с удлиненным профилем поперечного сечения можно принять [15]

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\eta_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1}\xi_1 \cong r_1^2 \quad z_1 = ? \text{ см стр. 1) } /$$

Здесь принято  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ , так как в данном случае пренебрегается сжатием продольных волокон стержня. Напряжение  $\sigma_z$  в этом случае будет

$$\sigma_z = E\varepsilon_z, \quad (3.31)$$

касательные напряжения

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz};$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}.$$

При учете сдвига от поперечной силы не учитывалось распределение касательных напряжений по сечению стержня.

Исходя из формулы (3.6), можно записать, что средние касательные напряжения сдвига связаны с деформацией сдвига следующим образом:

$$\tau'_{xz\text{ ср}} = k'_1 G \frac{\partial u_2}{\partial z};$$

$$\tau'_{yz\text{ ср}} = k'_2 G \frac{\partial u_2}{\partial z}.$$

Полные касательные напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= G \left[ \frac{\partial\theta}{\partial z} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} \cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1} \sin\alpha + y_1 \right) + k'_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right]; \\ \tau_{yz} &= G \left[ \frac{\partial\theta}{\partial z} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1} \cos\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} \sin\alpha - x_1 \right) + k'_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Подставляя значения напряжений (3.31), (3.32) и деформаций (3.30) в выражение для потенциальной энергии (3.29) и пренебрегая второстепенными членами, получим

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ E \left[ F \left( \frac{\partial\omega}{\partial z} \right)^2 + 2\tau_0 J_p \frac{\partial\omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial z} + J_y \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right)^2 + \right. \right. \\ &+ J_x \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} J_{xy} - 2\tau_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial z} J_{yr} - \\ &- 2\tau_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial z} J_{xr} + J_\psi \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)^2 + \tau_0^2 \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 J_r \left. \right] + \\ &+ G \left[ \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 J_{d0} + \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} \right)^2 k'_1 F + \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} \right)^2 k'_2 F \right] dz, \quad (3.33) \end{aligned}$$

где, кроме установившихся уже геометрических характеристик  $F$ ,  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $k'_1$ ,  $k'_2$ , введены следующие:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_F xy dF; & r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2; \\ J_p &= \int_F r_1^2 dF; & J_r &= \int_F r_1^4 dF; & J_\varphi &= \int_F \varphi^2 dF; \\ J_{x_r} &= \int_F yr_1^2 dF; & J_{y_r} &= \int_F xr_1^2 dF; \\ J_{d_0} &= \int_F \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} + \eta_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} - \xi_1 \right)^2 \right] dF; \end{aligned} \quad (3.34)$$

Так как интегрирование ведется по всей площади поперечного сечения, которая в общем случае меняется по длине стержня, то все геометрические характеристики являются функциями переменной  $z$ . Индексы  $x$ ,  $y$  показывают, что величина вычислена относительно осей  $x$ ,  $y$  с началом на нейтральной оси. Величина  $GJ_d$  называется жесткостью на кручение, а  $EJ_\varphi$  — секторной жесткостью.

Кинетическая энергия стержня

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \int_{(F)_z} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] dF(z) dz.$$

Используя выражение (3.28) для перемещений и пренебрегая второстепенными членами, получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 F + \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 F + \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 J_x + 2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) F + \right. \\ &+ 2 \frac{\partial u_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} S_{x_1} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial t} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} S_{y_1} + \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} \right)^2 F + \left( \frac{\partial v_2}{\partial t} \right)^2 F + \\ &+ \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 J_y + 2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial v_2}{\partial t} \right) F - 2 \frac{\partial v_1}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial t} S_{y_1} - 2 \frac{\partial v_2}{\partial t} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} S_{x_1} + \\ &+ \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 F + \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} \right)^2 J_y + \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} \right)^2 J_x + \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t} \right)^2 J_\varphi + \\ &+ 2 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} \right) J_{xy}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

### Общие дифференциальные уравнения движения стержня

Дифференциальные уравнения колебаний стержня получаем из принципа Остроградского—Гамильтона, находя стационарное значение интеграла

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$



т. е. из вариационного уравнения

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0. \quad (3.36)$$

При вычислении вариаций применяем интегрирование по частям, например:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l EJ_{xy} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} dz dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l EJ_{xy} \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \delta \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \delta \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \right] dz dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \delta \frac{\partial v_1}{\partial t} \Big|_0^l + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \delta \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_0^l \right] EJ_{xy} dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\delta v_1) \frac{\partial}{\partial z} \left( EJ_{xy} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \delta u_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( EJ_{xy} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right) \right] dz dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \delta \frac{\partial v_1}{\partial z} \Big|_0^l + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \delta \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_0^l \right] EJ_{xy} - \right. \\ &- \left. \frac{\partial}{\partial z} \left[ EJ_{xy} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \delta v_1 + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \delta u_1 \right) \right] \Big|_0^l \right\} dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EJ_{xy} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) \delta v_1 + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EJ_{xy} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right) \delta u_1 \right] dz dt. \end{aligned}$$

Так как вариации  $\delta w$ ,  $\delta u_1$ ,  $\delta v_1$ ,  $\delta u_2$ ,  $\delta v_2$ ,  $\delta \theta$  не зависят друг от друга, то выражения, стоящие при них, следует приравнять нулю. Таким образом, получим уравнения колебаний и естественные граничные условия.

Система уравнений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[ E \left( \frac{\partial w}{\partial z} F + \tau_0 J_p \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] - \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ E \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} J_y + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} J_{xy} - \tau_0 J_{yr} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] - \rho \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} J_y + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} J_{xy} \right) + \rho \left[ F \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} S_{x_1} \right] = 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ G \frac{\partial u_2}{\partial z} k_1 F \right] - \rho \left[ F \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} S_{x_1} \right] &= 0; \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ E \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} J_x + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} J_{xy} - \tau_0 J_{xz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] - \\ &- \rho \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} J_x + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} J_{xy} \right) + \\ &+ \rho \left[ F \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} S_{y_1} \right] = 0; \end{aligned} \right\} (3.37) \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial v_2}{\partial z} k_2' F \right) - \rho \left[ F \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} S_{y_1} \right] = 0; \\
 & \frac{\partial}{\partial z} \left[ G \frac{\partial \theta}{\partial z} J_{d0} + \tau_0 E \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} J_p - \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} J_{y_r} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} J_{x_r} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial \theta}{\partial z} \tau_0 J_r \right) \right] - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( E J_{\varphi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( J_{\varphi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t^2} \right) - \\
 & - \rho \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} J_p + \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) S_{x_1} - \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} \right) S_{y_1} \right] = 0.
 \end{aligned} \right\} (3.37)$$

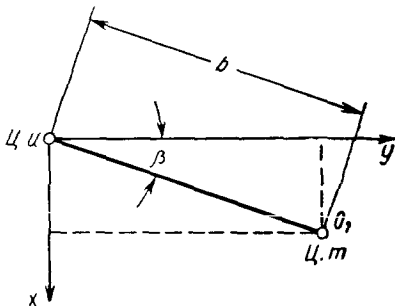


Рис. 3.8

Для стержня, у которого упругая ось совпадает с геометрическим местом центров тяжести поперечных сечений (рис. 3.8),

$$\left. \begin{aligned}
 S_x = S_y = 0; \\
 S_x = bF \cos \beta; \\
 S_y = bF \sin \beta,
 \end{aligned} \right\} (3.38)$$

где  $b$  — расстояние от центра тяжести до центра изгиба.

В более общем виде уравнения совместных колебаний записаны в работах [14, 15]. В приведенных уравнениях (3.37), удержаны лишь основные, имеющие практическое значение, члены.

## УРАВНЕНИЯ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

### Общие уравнения

Изгибные колебания в чистом виде возможны только для стержней, поперечное сечение которых имеет две оси симметрии.

В общем случае из-за несовпадения центра тяжести и центра изгиба сечения поперечная нагрузка вызывает не только изгиб, но и закручивание стержня. Начальная закрутка также вызывает связь различных видов колебаний. Таким образом, появляются совместные изгибно-крутильные колебания стержней.

Изгибно-крутильные колебания могут привести к появлению автоколебательных движений, создающих опасные перемещения и напряжения в конструкциях. Изгибно-крутильные колебания следует учитывать при рассмотрении вибраций лопаток турбомашин и компрессоров, крыльев и воздушных винтов самолетов, мостов, которые имеют несимметричное поперечное сечение пролетов и несимметричную загрузку проезжающим транспортом.

Уравнения изгибно-крутильных колебаний могут быть получены как частный случай уравнений (3.37), если рассмат-

ривать только изгиб и кручение стержня. С учетом равенств (3.38)

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ E \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} J_y + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} J_{xy} - \tau_0 J_{yr} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] - \\
 & - \rho \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} J_y - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} J_{xy} \right) + \\
 & + \rho F \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} b \cos \beta \right) = 0; \\
 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ E \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} J_x + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} J_{xy} - \tau_0 J_{xz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] - \\
 & - \rho \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} J_x + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} J_{xy} \right) + \\
 & + \rho F \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} b \sin \beta \right) = 0; \\
 & \frac{\partial}{\partial z} \left[ G J_{d0} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \tau_0 E \left( - \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} J_{yr} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} J_{xr} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \tau_0 J_r \right) \right] - \\
 & - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( E J_{\varphi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( J_{\varphi} \frac{\partial^3 \theta}{\partial z \partial t^2} \right) - \\
 & - \rho \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} J_p + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} b \cos \beta - \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} b \sin \beta \right] = 0.
 \end{aligned} \right\} (3.39)$$

Если пренебречь инерцией поворота и начальной закруткой, то для стержня постоянного поперечного сечения можно получить

$$\left. \begin{aligned}
 & E J_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + E J_{xy} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho F b \cos \beta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0; \\
 & E J_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + E J_{xy} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho F b \sin \beta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0; \\
 & G J_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - E J_{\varphi} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - \rho J_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \rho F b \cos \beta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\
 & + \rho F b \sin \beta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.
 \end{aligned} \right\} (3.40)$$

### 3. Колебания свободно опертого стержня, имеющего плоскость симметрии

Если плоскость  $zo\varphi$  является плоскостью симметрии для стержня, то система (3.40) распадается на две независимые системы (так как  $\sin \beta = 0$  и  $J_{x_1 y_1} = 0$ ), из которых уравнение

$$E J_{r_1} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

описывает чисто изгибные колебания в плоскости симметрии, а другие два

$$\left. \begin{aligned} EJ_{y_1} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho F b \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0; \\ GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - EJ_{\varphi} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - \rho J_{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \rho F b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

дают изгибно-крутильные колебания.

Находя решение системы (3.41), можно оценить влияние связанности изгибных и крутильных колебаний. Наиболее просто получить решение для стержня со свободно опертыми концами. Граничные условия в этом случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} z = 0; \quad z = l; \quad u = 0; \quad \theta = 0; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Граничные условия и уравнения удовлетворяются, если принять

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sin \frac{k\pi z}{l} \sin \omega t; \quad \theta = \theta_0 \sin \frac{k\pi z}{l} \sin \omega t \\ (k &= 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Обозначим через  $\omega_u$  и  $\omega_{\kappa\rho}$  — частоты соответственно чисто изгибных и крутильных колебаний.

После подстановки в уравнение (3.41) значений  $u$  и  $\theta$ , получим характеристические уравнения

$$\left. \begin{aligned} (\omega_u^2 - \omega^2) u_0 - \omega^2 b \theta_0 &= 0; \\ \omega^2 s b u_0 - (\omega_{\kappa\rho}^2 - \omega^2) \theta_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \omega_u^2 &= \frac{k^4 \pi^4}{l^4} \cdot \frac{EJ_{y_1}}{F\rho}; \quad s = \frac{F}{J_{\rho}}; \\ \omega_{\kappa\rho}^2 &= \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \cdot \frac{J dG}{J_{\rho} \rho} \left( 1 + \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \cdot \frac{J_{\varphi}}{J_d} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Из условия нетривиальности решения системы (3.42)

$$(\omega_u^2 - \omega^2) (\omega_{\kappa\rho}^2 - \omega^2) - \omega^4 b^2 s = 0$$

находим

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_{\kappa\rho}^2 + \omega_u^2 \pm \sqrt{(\omega_{\kappa\rho}^2 - \omega_u^2)^2 + 4s b^2 \omega_u^2 \omega_{\kappa\rho}^2}}{2(1 - s b^2)}. \quad (3.44)$$

Если  $b = 0$ , т. е. центр тяжести и центр изгиба совпадают, то

$$\omega_{1,2} = \frac{(\omega_{\kappa\rho}^2 + \omega_u^2) \pm (\omega_{\kappa\rho}^2 - \omega_u^2)}{2}; \quad \omega_1 = \omega_{\kappa\rho}; \quad \omega_2 = \omega_u;$$

$$s b^2 = \frac{F}{J_{\rho}} b^2 = \frac{F b^3}{J_{\rho_1} + F b^2} = \frac{b^2}{r^2 + b^2},$$

где  $J_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения относительно центра тяжести;  $r^2$  — радиус инерции ( $r^2 = \frac{J_{p1}}{F}$ ). Отсюда можно заключить, что всегда  $sb^2 < 1$ .

Положим  $\omega_{кр} = a\omega_u$ , где  $a$  — любое вещественное число, тогда

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_u^2 \frac{a^2 + 1 \pm \sqrt{(a^2 - 1)^2 + 4a^2 sb^2}}{2(1 - sb^2)}.$$

На рис. 3.9 построен график зависимости  $\omega_{1,2}$  от  $sb^2$ , из которого видно, что при увеличении  $sb^2$  частоты изгибно-крутильных колебаний расходятся; причем меньшая частота ( $\omega_2$ ) изменяется сравнительно мало, особенно при больших значениях  $a$ . График большей частоты ( $\omega_1$ ) уходит в бесконечность. Прямая  $sb^2 = 1$  является асимптотой. Однако, как указывалось выше,  $sb^2$  всегда меньше 1, и  $\omega_1$  имеет всегда ограниченное значение. При  $\omega = \omega_2$   $\theta_0$  и  $u_0$  имеют одинаковые знаки, при  $\omega = \omega_1$  — разные (рис. 3.10).

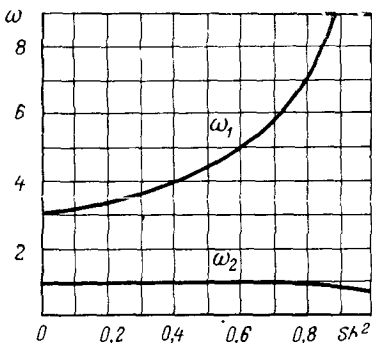


Рис. 3.9

Следует отметить, что для несимметричных прокатных профилей (например, швеллер, тавр, уголок) центр тяжести и центр жесткости не совпадают. Поэтому при оценке динамической прочности конструкции, имеющей элементы несимметричного сечения,

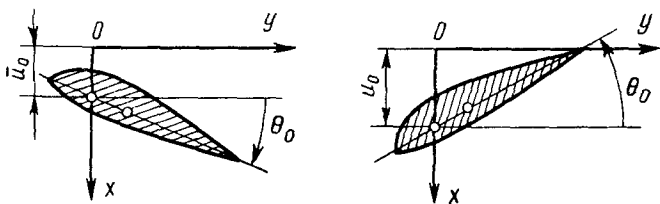


Рис. 3.10

следует считаться с возможностью возникновения изгибно-крутильных колебаний.

### Колебания консольного стержня, имеющего плоскость симметрии

Для свободно опертого стержня было получено решение, удовлетворяющее как уравнениям равновесия, так и граничным условиям. Для стержня с другими граничными условиями этого

сделать не удастся. Рассмотрим теперь случай консольного стержня. Обозначим

$$\xi = \frac{z}{l}; \quad \frac{EJ_y}{l^4} = B; \quad \frac{GJ_d}{l^2} = C; \quad \rho F = m; \quad \rho J_p = mr^2. \quad (3.45)$$

Членом, содержащим величину  $J_\varphi$ , пренебрегаем, так как по величине он значительно меньше остальных и наличие его усложняет решение.

После подстановки обозначений (3.45) в уравнение (3.41) получаем, предполагая гармонические колебания, уравнения

$$\left. \begin{aligned} B \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} - \omega^2 m u - \omega^2 m b \theta &= 0; \\ C \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \omega^2 m r^2 \theta + \omega^2 m b u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Граничные условия

$$u(0) = u'(0) = \theta(0) = 0; \quad u''(1) = \theta'(1) = u'''(1) = 0. \quad (3.47)$$

Исключая  $\theta$  из уравнений (3.46), приходим к уравнению шестого порядка относительно  $u$ :

$$\frac{\partial^6 u}{\partial \xi^6} + \frac{mr^2 \omega^2}{C} \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} - \frac{m\omega^2}{B} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{m^2 \omega^2}{CB} (r^2 - b^2) u = 0. \quad (3.48)$$

После нахождения  $u$  определяем  $\theta$  из выражения

$$\theta = \frac{1}{b} \left( \frac{B}{m\omega^2} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} - u \right). \quad (3.49)$$

Граничные условия для уравнения (3.48) с учетом (3.49) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= (0); & u''(1) &= 0; \\ u'(0) &= 0; & u'''(1) &= (0); \\ u^{IV}(0) &= (0); & u'(0) - \frac{B}{m\omega^2} u^{IV}(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

Характеристическое уравнение для уравнения (3.48) будет

$$k^6 + \frac{mr^2 \omega^2}{C} k^4 - \frac{m\omega^2}{B} k^2 - \frac{m^2 \omega^2}{CB} (r^2 - b^2) = 0. \quad (3.51)$$

После подстановки  $k^2 = r_1 - \frac{mr^2 \omega^2}{3C}$  получаем кубическое уравнение  $r_1^3 - nr_1^2 - q = 0$ , где

$$n = \frac{1}{3} \left( \frac{mr^2 \omega^2}{C} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{B};$$

$$q = -\frac{2}{27} \left( \frac{mr^2 \omega^2}{C} \right)^3 + \frac{m^2 \omega^4}{3CB} (2r^2 - 3b^2),$$

так как  $-n < 0$ ,  $q^2 - n^3 < 0$ , то уравнение имеет три действительных корня. Корни уравнения (3.51) равны

$$\begin{aligned} -k_3^2 &= 2 \sqrt{\frac{n}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) + \frac{mr^2\omega^2}{3C}; \\ -k_2^2 &= 2 \sqrt{\frac{n}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) + \frac{mr^2\omega^2}{3C}; \\ k_1^2 &= 2 \sqrt{\frac{n}{3}} \cos \varphi - \frac{mr^2\omega^2}{3C}, \end{aligned}$$

где

$$\cos 3\varphi = \frac{q}{2} \left(\frac{3}{n}\right)^{3/2}.$$

Решение уравнения (3.48):

$$u = D \operatorname{sh} k_1 \xi + E \operatorname{ch} k_1 \xi + F \sin k_2 \xi + L \cos k_2 \xi + M \sin k_3 \xi + N \cos k_3 \xi. \quad (3.52)$$

Удовлетворяя условиям  $u(0) = 0$ ;  $u^I(0) = 0$ ;  $u^{IV}(0) = 0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} E + L + N &= 0; \\ k_1^4 E + k_2^4 L + k_3^4 N &= 0; \\ k_1 D + k_2 F + k_3 M &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

Исключая  $E$ ,  $L$  и  $D$  с помощью (3.53) и введя новые постоянные

$$A = \frac{F}{k_1}, \quad B = \frac{M}{k_1}, \quad C = \frac{N}{k_2^4 - k_1^4},$$

представим  $u$  в виде

$$u = A(k_1 \sin k_2 \xi - k_2 \operatorname{sh} k_1 \xi) + B(k_1 \sin k_3 \xi - k_3 \operatorname{sh} k_1 \xi) + C[(k_3^4 - k_2^4) \operatorname{ch} k_1 \xi + (k_1^4 - k_3^4) \cos k_2 \xi + (k_2^4 - k_1^4) \cos k_3 \xi]. \quad (3.54)$$

Удовлетворяя условиям

$$u''(1) = 0; \quad u'''(1) = 0; \quad u'(1) = \frac{B}{m\omega^2}; \quad u^{IV}(1) = 0,$$

получим систему однородных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C &= 0; \\ a_{21}A + a_{22}B + a_{23}C &= 0; \\ a_{31}A + a_{32}B + a_{33}C &= 0. \end{aligned}$$

Приравнявая определитель данной системы нулю, приходим к частотному уравнению:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.55)$$

где

$$\begin{aligned}a_{11} &= k_1 k_2 (k_2 \sin k_2 + k_1 \operatorname{sh} k_1); \\a_{12} &= -k_1 k_3 (k_3 \sin k_3 + k_1 \operatorname{sh} k_1), \\a_{13} &= k_1^2 (k_3^4 - k_2^4) \operatorname{ch} k_1 - k_2^2 (k_1^4 - k_3^4) \cos k_2 - (k_2^4 - k_1^4) \cos k_3; \\a_{21} &= -k_1 k_2 (k_2^2 \cos k_2 + k_1^2 \operatorname{ch} k_1); \\a_{22} &= -k_1 k_3 (k_3^2 \cos k_3 + k_1^2 \operatorname{ch} k_1); \\a_{23} &= k_1^3 (k_3^4 - k_2^4) \operatorname{sh} k_1 + k_2^3 (k_1^4 - k_3^4) \sin k_2 + k_3^3 (k_2^4 - k_1^4) \sin k_3, \\a_{31} &= k_1 k_2 (\delta_2 \cos k_2 - \delta_1 \operatorname{ch} k_1); \\a_{32} &= k_1 k_3 (\delta \cos k_3 - \delta \operatorname{ch} k_1); \\a_{33} &= k_1 \delta_1 (k_3^4 - k_2^4) \operatorname{sh} k_1 - k_2 \delta_2 (k_1^4 - k_3^4) \sin k_2 - \\&\quad - k_3 \delta_3 (k_2^4 - k_1^4) \sin k_3; \\ \delta_i &= 1 - \frac{R k_i^4}{m \omega^2}.\end{aligned}$$

### Понятие о флаттере

Колебания тела в неподвижной жидкой или в газообразной среде будут затухающими вследствие сопротивления среды. При обтекании тела окружающей средой возникают аэродинамические силы. При малых скоростях обтекания для колебаний они демпфирующие. Однако при определенной скорости потока аэродинамические силы могут давать отрицательное затухание. При этом возникают интенсивные автоколебания, возбуждаемые за счет энергии набегающего потока. Колебания этого рода называются флаттером, а скорость потока относительно обтекаемого тела, при котором эти колебания возникают, называется критической скоростью флаттера.

Проблема флаттера полнее всего исследована применительно к крыльям и оперению самолетов, для которых флаттер имеет очень большое значение. Здесь имеет место так называемый классический флаттер с малыми углами атаки ( $< 15^\circ$ ).

Для лопаток паровых и газовых турбин и осевых компрессоров играет роль срывной флаттер с большими углами атаки. Этот тип флаттера изучен гораздо меньше. Проблема здесь осложняется еще наличием аэродинамического взаимодействия колеблющихся соседних лопаток.

Явление флаттера тесно связано с изгибно-крутильной формой колебания. Рассмотрим крыло, у которого линия центров изгиба лежит ближе к передней кромке, чем линия центров тяжести. При движении крыла вниз относительная скорость потока складывается из горизонтальной скорости обтекания и вертикальной скорости вследствие опускания крыла. При этом угол атаки увеличи-



вается. При движении крыла вверх угол атаки соответственно уменьшается (рис. 3.11).

Подъемная сила крыла примерно пропорциональна углу атаки (рис. 3.12). Таким образом, при чисто изгибных колебаниях крыла

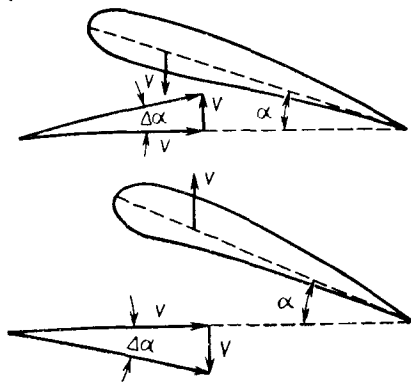


Рис. 3.11

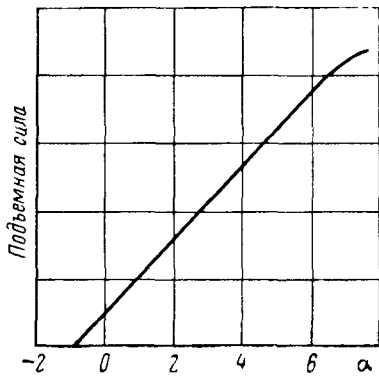


Рис. 3.12

дополнительная подъемная сила направлена против движения и вызывает затухание колебаний.

При изгибно-крутильных колебаниях рассматриваемого нами крыла упругая восстанавливающая сила, приложенная в центре изгиба, и инерционная отклоняющая сила, приложенная в центре тяжести, создают момент. Этот момент, как видно из рис. 3.13,

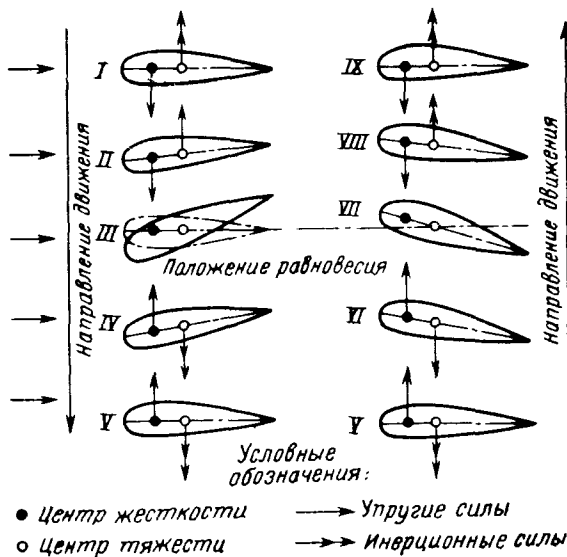


Рис. 3.13

закручивает крыло таким образом, что при движении вниз угол атаки уменьшается, а при движении вверх — возрастает. При этом дополнительная подъемная сила направлена в сторону движения. Следовательно, поток сообщает колеблющемуся крылу энергию. Кроме того, точка приложения аэродинамической силы (центр давления) может не совпадать с центром изгиба. При этом возникает момент подъемной силы. Центр давления обычно лежит примерно на расстоянии, равном  $1/4$  хорды профиля, от ведущей кромки. Если центр изгиба лежит дальше от ведущей кромки, чем центр давления, то возникающий при колебаниях дополнительный момент подъемной силы закручивает лопасть так, что при движении вниз угол атаки уменьшается, а при движении вверх — увеличивается. Таким образом, возбуждающие силы возрастают.

Чтобы избежать возможности возникновения флаттера, определяют его критическую скорость, присущую исследуемой конструкции. Для расчета в уравнения изгибно-крутильных колебаний следует ввести аэродинамические силы и моменты. Используя при этом уравнения (3.39), для случая симметричного крыла при  $J_{x\varphi} = J_{y\varphi} = J_{\varphi} = J_{xy} = 0$  получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EJ_{x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - mb \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= L_a; \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left( GJ_d \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + mJ_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - mb \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= M_a. \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Согласно работе Гроссмана [29],

$$\left. \begin{aligned} L_a &= \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \rho V^2 b \left[ \theta + \frac{b}{V} \left( \frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \right]; \\ M_a &= \frac{\partial C_{mE}}{\partial \alpha} \rho V^2 b^2 \left[ \theta + \frac{b}{V} \left( \frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} - \frac{\pi}{16} \frac{\partial C_{mE}}{\partial} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

где  $\frac{\partial C_y}{\partial \alpha}$  и  $\frac{\partial C_{mE}}{\partial \alpha}$  — производные коэффициентов подъемной силы и момента подъемной силы по углу атаки;  
 $\rho$  — плотность воздушного потока;  
 $x_0$  — расстояние от центра изгиба до ведущей кромки;  
 $V$  — скорость потока.

Для нахождения критической скорости флаттера проще всего применить метод Галеркина. Для этого необходимо задаться значениями  $v$  и  $\theta$ , удовлетворяющими граничным условиям:

$$v = Af(z) e^{\lambda t}; \quad \theta = B\varphi(z) e^{\lambda t}; \quad (3.58)$$

$\lambda$  — величина комплексная:  $\lambda = q + ip$  при  $V = V_{кр}$   $\lambda = ip$ , для  $q > 0$  колебания нарастают, при  $q < 0$  — затухают. Поэтому берем

$$v = Af(z) e^{ip t}; \quad \theta = B\varphi(z) e^{ip t} \quad (3.59)$$

и после подстановки  $v$  и  $\theta$  (3.59) в уравнение (3.56) получим два уравнения

$$\left. \begin{aligned} \bar{L} &\equiv A \left[ \frac{d^2}{dz^2} \left( EJ_{x_1} \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \right) - mp^2 f + \frac{dC_y}{d\alpha} \rho b V_{кр} i p f \right] + \\ &+ B \left[ m\sigma\rho^2\varphi - \frac{dC_y}{d\alpha} \rho b V_{кр}^2 \varphi - \frac{dC_y}{d\alpha} \rho b^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times V_{кр} i p \varphi \right] = 0; \\ \bar{M} &\equiv A \left[ m\sigma\rho^2 f + \frac{dC_{mE}}{d\alpha} \rho b^2 V_{кр} i p f \right] + B \left[ - \frac{d}{dz} \left( GJ_d \frac{d\varphi}{dz} \right) - \right. \\ &\quad \left. - b m p^2 \varphi - \frac{dC_{mE}}{d\alpha} \beta V_{кр}^2 \varphi - \frac{dC_{mE}}{d\alpha} \rho b^3 - \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} - \frac{\pi}{16} \frac{dC_{mE}}{d\alpha} \right) V_{кр} i p \varphi \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

Умножая  $\bar{L}$  на  $f(z) dz$  и  $\bar{M}$  на  $\varphi(z) dz$  и интегрируя от 0 до  $l$ , получим два уравнения относительно  $A$  и  $B$ :

$$\left. \begin{aligned} A [a_{11} - c_{11}\rho + iV_{кр} d_{11}] + B [-c_{12}\rho^2 + b_{12}V_{кр}^2 + ipV_{кр} d_{12}] &= 0; \\ A [-c_{21}\rho^2 + ipV_{кр} d_{21}] + B [a_{22} - c_{22} + b_{22}V_{кр} + ipV_{кр} d_{22}] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

Составляя определитель из коэффициентов при  $A$  и  $B$  и приравнявая нулю отдельно действительную и мнимую части, получим два уравнения:

$$A_1 \rho^4 - (c_1 + c_2 V_{кр}^2) \rho^2 + E_1 + E_2 V_{кр}^2 = 0; \quad (3.62)$$

$$-B_1 \rho^2 + (D_1 + D_2 V_{кр}) = 0, \quad (3.63)$$

где коэффициенты  $A_1, B_1, C_1, D$  определяются через  $a, b, c, d$ . Из уравнения (3.63) находим

$$\rho^2 = \frac{D_1 + D_2 V_{кр}}{B_1}, \quad (3.64)$$

а после подстановки в уравнение (3.62) получим для определения критической скорости флаттера уравнение

$$LV_{кр}^4 + MV_{кр}^2 + N = 0. \quad (3.65)$$

Решая это уравнение, берем для  $V_{кр}$  наименьший положительный корень. Значение  $p$  находится из уравнения (3.64).

На практике при определении критических скоростей крыльев самолетов учитывают колебания элеронов относительно крыла и рулей управления относительно хвостового оперения. Кроме крыльев самолетов, рассчитываются на флаттер и воздушные винты. В конце 30-х и начале 40-х годов, когда скорости военных самолетов стали резко возрастать, авиационные катастрофы, вызванные флаттером, доставляли много неприятностей конструкторам. К этому времени относятся и первые работы в области флаттера. Чувствительны к флаттеру также воздушные винты вертолетов. Очень важно знать критические скорости при проектировании мостов. Известны многочисленные катастрофы подвесных мостов, разрушившихся в бурю. Чтобы вывести критическую скорость для моста за пределы возможных скоростей ветра, следует увеличивать изгибно-крутильную жесткость пролетов. Это можно достигнуть с помощью коробчатых конструкций большой высоты.

---

## ГЛАВА 4

### ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕСОМЫХ СТЕРЖНЕЙ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

#### СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЗАГРУЖЕННОГО СТЕРЖНЯ

##### Частотные уравнения

Если стержень постоянного сечения имеет оси симметрии и не несет сосредоточенных нагрузок, то для нахождения частот поперечных колебаний стержня в одной из главных плоскостей без учета затухания, инерции поворота сечений и сил перерезывания необходимо найти решение дифференциального уравнения

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (4.1)$$

где  $EJ$  — жесткость балки;

$F$  — площадь поперечного сечения;

$\rho$  — масса единицы объема ( $\rho = \frac{\gamma}{g}$ );

$t$  — время

В случае, если со стержнем еще связана равномерно распределенная массовая нагрузка, то в уравнении и в дальнейшем  $\rho$  следует заменить на  $\rho_1 = (1 + e)\rho$ , где  $e = \frac{q}{\rho F}$ ,  $q$  — интенсивность внешней равномерно распределенной нагрузки.

Если ввести безразмерную координату  $\xi = \frac{x}{l}$  ( $l$  — длина балки), то уравнение (4.1) примет вид

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} + \frac{\rho F l^4}{EJ} (1 + e) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (4.2)$$

Решение уравнения (4.1) получаем в виде

$$y(\xi, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) Y(\xi), \quad (4.3)$$

а после подстановки  $y(\xi, t)$  в уравнение (4.2) получим для  $Y(\xi)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Y^{IV}(\xi) - r^4 Y(\xi) = 0, \quad (4.4)$$

где

$$r^4 = \rho F (1 + e) \frac{\omega^2 l^4}{EJ} \quad (4.5)$$

Решение уравнения (4.4) будет

$$Y(\xi) = A \operatorname{ch} r\xi + B \operatorname{sh} r\xi + C \cos r\xi + D \sin r\xi. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) удобно записать в следующем виде:

$$Y(\xi) = A Y_1(\xi) + B Y_2(\xi) + C Y_3(\xi) + D Y_4(\xi), \quad (4.6')$$

где

$$\left. \begin{aligned} Y_1(\xi) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} r\xi + \cos r\xi); \\ Y_2(\xi) &= \frac{1}{2r} (\operatorname{sh} r\xi + \sin r\xi); \\ Y_3(\xi) &= \frac{1}{2r^2} (\operatorname{ch} r\xi - \cos r\xi); \\ Y_4(\xi) &= \frac{1}{2r^3} (\operatorname{sh} r\xi - \sin r\xi); \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

причем  $Y_i(\xi)$  удовлетворяют граничным условиям типа Коши с единичной матрицей:

$$\left. \begin{aligned} Y_1(0) &= 1, & Y_1'(0) &= 0, & Y_1''(0) &= 0, & Y_1'''(0) &= 0; \\ Y_2(0) &= 0, & Y_2'(0) &= 1, & Y_2''(0) &= 0, & Y_2'''(0) &= 0; \\ Y_3(0) &= 0, & Y_3'(0) &= 0, & Y_3''(0) &= 1, & Y_3'''(0) &= 0; \\ Y_4(0) &= 0, & Y_4'(0) &= 0, & Y_4''(0) &= 0, & Y_4'''(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Функции  $Y_1(\xi), \dots, Y_4(\xi)$  обычно называются функциями А. Н. Крылова.

Произвольные постоянные  $A, B, C, D$  определяются из граничных условий. Эти условия могут быть следующие:

- (а)  $Y = 0, Y'' = 0$  для  $x = 0$  или  $x = l$  — опертый конец;
  - (б)  $Y = 0, Y' = 0$  для  $x = 0$  или  $x = l$  — заделанный конец;
  - (в)  $Y'' = 0, Y''' = 0$  для  $x = 0$  или  $x = l$  — свободный конец.
- (4.9)

Рассмотрим несколько частных случаев.

**Стержень с опертыми концами.** Из условий опирания левого конца ( $\xi = 0$ ) (4.9, а) из решения (4.6) получим  $A = C = 0$ , т. е.

$$Y(\xi) = B \operatorname{sh} r\xi + D \sin r\xi.$$

Удовлетворяя условиям опирания правого конца ( $\xi = 1$ ), имеем

$$B \operatorname{sh} r + D \sin r = 0,$$

$$B \operatorname{sh} r - D \sin r = 0.$$

Из условия совместности этих уравнений  $\sin r \operatorname{sh} r = 0$ , что возможно, когда  $r = k\pi$ .

Следовательно, из уравнения (4.5) для частот колебаний получим величины

$$\omega_k = \pi^2 k^2 \sqrt{\frac{EJ}{F\rho(1+e)l^4}}. \quad (4.10)$$

Значение  $k = 1$  соответствует основному тону колебаний  $k = 2$  — второму (первому обертому) и т. д. Для второго тона мы имеем по длине одну узловую точку, остающуюся в покое, для  $k$ -го тона  $k - 1$  узловую точку.

**Стержень с заделанными концами.** Для этого случая удобнее взять решение в виде (4.6'), так как с помощью условий (4.9) легко подобрать решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям на левом конце.

Из условий (4.9, б) и соотношения (4.9) следует, что  $A = B = 0$ , т. е.  $Y(\xi) = CY_3(\xi) + DY_4(\xi)$ .

Удовлетворяя условиям (4.9, б) для правого конца ( $\xi = 1$ ), имеем

$$\left. \begin{aligned} CY_3(1) + DY_4(1) &= 0; \\ CY_3'(1) + DY_4'(1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Из условий совместности этих двух однородных линейных уравнений

$$Y_3(1)Y_4'(1) - Y_3'(1)Y_4(1) = 0. \quad (4.12)$$

После подстановки в уравнение (4.12) значений  $Y_3$  и  $Y_4$  из уравнения (4.7) и некоторых преобразований получим характеристическое уравнение

$$\operatorname{ch} r \cos r = 1. \quad (4.13)$$

Это трансцендентное уравнение имеет бесчисленное множество корней; наименьший корень дает значение частоты основного тона.

Корни трансцендентных уравнений легко определяются численными методами [54]. Применим к решению предыдущего уравнения метод Вегстейна. Из графика  $\operatorname{ch} r = \sec r$  легко устанавливается, что корни уравнения (4.13) будут

$$r_1 = \frac{3\pi}{2} + \mu_1, \quad r_2 = \frac{5\pi}{2} - \mu_2, \quad \dots, \quad r_k = \frac{2k+1}{2}\pi - (-1)^k \mu_k.$$

Для итерационного процесса уравнение (4.13) можно записать в виде

$$\mu_{k+1} = \mu_k + \left\{ \sin \mu_k \operatorname{ch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2} - (-1)^k \mu_k \right] - 1 \right\} A,$$

где  $A$  — постоянная.

Найдем для примера первый корень. Принимая  $A = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{3\pi}{2}}$ ,

получим итерационную формулу

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{3}{2} \pi} + \left( \operatorname{ch} \mu_k + \operatorname{th} \frac{3\pi}{2} \operatorname{sh} \mu_k \right) \sin \mu_k. \quad (4.13')$$

Считая, что  $\mu$  малая величина, разлагаем  $\operatorname{sh} \mu$ ,  $\operatorname{ch} \mu$ ,  $\sin \mu$  в ряды по степеням  $\mu$  и, ограничиваясь  $\mu^3$ , получим

$$\mu_{k+1} = \left[ \left( \frac{\mu_k}{3} + \operatorname{th} \frac{3\pi}{2} \right) \mu_k + 2 \right] \mu_k - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{3\pi}{2}}.$$

Тогда итерационная формула (4.13') имеет вид

$$\bar{\mu}_{k+1} = \left[ \left( \frac{\bar{\mu}_k}{3} + \operatorname{th} \frac{3\pi}{2} \right) \bar{\mu}_k + 2 \right] \bar{\mu}_k - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{3\pi}{2}}$$

и

$$\bar{\mu}_{k+1} = \left[ \left( \frac{\bar{\mu}_k}{3} + \operatorname{th} \frac{3\pi}{2} \right) \bar{\mu}_k + 2 \right] \bar{\mu}_k - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{3\pi}{2}};$$

здесь значение  $\bar{\mu}_{k+1}$  вычисляется по формуле

$$\bar{\mu}_{k+1} = \mu_{k+1} - \frac{(\mu_{k+1} - \mu_k)(\mu_{k+1} - \bar{\mu}_k)}{(\mu_{k+1} - \mu_k - \bar{\mu}_k - \mu_{k-1})}.$$

Таблица 4.1

Решение уравнения  $\operatorname{ch} r \cos r = 1$  по методу Вегстейна

$k$	Метод Вегстейна		Простая итерация
0	0	0	0
1	-0,0179651	-0,0179651	-0,0179651
2	-0,0506878	0,0218699	-0,0506877
3	0,0262565	0,0171612	-0,1168151
4	0,0166534	0,0176497	-0,2384831
5	0,0176476	0,0176517	-0,4425873
6	0,0176517	0,0176518	-0,7361861
7	0,0176518	0,0176518	-1,0814509
8	0,0176518	0,0176518	-1,4331166



В табл. 4.1 приведены результаты расчетов по этим формулам, а также результаты простой итерации

$$\mu_{k+1} = \left[ \left( \frac{\mu_k}{3} + \operatorname{th} \frac{3\pi}{2} \right) \mu_k + 2 \right] \mu_k - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{3\pi}{2}},$$

которые должны расходиться, так как  $f'(\mu_k) > 2$ . Значение корня  $r_1 = \frac{3\pi}{2} + 0,0176518 = 4,7300408$ , что в точности совпадает со значением, приведенным в таблицах.

**Другие случаи заделки.** Таким же образом, как и для опертых концов, можно получить характеристические уравнения, а также вычислить корни их и для других случаев заделки.

Характеристические уравнения и соответствующие корни приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Характеристические уравнения и их корни для определения частот собственных колебаний балки постоянного сечения с учетом собственного веса

Род закрепления		Характеристическое уравнение	Корни характеристик уравнений		
для $x=0$	для $x=1$		$r_1$	$r_2$	$r_k (k > 2)$
1. Конец свободен	Конец свободен	$\operatorname{ch} r \cos r = 1$	4,7300	7,8532	$\frac{2k+1}{2} \pi$
2. » оперт	» оперт	$\sin r = 0$	$\pi$	$2\pi$	$k\pi$
3. » заделан	» заделан	$\operatorname{ch} r \cos r = 1$	4,7300	7,8532	$\frac{2k+1}{2} \pi$
4. » »	» оперт	$\operatorname{th} r = \operatorname{tg} r$	3,9266	7,0685	$\frac{4k+1}{4} \pi$
5. » »	» свободен	$\operatorname{sh} r \cos r = -1$	1,8751	4,6941	$\frac{2k-1}{2} \pi$
6. » свободен	» оперт	$\operatorname{th} r = \operatorname{tg} r$	3,9266	7,0685	$\frac{4k+1}{2} \pi$

Частота колебаний соответствующего тона определяется из формулы (4.5):

$$\omega_k = \beta_k \sqrt{\frac{EJ}{\rho F (1+e) l^4}},$$

где  $\beta_k = r_k^2$ .

Число колебаний в 1 мин

$$n_k = \frac{60}{2\pi} \omega_k.$$

## Фундаментальные функции

Если мы обратимся к прежнему примеру стержня с заделанными концами, то увидим, что произвольная постоянная  $C$  может быть выражена через  $D$  с помощью соотношений (4.11).

Каждому значению корня  $r_i$  будет соответствовать определенная функция

$$Y_i(\xi) = D_i X_i(\xi),$$

следовательно, общее перемещение нейтральной оси может быть получено в виде

$$y(\xi, t) = \sum X_i(\xi) (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t), \quad (4.14)$$

причем постоянная  $D_i$  отнесена к  $A_i$  и  $B_i$ . Произвольные постоянные  $A_i$  и  $B_i$  определяются начальными условиями

$$y(\xi, t) = f(\xi); \quad \frac{\partial y}{\partial t} = f_1(\xi) \quad \text{для } t = 0, \quad (4.15)$$

где  $f$  и  $f_1$  — заданные функции, определяющие в начальный момент перемещения и скорости точек оси стержня. После подстановки в эти условия значения  $y(\xi, t)$  (4.14) получим

$$\left. \begin{aligned} f(\xi) &= \sum_i X_i(\xi) A_i; \\ f_1(\xi) &= \sum_i X_i(\xi) \omega_i B_i. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Постоянные  $A_i$  и  $B_i$  определяются на основании условий ортогональности  $X_i$

$$\int_0^1 X_i(\xi) X_k(\xi) d\xi = 0 \quad \text{для } k \neq i, \quad (4.17)$$

где  $X_i$  — фундаментальные функции. Соответствующие числа  $r_1, r_2, \dots, r_i$  — фундаментальные числа.

Ортогональность функций  $X_i$  при любых условиях заделки концов (табл. 4.2) доказывается без всяких затруднений.

Действительно, функции  $X_m$  и  $X_n$  удовлетворяют уравнениям (4.4):

$$X_m^{IV} - r_m^4 X_m = 0;$$

$$X_n^{IV} - r_n^4 X_n = 0.$$

Умножая первое уравнение на  $X_n$ , второе на  $X_m$ , вычитая из первого второе и интегрируя правую часть по частям в пределах для  $\xi$  от 0 до 1, получим

$$\begin{aligned} (r_m^4 - r_n^4) \int_0^1 X_m X_n d\xi &= \int_0^1 (X_m^{IV} X_n - X_n^{IV} X_m) d\xi = \\ &= [X_m X_n'' - X_n X_m'' + X_n' X_m' - X_m' X_n']_0^1. \end{aligned}$$

При любых условиях заделки концов правая часть последнего выражения обращается в нуль, следовательно,

$$\int_0^1 X_m X_n d\xi = 0 \text{ для } m \neq n. \quad (4.18)$$

Пользуясь этим свойством ортогональности фундаментальных функций, легко вычислить значения коэффициента  $A_i$  и  $B_i$  (4.16). Для этой цели умножаем обе части уравнения (4.16) на  $X_k(\xi)$  и интегрируем в пределах от 0 до 1.

Тогда, например, для  $f(\xi)$  получим

$$\int_0^1 f(\xi) X_k(\xi) d\xi = \int_0^1 X_k(\xi) \left\{ \sum_i X_i(\xi) A_i \right\} d\xi.$$

Так как согласно условию ортогональности все интегралы  $A_i \int_0^1 X_k X_i d\xi = 0$  при  $k \neq i$ , то в правой части останется только член  $A_k \int_0^1 X_k^2 d\xi$  и, следовательно,

$$A_k = \frac{\int_0^1 f(\xi) X_k d\xi}{\int_0^1 X_k^2 d\xi}.$$

Аналогичным образом определяем  $B_k$ .  
Чтобы вычислить интеграл

$$\int_0^1 X_k^2 dx = l \int_0^1 X_k^2 d\xi,$$

необходимо предположить, что в уравнении (4.17)  $r_i$  стремится к  $r_k$ . На вычислении этих интегралов \* останавливаться не будем, а приведем лишь их значения (табл. 4.3), а также значение фундаментальных функций (табл. 4.4) [47, 90].

Значение интеграла может быть вычислено по графе I, либо по графе II табл. 4.3.

При пользовании табл. 4.3 необходимо иметь в виду, что в ней  $X$  со штрихами обозначены производные не по  $x$ , а по аргументу этих функций  $z$ , причем  $z = \frac{rx}{l}$ .

\*  $\int_0^l X_k^2 dx = \frac{l}{4} [X_k^2 - 2X_k' X_k'' + (X_k'')^2]_{x=l}$ .

Таблица 4.3

Значения интегралов  $\frac{4}{l} \int_0^l X_k^2 dx$  при различных видах закрепления концов

Род закрепления конца		Значение интегралов	
для $x=0$	для $x=l$	I	II
Закреплен	Закреплен	$[X''(l)]^2$	$\begin{cases} [X''(0)]^2 \\ -2X'(0)X'''(0) \\ X^2(0) \end{cases}$
Оперт	»		
Свободен	»	$-2X'(l)X'''(l)$	$\begin{cases} [X''(0)]^2 \\ 2[X'(0)]^2 \\ X^2(0) \end{cases}$
Закреплен	Оперт		
Оперт	»	$X^2(l)$	$\begin{cases} [X''(0)]^2 \\ -2X'(0)X'''(0) \\ X^2(0) \end{cases}$
Свободен	»		
Закреплен	Свободен		
Оперт	»		
Свободен	»		

Таблица 4.4

Значение фундаментальных функций

Род закрепления (см. табл. 4.2)	$X_k$
1	$(\operatorname{ch} r_k - \cos r_k) (\operatorname{sh} r_k \xi + \sin r_k \xi) -$ $-(\operatorname{sh} r_k - \sin r_k) (\operatorname{ch} r_k \xi + \cos r_k \xi)$
2	$\sin r_k \xi$
3	$(\operatorname{sh} r_k - \sin r_k) (\operatorname{ch} r_k \xi - \cos r_k \xi) -$ $-(\operatorname{ch} r_k - \cos r_k) (\operatorname{sh} r_k \xi - \sin r_k \xi)$
4	$(\operatorname{sh} r_k + \sin r_k) (\operatorname{ch} r_k \xi - \cos r_k \xi) -$ $-(\operatorname{ch} r_k + \cos r_k) (\operatorname{sh} r_k \xi - \sin r_k \xi)$
5	$(\operatorname{sh} r_k + \sin r_k) (\operatorname{ch} r_k \xi - \cos r_k \xi) -$ $-(\operatorname{ch} r_k + \cos r_k) (\operatorname{sh} r_k \xi - \sin r_k \xi)$
6	$(\operatorname{sh} r_k + \sin r_k) (\operatorname{ch} r_k \xi + \cos r_k \xi) -$ $-(\operatorname{ch} r_k + \cos r_k) (\operatorname{sh} r_k \xi + \sin r_k \xi)$

Фундаментальные функции колеблющегося стержня широко применяют при изучении свободных и вынужденных колебаний стержней, плит, оболочек при использовании приближенных ме-

Значения фундаментальных функций, характеристических уравнений и их корней для функций  $X_k(\xi)$ ,

$$\text{ортономированных в интервале } z = z_1, z = z_2 \left( \int_{z_1}^{z_2} X_k^2(\xi) d\xi = 1 \right)$$

Род закрепления конца	Интервал $z_1, z_2$		Фундаментальные функции	Характеристические уравнения	Значения $k$	Корни характеристических уравнений		Примечание
	для $z=z_1$	для $z=z_2$				1-й	2-й	
Свободен	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\cos rk\xi}{\cos \frac{rk}{2}} + \frac{\text{ch } rk\xi}{\text{ch } \frac{rk}{2}}$	$\text{tg } \frac{rk}{2} = -\text{th } \frac{rk}{2}$	1, 3, 5, ...	4,7300408	$\frac{2k+1}{2}\pi$	$(k \geq 5)$
			$\frac{\sin rk\xi}{\sin \frac{rk}{2}} + \frac{\text{sh } rk\xi}{\text{sh } \frac{rk}{2}}$	$\text{tg } \frac{rk}{2} = \text{th } \frac{rk}{2}$	2, 4, 6, ...	7,8532046	$\frac{2k+1}{2}\pi$	$(k \geq 6)$
Оперт	0, 1		$\sqrt{2} \sin rk\xi$	$\sin rk$	1, 2, 3, ...	$\pi$	$2\pi$	$k\pi$
Заделан	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\cos rk\xi}{\cos \frac{rk}{2}} - \frac{\text{ch } rk\xi}{\text{ch } \frac{rk}{2}}$	$\text{tg } \frac{rk}{2} = -\text{th } \frac{rk}{2}$	1, 3, 5, ...	4,7300408	$\frac{2k+1}{2}\pi$	$(k \geq 5)$
			$\frac{\sin rk\xi}{\sin \frac{rk}{2}} - \frac{\text{sh } rk\xi}{\text{sh } \frac{rk}{2}}$	$\text{tg } \frac{rk}{2} = \text{th } \frac{rk}{2}$	2, 4, 6, ...	7,8532046	$\frac{2k+1}{2}\pi$	$(k \geq 6)$

Род закрепления конца		Интервал $z_1, z_2$	Фундаментальные функции	Характеристические уравнения	Значения $k$	Корни характеристических уравнений			Примечание
для $z=z_1$	для $z=z_2$					1-й	2-й	Асимптотическое значение	
Оперт	Заделан	0, 1	$\frac{\sin r_k \xi}{\sin r_k} - \frac{\text{sh } r_k \xi}{\text{sh } r_k}$	$\text{tg } r_k = \text{th } r_k$	1, 2, 3, ...	3,9266023	7,0385828	$\frac{4k+1}{4}\pi$	$(k \geq 3)$
		$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{\sin r_k \xi}{\sin \frac{r_k}{2}} + \frac{\text{ch } r_k \xi}{\text{ch } \frac{r_k}{2}}$	$\text{tg } \frac{r_k}{2} = \text{cth } \frac{r_k}{2}$	1, 3, 5, ...	1,875104	7,854757	$\frac{2k-1}{2}\pi$	$(k \geq 5)$
	Заделан	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{\cos r_k \xi}{\cos \frac{r_k}{2}} + \frac{\text{sh } r_k \xi}{\text{sh } \frac{r_k}{2}}$	$\text{tg } \frac{r_k}{2} = -\text{cth } \frac{r_k}{2}$	2, 4, 6, ...	4,694098	10,995541	$\frac{2k-1}{2}\pi$	$(k \geq 6)$
Оперт	Свободен	0, 1	$\frac{\sin r_k \xi}{\sin r_k} + \frac{\text{sh } r_k \xi}{\text{sh } r_k}$	$\text{tg } r_k = \text{th } r_k$	1, 2, 3, ...	3,9266023	7,0385828	$\frac{4k+1}{4}\pi$	$(k \geq 3)$

тодов Ритца, Галеркина и др. Поэтому в табл. 4.5 приведем значения фундаментальных функций, характеристических уравнений и их корней, более удобные для применения электронных цифровых машин.

## СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ И УПРУГИМИ ОПОРАМИ

### Колебания балки с сосредоточенными массами

Предположим, что в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с весомой балкой связаны сосредоточенные массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Для установившегося колебательного движения давление на балку, если не принимать во внимание постоянных нагрузок, будет

$$P_i = -m_i \frac{\partial^2 y}{\partial t^2 \partial x = x_i}.$$

Прогиб для всех значений  $x$ , за исключением точек, где приложены грузы, должен удовлетворять уравнению

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (1 + e) \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (4.19)$$

Так как решение уравнения (4.19) мы ищем по-прежнему в виде

$$y = (x, t) = Y(x) \cos \omega t,$$

то сосредоточенные силы будут

$$P_i = m_i Y(x_i) \omega^2 \cos \omega t. \quad (4.20)$$

Таким образом, нахождение решения уравнения (4.19) для данного случая при наличии нагрузок (4.20) в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$  можно свести к интегрированию следующего уравнения с правой частью:

$$Y^{IV}(\xi) - r^4 Y(\xi) = \frac{l^4}{EJ} f(\xi), \quad (4.21)$$

где

$$\xi = \frac{x}{l}.$$

При этом предполагаем, что  $f(\xi)$  всюду равно нулю, за исключением мест приложения сосредоточенных сил, амплитуда которых определяется выражением (4.20):

$$Q_i = m_i Y(\xi_i) \omega^2. \quad (4.22)$$

Эти сосредоточенные силы рассматриваем как предельное положение сил, распределенных в интервалах от  $x_1$  до  $x_1 + \sigma_1$  (от  $\xi_1$  до  $\xi_1 + \sigma_1$ ) с интенсивностью  $q$  на единицу длины, при условии, что

$$q_i \sigma_i \rightarrow Q_i (q_i \sigma_i l \rightarrow Q_i), \text{ когда } \sigma_i \rightarrow 0.$$

Уравнение (4.21) решаем по общим правилам.

Общее решение уравнения (4.21) будет

$$Y(\xi) = Z(\xi) + \Phi(\xi), \quad (4.23)$$

где  $Z(\xi)$  — общее решение уравнения (4.2) без правой части, которое было уже найдено в уравнении (4.7)

$$Z(\xi) = AY_1(\xi) + BY_2(\xi) + CY_3(\xi) + DY_4(\xi); \quad (4.24)$$

$\Phi(\xi)$  — частное решение уравнения с правой частью, которое проще всего получается с помощью операционного исчисления. Имеем

$$(p^4 - r^4)Y = \frac{l^4}{EJ} f(p),$$

отсюда

$$Y = \frac{l^4}{EJ} \cdot \frac{f(p)}{p^4 - r^4} \eta = \frac{l^4}{2r^2 EJ} \left[ \frac{f(p)}{p^2 - r^2} \eta - \frac{f(p)}{p^2 + r^2} \eta \right];$$

здесь

$$\eta = \frac{1 + \operatorname{sign} l}{2}.$$

Согласно формулам операционного исчисления имеем

$$\Phi(\xi) = \frac{l^4}{2r^2 EJ} \int_0^{\xi} [\operatorname{sh} r(\xi - \tau) - \sin r(\xi - \tau)] F(\tau) d\tau. \quad (4.25)$$

При этом  $\Phi(\xi)$  для  $\xi = 0$  удовлетворяет условиям

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi''(0) = \Phi'''(0) = 0. \quad (4.26)$$

Таким образом, общее решение уравнения (4.21) имеет вид

$$Y(\xi) = AY_1(\xi) + BY_2(\xi) + CY_3(\xi) + DY_4(\xi) + \frac{l^4}{EJ} \int_0^{\xi} Y_4(\xi - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (4.27)$$

где  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  определяются согласно значениям их (4.7). С помощью выражения (4.27) легко написать общее решение для случая сосредоточенных сил.

Предположим, что с балкой связана одна сосредоточенная сила  $Q$  в сечении  $x = x_1$ , которую мы рассматриваем как предельное положение силы интенсивностью  $q$  на одну погонную единицу, распределенную в интервале от  $x$  до  $x_1 + \sigma_1$  (от  $\xi_1$  до  $\xi_1 + \sigma_1$ ) в предположении, что

$$q\sigma_1 \rightarrow Q \quad (q\sigma_1 l \rightarrow Q), \quad \text{когда } \sigma_1 \rightarrow 0. \quad (4.28)$$



В таком случае  $f(\xi)$ , входящая в уравнение (4.27), всюду равна нулю, за исключением интервала от  $x_1$  до  $x_1 + \sigma_1$ . Поэтому  $\Phi(x) = 0$  для  $0 \leq x \leq x_1$ ;

$$\Phi(\xi) = \frac{l^4}{EJ} \int_{\xi_1}^{\xi_2 + \sigma_1'} f(\tau) Y_4(\xi - \tau) d\tau \quad \text{для } x_1 + \sigma_1 \leq x \leq l.$$

На основании теоремы о среднем значении имеем

$$\Phi(\xi) = \frac{l^4}{EJ} \sigma_1' q Y_4(\xi - \xi_1).$$

Приближая  $\sigma_1'$  к нулю и принимая во внимание (4.28), получим

$$\Phi(\xi) = \frac{Ql^3}{EJ} Y_4(\xi - \xi_1) \quad \text{для } \xi > \xi_1. \quad (4.29)$$

Для установившегося колебательного движения значение  $Q$  должно быть заменено сосредоточенной силой (4.22). Следовательно,

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq \xi \leq \xi_1 \\ \alpha_1 r^4 Y(\xi) Y(\xi - \xi_1) & \text{для } \xi_1 \leq \xi \leq l, \end{cases} \quad (4.30)$$

где

$$r^4 = \beta^2 = (1 + e) \rho F \frac{\omega^2 l^4}{EJ} \quad (4.31)$$

$$\alpha_1 = \frac{m}{(1 + e) \rho Fl}.$$

В случае, если имеется  $n$  сосредоточенных масс, связанных с сечениями  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , общее решение для интервала  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$  ( $\xi_k \leq \xi \leq \xi_{k+1}$ ) определяется формулой

$$\psi(\xi) = AY_1(\xi) + BY_2(\xi) + CY_3(\xi) + CY_4(\xi) + \\ + \sum_{i=1}^k \alpha_i r^4 Y(\xi_i) Y_4(\xi - \xi_i). \quad (4.32)$$

Уравнение частоты в этом случае составляется аналогично случаю невесомой балки с  $n$  массами с помощью следующих приемов.

Удовлетворяя условиям на левом конце, мы оставляем лишь две произвольные постоянные. Подставляя последовательно в уравнение (4.32) значения  $\xi = \xi_1, \xi = \xi_2, \dots, \xi = \xi_n$ , получим  $n$  уравнений относительно неизвестных  $Y(\xi_1), Y(\xi_2), \dots, Y(\xi_n)$  и двух произвольных постоянных  $C', D'$ . Составляя два условия для правого конца, получим систему  $n + 2$  однородных уравнений относительно  $n + 2$  неизвестных:  $Y(\xi_1), Y(\xi_2), \dots, Y(\xi_n)$  и двух произвольных постоянных.

Из определителя этой системы, составленного из коэффициентов при неизвестных, получим уравнение частоты.

При сравнительно большом числе масс приходится иметь дело с определителями высоких порядков; чтобы избежать этого, можно применить следующий прием. После исключения двух произвольных постоянных из условий для левого конца, даем ряд значений для  $r$  ( $r_1, \dots, r_i$ ) и определяем из формулы (4.32) последовательно  $Y(\xi_1), Y(\xi_2), \dots, Y(\xi_n)$  в зависимости от двух оставшихся произвольных постоянных. Составив условия для правого конца

$$\begin{aligned} aC' + bD' &= 0; \\ a_1C' + b_1D' &= 0, \end{aligned}$$

вычисляем значение определителя этой системы для каждого  $r_i$

$$\Delta(r_i) = ab_1 - a_1b;$$

Значения корней  $r$  будут лежать в тех интервалах, в которых меняется знак ряда чисел

$$\Delta(r_1), \Delta(r_2), \dots, \Delta(r_n).$$

Если перемена знака будет в интервале

$$\Delta r_k, \Delta(r_{k+1}) (r_{k+1} > r_k),$$

то значение корня будет

$$r = r_k + \frac{(r_{k+1} - r_k) \Delta(r_k)}{\Delta(r_k) - \Delta(r_{k+1})}. \quad (4.33)$$

Определив  $r$ , находим частоту  $\omega$  по формуле (4.5).

Аналогично можно составить решение и для случая, когда со стержнем связаны диски, дающие при колебании моменты [48].

### Стержень, упруго опертый в точках

При наличии упругих опор в тех же местах, где расположены массы (рис. 4.1), необходимо в формулах вместо

$$Q_i = m_i \omega^2 Y(\xi_i)$$

подставить

$$Q_i = (m_i \omega^2 - c_i) Y(\xi_i), \quad (4.34)$$

где  $c_i$  — коэффициент жесткости опоры, т. е. та сила, которую необходимо приложить к  $i$ -й опоре, чтобы получить осадку, равную единице;

$c_i Y(\xi_i)$  — реакция  $i$ -й опоры.

Решение уравнения для интервала  $\xi_k \leq \xi \leq \xi_{k+1}$  будет

$$Y(\xi) = Z(\xi) + \sum_{i=1}^k \left( \alpha_i \beta^2 - \frac{l^3 c_i}{EJ} \right) Y(\xi_i) Y_4(\xi - \xi_i), \quad (4.35)$$

причем некоторые  $\alpha_i$  или  $c_i$  могут быть равны нулю.

**Случай симметрии.** В том случае, когда имеется  $2n$  масс, расположенных симметрично относительно середины стержня, и масса  $m_0$  связана с серединой стержня (рис. 4.2), причем  $m_i = m_{2n-i}$ , можно несколько упростить вычисления, рассматривая

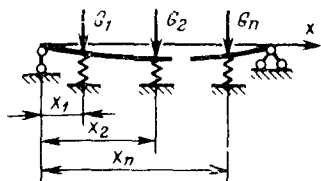


Рис. 4.1

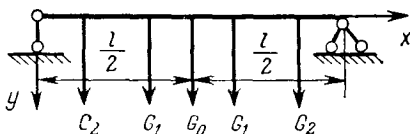


Рис. 4.2

отдельно симметричные и антисимметричные формы колебаний относительно середины.

Для первого случая можно вместо условий заделки для  $x = 1$  удовлетворить условиям

$$Y' \left( \frac{1}{2}, t \right) = 0; EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{m_0}{2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \text{ для } x = \frac{l}{2}$$

или

$$Y' \left( \frac{1}{2} \right) = 0; Y''' \left( \frac{1}{2} \right) = -\frac{\alpha_0}{2} \beta^2 Y \left( \frac{1}{2} \right), \quad (4.36)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{m_0}{(1 + e) F \rho l};$$

для второго случая

$$Y \left( \frac{1}{2} \right) = 0; Y'' \left( \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (4.37)$$

### Частотные уравнения для частных случаев

Применим теперь полученные общие решения для случая сосредоточенных масс к некоторым частным случаям.

**Стержень с опертыми концами и массой  $m$ , приложенной на расстоянии  $a$  от левой опоры** (рис. 4.3). Для этого случая согласно выражению (4.6), удовлетворяя условиям для левой опоры, получим решение

$$Y(\xi) = Z(\xi) = A \operatorname{sh} r\xi + B \sin r\xi;$$

для интервала  $\xi_1 \leq \xi \leq 1$  ( $\xi_1 = \frac{a}{l}$ ) получим

$$Y(\xi) = A \operatorname{sh} r\xi + B \sin r\xi + \alpha r^4 (A \operatorname{sh} r\xi_1 + B \sin r\xi_1) Y_4(\xi - \xi_1).$$

Удовлетворяя условиям для правой опоры (4.9, а) для  $\xi = 1$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} [\operatorname{sh} r + \alpha r^4 \operatorname{sh} r \xi_1 Y_4(\xi_2)] A + [\sin r + \alpha r^4 \sin r \xi Y_4(\xi_2)] B &= 0; \\ [\operatorname{sh} r + \alpha r^2 \operatorname{sh} r \xi_1 Y''(\xi_2)] A + [-\sin r + \alpha r^2 \sin r \xi Y_4''(\xi_2)] B &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\xi_2 = 1 - \xi_1.$$

Приравнявая определитель этой системы нулю, получим уравнение частоты

$$2 \sin r \operatorname{sh} r - \alpha r (\sin r \xi_1 \sin r \xi_2 \operatorname{sh} r - \operatorname{sh} r \xi_1 \operatorname{sh} r \xi_2 \sin r) = 0. \quad (4.38)$$

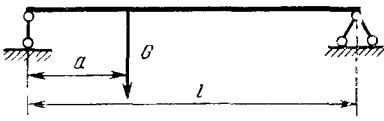


Рис. 4.3

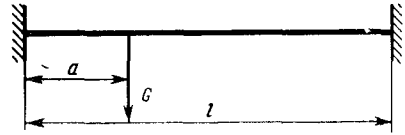


Рис. 4.4

В частности, если груз приложен посредине, из формулы (4.38) получим уравнение частоты для симметричных колебаний:

$$\operatorname{ch} \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2} - \frac{\alpha r}{4} \left( \operatorname{ch} \frac{r}{2} \sin \frac{r}{2} - \operatorname{sh} \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2} \right) = 0. \quad (4.39)$$

Для антисимметричных колебаний  $\sin \frac{r}{2} = 0$ , т. е.  $r = 2\pi k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

Стержень с заделанными концами и массой  $m$ , приложенной на расстоянии  $a$  от левой опоры (рис. 4.4). Уравнение кривой изгиба для этого случая берем в виде

$$Y(\xi) = Z(\xi) = CY_3(\xi) + DY_4(\xi) \text{ для } 0 \leq \xi \leq \xi_1, \quad (4.40)$$

где  $Y_3(\xi)$  и  $Y_4(\xi)$  определяются формулами (4.7).

Для интервала  $\xi_1 \leq \xi \leq 1$  получим

$$Y(\xi) = CY_3(\xi) + DY_4(\xi) + \alpha r^4 [CY_3(\xi_1) + DY_4(\xi_1)] Y_4(\xi - \xi_1).$$

Удовлетворяя условиям для правого конца

$$Y(1) = 0; \quad Y'(1) = 0,$$

получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} [Y_3(1) + \alpha r^4 Y_3(\xi_1) Y_4(\xi_2)] C + \\ + [Y_4(1) + \alpha r^4 Y_4(\xi_1) Y_4(\xi_2)] D = 0; \\ [Y_3'(1) + \alpha r^4 Y_3(\xi_2) Y_4'(\xi_2)] C + \\ + [Y_4'(1) + \alpha r^4 Y_4(\xi_1) Y_4'(\xi_2)] D = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Определитель этой системы дает уравнение частоты. Например, когда  $a = \frac{l}{2}$ , из выражения (4.41) получим уравнение частоты

$$\left( \sin \frac{r}{2} \operatorname{ch} \frac{r}{2} - \cos \frac{r}{2} \operatorname{sh} \frac{r}{2} \right) \left[ \operatorname{ch} \frac{r}{2} \sin \frac{r}{2} + \operatorname{sh} \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha r}{2} \left( \operatorname{ch} \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2} - 1 \right) \right] = 0, \quad (4.42)$$

где первый множитель соответствует антисимметричным колебаниям, второй — симметричным.

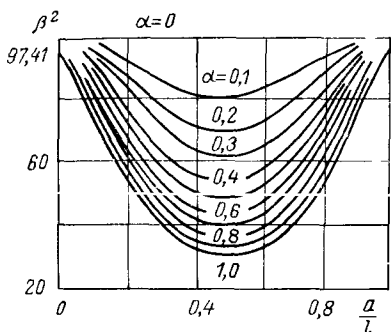


Рис. 4.5

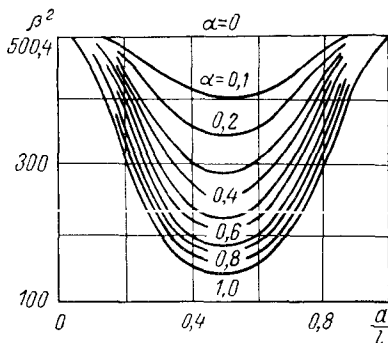


Рис. 4.6

Значение  $r$  для стержня, нагруженного грузом  $m$  на расстоянии  $a$  от левой опоры, в случае опертых и заделанных концов может быть получено по графикам, составленным еще Морроу (рис. 4.5 для опертых концов и рис. 4.6 для заделанных концов).

Здесь по-прежнему

$$\alpha = \frac{m}{(1+e)\rho Fl}; \quad \beta = r^2;$$

число колебаний в 1 мин определяется по формуле

$$n = \frac{60}{2\pi} r^2 \sqrt{\frac{EJ}{(1+e)\rho Fl^4}}.$$

Стержень, один конец которого заделан, другой свободен, с массой на конце. Уравнение частоты для этого случая может быть получено, если взять уравнение изогнутой оси в виде выражения (4.50) и удовлетворить условиям на свободном конце

$$Y''(l) = 0; \quad EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \text{ при } x = l$$

или

$$Y''(l) = 0; \quad Y'''(l) = -\alpha \beta^2 Y(l).$$

В таком случае аналогично предыдущему получим

$$1 + \cos r \operatorname{ch} r - \alpha r (\sin r \operatorname{ch} r - \cos r \operatorname{sh} r) = 0. \quad (4.43)$$

На рис. 4.7 и 4.8 приведены значения  $r$  для основного тона и обертона соответственно, взятые из справочника И. В. Ананьева [1].

Приведем теперь более сложный случай.

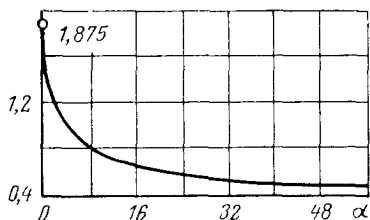


Рис. 4.7

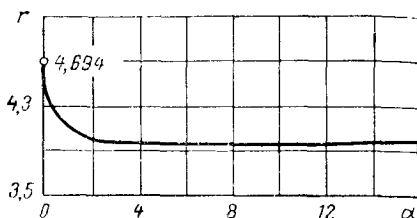


Рис. 4.8

Стержень, один конец которого оперт, подперт на расстоянии упругой опорой и несет сосредоточенные массы  $m_1, m_2, m_3$  ( $G = mg$ ) (рис. 4.9). Уравнение изогнутой оси в интервале

$$0 \leq \xi \leq \xi_1 \left( \xi = \frac{x}{l} \right);$$

$$Y(\xi) = Z(\xi) = A \operatorname{sh} r\xi + \sin r\xi.$$

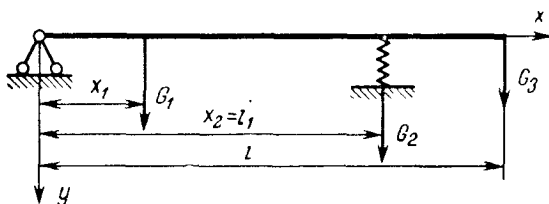


Рис. 4.9

Уравнение изогнутой оси в интервале от  $\xi_2 \leq \xi \leq 1$  запишется в виде уравнения (4.35):

$$Y(\xi) = A \operatorname{sh} r\xi + B \sin r\xi + \alpha_1 \beta^2 Y(\xi_1) Y_4(\xi - \xi_1) + \left( \alpha_2 \beta^2 - \frac{cl^3}{EJ} \right) Y(\xi_2) Y_4(\xi - \xi_2), \quad (4.44)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{q}; \quad \alpha_2 = \frac{m_2}{q}; \quad \alpha_3 = \frac{m_3}{q} \quad [q = (1 + e) \rho EI].$$

Удовлетворяя условиям на конце

$$Y''(1) = 0; \quad Y'''(1) = -\alpha_3 \beta^2 V(1),$$

Получим после подстановки значений прогибов в сечениях

$$Y(\xi_1) = A \operatorname{sh} r\xi_1 + B \sin r\xi_1;$$

$$Y(\xi_2) = A \operatorname{sh} r\xi_2 + B \sin r\xi_2 + \alpha_1 \beta^2 (A \operatorname{sh} r\xi_1 + B \sin r\xi_1) Y_4(\xi_2 - \xi_1)$$

следующие уравнения относительно  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} \gamma_1 A + \delta_1 B &= 0; \\ \gamma_2 A + \delta_2 B &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение частоты будет

$$\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1 = 0.$$

Коэффициент  $\gamma_1, \delta_1, \gamma_2, \delta_2$  имеют значения

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \operatorname{sh} r + \frac{\alpha_1 r}{2} (\operatorname{sh} r\eta_1 + \sin r\eta_1) \operatorname{sh} r\xi_1 - \\ &\quad - \frac{i}{2} \left( \frac{R}{r^3} - \alpha_2 r \right) (\operatorname{sh} r\eta_2 + \sin r\eta_2) X_1(\xi_2); \\ \delta_1 &= -\sin r + \frac{\alpha_1 r}{2} (\operatorname{sh} r\eta_1 + \sin r\eta_1) \sin r\xi_1 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r^3} - \alpha_2 r \right) (\operatorname{sh} r\eta_2 + \sin r\eta_2) X_2(\xi_2); \\ \gamma_2 &= \operatorname{ch} r + \frac{\alpha_1 r}{2} (\operatorname{ch} r\eta_1 + \cos r\eta_1) \operatorname{sh} r\xi_1 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r^3} - \alpha_2 r \right) (\operatorname{ch} r\eta_2 + \cos r\eta_2) X_1(\xi_2) + \\ &\quad + r\alpha_3 \left[ \operatorname{sh} r + \frac{\alpha_1 r}{2} (\operatorname{sh} r\eta_1 - \sin r\eta_1) \operatorname{sh} r\xi_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r^3} - \alpha_2 r \right) (\operatorname{sh} r\eta_2 - \sin r\eta_2) X_1(\xi_2) \right]; \\ \delta_2 &= -\cos r + \frac{r\alpha_1}{2} (\operatorname{ch} r\eta_1 + \cos r\eta_1) \sin r\xi_1 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r^3} - \alpha_2 r \right) (\operatorname{ch} r\eta_2 + \cos r\eta_2) X_2(\xi_2) + \\ &\quad + r\alpha_3 \left[ \sin r + \frac{r\alpha_1}{2} \sin r\xi_1 (\operatorname{sh} r\eta_1 - \sin r\eta_1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r^3} - \alpha_2 r \right) (\operatorname{sh} r\eta_2 - \sin r\eta_2) X_2(\xi_2) \right], \end{aligned}$$

где

$$\xi_1 = \frac{x_1}{l}; \quad \xi_2 = \frac{x_2}{l}; \quad \eta_1 = 1 - \xi_1; \quad \eta_2 = 1 - \xi_2;$$

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{q}; \quad \alpha_2 = \frac{m_2}{q}; \quad \alpha_3 = \frac{m_3}{q}; \quad R = \frac{cl^3}{EJ}; \quad q = (1 + e) F \rho l;$$

$$X_1(\xi_2) = \text{sh } r \xi_2 + \frac{\alpha_1 r}{2} [\text{sh } r (\xi_2 - \xi_1) - \sin r (\xi_2 - \xi_1)] \text{sh } r \xi_1;$$

$$X_2(\xi_2) = \sin r \xi_2 + \frac{\alpha_1 r}{2} [\text{sh } r (\xi_2 - \xi_1) - \sin r (\xi_2 - \xi_1)] \sin r \xi_1.$$

Из этих зависимостей можно получить ряд частных случаев. Например, полагая  $\alpha_1 = 0$ , получим случай, когда нет груза  $G$  ( $G_1 = 0$ ).

В таком случае, когда опора будет абсолютно жесткая и массы  $m_1 = m_2 = 0$ ,  $m_3 \neq 0$  (рис. 4.10), уравнение частоты получается из уравнения (4.44), полагая при этом, что  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $R \rightarrow \infty$ .

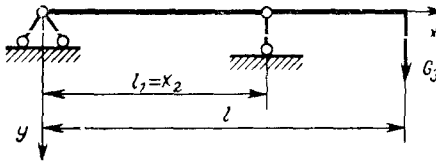


Рис. 4.10

Из условия обращения в нуль  $\gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2$ , приравняв коэффициент при  $R$  нулю (при  $R^2$  коэффициент тождественно равен нулю),

получим уравнение частоты для случая стержня, опертого в двух точках со свешивающимся концом и с грузом на конце (рис. 4.10):

$$\begin{aligned} & (\text{ch } r \eta_2 + \cos r \eta_2) (\text{sh } r \sin r \xi_2 + \sin r \text{sh } r \xi_2) - \\ & - (\text{sh } r \eta_2 + \sin r \eta_2) [\cos r \text{sh } r \xi_2 + \text{ch } r \sin r \xi_2] - \\ & - 2r \alpha_3 (\text{sh } r \sin r \xi_2 \sin r \eta_2 - \sin r \text{sh } r \xi_2 \text{sh } r \eta_2) = 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Для случая, когда опора абсолютно жесткая и массы  $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ , уравнение частоты получается из предыдущего, полагая  $\alpha_3 = 0$ :

$$\begin{aligned} & (\text{ch } r \eta_2 + \cos r \eta_2) (\text{sh } r \sin r \xi_2 + \sin r \text{sh } r \xi_2) - \\ & - (\text{sh } r \eta_2 + \sin r \eta_2) (\text{ch } r \sin r \xi_2 + \cos r \text{sh } r \xi_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Уравнение частоты (4.46) для  $\alpha_3 = 0$  получено еще Морроу. Уравнение частот (4.45) и (4.46) можно записать и в таком виде:

$$\begin{aligned} & (\text{ch } r \xi_2 \sin r \xi_2 - \text{sh } r \xi_2 \cos r \xi_2) (\text{ch } r \eta_2 \sin r \eta_2 - \text{sh } r \eta_2 \cos r \eta_2) - \\ & - 2 \text{sh } r \xi_2 \sin r \xi_2 (1 + \cos r \eta_2 \text{ch } r \eta_2) + \\ & + 2 \alpha_3 r [(\text{ch } r \xi_2 \sin r \xi_2 - \text{sh } r \xi_2 \cos r \xi_2) \sin r \eta_2 \text{sh } r \eta_2 + \\ & + \sin r \xi_2 \text{sh } r \xi_2 (\text{ch } r \eta_2 \sin r \eta_2 - \text{sh } r \eta_2 \cos r \eta_2)] = 0; \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} & (\text{ch } r \xi_2 \sin r \xi_2 - \text{sh } r \xi_2 \cos r \eta_2) (\text{ch } r \eta_2 \sin r \eta_2 - \\ & - \text{sh } r \eta_2 \cos r \eta_2) - 2 \text{sh } r \xi_2 \sin r \xi_2 (1 + \cos r \eta_2 \text{ch } r \eta_2) = 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$



Корни уравнения (4.48)  $r_1 = \xi_2 r$  ( $\alpha_3 = 0$ ) для некоторых значений  $d_1 = \frac{\eta_2}{\xi_2}$  для балки на двух опорах со свешивающимся концом будут такими:

$d$	$r_1$	$d$	$r_1$	$d$	$r_1$	$d$	$r_1$
1	1,506	$\frac{1}{3}$	2,940	$\frac{1}{6}$	3,118	$\frac{1}{9}$	3,134
$\frac{3}{4}$	1,902	$\frac{1}{4}$	3,059	$\frac{1}{7}$	3,127	$\frac{1}{10}$	3,136
$\frac{1}{2}$	2,519	$\frac{1}{5}$	3,100	$\frac{1}{8}$	3,131	0	$\pi$

Частоты колебаний определяются по формуле

$$\omega = \frac{r_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$$

Пр и м е р. Рассмотрим стойку, для которой постоянные, входящие в уравнение (4.45), имеют значения  $\frac{ci^3}{EJ} = 18,25$ ;  $\alpha_1 = 0,250$ ;  $\alpha_2 = 0,0367$ ;  $\alpha_3 = 0,250$ ;  $\xi_1 = 0,357$ ;  $\xi_2 = 0,753$ ;  $\eta_1 = 1 - \xi_1 = 0,643$ ;  $\eta_2 = 1 - \xi_2 = 0,247$ . Корни уравнения (4.44) определяем обычным приемом с помощью нахождения переменного знака этого трансцендентного уравнения. Задаемся значениями  $r$ , составляем для каждого из них соответствующую таблицу и определяем значение для левой части (4.44).

Например, для  $r = 1,92$  имеем табл. 4.6. Здесь  $\mu = 1$ ;  $\xi_1$ ;  $\eta$  . . .

Т а б л и ц а 4.6

Значения функций для  $r = 1,92$

$r\mu$	$\cos r\mu$	$\sin r\mu$	$\operatorname{ch} r\mu$	$\operatorname{sh} r\mu$	$\operatorname{sh} r\mu + \sin r\mu$	$\operatorname{sh} r\mu - \sin r\mu$	$\operatorname{ch} r\mu + \cos r\mu$
$r = 1,92$	-0,342	0,940	3,484	3,337	—	—	—
$r\xi_1 = 0,685$	0,774	0,633	1,244	0,740	—	—	—
$r\eta_1 = 1,235$	0,329	0,944	1,864	1,574	2,518	0,630	2,193
$r\xi_2 = 1,455$	0,115	0,993	2,259	2,025	—	—	—
$r\eta_2 = 0,465$	0,894	0,449	1,110	0,482	0,931	0,033	2,004
$r(\xi_2 - \xi_1) = 0,770$	0,718	0,696	1,311	0,848	—	0,152	—

Остальные величины, входящие в определитель, будут

$$\frac{\alpha_1 r}{2} = \frac{\alpha_3 r}{2} = 0,240; \quad \frac{\alpha_2 r}{2} = \frac{0,0367}{2} 1,92 = 0,0352;$$

$$\frac{R}{2r^3} - \frac{\alpha_2 r}{2} = \frac{18,25}{2 \cdot 1,92^3} - 0,0352 = 1,257;$$

$$X_1(r\xi_2) = 2,025 + 0,240(0,848 - 0,696)0,740 = 2,052;$$

$$X_2(r\xi_2) = 0,993 + 0,240(0,848 - 0,696)0,633 = 1,016.$$

Значения  $\gamma_1, \delta_1, \gamma_2, \delta_2$  будут следующие:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 3,337 + 0,240 \cdot 2,518 \cdot 0,740 - 1,257 \cdot 0,931 \cdot 2,052 = 1,385; \\ \delta_1 &= -0,940 + 0,240 \cdot 2,518 \cdot 0,633 - 1,257 \cdot 0,931 \cdot 1,016 = -1,748; \\ \gamma_2 &= 3,484 + 0,240 \cdot 2,193 \cdot 0,740 - 1,257 \cdot 2,004 \cdot 2,052 + 1,92 \cdot 0,250 \times \\ &\quad \times (3,337 + 0,240 \cdot 0,630 \cdot 0,740 - 1,257 \cdot 0,033 \cdot 2,052) = 0,353; \\ \delta_2 &= 0,342 + 0,240 \cdot 2,193 \cdot 0,633 - 1,257 \cdot 2,004 \cdot 1,016 + 0,480 \times \\ &\quad \times (0,940 + 0,240 \cdot 0,630 \cdot 0,633 - 1,257 \cdot 0,033 \cdot 1,016) = -1,400; \\ (1,92) &= -1,385 \cdot 1,400 + 0,353 \cdot 1,748 = -1,32.\end{aligned}$$

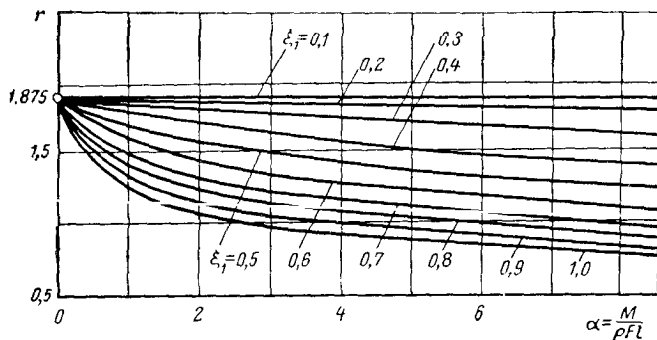


Рис. 4.11

Аналогичным образом производим вычисления и для других значений  $r$ . Для  $r = 2$  имеем

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_1 r}{2} &= \frac{\alpha_3 r}{2} = 0,250; \\ \frac{\alpha_2 r}{2} &= 0,0367; \quad \frac{R}{2r^3} - \frac{\alpha_2 r}{2} = 1,110;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_1(r\xi_2) &= 2,153 + 0,250(0,883 - 0,714)0,776 = 2,185; \\ X_2(r\xi_2) &= 0,998 + 0,250(0,883 - 0,714)0,665 = 1,026; \\ \gamma_1 &= 1,740; \quad \delta_1 = -1,616; \quad \gamma_2 = 1,177; \quad \delta_2 = 1,253; \\ \Delta(2,00) &= 0,792.\end{aligned}$$

Так как в интервале  $\Delta(1,92)$  и  $\Delta(2,00)$  имеется перемена знака, то корень  $r_0$  лежит между 1,92 и 2,00. Интерполируя, имеем

$$r = 2,00 - \frac{(2,00 - 1,92)\Delta(2,00)}{(2,00) - \Delta(1,92)} = 1,97.$$

Если вычислить для уточнения  $\Delta(1,97)$ , то получим  $\Delta(1,97) = -0,330$ . Интерполируя, получим  $r_0 = 1,979$ . Число колебаний в 1 мин

$$n = \frac{60}{2\pi} r_0^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F l^4}}.$$

Аналогичным образом можно вычислить следующую частоту колебаний.

Консольная балка с массой  $m$ , приложенной в точке  $x = l_1$ . Первое значение  $r$  определяется из графика (рис. 4.11).

Консольная балка с промежуточной упругой опорой. Первая частота для этого случая может быть получена из графика (рис. 4.12).

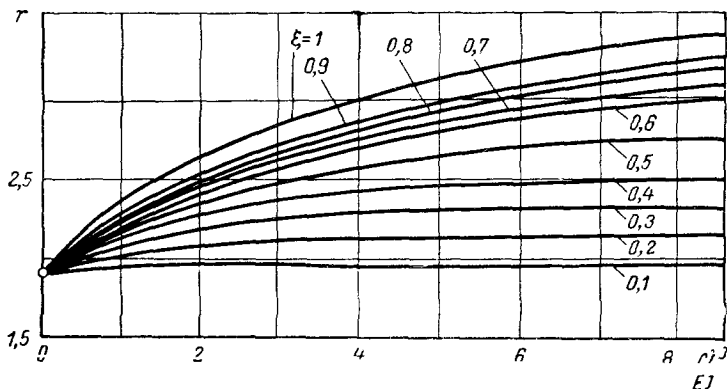


Рис. 4.12

### Колебания балки, с концом которой связано твердое тело

Обозначим через  $M_0 = \frac{G_0}{g}$  массу тела, связанного с концом стержня,  $J_0$  — его момент инерции,  $d$  — расстояние от конца стержня длиной  $l$  до центра тяжести массы (рис. 4.13).

Для получения уравнения частоты необходимо в данном случае для левого конца удовлетворить условиям

$$Y(0) = 0; \quad Y'(0) = 0.$$

Обозначая через  $\varphi_0 = \frac{\partial y}{\partial x_{x=l}}$  угол поворота конца стержня, получим перемещение центра тяжести  $y_0$  массы  $M_0$

$$y_0 = y(l, t) + d \frac{\partial y}{\partial x_{x=l}}.$$

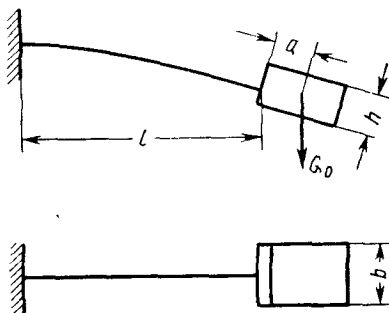


Рис. 4.13

Уравнения движения массы  $M_0$  будут

$$M_0 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = -Q(l, t); \quad M_0 \rho_1^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} = Qd - EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x_{x=l}^2}, \quad (4.49)$$

где  $\rho_1$  — радиус инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно к главной плоскости, в которой колеблется стержень;

$Q(l, t)$  — перерезывающая сила,

$$Q = -EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}_{x=l}.$$

Исключая  $y_0$  и  $\varphi_0$  из уравнений (4.49), получим граничные условия для  $x = l$

$$\left. \begin{aligned} -EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + M_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + M_0 d \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} &= 0; \\ EJd \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M_0 \rho_1^2 \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

Уравнение изогнутой оси стержня рассматриваем в виде

$$Y(\xi) = AY_3(\xi) + BY_4(\xi),$$

удовлетворяющем условиям

$$Y(0) = 0; \quad Y'(0) = 0.$$

Подставляя это значение  $Y(\xi)$  в условия (4.50) и приравнявая определитель системы нулю, получим следующее трансцендентное уравнение частоты:

$$\begin{aligned} \Delta(r) = \frac{1}{\alpha} (1 + \operatorname{ch} r \cos r) - r (\sin r \operatorname{ch} r - \cos r \operatorname{sh} r) - \\ - 2\epsilon r^2 \sin r \operatorname{sh} r - (\delta + \epsilon^2) (\sin r \operatorname{ch} r + \cos r \operatorname{sh} r) r^3 + \\ + a\delta r^4 (1 - \cos r \operatorname{ch} r) = 0, \end{aligned} \quad (4.51)$$

где

$$\alpha = \frac{M_0^2}{\rho Fl}; \quad \delta = \frac{\rho_1^2}{l^2}; \quad \epsilon = \frac{d}{l}.$$

Рассмотренный здесь случай может, например, встретиться при определении частот колебаний башни, в верхней части которой находится резервуар или размещены какие-либо агрегаты (например, ветросиловые башни). В качестве примеров можно еще привести несколько типов машин для испытания на усталость изгибом, консольные валы вентиляторов, насосов и т. п.

**Пример.** Определить число колебаний стержня с жестко заданным концом квадратного сечения с прикрепленным на конце телом массой  $M_0$  из того же материала, что и стержень, для которого

$$\alpha = 0,2l; \quad h = 0,16l; \quad \alpha = \frac{M_0}{\rho Fl} = 1; \quad \epsilon = \frac{d}{l} = 0,2,$$

где  $h$  — высота (и ширина) сечения жестко заделанного конца.

Квадрат радиуса инерции тела будет

$$\frac{\rho_1^2}{I^2} = \frac{(0,4l)^2 + (0,16l)^2}{12l^2} = 0,01547.$$

Давая  $r$  различные значения, получим  $\Delta(1,00) = 0,670$ ;  $\Delta(1,11) = -0,0099$ . Таким образом, корень лежит между  $r = 1,10$  и  $r = 1,11$ :

$$r = 1,10 + \frac{\Delta(1,10)(1,11 - 1,10)}{\Delta(1,10) - \Delta(1,11)} = 1,108.$$

Частота колебаний

$$\omega = 1,108^2 \sqrt{\frac{EJ}{F\rho l^4}} = 1,23 \sqrt{\frac{EJ}{F\rho l^4}}.$$

Предположим теперь, что длина стержня будет  $L = 1,2l$  и вся масса сосредоточена на конце стержня, тогда

$$F\rho L = 1,2F\rho l; \quad \frac{G_0}{g} = 0,8F\rho l, \quad \alpha = 0,667.$$

С помощью формулы (4.54) получим  $r = 1,34$ . Частота колебаний в этом случае

$$\omega = 1,34^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho(1,2l)^4 F}} = 1,25 \sqrt{\frac{EJ}{F\rho l^4}}.$$

Как видно, частота колебаний стержня для данного случая (в предположении, что  $0,8G_0$  сосредоточено в одной точке и длина стержня равна расстоянию от левой опоры до центра тяжести жесткого конца) будет мало отличаться от частоты стержня с жестким весовым концом.

### Колебания стержня с $n - 1$ сосредоточенными массами и упругими опорами на одинаковых расстояниях

Для данного случая (см. рис. 2.6) удобнее всего воспользоваться уравнениями в конечных разностях. Для  $i$ -го участка уравнение изогнутой оси имеет вид  $\left(\xi = \frac{x}{l_i}\right)$

$$Z_i = \eta_i Y_{1i}(\xi) + B_i Y_{2i}(\xi) + \mu_i Y_{3i}(\xi) + D_i Y_{4i}(\xi), \quad (4.52)$$

где  $\eta_i, B_i, \mu_i, D_i$  — произвольные постоянные.

Составляя уравнения в конечных разностях аналогично тому, как это было выполнено выше (гл. 2) для невесомого стержня с равными массами, получим следующую систему уравнений в конечных разностях:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{i+1} + \eta_{i-1} &= 2\eta_i Y_{1i}(1) + 2\mu_i Y_{3i}(1) + \frac{l_1^3}{EJ} m\omega^2 \eta_i Y_{4i}(1); \\ \mu_{i+1} + \mu_{i-1} &= 2r^4 \eta_i Y_{3i}(1) + 2\mu_i Y_{1i}(1) + \frac{l_1^3}{EJ} m\omega^2 \mu_i Y_{2i}(1). \end{aligned} \right\} (4.53)$$

Решение этой системы в общем виде может быть получено по обычным правилам с помощью подстановки

$$\eta_i = A\xi^i; \quad \mu_i = B\xi^i.$$

В случае опертых концов берем значения  $\eta$  и  $\mu$ :

$$\eta_i = A \sin \frac{i\nu\pi}{n}; \quad \mu_i = B \sin \frac{i\nu\pi}{n},$$

где  $\nu$  — целое число;  $n$  — число участков.

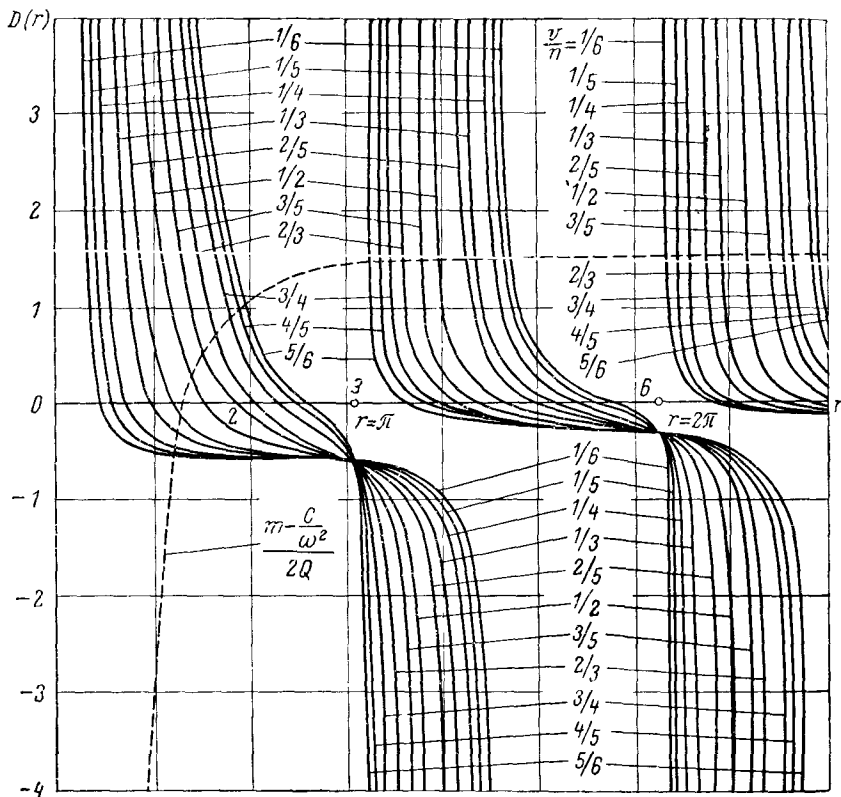


Рис. 4.14

Граничные условия для  $i = 0$  и  $i = n$  при таком выборе значений  $\eta_i$  и  $\mu_i$  удовлетворяются полностью.

После подстановки  $\eta_i$  и  $\mu_i$  в уравнения (4.53) получим

$$\left. \begin{aligned} & \left[ 2 \left( \cos \frac{\nu\pi}{n} - Y_1(1) \right) - \frac{l^3}{EJ} m\omega^2 Y_4(1) \right] A - 2Y_3(1) B = 0; \\ & - \left[ 2r^4 Y_3(1) + \frac{l^3}{EJ} m\omega^2 Y_2(1) \right] A + 2 \left[ \cos \frac{\nu\pi}{n} - Y_1(1) \right] B = 0. \end{aligned} \right\} (4.54)$$

При наличии упругих опор вместо  $m$  должно быть  $m - \frac{c}{\omega^2}$ .  
 Определитель этой системы дает уравнение частоты. После некоторых преобразований можно этот определитель привести к виду

$$D(r) \equiv \frac{\cos^2 \frac{v\pi}{n} - (\operatorname{ch} r + \cos r) \cos \frac{v\pi}{n} + \operatorname{ch} r \cos r}{\frac{r}{2} \left[ \operatorname{ch} r \sin r - \operatorname{sh} r \cos r + (\operatorname{sh} r - \sin r) \cos \frac{v\pi}{n} \right]} = \frac{m - \frac{c}{\omega^2}}{2Q}, \quad (4.55)$$

где  $Q$  — масса участка стержня длиной  $l_1$ ;  
 $m$  — сосредоточенная масса.

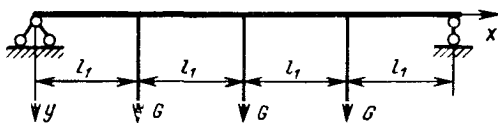


Рис. 4.15

Точка пересечения кривых  $D(r)$  для значений  $v = 1, 2, \dots, n - 1$  с кривой  $m - \frac{c}{\omega^2} / 2Q$  дают значения корней  $r_1, r_2, \dots$ .  
 Частоты колебаний

$$\omega_i = \frac{r_i^2}{l_1^2} \sqrt{\frac{EJ}{F\rho}}.$$

Значения  $r_i$  могут быть взяты из графика (рис. 4.14), позволяющего найти их величины для балок, с числом участков до шести включительно.

Пример. Балка загружена тремя сосредоточенными грузами, каждый массой  $m$  ( $n = 4$ ); масса всей балки равна удвоенной массе одного груза (рис. 4.15). Так как  $4l_1q = 4Q = 2m$ , то в правой части уравнения (4.55) должно быть

$$\frac{m}{2Q} = 1.$$

р.)

Находя из графика точки пересечения прямой  $\frac{m}{2Q} = 1$  с кривыми  $D(r)$  для  $\frac{v}{n} = \frac{1}{4}$ ;  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ;  $\frac{3}{4}$ , получим девять корней уравнения (4.55), приведенных ниже:

$i$	$r$	$i$	$r$	$i$	$r$
1	0,60	4	3,48	7	6,62
2	1,19	5	4,10	8	7,21
3	1,76	6	4,69	9	7,73

Значения частот определяются по формуле

$$\omega = \frac{r^2}{l_1^2} \sqrt{\frac{EJ}{F\rho}} = \frac{(4r)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{F\rho}}.$$

## КОЛЕБАНИЯ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

### Метод решения

Для неразрезной балки, несущей сосредоточенные грузы, решение может быть получено методом, изложенным на стр. 25

Предположим, что балка несет ряд сосредоточенных грузов и имеет ряд опор — упругих или жестких. В таком случае решение уравнения для балки постоянного сечения в интервале между двумя сосредоточенными силами, приложенными в точках  $x_k$  и  $x_{k+1}$  будет (4.32)

$$Y(\xi) = AY_1(\xi) + BY_2(\xi) + CY_3(\xi) + DY_4(\xi) + \frac{l^3}{EJ} \sum_{i=1}^k QY_4(\xi - \xi_i). \quad (4.56)$$

Значение  $Q_i$  зависит от рода сосредоточенных нагрузок.

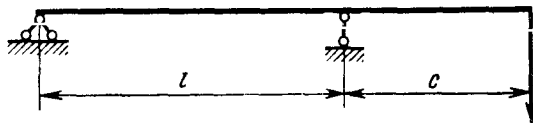


Рис. 4.16

При наличии сосредоточенной массы

$$\frac{Q_i l^3}{EJ} = \alpha_i r^4 Y_i(\xi_i);$$

при сосредоточенной массе и упругой опоре

$$\frac{Q_i l^3}{EJ} = \left( \alpha_i r^4 - \frac{c_i l^3}{EJ} \right) Y_i(\xi_i).$$

Если опора жесткая, вместо  $Q$  необходимо поставить  $R_i$  — реакцию опоры.

Уравнения решаем аналогично изложенному выше;  $R$  определяем из условия, что прогиб в точке приложения силы  $R$  равен нулю.

**Пример.** Найти уравнение частоты балки с консолью, один конец которой оперт шарнирно, другой несет груз (рис. 4.16).

Уравнение изогнутой оси в первом интервале от 0 до  $\xi_1$  ( $\xi_1 = \frac{l}{l+c}$ )

$$Z(\xi) = A \operatorname{sh} r\xi + B \sin r\xi;$$

во втором интервале от  $\xi_1$  до 1 (от  $l$  до  $l+c$ )

$$Y(\xi) = A \operatorname{sh} r\xi + B \sin r\xi - \frac{l^3}{EJ} RY_4(\xi - \xi_1),$$

где  $R$  — сила, которую мы приложили, отбросив опору.



Удовлетворяя условиям на правом конце

$$Y''(1) = 0, \quad Y'''(1) = -\alpha\beta^2 Y(1),$$

вычислим значения постоянных  $A$  и  $B$  в зависимости от  $R$ . Так как опора для  $\xi = \xi_1$  жесткая, то

$$A \operatorname{sh} r\xi_1 + B \sin r\xi_1 = 0.$$

Из этого условия получим уравнение частоты, аналогичное уравнению (4.47):

$$\begin{aligned} & (\operatorname{ch} r\xi_1 \sin r\xi_1 - \operatorname{sh} r\xi_1 \cos r\xi_1) (\operatorname{ch} r\eta_1 \sin r\eta_1 - \operatorname{sh} r\eta_1 \cos r\eta_1) - \\ & - 2 \operatorname{sh} r\xi_1 \sin r\xi_1 (1 + \cos r\eta_1 \operatorname{ch} r\eta_1) + \\ & + 2\alpha r [(\operatorname{ch} r\xi_1 \sin r\xi_1 - \operatorname{sh} r\xi_1 \cos r\xi_1) \sin r\eta_1 \operatorname{sh} r\eta_1 + \\ & + \sin r\xi_1 \operatorname{sh} r\xi_1 (\operatorname{ch} r\eta_1 \sin r\eta_1 - \operatorname{sh} r\eta_1 \cos r\eta_1)] = 0, \end{aligned}$$

где  $\xi_1 = \frac{l}{l+c}$ ;  $\eta_1 = \frac{c}{l+c}$ .

### Неразрезная опертая балка с $n$ пролетами при распределенной нагрузке

Уравнение частоты для этого случая проще всего получить, составив условия сопряжения  $k$  и  $k+1$  пролетов, имеющих длину  $l_k$  и  $l_{k+1}$ , т. е. написать условия сопряжения при направлении оси абсцисс для каждого участка вправо от левой опоры:

$$\left. \begin{aligned} Y_k(0) = 0; \quad Y'_k(l_k) = Y'_{k+1}(0); \\ Y''_k(l_k) = Y''_{k+1}(0); \quad Y_k(l_k) = Y_{k+1}(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

Решение уравнения (4.2) для  $k$ -го пролета удобно записать в виде

$$Y(\xi) = A_k Y_{1k}(\xi) + B_k Y_{2k}(\xi) + C_k Y_{3k}(\xi) + D_k Y_{4k}(\xi).$$

Удовлетворяя условиям сопряжения (4.57) и принимая во внимание условия

$$Y_1(0) = 0; \quad Y''_1(0) = 0, \dots, \quad Y_n(l) = 0; \quad Y''_n(l) = 0,$$

получим систему  $n-1$  уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -a_2(\varphi_1 + \varphi_2) + a_3\psi_2 &= 0; \\ a_2\psi_2 - a_3(\varphi_2 + \varphi_3) + a_4\psi_3 &= 0, \\ \dots & \\ a_{n-1}\psi_{n-1} - a_n(\varphi_{n-1} + \varphi_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

Определитель, составленный из коэффициентов при  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , дает уравнение частоты.

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k &= \operatorname{cth} r_k - \operatorname{ctg} r_k; \\ \psi_k &= \operatorname{cosech} r_k - \operatorname{cosec} r_k. \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

Значение этих функций находится непосредственно из таблиц, составленных проф. С. Г. Зальцбергом.

Уравнения частот для двухпролетной балки для некоторых случаев приводим в табл. 4.7.

Таблица 4.7

Уравнение частот для двухпролетной балки при распределении нагрузки

Род закрепления	Уравнения частот	Примечания
	$\varphi_1 + \varphi_2 = 0$	$\varphi_i = \text{cth } r_i - \text{ctg } r_i$
	$\frac{\sigma_1}{\varphi_1} - \varphi_2 = 0$	$\sigma_1 = 2 \frac{\text{ch } r_i \cos r_i - 1}{\text{sh } r_i \sin r_i}$
	$\frac{\sigma_2}{\varphi_1} + \frac{\sigma_2}{\varphi_2} = 0$	
	$\frac{\sigma_1}{\varphi_1} + \frac{\sigma_2}{\varphi_2} = 0$	$\sigma_2 = \frac{\text{ch } r_2 \cos r_2 + 1}{\text{sh } r_2 \sin r_2}$
	$\varphi_1 + v_2 = 0$	$v = \text{th } r + \text{tg } r$
	$\frac{\sigma_1}{\varphi_1} - v_2 = 0$	
	$\varphi_1 - \frac{\sigma_2}{\varphi_2} = 0$	
	$v_1 - \frac{\sigma_2}{\varphi_2} = 0$	

Эти уравнения частот могут быть применены и к случаю трех- и четырехпролетных балок, симметричных относительно середины, с пролетами  $l_1, 2l_2, l_3 = l_1$  и  $l_1, l_2, l_3 = l_2, l_4 = l_1$  (концы закреплены одинаковым образом). Для этого надо лишь рассмотреть симметричные и антисимметричные случаи относительно середины балки [условия  $Y'(l_2) = Y''(l_2) = 0$ ]:

$$Y(l_2) = Y''(l_2) = 0; \quad Y(l_2) = Y'(l_2) = 0; \quad Y(l_2) = Y''(l_2) = 0;$$

уравнение частоты тогда находится согласно табл. 4.7 для двухпролетной балки при этих условиях для правого конца (середины балки).

Значения функций Ф и Ψ

$\alpha$	$\varphi$	$\psi$	$r$	$\varphi$	$\psi$	$r$	$\varphi$	$\psi$
0,01	0,0100	0,00000	1,60	1,11419	-0,57948	3,20	-16,09946	17,21375
0,10	0,06600	-0,03400	1,70	1,19897	-0,63043	3,30	-5,25706	6,41301
0,20	0,13325	-0,06675	1,80	1,28948	-0,68697	3,40	-2,78113	3,98010
0,30	0,20001	-0,10002	1,90	1,38739	-0,75077	3,50	-1,66783	2,91124
0,40	0,26673	-0,13335	2,00	1,49497	-0,82403	3,60	-1,02449	2,31447
0,50	0,33347	-0,16679	2,10	1,61529	-0,90983	3,70	-0,59945	1,93684
0,60	0,40033	-0,20032	2,20	1,75275	-0,01250	3,80	-0,29173	1,67912
0,70	0,44740	-0,23401	2,30	1,91379	-1,13875	3,90	-0,05466	1,49447
0,80	0,53472	-0,26801	2,40	2,10829	-1,29663	4,00	0,13698	1,35799
0,90	0,60251	-0,30243	2,50	2,35222	-1,50565	4,10	0,29808	1,25523
1,00	0,67095	-0,33748	2,60	2,67334	-1,79079	4,20	0,43795	1,17735
1,10	0,74025	-0,37337	2,70	3,12445	-2,20482	4,30	0,56290	1,11864
1,20	0,81076	-0,41043	2,80	3,82010	-2,86369	4,40	0,67734	1,07544
1,30	0,88284	-0,44902	2,90	5,06442	-4,06935	4,50	0,78460	1,04521
1,40	0,95702	-0,48964	3,00	8,02021	-6,98635	4,60	0,88734	1,02646
1,50	1,03387	-0,53288	3,10	25,03341	-23,95574	4,70	0,98778	1,01827
$\frac{\pi}{2}$	1,09033	-0,56986	$\pi$	$\infty$	$\infty$	$\frac{3}{2}\pi$	1,00016	1,01797

Для некоторых значений  $r$  в табл. 4.8 приводим значения функций

$$\rho = \operatorname{cth} r - \operatorname{ctg} r; \quad \psi = \operatorname{cosech} r - \operatorname{cosec} r.$$

Приведем теперь несколько графиков для определения частот колебаний неразрезных балок.

**Двухпролетная балка с неравными пролетами.** Согласно табл. 4.7 уравнение частоты будет

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0. \quad (4.60)$$

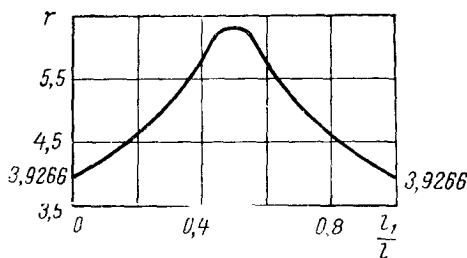


Рис. 4.17

Основная частота двухпролетной балки определяется по формуле

$$\omega = r_i^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F l_i^4}}.$$

Частота колебаний

$$\omega = r^2 \sqrt{\frac{EJ}{F \rho l^4}} = r_1^2 \sqrt{\frac{EJ}{F \rho l_1^4}}, \quad (4.61)$$

где

$$r = r_1 \frac{l}{l_1}; \quad l = l_1 + l_2.$$

Значение коэффициента  $r$  приведено на рис. 4.17 [1].

**Двухпролетная балка с левым опертым, правым заделанным концом.** Уравнение частот для этого случая имеет вид

$$\frac{\varphi_1(r_1)}{\sigma_1(r_2)} - \frac{1}{\varphi_2(r_1)} = 0.$$

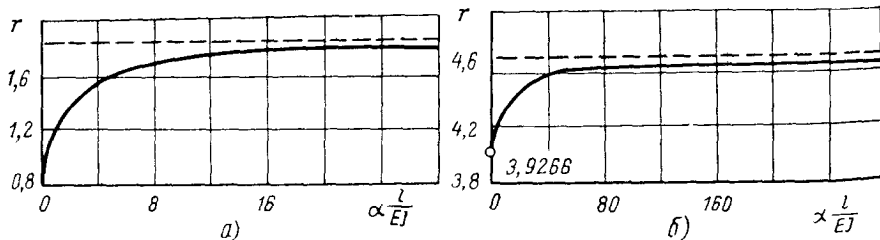


Рис. 4.18

В табл. 4.9 приведены пять собственных значений  $r_{1i}$  для различных значений  $\frac{l_2}{l_1}$ . Частоты колебаний определяются по формуле (4.61).

Собственные значения  $r_{1i}$  двухопорной балки (пролет  $l = l_1 + l_2$ )  
 левый конец которой оперт, правый при  $x = l_1 + l_2$  заделан

$\frac{l_2}{l_1}$	Собственные значения $r_{1i}$				
	$r_{11}$	$r_{12}$	$r_{13}$	$r_{14}$	$r_{15}$
0,0	3,9266	7,0685	10,2102	13,3518	16,4934
0,05	3,8804	6,9824	10,0985	13,2106	16,3253
0,10	3,8392	6,9920	10,0122	13,085	16,2094
0,20	3,7693	6,8181	9,8832	12,9517	16,0016
0,30	3,7116	6,7363	9,7641	12,6663	14,4770
0,40	3,6627	6,6892	9,5168	11,0086	13,0935
0,50	3,6195	6,5607	8,5557	10,0275	12,8576
0,60	3,5796	6,3666	7,4931	9,8186	12,1594
0,7	3,5404	5,9246	6,9584	9,6259	10,8154
0,8	3,4992	5,3602	6,7670	9,0887	10,0668
0,9	3,4591	4,8632	6,6592	8,2827	9,8468
1,0	3,3932	4,4633	6,5454	7,5916	9,6865
1,1	3,3141	4,1561	6,3527	7,1069	9,3447
1,2	3,2063	3,9349	6,0306	6,8533	8,7561
1,3	3,0707	3,7868	5,6579	6,7265	8,1666
1,4	2,9200	3,6895	5,3043	6,6316	7,6554
1,5	2,7685	3,6212	4,9873	6,5186	7,2437
1,6	2,6234	3,5673	4,7077	6,3407	6,9594
1,7	2,4889	3,5193	4,4635	6,0886	6,7973
1,8	2,3663	3,4709	4,2524	5,8099	6,6965
1,9	2,2522	3,4173	4,0735	5,5387	6,6074
2,0	2,1487	3,3538	3,9266	5,2858	6,4952

Эти значения  $r_{1i}$  определяют также частоты симметричных колебаний четырехпролетной балки, симметричной относительно средней опоры.

Консольная балка, в месте заделки которой действует упругий восстанавливающий момент  $M = \alpha \frac{dy}{dx}$ . На рис. 4.18, а приведено значение  $r$  для основной частоты, а на рис. 4.18, б — для частоты второго тона [1].

### Колебания неразрезной балки с различными сечениями в пролетах и с сосредоточенными массами

Предположим, что неразрезная балка имеет различные моменты инерции и площади поперечных сечений в пролетах и, помимо этого, в каждом из них находятся сосредоточенные массы, которые для простоты предполагаем связанными со средним сечением каждого из пролетов.

Дифференциальное уравнение для  $i$ -го пролета длиной  $l_i$  в безразмерных координатах по-прежнему будет

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \xi_i^4} + \frac{(1 + e_i) \rho F l_i^4}{E J_i} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (4.62)$$

После подстановки

$$Y(\xi, t) = Y(\xi) \cos \omega t$$

имеем  $\left(\xi_i = \frac{x}{l_i}\right)$

$$Y^{IV}(\xi_i) - r_i^4 Y(\xi_i) = 0, \quad (4.63)$$

где

$$r_i^4 = (1 + e_i) \rho F \frac{\omega^2 l_i^4}{E J_i}. \quad (4.64)$$

Решение уравнения (4.63) в интервале  $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$  берем в виде

$$Y_1(\xi) = A_i \sin r_i \xi + B_i \cos r_i \xi + C_i \operatorname{sh} r_i \xi + D_i \operatorname{ch} r_i \xi. \quad (4.65)$$

Во втором интервале  $\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1$  будет

$$Y_{11}(\xi) = Y_1(\xi) + r_i^4 Y_{11}\left(\frac{1}{2}\right) Y_{4i}\left(\xi - \frac{1}{2}\right). \quad (4.65')$$

Произвольные постоянные определяем из условий обращения в нуль прогибов на опорах и из условий упругой заделки, т. е.

$$Y(0) = 0, \quad M_{i1} = -K_{i1} \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{для } x = 0;$$

$$Y(l_i) = 0, \quad M_{i2} = K_{i2} \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{для } \xi = l_i.$$

Или

$$Y(0) = 0, \quad \frac{d^2 y}{d\xi^2} = K_{i1} \frac{dy}{d\xi} \quad \text{для } \xi = 0;$$

$$Y(1) = 0, \quad \frac{d^2 y}{d\xi^2} = -K_{i2} \frac{dy}{d\xi} \quad \text{для } \xi = 1,$$

где

$$K_{i1} = \frac{K_{i1} l_i}{E J_i}; \quad K_{i2} = \frac{K_{i2} l_i}{E J_i}.$$

Удовлетворяя условиям на левом конце для  $\xi = 0$ , запишем уравнение (4.65) в виде

$$Y_{11} = A_i \left[ \sin r_i \xi_i - \frac{1}{2r} K_{i1} (\cos r_i \xi_i - \operatorname{ch} r_i \xi_i) \right] + \\ + D_i \left[ \operatorname{sh} r_i \xi_i - \frac{K_{i2}}{2r} (\cos r_i \xi_i - \operatorname{ch} r_i \xi_i) \right].$$

1987  
1988  
1989  
1990  
1991  
1992  
1993  
1994  
1995  
1996  
1997  
1998  
1999  
2000  
2001  
2002  
2003  
2004  
2005  
2006  
2007  
2008  
2009  
2010  
2011  
2012  
2013  
2014  
2015  
2016  
2017  
2018  
2019  
2020

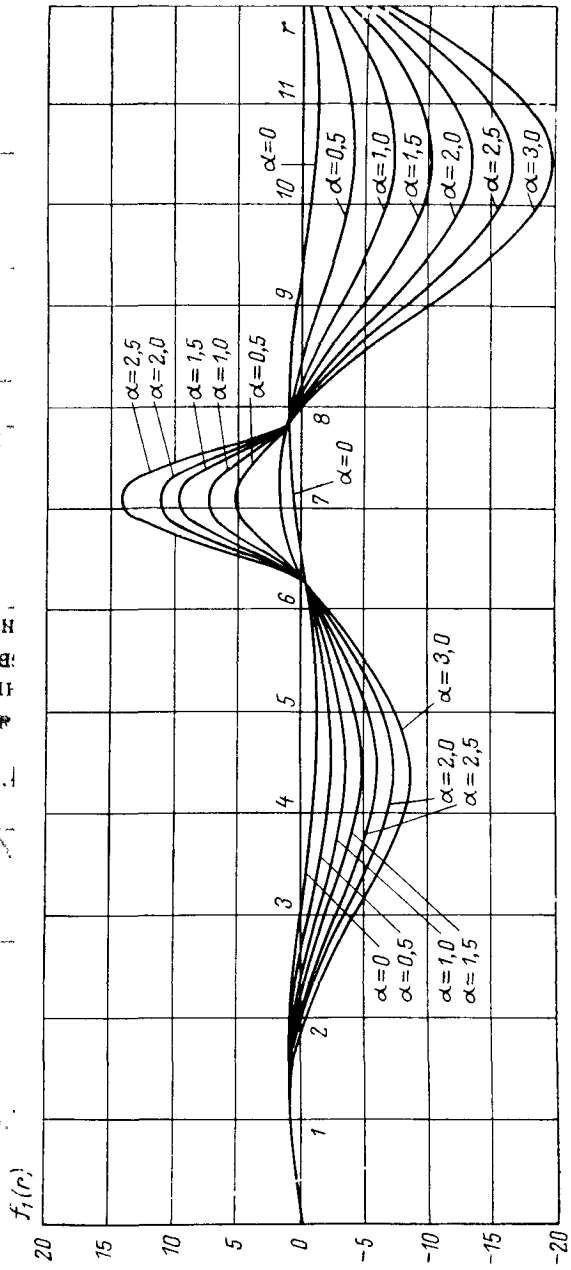


Рис. 4.19

Подчиняя  $Y_{II}(\xi)$  в уравнении (4.65') условиям на правом конце и составляя определитель из коэффициентов при  $A_i$  и  $D_i$ , получим после некоторых преобразований уравнения частоты

$$f_1'(r_i) - 2(K_{i1} + K_{i2})f_2(r_i) - K_{i1}K_{i2}f_3'(r_i) = 0. \quad (4.66)$$

В уравнении (4.66) обозначено (индекс  $i$  опущен):

$$\begin{aligned} f_1'(r) &= e^{-r} 8 \sin \frac{r}{2} \operatorname{sh} \frac{r}{2} \left[ \operatorname{ch} \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha r}{4} \left( \operatorname{ch} \frac{r}{2} \sin \frac{r}{2} - \operatorname{sh} \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2} \right) \right]; \\ f_2(r) &= \frac{e^{-r}}{2r} \left\{ \operatorname{sh} r \cos r - \operatorname{ch} \frac{r}{2} \sin \frac{r}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \alpha r \left[ \left( \operatorname{sh} \frac{r}{2} + \sin \frac{r}{2} \right)^2 - \operatorname{sh} r \sin r \right] \right\}; \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} f_3'(r) &= \frac{e^{-r}}{r^2} 2 \left( \operatorname{sh} \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2} - \sin \frac{r}{2} \operatorname{ch} \frac{r}{2} \right) \left[ \operatorname{ch} \frac{r}{2} \sin \frac{r}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh} \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2} + \frac{\alpha r}{2} \left( \operatorname{ch} \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Корни уравнений

$$f_1'(r) = 0, \quad f_2(r) = 0, \quad f_3'(r) = 0 \quad (4.67')$$

дают соответственно значения характеристических чисел для стержней с средоточенной массой посредине для случаев:  $f_1' = 0$  для стержня с опертыми концами,  $f_2 = 0$  стержня с одним опертым, а другим заделанным концом и  $f_3' = 0$  для стержня с двумя заделанными концами.

Для получения более удобных графиков на рис. 4.19—4.21 вместо  $f_1'(r)$  и  $f_3'(r)$  нанесены значения функций

$$f_1(r) = f_1'(r) + F_1(r) \quad \text{и} \quad f_3(r) = f_3'(r) - F_3(r),$$

а  $f_2(r)$  определяется по формуле (4.67).

Уравнение (4.66) записывается в виде

$$\begin{aligned} f_1(r_i) - F_1(r_i) - 2(K_{i1} + K_{i2})f_2(r_i) - \\ - K_{i1}K_{i2}[f_3(r_i) + F_3(r_3)] = 0. \end{aligned} \quad (4.66')$$

Для функций  $F_1(r_i)$  и  $F_3(r_i)$  взяты значения

$$\begin{aligned} F_1(r_i) &= \begin{cases} 0 & \text{для } r_i < 6,28 \text{ и } r_i > 7,85, \\ 10(r_i - 6,28)^2 (r_i - 7,85)^2 & \text{для } 6,28 \leq r_i \leq 7,85; \end{cases} \\ F_3(r_i) &= \begin{cases} 0 & \text{для } r_i < 7,85 \text{ и } r_i > 9,38, \\ 0,2(r_i - 7,85)^2 (r_i - 9,38)^2 & \text{для } 7,85 < r_i \leq 9,38. \end{cases} \end{aligned}$$

Нули функций  $f_1'(r)$  и  $f_3'(r)$  совпадают с нулями  $f_1(r)$  и  $f_3(r)$  во всем диапазоне изменяется  $r$ .



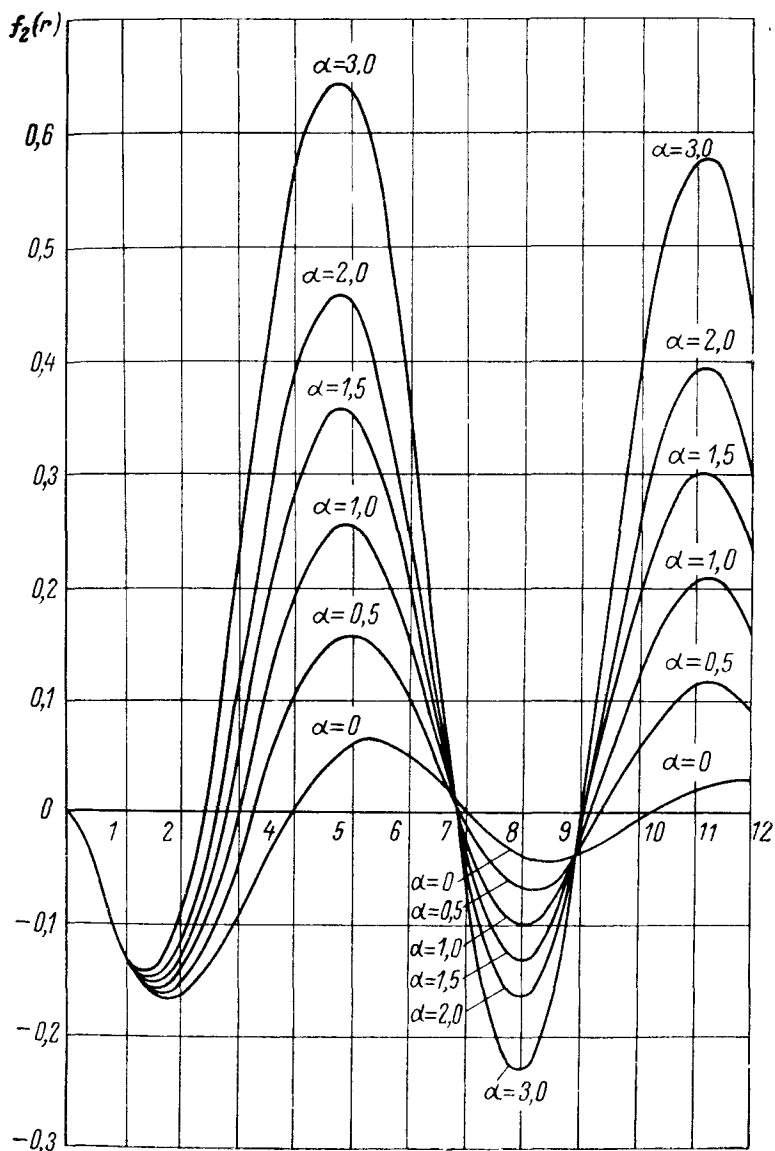


Рис. 4.20

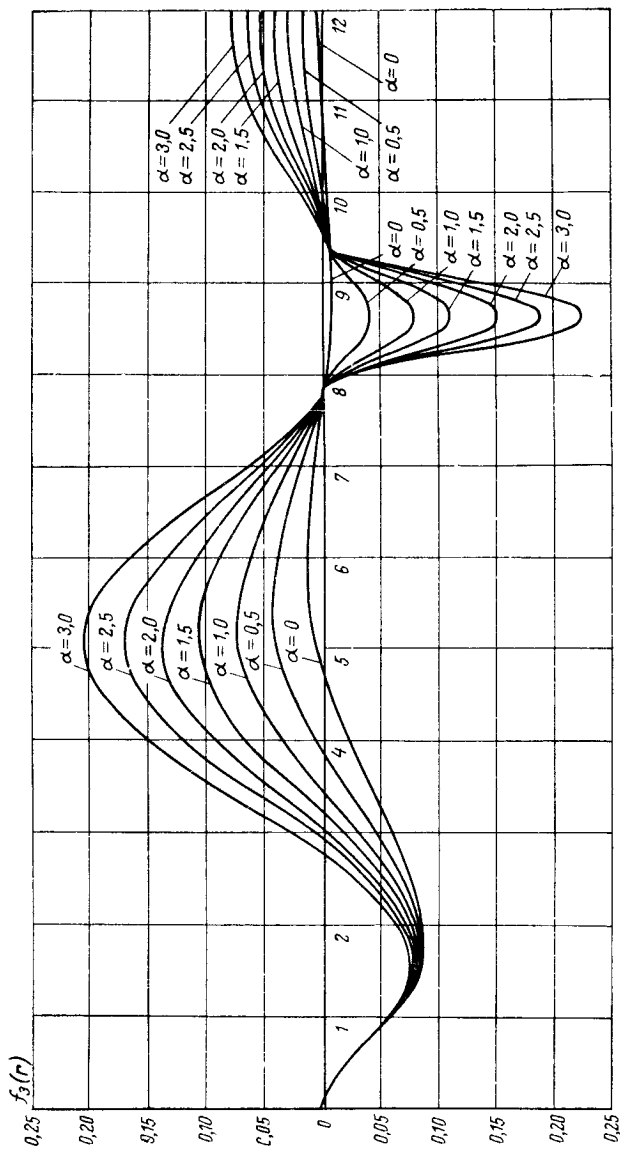


Рис. 4.21

Таким образом, вместо уравнения (4.66) следует пользоваться уравнением (4.66), добавляя лишь в указанных интервалах к значениям  $f_1$  и  $f_3$ , взятым из графика, значения  $-F_1(r)$ ,  $F_3(r)$ .

Частота колебаний равна для  $n$ -го тона

$$\omega_n = \frac{r_{in}^2}{l_i^2} \sqrt{\frac{EJ_i}{\rho F_i (1 + e_i)}}. \quad (4.64')$$

Величины  $r_l$  и  $r_k$  для  $i$ -го и  $k$ -го пролетов связаны соотношением (индекс  $n$  опущен)

$$r_l = C_l r_k, \quad (4.68)$$

где

$$C_l = \frac{l_i}{l_k} \sqrt[4]{\frac{(1 + l_i) F_l J_k}{(1 + l_k) F_k J_l}}.$$

Из условий сопряжения участков следует

$$K_{i2} = -K_{i+1,1}.$$

Или

$$K_{i+1,1} = \delta_{i+1,i} K_{i,2},$$

где

$$\delta_{i+1,i} = -\frac{l_{i+1}}{l_i} \cdot \frac{J_i}{J_{i+1}}. \quad (4.69)$$

С помощью графиков функций  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  и зависимостей (4.68), (4.69) можно найти частоты колебаний многопролетного стержня с сосредоточенными массами.

Для проведения расчетов удобно за основной пролет взять такой  $k$ -й по отношению к каждому. Остальные значения  $C_l$  будут меньше единицы.

Для нахождения частоты задаемся некоторым значением  $\omega$  и определяем из выражений (4.68) и (4.69) все значения  $C_l$  и  $\delta_i$ .

Для вычисленных  $r_i$  определяем последовательно величины  $K_{i1}$ ,  $K_{i2}$  для всех пролетов с помощью значений функций  $f_i$  и коэффициентов перехода  $\delta_{i+1,i}$  (4.69).

Расчет удобно вести одновременно от левой и правой опоры неразрезной балки, где значения  $K$  известны: так, для опертого конца балки  $K = 0$ ; для закрепленного  $K = \infty$ .

Зная  $K_{11}$ , находим значение  $K_{12}$  на правом конце первого пролета балки ( $\rho = 1$ ):

$$K_{\rho 2} = -\frac{2f_2(r_\rho)}{f_3'(r_\rho)} \quad \text{для заделанного конца;}$$

$$K_{\rho 2} = \frac{f_1'(r_\rho)}{2f_2(r_\rho)} \quad \text{для опертого конца.}$$

Найдя  $K_{12}$ , получим для левого конца второго пролета по коэффициенту перехода  $\delta_{21}$

$$K_{21} = \delta_{21} K_{12}.$$

Зная  $K_{21}$ , из уравнения (4.66) определим  $K_{p2}$  в конце второго пролета ( $p = 2$ ):

$$K_{p2} = \frac{f'_1(r_2) - 2K_{21}f_2(r_2)}{2f_2(r) + K_{21}f'_3(r_2)}. \quad (4.66a)$$

В этих формулах

$$f'(r) = f - F_1(r), \quad f'_3 = f_3 + F_2(r).$$

Следовательно, на левом конце третьего пролета

$$K_{31} = \delta_{32} K_{22},$$

а затем находим по формуле (4.69) значение  $K_{32}$  ( $p = 3$ ) для правого конца. Этот процесс продолжаем до какого-то среднего  $m$ -го пролета и находим  $K_{m2}$ .

Аналогичный расчет ведем от правой опоры, на конце которой известно  $K'_{n2}$ . Следовательно,

$$K'_{ni} = -2 \frac{f_2(r_n)}{f'_3(r_n)} \quad \text{для заделанного конца,} \quad (4.66б)$$

$$K'_{n1} = \frac{f'_3(r_n)}{2f_2(r)} \quad \text{для опертого конца.} \quad (4.66в)$$

Затем, зная коэффициент перехода  $\delta'_{n-1, n} = \frac{1}{\delta_{n, n-1}}$ , определяем  $K'_{n-1, 2} = \delta'_{n-1, n} K'_{n, 1}$ . Такой расчет справа ведем, кончая  $m - 1$  пролетом, для которого определяем  $K'_{m-1, 1}$ , а следовательно, находим

$$K'_{m2} = \delta'_{m-1, m} K'_{m-1, 1}.$$

Расчет повторяем для нескольких значений  $r_k: r_{k2}, \dots, r_{ks}, r_{k, s-1}, r_{kq}$  и до тех пор, пока не получим перемены знака  $\Delta = K_{m2} - K'_{m2}$ . Тогда между какими-то значениями  $r_k, r_{k, s} < r < r_{k, s-1}$  появится перемена знака; а следовательно, и будут найдены соответствующие значения  $r'_k$ , т. е. частоты колебаний  $\omega'_k$ .

Пр и м е р. Рассмотрим трехпролетную неразрезную балку со следующими расчетными данными (рис. 4.22):

$$l_1 = 0,6l_2, \quad l_3 = 0,56l_2; \quad e_1 = 0, \quad e_2 = 3,0; \quad e_3 = 2,2,$$

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{F\rho l_1} = 0,50; \quad \alpha_2 = 1,0; \quad \alpha_3 = 0,75;$$

$$J_1 = 0,125J_2; \quad F_1 = \frac{0,5F_2}{2}; \quad J_3 = 0,60J_2; \quad F_3 = 0,80F_2.$$

За основной пролет принимаем средний, тогда значения

$$r_i = c_i r_2 \quad (i = 1, 3);$$

здесь  $c_i$  согласно (4.68) будут

$$c_1 = 0,60, \quad c_3 = 0,566.$$

Коэффициенты перехода

$$\delta_{21} = -\frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{J_1}{J_2} = -0,208, \quad \delta_{32} = -0,933, \quad \delta'_{23} = -\frac{1}{0,933} = -1,075.$$

Первое значение для  $r_2$  берем  $r_2 = 2,65$ . Зная  $c_1$  и  $c_3$ , получим  $r_1 = 1,59$ ;  $r_3 = 1,50$ . На опорах  $K_{11} = \infty$ ,  $K_{32} = 0$ . Расчет ведем одновременно слева и справа. С помощью графиков для  $\alpha_1 = 0,50$  найдем для  $r_1 = 1,59$

$$f_2(1,59) = -0,162, \quad f_3 = 0,083.$$

Следовательно, по формуле (4.66) вычислим

$$K_{12} = -2 \frac{f_1(r_1)}{f_3(r_1)} = -0,390.$$

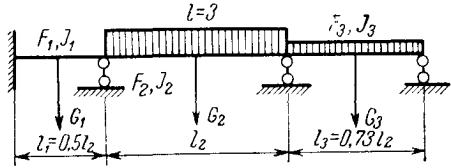


Рис 4 22

По коэффициенту перехода  $\delta_{21}$  получим

$$K_{21} = 0,815.$$

Для  $r_2 = 2,65$  и  $\alpha_2 = 1,0$  имеем

$$f_1(r_2) = -0,500; \quad f_2(r_2) = -0,056; \quad f_3 = -0,053.$$

Следовательно, по формуле (4.69) вычислим

$$K_{22} = 2,65.$$

От правой опоры по  $K'_{32} = 0$ ,  $r_3 = 1,50$ ; из рис. 4.19—4.21 для  $\alpha_3 = 0,75$  находим  $f_1(r_3) = 0,860$ ,  $f_2(r_3) = -0,156$ . Следовательно,

$$K'_{31} = \frac{f_1(r_3)}{2f_2(r_3)} = -2,76.$$

По коэффициенту перехода  $\delta'_{23}$  получим

$$K'_{22} = -2,76 (-1,075) = 2,97.$$

Так как при расчете слева и справа мы получим несовпадающие значения  $K_{22}$  и  $K'_{22}$  и разность их  $\Delta = K_{22} - K'_{22} = -0,33$  не равна нулю, то расчеты необходимо повторить для других значений  $r$ , пока  $\Delta$  не переменит знака.

Для  $r_2 = 2,70$  получим значение  $\Delta = 1,10$ . Интерполируя, найдем, что  $r_2 = 2,66$ .

Данные расчета приведены в табл. 4.10. Аналогичным образом можно найти и следующие корни.

Т а б л и ц а 4.10

Значения  $K$  в зависимости от  $r$

$r_1$	$r_2$	$r_3$	→		$K_{21}$	Δ		←	
			$K_{11}$	$K_{12}$		$K_{22} - K'_{22}$	$K'_{22}$	$K'_{31}$	
1,59	2,65	1,50	-3,95	0,815	2,65	-0,32	2,97	-2,76	
1,62	2,70	1,53	-3,86	0,805	4,04	1,10	2,94	-2,74	
1,68	2,80	1,58	-3,83	0,798	8,25	5,35	2,90	-2,69	

## Балка на сплошном упругом основании

В случае, если балка находится на сплошном упругом основании, дифференциальное уравнение поперечных колебаний будет

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (1 + e) \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky = p(x, t), \quad (4.70)$$

где  $k$  — коэффициент упругой податливости грунта.

Решение этого уравнения может быть получено аналогично изложенному выше. В частности, для  $p(x, t) = 0$  (свободные колебания) уравнение (4.70) может быть записано в виде

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} + (1 + e) \rho F \frac{l^4}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{kl^4}{EJ} y = 0. \quad (4.71)$$

Разыскивая решение уравнения (4.71) в виде

$$y(\xi, t) = Y(\xi) (A \cos \omega t + B \sin \omega t),$$

получим для  $Y(\xi)$  уравнение

$$Y^{IV}(\xi) - r_1^4 Y(\xi) = 0,$$

где

$$r_1^4 = r^4 - c,$$

причем

$$r^4 = \frac{(1 + e) \rho F l^4}{EJ} \omega^2; \quad c = \frac{kl^4}{EJ}.$$

Исследование решения уравнения (4.71) и составление частот никаких затруднений не представляют.

## ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИИ ПОВОРОТА И ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛ

### Дифференциальное уравнение

В гл. 3 были получены общие уравнения колебаний балки с учетом различных факторов, а также уравнения движения в общем виде.

Выясним теперь влияние перерезывающих сил и сил инерции на частоты колебаний балок ненагруженных или связанных с сосредоточенными массами. В дальнейшем примем:

$\psi$  — угол наклона касательной к упругой линии от действия только изгибающих моментов;

$\tau$  — угол наклона от изменения перерезывающих сил;

$l$  — длина балки;

$\rho_1 = \sqrt{\frac{J}{F}}$  — радиус инерции балки;

$P(x, t)$  — интенсивность внешней нагрузки.

Угол наклона касательной, изгибающий момент и перерезывающая сила равны

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi + \tau; \quad M = -EJ \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad Q = k' \tau GF = k' \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) GF, \quad (4.72)$$

где  $k'$  — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения. Значение коэффициента  $k' = \frac{1}{k}$  определяется по формулам сопротивления материалов (гл. 3 и табл. 3.1).

Из уравнений (4.72) имеем

$$EJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k' \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) FG - J\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0; \quad (4.73)$$

$$-p + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k' \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) FG = 0. \quad (4.74)$$

Соотношения (4.72) и (4.74) после исключения  $\psi$  приводят к дифференциальному уравнению поперечных колебаний стержня

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left( \rho J + \frac{\rho EJ}{k'G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2} + \rho J \frac{\rho}{k'G} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^4} = \\ = p(x, t) + \frac{\rho J}{k'FG} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{EJ}{k'FG} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (4.75)$$

где третий и четвертый члены левой, второй и третий — правой частей учитывают влияние инерции поворота и перерезывающих сил.

Обычное дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня (4.1) является неволновым, т. е. нельзя найти его решения в виде [45]

$$w = f(x \mp at).$$

Если решение уравнения (4.1) взять в виде

$$w = A \cos(\omega t \pm kx),$$

где

$$\omega = \frac{2\pi v' \rho_1}{\lambda}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

( $\lambda$  — длина волны,  $v'$  — скорость распространения изгибной волны), то после подстановки  $w$  в уравнение (4.1) получим для скорости волны  $v'$  (фазовой скорости) значение

$$v' = \frac{2\pi v_1 \rho_1}{\lambda} \left( \rho_1 = \sqrt{\frac{J}{F}} \right),$$

здесь

$$v_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Для групповой скорости перемещения, т. е. скорости перемещения пакета волн, длины которых ограничены значением  $\Delta\lambda$ , определяемой формулой

$$U = v' - \lambda \frac{\partial v'}{\partial \lambda},$$

получим значение

$$U = 2v',$$

т. е. когда  $\lambda \rightarrow 0$  она тоже стремится к бесконечности.

Как видно из полученных значений фазовой и групповой скоростей, для очень коротких волн ( $\Delta\lambda \rightarrow 0$ ) изгибный импульс распространяется вдоль стержня мгновенно ( $v' \rightarrow \infty$ ), что противоречит физической сущности.

Неволновое уравнение приводит к дисперсии, т. е. к тому, что скорость распространения синусоидальных волн зависит от частоты (или от длины волн).

Анализ уравнения С. Тимошенко (4.75), который можно провести с помощью операционного исчисления, показывает, что это уравнение носит волновой характер. Возмущение распространяется вдоль стержня двумя волнами со скоростями

$$v_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{k'G'}{\rho}}.$$

Решение уравнения (4.75) приводит к обычной волновой картине, т. е. к распространению и отражению волн от концов стержня. При приложении импульса к стержню к сечению, находящемуся на расстоянии  $x$  от места приложения импульса, сперва приходит волна, движущаяся со скоростью  $v_1$ , затем  $v_2$ , затем добавится волна, отраженная от торца, и т. д.

### Свободные колебания

Решение уравнения (4.75) для свободных колебаний [ $p(x, t) = 0$ ] будем искать в форме

$$y(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) Z(x). \quad (4.76)$$

Вводя безразмерную координату  $\xi = \frac{x}{l}$  для определения  $Z(\xi)$  после подстановки выражения (4.76) в (4.75), получим

$$\frac{d^4 Z}{d\xi^4} + b_2 \frac{d^2 Z}{d\xi^2} - b_0 \beta^2 Z = 0, \quad (4.77)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 &= \frac{\omega^2 l^4}{\delta^2}; & \delta^2 &= \frac{EI}{\rho F}; \\ b_2 &= \frac{\rho_1^2}{l^2} \left( 1 + \frac{F}{k'G'} \right) \beta^2; & b_0 &= 1 - \frac{\beta^2 \rho_1^4 E}{l^4 k'G'}. \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$



Частота колебаний

$$\omega = \beta \sqrt{\frac{EJ}{\rho Fl^4}}.$$

Корни характеристического уравнения

$$\left. \begin{aligned} s_1 = -s_3 &= \sqrt{-\frac{b_2}{2} + \sqrt{\vartheta\beta^4 + \beta^2}}; \\ s_2 = -s_4 = is &= i \sqrt{\frac{b_2}{2} + \sqrt{\vartheta\beta^4 + \beta^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

где

$$\vartheta = \frac{\rho l^4}{4I^4} \left(1 - \frac{E}{k'G}\right)^2.$$

Решение уравнения (4.77) в интервале, где нет внешних нагрузок, будет

$$Z(\xi) = A \operatorname{sh} s_1 \xi + B \operatorname{ch} s_1 \xi + C \sin s \xi + D \cos s \xi.$$

Это решение может быть записано и в виде

$$Z(\xi) = AZ_1(\xi) + BZ_2(\xi) + CZ_3(\xi) + DZ_4(\xi), \quad (4.80)$$

где система функций  $Z_i$  обладает единичной матрицей, т. е. каждое из частных решений  $Z_i$  вместе с производными удовлетворяет условию (4.8):

$$Z_i^{(r-1)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{для } r \neq i \\ 1 & \text{для } r = i \end{cases} \quad (r = 1, 2, 3, 4). \quad (4.81)$$

Значения  $Z_i(\xi)$  следующие:

$$\left. \begin{aligned} Z_1(\xi) &= \frac{1}{2\nu_1} (s_1^2 \operatorname{ch} s_2 \xi - s_2^2 \operatorname{ch} s_1 \xi); \\ Z_2(\xi) &= \frac{1}{2\nu_1} \left( \frac{s_1^2}{s_2} \operatorname{sh} s_2 \xi - \frac{s_2^2}{s_1} \operatorname{sh} s_1 \xi \right); \\ Z_3(\xi) &= \frac{1}{2\nu_1} (\operatorname{ch} s_1 \xi - \operatorname{ch} s_2 \xi); \\ Z_4(\xi) &= \frac{1}{2\nu_1} \left( \frac{1}{s_1} \operatorname{sh} s_1 \xi - \frac{1}{s_2} \operatorname{sh} s_2 \xi \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.82)$$

где  $2\nu_1 = s_1^2 - s_2^2 = 2\sqrt{\vartheta\beta^4 - \beta^2}$ .

Условия закрепления для общего случая

Для получения условий закрепления необходимо иметь зависимости  $\psi$ ,  $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ ,  $Q$  от  $y(x, t)$ .

Полагаем

$$y(x, t) = Y(x) T(t),$$

где

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

В таком случае из выражений (4.73) и (4.74) имеем

$$EJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k' FG \frac{\partial Y}{\partial x} + (J\rho\omega^2 - k' FG) \psi = 0; \quad (4.83)$$

$$p + \rho F \omega^2 Y + k' \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) FG = 0. \quad (4.84)$$

Дифференцируя уравнение (4.84) по  $x$  и исключая  $\psi'_x$  с помощью (4.83), получим значение  $\psi$ .

Из уравнения (4.84) найдем  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ . Величина  $Q$  определяется из соотношения (4.72):

$$Q = k' \left( \frac{dY}{dx} - \psi \right) FGT(t).$$

После вычислений получим следующие значения:

$$\psi = \frac{\rho_1^2 E}{b_0 k' G l^3} \left[ \frac{d^3 Y}{d\xi^3} + \frac{\rho_1^2}{l^2} \left( \frac{\beta^2 E}{k' G} + \frac{k' G l^4}{E i^4} \right) \frac{dY}{d\xi} + a_2 \frac{dq}{d\xi} \right] T(t).$$

В зависимости от  $y(x, t)$  можно  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ,  $Q$  выразить следующим образом:

$$\frac{1}{l} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = - \frac{M}{EJ} = \left[ \frac{1}{l^2} \cdot \frac{d^2 Y}{d\xi^2} + \frac{\beta^2 E \rho_1^2}{k' G l^4} Y + \frac{q}{k' FG} \right] T(t); \quad (4.85)$$

$$T(t) Q(\xi) = - \frac{EJ}{b_0 l^3} \left[ \frac{d^3 Y}{d\xi^3} + b_2 \frac{dY}{d\xi} + a_2 \frac{dq}{d\xi} \right] T(t), \quad (4.85')$$

где  $a_2 = \frac{l^2}{k' FG}$ ;

$q(\xi)$  — интенсивность внешней нагрузки.

Граничные условия при  $x = 0$  и  $x = l$  для основных случаев закрепления концов стержня могут быть следующие:

- а)  $Y = 0$ ;  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$  для  $x = 0$  или  $x = l$  — опертый конец;
- б)  $Y = 0$ ;  $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$  } для  $x = 0$  или  $x = l$  — заделанный
- б')  $Y = 0$ ;  $\psi = 0$  } конец;
- в)  $M = 0$ ;  $Q = 0$  для  $x = 0$  или  $x = l$  — свободный конец.

Условие «б» соответствует заделке элемента вдоль оси стержня; условие «б'» — концевой элемента, нормального к оси стержня.

### Колебания балки при наличии сосредоточенных масс

В том случае, когда с осью стержня связаны сосредоточенные массы, для составления уравнения частоты можно применить методы операционного исчисления.

Пусть в сечениях  $x = c_1, x = c_2, \dots, x = c_i, \dots, x = c_n$  с осью балки связаны сосредоточенные массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Предположим, что эти нагрузки распределены в интервалах от  $c_1$  до  $c_1 + \delta, c_2 \leq x \leq c_2 + \delta_2$ ; интенсивность этих нагрузок будет  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ , при этом

$$q_i \sigma_i \rightarrow p_i, \text{ когда } \sigma_i \rightarrow 0. \quad (4.86)$$

В таком случае

$$p(x, t) \begin{cases} 0 & \text{— для всех интервалов, за исключением} \\ & c_i \leq x \leq c_i + \sigma_i; \\ -q_i \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} & \text{для } c_i \leq x \leq c_i + \sigma_i, \end{cases} \quad (4.87)$$

и вместо уравнения (4.77) получим уравнение с правой частью

$$\frac{d^4 Y}{d\xi^4} + b_2 \frac{d^2 Y}{d\xi^2} - b_0 \beta^2 Y = a_0 q - a_2 \frac{d^2 q}{d\xi^2}, \quad (4.87')$$

где

$$a_0 = \frac{l^4}{EJ} - \frac{\beta^2 \rho_1^4}{k'FG}; \quad a_2 = \frac{l^2}{k'FG}. \quad (4.88)$$

Вводя оператор дифференцирования  $\frac{d}{dt} = p$ , запишем уравнение (4.88) в виде

$$p^4 Y + b_2 p^2 Y - b_0 \beta^2 Y = a_0 q - a_2 p^2 q. \quad (4.89)$$

Отсюда  $Y = F^{-1}(p) f(p) q \eta$ ,

где

$$F(p) = p^4 + b_2 p^2 - b_0 \beta^2; \quad f(p) = a_0 - a_2 p^2;$$

$\eta$  — единичная функция.

Применяя правила операционного исчисления (см. приложение), имеем

$$Y = \frac{q f(p)}{F(p)} \eta = \sum_{i=1}^4 \frac{f(s_i) q}{(p - s_i) F'(s_i)} \eta.$$

Отсюда частное решение уравнения (4.87') будет

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= \int_0^{\xi} \Phi(\xi - \tau) q(\tau) d\tau = \int_0^{\xi} \sum_{i=1}^4 \frac{f(s_i)}{4s_i^3 + 2b_2 s_i} e^{s_i(\xi - \tau)} q(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\xi} \frac{q(\tau)}{s_1^2 - s_2^2} \left[ (a_0 - a_2 s_1^2) \frac{\text{sh } s_1(\xi - \tau)}{s_1} - (a_0 - a_2 s_2^2) \frac{\text{sh } s_2(\xi - \tau)}{s_2} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Из выражения (4.90) при наличии сосредоточенных масс (4.86) с помощью предельного перехода (4.86) получим частное решение уравнения (4.87'):

$$\left. \begin{aligned} Y_1(\xi) &= 0 \quad \text{для интервала } 0 \leq \xi \leq \xi_1; \\ Y_1(\xi) &= \beta^2 \sum_{i=1}^k a_i \Phi(\xi - \xi_i) Y(\xi_i) \quad \text{для } c_k \leq \xi \leq c_{k+1}; \end{aligned} \right\} \quad (4.91)$$

причем через  $Y(\xi)$  обозначено полное смещение:

$$Y(\xi) = Z(\xi) + Y_1(\xi),$$

где  $Z(\xi)$  — общее решение (4.80) без правой части.

Значение  $\Phi(\xi - \xi_1)$ , входящее в (4.90), будет

$$\begin{aligned} \Phi(\xi - \xi_1) &= \frac{1}{s_1^2 - s_2^2} \left[ \frac{2}{s_1} (d + as_2^2) \text{sh } s_1(\xi - \xi_1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{s_2} (d + as_1^2) \text{sh } s_2(\xi - \xi_1) \right], \end{aligned} \quad (4.92)$$

причем

$$a_i = \frac{m_i}{Fpl}; \quad a = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_1^2}{l^2} \cdot \frac{E}{k'G}; \quad d = \frac{1}{2} \left[ 1 + \beta^2 \frac{\rho_1^4}{l^4} \left( \frac{E}{k'G} \right)^2 \right].$$

Уравнение частоты составляется аналогично тому, как было указано выше. При этом, как следует из правил операционного исчисления, граничные условия для  $Y$  при  $\xi = 0$  будут

$$Y_1(0) = 0; \quad Y_1'(0) = 0; \quad Y_1''(0) = -a_2 q(0); \quad Y_1'''(0) = -a_2 q'(0).$$

При наличии лишь сосредоточенных масс

$$Y_1(0) = Y_1'(0) = Y_1''(0) = Y_1'''(0) = 0, \quad (4.93)$$

так как

$$q(0) = 0; \quad q'(0) = 0.$$

В случае симметричного расположения масс  $m_1, m_2, \dots, \dots, m_i, \dots, m_{2n}$  ( $m_k = m_{2n-k}$ ) при наличии массы  $m_0$ , связанной с серединой балки, составление уравнения частоты упрощается, так как вместо условий для  $x = l$  можно составить условия для  $x = \frac{l}{2}$  ( $\xi = \frac{1}{2}$ ).

Для данного случая имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} - 0, t \right) - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} + 0, t \right) &= -\frac{m_0}{k'FG} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \\ Q \left( \frac{1}{2} - 0, t \right) - Q \left( \frac{1}{2} + 0, t \right) &= -m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.94)$$

Эти условия эквивалентны следующим:

$$\left. \begin{aligned} Z' \left( \frac{1}{2} \right) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta^2 \Phi' \left( \frac{1}{2} - \xi_i \right) Y(\xi_i) &= \alpha_0 a \beta^2 Y \left( \frac{1}{2} \right); \\ Z'' \left( \frac{1}{2} \right) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta^2 \Phi'' \left( \frac{1}{2} - \xi_i \right) Y(\xi_i) &= -\alpha_0 d \beta^2 Y \left( \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \right\} (4.95)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{m}{\rho Fl}; \quad a = \frac{\rho_1^2}{2l^2} \cdot \frac{F}{k'G}; \quad d = \frac{1}{2} \left[ 1 + \beta^2 \frac{\rho_1^4}{l^4} \left( \frac{E}{k'G} \right)^2 \right].$$

Для антисимметричных форм условие для середины стержня будет

$$Y' \left( \frac{1}{2} \right) = 0; \quad Y'' \left( \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (4.96)$$

Рассмотрим несколько простых случаев.

**Стержень с опертыми концами с массой  $m$  посередине.** Решение уравнения (4.87') в интервале  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  можно взять в виде

$$Y(\xi) = A \operatorname{sh} s_1 \xi + B \sin s \xi.$$

Удовлетворяя условиям (4.95), получим

$$\left( s_1 \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} - \alpha a \beta^2 \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} \right) A + \left( s \cos \frac{s}{2} - \alpha a \beta^2 \sin \frac{s}{2} \right) B = 0;$$

$$\left( s_1^3 \operatorname{ch} \frac{s_1}{2} + \alpha d \beta^2 \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} \right) A - \left( s^3 \cos \frac{s}{2} - \alpha d \beta^2 \sin \frac{s}{2} \right) B = 0.$$

Приравнявая определитель, составленный из коэффициентов при  $A$  и  $B$ , нулю, получим трансцендентное уравнение частоты для симметричных форм колебаний

$$\begin{aligned} ss_1 (s^2 + s_1^2) \operatorname{ch} \frac{s}{2} \operatorname{ch} \frac{s_1}{2} + \alpha \beta^2 \left[ s (d - as^2) \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} \cos \frac{s}{2} - \right. \\ \left. - s_1 (d - as_1^2) \sin \frac{s}{2} \operatorname{ch} \frac{s_1}{2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Для антисимметричных колебаний имеем

$$\sin \frac{s}{2} \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} = 0.$$

Для стержня длиной  $l$ , опертого по концам, уравнение частоты можно получить из уравнения частоты для антисимметричных колебаний, беря пролет  $L = 2l$ , т. е.  $\sin s = 0$ .

Корни этого уравнения  $s = k\pi$  ( $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ ).

Подставляя это значение  $s$  в выражение (4.79) и принимая во внимание, что  $c$  — малая величина, можно вычислить приближенное значение для

$$\beta = \left[ (k\pi)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_1^2}{l^2} \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \beta^2 \right] \left( \frac{1 - c\beta^2}{2} \right). \quad (4.98)$$

В первом приближении можно положить в правой части  $\beta \approx (k\pi)^2$  и пренебречь  $\frac{c\beta^2}{2}$  по сравнению с единицей. Тогда получим известную формулу

$$\beta \approx (k\pi)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_1^2}{l^2} \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) (k\pi)^2 \right\}. \quad (4.99)$$

**Стержень с закрепленными концами и с массой  $m$  посредине** (см. рис. 4.4). При закреплении согласно граничному условию  $Y = 0$ ;  $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$  уравнение изогнутой оси будет

$$Y(\xi) = CZ_3(\xi) + DZ_4(\xi), \quad (4.100)$$

так как  $Y_1(0) = 1$ ;  $Y_2(0) = 1$ ; следовательно, для того чтобы удовлетворить условия  $Y(0) = Y'(0) = 0$ , необходимо положить  $A = B = 0$ .

Удовлетворяя двум условиям для  $\xi = \frac{1}{2}$  (4.95) и составляя условия совместности, придем для случая симметричных колебаний к трансцендентному уравнению

$$\begin{aligned} & (s^2 + s_1^2) \left( s \operatorname{ch} \frac{s_1}{2} \sin \frac{s}{2} + s_1 \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} \cos \frac{s}{2} \right) + \\ & + \alpha\beta^2 \left\{ \left( \cos \frac{s}{2} \operatorname{ch} \frac{s_1}{2} - 1 \right) [2d - a(s^2 - s_1^2)] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{ss_1} \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} \sin \frac{s}{2} [a(s^4 + s_1^4) - d(s^2 - s_1^2)] \right\} = 0. \quad (4.101) \end{aligned}$$

Для колебаний в стадии антисимметричной относительно середины трансцендентное уравнение будет

$$\frac{1}{s} \sin \frac{s}{2} \operatorname{ch} \frac{s_1}{2} - \frac{1}{s_1} \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} \cos \frac{s}{2} = 0. \quad (4.102)$$

**Стержень, один конец которого заделан, другой свободен.** Здесь необходимо различать два случая.

**А. Элемент стержня заделан по нейтральной оси.** В этом случае необходимо удовлетворить условиям

$$y = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (\xi = 0);$$

$$M(1, t) = 0; \quad Q(1, t) = 0.$$

После вычислений получим уравнение частоты

$$\operatorname{th}^2 s_1 - \frac{(1+AC)(n^2+C)}{(n-S)(n+AS)} = 0, \quad (4.103)$$

где так же, как и в (4.104),

$$n = \frac{s}{s_1}; \quad S = \frac{\sin s}{\operatorname{sh} s_1}; \quad C = \frac{\cos s}{\operatorname{ch} s_1};$$

$$A = \frac{s^2 - k}{s_1^2 + k}; \quad N = \frac{s_1}{s} \cdot \frac{1 + \xi s_1^2}{1 - \xi s^2},$$

причем

$$\xi = \frac{\rho_0^2 \delta_1}{(\rho_0^2 \delta_1)^2 \beta^2 + 1}; \quad \rho_0 = \frac{\rho_1}{l}; \quad \delta_1 = \frac{E}{k'G}; \quad k = \rho_0^2 \delta_1 \beta^2.$$

Б. Элемент стержня заделан нормально к нейтральной оси. В этом случае необходимо удовлетворить условиям  $Y = 0$ ;  $\psi = 0$  и  $M = 0$ ;  $Q = 0$ , т. е.

$$\begin{aligned} y(0, t) &= 0; & \psi(0, t) &= 0; \\ M(0, t) &= 0; & Q(0, t) &= 0. \end{aligned}$$

В этом случае частное уравнение имеет вид

$$\operatorname{th}^2 s_1 - \frac{(1+AC)(n+NC)}{(n-S)(1+ANS)} = 0. \quad (4.104)$$

Решение уравнений (4.101), (4.103), (4.104) может быть найдено без затруднений методом, применявшимся нами выше, т. е. с помощью подстановок значений  $\beta$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  и нахождения перемен знака левых частей уравнения частоты.

Для того чтобы выяснить влияние инерции поворота и перерезывающих сил, приводим результаты подсчетов для случая железобетонного стержня с опертыми и заделанными концами и грузом посередине (4.97), (4.101). Для подсчета гибкость стержня была взята равной  $\lambda = \frac{l}{\rho_1} = \frac{1}{20}$ , что соответствует для прямоугольного сечения отношению высоты сечения к длине  $\frac{h}{l} \approx \frac{1}{5,8}$ . Остальные величины:

$$k' = \frac{5}{6}; \quad E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; \quad G = 0,9 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2.$$

Вычисления для основного тона приведены в табл. 4.11.

Таблица 4.11

Значения  $\beta$ 

Коэффициенты	Способ закрепления							
	опертых концов				заделанных концов			
$\alpha = \frac{m}{F\rho l}$ . . . . .	0,045	0,638	2,27	4,37	0,053	0,319	0,851	1,78
$\beta$ при учете поворота и сил перерезывания	9,00	6,25	4,00	3,00	20	16	12	9
$\beta_0$ без учета этих факторов . . . . .	9,45	6,50	4,16	3,12	21,1	16,78	12,58	9,43
$\frac{\beta_0 - \beta}{\beta_0}$ 100% . . . . .	4,8	4,13	4,0	3,8	5,22	4,65	4,60	4,55

Из табл. 4.11 видно, что в том случае, когда отношение высоты сечения стержня к длине не будет малой величиной, влиянием перерезывающих сил и инерции поворота пренебрегать не следует уже для основного тона. В особенности значительная поправка должна быть при вычислении высших частот. В частности, поправка для первого обертона при опертых концах будет уже  $\sim 11\%$ .

Таблица 4.12

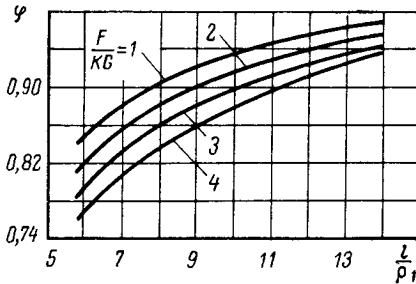


Рис. 4.23

Значения  $\beta$  для различных  $\frac{l}{i}$ 

$\frac{E}{K \cdot G}$	14,4	10	7,072	5,77
1	0,98	0,956	0,92	0,878
2	0,97	0,94	0,89	0,84
3	0,96	0,92	0,86	0,810
4	0,95	0,915	0,84	0,776
5	0,94	0,889	0,81	0,75

Приводим еще данные вычислений для 3-го случая (А и Б), для отношения  $\frac{l}{\rho_1}$ , встречающегося на практике (например, короткие турбинные лопатки). Для разных значений  $\lambda = \frac{l}{\rho_1}$  значение коэффициента  $\varphi$ , дающего снижение частоты от влияния перерезывающих сил, приведено на рис. 4.23 и в табл. 4.12.

Частота, учитывающая влияние инерции поворота и перерезывающей силы,

$$f_1 = \varphi f_0 = \frac{3,515}{2\pi} \varphi \sqrt{\frac{E I^2}{\rho l^4}}$$



## ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ

### ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

#### Вариационные уравнения Лагранжа и формула Кастильяно

Среди методов решения задач строительной механики и теории упругости значительную роль играют вариационные методы. Вариационные уравнения приводятся к двум основным формам: к вариационному уравнению Лагранжа и к вариационной формуле Кастильяно [57].

Исходя из начала возможных перемещений при упругом равновесии необходимо удовлетворить уравнению

$$\delta V - \int_s (X_n \delta u + Y_n \delta v + Z_n \delta w) ds - \int_v (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dv = 0, \quad (5.1)$$

где  $X_n, Y_n, Z_n$  — компоненты усилий, приложенных к поверхности;

$X, Y, Z$  — составляющие объемных сил;

$$\delta V = \int_v (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \epsilon_{xy} + \dots) dv. \quad (5.2)$$

Если выразить относительные деформации  $\epsilon_x, \dots, \epsilon_z$  через перемещения  $u, v, w$  по формулам Коши и вычислить значения коэффициентов при  $\delta u, \delta v, \delta w$ , то можно установить, что уравнение Лагранжа сводится к трем уравнениям равновесия и к условиям на поверхности тела.

Отсюда следует, что при применении уравнений Лагранжа нет необходимости заранее подчинять задачу статическим силовым условиям, так как они удовлетворяются в ходе решения задачи автоматически. Поэтому достаточно задать перемещения лишь с учетом связей, наложенных на тело.

Вариационная формула Кастильяно получится при изучении вариации напряженного состояния

$$\delta V = \int_v (\epsilon_x \delta \sigma_x + \epsilon_y \delta \sigma_y + \dots + \epsilon_{zy} \tau_{zy}) dv.$$

Используя зависимости Коши после соответствующих преобразований, при учете уравнений равновесия для  $\delta\sigma_x$ ,  $\delta\sigma_y$ , приходим к вариационной формуле Кастильяно

$$\delta V = \int_s (u\delta X_v + v\delta Y_v + w\delta Z_v) ds, \quad (5.3)$$

где правая часть — работа внешних поверхностных сил  $\delta X_v$ ,  $\delta Y_v$ ,  $\delta Z_v$  на действительных перемещениях. При  $\delta X_v = \delta Y_v = \delta Z_v = 0$  придем к началу Кастильяно

$$\delta V = 0.$$

Начало Кастильяно, как это было показано Саутсвэллом, является просто началом неразрывности деформаций, записанным в энергетической форме.

### ПРИНЦИП ОСТРОГРАДСКОГО — ГАМИЛЬТОНА

Вариационное уравнение Лагранжа может быть применено и к задачам динамики. Однако удобнее всего иметь дело в этих задачах с вариационным принципом Остроградского—Гамильтона. Так как этот принцип широко используется в динамике для получения дифференциальных уравнений движения, а также в качестве прямого метода, то остановимся на его сущности.

Предположим, что положение механической системы  $S$  определяется значениями  $n$  обобщенных координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Кинетическая энергия системы  $T(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t)$  является функцией координат и времени. Если рассматривать положение системы для момента времени  $t_0$  и  $t_1$ , то координаты  $q_1, q_2, \dots$ , характеризующие положение различных точек системы, являются функциями времени, которые для мгновений  $t_0$  и  $t_1$  получают заданные значения. Пусть  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$  — функции от  $t$ , бесконечно близкие к  $x, y, z$  (или  $q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots$  к  $q_1, q_2, \dots, q_n$ ) и  $\delta x, \delta y, \delta z$  обращаются в нуль для  $t = t_0$  и  $t = t_1$ , а в промежутке определяют перемещение, совместимое со связями. Тогда, согласно принципу Остроградского — Гамильтона, если функции  $q_1, q_2, \dots, q_n$  будут функциями  $t$ , соответствующими естественному или действительному движению системы, то выражение

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \dots + Q_n\delta q_n) dt, \quad (5.4)$$

где  $Q_1, \delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \dots$  — сумма возможных работ всех сил, кроме сил связи, равно нулю для любых значений  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ .

Нетрудно убедиться, что  $\delta I = 0$ . Для каждого мгновения  $t$  имеем

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial T}{\partial q'_1} \delta q'_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q'_n} \delta q'_n.$$

Подставим  $\delta T$  в уравнение (5.4) и вычислим члены

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q'_i dt = \int_{t_0}^t \frac{\partial T'}{\partial q'_1} d \delta q = \left[ \frac{\partial T'}{\partial q'_1} \delta q_1 \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q_i dt.$$

Согласно условиям  $\delta q_1 = 0$  для  $t_0$  и  $t_1$  получим

$$\delta I = \int_{t_0}^t \left\{ Q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q'_1} \right) \delta q_1 + \dots \right\} dt. \quad (5.5)$$

Следовательно, мы приходим к уравнению Лагранжа второго рода, приравнивая нулю члены при  $\delta q_i$ .

Принцип Остроградского—Гамильтона как вариационный принцип применим только к голономным системам, для которых  $\delta \delta q = \delta d q$ .

В том случае, когда сумма возможных работ представляет полный дифференциал  $\delta V$  от силовой функции  $U = -V$ ,

$$\delta I = \delta \int_0^{t_1} (T + V) dt, \quad (5.6)$$

т. е. при естественном движении системы интеграл имеет стационарное значение по бесконечно близким возможным движениям.

Применяя правила вариационного исчисления, т. е. обращая в нуль первую вариацию, приходим из условия экстремума к дифференциальному уравнению Эйлера, дающему уравнение движения с естественными граничными условиями.

Для неконсервативных систем принцип Остроградского—Гамильтона в виде, записанном формулой (5.6), не применяем так как сумма работ обобщенных сил не является точным дифференциалом и знак вариации не может быть вынесен за знак интеграла. Поэтому для таких систем необходимо пользоваться непосредственно выражением (5.4).

### Метод Ритца

Задача о нахождении решений дифференциальных уравнений малых упругих колебаний

$$L\omega = f, \quad (5.7)$$

где  $f$  и  $\omega$  рассматриваются в замкнутой области  $S$  плоскости  $xOy$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ , может быть сведена к отысканию

минимума функционала  $F(w)$ . При изучении малых колебаний упругих систем этот функционал получается из принципа Гамильтона — Остроградского.

Согласно предложения Ритца выбирают последовательность функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , называемых координатными, которые удовлетворяют граничным условиям на контуре области и составляют линейную комбинацию функций от  $x, y$  и параметров от  $a_1, a_2, \dots$ :

$$w_n(x, y, a_1, a_2, \dots) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x, y), \quad (5.8)$$

где  $a_1, a_2, \dots$  — параметры, которые необходимо определить. Удовлетворение силовых условий так же, как указано выше для вариационного уравнения Лагранжа, не обязательно.

Если функцию  $w_n$  подставить в функционал  $L$  (5.7), то получим функцию  $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Составляя условие минимума функции  $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$  от  $n$  параметров  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , получим

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.9)$$

Для малых колебаний функционал  $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$  будет квадратической функцией параметров  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , что приводит к линейной системе алгебраических уравнений относительно параметров  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

По Ритцу находится минимальное значение функционала  $F(w_n)$ . Если точное значение  $F_0(w)$ , то

$$F_n(w_n) \geq F_0(w).$$

В том случае, если разность  $F(w_n) - F(w_0)$  мала, то

$$F(w_n) \rightarrow F_0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Последовательность функций является невозрастающей:

$$F(w_{n+1}) \leq F(w_n).$$

Достаточным условием для того, чтобы  $F(w_n) \rightarrow F_0$ , является условие полноты системы.

В частности, если функционал содержит вторые производные т. е.

$$F(w) = \int_S f\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) dx dy,$$

то условие относительной полноты системы заключается в том, что для любой непрерывной функции вместе со своими производными первого и второго порядка, удовлетворяющей условиям на контуре,

$$|w - w_n| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w_n}{\partial x} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_n}{\partial y} \right| < \varepsilon,$$

$$|w''_x - w''_{nx}| < \varepsilon, \quad |w''_y - w''_{ny}| < \varepsilon.$$

В этом случае

$$F(\omega_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(\omega_0)$$

система функций  $\varphi_n(x)$  является полной, если не существует функция  $\Phi(x)$ , для которой  $\int |\Phi(x)|^2 dx > 0$ , ортогональной одновременно ко всем функциям  $\varphi_n$ , т. е.

$$\int_a^b \varphi_n(x) \Phi(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Выбранная система функций  $\varphi_k(x)$  может быть превращена в ортонормированную

$$\omega_n(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum b_k \psi_k.$$

Для ортонормированной системы функций  $\psi_1, \psi_2, \dots$

$$\int \psi_k(x) \psi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{для } k \neq m; \\ 1 & \text{для } k = m. \end{cases}$$

Выбранные функции должны быть линейно независимы, т. е. для такой системы нельзя найти таких постоянных  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , чтобы выполнялось равенство

$$a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots + a_n \varphi_n = 0.$$

Для того чтобы функции  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы определитель Грама функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  не равнялся нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \int_a^b \varphi_1^2 dx, & \int_a^b \varphi_1 \varphi_2 dx & \dots & \int_a^b \varphi_1 \varphi_n dx \\ \int_a^b \varphi_2 \varphi_1 dx, & \int_a^b \varphi_2^2 dx & \dots & \int_a^b \varphi_2 \varphi_n dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_a^b \varphi_n \varphi_1 dx, & \int_a^b \varphi_n \varphi_2 dx & \dots & \int_a^b \varphi_n^2 dx \end{vmatrix} \neq 0.$$

В более общем случае условие линейной независимости системы  $\varphi_1, \varphi_2$  определяется при рассмотрении в функциональном пространстве, в котором роль вектора играет функция от одной

или нескольких аргументов. В этом пространстве скалярное произведение определяется формулой

$$(\varphi\psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx.$$

Аналогично предыдущему записывается и определитель Грамма [66].

### Метод Б. Г. Галеркина

Сущность метода Галеркина заключается в следующем. Допустим, что необходимо решить уравнение

$$L\omega - f = 0, \quad (5.10)$$

где  $L$  — линейный оператор. Решение этого уравнения должно удовлетворять на контуре краевым условиям.

По методу Галеркина выбирается полная последовательность координатных функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , каждая из которых удовлетворяет краевым условиям.

Решение уравнения (5.10) ищем в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, \quad (5.11)$$

где  $a_k$  — постоянные.

После подстановки  $u_n$  в уравнение (5.10) и умножения на  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) интегрируем по области  $\omega$ . Тогда получим систему алгебраических уравнений

$$\int_{\omega} \{L(\sum a_k \varphi_k) - f\} \varphi_i d\omega = 0, \quad (5.12)$$

линейных относительно постоянных  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , из которых и находим значения  $a_k$ .

Аналогично для колебательной системы при  $Lu - \lambda fu = 0$  получим систему алгебраических уравнений

$$\int_{\omega} \left\{ L \left( \sum_k a_k \varphi_k \right) - \lambda f \sum_k a_k \varphi_k \right\} \varphi_i d\omega = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.13)$$

линейных и однородных относительно постоянных  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Определитель этой системы (5.13), приравненный нулю, и дает уравнение частоты.

Для поперечных колебаний стержня по методу Ритца—Релея находим минимум выражения

$$I = \int_0^l \left[ \frac{EJ}{2} Y'^2 - \frac{\rho F}{2} \omega^2 Y^2 \right] dx, \quad (5.14)$$

приравнивая частные производные  $\frac{\partial I}{\partial a_k}$  нулю.

Если идти обычным методом, то необходимо, чтобы вариация  $\delta I = 0$ . Следовательно,

$$\delta I = \int_0^l [(EJY'')'' - \rho F \omega^2 Y] \delta Y dx + \\ + [(EJY'')' \delta Y + EY Y'' \delta Y']_0^l = 0. \quad (5.14')$$

Согласно правилам вариационного исчисления, условие  $\delta I = 0$  приведет нас к дифференциальному уравнению поперечных колебаний и к естественным граничным условиям.

По методу Галеркина для колеблющегося стержня

$$L(y) - \lambda f(y) = 0$$

приходим к системе алгебраических уравнений (5.13). При этом функции  $\varphi$  должны удовлетворять всем условиям на контуре, как кинематическим, налагаемым опорами, так и силовым, зависящим от нагрузок.

Так, например, если с концом консольного стержня связан груз массой  $m$ , то для определения свободных колебаний стержня необходимо, чтобы функции  $\varphi_k$ , помимо условий  $\varphi_k(0) = 0$ ;  $\varphi_k'(0) = 0$ , удовлетворяли еще условиям: 1)  $\frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} = 0$ ; 2)  $\frac{d^3 \varphi_k}{dx^3} = -m \omega^2 \varphi_k$  для  $x = l$ .

По методу Ритца можно для  $x = l$  удовлетворить лишь кинематическим условиям:

$$\frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^3 \varphi_k}{dx^3} = 0,$$

так как второе, силовое условие удовлетворяется по методу Ритца при подставлении выражения  $I$ . Так, значение  $I$  при учете груза будет

$$I = \int_0^l \left[ \frac{EJ}{2} \left( \frac{d^2 Y}{dx} \right)^2 - \frac{\omega^2}{2} \rho F Y^2 \right] dx - \frac{m}{2} Y^2(l) \omega^2.$$

Метод Галеркина является универсальным и с успехом может быть применен к решению различных задач. Однако надо иметь в виду, что метод Ритца вытекает по существу из вариационного начала Лагранжа и, как уже отмечалось выше, удовлетворение заранее силовым условиям для этого метода необходимо, в то время как метод Галеркина требует подчинения функций всем условиям — кинематическим и силовым.

В настоящее время метод Галеркина применяется для решения краевых задач как для уравнений обыкновенных, так и в частных производных, в том числе и нелинейных.

## Применение начала Лагранжа

В случае неконсервативной системы следует исходить непосредственно из вариационного уравнения Лагранжа, пригодного для любых систем.

Для стержней это уравнение имеет вид

$$-\delta V + \int q \delta y \, dx = 0, \quad (5.15)$$

для плит

$$-\delta V + \iint q \delta w \, dx \, dy = 0; \quad (5.16)$$

здесь члены  $q \delta y$  и  $q \delta w$  — элементарная работа внешних сил на возможных перемещениях;  $q$  — интенсивность внешней поперечной нагрузки, в том числе инерция стержня или пластинки. Выражение для работы включает нагрузки от сил, имеющих потенциал, так и неконсервативных.

Простейшим примером неконсервативной системы может служить консольный стержень, к свободному концу которого приложена следящая сила  $P$ , т. е. сила, которая все время направлена по касательной к этому концу. Как известно, правильное решение этой задачи может быть получено методом малых колебаний.

Используем для получения решения уравнение Лагранжа (5.15).

Разлагая силу  $P$  на составляющие  $v$  и  $H$ , из-за малости угла поворота конца стержня имеем

$$v \cong P, \quad H = Py'.$$

Как видно сила  $H$  зависит от угла поворота концевое сечения и является неконсервативной.

Потенциальная энергия стержня от действия изгибающего момента и работа продольной силы  $P$  на перемещении верхнего конца

$$\delta V = \frac{1}{2} \delta \int_0^l EJ y''^2 \, dx + \frac{1}{2} \delta \int_0^l P y'^2 \, dx. \quad (5.17)$$

Определяя элементарную работу от сил инерции стержня и силы  $H$ , найдем

$$\delta V + \int_0^l -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y \, dx - Py' (l) t \delta y_{y=l} = 0. \quad (5.17')$$

Значение критической нагрузки, при которой наступает потеря устойчивости, может быть получено при решении уравнения (5.17) в виде

$$y(x, t) = (A \sin \omega t + B \cos \omega t) Y(x); \quad (5.18)$$



здесь  $Y(x)$  — форма колебаний;

$$Y(\xi) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x). \quad (5.19)$$

Обозначим:

$$\frac{Pl^3}{EJ_0} = k; \quad \beta^2 = \lambda = \frac{\rho F_0 \omega^2 l^4}{EJ_0}; \quad \frac{J}{J_0} = m; \quad \frac{F}{F_0} = n.$$

После подстановки уравнения (5.18) в (5.17) получим

$$\frac{1}{2} \delta \int_0^1 m Y''^2 d\xi + \frac{1}{2} \delta \int k Y'^2 d\xi + \beta^2 \int_0^1 Y \delta Y d\xi - k Y'(\xi) \delta Y = 0. \quad (5.20)$$

Форму колебаний  $Y(\xi)$  можно задать в виде

$$Y(\xi) = \sum_{i=1}^n a_i \xi^{i+1}. \quad (5.19')$$

Расчеты были проведены на ЭЦВМ для  $n = 3, 4, 5, 6$ . Для  $n = 5$  и  $6$  результаты хорошо совпадают с точными, получаемыми из решения трансцендентного уравнения.

На рис. 5.1 показана зависимость частот колебаний от параметра  $k$ . Кривая имеет две ветви, соответствующие первой и второй форме колебаний, которые при некотором значении  $k$  сливаются. Это значение  $k$  является критическим и соответствует неустойчивой области, когда система будет раскачиваться, получая дополнительную энергию от неконсервативной составляющей силы.

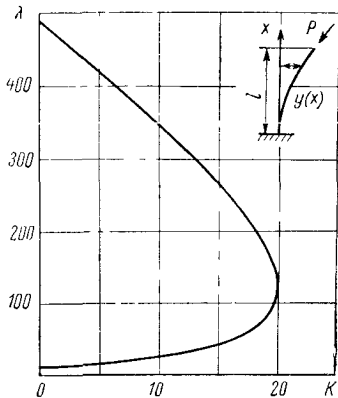


Рис. 5.1

### Построение координатных последовательностей

Применение метода Ритца сопряжено с необходимостью построения координатных последовательностей, удовлетворяющих заданным краевым условиям [51, 66, 67, 149].

В некоторых задачах (обычно, для областей простого вида) выбор координатных функций легко осуществить простым подбором, однако, если область достаточно сложна или же если краевые условия имеют сложный характер, построение координатных последовательностей часто бывает трудно осуществимым. В подобных случаях представляется целесообразным воспользоваться методом, предложенным В. Л. Рвачевым [82], в основе которого лежит использование введенных им в расчеты  $R$ -функций.

$R$ -функции являются функциями обычных непрерывных аргументов, и в то же время, обладают рядом свойств функций алгебры Буля [82].

Формально  $R$ -функции могут быть введены следующим образом.

Функция  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определенная всюду в пространстве  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  своих аргументов, называется  $R$ -функцией, если найдется такая булева функция  $Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$  (это означает, что величины  $Y, X_1, X_2, \dots, X_n$  являются нулями или единицами), что выполняется равенство

$$S[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = F[S(x_1), S(x_2), \dots, S(x_n)], \quad (5.21)$$

где

$$S(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \geq 0, \\ 0, & \text{если } z < 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

Примерами  $R$ -функций являются:

$$y = x_1 x_2; \quad (5.23)$$

$$y = x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \quad (5.24)$$

$$y = e^{x_1} + x_2 - 1 + |e^{x_1} - x_2 - 1|; \quad (5.25)$$

$$y = e^{x_1} x_2 + x_2^2 - x_2 + |e^{x_1} - x_2 - 1| x_2. \quad (5.26)$$

Первая из этих функций (5.23) соответствует операции равнозначности  $X_1 \sim X_2$  булевой алгебры (значения этой и некоторых других булевых функций приведены в табл. 5.1). Действительно, согласно формуле (5.22) и табл. 5.1

$$S(x_1 x_2) = S(x_1) \sim S(x_2) \quad (5.27)$$

Таблица 5.1

$X_1$	$X_2$	Отрицание $\bar{X}_1$	Конъюнкция $X_1 \wedge X_2$	Дизъюнкция $X_1 \vee X_2$	Импликация $X_1 \rightarrow X_2$	Равнозначность $X_1 \sim X_2$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Функция (5.24) соответствует операции конъюнкции  $X_1 \wedge X_2$ , так как

$$S(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) = S(x_1) \wedge S(x_2). \quad (5.28)$$

Подобным образом убеждаемся, что функция (5.25) соответствует дизъюнкции  $X_1 \vee X_2$ , а функция (5.26) — булевой функции

$$Y = (X_1 \vee X_2) \sim X_2. \quad (5.29)$$

Для дальнейшего важное значение имеют следующие  $R$ -функции, для которых введены специальные обозначения:

$$\bar{x} = -x \quad (R\text{-отрицание}); \quad (5.30)$$

$$x \wedge_{\alpha} y = \frac{1}{2} (x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \quad (R\text{-конъюнкция}); \quad (5.31)$$

$$x \vee_{\alpha} y = \frac{1}{2} (x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \quad (R\text{-дизъюнкция}). \quad (5.32)$$

В формулах (5.31) и (5.32)  $\alpha$  — произвольная величина, заключенная в пределах  $-1 < \alpha < 1$ . Для простоты в дальнейшем полагаем  $\alpha = 0$ , т. е. будем рассматривать  $R$ -конъюнкцию  $x \wedge_0 y$  и  $R$ -дизъюнкцию  $x \vee_0 y$ . С помощью  $R$ -функций (5.30)–(5.32) по правилу образования сложных функций (так называемых суперпозиций функций) оказывается возможным строить  $R$ -функции, соответствующие любым булевым функциям. Формально это построение может быть осуществлено следующим образом. Известно [82], что всякая булева функция может быть приведена к так называемой дизъюнктивной нормальной форме, в виде следующих функций:

$$Y = (X_1 \wedge X_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_1 \wedge X_2); \quad (5.33)$$

$$Y = X_1 \vee (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3). \quad (5.34)$$

Оказывается, что если в дизъюнктивной нормальной форме произвести формальную замену символов булевых переменных  $X_1, X_2, \dots$  символами обычных непрерывных переменных  $x_1, x_2, \dots$ , знаки конъюнкции и дизъюнкции заменить соответственно знаками  $R$ -конъюнкции и  $R$ -дизъюнкции и при этом применить строго скобочную запись (т. е. каждую двуместную операцию заключать в скобки), то полученная таким образом функция будет  $R$ -функцией, соответствующей данной булевой функции. Так, например, функциям (5.33) и (5.34) можно поставить в соответствие  $R$ -функции

$$y = \{[(x_1 \wedge_0 x_2) \wedge_0 \bar{x}_3] \vee_0 (x_1 \wedge_0 \bar{x}_2)\} \vee_0 (\bar{x}_1 \wedge_0 x_2); \quad (5.35)$$

$$y = [x_1 \vee_0 (\bar{x}_1 \wedge_0 \bar{x}_2)] \vee_0 [(x_1 \wedge_0 x_2) \wedge_0 x_3]. \quad (5.36)$$

С помощью  $R$ -функций легко осуществить построение уравнений границ сложных областей.

Например, если область ( $S$ ) представляет собой пересечение известных областей ( $S_1$ ) и ( $S_2$ ) (рис. 5.2, а), определяемых неравенствами  $\varphi_1 \geq 0$  и  $\varphi_2 \geq 0$  соответственно, то область ( $S$ ) будет определяться неравенством

$$\varphi_1 \wedge_0 \varphi_2 \geq 0, \quad (5.37)$$

а следовательно, уравнение

$$\varphi_1 \wedge_0 \varphi_2 = 0 \quad (5.38)$$

будет уравнением границы области ( $S$ ).

Аналогично, уравнение границы области  $T$ , представляющей собой объединение областей  $(S_1)$  и  $(S_2)$  (рис. 5.2, б), можно написать в виде

$$\varphi_1 \vee_0 \varphi_2 = 0. \quad (5.39)$$

Одновременное применение  $R$ -функций  $\bar{x}$ ,  $x \wedge_0 y$ ,  $x \vee_0 y$  позволяет строить уравнения границ практически произвольных областей.

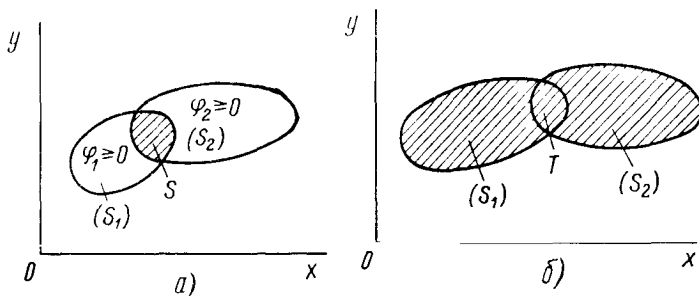


Рис. 5.2

**Пример 1.** Построить функцию  $\omega(x, y)$ , положительную внутри области  $(S)$ , изображенной на рис. 5.3, равную нулю на ее границе и отрицательную вне области  $(S)$ .

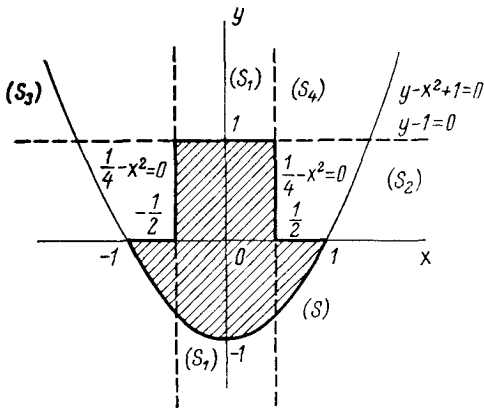


Рис. 5.3

Область  $(S)$  может быть построена с помощью следующих областей:

$(S_1)$  :  $\frac{1}{4} - x^2 \geq 0$  (вертикальная полоса);

$(S_2)$  :  $1 - y \geq 0$  (полуплоскость под прямой  $y = 1$ );

$(S_3)$  :  $y \geq 0$  (верхняя полуплоскость);

$(S_4)$  :  $y - x^2 + 1 \geq 0$  (область над параболой).

$$(5.40)$$

согласно логической формуле

$$S = [(S_1 \wedge S_2) \vee \bar{S}_3] \wedge S_4. \quad (5.41)$$

Соответствующую  $R$ -функцию можно написать в виде

$$y = [(x_1 \wedge_0 x_2) \vee_0 \bar{x}_3] \wedge_0 x_4. \quad (5.42)$$

Подставляя вместо  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  соответствующие левые части неравенств (5.40), получим следующее уравнение границы области (S):

$$\omega(x, y) \equiv \left\{ \left[ \left( \frac{1}{4} - x^2 \right) \wedge_0(1 - y) \right] \vee_0(-y) \right\} \wedge_0(y - x^2 + 1) = 0. \quad (5.43)$$

Левая часть уравнения (5.43), обозначенная  $\omega(x, y)$ , строго положительна внутри области (S) и обращается в нуль лишь в точках ее границы.

Возможность построения функции  $\omega(x, y)$ , положительной внутри заданной области (S) и равной нулю на ее границе, может быть использована для построения координатных последовательностей. Так, например, при решении задач о колебаниях или изгибе защемленной по контуру пластинки, имеющей форму области (S) (рис. 5.3), решение можно искать в виде

$$W(x, y) = \left\{ \left[ \left( \frac{1}{4} - x^2 \right) \wedge_0(1 - y) \right] \vee_0(-y) \right\} \wedge_0(y - x^2 + 1)^2 \times \\ \times \sum_{i+j=0}^n C_{ij} P_i(x) P_j(y), \quad (5.44)$$

где  $P_k(z)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) — та или иная последовательность полиномов (Чебышева, Лежандра и т. д.). Простейшим (но, как правило, не лучшим) выбором является  $P_i(x) \cdot P_j(y) = x^i y^j$ .

Множитель, стоящий перед знаком суммы в формуле (5.44), представляет собой возведенную в квадрат левую часть уравнения (5.43). Этим самым обеспечивается не только равенство нулю на границе области функции  $W(x, y)$ , но и равенство нулю ее нормальной производной.

Перейдем к задаче о свободном опирании пластинки. В этом случае функция  $\omega(x, y)$  строится так, чтобы выполнялись условия:

$$\omega(x, y) = 0 \text{ на границе области (S);} \quad (5.45)$$

$$\omega(x, y) > 0 \text{ внутри области (S);} \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = 1 \text{ на границе области (S)} \quad (5.47)$$

( $n$  — внутренняя нормаль).

Построение функции  $\omega(x, y)$  может быть осуществлено следующим образом. Вначале с помощью  $R$ -функций строится функция  $\omega_1(x, y)$ , удовлетворяющая условиям (5.45) и (5.46). После этого функцию  $\omega(x, y)$  можно выбрать в виде

$$\omega(x, y) = \frac{\omega_1(x, y)}{\sqrt{\omega_1^2 + |\text{grad } \omega_1|^2}}. \quad (5.48)$$

В работе [83] показано, что если контур области ( $S$ ) состоит из дуг окружностей и отрезков прямых, выполнения условия (5.47) можно добиться надлежащим выбором постоянных множителей в левых частях уравнений указанных окружностей и прямых.

Располагая функцией  $\omega(x, y)$ , удовлетворяющей условиям (5.45)—(5.47), решение задачи о свободно опертой пластинке можно искать в виде

$$W(x, y) = \omega(x, y) \sum_{i+j=0}^n C_{ij} P_i(x) P_j(y) + \omega^2(x, y) \cdot \Phi(x, y). \quad (5.49)$$

Функцию  $\Phi(x, y)$  выбирают так, чтобы выполнялось условие равенства нулю изгибающих моментов на границе области ( $S$ ).

Пример 2. Рассмотрим свободно опертую пластинку, изображенную на рис. 5.4.

Область ( $S$ ) может быть построена с помощью областей

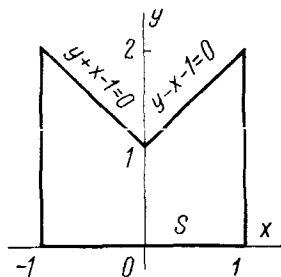


Рис. 5.4

$$\left. \begin{aligned} (S_1): & 1 - x^2 \geq 0; \\ (S_2): & y - x - 1 \geq 0; \\ (S_3): & y + x - 1 \geq 0; \\ (S_4): & y \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

согласно следующей логической формуле:

$$S = \overline{(S_2 \wedge S_3)} \wedge S_1 \wedge S_4. \quad (5.51)$$

Соответствующая  $R$ -функция может быть выбрана в виде

$$y = [(\overline{x_2 \wedge_0 x_3}) \wedge_0 x_1] \wedge_0 x_4. \quad (5.52)$$

Чтобы, кроме выполнения условий (5.45) и (5.46), добиться также выполнения (5.47), при построении функции  $\omega(x, y)$  будем умножать левые части неравенств (5.50) на постоянные множители  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  и  $k_4$  соответственно. Получим

$$\omega(x, y) = \{[(k_2(y - x - 1)) \wedge_0 (k_3(y + x - 1))] \times \times \wedge_0 (k_1(1 - x^2))\} \wedge_0 (k_4 y). \quad (5.53)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что если положить  $k_1 = 1$ ,  $k_4 = 2$ ,  $k_2 = k_3 = 2\sqrt{2}$ , то функция  $\omega(x, y)$  будет удовлетворять условию (5.47).

Так как в рассматриваемом примере пластинка имеет многоугольную форму, условие равенства нулю изгибающих моментов на ее границе сводится к условию на границе области ( $S$ )

$$\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} = 0. \quad (5.54)$$

Это условие будет удовлетворяться, если функцию  $\Phi(x, y)$  в формуле (5.49) выбрать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & -\frac{1}{2} \sum_{i+j=0}^n C_{ij} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot P_i(x) P_j(y) + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial \omega}{\partial x} P'_i(x) \cdot P_j(y) + 2 \frac{\partial \omega}{\partial y} P_i(x) P'_j(y) \right\}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Чтобы убедиться в этом, заметим вначале, что в силу условий (5.45) и (5.47) на границе области ( $S$ )

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \cos(\widehat{n, Ox}), \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \cos(\widehat{n, Oy}). \quad (5.56)$$

Следовательно, на границе области ( $S$ )

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2}; \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} P'_i(x) P_j(y) + \frac{\partial \omega}{\partial y} P_i(x) P'_j(y) = \frac{\partial}{\partial n} [P_i(x) \cdot P_j(y)]; \quad (5.58)$$

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2} \sum_{i+j=0}^n C_{ij} \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} P_i(x) P_j(y) + 2 \frac{\partial}{\partial n} [P_i(x) P_j(y)] \right\}. \quad (5.59)$$

Подставляя выражение (5.49) в уравнение (5.54), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} = & \sum_{i+j=0}^n C_{ij} \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} P_i(x) P_j(y) + 2 \frac{\partial \omega}{\partial n} \cdot \frac{\partial}{\partial n} [P_i(x) P_j(y) + \right. \\ & \left. + \omega \frac{\partial^2}{\partial n^2} [P_i(x) P_j(y)] \right\} + \left[ 2\omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} + 2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial n} \right)^2 \right] \Phi(x, y) + \\ & + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial n} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \omega^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Учитывая, что  $\omega = 0$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial n} = 1$ , а также используя формулы (5.57)–(5.59), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} = & \sum_{i+j=0}^n C_{ij} \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} P_i(x) \cdot P_j(y) + 2 \frac{\partial}{\partial n} [P_i(x) \cdot P_j(y)] \right\} - \\ - & \sum_{i+j=0}^n C_{ij} \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} \cdot P_i(x) \cdot P_j(y) + 2 \frac{\partial}{\partial n} [P_i(x) \cdot P_j(y)] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Для построения координатных последовательностей в задачах со смешанными граничными условиями. В. Л. Рвачевым предложен метод последовательного разложения решения в окрестности каждого из участков контура. Этот метод проиллюстрируем на примере задачи о пластинке, изображенной на рис. 55, край АОС которой защемлен, а АВС — свободно оперт.

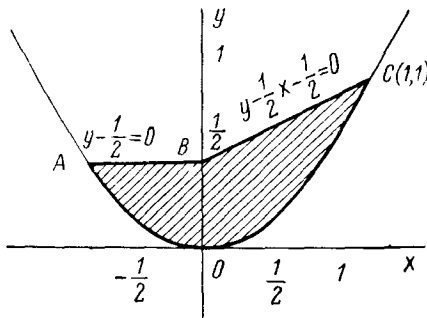


Рис. 55

Положим

$$W = (y - x^2)^2 \Phi. \quad (5.62)$$

Очевидно, что какова бы ни была функция  $\Phi$ , функция  $W$ , определяемая формулой (5.62), удовлетворяет условиям защемления пластинки по участку АОВ.

Уравнение линии АВС можно написать в виде

$$\omega(x, y) \equiv - \left[ \left( k_1 \left( y - \frac{1}{2} \right) \right) \wedge_0 \left( k_2 \left( y - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \right) \right) \right] = 0, \quad (5.63)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — неопределенные константы.

Потребовав, чтобы на границе АВС функция  $\omega(x, y)$  удовлетворяла условию (5.47), найдем, что  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = \frac{4}{\sqrt{5}}$ . Поэтому

$$\omega(x, y) = - \left[ (2y - 1) \wedge_0 \left( \frac{4}{\sqrt{5}} y - \frac{2}{\sqrt{5}} x - \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right]. \quad (5.64)$$

Представим произвольную функцию  $\Phi$ , входящую в формулу (42), в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \omega + \Phi_2 \omega^2, \quad (5.65)$$

где  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — пока неопределенные функции. Условию равенства прогибов нулю на границе АВС удовлетворим, полагая  $\Phi_0 \equiv 0$ . Таким образом,

$$W = (y - x^2)^2 \omega \Phi_1 + (y - x^2)^2 \omega^2 \Phi_2. \quad (5.66)$$

Считая функцию  $\Phi_1$  произвольной, выберем функцию  $\Phi_2$  так, чтобы удовлетворялось условие (5.54) равенства нулю изгибающих моментов на линии АВС. Можно показать, что для этого достаточно положить

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & - \frac{1}{2 [(y - x^2)^2 + \omega^2]} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cdot \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] \Phi_1 (y - x^2)^2 + 2 \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [(y - x^2)^2 \Phi_1] + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} [(y - x^2)^2 \Phi_1] \right\}. \quad (5.67) \end{aligned}$$



Таким образом, какова бы ни была функция  $\Phi_1$ , все граничные условия будут удовлетворяться, если искать прогиб пластинки  $W(x, y)$  в виде

$$W = (y - x^2)^2 \omega \Phi_1 - \frac{\omega^2}{2[(y - x^2)^2 + \omega^2]} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] \Phi_1 + 2 \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [(y - x^2)^2 \Phi_1] + 2 \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} [(y - x^2)^2 \Phi_1] \right\}. \quad (5.68)$$

Необходимую координатную последовательность получим, если положим

$$\Phi_1 = \sum_{i+j=0}^n C_{ij} P_i(x) P_j(y). \quad (5.69)$$

В дальнейшем в гл. 9 для одного частного случая приведен пример решения этим методом задачи о колебании пластинки.

### Примеры

Приведем несколько примеров приближенных методов Релея—Ритца.

**Консольная балка постоянной ширины с уширением (вудом) в месте заделки, с массой  $m$  ( $G = gm$ ) на конце (рис. 5.6).**

Обозначим:

- $b$  — ширина сечения балки;
- $h_0$  — высота сечения балки;
- $h_0 + 2a$  — высота в месте заделки;
- $l$  — длина всей балки;
- $l_1$  — длина вуда;

$$F_0 = bh_0; \quad J = \frac{bh_0^3}{12};$$

$$\frac{l_1}{l} = \eta_1; \quad \frac{2a}{h_0} = k; \quad \rho F_0 = q.$$

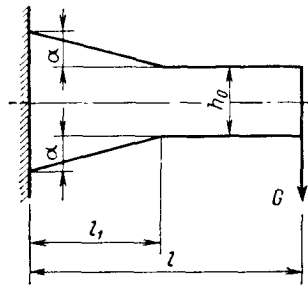


Рис. 5.6

Для переменной части от  $x = 0$  до  $x = l_1$  площадь поперечного сечения изменяется по закону

$$F = F_0 \left[ 1 + k \left( 1 - \frac{x}{l_1} \right) \right];$$

жесткость изменяется по закону

$$EJ = EJ_0 \left[ 1 + k \left( 1 - \frac{x}{l_1} \right) \right]^3.$$

Уравнение изогнутой оси для консоли берем в виде

$$a_1 Y(x) = a_1 \frac{x^2(3l - x)}{2l^3};$$

потенциальная энергия консоли

$$V_{\max} = \frac{9a_1^2}{2l^4} \int_0^{l_1} EJ_0 \left[ 1 + k \left( 1 - \frac{x}{l_1} \right) \right]^3 \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 dx + \\ + \frac{9EJ_0 a_1^2}{2l^4} \int_{l_1}^l \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 dx.$$

После интегрирования получим

$$V_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{EJ_0 a_1^2}{l^3} \left\{ 1 + 3k\eta_1 \left[ \frac{3}{2} - \eta_1 + \frac{1}{4} \eta_1^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + k \left( 1 - \frac{1}{2} \eta_1 + \frac{1}{10} \eta_1^2 \right) + k^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{\eta_1}{10} + \frac{\eta_1^2}{10} \right) \right] \right\}.$$

Максимальная приведенная кинематическая энергия

$$T_{\max} = \frac{a_1^2 \rho F_0}{2} \int_0^{l_1} \left[ 1 + k \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right] Y^2(x) dx + \\ + \frac{a_1^2 \rho F_0}{2} \int_{l_1}^l Y^2 dx + \frac{m}{2} Y^2(l_1),$$

или

$$T_{\max} = \frac{k\eta_1^5 q a_1^2}{56} \left( 2,1 - \eta_1 + \frac{1}{8} \eta_1^2 \right) + \frac{33}{140} \cdot \frac{qla_1^2}{2} + \frac{ma_1^2}{2}.$$

Следовательно

$$\omega = \sqrt{\frac{140EJ_0}{11\rho F_0 l^4}} \times \\ \times \sqrt{\frac{1 + 3k \left[ \frac{3}{2} - \eta_1 + \frac{1}{4} \eta_1^2 + \left( 1 - \frac{1}{2} \eta_1 + \frac{1}{10} \eta_1^2 \right) k + ck^2 \right]}{1 + \frac{140}{33} \cdot \frac{m}{ql} + \frac{5\eta_1^5}{33} (2,1 - \eta_1 + 0,125\eta_1^2)}},$$

где

$$c = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} \eta_1 + \frac{1}{60} \eta_1^2.$$

Для сравнительно малых  $\eta_1$  и  $k$  влияние кинетической энергии переменной части невелико. Поэтому для нашего примера частоту  $\omega$  можно подсчитать по формуле

$$\omega = 3,57 \sqrt{\frac{EJ_0}{\left( 1 + \frac{140}{33} \cdot \frac{m}{ql} \right) ql_n^4}},$$

где  $l_n = \varphi l$  — приведенная длина.

Значение коэффициента  $\varphi$  можно получить по табл. 5.2.

**Опертая балка.** Для балки, опертой по концам, с грузом посредине, частоту основного тона можно получить по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{48EJ}{\left(m + \frac{17}{35} ql\right) l^3}}$$

**Колесание заделанной балки с вутами, нагруженной массой  $m = \frac{G}{g}$  посредине** (рис. 5.7). Для изогнутой оси балки берем уравнение

$$y(x, t) = Y(x) \cos \omega t = a_1 (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) \cos \omega t,$$

Т а б л и ц а 5.2 где

Значение коэффициента  $\varphi$

$$\xi = \frac{x}{l}.$$

$\frac{l_1}{l}$	$n = \frac{2a + h_0}{h_0}$			
	1,2	1,3	1,4	1,5
$\frac{1}{10}$	0,97	0,96	0,95	0,92
$\frac{1}{5}$	0,96	0,93	0,91	0,89

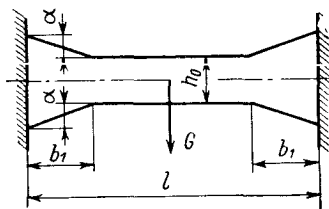


Рис. 5.7

Частота колебаний для основного тона получается из условия  $\left(\xi_1 = \frac{b_1}{l}\right)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l^3} \int_0^{\xi_1} EJY''^2 d\xi + \frac{1}{l^3} \int_{\xi_1}^{1/2} EJ_0Y''^2 d\xi = \\ & = \omega^2 l \left[ \int_0^{\xi_1} \rho F(\xi) Y^2 d\xi + \int_{\xi_1}^{1/2} \rho F_0 Y^2 d\xi + \frac{m}{2l} Y^2 \left(\frac{1}{2}\right) \right], \end{aligned}$$

причем из условий симметрии для потенциальной и кинетической энергии здесь взято удвоенное значение энергии для половины стержня.

Площадь поперечного сечения и момент инерции по-прежнему меняются по законам

$$F = F_0 \left[ n - \frac{2(n-1)}{\eta_2} \xi \right]; \quad J = J_0 \left[ n - \frac{2(n-1)}{\eta_2} \xi \right]^3,$$

где

$$F_0 = bh_0; \quad \eta_2 = \frac{2b_1}{l}; \quad n = \frac{2a + h_0}{h_0}.$$

Для сравнительно малых  $n$  и  $m$  частоту колебаний можно определить по формуле

$$\omega = 22,45 \sqrt{\frac{EJ_0}{\left(1 + \frac{315}{128} \cdot \frac{m}{ql}\right) \rho F_0 (\varphi l n)^4}}$$

Значение коэффициента  $\varphi$  можно получить по табл. 5.3.

**Колебания клинообразной консоли** (рис. 5.8). Момент инерции и площадь поперечного сечения в данном случае меняются по законам, изложенным в работе [94]:

$$F = \frac{2bx}{l}; \quad J = \frac{1}{12} \left( \frac{2bx}{l} \right)^3.$$

Упругую линию берем в виде ряда

$$Y(x) = a_1 \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 + a_3 \frac{x^2}{l^2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2;$$

при этом условия для  $x = l$  удовлетворяются

$$Y(l) = 0; \quad Y'(l) = 0.$$

Условия для  $x = 0$

$$EJY'' = 0; \quad (EJY'')' = 0$$

также удовлетворяются, так как  $J(0) = 0; J'(0) = 0$ .

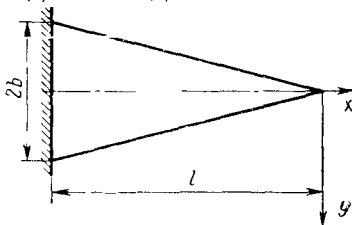


Рис. 5.8

Таблица 5.3

Значение коэффициента  $\varphi$

$\frac{b}{l}$	$n = \frac{2a + h_0}{h_0}$			
	1,2	1,3	1,4	1,5
$\frac{1}{10}$	0,94	0,92	0,89	0,87
$\frac{1}{5}$	0,93	0,89	0,85	0,83

Если вычисление частоты провести при одном члене, то получим

$$\omega = \frac{5,48b}{l^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}.$$

Точное решение, полученное с помощью интегрирования соответствующего дифференциального уравнения в функциях Бесселя, дано А. Динником:

$$\omega = 5,315 \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}.$$

Без всяких затруднений может быть применен к определению частот метод Б. Г. Галеркина, причем система уравнений составляется согласно (5.13).

**Усеченная клинообразная консоль с массами  $m$  ( $G = gm$ ) на конце** (рис. 5.9). Значение квадрата частоты для этого случая может быть получено из 1-го примера, полагая  $m = 1$ . Частота колебаний может быть подсчитана по формуле

$$\omega = c \sqrt{\frac{EJ}{\left( 1 + e + \frac{140}{33} \cdot \frac{m}{ql} \right) ql^4}},$$

где значения коэффициентов  $e$  и  $c$  определяются по табл. 5.4.

Случай  $k = 0$  соответствует консольной балке постоянного сечения. Приближенное значение 3,56 отличается от точного 1,875<sup>2</sup> (табл. 3.7) всего лишь на 1,1%.

Значение коэффициентов  $e$  и  $c$ 

Коэффициент	Значение $k = \frac{2a}{h}$						
	3	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5	0,0
$c$	22,4	18,0	14,52	11,28	8,40	5,82	3,56
$e$	0,558	0,464	0,372	0,279	0,186	0,093	0

Полый усеченный конус (фабричная труба) (рис. 5.10). Частота колебаний может быть подсчитана по формуле

$$\omega = \frac{2\pi}{cl^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{F_0\rho}},$$

где  $J_0$  и  $F_0$  — момент инерции и площадь поперечного сечения для закреплённого конца стержня.

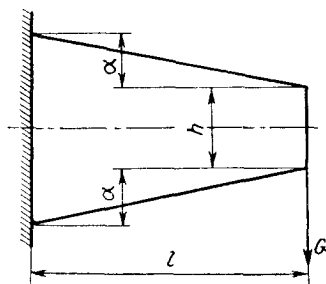


Рис. 5.9

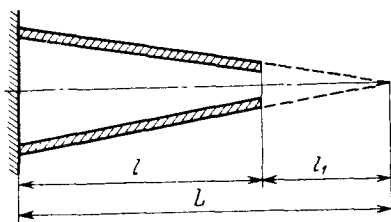


Рис. 5.10

Значение постоянной  $c$  будет

$$c = 0,719 + 1,069 \frac{l_1}{L} + 0,14 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2l_1}{L} \right)^4 \right].$$

Вычисленные значения  $c$ :

$\frac{l_1}{L}$	$c$
0 (конус)	0,719
0,264	1,101
0,501	1,368
0,754	1,695
1,00	1,788
(цилиндр)	

## Заключительные замечания

Мы привели несколько простых примеров решения задач с помощью приближенных методов.

Электронные цифровые вычислительные машины позволяют значительно шире применять эти методы, в частности метод Рунге не требующий удовлетворения всем условиям. Этот метод дает удобный алгоритм для вычислений на машине. Количество параметров может быть доведено до большой величины. В гл. 9 приведено решение ряда задач по колебаниям пластин по методу Рунге с широким использованием электронных машин.

При решении задачи об изгибе пластин в виде неполного сектора, частично заделанного по дуге меньшего радиуса, число параметров доводилось до 80 [35], при определении частот и форм колебаний пластин число параметров доводилось до 40 (гл. 9).

---

## КОЛЕБАНИЯ БАЛОК С УЧЕТОМ ЗАТУХАНИЯ

### ПРИЧИНЫ, ВЫЗЫВАЮЩИЕ РАССЕЯНИЕ ЭНЕРГИИ

Влияние затухания в упругих системах на развитие амплитуд колебаний имеет существенное значение, так как от величины этого затухания зависят напряжения в области резонанса.

Затухание в реальных конструкциях зависит от различных факторов, влияние каждого из них должно быть учтено.

Следует в основном различать:

а) внешнее затухание, сопротивление жидкой и газообразной среды, сопротивление поглотителей — демпферов колебаний;

б) затухание, вызванное внутренним сопротивлением (трением) в материале;

в) затухание, зависящее от несовершенств конструкции, например заделки лопаток турбомшины, затухание в соединениях (заклепочных, резьбовых, прессовых и пр.);

г) затухание, зависящее от аэродинамических сил.

Затухание, зависящее от несовершенств конструкции (трение в сочленениях), имеет существенное значение для процесса колебаний. Явление рассеяния энергии вследствие трения в сочленениях называют конструкционным демпфированием. При этом различают рассеяние энергии в подвижных соединениях (например, подшипниках) и в неподвижных. Так как это демпфирование имеет существенное значение, то в последнее время ему уделяется значительное внимание и в этой области проведены экспериментальные и теоретические исследования [71, 75].

Влияние аэродинамических сил весьма существенно, эти силы, помимо демпфирующего влияния, могут привести к автоколебательным процессам, например, явлению флаттера (гл. 3).

В последнее время значительное внимание уделяется изучению затухания от внутреннего трения. Можно считать установленным, что внутреннее трение в основном определяется пластическими деформациями; атомной, внутрикристаллической диффузией; термоупругим эффектом и магнитоупругим гистерезисом для ферромагнитных материалов. При этом пластическая деформация играет

довольно важную роль; атомная диффузия имеет значение при малых деформациях, а магнитоупругий гистерезис является основным видом поглощения энергии для ферромагнитных сплавов. Результирующие спины областей самопроизвольного намагничивания в металле под действием внутренних напряжений меняют направление. При этом возможны необратимые изменения направлений, которые и составляют явление магнитоупругого гистерезиса.

Как известно, из материалов, применяемых обычно в машиностроении, большую поглощающую способность имеет 13%-ная хромистая сталь. Высокое затухание этой стали обусловлено магнитоупругим гистерезисом. С целью проверки этого исследовали затухание крутильных колебаний образца, изготовленного из ферромагнитного материала. Затем явление магнитоупругого гистерезиса в значительной мере устраняли путем помещения образца в магнитное поле при сохранении прочих условий опыта. Оказалось, что затухание значительно уменьшается, а в сильных магнитных полях становится исчезающе малым. В настоящее время имеется ряд предположений относительно связи между упругими деформациями и потерями на магнитоупругий гистерезис. Следует отметить, что теоретически вычисленная по этим предположениям величина затухания оказывается близкой к экспериментальной.

Термоупругий эффект имеет значение при определенной частоте колебаний. Сущность его заключается в следующем. При колебаниях тела в тех волокнах, которые растягиваются, температура понижается, а в сжатых — повышается. Вследствие изменения температуры по сечению колеблющегося тела волокна деформируются, в связи с чем появляется добавочный изгибающий момент. Потери возникают при этом, тем больше, чем больше температурный градиент по сечению тела. Исследования показывают, что потери из-за температурного эффекта сильно возрастают при равенстве периода колебаний и времени выравнивания температуры по сечению тела между сжатыми и растянутыми волокнами (критическая частота). Эти потери в обычных условиях могут иметь место в деталях, в которых при деформациях может возникнуть значительный температурный градиент, например, при изгибных колебаниях весьма тонкой консольной балочки. Экспериментально были получены значения толщин таких балочек, изготовленных из различных металлов, когда значение критической частоты равнялось 1000 *гц* [53]. Для свинца эта толщина 0,2 мм, для меди — 0,42 мм, для серебра — 0,51 мм, для цинка и олова — 0,25 мм.

Ввиду сложности явления внутреннего трения нет еще достаточно полного объяснения механизма затухания. Однако существует целый ряд предположений относительно учета рассеяния энергии при колебаниях, на которых мы остановимся ниже.



## ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ, УЧИТЫВАЮЩИЕ РАССЕЯНИЕ ЭНЕРГИИ ПРИ ЗАТУХАНИИ

Экспериментальные исследования затухания в различных материалах показывают, что рассеяние энергии при колебаниях для некоторого диапазона частот не зависит от частоты колебаний и зависит от амплитуды деформаций и от температуры. Опыты показывают (см. рис. 1.10), что при колебаниях линейная зависимость между напряжениями и деформациями нарушается и обычная диаграмма  $\sigma - \varepsilon$ , после достаточно большого числа циклов, имеет вид кривой (петля гистерезиса).

Площадь петли гистерезиса характеризует потерю энергии на внутреннее сопротивление. В первом приближении, с достаточной для практики точностью, петля гистерезиса может быть принята в форме эллипса.

Для эллиптической петли гистерезиса зависимость между напряжениями и относительной деформацией  $\varepsilon$  имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon \pm k_1 E\varepsilon_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2}}, \quad (6.1)$$

где  $\varepsilon_0$  — амплитуда деформаций; знак «плюс» для верхней части петли, «минус» — для нижней;

$k_1$  — коэффициент затухания.

Зависимость между напряжением и деформацией может быть задана в виде ( $k$  — не зависит от частоты)

$$\sigma = E\varepsilon + \frac{k}{\omega} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi}. \quad (6.2)$$

Эта зависимость для гармонических колебаний соответствует эллиптической петле гистерезиса.

Действительно,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 \sin [\omega(t) + \varphi_1]; \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} &= \varepsilon_0 \cos [\omega(t) + \varphi_1] = \pm \varepsilon_0 \sqrt{1 - \sin^2 [\omega(t) + \varphi]} = \\ &= \pm \varepsilon_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2}}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Этой зависимостью будем пользоваться в дальнейшем.

Более общая зависимость предложена Н. Н. Давиденковым [75] также в предположении независимости потерь энергии на затухание от частоты Н. Н. Давиденков предлагает истинный модуль упругости задавать в виде

$$\frac{\overrightarrow{d\sigma}}{d\varepsilon} = E [1 - \eta(\varepsilon_0 + \varepsilon)^k]; \quad \frac{\overleftarrow{d\sigma}}{d\varepsilon} = E [1 + \eta(\varepsilon_0 - \varepsilon)^k], \quad (6.4)$$

где  $\eta$ ,  $k$  — постоянные, определяемые из опыта;  
 $\varepsilon_0$  — амплитуда относительного удлинения;  
 $\varepsilon$  — относительное удлинение в произвольный момент времени.

При этом

$$\left| \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = -\varepsilon_1} = \left| \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_0}; \quad \left| \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_0} = \left| \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = -\varepsilon_0}.$$

Интегрируя уравнение (6.4) и принимая во внимание, что при  $\varepsilon = \varepsilon_0$   $\vec{\sigma} = \overleftarrow{\sigma}$ , получим зависимости Н. Н. Давиденкова

$$\left. \begin{aligned} \vec{\sigma} &= E \left\{ \varepsilon - \frac{\eta}{n} [(\varepsilon_0 + \varepsilon)^n - 2^{n-1} \varepsilon_0^n] \right\}; \\ \overleftarrow{\sigma} &= E \left\{ \varepsilon + \frac{\eta}{n} [(\varepsilon_0 - \varepsilon)^n - 2^{n-1} \varepsilon_0^n] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Стрелки над  $\sigma$  показывают направление обхода петли гистерезиса. Коэффициенты  $\eta$ ,  $n$  определяются из формы петли гистерезиса получаемой из опыта.

Площадь для эллиптической формы петли гистерезиса, дающая потерю энергии, отнесенную к единице объема, равна

$$\Delta w = \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon} \vec{\sigma}_1 d\varepsilon - \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \overleftarrow{\sigma} d\varepsilon = \frac{\pi}{\omega} E \varepsilon_0^2. \quad (6.6)$$

Для зависимости (6.4) она будет равна

$$\Delta w = \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \vec{\sigma} d\varepsilon_1 - \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \overleftarrow{\sigma} d\varepsilon = \frac{\eta \cdot 2^{n+1} \varepsilon_0^{n+1} (n-1)}{n(n+1)} E. \quad (6.7)$$

Декремент затухания определяется зависимостью

$$\delta = \frac{\Delta w}{2w}. \quad (6.8)$$

Зависимость Н. Н. Давиденкова, широко использована в работах Г. С. Писаренко [75].

Следует различать затухание при нормальных напряжениях (изгибно-продольные колебания) и затухание тангенциальное (при кручении). Надо иметь в виду, что при изгибе частично оказывает влияние и сдвиг, т. е. касательное затухание. опыты обычно проводятся для двух типов колебаний — изгибных и крутильных. Для крутильных колебаний определение декремента затухания проще, чем для изгибных.

Помимо закономерностей (6.2), (6.5), предложен еще целый ряд зависимостей, для учета величины внутреннего трения в материале. В частности, Д. Ю. Панов предлагает зависимость

$$\sigma = E\varepsilon + \text{sign } \varepsilon \gamma \varepsilon_0 \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]. \quad (6.9)$$

Так как на величину резонансных амплитуд оказывает влияние площадь петли гистерезиса, то для учета зависимости затухания от амплитуды будем пользоваться выражением

$$\sigma = E\varepsilon + \frac{E}{\omega} (\mu_0 + \mu_1 \varepsilon_1 \text{sign } \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_1^2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (6.10)$$

где  $\text{sign } \varepsilon_1 = 1$  для  $\varepsilon > 0$ ,  $\text{sign } \varepsilon = -1$  для  $\varepsilon < 0$ , соответствующим эллиптической петле гистерезиса, площадь которой зависит от амплитуды. В дальнейшем на этой зависимости остановимся подробнее.

Опыты также показывают, что во многих случаях с достаточной точностью потери энергии на рассеяние можно определить по формуле [139]

$$\Delta \omega = C \sigma^3. \quad (6.11)$$

Сравнивая эти гипотезы, мы видим, что формулы (6.2), (6.6), (6.9) основаны на предположении, что петля гистерезиса имеет эллиптическую форму, причем рассеяние энергии не зависит от частоты колебаний. Гипотезы (6.4) и (6.6) учитывают, кроме того, зависимость рассеянной энергии от амплитуды колебаний. В частности, зависимость, предложенная Н. Н. Давиденковым, приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям [75]. В дальнейшем будем применять различные зависимости, в том числе наиболее простые (6.2) и (6.9).

#### МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕКРЕМЕНТА ЗАТУХАНИЯ И ДАННЫЕ ДЛЯ РЯДА МАТЕРИАЛОВ

Существуют в основном два метода определения величины декремента затухания в материале (металле): первый основан на непосредственном измерении амплитуд свободных затухающих колебаний образца, второй — на замере рассеиваемой энергии при вынужденных колебаниях образца с резонансной частотой. Для того чтобы устранить влияние заделки образца на величину рассеяния энергии, необходимо проводить определение декремента затухания на специальных камертонных U-образных образцах при поперечных колебаниях или на поперечных колебаниях свободно подвешенных образцов, находящихся в условиях чистого изгиба. При крутильных колебаниях декремент затухания также определяется для подвешенных образцов.

Имея осциллограмму свободных затухающих колебаний, можно найти декремент затухания путем замера амплитуд колебаний.

Помимо этого, можно определить декремент затухания следующими путями: измерением количества тепла, развивающегося в образце при вынужденных колебаниях; с помощью непосредственного определения площади петли гистерезиса, а также измерением мощности электромотора вибрационной установки и выделением из баланса всей мощности той части ее, которая затрачивается на внутренние потери в материале. Этот метод хорошо разработан и успешно применен Г. С. Писаренко [75].

Декремент затухания в значительной мере зависит от состава сплава. Сплавы, содержащие хром, обладают большим декрементом затухания не только при нормальных, но также и при высоких температурах. При этом рассеяние энергии в таких сплавах в несколько раз выше, чем для других металлов.

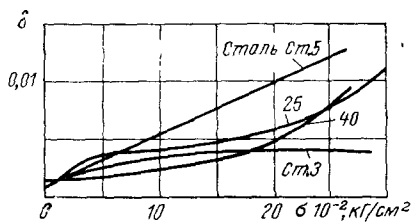


Рис. 6.1

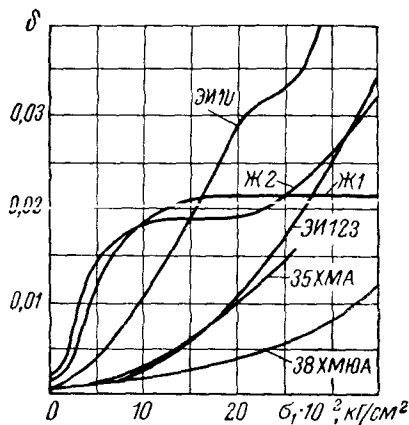


Рис. 6.2

Приведем некоторые данные по декременту затухания, полученные на основании опытов с камертонными образцами в зависимости от максимального напряжения в месте заделки. Опыты были проведены в Лаборатории гидравлических машин АН УССР. Химический состав и свойства исследованной стали различных марок приведены в табл. 6.1\*. На рис. 6.1 приведены данные зависимости декремент — напряжение (в заделке) для легированной стали, а на рис. 6.2 — для углеродистой. Частота колебаний камертонных образцов изменялась от 100 до 600 *гц*, при этом декремент колебаний не изменялся.

Декремент затухания, полученный на образцах одного типа, не может быть взят за основу для расчета частот и амплитуд колебаний элемента конструкции, отличного от того типа, для которого проводились опыты. Это обстоятельство связано, тем, что суммарная потеря на внутреннее трение зависит от закона изменения напряжения по всему объему стержня, а также от формы сечения. Поэтому, чтобы использовать данные по декременту затухания, характеризующему суммарную потерю энергии для данного

\* Образцы испытывались после механической обработки.

Таблица 6.1

Химический состав и механические свойства стали

Марка	Химический состав в %						Механические свойства				Микроструктура	Состояние термобработки
	C	Si	Mn	Cr	Mo	Другие элементы	$\sigma_b$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_s$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\delta$ в %	НВ		
Ст.25	0,26	0,25	0,56	0,1	—	—	52,5	32,0	27,5	143,0	Феррит и перлит	Нормализация
Ст.3	0,35	0,27	0,65	—	—	—	60,5	38,5	23,0	163,0	» » »	»
Ст.40	0,45	0,25	0,62	0,1	—	—	67,5	40,5	17,5	179,5	» » »	»
ЭИ10	0,26	0,36	0,56	1,74	0,3	0,2 V	63,0	41,0	21,0	179	Сорбитизированный перлит и феррит	Отжиг
Ж2	0,17	—	—	13,31	—	—	71,5	59,0	18,0	229	Сорбит, ориентированный по кристаллическим плоскостям, и феррит	Улучшение 3+0
38ХМЮА	0,42	0,37	0,58	1,7	0,22	0,85 Al	84,5	—	17,0	235	Зерна перлита и феррита	Нормализация
35ХМА	0,37	0,38	0,54	0,83	0,25	—	89,5	—	13,5	285	Сорбит	Улучшение 3+0
Ст.5	0,30	0,26	0,76	—	—	—	55,5	34,0	25,0	146	Феррит и перлит	Нормализация
ЭИ123	0,17	2,24	—	15,23	—	12,57 Ni 0,5 Ti, 1,51 W	60,6	30,0	53,5	143	Аустенит и карбиды по всему полю	»

образца, необходимо на основе этих данных найти значения коэффициентов затухания  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  в выражении (6.10).

В результате обработки данных, полученных для декрементов затухания  $\delta$  для углеродистой и легированной стали (рис. 6.1, 6.2), вычислены значения коэффициентов в выражении (6.10), которыми и необходимо пользоваться при расчетах (табл. 6.2)\*.

Таблица 6.2

Коэффициенты затухания стали  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$

Марка	$\mu_0 \times 10^4$	$\mu_1 \times 10^2$	$\mu_2 \times 10^{-3}$	Марка	$\mu_0 \times 10^4$	$\mu_1 \times 10^2$	$\mu_2 \times 10^{-3}$
Ж1	6,36	1621	-9,86	38	2,22	3,18	2,70
Ж2	4,77	588	2,25	Ст 5	3,81	350	1,27
ЭИ10	3,18	318	12,7	Ст 3	2,54	286	-1,87
ЭИ123	3,50	3,18	7,63	25	4,77	105	1,90
35	2,86	95,4	5,41	40	3,181	318	2,24

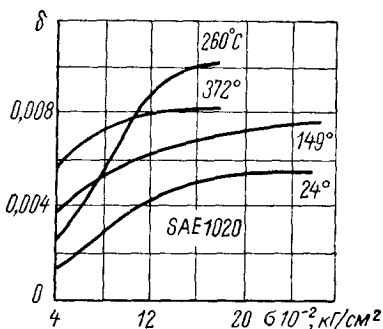


Рис. 6.3

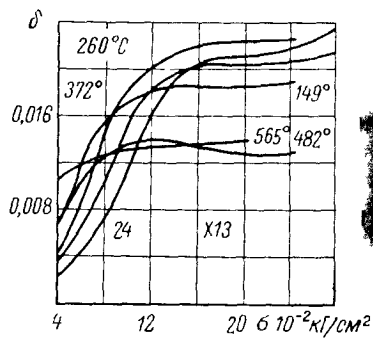


Рис. 6.4

Как показывают опыты, затухание в материале в значительной мере зависит от температуры. Для стали многих марок декремент затухания сначала растет с повышением температуры, достигает максимума, затем начинает падать, а при дальнейшем повышении температуры опять начинает повышаться.

Характер кривой декремент—температура имеет большое значение при установлении критерия применимости стали для деталей, работающих при высоких температурах (лопатки, турбомашин). На рис. 6.3 и 6.4 приведены зависимости декремента от температуры для стали двух марок.

\* Гонткевич В. С. и Бутковский В. В. Определение потерь энергии на внутреннее трение при изгибных колебаниях Сб трудов Лаборатории проблем быстроходных машин и механизмов, № 5, изд-во АН УССР, 1955.

Следует еще отметить значительное влияние на расстояние энергии закреплений стержня. Опыт показывает, что даже при заземлении конца стержня значительными силами, исключающими внешнее трение, декремент затухания оказывается значительно выше замеренного в камертонном образце. Однако рассеяние энергии в закреплении недостаточно исследовано, и поэтому нельзя привести достоверные данные о влиянии различных видов закрепления на величину затухания.

## МЕТОДЫ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ

### Уравнение поперечных колебаний с учетом затухания

При выводе дифференциального уравнения будем исходить из предположения, что силы внутреннего трения будут линейной функцией скорости деформации. При этом допущении, которое принимается многими авторами, нормальное напряжение  $\sigma$  волокна в сечении с абсциссой  $x$ , лежащего на расстоянии  $\xi$  от нейтральной оси, при относительном удлинении  $\epsilon$  будет

$$\sigma = E \left( \epsilon + \mu \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right), \quad (6.12)$$

где  $\mu$  — коэффициент, характеризующий внутреннее трение материала\*.

В том случае, когда в некотором диапазоне частот затухание не будет зависеть от частоты колебаний  $k$ , вместо  $\mu$  необходимо подставить значение

$$\mu = \frac{\mu'}{k}. \quad (6.13)$$

Такую замену  $\mu$  на  $\mu'$  можно выполнить для чисто вынужденных колебаний с частотой  $k$ . Для любого закона изменения возмущающей силы необходимо ввести комплексный модуль упругости [87, 148].

Как отмечалось выше, затухание зависит от амплитуды колебаний. Поэтому в общем случае будем исходить из зависимости

$$\sigma = E \left[ (\mu_0 + \mu_1 \epsilon_0 \operatorname{sign} \epsilon_0 + \mu_2 \epsilon_0^2) \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \right], \quad (6.14)$$

где  $\epsilon_0$  — амплитуда  $\epsilon$ .

Так как  $\epsilon = \frac{\xi}{r_x}$ , где  $\xi$  — расстояние волокна от нейтральной оси, а  $\frac{1}{r_x} = \frac{d^2 y}{dx^2}$  — кривизна, то изгибающий момент в сечении

\* Эта гипотеза — гипотеза вязкого трения — была предложена еще Фохтом.

равен

$$-M = EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{EJ}{k} \left\{ \mu_0 \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} + \left[ \kappa_1 A \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \operatorname{sign} Y_x + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa_2 A^2 \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right)^2 \right] \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} \right\}; \quad (6.15)$$

здесь

$$\kappa_1 = \mu_1 C_1, \quad \kappa_2 = \mu_2 C_2, \quad (6.16)$$

где

$$C_1 = \frac{\int b \eta^3 d\eta}{J}; \quad C_2 = \frac{\int b \eta^4 d\eta}{J};$$

$AX(x)$  — амплитуда  $y(x, t)$ , т. е.

$$y(x, t) = AY(x)T(t); \quad (6.17)$$

$J$  — момент инерции сечения.

Для периодических колебаний  $T(t) = \sin(kt + \varphi)$ . Из условий равновесия элемента стержня, выделенного двумя сечениями  $x$  и  $x + dx$ , получим согласно уравнению (6.15) при учете затухания и инерции поворота сечения следующее дифференциальное уравнение:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu_0 EJ \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} + EJ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \left[ \kappa_1 A \frac{d^2 Y}{dx^2} \operatorname{sign} Y_x'' + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa_2 A^2 \left( \frac{d^2 Y}{dx^2} \right)^2 \right] \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} \right\} - \rho F \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2} + \chi_a \frac{\partial y}{\partial t} = F(x, t). \quad (6.18)$$

В уравнении (6.18) член  $\chi_a \frac{\partial y}{\partial t}$  характеризует внешнее затухание, пропорциональное скорости перемещения точек стержня.

В том случае, когда внутреннее затухание не будет зависеть от амплитуды колебаний, т. е.  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , то дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня, при учете поправки от инерции поворота сечений, можно записать в виде

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu_0 FJ \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} - \rho J \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2} + \chi_a \frac{\partial y}{\partial t} = F(x, t). \quad (6.19)$$

Использование зависимости Н. Давиденкова приводит к нелинейным уравнениям колебаний стержня. Эти уравнения были исследованы с помощью асимптотических методов Г. С. Писаренко.

### Вынужденные колебания при наличии сосредоточенных масс

1. Будем по-прежнему предполагать, что внешняя нагрузка задана в виде пульсирующей нагрузки, непрерывно распределенной по длине балки,

$$q_1(x) \sin kt + q_2(x) \cos kt \quad (6.20)$$



или в виде пульсирующих сосредоточенных сил

$$Q_i = Q_i^{(1)} \sin kt + Q_i^{(2)} \cos kt, \quad (6.21)$$

приложенных в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

С осью стержня связаны сосредоточенные массы  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , приложенные в тех же точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . В общем решении можно будет полагать некоторые  $Q_i$  или  $M_i$  равными нулю без нарушения общности. Постоянную нагрузку на стержень в расчет не принимаем, так как она не оказывает влияния на установившееся колебание стержня. Свободные колебания стержня, которые со временем затухают, также во внимание не принимаются.

При нахождении решения уравнения (6.19), чтобы избежать условий сопряжения при сосредоточенных нагрузках, будем находить решение уравнения с помощью метода перехода к пределу.

Сосредоточенные массы  $M_1, M_2, \dots$  и силы  $Q_1, Q_2, \dots$ , приложенные в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , будем предполагать равномерно распределенными по закону прямоугольника в интервале от  $x_i$  до  $x_i + \sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) интенсивностью  $m_i$  и  $q_i$  на единицу длины, в предположении, что

$$q_i \sigma_i \rightarrow Q_i, \quad m_i \sigma_i \rightarrow M_i, \quad \text{когда } \sigma_i \rightarrow 0. \quad (6.22)$$

Таким образом,

$$F(x, t) = -m_i \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q_1(x) \sin kt + q_2(x) \cos kt, \quad (6.23)$$

причем  $m_i$ , а также  $q_1, q_2, \dots$  (в том случае, когда они заданы в виде сосредоточенных масс и сил) везде равны нулю, за исключением интервалов

$$x_1 \leq x \leq x_1 + \sigma_1; \quad x_2 \leq x \leq x_2 + \sigma_2, \dots$$

Решение уравнения (6.19) будем искать в виде

$$y(x, t) = \varphi(x) \sin kt + \psi(x) \cos kt. \quad (6.24)$$

Подставляя  $y(x, t)$  в уравнение (6.19) и вводя переменную

$$\xi = \frac{x}{l},$$

получим для определения  $\varphi(\xi)$  и  $\psi(\xi)$  следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 \varphi}{d\xi^4} + b_2 \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} - \beta^2 \varphi - \left( \mu \frac{d^4 \psi}{d\xi^4} + \mu_a \varphi \right) &= f_1(\xi); \\ \frac{d^4 \psi}{d\xi^4} + b_2 \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - \beta^2 \psi + \left( \mu \frac{d^4 \varphi}{d\xi^4} + \mu_a \psi \right) &= f_2(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

где для  $\xi_i = \xi \leq \xi_{i+1}$

$$\left. \begin{aligned} f_1(\xi) &= \left[ q_1 + \sum_{i=1}^i m_i k^2 \varphi(\xi) \right] \frac{l^4}{EJ}; \quad f_2(\xi) = \left[ q_2 + \sum_{i=1}^i m_i k^2 \psi(\xi) \right] \frac{l^4}{EJ}; \\ \beta^2 &= \frac{l^4 k^2}{a^2}; \quad a^2 = \frac{EJ}{F\rho}; \quad b_2 = \beta^2 \frac{\rho_1^2}{l^2}; \quad \rho_1^2 = \frac{J}{F}; \\ \mu &= \frac{k\mu_0}{E}; \quad \mu_a = \frac{k\chi a l^4}{EJ}. \end{aligned} \right\} (6.26)$$

2. Рассмотрим случай, когда левый конец стержня оперт. При таком закреплении необходимо удовлетворить условиям

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi''(0) = 0; \quad \psi(0) = 0; \quad \psi''(0) = 0; \quad (6.27)$$

при этом

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(0) &= \omega_2; \quad \varphi'''(0) = \omega_4; \\ \psi'(0) &= \nu_2; \quad \psi'''(0) = \nu_4, \end{aligned} \right\} (6.28)$$

где  $\omega_2, \omega_4, \nu_2, \nu_4$  — произвольные постоянные.

Применяя операционное исчисление и вводя оператор  $\frac{1}{p}$  для обозначения интеграла в пределах от 0 до  $\xi$ , согласно условиям (6.27) и (6.28) для значений производных от  $\varphi$  получим выражения

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_0^{\xi} \frac{d\varphi}{d\xi} d\xi = \frac{1}{p} \cdot \frac{d\varphi}{d\xi}; \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \int_0^{\xi} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} d\xi + \omega_2 = \frac{1}{p} \cdot \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \omega_2; \\ \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} &= \frac{1}{p} \cdot \frac{d^3\varphi}{d\xi^3}; \quad \frac{d^3\varphi}{d\xi^3} = \frac{1}{p} \cdot \frac{d^4\varphi}{d\xi^4} + \omega_4 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\xi} &= p\varphi; \quad \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = p^2\varphi - p\omega_2; \quad \frac{d^3\varphi}{d\xi^3} = p^3\varphi - p^2\omega_2; \\ \frac{d^4\varphi}{d\xi^4} &= p^4\varphi - p^3\omega_2 - p\omega_4. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\xi} &= p\psi; \quad \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = p^2\psi - p\nu_2; \quad \frac{d^3\psi}{d\xi^3} = p^3\psi - p^2\nu_2; \\ \frac{d^4\psi}{d\xi^4} &= p^4\psi - p^3\nu_2 - p\nu_4. \end{aligned}$$

Следовательно, система (6.25) в операционной форме будет

$$\left. \begin{aligned} p^4\varphi + b^2 p^2\varphi - \beta^2\varphi - (\mu p^4 + \mu_a)\varphi &= f_1(p) + F_1(p); \\ p^4\psi + b_2 p^2\psi - \beta^2\psi - (\mu p^4 + \mu_a)\psi &= f_2(p) + F_2(p), \end{aligned} \right\} (6.29)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(p) &= p^3\omega_2 + p(\omega_4 + b_2\omega_2) - \mu p(p^2\nu_2 + \nu_4); \\ F_2(p) &= p^3\nu_2 + p(\nu_4 + b_2\nu_2) + \mu p(p^2\omega_2 + \omega_4). \end{aligned}$$

Из системы уравнений (6.29) для определения  $\varphi$  и  $\psi$  получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} [(p^4 + b_2 p^2 - \beta^2)^2 + (\mu p^4 + \mu_a)^2] \varphi &= (p^4 + b_2 p^2 - \beta^2) [f_1(p) + \\ &+ F_1(p)] + (\mu p^4 + \mu_a) [f_2(p) + F_2(p)]; \\ [(p^4 + b_2 p^2 - \beta^2)^2 + \mu^2 p^8] \psi &= -(\mu p^4 + \mu_a) [f_1(p) + F_1(p)] + \\ &+ (p^4 + b_2 p^2 - \beta^2) [f_2(p) + F_2(p)]. \end{aligned} \right\} (6.30)$$

Корни характеристического уравнения

$$H(p) = (p^4 + b_2 p^2 - \beta^2)^2 + (\mu p^4 + \mu_a)^2 = 0 \quad (6.31)$$

или уравнений

$$\left. \begin{aligned} H_1(p) &= (1 + \mu i)p^4 + b_2 p^2 - \beta^2 + \mu_a = 0; \\ H_2(p) &= (1 - \mu i)p^4 + b_2 p^2 - \beta^2 - \mu_a = 0 \end{aligned} \right\} (6.32)$$

будут

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= r - r_1 i; & p_2 &= s + s_1 i; & p_3 &= -(r - r_1 i); \\ & & p_4 &= -(s + s_1 i); \\ p_5 &= r - r_1 i; & p_6 &= s - s_1 i; & p_7 &= -(r + r_1 i); \\ & & p_8 &= -(s - s_1 i), \end{aligned} \right\} (6.33)$$

причем  $p_1, \dots, p_4$  — корни первого из уравнений (6.32);

$p_5, \dots, p_8$  — второго.

Значения  $r, r_1, s$  и  $s_1$  будут

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + \lambda_1^2 + \frac{\lambda}{2}}}; & r_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + \lambda_1^2 - \frac{\lambda}{2}}}; \\ s &= \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\lambda'^2 + \lambda_1'^2 - \frac{\lambda'}{2}}}; & s_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\lambda'^2 + \lambda_1'^2 + \frac{\lambda'}{2}}}, \end{aligned} \right\} (6.34)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-b_2 + c_1}{2(1 + \mu^2)}; & \lambda_1 &= \frac{-b_2 \mu + c_1}{2(1 + \mu^2)}; & \lambda' &= \frac{b_2 + c_1}{2(1 + \mu^2)}; \\ & & \lambda_1' &= \frac{b_2 \mu + c_2}{2(1 + \mu^2)}. \end{aligned}$$

Для  $c_1$  и  $c_2$  имеем значения

$$\begin{aligned} c_1 &= \left\{ \frac{1 + \mu^2}{2} \left[ \sqrt{(b_2^2 + 4\beta^2 + 4\mu_a \mu)^2 + 16(\beta^2 \mu - \mu_a)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_2^2 + 4(\beta^2 - \mu_a \mu) \right] - b_2^2 \mu^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \\ c_2 &= \left\{ \frac{1 + \mu^2}{2} \left[ \sqrt{(b_2^2 + 4\beta^2 + 4\mu_a \mu)^2 + 16(\beta^2 \mu - \mu_a)^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - b_2^2 - 4(\beta^2 - \mu_a \mu) \right] + b_2^2 \mu^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Разлагая рациональные дроби на простейшие и принимая во внимание уравнения (6.32), которым удовлетворяют корни  $p_1, \dots, p_4, p_5, \dots, p_s$ , получим для  $\varphi$  значение

$$\varphi = \sum_{k=1}^4 \frac{-i [f_1(p) + F_1(p_k)] + [f_2(p_k) + F_2(p_k)]}{(p - p_k) H_1(p_k) H_2(p_k)} (\mu p_k^4 + \mu_a) \eta + \\ + \sum_{k=5}^8 \frac{i [f_1(p_k) + F_1(p_k)] + [f_2(p_k) + F_2(p_k)]}{(p - p_k) H_2'(p_k) H_1(p_k)} (\mu p_k^4 - \mu_a) \eta.$$

Отсюда

$$\varphi = - \sum_{k=1}^8 \frac{p_k \{ f_1(p_k) + F_1(p_k) + [f_2(p_k) + F_2(p_k)] i \}}{4 (b_2 p_k^2 - 2\beta^2 + 2\mu_a i) (p - p_k)} \eta - \\ - \sum_{k=5}^8 \frac{p_k \{ f_1(p_k) + F_1(p_k) - [f_2(p_k) + F_2(p_k)] i \}}{4 (b_2 p_k^2 - 2\beta^2 - 2\mu_a i) (p - p_k)} \eta. \quad (6.35)$$

Аналогичным образом  $\psi$  определяется из выражения

$$\psi = - \sum_{k=1}^4 \frac{p_k \{ f_1(p_k) + F_1(p_k) + [f_2(p_k) + F_2(p_k)] i \}}{4i (p_k^2 b_2 + 2\beta^2 + 2\mu_a i) (p - p_k)} \eta + \\ + \sum_{k=5}^8 \frac{p_k \{ f_1(p_k) + F_1(p_k) - [f_2(p_k) + F_2(p_k)] i \}}{4i (b_2 p_k^2 - 2\beta^2 + 2\mu_a i) (p - p_k)} \eta. \quad (6.36)$$

Переходя от оператора к соответствующим значениям функций, получим после вычислений решение системы (6.30) без правой части, соответствующие значения  $F_1$  и  $F_2$  в равенствах (6.35) и (6.36) в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= -A \operatorname{sh} r\xi \cos r_1\xi + B \operatorname{ch} r\xi \sin r_1\xi - \\ &\quad - C \operatorname{sh} s\xi \cos s_1\xi + D \operatorname{ch} s\xi \sin s_1\xi; \\ \psi_1(\xi) &= B \operatorname{sh} r\xi \cos r_1\xi + A \operatorname{ch} r\xi \sin r_1\xi - \\ &\quad - D \operatorname{sh} s\xi \cos s_1\xi - C \operatorname{ch} s\xi \sin s_1\xi, \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

причем после вычислений вместо постоянных  $\omega_2, \omega_4, \nu_2, \nu_4$  введены другие постоянные  $A, B, C$  и  $D$ , связанные с ними линейными соотношениями.

Решение системы уравнений (6.25):

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= \varphi_1(\xi) + \Phi(\xi); \\ \psi(\xi) &= \psi_1(\xi) + \Psi(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

где  $\Phi$  и  $\Psi$  — частные решения уравнений (6.29) с правой частью, соответствующие функциям  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\xi)$  в равенствах (6.35) и (6.36).

Частные решения уравнения  $\Phi$  и  $\psi$ , как это следует из методов операционного исчисления, удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} \Phi(0) = 0; \Phi'(0) = 0; \Phi''(0) = 0; \Phi'''(0) = 0; \\ \Psi(0) = 0; \Psi'(0) = 0; \Psi''(0) = 0; \Psi'''(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

В том случае, когда внешняя нагрузка задана в виде непрерывной периодической функции по всей длине стержня или на некоторой его части, частные решения могут быть получены без особых затруднений, исходя из равенств (6.35) и (6.36), путем вычисления соответствующих интегралов и переходя от операторов к их значениям.

3. Рассмотрим подробнее частный случай, когда на стержень действует периодическая сила в точке  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , причем в этой точке имеется также сосредоточенная масса  $M_1$ .

В этом случае для функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\xi)$  имеем согласно уравнению (6.26) значения

$$f_1(\xi) = 0 \text{ и } f_2(\xi) = 0 \text{ для } 0 \leq \xi \leq \xi_1 \text{ и для } \xi_1 + \varepsilon_1 \leq \xi \leq l \quad \left( \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{l} \right);$$

$$f_1(\xi) = \frac{m_1 l^4}{EJ} k^2 [\varphi_1(\xi) + \Phi] + \frac{l^4}{EJ} q_1;$$

$$f_2(\xi) = \frac{m_1 l^4}{EJ} k^2 [\psi_1(\xi) + \Psi] + \frac{l^4}{EJ} q_2$$

для  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_1 + \varepsilon_1$ .

Согласно уравнений (6.35) и (6.36) имеем для частных решений  $\Phi$  и  $\psi$  значения

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\xi) = & - \int_{\xi_1}^{\xi_1 + \varepsilon_1} \sum_{k=1}^4 \frac{\rho_k [f_1(\xi) + f_2(\xi) i]}{4(b_2 \rho_k^2 - 2\beta^2 + 2\mu_a i)} e^{\rho_k(\xi-t)} dt - \\ & - \int_{\xi_1}^{\xi_1 + \varepsilon_1} \sum_{k=5}^8 \frac{\rho_k [f_1(\xi) - f_2(\xi) i]}{4(b_2 \rho_k^2 - 2\beta^2 - 2\mu_a i)} e^{\rho_k(\xi-t)} dt; \\ \Psi(\xi) = & - \int_{\xi_1}^{\xi_1 + \varepsilon_1} \sum_{k=1}^4 \frac{\rho_k [f_1(\xi) + f_2(\xi) i]}{4i(b_2 \rho_k^2 - 2\beta^2 + 2\mu_a i)} e^{\rho_k(\xi-t)} dt + \\ & + \int_{\xi_1}^{\xi_1 + \varepsilon_1} \sum_{k=5}^8 \frac{\rho_k [f_1(\xi) - f_2(\xi) i]}{4i(b_2 \rho_k^2 - 2\beta^2 - 2\mu_a i)} e^{\rho_k(\xi-t)} dt. \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

Переходя к пределу в предположении, что  $q_1 \xi_1 l \rightarrow Q_1$ ;  $m_1 \varepsilon_1 l \rightarrow M_1$ , когда  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  (условие (6.22)), и принимая во внимание, что в пределе интегралы, содержащие  $\Phi$  и  $\Psi$ , исчезнут, получим частное решение системы (6.25) в виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= 0 \text{ для } 0 \leq \xi \leq \xi_1; \\ \Phi(\xi - \xi_1) &= -\alpha_1 \operatorname{sh} r(\xi - \xi_1) \cos r_1(\xi - \xi_1) + \\ &+ \beta_1 \operatorname{ch} r(\xi - \xi_1) \sin r_1(\xi - \xi_1) + \rho \operatorname{sh} s(\xi - \xi_1) \cos s_1(\xi - \xi_1) - \\ &- \gamma_1 \operatorname{ch} s(\xi - \xi_1) \sin s_1(\xi - \xi_1) \\ \text{для} \quad \xi_1 \leq \xi \leq 1; \\ \Psi &= 0; \quad 0 \leq \xi \leq \xi_1; \\ \Psi(\xi - \xi_1) &= \beta_1 \operatorname{sh} r(\xi - \xi_1) \cos r_1(\xi - \xi_1) + \\ &+ \alpha_1 \operatorname{ch} r(\xi - \xi_1) \sin r_1(\xi - \xi_1) + \delta_1 \operatorname{sh} s(\xi - \xi_1) \cos s_1 \times \\ &\times (\xi - \xi_1) + \rho_1 \operatorname{ch} s(\xi - \xi_1) \sin s_1(\xi - \xi_1) \\ \text{для} \quad \xi_1 \leq \xi \leq 1, \end{aligned} \right\} (6.41)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{2\beta^2}{K} \left\{ \left[ \beta^2 M_1' \Phi(\xi_1) + \frac{l^3}{EJ} Q_1 \right] \left[ rv_1 + \frac{\mu ar_1}{\beta^2} \right] + \right. \\ &+ \left. \left[ \beta^2 M_1' \Psi(\xi_1) + \frac{l^3}{EJ} Q_2 \right] \left[ r_1 v_1 - \frac{\mu ar}{\beta^2} \right] \right\}; \\ \beta_1 &= -\frac{2\beta^2}{K} \left\{ \left[ \beta^2 M_1' \Phi(\xi) + \frac{l^3}{EJ} Q_1 \right] \left[ r_1 v_1 - \frac{\mu ar}{\beta^2} \right] - \right. \\ &- \left. \left[ \beta^2 M_1' \Psi(\xi_1) + \frac{l^3}{EJ} Q_2 \right] \left[ rv_1 + \frac{\mu ar_1}{\beta^2} \right] \right\}; \\ \gamma_1 &= \frac{2\beta^2}{K_1} \left\{ \left[ \beta^2 M_1' \Phi(\xi_1) + \frac{l^3}{EJ} Q_1 \right] \left[ sv_2 - \frac{\mu as_1}{\beta^2} \right] - \right. \\ &- \left. \left[ \beta^2 M_1' \Psi(\xi_1) + \frac{l^3}{EJ} Q_2 \right] \left[ s_1 v_1 + \frac{\mu as}{\beta^2} \right] \right\}; \\ \delta_1 &= \frac{2\beta^2}{K_1} \left\{ \left[ \beta^2 M_1' \Psi(\xi_1) + \frac{l^3}{EJ} Q_1 \right] \left[ s_1 v_2 + \frac{\mu as}{\beta^2} \right] + \right. \\ &+ \left. \left[ \beta^2 M_1' \Phi(\xi_1) + \frac{l^3}{EJ} Q_2 \right] \left[ sv_2 - \frac{\mu as}{\beta^2} \right] \right\}; \end{aligned} \right\} (6.4)$$

причем

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 - \varepsilon_1; \quad v_1' = 1 + \varepsilon_1; \quad v_2 = 1 - \varepsilon_2; \quad v_2' = 1 + \varepsilon_2; \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta^2}{l^2} \sqrt{\lambda^2 - \lambda_1^2}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta^2}{l^2} \sqrt{\lambda'^2 + \lambda_1'^2}; \end{aligned}$$

$$K = 4\beta^4 - 4\beta^2 b_2 \lambda + b_2^2 (\lambda^2 + \lambda_1^2) + 4\mu_a (\mu_a - b_2 \lambda_1);$$

$$K_1 = 4\beta^4 + 4\beta^2 b_2 \lambda' + b_2^2 (\lambda'^2 + \lambda_1'^2) + 4\mu_a (\mu_a + b_2 \lambda_1'); \quad M_1' = \frac{M}{F\rho l}.$$

Без всяких затруднений можно написать общее решение в том случае, когда имеется несколько периодических сил  $Q_1, Q_2, \dots$  согласно уравнений (6.41) и сосредоточенных масс  $M_1, M_2, \dots$ , приложенных в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

4. Если инерцией поворота можно пренебречь, то необходимо положить, принимая также  $\mu_a = 0$ , что

$$s = r_1; \quad s_1 = r$$

и корни характеристического уравнения

$$H(p) = (p^4 - \beta^2)^2 + \mu^2 p^2 = 0 \quad (6.43)$$

или уравнений

$$\left. \begin{aligned} H_1(p) &\equiv (1 + \mu i) p^4 - \beta^2 = 0, \\ H_2(p) &\equiv (1 - \mu i) p^4 - \beta^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

будут

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= r - r_1 i; & p_2 &= r_1 - i r; & p_3 &= -(r_1 - r_1 i); \\ p_4 &= -(r_1 + i r); & p_5 &= r + r_1 i; & p_6 &= r_1 - i r; \\ p_7 &= -(r + i r_1); & p_8 &= -(r_1 - i r), \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

причем  $p_1, p_2, p_3, p_4$  — корни первого из уравнений (6.44),  $p_5, p_6, p_7, p_8$  — второго. Значения  $r, r_1$  будут

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + \lambda_1^2}}; \\ r_1 &= \sqrt{-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + \lambda_1^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

где

$$\lambda = \frac{c_1}{2(1 + \mu_1^2)}, \quad \lambda_1 = \frac{c_2}{2(1 + \mu_1^2)},$$

причем

$$\begin{aligned} c_1 &= \beta \sqrt{2(1 + \mu_1^2)(1 + \sqrt{1 + \mu_1^2})}; \\ c_2 &= \beta \sqrt{2(1 + \mu_1^2)(-1 + \sqrt{1 + \mu_1^2})}. \end{aligned}$$

Тогда решение системы уравнений (6.25) будет для интервала  $0 \leq \xi \leq \xi_1$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= \varphi_1(\xi) = -A \operatorname{sh} r\xi \cos r_1 \xi + B \operatorname{ch} r\xi \sin r_1 \xi - \\ &\quad - C \operatorname{sh} r_1 \xi \cos r\xi + D \operatorname{ch} r_1 \xi \sin r\xi; \\ \psi(\xi) &= \psi_1(\xi) = B \operatorname{sh} r\xi \cos r_1 \xi + A \operatorname{ch} r\xi \sin r_1 \xi - \\ &\quad - D \operatorname{ch} r_1 \xi \cos r\xi - C \operatorname{ch} r_1 \xi \sin r\xi \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

и для интервала  $\xi_k \leq \xi \leq \xi_{k+1}$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= \varphi_1(\xi) + \sum_{i=1}^k \Phi_i(\xi - \xi_i); \\ \psi(\xi) &= \psi_1(\xi) + \sum_{i=1}^k \Psi_i(\xi - \xi_i), \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_i(\xi - \xi_i) &= -\alpha_i \operatorname{sh}(\xi - \xi_i) \cos r_1(\xi - \xi_i) + \beta_i \operatorname{ch}(\xi - \xi_i) \times \\ &\times \sin r(\xi - \xi_i) - \beta_i \operatorname{sh} r_1(\xi - \xi_i) \cos r(\xi - \xi_i) + \alpha_i \operatorname{ch} r_1(\xi - \xi_i) \times \\ &\times \sin r(\xi - \xi_i); \\ \Psi(\xi - \xi_i) &= \beta_i \operatorname{sh} r(\xi - \xi_i) \cos r_1(\xi - \xi_i) + \alpha_i \operatorname{ch} r(\xi - \xi_i) \times \\ &\times \sin r(\xi - \xi_i) - \alpha_i \operatorname{ch} r_1(\xi - \xi_i) \cos r(\xi - \xi_i) - \beta \operatorname{ch} r_1(\xi - \xi_i) \times \\ &\times (\xi - \xi_i). \end{aligned}$$

Значения  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  будут

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{1}{2} M_i [\varphi(\xi_i) r + \psi(\xi_i) r_1] - \frac{l^3}{2EJ\beta^2} (Q_i^{(1)} r + Q_i^{(2)} r_1); \\ \beta_i &= -\frac{1}{2} M_i [\varphi(\xi_i) r_1 - \psi(\xi_i) r] - \frac{l^3}{2EJ\beta^2} (Q_i^{(1)} r_1 - Q_i^{(2)} r). \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

5. Если бы левый конец был закреплен, то, удовлетворяя условиям закрепления

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi'(0) = 0; \quad \psi(0) = 0; \quad \psi'(0) = 0, \quad (6.50)$$

следовало бы при пользовании операционным методом подставить в уравнения вместо производных от  $\varphi$  и  $\psi$  их операторные выражения

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} &= p^2\varphi; \quad \frac{d^4\varphi}{d\xi^4} = p^4\varphi - p^2\omega_3 - p\omega_4; \\ \frac{d^2\psi}{d\xi^2} &= p^2\psi; \quad \frac{d^4\psi}{d\xi^4} = p^4\psi - p^2\omega_3 - p\omega_4; \end{aligned}$$

где

$$\omega_3 = \varphi''(0); \quad \omega_4 = \varphi'''(0); \quad \psi''(0) = \nu_3; \quad \psi'''(0) = \nu_4.$$

После вычислений получим общее решение системы в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= -A (\operatorname{ch} r\xi \cos r_1\xi - \operatorname{ch} s\xi \cos s_1\xi) + \\ &+ B (\operatorname{sh} r\xi \sin r_1\xi + \operatorname{sh} s\xi \sin s_1\xi) - C (\operatorname{sh} r\xi \cos r_1\xi - \\ &- \operatorname{ch} s\xi \sin s_1\xi) + D (\operatorname{ch} r\xi \sin r_1\xi - \operatorname{sh} s\xi \cos s_1\xi); \\ \psi(\xi) &= B (\operatorname{ch} r\xi \cos r_1\xi - \operatorname{ch} s\xi \cos s_1\xi) + A (\operatorname{sh} r\xi \times \\ &\times \sin r_1\xi + \operatorname{sh} s\xi \sin s_1\xi) + C (\operatorname{ch} r\xi \sin s_1\xi - \\ &- \operatorname{sh} r\xi \cos s_1\xi) + D (\operatorname{sh} r\xi \cos r_1\xi - \operatorname{ch} s\xi \sin s_1\xi), \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$



где по-прежнему после вычислений вместо постоянных  $\omega_3, \omega_4, \nu_3, \nu_4$  введены постоянные  $A, B, C$  и  $D$ , связанные с ними линейными соотношениями. В случае, если пренебречь инерцией поворота, необходимо положить

$$s = r_1; \quad s_1 = r.$$

Решение уравнений (6.25) определяется так же, как и для концов, т. е.

$$\varphi(\xi) = \varphi_1(\xi) + \Phi(\xi); \quad \psi(\xi) = \psi_1(\xi) + \Psi(\xi), \quad (6.52)$$

где  $\Phi(\xi)$  и  $\Psi(\xi)$  вычисляются согласно уравнениям (6.35), (6.36), причем способ закрепления левого конца, благодаря условиям (6.39), влияния на их значения не оказывает и при наличии даже непрерывной нагрузки.

6. Подчиняем общее решение (6.40) условиям для правого конца  $x = l$  ( $\xi = 1$ ) в зависимости от заданного способа закрепления:

$$\varphi = 0; \quad \varphi'' = 0; \quad \psi = 0; \quad \psi'' = 0 \text{ — для опертго конца } \xi = 1;$$

$$\varphi = 0; \quad \varphi' = 0; \quad \psi = 0; \quad \psi' = 0 \text{ — для закрепленного конца } \xi = 1.$$

Для свободного конца  $x = l$  необходимо, чтобы изгибающий момент  $M$  и перерезывающая сила  $S$  обращались в нуль, т. е.

$$-\frac{EJ}{l^2}(\varphi'' - \mu\varphi''') = 0; \quad -\frac{EJ}{l^2}(\varphi''' - \mu\varphi'' + b_2\varphi') = 0;$$

$$-\frac{EJ}{l^2}(\psi'' + \mu\psi''') = 0; \quad -\frac{EJ}{l^2}(\psi''' + \mu\psi'' + b_2\psi') = 0 \text{ для } \xi = 1$$

или, когда  $b_2 = 0$ , то

$$\varphi'' = 0; \quad \varphi''' = 0; \quad \psi'' = 0; \quad \psi''' = 0 \text{ для } \xi = 1.$$

Удовлетворяя заданному условно закрепления для  $\xi = 1$ , получим систему линейных уравнений относительно  $A, B, C, D$ , из которой и найдутся их значения.

В частности, для опертых концов  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  для стержня, находящегося под действием периодической силы  $Q$ , приложенной в точке  $\xi = \xi_1$ , и при наличии сосредоточенного груза  $M_1$  можно получить значения  $A, B, C$  и  $D$ , входящие в решение уравнений (6.38) в виде

$$\left. \begin{aligned} A &= k \operatorname{sh} r \cos r_1 - l \operatorname{ch} r \sin r_1; \\ B &= -l \operatorname{sh} r \cos r_1 - k \operatorname{ch} r \sin r_1; \\ C &= k_1 \operatorname{sh} s \cos s_1 - l_1 \operatorname{ch} s \sin s_1; \\ D &= -l_1 \operatorname{sh} s \cos s_1 - k_1 \operatorname{ch} s \sin s_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.53)$$

где

$$\begin{aligned}
 k &= -[\alpha_1 \operatorname{sh} r (1 - \xi_1) \cos r_1 (1 - \xi_1) - \\
 &\quad - \beta_1 \operatorname{ch} r (1 - \xi_1) \sin r_1 (1 - \xi_1)] D_1; \\
 l &= [\beta_1 \operatorname{sh} r (1 - \xi_1) \cos r_1 (1 - \xi_1) + \\
 &\quad + \alpha_1 \operatorname{ch} r (1 - \xi_1) \sin r_1 (1 - \xi_1)] D_1; \\
 k_1 &= [\gamma_1 \operatorname{sh} s (1 - \xi_1) \cos s_1 (1 - \xi_1) - \\
 &\quad - \delta_1 \operatorname{ch} s (1 - \xi_1) \sin s_1 (1 - \xi_1)] D_2; \\
 l_1 &= -[\delta_1 \operatorname{sh} s (1 - \xi_1) \cos s_1 (1 - \xi_1) + \\
 &\quad + \gamma_1 \cos s (1 - \xi_1) \sin s_1 (1 - \xi_1)] D_2,
 \end{aligned}$$

причем

$$D_1 = \frac{2}{\operatorname{ch} 2r - \cos 2r_1}; \quad D_2 = \frac{2}{\operatorname{ch} 2s - \cos 2s_1},$$

$\alpha$ ,  $\gamma_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\delta_1$  определяют согласно зависимостей (6.42).

Когда  $M_1 = 0$ , то значения постоянных  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  (6.53) определяют только в зависимости от  $Q$ , так как в формуле (6.42) необходимо положить  $m_1 = 0$ ; когда  $M_1 \neq 0$ , то уравнения (6.53) дают также систему уравнений относительно  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

Ниже приведем другие способы решений этой задачи.

### Поперечные колебания с учетом затухания для любого закона изменения возмущающей силы

1. В случае вынужденных колебаний стержня решение уравнения (6.19) может быть получено в общем виде при любом законе изменения возмущающей силы.

Задача по-прежнему сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} + \delta^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu_1 \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial \xi^4} = \frac{l^4}{EJ} f(\xi, t). \quad (6.54)$$

Для записи уравнения (6.54) в операционной форме умножаем обе его части на  $e^{-pt}$  и интегрируем в пределах от 0 до  $\infty$ .

Согласно указанному выше, мы можем принять, что коэффициент затухания не будет зависеть от частоты колебаний.

Для того чтобы отразить независимость рассеяния энергии от частоты, необходимо третий член левой части уравнения записать в таком виде:

$$\mu \frac{p}{k} \cdot \frac{\partial^4 Y}{\partial \xi^4},$$

где  $k = |Imp|$  — частота колебаний.

Следовательно, дифференциальное уравнение поперечных колебаний можно записать в виде

$$\left(1 + \mu \frac{\rho}{k}\right) \frac{d^4 Y}{d\xi^4} + \delta^2 \rho^2 Y = \frac{l^4}{EJ} F(\xi, \rho) \quad (6.55)$$

или

$$\frac{d^4 Y}{d\xi^4} - s^4 Y = \frac{1}{K} F(\xi, \rho); \quad (6.56)$$

здесь  $\mu = \frac{\varepsilon}{\pi}$  — коэффициент затухания, не зависящий от частоты колебаний ( $\varepsilon$  — декремент затухания);

$$\left. \begin{aligned} s^4 &= -\frac{\delta^2 \rho^2}{1 + \mu \rho \sigma}; & K &= \frac{EJ(1 + \mu \rho \sigma)}{l^3}; \\ \sigma &= \frac{1}{|Imp|}; & Y(\xi, \rho) &= \rho \int_0^\infty e^{-\rho t} y(t, \xi) dt, \\ & & F(\xi, \rho) &= \rho \int_0^\infty e^{-\rho t} f(t, \xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (6.57)$$

Из выражения (6.57) находим

$$\rho^2 + \left(1 + \mu \frac{\rho}{|Imp|}\right) \frac{s^4}{\delta^2} = 0,$$

отсюда

$$\rho = -\frac{\mu}{2} \cdot \frac{s^4}{\delta^2 |Imp|} \pm i \frac{s^2}{\delta} \sqrt{1 - \frac{\mu^2 s^4}{\delta^2} \cdot \frac{1}{|Imp|^2}},$$

так как по условию  $|Imp| = k$ , то получим

$$k = \frac{s^2}{\delta} \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{4} \cdot \frac{s^4}{\delta^2 k^2}}.$$

Следовательно,

$$k \approx \frac{s^2}{\delta} \left(1 - \frac{\mu^2}{8}\right). \quad (6.58)$$

Поэтому с точностью до  $\mu^3$  получим

$$\rho_{1,2} = \left(-\frac{\mu}{2} \pm i\right) k. \quad (6.59)$$

Таким образом,

$$1 + \frac{\mu \rho}{|Imp|} = 1 - \frac{\mu}{2} \pm i.$$

Следовательно, запись уравнения (6.54) в виде уравнения (6.55) фактически соответствует введению комплексного модуля упругости, применяемого в работе [87] в несколько другом виде.

Предположим для простоты, что со стержнем связана одна сосредоточенная масса  $M_1$  в точке  $\xi = \xi_1$ . В этой точке приложена возмущающая сила  $f_1(t)$ .

В таком случае правая часть уравнения (6.55) имеет вид

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(\xi, t) dt = M_1 p^2 Y + F_1(p), \quad (6.60)$$

причем

$$F_1(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(\xi, t) dt.$$

Введем функцию влияния для уравнения (6.55), т. е. решение уравнения для случая приложения в точке  $\xi = \xi_1$  единичной сосредоточенной нагрузки, и обозначим ее через  $G(\xi, \xi_1, p)$ . В таком случае при наличии «грузового» члена (6.60) при начальных условиях  $y(\xi, 0) = y'(\xi, 0) = 0$

$$Y(\xi, p) = \{F_1(p) - M_1 p^2 Y(\xi_1, p)\} G(\xi, \xi_1, p). \quad (6.61)$$

Полагая в уравнении (6.61)  $\xi = \xi_1$ , найдем  $Y(\xi_1, p)$  в зависимости от  $G(\xi, \xi_1, p)$ . Тогда

$$Y(\xi, p) = \frac{1}{p} F_1(p) F_2(p) = \frac{F_1(p)}{p} \frac{pG(\xi, \xi_1, p)}{1 + p^2 M_1 G(\xi_1, \xi_1, p)}. \quad (6.62)$$

Зная значение функции  $f_1(t)$ , из уравнения (6.62) получим по общим правилам оригинал  $y(\xi, t)$ .

2. Найдем теперь значение функции влияния  $G(\xi, \xi_1, p)$ . Значение этой функции может быть найдено из уравнения (6.55) в виде разложения в ряд по фундаментальным функциям или в замкнутом виде. Для этого ищем решение уравнения (6.55) в виде

$$Y(\xi) = \sum a_m X_m(\xi). \quad (6.63)$$

После подстановки выражения (6.63) в уравнение (6.56), принимая во внимание, что

$$X_i^{IV}(\xi) = r_i^4 X_i(\xi),$$

получим

$$\sum_m a_m X_m(\xi) (r_m^4 - s^4) = \frac{l}{K} F(\xi, p).$$

Умножая обе части этого выражения на  $X_k(\xi) d\xi$  и интегрируя в пределах от 0 до 1 (от 0 до  $l$ ), получим благодаря условию ортогональности для фундаментальных функций

$$a_k = \frac{l}{K} \cdot \frac{\int_0^1 F(\rho) X_k(\xi) d\xi}{(r_k^4 - s^4) \int_0^1 X_k^2(\xi) d\xi}. \quad (6.64)$$

Так как по условию  $F(\rho)$  везде равна нулю, за исключением интервала  $\xi \leq \xi_1 \leq \xi + c_1$ , где  $F(\rho)$  равна  $\frac{1}{c_1 l}$  (на единицу длины), то после вычислений найдем

$$G(\xi, \xi_1, \rho) = \frac{1}{K} \sum_k \frac{X_k(\xi_1) X_k(\xi)}{N_k (r_k^4 - s^4)}. \quad (6.65)$$

Значения  $N_n = \int_0^1 X_n^2(\xi) d\xi$  приведены в табл. 4.5 для разных условий закрепления: например,  $N_n$  имеет значение  $\frac{1}{2}$  для опертых концов,  $\frac{1}{4} [X_n''(1)]^2$  для заделанных и  $\frac{1}{4} X_n^2(1)$  для консольного стержня.

Значение функции влияния можно получить и в замкнутом виде. Для этого необходимо найти решение уравнения (6.56) с правой частью

$$Y^{IV} - s^4 Y = \frac{l^4}{\left(1 + \mu \frac{\rho}{|Imp|}\right) EJ} f(\xi, \rho), \quad (6.66)$$

где

$$s^4 = - \frac{\delta^2 \rho^2}{1 + \mu \frac{\rho}{|Imp|}}. \quad (6.67)$$

Функция  $f(\xi, \rho)$  везде равна нулю, за исключением

$$\xi \leq \xi_1 \leq \xi + c_1 \quad (c_1 \rightarrow 0).$$

Решение этого уравнения можно получить в виде

$$G(\xi, \xi_1, \rho) = AY_1(\xi) + BY_2(\xi) + CY_2(\xi) + DY_4(\xi) + \\ + \frac{l^3}{2EJs^3 \left(1 + \frac{\mu\rho}{|Imp|}\right)} [\operatorname{sh} s(\xi - \xi_1) + \sin s(\xi - \xi_1)],$$

где знак || обозначает, что члены, лежащие вправо от него, добавляются для  $\xi > \xi_1$ ,  $Y_1(\xi)$ , . . . ,  $Y_4(\xi)$  (функции А. Н. Крылова).

Постоянные  $A, B, C, D$  определяются из граничных условий. В частности, для опертых концов функция влияния будет

$$G(\xi, \xi_1, p) = \frac{l^3}{2EJ \left(1 + \frac{\mu p}{|Imp|}\right) s^3} G_2(\xi, \xi_1, p), \quad (6.68)$$

где

$$G_2(\xi, \xi_1, p) = - \begin{cases} \frac{\text{sh } s\xi \text{ sh } s(1-\xi_1)}{\text{sh } s} - \frac{\sin s\xi \sin s(1-\xi_1)}{\sin s} & \text{для } \xi < \xi_1; \\ \frac{\text{sh } s(1-\xi) \text{ sh } s\xi_1}{\text{sh } s} - \frac{\sin s(1-\xi) \sin s\xi_1}{\sin s} & \text{для } \xi > \xi_1. \end{cases}$$

Аналогичным образом решается задача для случая, когда со стержнем связано несколько сосредоточенных сил и масс.

Так, при наличии двух возмущающих сил  $f(t)$ ,  $f_2(t)$  и масс  $M_1$ ,  $M_2$ , находящихся в точках  $\xi = \xi_1$ ,  $\xi = \xi_2$ , получим

$$Y(\xi, p) = [F_1(p) - M_1 p^2 Y(\xi_1, p)] G(\xi, \xi_1, p) + [F_2(p) - M_2 p^2 Y(\xi_2, p)] G(\xi, \xi_2, p).$$

Полагая  $\xi = \xi_1$ ,  $\xi = \xi_2$ , найдем  $Y(\xi_1, p)$ ,  $Y(\xi_2, p)$ , а следовательно,

$$\begin{aligned} Y(\xi, p) = & \frac{1}{D} \{F_1 [1 + M_2 p^2 G(\xi_2, \xi_2, p)] - F_2 M_1 p^2 G(\xi_1, \xi_2, p)\} \times \\ & \times G(\xi, \xi_1, p) - \frac{1}{D} \{F_1 M_2 p^2 G(\xi_1, \xi_2, p) - \\ & - F_2 [1 + M_1 p^2 G(\xi_1, \xi_1, p)]\} G(\xi, \xi_2, p); \end{aligned} \quad (6.69)$$

здесь

$$D = [1 + M_1 p^2 G(\xi_1, \xi_1, p)] [1 + M_2 p^2 G(\xi_2, \xi_2, p)] - M_1 M_2 p^4 G^2(\xi_1, \xi_2, p).$$

Для  $M_1 = M_2$ ,  $f_1(t) = f_2(t)$ ,  $\xi_2 = 1 - \xi_1$  получим

$$\begin{aligned} Y(\xi, p) = & \frac{1}{D_1} F_1(p) [G(\xi, \xi_1, p) + G(\xi, \xi_2, p)] \times \\ & \times \{1 + M p^2 [G(\xi_1, \xi_1, p) - G(\xi_1, \xi_2, p)]\}, \end{aligned}$$

где

$$D_1 = 1 + 2M p^2 G(\xi_1, \xi_1, p) + M^2 p^4 [G^2(\xi_1, \xi_1, p) - G^2(\xi_1, \xi_2, p)].$$

## Вынужденные колебания стержня с сосредоточенным грузом

**Решение в замкнутом виде.** При наличии груза, приложенного в точке  $\xi = \xi_1$ , массой  $M_1$  и сосредоточенной возмущающей силы  $p \sin kt$  значение  $Y(x, p)$  определяется из уравнения (6.62):

$$\frac{1}{p} Y(\xi, p) = \frac{kp}{p^2 + k^2} \cdot \frac{G(\xi, \xi_1, p)}{1 + p^2 M_1 G(\xi_1, \xi_1, p)}. \quad (6.70)$$

Для того чтобы найти чисто вынужденные колебания, необходимо найти оригинал лишь для полюсов  $p = \pm ik$ .

В таком случае согласно второй теореме разложения

$$\frac{1}{p} y(\xi, t) = A(\xi) \sin kt + B(\xi) \cos kt, \quad (6.71)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A(\xi) &= \operatorname{Re} \frac{G(\xi, \xi_1, ik)}{1 - M_1 k^2 G(\xi_1, \xi_1, ik)}; \\ B(\xi) &= \operatorname{Im} \frac{G(\xi, \xi_1, ik)}{1 - M_1 k^2 G(\xi_1, \xi_1, ik)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.72)$$

Для опертого стержня значение  $G(\xi, \xi_1, p)$  было найдено выше по условию (6.68)

$$\left. \begin{aligned} G(\xi, \xi_1, p) &= \\ &= \frac{l^2 s}{2EJ\delta^2 p^2} \left\{ \frac{\operatorname{sh} s\xi \operatorname{sh} s(1-\xi_1)}{\operatorname{sh} s} - \frac{\sin s\xi \sin s(1-\xi_1)}{\sin s} \right\} \xi < \xi_1; \\ G(\xi, \xi_1, p) &= \\ &= \frac{l^3 s}{2EJ\delta^2 p^2} \left\{ \frac{\operatorname{sh} s(1-\xi) \operatorname{sh} s\xi_1}{\operatorname{sh} s} - \frac{\sin s(1-\xi) \sin s\xi}{\sin s} \right\} \xi > \xi_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

Так как  $s^4 = -\frac{\delta^2 p^2}{1 + \mu \frac{p}{k}}$ ,

то для

$$p = \pm ik, \quad s = s_1 \mp is_2, \quad (6.74)$$

где  $s_1 = \left(1 + \frac{5}{32} \mu^2\right) \sqrt{\delta k}$ ;  $s_2 = \frac{\mu}{4} \sqrt{\delta k}$ .

После подстановки значений  $s$  в уравнение (6.73) получим

$$\begin{aligned} 8pFlp^2 G(\xi, \xi_1, p) &= -(s_1 - is_2) \{ \gamma_1(\xi, \xi_1) D_1 + \delta_1(\xi, \xi_1) D_2 + \\ &+ i [\gamma_2(\xi, \xi_1) D_1 + \delta_2(\xi, \xi_1) D_2] \}, \end{aligned} \quad (6.75)$$

где

$$D_1 = \frac{2}{\operatorname{ch} 2s_2 - \cos 2s_1}; \quad D_2 = \frac{2}{\operatorname{ch} 2s_1 - \cos 2s_2};$$

$$-\gamma_1(\xi, \xi_1) = -\sin s_1 (2 - \xi_1 + \xi) \operatorname{ch} s_2 (\xi_1 - \xi) -$$

$$-\operatorname{ch} s_1 (2 - \xi_1 + \xi_2) \sin s_2 (\xi_1 - \xi) + \sin s_1 (2 - \xi_1 +$$

$$+ \xi) \operatorname{ch} s_2 (\xi_1 + \xi) + \operatorname{ch} s_2 (2 - \xi_1 - \xi) \sin s_1 (\xi_1 + \xi);$$

$$\delta_1(\xi, \xi_1) = \operatorname{sh} s_1 (2 - \xi_1 + \xi) \cos s_2 (\xi_1 - \xi) +$$

$$+ \cos s_1 (2 - \xi_1 + \xi) \operatorname{sh} s_2 (\xi_1 - \xi) -$$

$$-\operatorname{sh} s_1 (2 - \xi_1 - \xi) \cos s_2 (\xi_1 + \xi) -$$

$$-\cos s_1 (2 - \xi_1 + \xi_2) \operatorname{sh} s_2 (\xi_1 + \xi_2);$$

$$-\gamma_2(\xi, \xi_1) = -\cos s_1 (2 - \xi_1 + \xi) \operatorname{sh} s_2 (\xi_1 - \xi) -$$

$$-\cos s_1 (\xi_1 - \xi) \operatorname{sh} s_2 (2 - \xi_1 + \xi) +$$

$$+ \cos (2 - \xi_1 - \xi) \operatorname{sh} s_2 (\xi_1 + \xi) +$$

$$+ \cos s_1 (\xi_1 + \xi) \operatorname{sh} s_2 (2 - \xi_1 - \xi);$$

$$\delta_2(\xi, \xi_1) = \operatorname{ch} s_1 (2 - \xi_1 + \xi) \sin s_2 (\xi_1 - \xi) +$$

$$+ \operatorname{ch} s_1 (\xi_1 - \xi) \sin s_2 (2 - \xi_1 + \xi) -$$

$$-\operatorname{ch} s_1 (2 - \xi_1 - \xi) \sin s_2 (\xi_1 + \xi) -$$

$$-\operatorname{ch} s_1 (\xi_1 + \xi) \sin s_2 (2 - \xi_1 - \xi).$$

Значения  $\rho$ ,  $\delta$  в месте приложения груза будут

$$-\gamma_1(\xi_1, \xi_1) = -\sin 2s_1 + \sin 2s_1 (1 - \xi_1) \operatorname{ch} 2s_2 +$$

$$+ \operatorname{ch} 2s_2 (1 - \xi_1) \sin 2s_1 \xi_1;$$

$$\delta_1(\xi_1, \xi_1) = \operatorname{sh} 2s_1 - \operatorname{sh} 2s_1 (1 - \xi_1) \cos 2s_2 \xi_1 -$$

$$-\cos 2s_1 (1 - \xi_1) \operatorname{sh} 2s_2 \xi_1;$$

$$-\gamma_2(\xi_1, \xi_1) = -\operatorname{sh} 2s_2 + \cos 2s_1 (1 - \xi_1) \operatorname{sh} 2s_2 \xi_1 +$$

$$+ \cos 2s_1 \xi_1 \operatorname{sh} 2s_2 (1 - \xi_1);$$

$$\delta(\xi_1, \xi_1) = \sin 2s_2 - \operatorname{ch} 2s_1 (1 - \xi_1) \sin 2s_2 \xi_1 -$$

$$-\operatorname{ch} 2s_1 \xi_1 \sin 2s_2 (1 - \xi_1).$$

Следовательно,

$$A + B_i = \frac{1}{8k^2 \rho Fl} \times$$

$$\times \frac{(s_1 - is_2) [\gamma_1(\xi_1, \xi) D_1 + \delta_1(\xi_1, \xi) D_2] + i [\gamma_2(\xi_1, \xi) D_1 + \delta_2(\xi_1, \xi) D_2]}{1 + \frac{\alpha(s - s_1 i)}{8} \{ \gamma_1(\xi_1, \xi_1) D_1 + \delta_1(\xi_1, \xi_1) D_2 + i [\gamma_2(\xi_1, \xi_1) D_1 + \delta_2(\xi_1, \xi_1) D_2] \}}.$$

(6.76)



Разделяя в правой части уравнения (6.76) действительную и мнимую части, получим  $A$  и  $B$ .

Для случая, когда сила и груз находятся посредине стержня, получим для прогиба в этом сечении следующее выражение:

$$y(\xi, t) = \frac{-P}{4F\rho l \Delta} \left\{ (s_1 \operatorname{sh} s_1 - s_2 \sin s_2) D_1' - (s_1 \sin s_1 - s_2 \operatorname{sh} s_2) D_2' + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{2} (s_1^2 + s_2^2) (\operatorname{ch} s_1 \operatorname{ch} s_2 - \cos s_2 \cos s_1 - \sin s_1 \operatorname{sh} s_1 - \right. \\ \left. - \sin s_2 \operatorname{sh} s_2) \right\} \sin kt + \left[ - (s_2 \operatorname{sh} s_1 + s_1 \sin s_2) D_1' + \right. \\ \left. + (s_1 \operatorname{sh} s_2 + s_2 \sin s_1) D_2' \right] \cos kt; \quad (6.77)$$

здесь

$$\Delta = D_1' D_2' + \frac{\alpha}{2} [D_1' (s_1 \operatorname{sh} s_1 - s_2 \sin s_2) - D_2' (s_1 \sin s_1 - s_2 \operatorname{sh} s_2)] + \\ + \frac{\alpha^2}{8} (s_1^2 + s_2^2) [\operatorname{ch} s_1 \operatorname{ch} s_2 - \cos s_2 \cos s_1 - \sin s_2 \operatorname{sh} s_2 - \operatorname{sh} s_1 \sin s_1],$$

где  $D_1' = \operatorname{ch} s_2 + \cos s_1$ ;  $D_2' = \operatorname{ch} s_1 + \cos s_2$ .

#### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

##### Свободные колебания с учетом затухания

Решение уравнения (6.19) для собственных колебаний при отсутствии добавочных масс получается без всяких затруднений.

Для удобства вычислений вводим безразмерную координату. Если не учитывать инерции поворота и внешнего затухания, то уравнение (6.19) запишется тогда в виде

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} + \delta^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \xi^4} = 0, \quad (6.78)$$

где

$$\delta^2 = \frac{\delta F l^4}{EJ}.$$

Будем искать решение уравнения (6.78) в виде произведения двух функций

$$y(\xi, t) = X_i(\xi) T(t), \quad (6.79)$$

причем для  $\varphi_1(\xi)$  возьмем фундаментальные функции колеблющегося стержня (гл. 4), удовлетворяющие уравнению

$$X^{IV}(\xi) - s_i^4 X(\xi) = 0. \quad (6.80)$$

После подстановки выражения для  $y(\xi, t)$  в уравнения (6.79) и (6.78), учитывая уравнение (6.80), получим для определения  $T$  уравнение

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \mu \omega_i^2 \frac{dT}{dt} + \omega_i^2 T = 0, \quad (6.81)$$

где  $\omega_i$  — собственная частота колебаний стержня без учета затухания (гл. 4),

$$\omega_i = r_i^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F l^4}}.$$

Решение уравнения (6.81) будет

$$T(t) = e^{-\frac{\mu \omega_i^2 t}{2}} \left\{ A \sin \omega_i t \sqrt{1 - \frac{\mu^2 \omega_i^2}{4}} + B \cos \omega_i t \sqrt{1 - \frac{\mu^2 \omega_i^2}{4}} \right\}. \quad (6.82)$$

Для случая, когда  $\frac{\mu^2 \omega_i^2}{4} > 1$ , движение аperiodическое, и это решение необходимо видоизменить.

Таким образом, частота собственных колебаний с учетом затухания

$$p_i = \omega_i \sqrt{1 - \frac{\mu^2 \omega_i^2}{4}}. \quad (6.83)$$

Логарифмический декремент затухания, отнесенный к периоду колебания, равен

$$\delta = \frac{\mu \omega^2}{2} \tau = \frac{2\mu l^2}{\tau}, \quad (6.84)$$

где  $\tau$  — полный период одного колебания, равный  $\frac{2\pi}{\omega}$ .

Обычно  $\mu$  малая величина; в этом случае значение частоты собственных колебаний (6.83) при учете затухания может быть принято равным

$$p_i \approx \omega_i.$$

Тогда из уравнения (6.84) получим

$$\mu = \frac{\varepsilon \tau}{2l^2}. \quad (6.85)$$

Среднее значение коэффициента  $\mu$  для стали разных марок может быть взято из рис. 6.1, 6.2 и из табл. 6.2.

### Вынужденные колебания балок под действием периодических сил

При учете затухания задача сводится к нахождению решения уравнения (6.19):

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu EJ \frac{\partial^6 y}{\partial t \partial x^4} = f(x, t), \quad (6.86)$$

где  $f(x, t)$  — интенсивность внешней нагрузки.

Решение этого уравнения состоит из двух частей

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t), \quad (6.87)$$

где  $y_1(x, t)$  — общее решение без правой части;

$y_2(x, t)$  — частное решение с правой частью.

Эти решения определяют свободные колебания балки, зависящие от начальной формы искривления и от скоростей, какие сообщены в начальный момент времени элементам балки. Эти колебания вследствие внутреннего (и внешнего) затухания со временем затухают и остаются лишь вынужденные колебания.

Рассмотрим случай одной сосредоточенной силы  $P \sin kt$ , приложенной в точке  $x = a$ .

Для этого случая имеем

$$f(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq xa \text{ и } a + \sigma \leq x \leq l; \\ p \sin kt & \text{для } a \leq x \leq a + \sigma \end{cases} \quad (6.88)$$

при условии, что  $p\sigma \rightarrow P$ ; когда  $\sigma \rightarrow 0$ .

Решение уравнения (6.86) будем искать по методу академика А. Н. Крылова в виде разложения в ряд по фундаментальным функциям  $X_n(x)$ , получаемым для балки без учета затухания

$$y_2(x, t) = \sum_i S_i(t) X_i(x), \quad (6.89)$$

где функции  $X_i(x)$  имеют определенное значение в зависимости от способа заделки концов (табл. 4.6 и 4.7).

Подставляя  $y_2(x, t)$  из уравнения (6.89) в уравнение (6.19), выраженное в безразмерных координатах

$$\frac{EJ}{\rho Fl^4} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\mu JE}{\rho Fl^4} \cdot \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial \xi^4} = \frac{1}{\rho F} f(x, t), \quad (6.90)$$

и принимая во внимание, что

$$X_i^{IV}(\xi) = s_i^4 X_i(\xi), \quad (6.91)$$

получим

$$\sum_i X_i(\xi) [S_i''(t) + \mu \omega_i^2 S_i'(t) + \omega_i^2 S_i(t)] = \frac{1}{\rho F} f(\xi, t),$$

где  $\omega_i$  — собственная частота, соответствующая  $i$ -му тону.

Умножая обе части этого выражения на  $X_k(\xi) d\xi$  и интегрируя в пределах от 0 до 1 (от 0 до  $l$ ), получим

$$S_k''(t) + \mu \omega_k^2 S_k'(t) + \omega_k^2 S_k(t) = \frac{1}{\rho F} H_k(t),$$

где

$$H_k = \frac{\int_0^1 f(\xi, t) X_k(\xi) d\xi}{\int_0^1 X_k^2(\xi) d\xi},$$

так как вследствие условия ортогональности для фундаментальных функций в левой части все члены, содержащие произведение функций  $X_i X_k$ , пропадут, т. е.

$$\int_0^1 X_i X_k d\xi = 0 \text{ для } k \neq i.$$

Для

$$\int_0^1 f(\xi, t) X_k(\xi) d\xi$$

получим согласно условию (6.88)  $(\sigma_1 = \frac{\sigma}{l})$

$$\int_0^1 f(\xi, t) X_k(\xi) d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_1 + \delta_1} p \sin kt X_k(\xi) d\xi = \frac{P}{l} \sin kt X_k(\xi_1).$$

Значение  $\int_0^1 X_k^2(\xi) d\xi$  может быть взято по табл. 4.3.

Таким образом, для  $H_n(t)$  после разложения получим следующие значения:

а)  $H_n(t) = \frac{2P}{l} \sin \frac{an\pi}{l} \sin kt$  для опертых концов;

б)  $H_n(t) = \frac{4P X_n(a)}{l (X_n''(a))^2} \sin kt$  для заделанных концов;

в)  $H_n(t) = \frac{4P X_n(a)}{l X_n^2(l)} \sin kt$  для левого закрепленного, правого свободного концов.

Тогда для чисто вынужденных колебаний согласно решению уравнения (6.86) соответственно получим:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } y_2(x, t) &= Y(x) \sin(kt + \varepsilon_n) = \\ &= \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{an\pi}{l} \sin \frac{\pi nx}{l} \sin(kt + \varepsilon_n)}{n^4 \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right)^2 + (\mu k)^2}}; \\ \text{б) } y_2(x, t) &= \frac{4Pl^3}{EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(a) X_n(x) \sin(kt + \varepsilon_n)}{s_n^4 X_n^2(1) \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right)^2 + (\mu k)^2}}; \\ \text{в) } y_2(x, t) &= \frac{4Pl^3}{EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(a) X_n(x) \sin(kt + \varepsilon_n)}{s_n^4 X_n^2(1) \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right)^2 + (\mu k)^2}}; \end{aligned} \right\} (6.92)$$

в формуле для случая «б» штрихами обозначены производные по  $\frac{plx}{l}$ . Здесь

$$\operatorname{tg} \varepsilon_n = -\frac{\mu k^2}{1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}}.$$

Если не учитывать затухания, т. е. полагать  $\mu = 0$ , то из выражений (6.92) увидим, что когда частота вынужденных колебаний будет стремиться к одной из частот собственных колебаний  $\omega_n$ , то амплитуда неограниченно возрастет.

### Консольный стержень с сосредоточенной массой

Как видно из предыдущего, решения в замкнутом виде, которые можно получить для вынужденных колебаний стержней с сосредоточенными массами, довольно громоздки и неудобны для вычислений. Во многих случаях удобнее получить решения с помощью фундаментальных функций. Тогда решения аналогичны приведенным в предыдущем разделе для случая приложения только сосредоточенной силы.

При приложении в точке  $\xi = \xi_1$  одной сосредоточенной силы  $f(\xi, t) = P \sin kt$  и при наличии массы  $M$  в этой же точке выражение  $y(\xi, t)$  согласно уравнению (6.62) будет

$$Y(\xi, p) = \frac{l^3}{EJ} F_1(p) \frac{G_1(\xi, \xi_1, p)}{1 + \frac{M}{F\rho l} p^2 \delta^2 G_1(\xi_1, \xi_1, p)} = \\ = \frac{k p l^3}{(p^2 + k^2) EJ} G_2(\xi, \xi_1, p), \quad (6.93)$$

где  $\frac{1}{p} f(\xi_1, t)$  в нашем случае соответствует

$$\sin kt \leftarrow \frac{k p}{p^2 + k^2}.$$

В уравнении (6.93) обозначено

$$G_2(\xi, \xi_1, p) = \frac{G_1(\xi, \xi_1, p)}{1 + a p^2 \delta^2 G_1(\xi_1, \xi_1, p)}. \quad (6.93')$$

Функция влияния  $G_1(\xi, \xi_1, p)$ , т. е. решение уравнения (6.55) для случая приложения единичной сосредоточенной нагрузки в точке  $\xi = \xi_1$  согласно уравнению (6.65) будет

$$G_1(\xi, \xi_1, p) = \frac{l^3}{EJ} \sum_n \frac{X_n(\xi_1) X_n(\xi)}{s^4 \left[ 1 + \frac{\mu p}{|I m p|} + \frac{p^2}{\omega_n^2} \right] \int_0^1 X_n^2(\xi) d\xi}, \quad (6.94)$$

где  $\omega_n^2 = \frac{s_n^4}{\delta^2}$ .

Так как нас интересуют лишь чисто вынужденные колебания, то необходимо найти оригинал уравнения (6.93) только для полюсов  $p = \pm ik$ . В таком случае согласно второй теореме разложения (6.51) получим

$$y(\xi, t) = \frac{Pl^3}{EJ} \{ \operatorname{Re} G_2(\xi, \xi_1, ik) \sin kt + \operatorname{Im} G_2(\xi, \xi_1, ik) \cos kt \}. \quad (6.95)$$

Обозначим

$$\frac{EJ}{l^3} G_1(\xi, \xi_1, +ik) = S_1(\xi) - i\mu S_2(\xi). \quad (6.96)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} S_1(\xi_1, \xi) &= \sum_n \frac{\left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right) X_n(\xi_1) X_n(\xi)}{s_n^4 \left[ \left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \mu^2 \right] \int_0^1 X_n^2 d\xi}; \\ S_2(\xi_1, \xi) &= \sum_n \frac{X_n(\xi_1) X_n(\xi)}{s_n^4 \left[ \left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \mu^2 \right] s_n^4 \int_0^1 X_n d\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (6.97)$$

После подстановки в уравнение (6.93) значения  $G_1(\xi, \xi_1, ik)$  получим

$$G_2(\xi, \xi_1, p) = \frac{l^3}{EJ [1 - \alpha k^2 \delta^2 S_1(\xi_1, \xi_1) + i\mu \alpha \delta^2 k^2 S_2(\xi_1, \xi_1)]} \times \\ \times \sum_n \frac{X_n(\xi_1) X_n(\xi)}{s_n^4 \left[ \left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{\mu p i}{|Im p|} \int_0^1 X_n^2 d\xi \right]}. \quad (6.98)$$

Отделяя действительную и мнимую части уравнения (6.98), найдем значение  $y(\xi, t)$  по уравнению (6.95):

$$y(\xi, t) = \frac{Pl^3}{EJ \sqrt{[1 - \alpha k^2 \delta^2 S_1(\xi_1, \xi_1)]^2 + [\alpha \mu \delta^2 k^2 S_2(\xi_1, \xi_1)]^2}} \times \\ \times \sum_n \frac{X_n(\xi_1) X_n(\xi) \sin(kt + \varepsilon_n)}{s_n^4 \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \mu^2} \int_0^1 X_n^2 d\xi}, \quad (6.99)$$

где

$$\operatorname{tg} \varepsilon = - \frac{\left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right) \alpha \delta^2 k^2 \mu S_2(\xi_1, \xi_1) + \mu [1 - \alpha \delta^2 k^2 S_1(\xi_1, \xi_1)]}{\left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right) [1 - \alpha \delta^2 k^2 S_1(\xi_1, \xi_1)] - \mu^2 \alpha \delta^2 k^2 S_2(\xi_1, \xi_1)}.$$

(6.100)

Прогиб  $y(\xi, t)$  можно записать в виде

$$y(\xi, t) = \frac{P l^3}{EJ} \cdot \frac{\sqrt{S_1^2(\xi, \xi_1) + \mu^2 S_2^2(\xi, \xi_1)} \sin(kt + \varepsilon)}{\sqrt{[1 - \alpha k^2 \delta^2 S_1(\xi_1, \xi_1)]^2 + [\alpha \mu \delta^2 k^2 S_2(\xi_1, \xi_1)]^2}};$$

(6.101)

здесь

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\mu S_2(\xi, \xi_1) [1 - \alpha \delta^2 k^2 S_1(\xi_1, \xi_1)] + \alpha \delta^2 \mu S_1(\xi, \xi_1) S_2(\xi_1, \xi_1)}{\alpha \delta^2 k^2 \mu^2 S_2(\xi_1, \xi_1) S_2(\xi, \xi_1) - [1 - \alpha \delta^2 k^2 S_1(\xi_1, \xi_1)] S_1(\xi, \xi_1)}.$$

(6.102)

Когда  $\alpha = 0$ , значение  $y(\xi, t)$  совпадает с решением, приведенным выше для случая сосредоточенной силы; если затухание отсутствует  $\mu = 0$ , то  $y(\xi, t)$ , как легко видеть, не обращается в бесконечность при  $k = \omega_n$ , так как, умножая числитель и знаменатель на  $l = \frac{k^2}{\omega_n^2}$ , мы избавляемся от неопределенности  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Если внешняя периодическая нагрузка распределена по закону

$$q = q_1(x) \sin kt,$$

то прогиб стержня можно записать в виде

$$y(\xi, t) = \frac{l^4}{EJ} \sum_n \frac{X_n(\xi) a_n \sin(kt + \varepsilon_n)}{s_n^4 \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \mu^2} \int_0^1 X_n^2(\xi) d\xi},$$

(6.103)

где

$$a_n = \int_0^1 q(\xi) X_n(\xi) d\xi.$$

Аналогичным образом решается задача при наличии нескольких сосредоточенных масс.

17  
18

## КОЛЕБАНИЯ ПЛОСКИХ РАМ

### ТОЧНЫЙ МЕТОД

#### Общий метод составления уравнений частот

Рамная конструкция в дальнейшем согласно обычным представлениям рассматривается как система, состоящая из стержней, работающих на изгиб и продольные усилия, причем некоторые стержни в узлах связаны жестко [19,44].

Сперва изложим точный метод подсчета собственных частот стержневых рамных систем. При этом заранее следует отметить, что точные методы практически применимы лишь в случае небольшого числа стержней. Поэтому в дальнейшем будут приведены более простые методы подсчета основных частот для сложных конструкций.

Для расчета колебаний рамных конструкций могут быть применены хорошо разработанные в строительной механике методы — метод перемещений (деформаций) и метод сил [77].

Согласно идее метода перемещений основная система образуется путем добавления дополнительных связей. Зная реакции дополнительных связей  $r_{1p}, r_{2p}, \dots, r_{np}$ , вызванные заданной внешней нагрузкой, реакцией связи и единичным перемещением связи  $k$ , составляем канонические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + r_{1p} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + r_{2p} &= 0; \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + r_{np} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

здесь  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  — неизвестные величины, представляющие собой сумму перемещений, вызванных линейной нагрузкой и линейными угловыми перемещениями дополнительных опор.

В случае рамы с вертикальными стойками за основные неизвестные принимаются углы поворота узлов  $\varphi$  и углы поворота стержней, или взаимные смещения их концов.

В дальнейшем в большинстве случаев будем исходить из метода перемещений, не придерживаясь полностью схемы решения задач



по этому методу. Все основные формулы метода перемещений для колеблющегося стержня при наличии продольных сил приведены в работе [114].

Помимо метода деформаций может быть применен и метод сил, согласно которому основная система получается из заданной путем удаления лишних связей. Обычно отбрасывается количество связей, равное количеству лишних связей. К полученной основной системе прикладывают в направлении удаленных лишних связей усилия, равные единице.

Определяя перемещения  $\delta_{ik}$  вдоль  $i$ -й отброшенной связи от усилия  $X = 1$ , из условия обращения в нуль перемещений в местах приложения каждого из усилий  $X$  приходим к каноническим уравнениям

$$\left. \begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \dots + X_n\delta_{1n} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \dots + X_n\delta_{2n} + \Delta_{2p} &= 0; \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \dots + X_n\delta_{nn} + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned} \right\} (7.2)$$

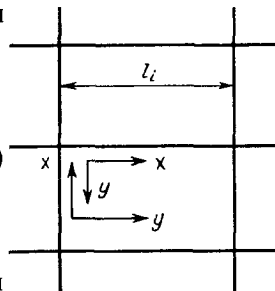


Рис. 7.1

Частотное уравнение получится, если приравнять определитель  $\Delta$  из коэффициентов при  $X_1, X_2, \dots, X_n$  нулю.

Для получения уравнения частоты для рамной конструкции будем исходить из дифференциального уравнения поперечных колебаний каждого стержня, которое при отсутствии периодической нагрузки имеет вид

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F_i (1 + e_i) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (7.3)$$

где  $EJ$  — жесткость стержня;

$F_i$  — площадь поперечного сечения;

$e_i$  — отношение массы распределенной нагрузки, приходящейся на единицу длины, к собственной массе  $\rho F_i$ . Оси координат расположены, как показано на рис. 7.1. Решение уравнения (7.3) берем в виде

$$y(x, t) = Y(x) \cos \omega t.$$

В дальнейшем вместо координаты  $x$  будем вводить безразмерную координату

$$\xi = \frac{x}{l}.$$

В таком случае  $Y_i(\xi)$  определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{d^4 Y_i}{d\xi^4} - r_i^4 Y_i = 0, \quad (7.4)$$

где

$$r_i^4 = \frac{\rho F_i (1 + e_i) l_i^4}{E J_i} \omega^2.$$

Общее решение этого уравнения, как было указано выше, удобно записать в виде

$$Y_i(\xi) = A_i S_i(\xi) + B_i T_i(\xi) + C_i U_i(\xi) + D_i V_i(\xi), \quad (7.5)$$

где

$$S_i(\xi) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} r_i \xi + \cos r_i \xi);$$

$$T_i(\xi) = \frac{1}{2r_i} (\operatorname{sh} r_i \xi + \sin r_i \xi);$$

$$U_i(\xi) = \frac{1}{2r_i^2} (\operatorname{ch} r_i \xi - \cos r_i \xi);$$

$$V_i(\xi) = \frac{1}{2r_i^3} (\operatorname{sh} r_i \xi - \sin r_i \xi),$$

причем

$$S(0) = 1; T'(0) = 1; U''(0) = 1; V'''(0) = 1.$$

Остальные функции и производные при  $\xi = 0$  равны нулю.

Уравнения, аналогичные уравнению (7.5), должны быть записаны и для других стержней, например, для  $k$ -го стержня

$$\frac{d^4 Y_k}{d\xi^4} - r_k^4 Y_k = 0,$$

где

$$r_k^4 = \frac{\rho F_k (1 + e_k) l_k^4}{E J_k} \omega^2.$$

Все значения  $r_1, r_2, \dots$  могут быть выражены через значения  $r_n$  для какого-либо  $n$ -го стержня, принятого за основной

$$r_i = \beta_i r_n, \quad (7.6)$$

где

$$\beta_i = \frac{l_i}{l_n} \sqrt[4]{\frac{F_i (1 + e_i) J_n}{F_n (1 + e_n) J_i}}.$$

Для того чтобы найти частоты колебаний рамной конструкции  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l, \dots$ , а вместе с тем и соответствующие им числа колебаний для  $i$ -го тона, равные

$$n_i = \frac{60}{2\pi} r_{in}^2 \sqrt{\frac{E J_n}{\rho (1 + e_n) F_n l_n^4}},$$

необходимо составить уравнение частоты и найти его корни  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots$ . Такое уравнение в каждом частном случае может быть получено с помощью составления условий сопряжения, как это будет видно на примерах, приведенных ниже. При этом необходимо условиться заранее относительно правила знаков. При расположении координатных осей в соответствии со схемами в табл. 7.1 для изгибающего момента и перерезывающей силы имеем выражения

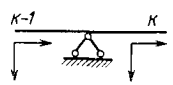
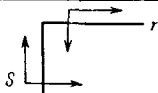
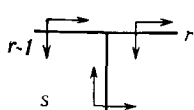
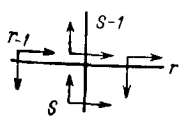
$$M = -EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{EJ}{l^2} Y''(\xi) \cos \omega t;$$

$$Q = -\frac{EJ}{l^3} Y'''(\xi) \cos \omega t.$$

Условия для углов поворота и моментов в несмешивающихся узлах рамы указаны в табл. 7.1. При составлении уравнения частот колебаний рамных конструкций будем пренебрегать сжатием стоек и ригелей от действия продольных сил.

Таблица 7.1

Условия для углов поворота и моментов в несмещающихся узлах рамы

Способ соединения	Условия сопряжения
	$y_{k-1} = y_k = 0, y'_{k-1} = y'_k, M_{k-1} = M_k$
	$y_s = y_r = 0, y'_s = y'_r, M_s = M_r$
	$y_s = y_{r-1} = y_r = 0, y'_s = y'_{r-1} = y'_r,$ $M_{r-1} + M_s = M_r$
	$y_{r-1} = y_r = y_{s-1} = y_s = 0,$ $y'_{r-1} = y'_r = y'_{s-1} = y'_s,$ $M_{r-1} + M_s = M_{s-1} + M_r$

Для того чтобы показать ход составления уравнения частот для рамной конструкции, остановимся на простейшем случае двухстоечной рамы — одноконтурной, которая часто встречается в практике, в особенности в рамных фундаментах под турбогенераторы.

## Колебания прямоугольной рамы

При изучении колебаний прямоугольной рамы со стойками одинаковой жесткости удобно рассмотреть отдельно две возможные формы колебаний: колебания, симметричные (вертикальные) относительно вертикальной оси (рис. 7.2), когда узлы рамы не сме-

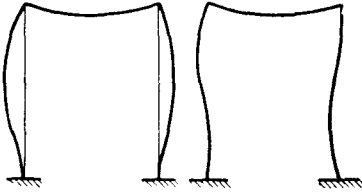


Рис. 7.2

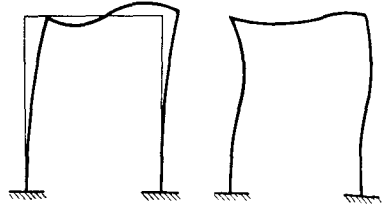


Рис. 7.3

щаются и остаются неподвижными, и антисимметричные (горизонтальные), когда узлы рамы смещаются в горизонтальном направлении (рис. 7.3).

За положительные направления осей координат принимаем направления, указанные на рис. 7.4.

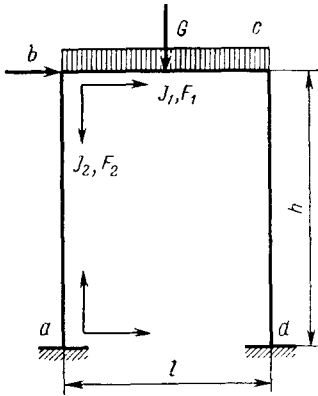


Рис. 7.4

Вертикальные колебания. Уравнение изогнутой оси ригеля

$$Y_1(\xi) = A_1 S_1(\xi) + B_1 T_1(\xi) + C_1 U_1(\xi) + D_1 V_1(\xi); \quad (7.7)$$

стойки

$$Y_2(\xi) = A_2 S_2(\xi) + B_2 T_2(\xi) + C_2 U_2(\xi) + D_2 V_2(\xi), \quad (7.8)$$

причем

$$r_1^4 = \frac{\rho F_1 (1 + e_1) l^4}{E J_1} \omega^2; \quad r_2 = \beta_2 r_1, \quad (7.9)$$

где

$$\beta_2 = \frac{h}{l} \sqrt[4]{\frac{F_2 (1 + e_2) J_1}{F_1 (1 + e_1) J_2}}.$$

Если стойки внизу заделаны, то

$$Y_2(0) = 0; \quad Y_2'(0) = 0.$$

Следовательно,

$$A_2 = B_2 = 0.$$

Ввиду отсутствия вертикальных смещений конца ригеля  $\xi = 0$

$$A_1 = 0.$$

Для определения оставшихся постоянных  $C_2, D_2, B_1, C_1, D_1$  имеем следующие условия: для углов поворота

$$\frac{1}{l} Y_1'(0) = \frac{1}{h} Y_2'(1);$$

для моментов

$$\frac{EJ_1}{l^2} Y_1''(0) = \frac{EJ_2}{h^2} Y_2''(1);$$

для смещений

$$Y_2(1) = 0.$$

Помимо того, для середины ригеля ввиду симметрии получим

$$Y_1'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Если с серединой ригеля связана масса  $m$  ( $G = mg$ ), то необходимо еще удовлетворить условию

$$\frac{EJ}{l^3} Y_1'''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{m}{2} \omega^2 Y_1\left(\frac{1}{2}\right)$$

или

$$Y_1'''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\alpha}{2} r_1^4 Y_1\left(\frac{1}{2}\right),$$

где

$$\alpha = \frac{m}{(1 + e_1) F_1 \rho l}.$$

Удовлетворяя всем указанным выше условиям, получим следующее трансцендентное уравнение частоты:

$$\begin{aligned} \Delta(r) \equiv & r_2 (\sin r_2 \operatorname{ch} r_2 - \cos r_2 \operatorname{sh} r_2) \left[ \sin \frac{r_1}{2} \operatorname{ch} \frac{r_1}{2} + \right. \\ & \left. + \cos \frac{r_1}{2} \operatorname{sh} \frac{r_1}{2} + \frac{\alpha r_1}{2} \left( \cos \frac{r_1}{2} \operatorname{ch} \frac{r_1}{2} - 1 \right) \right] + \\ & + k (1 - \cos r_2 \operatorname{ch} r_2) \left[ 2r_1 \cos \frac{r_1}{2} \operatorname{ch} \frac{r_1}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha r_1^2}{2} \left( \cos \frac{r_1}{2} \operatorname{sh} \frac{r_1}{2} - \sin \frac{r_1}{2} \operatorname{ch} \frac{r_1}{2} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.10)$$

где

$$k = \frac{J_1}{J_2} \cdot \frac{h}{l}.$$

Горизонтальные колебания. Для составления уравнения частоты в этом случае необходимо написать следующие условия сопряжения при расположении осей координат согласно рис. 7.4:

а)  $Y_2(0) = 0$ ;  $Y_2'(0) = 0$  — нижний конец стойки заделан;

б)  $Y_1(0) = 0$  — конец ригеля не смещается в вертикальном направлении;

$$в) \frac{1}{h} Y_2'(1) = \frac{1}{l} Y_1'(0);$$

$$\frac{EJ_2}{h^3} Y_2''(1) = \frac{EJ_1}{l^3} Y_1''(0) \text{ — условия соединения в узле;}$$

г)  $Y_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ;  $Y_1''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  — условие антисимметрии (в середине ригеля точка перегиба);

д) кроме того, необходимо учесть, что при горизонтальном перемещении конца стойки на него действует сила инерции от нагрузки  $m + (1 + e_1) F_1 \rho l$ , т. е.

$$\frac{EJ}{h^3} Y_2'''(1) = - \frac{m + (1 + e_1) F_1 \rho l}{2} Y_2(1) \omega^2.$$

Удовлетворяя написанным выше условиям, после исключения произвольных постоянных получим уравнение частоты горизонтальных колебаний двухстоечной рамы

$$\begin{aligned} \Delta(r) \equiv & \left( \sin \frac{r_1}{2} \operatorname{ch} \frac{r_1}{2} - \cos \frac{r_1}{2} \operatorname{sh} \frac{r_1}{2} \right) \left[ (1 + \cos r_2 \operatorname{ch} r_2) r_2 + \right. \\ & \left. + \alpha_1 r_2^2 (\cos r_2 \operatorname{sh} r_2 - \sin r_2 \operatorname{ch} r_2) \right] + 2kr_1 \sin \frac{r_1}{2} \operatorname{sh} \frac{r_1}{2} \times \\ & \times [\sin r_2 \operatorname{ch} r_2 + \cos r_2 \operatorname{sh} r_2 + \alpha_1 r_2 (\cos r_2 \operatorname{ch} r_2 - 1)] = 0, \quad (7.11) \end{aligned}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{m + F_1 \rho l (1 + e_1)}{F_2 \rho h}; \quad k = \frac{J_1 h}{J_2 l}.$$

Корни уравнений (7.10) и (7.11) определяют в каждом частном случае без затруднений с помощью пробных подстановок.

Для этой цели даем  $r_1$  ряд численных значений и согласно формуле (7.9) вычисляем  $r_2$ . С помощью таблиц гиперболических функций подсчитываем  $\Delta(r)$  и находим перемены знака  $\Delta$ . Найдя переменную знака, можем уточнить значение  $r$ .

Пр и м е р. Рассмотрим раму под турбогенератор со следующими данными:

Высота стойки $h$ в м	6,86
Длина ригеля $l$ в м	4,6
Размеры поперечного сечения стойки в м	1,4 × 1,4
Высота поперечного сечения ригеля в м	2,25
Площадь сечения ригеля $F_1$ в м <sup>2</sup>	1,675

Момент инерции в  $\text{м}^4$ :

ригеля $J_1$	0,7102
стойки $J_2$	0,3101

Вес в  $\text{кг}$

ригеля $F_1 0 \text{ л г}$	18 480
стойки $F_2 0 \text{ к г}$	32 020

Нагрузка, связанная с ригелем,  $G = mg$  в  $\text{кг}$  . . . . . 148 300

Трансцендентное уравнение (7.10) можно также записать в виде

$$r_2 B \left( \frac{r_1}{2} \right) [E(r_2) - \alpha_1 r_2 B(r_2)] + \\ + k r_1 S \left( \frac{r_1}{2} \right) [A(r_2) + \alpha_1 r_2 D(r_2)] = 0, \quad (7.12)$$

где

$$A(r) = \text{ch } r \sin r + \text{sh } r \cos r; \\ B(r) = \text{ch } r \sin r - \text{sh } r \cos r; \\ C(r) = 2 \text{ch } r \cos r; \\ D(r) = \text{ch } r \cos r - 1; \\ E(r) = \text{ch } r \cos r + 1; \\ S(r) = 2 \text{sh } r \sin r.$$

Значение постоянных, входящих в уравнение (7.12), будет

$$\alpha_1 = \frac{18,48 + 148,3}{2 \cdot 32,02} = 2,605;$$

$$k = \frac{0,7102 \cdot 6,86}{0,3201 \cdot 4,60} = 3,30;$$

$$r_2 = \beta_2 r_1;$$

$$\beta_2 = \sqrt[4]{\frac{F_2 J_1}{F_1 J_2}} = \frac{6,86}{4,60} \sqrt[4]{\frac{1,96 \cdot 0,7102}{1,675 \cdot 0,3201}} = 1,892.$$

Для нахождения перемен знака составляем табл. 7.2. При этом для коэффициентов  $D$  и  $E$  имеем следующие значения:

$$D = \frac{C}{2} - 1; \quad E = \frac{C}{2} + 1.$$

Т а б л и ц а 7.2

Значения функций в зависимости от  $r$

$r_2$	$r_1$	$A(r_2)$	$B(r_2)$	$C(r_2)$	$B\left(\frac{r_1}{2}\right)$	$S\left(\frac{r_1}{2}\right)$
1,350	0,713	2,403	1,614	0,902	0,030	0,255
1,377	0,728	2,421	1,711	0,812	0,032	2,265
4,575	2,418	-54,75	-41,42	-13,288	1,166	2,854
4,720	2,495	-55,66	-56,51	0,854	1,278	3,027

Значение  $\Delta(r)$ , например, для  $r_2 = 1,350$  и  $r_1 = 0,713$  будет  $\Delta(r) = 1,350 \times \times 0,03 (1 + 0,451 - 2,605 \cdot 1,614) + 3,3 \cdot 0,713 \cdot 0,255 [2,403 + 1,35 \cdot 2,605 (0,451 - - 1)] = -0,224$ . Для остальных значений  $r_2$  получим

$$\Delta(1,377) = 0,045; \Delta(4,575) = 1434; \Delta(4,720) = -5275.$$

Таким образом, первая переменная знака будет в интервале  $1,350 < r_2^{(1)} < < 1,377$ , вторая  $4,575 < r_2^{(2)} < 4,720$ .

С помощью линейной интерполяции получим

$$r_2^{(1)} = 1,350 + \delta_1; r_2^{(2)} = 4,575 + \delta_2,$$

где

$$\delta_1 = -\Delta(1,350) \frac{1,377 - 1,350}{0,045 - (-0,224)} = 0,0225; \delta_2 = 0,030,$$

откуда

$$r_2^{(1)} = 1,373; r_2^{(2)} = 4,605.$$

Определяем число колебаний ( $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2$ ).

$$n = 9,55 r_2^{(2)} \sqrt{\frac{E J_2}{\rho l_2 h^4}} = 240 r_2^{(2)};$$

$$n_1 = 452 \text{ кол/мин}; n_2 = 4,605^2 \cdot 241 = 5080 \text{ кол/мин}.$$

### Колебания многоярусных рам

В случае многопролетной и многоярусной рамы можно написать уравнение изогнутой оси для каждого ригеля и стойки (рис. 7.5).

Для  $r$ -го ригеля

$$y_p(x, t) = Y_p(\xi) \cos \omega t = \{A_p S_p(\xi) + + B_p T_p(\xi) + C_p U_p(\xi) + D_p Y_p(\xi)\} \cos \omega t; \quad (7.13)$$

для  $s$ -й стойки

$$y_c(x, t) = Y_c(\xi) \cos \omega t = [A_c S_c(\xi) + + B_c T_c(\xi) + C_c U_c(\xi) + D_c V_c(\xi)] \cos \omega t, \quad (7.14)$$

где

$$\xi = \frac{x}{l}.$$

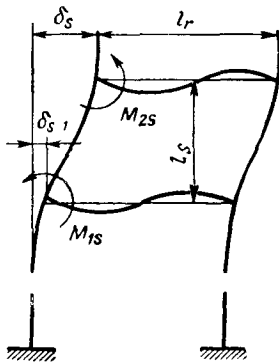


Рис. 7.5

С помощью соотношений (7.6) все значения  $r_p$  и  $r_c$  могут быть выражены через значения  $r_k$  для какого-либо стержня, принятого за основной, т. е.

$$r_p = \beta_p r_k; r_c = \beta_c r_k, \quad (7.15)$$

где

$$\beta_p = \frac{l_p}{l_k} \sqrt[4]{\frac{F_p(1 + \delta_p) J_k}{F_k(1 + \delta_k) J_p}}; \beta_c = \frac{l_c}{l_k} \sqrt[4]{\frac{F_c(1 + \delta_c) J_k}{F_k(1 + \delta_k) J_c}}.$$

В дальнейшем принимаем правило знаков и расположение осей так, как указано в табл. 7.1.



Для получения уравнения частоты необходимо удовлетворить следующим условиям:

1) вертикальные перемещения в узловых точках ригелей равны нулю, т. е.

$$Y_p(0) = 0, Y_p(1) = 0;$$

2) для углов поворота

$$\frac{1}{l_p} Y'_p(1) = \frac{1}{l_{p+1}} Y'_{p+1}(0) = \frac{1}{l_c} Y'_c(1) = \frac{1}{l_{c+1}} Y'_c(0);$$

3) для моментов

$$\frac{EJ_r}{l_p^2} Y''_p(1) + \frac{EJ_{c+1}}{l_{c+1}^2} Y''_{c+1}(0) = \frac{EJ_{p+1}}{l_{p+1}^2} Y''_{p+1}(0) + \frac{EJ_c}{l_c^2} Y''_c(1);$$

4) условие равенства перемещений для стоек

$$Y_c(1) = Y_{c+1}(0).$$

Предполагая, что ригели и стойки в продольном направлении (в направлении своих осей) не деформируются, а также, что нагрузка, связанная с ригелями и стойками, равномерно распределена, необходимо еще, кроме указанных условий, написать условие, что приращение перерезывающих сил при переходе от одного яруса к другому уравнивается силами инерции масс, связанных с ригелями, при горизонтальном движении.

Это условие дает:

$$\sum \left[ \frac{EJ_{c,k}}{l_{c,k}^3} Y''_{c,k}(1) - \frac{EJ_{c+1,k}}{l_{c+1,k}^3} Y''_{c+1,k}(0) \right] = - \sum \rho F_{p,i} l_{p,i} (1 + e_{p,i}) Y_{c+1}(0) \omega^2,$$

где знак  $\sum$  в левой части относится по всем стойкам  $s$  и  $(s+1)$  ярусов; в правой части суммирование проводится для всех ригелей рассматриваемого яруса, связанного со стойками.

Для нижних стоек необходимо написать условия в зависимости от рода заделки концов стоек, а именно:

для заделанных концов

$$Y_{c1}(0) = Y'_{c1}(0) = Y'_{c2}(0) = Y'_{c2}(0) = \dots = 0;$$

для шарнирно опертых концов

$$Y_{c1}(0) = Y''_{c1}(0) = Y_{c2}(0) = Y''_{c2}(0) = \dots = 0.$$

Удовлетворяя перечисленным выше условиям, можно получить уравнение частоты.

При наличии сосредоточенных масс  $m_{ri}$ , связанных с ригелями, необходимо вместо уравнений (7.13) и (7.14) для изогнутой оси написать уравнения согласно методу, указанному в гл. 4.

Все остальные условия сохраняются в силе; лишь в условии 5 в правой части необходимо прибавить еще члены, зависящие от сосредоточенных масс, т. е.

$$- \sum m_{r_i} Y_{s+1}(0) \omega^2.$$

Как видно из изложенного, точный метод требует значительной работы, в особенности при большом числе стержней, так как приводит после удовлетворения условиям сопряжения к сложным трансцендентным уравнениям в виде определителей, вычисление корней которых представляет большие затруднения.

Поэтому, не останавливаясь более подробно на этом методе, изложим другие методы подсчета первых частот, дающие возможность найти эти частоты с достаточным для практики приближением.

### ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОДСЧЕТА ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКИХ РАМ

#### Вычисление основной частоты для прямоугольных рам по методу Релея

Как видно из изложенного выше точного метода для определения частот колебаний плоских рам, применение его требует громоздких вычислений, и в случае большого количества стержней вычисление почти невыполнимо без вычислительных машин.

Применение метода деформаций и метода сил к расчету на колебания рам изложено в книге В. Г. Чудновского [114].

Однако на практике во многих случаях надо знать лишь первые частоты колебаний, в частности наименьшую — основной тон.

При определении основной частоты, как мы видели раньше в формуле (5.1), хороший результат дает энергетический метод Релея, поэтому применим его к рамным конструкциям [44, 100].

Согласно основной идее этого метода (5.1), для нахождения низшей частоты системы необходимо приложить к раме систему сил такого вида, чтобы под действием этой системы сил получалась деформация, примерно соответствующая динамической при свободных колебаниях с этой частотой.

Затем, вычисляя максимальную потенциальную энергию  $V_{\max}$  и максимальную приведенную кинетическую энергию  $T_{\max}$ , получим для квадрата основной частоты значение

$$\omega^2 = \frac{V_{\max}}{T_{\max}}. \quad (7.16)$$

Остановимся сперва на простейшем случае прямоугольной рамы, которая была изучена выше с помощью точного метода.

**Вертикальные колебания прямоугольной рамы.** Для вычисления частоты колебаний возьмем искривленную форму рамы, соот-

ветствующую загрузке ригеля распределенной нагрузкой (см. рис. 7.4). Изгибающие моменты  $M$ , действующие на ригель и стойку, будут

$$M_b = M_c = -\frac{ql^2}{6(k+2)}; \quad M_a = M_d = \frac{ql^2}{12(k+2)},$$

где

$$k = \frac{J_1 h}{J_2 l}.$$

Уравнение изогнутой оси ригеля

$$y_1(x, t) = Y_1(x) \cos \omega t,$$

где

$$Y_1 = \frac{M_b x (l^2 - x^2)}{6EJ_1 l} + \frac{M_c x (l - x) (2l - x)}{6EJ_1 l} + \\ + \frac{ql^4}{24EJ_1} \left( \frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right).$$

Подставляя вместо момента  $M$  его значение и выбирая за обобщенную координату прогиб ригеля  $f$  посередине, можем записать уравнение изогнутой оси ригеля в виде

$$Y_1 = f \frac{Y_1}{f} = f \left[ \frac{16(k+2)}{5k+2} \left( \frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) - \right. \\ \left. - \frac{32}{5k+2} \cdot \frac{x}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right]. \quad (7.17)$$

Уравнение изогнутой оси стойки

$$y_2(x, t) = Y_2(x) \cos \omega t,$$

где

$$Y_2 = \frac{M_b x (h^2 - x^2)}{6EJ_2 h} + \frac{M_a x (h - x) (2h - x)}{6EJ_2 h} + \frac{ql^2 (h - x) x^2}{24h (k + 2) EJ_2}.$$

Если введем в выражение изогнутой оси координату  $f$ , то

$$Y_2 = f \frac{16(h-x)x^2 k}{(5k+2)h^2 l}. \quad (7.18)$$

Максимальная потенциальная энергия двух стоек

$$V_2 = 2 \frac{EJ_2}{2} f^2 \int_0^h \left( \frac{d^2 Y_2}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{32^2 k^2 EJ_2}{(5k+2)^2 h^2} f^2. \quad (7.19)$$

Потенциальная энергия ригеля

$$V_1 = \frac{EJ_1 f^2}{8(5k+2)^2} \int_0^l \left[ 3 \cdot 128(k+2) \left( \frac{x^2}{l^4} - \frac{x}{l^3} \right) + \frac{128}{l^2} \right]^2 dx = \\ = \frac{64^2 \cdot 5(3k^2 + 2k + 2) EJ_1}{(5k+2)^2 l^3} f^2. \quad (7.20)$$

Максимальная кинетическая энергия двух стоек

$$T_{\max} = T_2,$$

где

$$\begin{aligned} T_2 &= 2 \frac{\rho F_2}{2} f^2 \int_0^h Y_2^2 dx = \rho F_2 \frac{16^2 k^2 f^2}{(5k+2)^2 h^4 l^2} \int_0^h (h-x)^2 x^4 dx = \\ &= \frac{16^2 k^2 h^3 \rho F_2}{(5k+2)^2 105 l^2} f^2. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Аналогичным образом получим для ригеля

$$T_1 = \rho F_1 l \frac{16^2 \cdot 5 (31k^2 + 22k + 4)}{63 (5k+2)^2} f^2. \quad (7.22)$$

При наличии массы  $m$  к кинетической энергии стоек и ригеля надо добавить еще максимальную кинетическую энергию массы  $T_{\max} = T$ , где

$$T = \frac{1}{2} m f^2. \quad (7.23)$$

В случае, если с ригелем связана еще равномерно распределенная нагрузка массой  $Q = ql$ , то в выражение для  $T_1$  вместо  $\rho F_1 l$  необходимо подставить  $\rho F_1 l (1 + e)$ , где

$$e = \frac{Q}{\rho F_1 l}.$$

Для частоты колебаний согласно формуле (7.16) после подстановки значений  $V$  и  $T$  в формулы (7.20)—(7.23) получим

$$\omega = \sqrt{\frac{1008 (3k^2 + 7k + 2)}{(31k^2 + 22k + 4) (1 + e) + 12s^2 k^2 \beta + \frac{315}{128} (5k + 2)^2 \alpha} \cdot \frac{EJ_1}{\rho F_1 l^4}}, \quad (7.24)$$

где

$$(G = mg); \quad \frac{h}{l} = s; \quad \beta = \frac{\gamma F_2 h}{\gamma F_1 l} = \frac{q_2}{q_1}; \quad \alpha = \frac{G}{q_1};$$

число колебаний

$$n = \frac{60}{2\pi} \omega.$$

Выше при определении частоты колебаний была взята форма изгиба рамы, соответствующая равномерно распределенной нагрузке. Аналогичным образом можно найти выражение для частоты, задавшись другой формой изгиба, например, от действия сосредоточенной нагрузки (рис. 7.6).

Для этого случая получим

$$\omega = \sqrt{\frac{105 \cdot 64 \cdot (2k+1)(k+2)}{(136k^2 + 117k + 26)(1+e) + 48s^2 k^2 \beta + 70(2k+1)^2 \alpha} \cdot \frac{EJ_1}{F_1 \rho l^4}} \quad (7.25)$$

Пр и м е р. Рассмотрим двухстоечную раму со следующими данными:

$$h = 4,5 \text{ м}; \quad l = 3,0 \text{ м}; \quad F_1 = F_2 = 0,80 \times 0,80 \text{ м}^2; \quad J_1 = J_2 = \frac{0,80^4}{12};$$

$$e = 0; \quad s = \frac{h}{l} = 1,5; \quad \beta = 1,5; \quad q_1 = 4,61 \cdot 10^3 \text{ кг}; \quad G = 9,2 \cdot 10^3 \text{ кг};$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2; \quad g\rho = \gamma = \frac{1}{g} 2,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad k = \frac{J_1 h}{J_2 l} = \frac{4,5}{3} = 1,5.$$

Применяя формулу (7.24), получим

$$n = 3945 \text{ кол/мин.}$$

Если применять формулу (7.25), то получим  $n = 3930 \text{ кол/мин}$ . Точное число колебаний основного тона, найденное с помощью уравнения частоты (7.10),  $n = 3820 \text{ кол/мин}$ .

Отклонение от точного решения получается порядка 3—3,3%, причем значение  $n$  больше точного, что, как отмечалось выше, и следовало ожидать при применении способа Рейля.

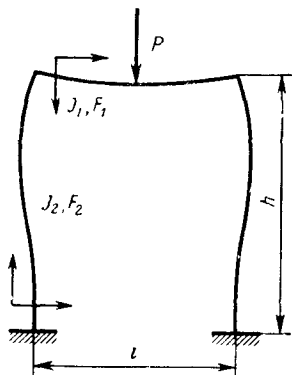


Рис. 7.6

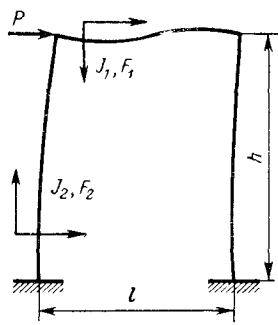


Рис. 7.7

Горизонтальные колебания. Для определения основной частоты горизонтальных колебаний двухстоечной рамы можно, например, использовать формулу изгиба, соответствующую действию сосредоточенной силы  $P$ , приложенной к верхнему узлу рамы (рис. 7.7).

Уравнение изогнутой оси стойки

$$Y_2 = \frac{Px^2}{2EJ_2} \left( \frac{h}{2} - \frac{x}{3} \right) - \frac{M_b}{2EJ_2} x^2,$$

где

$$M_b = -\frac{P}{2} \cdot \frac{3k}{1+6k},$$

или

$$Y_2 = f \frac{3(1+3k)hx^2 - (1+6k)x^3}{(2+3k)h^3},$$

где  $f$  — прогиб на конце стойки.

Уравнение изогнутой оси ригеля от действия моментов  $\pm M$  будет

$$Y_1 = \frac{Ph}{12EJ_1} \cdot \frac{3k}{1+6k} (l^2x - 3lx^2 + 2x^3) = f \frac{3(l^2x - 3lx^2 + 2x^3)}{hl^2(2+3k)}.$$

Потенциальная энергия рамы

$$V = \frac{P}{2} f.$$

Приведенная кинетическая энергия двух стоек  $2T_2$  и ригеля  $T_1$ :

$$\begin{aligned} T &= 2 \frac{\rho F_2}{2} \int_0^h Y_2^2(x) dx + \frac{\rho F_1}{2} \int_0^l Y_1^2(x) dx = \\ &= \left[ \frac{\rho h F_2}{35} \cdot \frac{33 + 123k + 117k^2}{(2+3k)^2} + \frac{9\rho h F_1 l^3}{420(2+3k)^2 h^2} \right] f^2. \end{aligned}$$

Помимо того, необходимо учесть приведенную кинетическую энергию горизонтального перемещения массы  $m$ , связанной со стойкой, и энергию ригеля, т. е.

$$T_3 = \frac{1}{2} (m + \rho F_1 l) f^2.$$

Следовательно, согласно формуле (7.16) получим

$$\omega = \sqrt{\frac{210(2+15k+18k^2)}{33+123k+117k^2 + \frac{3}{4\beta s^2} + 17,5(2+3k)^2 \frac{1+\alpha}{\beta}} \cdot \frac{EJ_2}{q_2 h^3}}, \quad (7.26)$$

где

$$q_2 = \rho h F_2; \quad q_1 = \rho l F_1; \quad \beta = \frac{q_2}{q_1}; \quad \frac{h}{l} = s; \quad \alpha = \frac{G}{q_1}.$$

Пр и м е р. Рассмотрим раму с размерами, указанными на стр. 186. Точное значение числа колебаний основного тона было подсчитано ранее:

$$n = 452 \text{ кол/мин.}$$

**Коэффициенты для определения частот двухстоечных рам  
с переменным сечением элементов**

<i>n</i>	Отношение уширения <i>a</i> к ширине стойки <i>d<sub>1</sub></i>							<i>a<sub>i</sub>'b<sub>i</sub></i>
	0,1	0,20	0,30	0,40	0,60	0,80	1,00	
0,1	0,07	0,14	0,23	0,32	0,54	0,83	1,15	<i>a<sub>1</sub>'</i>
	0,09	0,19	0,31	0,44	0,74	1,11	1,56	<i>a<sub>0</sub>'</i>
	0,52	1,12	1,79	2,50	2,49	5,72	9,06	<i>a<sub>1</sub>'</i>
	0,74	1,39	2,45	3,43	6,26	9,41	13,20	<i>a<sub>2</sub>'</i>
0,2	0,106*	0,229	0,369	0,526	0,901	1,37	1,93	<i>a<sub>1</sub>'</i>
	0,17	0,34	0,51	0,87	1,36	1,96	2,93	<i>a<sub>0</sub>'</i>
	0,94	1,87	2,90	4,60	7,64	11,33	16,56	<i>a<sub>1</sub>'</i>
	1,32	2,61	4,05	6,45	10,70	15,96	23,40	<i>a<sub>2</sub>'</i>
0,3	0,130	0,281	0,450	0,650	1,120	1,72	2,41	<i>a<sub>1</sub>'</i>
	0,24	0,41	0,81	1,15	1,97	2,95	4,14	<i>a<sub>0</sub>'</i>
	1,27	2,72	4,46	8,79	10,65	16,08	23,24	<i>a<sub>1</sub>'</i>
	—	—	0,04	0,05	0,07	0,10	0,12	<i>b<sub>1</sub>'</i>
	1,71	3,69	5,92	7,84	13,71	22,04	31,50	<i>a<sub>2</sub>'</i>
	—	—	0,05	0,07	0,19	0,14	0,17	<i>b<sub>2</sub>'</i>
0,4	0,144	0,310	0,502	0,721	1,25	1,91	2,72	<i>a<sub>1</sub>'</i>
	—	—	—	—	—	—	0,019	<i>b<sub>1</sub>'</i>
	0,28	0,63	1,16	1,44	2,46	3,67	5,30	<i>a<sub>0</sub>'</i>
	—	—	—	—	—	0,07	0,09	<i>b<sub>0</sub>'</i>
	1,52	3,29	5,36	7,84	13,81	21,80	27,47	<i>a<sub>1</sub>'</i>
	—	0,10	0,14	0,19	0,29	0,38	0,47	<i>b<sub>1</sub>'</i>
0,4	1,99	4,26	6,83	8,36	16,60	28,28	36,6	<i>a<sub>2</sub>'</i>
	—	0,13	0,19	0,25	0,38	0,54	0,63	<i>b<sub>2</sub>'</i>

Значение постоянных, входящих в приближенную формулу (7.26),

$$k = \frac{0,710 \cdot 6,86}{0,320 \cdot 4,60} = 3,31; \quad s = \frac{6,86}{4,60} = 1,48;$$

$$\beta = \frac{q_2}{q_1} = \frac{32,02}{18,48} = 1,73; \quad \alpha = \frac{148,3}{18,48} = 8,05;$$

$$\omega = 47,7 \text{ }^1/\text{сек}; \quad n = 9,55\omega = 455 \text{ кол/мин};$$

Отклонения от точного значения всего лишь ~0,7%.

Метод Рейля без всяких затруднений может быть применен и к случаю, когда стойки или ригель рамы будут переменного сечения.

Форму изгиба рамы в этом случае можно оставить прежней, лишь при вычислении потенциальной и кинетической энергии рамы необходимо взять переменные значения  $J$  и  $F$ . В частности, если стойка внизу имеет уширение (рис. 7.8), то для основной частоты мы получим следующие значения:

для вертикальных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1008 [3k^2 + (7 + a_1)k + 2]}{(31k^2 + 22k + 4)(1 + e) + 12s^2k^2\beta(1 + b_1) + 2,46(5k + 2)^2\alpha} \cdot \frac{EJ_1}{F_1\rho l^4}}; \quad (7.27)$$

для горизонтальных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{210 [2 + a'_0 + (15 + a'_1)k + (18 + a'_2)k^2]}{33 + b'_0(123 + b'_1)k + (117 + b'_2)k^2} \cdot \frac{EJ_2}{F_2\rho h^4} + \frac{3}{4\beta s^2} 17,5(2 + 3k)^2 \frac{1 + \alpha}{\beta}}. \quad (7.28)$$

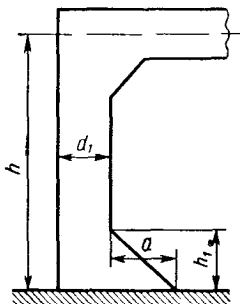


Рис. 7.8

Значение коэффициентов  $a$  и  $b$  в зависимости от отношений

$$m = \frac{h_1}{h}; \quad l = \frac{a}{d_1}$$

может быть взято из табл. 7.3.

#### Вычисление основной частоты для многоярусной рамы по методу Релея

В предыдущем с помощью метода Релея были вычислены основные частоты колебаний прямоугольной рамы, причем частоты колебаний, полученные по этому методу, мало отличались от частот, вычисленных по точному методу. Аналогичным образом метод Релея может быть применен и к более сложным случаям многоярусных и многопролетных рам.

При изучении колебаний многоярусных и многопролетных рам по-прежнему можно рассматривать отдельно горизонтальные и вертикальные колебания.

Вертикальные колебания плоской рамной конструкции могут возникнуть лишь при симметричной форме рамы и при симметрии нагрузки. При этом условии узлы рамы не будут смещаться. Кроме того, частоты вертикальных колебаний плоских рам обычно значительно выше частот горизонтальных колебаний, при которых узлы рамы смещаются в горизонтальном направлении. Поэтому обычно горизонтальные колебания имеют большее практическое значение, чем вертикальные колебания, так как при сравнительно низких числах оборотов механизмов, устанавливаемых в каркас-



ных зданиях рамной конструкции, могут в первую очередь появиться горизонтальные колебания.

В дальнейшем остановимся на определении основной частоты горизонтальных колебаний рамной конструкции по методу Рейля.

При определении основной частоты плоской рамы поступаем так, как это было проделано выше для двухстоечной рамы. Загружаем раму в узлах системой сил такого вида (рис. 7.9), чтобы под действием их получалась деформация рамы, примерно соответствующая динамической при свободных колебаниях для основной частоты.

Значение частоты основного тона может быть с достаточной точностью вычислено, если, например, к узлам рамы приложим систему сосредоточенных равных нагрузок (или нагрузок, соответствующих ветровой нагрузке), затем найдем перемещения и моменты для узла рамы, хотя бы по методу перемещений.

Зная смещения каждого из узлов рамы и значения моментов, можем найти максимальную приведенную кинетическую  $T$  и потенциальную  $V$  энергии рамы, а следовательно, и частоту колебания основного тона по формуле

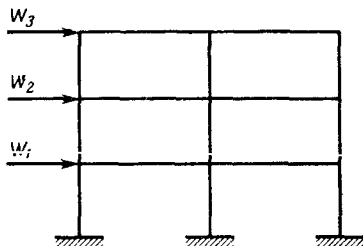


Рис. 7.9

$$\omega = \sqrt{\frac{V_{\max}}{T_{\max}}}; \quad (7.29)$$

число собственных колебаний

$$n = \frac{60}{2\pi} \omega = 9,55\omega \text{ кол/мин.}$$

Обозначим (см. рис. 7.8):

$l_c, l_p$  — длины стоек и ригелей;

$q_c, q_p$  — массы их на погонную единицу длины;

$J_c, J_p$  — моменты инерции;

$\delta_c \cos \omega t$  — полные горизонтальные смещения узлов рамы;

$Y_c(x) \cos \omega t$  — поперечные смещения осей стоек рамы;

$Y_p(x) \cos \omega t$  — вертикальные смещения осей ригелей рамы;

$W$  — горизонтальные силы, приложенные в узлах рамы;

$G_{p,c}$  — сосредоточенные массы, связанные с ригелями;

$G_c$  — массы всех нагрузок, которые необходимо сосредоточить в узлах рамы;

$x_{p,c}$  — абсциссы точек приложения масс.

При этом массы распределенных нагрузок, связанных с ригелями, следует отнести к  $q_p$ .

Под  $G_{p,c}$  понимаются все сосредоточенные грузы, связанные с ригелями рамы, как-то: массы механизмов, массы ребер и т. д.

Что же касается нагрузок  $G_c$ , то сюда необходимо включить все нагрузки, обладающие инерцией, связанные с узлами данного яруса, т. е. массы продольных балок в части, приходящейся на данную раму, массы ригелей, перекрытий, а также указанные грузы  $G_{p,c}$ .

Горизонтальные силы  $W$ , конечно, сюда входить не должны. Максимальная потенциальная энергия рамной конструкции

$$V = \frac{1}{2} \sum W_{\delta_c}. \quad (7.30)$$

Приведенная кинетическая энергия рамы

$$T = T_c + T_p + \frac{1}{2} \sum_c G_c \delta_c^2 + \frac{1}{2} \sum \sum G_{p,c} Y_p^2(x_{p,c}), \quad (7.31)$$

где  $T_c$  — кинетическая энергия стоек;

$T_p$  — кинетическая энергия ригелей.

Максимальная приведенная кинетическая энергия какой-либо стойки (например, см. рис. 7.9) может быть подсчитана по формуле

$$T_c = \frac{\rho F_c}{2} \int_0^{l_c} Y_c^2(x) dx, \quad (7.32)$$

где уравнение изогнутой оси стойки

$$Y_c = \delta_{c-1} + \frac{\delta_c - \delta_{c-1}}{l_c} x + \frac{M_{2c} x (l_c^2 - x^2)}{6 l_c E J_c} - \frac{M_{1c} x (2 l_c^2 - 3 l_c x + x^2)^2}{6 l_c E J_c}. \quad (7.33)$$

После подстановки значения  $Y_c(x)$  в выражение (7.32) и проведения вычислений получим следующее значение максимальной приведенной кинетической энергии стойки:

$$T_c = [T_c^{(1)} + T_c^{(2)} + T_c^{(3)}] \frac{q}{2}; \quad (7.34)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} T_c^{(1)} &= l_c \left[ \frac{1}{2} (\delta_{c-1}^2 + \delta_c^2) - \frac{1}{6} (\delta_c - \delta_{c-1}) \right]^2; \\ T_c^{(2)} &= \frac{l_c^3}{E J_c} [0,083333 \delta_{c-1} (M_{2c} - M_{1c}) + \\ &+ (\delta_c - \delta_{c-1}) (0,044445 M_{2c} - 0,038888 M_{1c})]; \\ T_c^{(3)} &= \frac{0,0021164 l_c^5}{(E J_c)^3} [M_{1c}^2 + M_{2c}^2 - 1,93748 M_{1c} M_{2c}] q_c. \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

\* В выражении (7.33) для моментов, действующих в углах стойки, приняты направления, обратные по сравнению с указанными для ригеля на рис. 7.10.

Приведенную кинетическую энергию ригелей (рис. 7.11) получаем из предыдущей формулы, полагая в ней  $\delta_{c-1} = \delta_c = 0$  и заменяя  $q_c, l_c, M_{1c}, M_{2c}$  соответственно через  $q_p, l_p, M_{1p}$  и  $M_{2p}$ , а именно:

$$T_p = \frac{0,0021164q_p l_p^5}{2(EJ_p)^2} (M_{1p}^2 + M_{2p}^2 - 1,93748M_{1p}M_{2p}). \quad (7.36)$$

Кинетическая энергия ребер, связанных с перекрытием (предполагаем, что имеются два ребра массой  $G_l, G_p$ , расположенных на одинаковых расстояниях  $\frac{l_p}{3}$  и  $\frac{2l_p}{3}$ ), будет

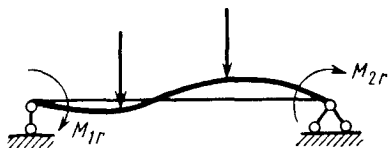


Рис. 7.10

$$T_p = T_{vl} + T_{vp}, \quad (7.37)$$

где

$$T_{vl} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_l}{2} Y_{vl}^2 = \frac{G_l}{2} \cdot \frac{l_p^4}{(EJ_2)^2} (0,0038104M_l^2 + 0,002438M_p^2 - 0,0060962M_lM_p);$$

$$T_{vp} = \frac{G_l}{2} Y_{vp}^2 = \frac{G_p}{2} \cdot \frac{l_p^4}{(EJ_2)^2} (0,0024384M_l^2 + 0,0038104M_p^2 - 0,0060962M_lM_p).$$

При вычислении кинетической энергии стоек во многих случаях для упрощения вычислений можно пользоваться с достаточной точностью методом приведения масс стоек  $m_c$ , распределенных по длине, к массам, сосредоточенным в узлах рамы  $M_k$ . Для случая абсолютно жестких ригелей, равных высот стоек и масс  $m_c = m$  можно принять  $M_k = km$ .

Ниже приведены значения коэффициентов  $k$ :

Ярус	Коэффициент	Ярус	Коэффициент
I	0,372	IV	0,774
II	0,592	V	0,815
III	0,708	VI	0,845

Для  $n$ -го яруса

$$k = 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{8n^2}.$$

При этом коэффициент  $k$  подсчитан в предположении, что нулевая точка находится посередине высоты яруса  $l$ . Если нулевая

точка находится в пределах  $0,30—0,6l$ , то коэффициент  $k$  мало меняется. С достаточной точностью можно также при подсчете кинетической энергии рамы приведенные к узлам массы стоек взять по формулам

$$M_1 = 0,30m_1 + 0,50m_2; \quad M_i = k_i (m_i + m_{i+1}), \quad (7.38)$$

где коэффициент  $k_i = 0,50$  ( $i = 2, 3, \dots$ ).

Кинетическая энергия стоек в случае, если массы их приведены к узлам, подсчитывается по формуле

$$T_c = \frac{1}{2} \sum M_c \delta_c^2.$$

Ранее были рассмотрены горизонтальные колебания плоских рам, частота которых обычно меньше частоты симметричных колебаний, если таковые возможны.

Подсчет частоты вертикальных колебаний для простейших рам может быть выполнен без затруднений с помощью метода Релея. Необходимо лишь определить значения моментов и подсчитать кинетическую [с помощью приведенных формул (7.35) и (7.37)] и потенциальную энергии системы.

Выше уже отмечалось, что метод Релея дает значения частот несколько выше, чем точный метод интегрирования уравнений.

Для простейших рам можно найти значения частот с недостатком, так что в этом случае граница, в которой лежит истинное значение частоты колебаний, определяется без затруднения.

Нижняя граница числа колебаний в 1 мин может быть с достаточным приближением подсчитана по формуле

$$n = \frac{300}{\sqrt{f}}, \quad (7.39)$$

где  $f = \delta^{(1)} Q_1$  в см для вертикальных колебаний;  
 $f = \delta^{(2)} Q_2$  в см для горизонтальных колебаний,  
 причем

$$\delta^{(1)} = \frac{2k+1}{96(k+2)} \cdot \frac{l^3}{EJ_1};$$

$$\delta^{(2)} = \frac{3k+2}{12(6k+1)} \cdot \frac{h^3}{EJ_2}; \quad k = \frac{J_1 h}{J_2 l};$$

$$Q_1 = G + \frac{5+2k}{5(2+k)} q_1 + \frac{4(4+k)k}{35(1+2k)} \cdot \frac{h^2}{l^2} 2q_2;$$

$$Q_2 = G + q_1 + \frac{1+2,4k}{2(2+3k)} 2q_2 + \frac{k-0,821}{20k(3k+2)} \cdot \frac{l^2}{h^2 q_1}.$$

## Вычисления частот колебаний обертонов для рам с абсолютно жесткими ригелями

В некоторых случаях знание основного тона недостаточно и необходимо вычислить, кроме основного тона, также по крайней мере первый обертон. Выше был изложен общий метод составления уравнения частоты, применение которого в случае сложных рам затруднительно. В том случае, когда ригели можно считать абсолютно жесткими, составление уравнения частоты значительно упрощается.

Необходимо отметить, что во многих случаях жесткость поперечных ригелей значительна, в особенности если учитывать влияния перекрытий. Так как определение частот колебаний при абсолютно жестких ригелях значительно проще, то возникает вопрос, при каком соотношении жесткостей можно рассматривать раму как раму с абсолютно жесткими ригелями. В общем виде провести такое исследование трудно.

Для выяснения влияния жесткости ригелей был проведен ряд сравнительных расчетов для нескольких рам [100]. Эти расчеты показали, что с увеличением жесткости ригелей число колебаний стремится к предельным значениям числа колебаний для рам с абсолютно жесткими ригелями.

При вычислении частот такой рамы можно раму заменить эквивалентно  $n$ -ярусной стойкой со ступенчатым изменением момента инерции. В узлах этой стойки можно сосредоточить массы ригелей, перекрытий и нагрузок на них.

Для весомой стойки уравнение частоты получим, если возьмем решение дифференциального уравнения

$$EJ_i \frac{\partial^4 y_i}{\partial x_i^4} + (1 + e_i) \rho F_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = 0 \quad (7.40)$$

для каждой стойки и напомним условия сопряжения для узлов стоек.

В дальнейшем обозначим (рис. 7.11):

$J_i$  — момент инерции стойки в  $i$ -м ярусе;

$b_i$  — высота сечений стойки в  $i$ -м ярусе;

$c_i$  — ширина сечения стойки в  $i$ -м ярусе;

$l_i$  — высота стойки;

$F_i$  — площадь поперечного сечения;

$m_i$  — масса, связанная с верхним концом  $i$ -й стойки ( $G_i = m_i g$ );

$q_i$  — масса  $i$ -й стойки ( $q_i = \rho F_i l_i$ );  $\alpha_i = \frac{G_i}{q_i}$ ;

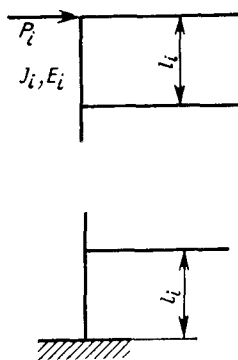


Рис. 7.11

$\omega$  — частота колебаний,

$$\omega = \frac{a_i r_i^2}{l_i^2} = \frac{r_i^2}{l_i^2} \sqrt{\frac{EJ_i}{F_i \rho}};$$

$$\frac{l_i}{l_{i+1}} = n_i; \quad \frac{J_i}{J_{i+1}} \cdot \frac{l_{i+1}}{l} = k_i; \quad \delta_{i+1} = \frac{k_{i+1}}{n_i^2} \cdot \frac{r_{i+1}^3}{r_i^3};$$

$$r_i = d_i r_1; \quad d_i^2 = \frac{l_i^2}{l_1^2} \sqrt{\frac{F_i J_1}{F_1 J_i}}.$$

При этом для стоек прямоугольного сечения

$$\delta_{i+1} = \frac{b_{i+1}^{3/2}}{b_i^{3/2}} \cdot \frac{c_{i+1}}{c_i}; \quad d_i^2 = \frac{l_i^2}{l_1^2} \cdot \frac{b_1}{b_i}.$$

Решение уравнения (7.40) берем в виде

$$y_i(x, t) = \bar{Y}_i(x) \cos \omega t,$$

где  $\bar{Y}_i(x)$  имеет значение, приведенное в формуле (7.5).

Для получения уравнения частоты необходимо составить следующие условия сопряжения:

связь с жесткими ригелями

$$Y_i'(0) = Y_i'(1) = 0;$$

равенство прогибов стоек в узлах

$$Y_{i-1}(1) = Y_i(0).$$

Условия для перерезывающих сил:

$$EJ_i \frac{\partial^3 y_i}{\partial x^3} - FJ_{i+1} \frac{\partial^3 y_{i+1}}{\partial x^3} = m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} \text{ для промежуточных узлов};$$

$$EJ_n \frac{\partial^3 y_n}{\partial x^3} = m_n \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} \text{ для верхнего узла.}$$

Удовлетворяя этим условиям и составляя определитель из коэффициентов при произвольных постоянных, получим уравнение частоты для определения  $r_i$  (все  $r_i$  выражаются в зависимости от  $r_1$ ).

Это уравнение имеет вид

$$D(r) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.41)$$

Постоянные  $a_{ki}$  имеют следующие значения:  
для последней строки

$$\left. \begin{aligned} a_{ni} &= [\alpha_n r_n \psi_n(1) + \mu_n(1)] \gamma_n^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \\ a_{nn} &= v_n(1) + \alpha_n r_n \varphi_n(1); \end{aligned} \right\} (7.42)$$

для остальных горизонталей

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \delta_{i+1} \mu_{i+1}(0) \gamma_{i+1}^{(k)} - \gamma_i^{(k)} [\mu_i(1) + \alpha_i r_i \psi_i(1)] \\ &\quad (k \neq i; \quad k \neq i+1); \\ a_{ii} &= \mu_{i+1}(0) \delta_{i+1} \gamma_{i+1}^{(1)} - v_i^{(1)} - \alpha_i r_i \varphi_i(1) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \\ a_{i, i+1} &= v_{i+1}(0) \delta_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \end{aligned} \quad (7.43)$$

здесь

$$\begin{aligned} \psi_i(0) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} r_i - \cos r_i); & \psi_i(1) &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} r_1 \sin r_1; \\ \mu_i(0) &= -\frac{1}{2} (\operatorname{sh} r_i - \sin r_i); & \mu_i(1) &= \frac{1}{2} (\sin r_i \operatorname{ch} r_i - \cos r_i \operatorname{sh} r_i); \\ & & \varphi_i(1) &= \frac{1}{2} (1 - \operatorname{ch} r_i \cos r_i); \\ v_i(0) &= -\frac{1}{2} (\operatorname{sh} r_i + \sin r_i); & v_i(1) &= -\frac{1}{2} (\sin r_i \operatorname{ch} r_i + \\ & & & \quad + \cos r_i \operatorname{sh} r_i). \end{aligned}$$

Значения коэффициентов  $\gamma_i^{(k)}$  будут

$$\begin{aligned} \gamma_i^{(k)} &= \frac{\psi_{k+1}(1) \psi_{k+2}(1) \dots \psi_{i-1}(1)}{\psi_{k+1}(0) \psi_{k+2}(0) \dots \psi_i(0)} \varphi_k(1) \quad (k = 1, 2, \dots, i-2); \\ \gamma_i^{(i-1)} &= \frac{\varphi_{i-1}(1)}{\varphi_i(0)}, \end{aligned}$$

причем

$$\gamma_{i+1}^{(k)} = \gamma_i^{(k)} \frac{\psi_i(1)}{\psi_{i+1}(0)} \quad (k = 1, 2, \dots, i-1).$$

Развертывая определитель (7.41), получим для трехъярусной стойки

$$a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) + a_{12} (a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}) = 0; \quad (7.44)$$

для четырехъярусной

$$\begin{aligned} (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) (a_{33} a_{44} - a_{34} a_{43}) + a_{11} a_{23} (a_{34} a_{42} - a_{44} a_{32}) + \\ + a_{12} a_{23} (a_{31} a_{44} - a_{34} a_{41}) = 0. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Пример. Возьмем приведенную железобетонную стойку четырехъярусной рамы. Размеры ее и приведенные нагрузки указаны на рис. 7.12. Число колебаний определяется формулой

$$n = \frac{60}{2\pi} r^2 \sqrt{\frac{EJ_1}{\rho F_1 l^4}} = 377 r_1^2.$$

Вычисляем величину определителя (7.45) для нескольких значений:

$$r = 0,400 \quad (n = 60,4 \text{ кол/мин});$$

$$r = 0,460 \quad (n = 79,8 \text{ » });$$

$$r = 0,650 \quad (n = 160 \text{ » });$$

$$r = 0,750 \quad (n = 212 \text{ » }).$$

Для вычисления коэффициентов определителя составляем для каждого значения  $r$  соответствующую таблицу. Например, для  $r = 0,400$  составлена табл. 7.4.

Пользуясь этими значениями, вычислим величины коэффициентов

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{42}, a_{43}, a_{44} \quad (7.42), (7.43):$$

$$a_{11} = 0,396; a_{22} = 0,642; a_{33} = 0,620; a_{44} = -0,482;$$

$$a_{12} = -0,464; a_{23} = -0,453; a_{34} = -0,513;$$

$$a_{21} = -0,00440; a_{31} = -0,00803; a_{32} = -0,0653;$$

$$a_{41} = -0,0238; a_{42} = 0,201; a_{43} = 0,170.$$

Подставляя  $a_{11}, \dots, a_{13}$  в уравнение (7.45), получим значение определителя

$$D(0,400) = -0,274.$$

Аналогичным образом получим

$$D(0,460) = 0,0573; \quad D(0,650) = -0,56; \quad D(0,750) = -6,93.$$

На основании этих значений и рассмотрения хода изменения величин, входящих в  $D$ , можно определить приблизительно числа колебаний

$$n_1 = 75 \text{ кол/мин}; \quad n_2 = 165 \text{ кол/мин}.$$

Для большего уточнения значения  $n$  можно было бы взять еще промежуточные значения  $r$ .

Т а б л и ц а 7.4

Значения величин, входящих в коэффициенты определителя

$i$	$\alpha_i = \frac{P_i}{\rho_i F_i l_i}$	$l_i$	$b_i^2 c_i$	$d_i$	$r_i d_i = r_i$	$\rho_i$	$\mu_i^{(0)}$
1	5,68	3,43	0,55 × 0,70	1	0,400	—	-0,0107
2	2,15	5,57	0,50 × 0,55	1,702	0,681	0,678	-0,0525
3	4,85	5,07	0,45 × 0,45	1,635	0,654	0,697	-0,0466
4	15,4	5,07	0,40 × 0,40	1,730	0,692	0,742	-0,0553

$i$	$\nu_i^{(0)}$	$\nu_i^{(1)}$	$\Phi_i^{(1)}$	$\Psi_i^{(0)}$	$\Psi_i^{(1)}$	$\mu_i^{(1)}$	$a_i r_i \Phi_i^{(1)}$
1	-0,400	-0,400	0,00213	0,0800	0,0800	0,0214	0,00484
2	-0,683	-0,676	0,0180	0,232	0,232	0,105	0,0263
3	-0,655	-0,650	0,0152	0,214	0,214	0,0932	0,0482
4	-0,694	-0,687	0,0192	0,240	0,239	0,111	0,205



$i$	$\nu_i^{(1)} +$ $+ a_i r_i \Psi_i^{(1)}$	$a_i r_i \Psi_i^{(1)}$	$\mu_i^{(1)} +$ $+ a_i r_i \Psi_i^{(1)}$	$\nu_i^{(1)}$	$\nu_i^{(2)}$	$\nu_i^{(3)}$
1	-0,396	0,182	0,203	—	—	—
2	-0,650	0,340	0,445	0,00918	—	—
3	-0,602	0,678	0,771	0,00995	0,0842	—
4	-0,482	2,56	2,67	0,00892	0,0753	0,0635

**Вычисление частот колебаний обертонов для плоских рам как систем с ограниченным числом степеней свободы**

Как видно из изложенного выше точного метода подсчета частот колебаний рамных конструкций, определение частот колебаний обертонов требует значительных, а для случаев многоярусных и многопролетных рам почти невыполнимых без ЭЦВМ вычислений. Поэтому изложить приближенный метод подсчета частот колебаний рам, основанный на применении уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.46)$$

где  $q_i$  — обобщенные координаты.

В том случае, если работа внешних сил определяется потенциальной функцией  $-V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , то

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0. \quad (7.47)$$

Для малых колебаний кинетическая  $T$  и потенциальная  $V$  энергии будут квадратичными функциями от  $q'$  и  $q$ .

Для того чтобы применить уравнения Лагранжа к определению частот горизонтальных колебаний плоских рам, предположим по-прежнему, что все массы перенесены в узлы, т. е. для  $i$ -го узла

$$m_i = m_i + k(m_{i-1,c} + m_{i,c}), \quad (7.48)$$

где  $k(m_{i-1,c} + m_{i,c})$  — масса верхней и нижней стоек, приведенная к  $i$ -му узлу.

Значение коэффициента  $k$  в данном случае зависит от формы кривой деформации рамы, т. е. от положения нулевых точек.

Приложим в узлах (рис. 7.13) систему сил  $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$ . Пользуясь методом деформаций, можно найти зависимости

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= c_{11}\delta_1 + c_{12}\delta_2 + \dots + c_{1n}\delta_n; \\ P_2 &= c_{21}\delta_1 + c_{22}\delta_2 + \dots + c_{2n}\delta_n; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ P_n &= c_{n1}\delta_1 + c_{n2}\delta_2 + \dots + c_{nn}\delta_n, \end{aligned} \right\} \quad (7.49)$$

где  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  — полные смещения узлов.

Вычислив потенциальную и кинетическую энергии рамы

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} P_1 \delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \delta_2 + \dots + \frac{1}{2} P_n \delta_n = \sum_{i,k} b_{ik} \delta_i \delta_k \\ T &= \frac{1}{2} m_1 \delta_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \delta_2'^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n \delta_n'^2 = \frac{1}{2} \sum m_k \delta_k'^2 \end{aligned} \right\} (7.50)$$

и подставив их в уравнения Лагранжа (7.47), получим систему уравнений вида

$$m_i \delta_i'' + \sum_{k=1}^n b_{ik} \delta_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7.51)$$

Разыскивая решение системы уравнений (7.51) в виде

$$\delta_i = A_i e^{\lambda t} \quad (7.52)$$

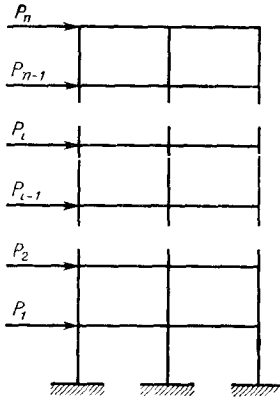


Рис. 7.13

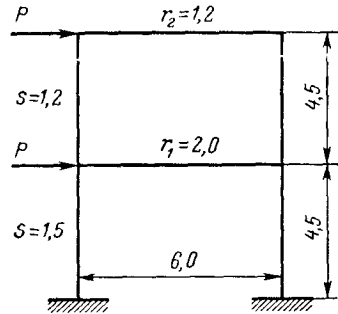


Рис. 7.14

и приравняв определитель, составленный из коэффициентов при \$A\_i\$, нулю, получим уравнение частоты, которое можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda^2 & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda^2 & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots & a_{nn} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (7.53)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{b_{11}}{m_1}, \quad a_{12} = -\frac{b_{12}}{m_1}, \dots, \\ &\dots \dots \dots \\ a_{n1} &= -\frac{b_{n1}}{m_n}, \quad a_{n2} = -\frac{b_{n2}}{m_n}, \dots \end{aligned}$$

Корни уравнения (7.53) \$\lambda\_k^2\$ все отрицательны, т. е. все решения чисто периодические. Развитие этого уравнения по степеням \$\lambda\$ производится по одному из общепринятых методов.

Пример. Возьмем двухъярусную раму с отношениями жесткостей, указанными на рис. 7.14.

По методу деформаций получим

$$9,40X_3 + 1,20X_6 + 2,00X_3 = 3 \left[ \frac{1,20}{h_2} (\delta_2 - \delta_1) + \frac{1,50}{h_1} \delta_1 \right];$$

$$4,80X_6 + 1,20X_3 + 1,20X_5 = 3 \frac{1,20}{h_2} (\delta_2 - \delta_1);$$

и дополнительные уравнения

$$3X_3 = \frac{6}{4,5} \delta_1 - \frac{4,5}{6} (P_1 + P_2);$$

$$2,4 (X_3 + X_6) = \frac{4,8}{4,5} ((\delta_2 - \delta_1) - \frac{4,5}{6} P_2).$$

Из этих уравнений получим

$$P_1 = 2,62\delta_1 - 1,02\delta_2;$$

$$P_2 = -1,24\delta_1 - 0,935\delta_2.$$

Потенциальная энергия рамы

$$V = \frac{1}{2} P_1 \delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \delta_2 = 1,31\delta_1^2 - 1,13\delta_1 \delta_2 + 0,467\delta_2^2;$$

кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} m_1 \delta_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \delta_2'^2.$$

После подстановки в уравнения Лагранжа (7.47) получим

$$m_1 \delta_1'' + 2,62\delta_1 - 1,13\delta_2 = 0;$$

$$m_2 \delta_2'' - 1,13\delta_1 + 0,935\delta_2 = 0.$$

Разыскивая решение этой системы в виде

$$\delta_1 = A \sin \omega t; \quad \delta_2 = B \sin \omega t,$$

после подстановки значений  $\delta_1, \delta_2$  получим систему

$$(2,62 - m_1 \omega^2) A - 1,13B = 0;$$

$$-1,13A + (0,935 - m_2 \omega^2) B = 0.$$

Приравняв определитель этой системы нулю, получим

$$m_1 m_2 \omega^4 - (0,935 m_1 + 2,62 m_2) \omega^2 - 1,17 = 0.$$

Из этого квадратного уравнения относительно  $\omega^2$  для заданных  $m_1$  и  $m_2$  получим две частоты колебаний:  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . В частности, для случая  $m_1 = m_2 = m$  получим

$$\omega_1 = \frac{0,376}{\sqrt{m}}; \quad \omega_2 = \frac{3,20}{\sqrt{m}}.$$

Для определения действительной частоты колебаний необходимо вместо  $\delta_2$  записать фактические прогибы. Если отнести, например,  $\omega_1, \omega_2$  к погонной жесткости нижней стойки  $\frac{EJ_1}{h}$ , то необходимо  $\delta_1$  и  $\delta_2$  умножить на

$$\frac{s_1 h_1}{EJ_1} = \frac{6,75}{EJ_1}.$$

Следовательно,

$$\omega_1 = \frac{0,376}{\sqrt{m_1}} \sqrt{\frac{EJ_1}{s_1 h_1}}, \quad \omega_2 = \frac{320}{\sqrt{m_1}} \sqrt{\frac{EJ_1}{s_1 h_1}}.$$

Аналогичным образом можно подсчитать и числа вертикальных колебаний плоских рам (рис. 7.15). Здесь несколько сложнее обстоит вопрос с приведением масс.

Возьмем, например, двухъярусную однопролетную раму. При пользовании методом Лагранжа необходимо все массы для подсчета энергии сосредоточить в определенных точках, в которых прикладываем систему сил (см. рис. 7.15).

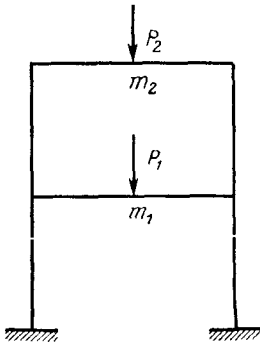


Рис. 7.15

При приведении масс для ригелей необходимо взять вместо распределенной нагрузки  $ql$  сосредоточенную  $\alpha ql$ .

Коэффициент  $\alpha$  будет меняться в зависимости от степени защемления в пределах 0,485—0,405, причем первое число относится к опертой балке, второе — к заделанной.

В среднем для коэффициента  $\alpha$  можно принять значение  $\alpha = 0,45$ . Помимо того, необходимо учесть приведенную массу стоек. В частности, для прямоугольной рамы необходимо учесть примерно лишь 6% веса обеих стоек. Таким образом, масса, связанная с ригелем и приведенная к середине последнего, будет

$$m = \frac{G}{g} + \alpha q_2 l + \beta q_1 h.$$

В случае, когда массы стоек будут одного порядка с массами ригелей и сосредоточенных нагрузок, такое приведение масс большой ошибкой не повлечет.

Сделав приведение масс, мы поступаем аналогично предыдущему. Загружаем раму (рис. 7.15) силами  $P_1$  и  $P_2$  и, рассчитывая раму, например, по методу угловых деформаций, находим зависимости между  $P_1$ ,  $P_2$  и  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ :

$$\begin{aligned} P_1 &= a_1 \delta_1 + b_1 \delta_2; \\ P_2 &= a_2 \delta_1 + b_2 \delta_2. \end{aligned}$$

Вычисляя значение кинетической и потенциальной энергии системы

$$T = \frac{1}{2} m_1 \delta_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \delta_2'^2,$$

$$V = \frac{1}{2} P_1 \delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \delta_2 = \frac{1}{2} a_1 \delta_1^2 + \frac{1}{2} (b_1 + a_2) \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{2} b_2 \delta_2^2,$$

после подстановки в уравнения Лагранжа получим систему двух уравнений, из которых можно найти частоты.

## Влияние перерезывающих сил и инерции поворота сечений на частоты колебаний рам

В гл. 4 было выявлено влияние перерезывающих сил и инерции поворота сечений на частоты колебаний простых балок.

Для рамных конструкций уравнение частоты с учетом этих факторов может быть получено с помощью общего метода составления уравнения частоты \*. Выведем уравнение частоты для простейших прямоугольных рам [100].

Вертикальные колебания прямоугольной рамы (см. рис. 7.4). В дальнейшем обозначим:

$J_2$  — момент инерции стойки;  
 $F_2$  — площадь поперечного сечения;

$$i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F_2}};$$

$J_1, F_1$  — те же величины для ригеля;

$q_1$  — масса ригеля;

$q_2$  — масса стойки;

$m$  — масса груза;

$$\frac{J_1 h}{J_2 l} = k; \quad \frac{h}{l} = \mu; \quad \beta_1^2 = \omega^2 \frac{q_1 l^3}{E J_1 g}; \quad \beta_2 = \beta_1 \mu \sqrt{\frac{q_2 k}{q_1}}; \quad \alpha = \frac{m}{q}.$$

Уравнение изогнутой оси стойки будет ( $\xi = \frac{x}{h}$ )

$$y_2(\xi, t) = Y_2(\xi) \cos \omega t = [A_2 Z_1(\xi) + B_2 Z_2(\xi) + C_2 Z_3(\xi) + D_2 Z_4(\xi)] \cos \omega t \quad \text{для } 0 \leq \xi \leq 1; \quad (7.54)$$

для ригеля  $\eta = \frac{x}{l}$

$$y_1(\eta, t) = Y_1(\eta) \cos \omega t = [A_1 Z_1(\eta) + B_1 Z_2(\eta) + C_1 Z_3(\eta) + D_1 Z_4(\eta)] \cos \omega t \quad \text{для } 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2}. \quad (7.55)$$

Значения функций  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  определяются формулой (4.82). Корни характеристического уравнения (4.19) обозначим: для ригеля

$$s_1 = -s_3; \quad s_2 = -s_4 = is;$$

для стойки

$$p_1 = -p_3; \quad p_2 = -p_4 = ip,$$

где

$$s_1 = \sqrt{-\frac{b_2}{2} + \sqrt{c_1 \beta_1^4 + \beta_1^2}}; \quad s = \sqrt{\frac{b_2}{2} + \sqrt{c_1 \beta_1^4 + \beta_1^2}};$$

$$p_1 = \sqrt{-\frac{b_2'}{2} + \sqrt{c_2 \beta_2^4 + \beta_2^2}}; \quad p = \sqrt{\frac{b_2'}{2} + \sqrt{c_2 \beta_2^4 + \beta_2^2}};$$

\* Влияние перерезывающих сил изучено также в работе: Белоус А. А. Колебания и статическая устойчивость плоских и пространственных рам. Расчет пространственных конструкций. Вып. III. М., Гостройиздат, 1965.

причем

$$b_2 = \frac{i_1^2}{l^2} \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \beta_1^2; \quad c_1 = \frac{i_1^4}{4l^4} \left( 1 - \frac{E}{k'G} \right)^2;$$

$$b_2' = \frac{i_2^2}{h^2} \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \beta_2^2; \quad c_2 = \frac{i_2^4}{4h^4} \left( 1 - \frac{E}{k'G} \right)^2.$$

Для получения уравнения частоты необходимо удовлетворить следующим условиям сопряжения:

а)  $Y_2(0) = Y_2'(0) = 0$  — нижний конец стойки закреплен;

б)  $Y_2(1) = 0$  — верхний конец стойки не перемещается;

в)  $Y_1(0) = 0$  — верхний конец ригеля не перемещается;

г)  $\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial Y_2(1)}{\partial \xi} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial Y_1(0)}{\partial \eta}$ ;

г')  $\frac{EJ_2}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 Y_2(1)}{\partial \xi^2} = \frac{EJ_1}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 Y_1(0)}{\partial \eta^2}$  — условия сопряжения стойки с ригелем.

Условие «г'» при наличии «б» и «в» эквивалентно

$$\frac{\partial^2 Y_2}{\partial \xi^2} = k\mu \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \eta^2}.$$

Условия симметрии деформаций при вертикальных колебаниях относительно  $\eta = \frac{1}{2}$  согласно формулам (4.94) и (4.95) запишутся в виде

$$Y_1' \left( \frac{1}{2} \right) = \alpha \beta^2 Y_1 \left( \frac{1}{2} \right); \quad Y_1''' \left( \frac{1}{2} \right) = -\alpha d \beta^2 Y_1 \left( \frac{1}{2} \right),$$

где

$$a = \frac{i_1^2}{2l^2} \cdot \frac{E}{k'G}; \quad d = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{i_1^4}{l^4} \beta_1^2 \left( \frac{E}{k'G} \right)^2 \right].$$

Подчиняя уравнения (7.54) и (7.55) всем указанным выше условиям, получим следующее трансцендентное уравнение частоты:

$$\begin{aligned} & (p^2 + p_1^2) (p_1 \sin p \operatorname{ch} p_1 - p \operatorname{sh} p_1 \cos p) \left\{ (s^2 + s_1^2) \left( s \operatorname{ch} \frac{s_1}{2} \sin \frac{s}{2} + \right. \right. \\ & + s_1 \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} \cos \frac{s}{2} \left. \right) + \alpha \beta_1^2 \left( \operatorname{ch} \frac{s_1}{2} \cos \frac{s}{2} - 1 \right) [2d - a(s^2 - s_1^2)] - \\ & \left. - \frac{\alpha \beta_1^2}{s s_1} \sin \frac{s}{2} \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} [a(s^4 + s_1^4) - d(s^2 - s_1^2)] \right\} + \\ & + n [2pp_1 (1 - \cos p \operatorname{ch} p_1) - (p^2 - p_1^2) \operatorname{sh} p_1 \sin p] \times \\ & \times \left\{ (s^2 + s_1^2)^2 \operatorname{ch} \frac{s_1}{2} \cos \frac{s}{2} + \alpha \beta_1^2 \frac{s^2 + s_1^2}{s_1} \left[ (d - as^2) \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} \cos \frac{s}{2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{s_1}{s} \sin \frac{s}{2} \operatorname{ch} \frac{s_1}{2} (d + as_1^2) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Если пренебречь влиянием инерции поворота и сил перерезывания, то получим прежнее уравнение частоты (7.10).

Горизонтальные колебания (см. рис. 7.12). Для получения уравнения частоты необходимо удовлетворить следующим условиям сопряжения:

$$\begin{aligned} \text{а) } Y_2(0) = Y_2'(0) = 0; \quad \text{б) } Y_1(0) = 0; \\ \text{в) } \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial Y_2}{\partial \xi} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial Y_1}{\partial \eta}; \quad \text{в') } \frac{EJ_2}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 Y_2}{\partial \xi^2} = \frac{EJ_1}{l^2} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Условие, что с концом стойки связана и масса  $m + q_1$ , дает зависимость

$$\text{г) } \frac{EJ_2}{b_0 h^3} (Y_2''' + b_0' Y_2') T(t) = \frac{m + q_1}{2} \cdot \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \quad \text{для } \xi = 1,$$

где

$$b_0' = 1 - \frac{i_2^4 \beta_2^2}{h^4} \cdot \frac{E}{k'G}.$$

Помимо указанных условий необходимо написать условие асимметрии деформаций относительно середины  $\eta = \frac{1}{2}$ ;

$$Y_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0; \quad Y_1''\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Подчиняя уравнения (7.54) и (7.55) этим условиям сопряжения, получим следующее уравнение частоты:

$$\begin{aligned} \left( s_1 \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} \sin \frac{s}{2} - s \cos \frac{s}{2} \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} \right) \left\{ (1 - \cos p \operatorname{ch} p_1) [2\epsilon b_2' - \right. \\ \left. - (p^2 - p_1^2)(\epsilon + b_2') - 2p^2 p_1^2] + (p_1^2 + p_2^2)^2 + \left[ \epsilon \frac{p^4 + p_1^4}{p p_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + (p^2 - p_1^2) \left( p p_1 - \frac{\epsilon b_2'}{p p_1} \right) - 2p p_1 b_2' \right] \sin p \operatorname{sh} p_1 + \right. \\ \left. + \alpha_1 b_0' \beta_2^2 (p^2 + p_1^2) \left( \frac{1}{p_1} \cos p \operatorname{sh} p_1 - \frac{1}{p} \sin p \operatorname{ch} p_1 \right) \right\} + \\ + n (s_1^2 + s^2) \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} \sin \frac{s}{2} \left\{ (p^2 + p_1^2) (p \sin p \operatorname{ch} p_1 + p_1 \cos p \operatorname{sh} p_1) + \right. \\ \left. + b_0' \alpha \beta_2^2 \left[ 2 (\cos p \operatorname{ch} p_1 - 1) + \frac{p^2 - p_1^2}{p p_1} \sin p \operatorname{sh} p_1 \right] \right\} = 0, \quad (7.57) \end{aligned}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{m + q_1}{2q_2}; \quad \epsilon = \frac{\beta_2^2 E i_2^2}{k'G h^2}.$$

Если пренебречь влиянием инерции поворота и поперечными силами, получим прежнее уравнение частоты (7.11).

Пример. Возьмем следующие прямоугольные рамы.  
Рама I:  $h = 4,5 \text{ м}$ ,  $l = 3,0 \text{ м}$ ,  $P = 9,2 \text{ т}$ , сечения стоек и ригелей  $0,80 \times 0,80 \text{ м}^2$ .

Рама II:  $h = 4,5 \text{ м}$ ,  $l = 3,0$ , сечение стойки  $0,915 \times 0,80 \text{ м}^2$  ( $0,915$  — высота сечения стойки), равномерно распределенная нагрузка  $4600 \text{ кг}$  на  $1 \text{ пог. м}$ .  
При расчете принято

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Т/м}^2; \quad G = 0,9 \cdot 10^6 \text{ Т/м}^2;$$

$$\rho = \frac{1}{g} 2400 \text{ кг/м}^3; \quad k' = \frac{5}{6}.$$

Подсчитывая значения корней  $\beta$  для этих рам с помощью уравнений (7.56), (7.57) и значения корней  $\beta_1^{(0)}$  уравнений (7.10) и (7.11) без учета этих факторов, получим результаты, приведенные в табл. 7.5.

Таблица 7.5

Значения корней  $\beta$  с учетом перерезывающих сил

Характеристика колебаний	Тон колебаний			Характеристика колебаний	Тон колебаний		
	Основной	Первый обер-тон	Второй обер-тон		Основной	Первый обер-тон	Второй обер-тон
Вертикальные колебания рамы I				Горизонтальные колебания рамы II			
$\beta_1^{(0)}$	5,33	9,70	25,0	$\beta_2^{(0)}$	2,384	19,60	44,62
$n = \frac{60}{2\pi} \omega$	3820	6950	17 900	$n^\circ$	870	7140	16 250
$\beta_1$	4,873	8,95	20,87	$\beta_2$	2,37	17,98	34,30
$n_1$	3495	6430	14 950	$n_2$	865	6550	12 510
$\frac{n_0 - n_1}{n_0} 100\%$	8,25	7,50	16,6	$\frac{n_0 - n_2}{n_0} 100\%$	0,59	8,27	23,0

Как видно из табл. 7.5, в том случае, когда отношение высоты сечения стержня к длине не будет малой величиной, не следует пренебрегать влиянием перерезывающих сил, инерцией поворота сечений и для основного тона.

### КОЛЕБАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМ С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ РИГЕЛЯМИ, СВЯЗЫВАЮЩИМИ ПЛОСКИЕ РАМЫ

При изучении колебаний плоских рам последние рассматривались нами независимо от соседних рам, с которыми они связаны поперечными ригелями и перекрытиями. Однако большой практический интерес представляет выявление влияния связей между плоскими рамами на частоты колебаний этих рам. Рамный каркас, как и всякое упругое тело, имеет бесчисленное множество частот. Необходимо заметить, что при определении частот колебаний приходится упрощать расчетные схемы. В частности, в большинстве случаев пренебрегают жесткостью рам в продольном направлении и кручением стоек.



Влияние первого фактора будет зависеть от очертания рамного каркаса. Как мы увидим в дальнейшем, влияние этого фактора во многих случаях будет невелико. Влиянием жесткости кручения стоек, в особенности на низшие частоты, как показывают проделанные для нескольких частных случаев вычисления, можно также пренебречь.

Учитывая сложность точного метода, основанного на использовании дифференциальных уравнений поперечных колебаний стержней, с составлением условий их сопряжения в узлах, в дальнейшем остановимся на приближенных методах. Изложение точного метода можно найти в книге В. Г. Чудновского [114], где подробно рассмотрены колебания циклически симметричных рам.

### Составление уравнения частоты

Во многих случаях жесткость перекрытий и поперечных ригелей, связывающих плоские рамы, значительна. Поэтому в таких случаях при определении низших частот можно ввести предположение об абсолютной жесткости продольных ригелей. В дальнейшем мы выявим более подробно влияние жесткости продольных ригелей, сперва же приведем решение для указанного предположения.

При составлении уравнения частоты будем предполагать, что для каждой плоской рамы выполнено приведение масс, т. е. все массы перенесены в узлы. Вместе с тем принимаем, что все массы продольных ригелей, перекрытий также перенесены в узлы. В таком случае задача сводится к составлению уравнения частоты для системы абсолютно жестких продольных ригелей с точечными массами в узлах, испытывающих упругий отпор от рам в этих же точках. Для получения уравнения частоты в этом случае можно поступить следующим образом.

Рассчитываем каждую из плоских рам, хотя бы по методу угловых деформаций, под действием горизонтальной системы сил (рис. 7.16)  $P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, \dots, P_{ik}$  и находим зависимости между силами и полными смещениями узлов этой рамы  $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \dots, \delta_{ik}$ :

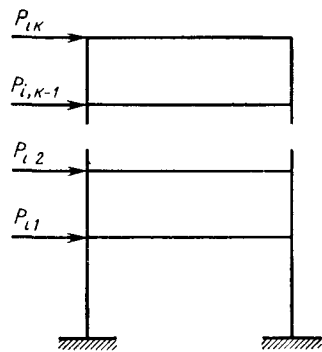


Рис. 7.16

$$\left. \begin{aligned} P_{i1} &= a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + \dots + a_{ik}\delta_{ik}; \\ P_{i2} &= b_{i1}\delta_{i1} + b_{i2}\delta_{i2} + \dots + b_{ik}\delta_{ik}; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.58)$$

Вычисляем величину потенциальной энергии  $i$ -й рамы:

$$V = \frac{1}{2} (P_{i1}\delta_{i1} + P_{i2}\delta_{i2} + \dots + P_{ik}\delta_{ik}) \quad (7.59)$$

и кинетической энергии той же рамы:

$$T = \frac{1}{2} (m_{i1}\delta_{i1}'^2 + m_{i2}\delta_{i2}'^2 + \dots + m_{ik}\delta_{ik}'^2), \quad (7.60)$$

где  $m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{ik}$  — приведенные массы, относящиеся к узлам 1, 2, 3, ...,  $k$ -й рамы. В выражении для  $T$  штрихом обозначены производные по  $t$ .

Общая энергия всей системы, состоящей из  $n$  рам, будет

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k P_{ij}\delta_{ij}; \\ T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m_{ij}\delta_{ij}'^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

Так как по условию поперечные ригели абсолютно жесткие, то перемещения узлов рам, связанных с  $j$ -м поперечным ригелем, выражаются через перемещения узлов крайних рам  $\delta_{1j}$  и  $\delta_{nj}$  следующим образом:

$$\delta_{ij} = \delta_{1j} + \frac{\delta_{nj} - \delta_{1j}}{L} x_i, \quad (7.62)$$

где  $L$  — длина поперечного ригеля;

$x_i$  — расстояние узла промежуточной  $i$ -й рамы от крайней левой рамы.

После подстановки значений  $\delta_{ij}$  в выражение (7.58) получим  $P_{i1}, P_{i2}, \dots$  в виде линейных функций перемещений лишь крайних рам:

$$P_{ij} = \sum_{h=1}^k (\alpha_{ij}^{(h)}\delta_{1h} + \beta_{ij}^{(h)}\delta_{nh}). \quad (7.63)$$

После подстановки значений  $P_{ij}$  и  $\delta_{ij}$  в выражения  $V$  и  $T$  (7.61) определим последние в зависимости от  $2k$  смещений крайних рам.

Составляя уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \delta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} + \frac{\partial V}{\partial \delta} = 0 \quad (7.64)$$

и делая подстановку

$$\delta_i = A_i \cos \omega t,$$

получим систему  $2k$  однородных уравнений относительно  $A_i$ .

Определитель, составленный из коэффициентов при  $A_i$ , дает уравнение частоты  $2k$ -го порядка.

Для того чтобы получить уравнение частоты в виде векового уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda^2 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1, 2k} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda^2 & a_{23} & \dots & a_{2, 2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2k, 1} & a_{2k, 2} & a_{2k, 3} & \dots & a_{2k, 2k} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (7.65)$$

за обобщенные координаты удобно взять перемещение центра тяжести каждого продольного ригеля  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$  и углы поворота его  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ . В таком случае

$$\delta_{ij} = \delta_j + x_{ij}\varphi_j, \quad (7.66)$$

где  $x_{ij}$  — расстояние от центра тяжести  $j$ -го поперечного ригеля с массами  $m_{1j}, m_{2j}, \dots, m_{nj}$  до рассматриваемого узла  $i$ -й рамы, причем значения  $x_{ij}$  считаем положительными вправо от центра тяжести и отрицательными — влево от него.

В таком случае кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (M_j \delta_j^2 + J_j \varphi_j^2), \quad (7.67)$$

где

$$M_j = m_{1j} + m_{2j} + \dots + m_{nj}; \quad J_j = m_{1j}x_{1j}^2 + m_{2j}x_{2j}^2 + \dots + m_{nj}x_{nj}^2.$$

Заменяя в выражении для  $V$  (7.61) все  $\delta_{ij}, P_{ij}$  через  $\delta_j, \varphi_j, \delta_2, \varphi_2, \dots, \delta_k, \varphi_k$ , получим

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n P_{ij} (\delta_j + x_{ij}\varphi_j), \quad (7.68)$$

После подстановки значений  $T$  и  $V$  в уравнения Лагранжа получим

$$\left. \begin{aligned} M_j \delta_j'' &= - \sum_{i=1}^n P_{ij}; \\ J_j \varphi_j'' &= - \sum_{i=1}^n x_{ij} P_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (7.69)$$

т. е. уравнения движения в обычной форме; при этом  $P_{ij}$  следует заменить их значениями в зависимости от  $\delta_j, \varphi_j$ .

Делая подстановку

$$\delta_j = A_j e^{\lambda t}; \quad \varphi_j = B_j e^{\lambda t}$$

и приравнявая определитель, составленный из коэффициентов при  $A_j, B_j$ , нулю, получим уравнение частоты  $2k$ -го порядка вида (7.65). Корни этого уравнения  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_{2k}^2$  должны быть все отрицательными, для того чтобы  $\delta_j, \varphi_j$  были чисто периодическими решениями.

При практических применениях изложенного метода корни уравнения (7.65) можно найти одним из методов, изложенным в гл. 2.

**Пример 1.** Рассмотрим восьмистоечный фундамент под турбогенератор со следующими данными рис. 7.17: высота стоек  $h = 7,0$  м; длина ригелей  $l = 4,60$  м; расстояние между рамами:  $l_1 = 3,896$  м;  $l_2 = 4,044$  м;  $l_3 = 4,850$  м; моменты инерции стоек  $J_1$  и ригелей  $J_2$  первой, второй, третьей и четвертой рам ( $m^4$ ):

$$J_1^{(1)} = 0,3201; J_2^{(1)} = 0,3707;$$

$$J_1^{(2)} = 0,3201; J_2^{(2)} = 0,5805;$$

$$J_1^{(3)} = 0,3201; J_2^{(3)} = 0,7105;$$

$$J_1^{(4)} = 0,3201; J_2^{(4)} = 0,870.$$

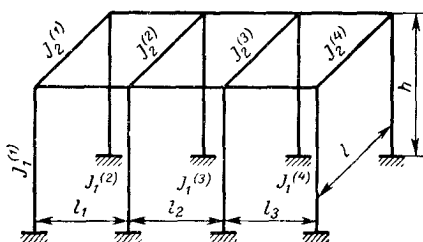


Рис. 7.17

Эквивалентные нагрузки в узлах  $2G_1 = 96,7 \cdot 10^3$ ;  $2G_2 = 129,1 \cdot 10^3$ ;  $2G_3 = 186,0 \cdot 10^3$ ;  $2G_4 = 143,1 \cdot 10^3$  кг.

Для каждой из двухстоечных рам имеем известную зависимость между перемещением и приложенной силой

$$\delta = \frac{Ph^3(2+3k)}{12EJ_1(1+6k)} = \frac{1}{c} P,$$

где

$$k = \frac{J_2 h}{J_1 l}.$$

Уравнения движения (7.69) будут

$$\frac{1}{g} \sum 2G_i \delta'' = - \sum_i c_i (\delta + x_i \varphi);$$

$$\frac{1}{g} \sum 2G_i x_i^2 \varphi'' = - \sum_i c_i (\delta + x_i \varphi) x_i,$$

где  $\delta$  — отклонение центра тяжести поперечного ригеля от положения равновесия;  $\varphi$  — угол поворота его;

$\delta_i = \delta + x_i \varphi$  — перемещение  $i$ -й массы ( $\delta_i = \frac{1}{c_i} P$ ). Значения величин

$\frac{1}{c_i}$  будут:

$$\frac{1}{c_1} = 26,81 \cdot 10^{-6}; \quad \frac{1}{c_2} = 26,13 \cdot 10^{-6} \text{ м/м};$$

$$\frac{1}{c_3} = 22,90 \cdot 10^{-6}; \quad \frac{1}{c_4} = 24,95 \cdot 10^{-6} \text{ м/м}.$$

Из условия равновесия нагрузок

$$x_1 = -6,460 \text{ м}; \quad x_2 = -3,064 \text{ м}; \quad x_3 = 0,980 \text{ м}; \quad x_4 = 5,830 \text{ м}.$$

После подстановки значений  $G_i$ ,  $c_i$ ,  $x_i$  получим уравнение частоты

$$(56,661\omega^2 + 0,163 \cdot 10^6)(1052,29\omega^2 + 3,317 \cdot 10^6) + 0,081^2 \cdot 10^{12} = 0$$

или

$$\omega^4 - 0,602 \cdot 10^4 \omega^2 + 0,0896 \cdot 10^8 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\omega_1 = 0,269 \cdot 10^4; \quad \omega_2 = 0,333 \cdot 10^4.$$

Число колебаний

$$n_1 = \frac{60}{2\pi} \omega_1 = 495 \text{ кол/мин}, \quad n_2 = 551 \text{ кол/мин}.$$

Подсчитывая числа колебаний в 1 мин каждой плоской рамы по методу Рейля, получим следующие значения:

$$n_1 = 579, \quad n_2 = 509, \quad n_3 = 453, \quad n_4 = 493.$$

Если подсчитать числа колебаний каждой рамы, как системы с одной степенью свободы, по формуле (1.6):  $n_i = \frac{300}{\sqrt{f_i}}$ , где  $f_i = \frac{2G_i}{c_i}$ , то получим  $n_1 = 590$ ;  $n_2 = 515$ ;  $n_3 = 458$ ;  $n_4 = 502$  кол/мин.

Как видно из сравнения полученных значений  $n$ , числа колебаний рамы в предположении абсолютно жестких ригелей повышаются сравнительно с низкой частотой колебаний отдельных рам.

Это обстоятельство можно было предвидеть заранее на основании известной теоремы о распределении частот.

Пример 2. Возьмем двухъярусную двухпролетную рамную конструкцию, основные размеры которой приведены на рис. 7.18.

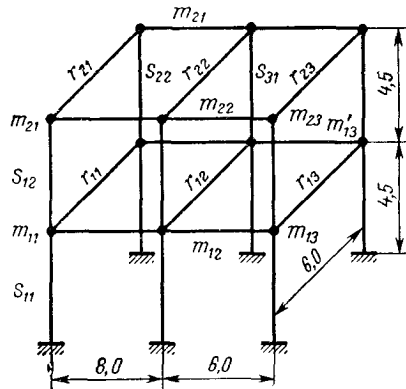


Рис. 7.18

Погонные жесткости стоек и ригелей:

$$s_{11} = r_{11} = 1, \quad s_{12} = r_{21} = 0,80, \quad s_{21} = 1,50, \quad r_{12} = 2,0,$$

$$s_{22} = r_{22} = 1,20, \quad s_{31} = r_{13} = 2,0, \quad s_{32} = r_{23} = 1,50.$$

Массы, сосредоточенные в узлах:

$$m_{11} = m'_{11} = 1,4, \quad m_{12} = m'_{12} = 2,0, \quad m_{13} = m'_{13} = 1,25,$$

$$m_{21} = m'_{21} = 1,20, \quad m_{22} = m'_{22} = 2,0, \quad m_{23} = m'_{23} = 1,0.$$

Прикладываем к каждой из рам силы  $P_1$  и  $P_2$  и рассчитываем их по методу угловых деформаций с помощью уравнений:

$$2(s_1 + s_2 + r_1)X_3 + s_2X_5 + r_1X_3 = 3 \left[ \frac{s_2}{l_2} (\delta_2 - \delta_1) + \frac{s_1}{l_1} \delta_1 \right];$$

$$2(s_2 + r_2)X_5 + s_2X_3 + r_2X_5 = 3 \frac{s_2}{l_2} (\delta_2 - \delta_1);$$

$$2s_1X_3 = 2 \frac{s_1 + s_2}{l_1} \delta_1 - \frac{P_1 + P_2}{6} l_1;$$

$$2s_2(X_3 + X_5) = 2 \frac{2s_2}{l_2} (\delta_2 - \delta_1) - \frac{P_2 l_2}{6},$$

где  $X_3, X_5$  — углы поворота узлов;  
 $\delta$  — полные смещения узлов.

Из этих уравнений получим зависимости между  $P_1, P_2$  и смещениями  $\delta_1, \delta_2$ . Таким образом, получим следующие значения  $P$  в зависимости от  $\delta$  соответственно для первой, второй и третьей плоских рам:

$$\left. \begin{aligned} P_{11} &= 1,80\delta_{11} - 0,723\delta_{21}; & P_{12} &= -0,723\delta_{12} + 0,547\delta_{21}; \\ P_{21} &= 3,06\delta_{12} - 1,21\delta_{21}; & P_{22} &= -1,21\delta_{12} + 0,952\delta_{21}; \\ P_{13} &= 3,82\delta_{13} - 1,43\delta_{23}; & P_{23} &= -1,43\delta_{13} + 1,04\delta_{23}. \end{aligned} \right\} \quad (7.70)$$

Расстояния центров тяжести продольных ригелей от левой крайней рамы будут

$$\delta_I = \frac{2,8 + 1,25 \cdot 14}{4,65} = 7,2 \text{ м}; \quad \delta_{II} = \frac{4,0 \cdot 8 + 2,0 \cdot 1,4}{8,4} = 7,1 \text{ м}.$$

Тогда, считая расстояния влево от центров тяжести отрицательными, получим для перемещения  $\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{32}$  в зависимости от  $\delta_I, \delta_{II}, \varphi_I, \varphi_{II}$  следующие значения:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \delta_I - 7,2\varphi_I; & \delta_{12} &= \delta_I + 0,8\varphi_I; & \delta_{13} &= \delta_I + 6,8\varphi_I; \\ \delta_{21} &= \delta_{II} - 7,1\varphi_{II}; & \delta_{22} &= \delta_{II} + 0,9\varphi_{II}; & \delta_{23} &= \delta_{II} + 6,9\varphi_{II}. \end{aligned}$$

Заменяя в уравнениях (7.70) перемещения  $\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{13}$  предыдущими выражениями и составляя уравнения движения (7.69) для каждого поперечного ригеля

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (m_{ik} + m'_{ik}) \delta_i'' &= - \sum_{k=1}^3 P_{ik}; \\ \sum_{k=1}^3 (m_{ik} + m'_{ik}) x_{ik}^2 \varphi'' &= - \sum_{k=1}^3 P_{ik} x_{ik}; \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} 9,30\delta_I'' + 8,68\delta_I + 15,5\varphi_I - 3,36\delta_{II} - 5,82\varphi_{II} &= 0; \\ 263\varphi_I + 15,5\delta_I + 273\varphi_{II} - 5,48\delta_{II} - 105\varphi_{II} &= 0; \\ 8,40\delta_{II}'' - 3,36\delta_I - 5,48\varphi_I + 2,54\delta_{II} - 4,16\varphi_{II} &= 0; \\ 219,4\varphi_{II} - 5,83\delta_I - 105\varphi_I + 4,16\delta_{II} + 77,8\varphi_{II} &= 0. \end{aligned}$$

Определение частот проводим по методу А. Н. Крылова. Делая подстановку

$$\delta_I = Ae^{\lambda t}; \quad \delta_{II} = Be^{\lambda t}; \quad \varphi_I = Ce^{\lambda t}; \quad \varphi_{II} = De^{\lambda t}$$

и приравняв определитель нулю, получим

$$\begin{vmatrix} -8,68 - 9,30\lambda^2 & 3,36 & -15,5 & 5,82 \\ 3,36 & -2,54 - 8,40\lambda^2 & 5,48 & -4,16 \\ -15,5 & 5,48 & -273 - 263\lambda^2 & 105,0 \\ 5,83 & -4,16 & 105,0 & -77,8 - 219,4\lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Этот определитель преобразовываем по методу А. Н. Крылова в определитель вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda^2 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{21} - \lambda^4 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ c_{31} - \lambda^6 & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ d_{41} - \lambda^8 & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

где  $\lambda$

$$a_{11} = -\frac{8,86}{9,30} = -0,93333; \quad a_{12} = -\frac{3,36}{9,30} = 0,36129;$$

$$a_{13} = -\frac{15,5}{9,30} = -1,6666; \quad a_{14} = 0,62581.$$

Значение остальных коэффициентов  $b, c, d$  вычисляем по известной схеме акад. А. Н. Крылова. После вычислений получаем

$$\begin{vmatrix} -0,93333 - \lambda^2 & 0,36129 & -1,6666 & 0,62581 \\ 1,13048 - \lambda^4 & -0,49304 & 3,82076 & -1,65032 \\ -1,52136 - \lambda^6 & 0,66842 & -6,91163 & 3,06224 \\ 2,17897 - \lambda^8 & -0,95489 & 11,6635 & -5,14833 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая по элементам первой вертикали, получим уравнение четвертого порядка относительно  $\beta = \lambda^2$ :

$$\beta^4 + 2,6369\beta^3 + 1,8977\beta^2 + 0,3691\beta + 0,0198 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\beta_1 = -0,0985; \quad \beta_2 = -0,176; \\ \beta_3 = -0,783; \quad \beta_4 = -1,583;$$

частоты колебаний

$$\omega_1 = \sqrt{-\beta_1} = 0,314; \quad \omega_2 = 0,420; \\ \omega_3 = 0,885; \quad \omega_4 = 1,260.$$

Рассмотрим теперь следующие два случая.

1. Плоские рамы связаны лишь верхним абсолютно жестким ригелем (рис. 7.19). Тогда в выражении (7.70) мы должны положить  $P_{11} = P_{12} = P_{13} = 0$ . Следовательно,

$$\delta_{11} = 0,40168\delta_{21}; \quad \delta_{12} = 0,39543\delta_{22}; \quad \delta_{13} = 0,37435\delta_{23}. \quad (7.71)$$

Потенциальная энергия каркаса

$$V = \frac{1}{2} (P_{21}\delta_{21} + P_{22}\delta_{22} + P_{23}\delta_{23}).$$

После подстановки значений  $P_{21}, P_{22}, P_{23}$  согласно формуле (7.70) и замены  $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}$  с помощью уравнения (7.72), получим

$$V = \frac{1}{2} (0,2566\delta_{21}^2 + 0,47354\delta_{22}^2 + 0,50469\delta_{23}^2).$$

Кинетическая энергия системы ( $m_{11} = m'_{11}, m_{12} = m'_{12}, \dots$ )

$$T = \frac{1}{2} 2 (m_{11}\delta_{11}'^2 + m_{21}\delta_{21}'^2 + m_{12}\delta_{12}'^2 + m_{22}\delta_{22}'^2 + m_{13}\delta_{13}'^2 + m_{23}\delta_{23}'^2).$$

После замены  $\delta_{11}, \delta_{21}, \dots$  их значения (7.71) получим

$$T = \frac{1}{2} (2,8517\delta_{21}'^2 + 4,6254\delta_{22}'^2 + 2,3503\delta_{23}'^2).$$

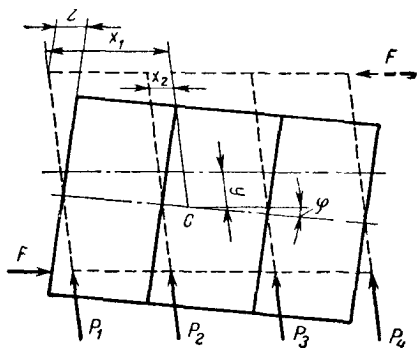


Рис. 7.19

Выражая перемещение верхнего узла средней рамы через перемещения крайних узлов

$$\delta_{22} = \delta_{21} + (\delta_{23} - \delta_{21}) \frac{x}{L},$$

получим для удвоенной потенциальной и кинетической энергии значения

$$2V = 0,34354\delta_{21}^2 + 0,23193\delta_{21}\delta_{23} + 0,65935\delta_{23}^2;$$

$$2T = 3,70103\delta_{21}'^2 + 2,2654\delta_{21}'\delta_{23}' + 3,86106\delta_{23}'^2.$$

После подстановки в уравнение Лагранжа получим

$$3,70103\delta_{21}'' + 1,13270\delta_{23}'' + 0,34359\delta_{21} + 0,11596\delta_{23} = 0,$$

$$3,86106\delta_{23}'' + 1,13270\delta_{21}'' + 0,65933\delta_{23} + 0,11596\delta_{21} = 0,$$

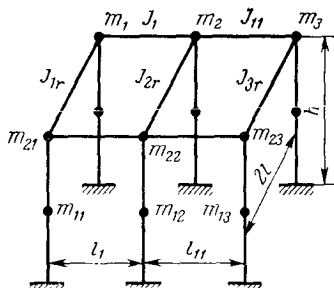


Рис. 7.20

Беря для перемещения  $\delta_{21}$  и  $\delta_{23}$  значения:

$$\delta_{21} = A \sin \omega t, \quad \delta_{23} = B \sin \omega t,$$

получим систему

$$\begin{aligned} (0,34359 - 3,70103\omega^2) A + \\ + (0,11596 - 1,13270\omega^2) B = 0, \\ (0,11596 - 1,13270\omega^2) A + \\ + (0,65933 - 3,86106\omega^2) B = 0, \end{aligned}$$

корни которой

$$\omega_1^2 = 0,1767; \quad \omega_2^2 = 0,09272$$

или

$$\omega_1 = 0,420; \quad \omega_2 = 0,304.$$

2. Аналогичным образом найдем корни для случая, когда отсутствует верхний ригель, а рамы связаны лишь нижним абсолютно жестким поперечным ригелем:

$$\omega_1 = 0,366; \quad \omega_2 = 0,465.$$

Вычислим теперь частоты колебаний каждой плоской рамы в отдельности (рис. 7.20).

Например, для первой рамы (см. рис. 7.18)

$$V = \frac{1}{2} P_{11}\delta_{11} + \frac{1}{2} P_{21}\delta_{21} = \frac{1}{2} (1,80\delta_{11}^2 + 1,446\delta_{11}\delta_{21} + 0,547\delta_{21}^2),$$

$$T = \frac{1}{2} (2m_{11}\delta_{11}'^2 + 2m_{21}\delta_{21}'^2) = 1,40\delta_{11}'^2 + 1,20\delta_{21}'^2.$$

После подстановки в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \delta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} + \frac{\partial V}{\partial \delta} = 0$$

придем к дифференциальным уравнениям

$$2,8\delta_{11}'' + 1,80\delta_{11} - 0,723\delta_{21} = 0;$$

$$2,4\delta_{21}'' - 0,723\delta_{11} + 0,547\delta_{21} = 0.$$



Беря для  $\delta_{11}$  и  $\delta_{21}$  значения

$$\delta_{11} = A \sin \omega t, \quad \delta_{21} = B \sin \omega t,$$

получим

$$\begin{aligned} (-2,8\omega^2 + 1,80)A - 0,723B &= 0; \\ -0,723A + (0,547 - 2,40\omega^2)B &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этих уравнений дает квадратное уравнение относительно  $\omega^2$ :

$$\begin{vmatrix} -2,8\omega^2 + 1,80 & -0,723 \\ -0,723 & 0,547 - 2,40\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого уравнения будут

$$\omega_1^2 = 0,08779; \quad \omega_2^2 = 0,7827$$

или

$$\omega_1 = 0,296; \quad \omega_2 = 0,883.$$

Аналогично находим частоты и остальных рам. Все данные вычислений сведены в табл. 7.6.

Т а б л и ц а 7.6

Частота колебаний  $\omega$  для плоских рам и рамного каркаса

Рамный каркас (см. рис. 7.19)			Плоские рамы		
при двух поперечных ригелях	при одном верхнем ригеле	при нижнем ригеле	I	II	III
0,314	0,304	0,366	0,296	0,318	0,445
0,420	0,420	0,465	—	—	—
0,885	—	—	0,885	0,955	1,355
1,260	—	—	—	—	—

Сравнивая полученные величины, видим, что в данном случае, как и следовало ожидать, при наложении добавочных связей (поперечных ригелей) частоты колебаний повышаются по сравнению с нижней частотой колебаний отдельной плоской рамы.

Выше мы не учитывали влияния жесткости поперечных рам, дающих добавочные моменты при повороте поперечных ригелей на угол  $\varphi$ . При симметрии относительно продольной оси и абсолютной жесткости рам в горизонтальной плоскости необходимо вместо уравнения (7.69) для каждого поперечного ригеля написать уравнение с учетом добавочных моментов, возникающих при повороте плоских рам на угол  $\varphi$  (см. рис. 7.20), т. е.

$$M_j \delta_j'' = - \sum_i P_{ij},$$

$$J_j \varphi_j'' = - \left( \sum_i F_{ij} z_{ij} + \sum_i x_{ij} P_{ij} \right),$$

где  $\sum F_{ij} z_{ij}$  — добавочный момент, получаемый от поворота рам. Величина этого момента вычисляется аналогично предыдущему

при расчете связанных между собой поперечных плоских рам. При этом все смещения  $z_{ij}$  выражаются через угол поворота  $\varphi_j$  ( $y_{ij}\varphi_j = z_{ij}$ ) ввиду принятого допущения о жесткости рам в горизонтальной плоскости.

### КОЛЕБАНИЯ РАМНЫХ КАРКАСОВ ПРИ УПРУГИХ ПОПЕРЕЧНЫХ РИГЕЛЯХ

#### Составление уравнения частоты для распределенных масс ригелей

Выше предполагалось, что поперечные ригели абсолютно жесткие. При наличии упругих поперечных ригелей определение частот становится значительно сложнее.

Остановимся сперва на случае, когда продольные ригели имеют постоянное сечение и постоянный момент инерции.

Для весомых ригелей уравнение частоты может быть получено следующим образом. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний каждого продольного стержня (4.1):

$$EJ_i \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (7.72)$$

где  $f(x, t)$  — внешняя нагрузка, которая, в частности, может быть разрывной, распределенной по участкам (в пределе сосредоточенной в узлах). Общее решение уравнения (7.73) при наличии сосредоточенных нагрузок в узлах было получено уже выше.

Для первого интервала  $0 \leq \eta \leq \eta_1$  ( $\eta = \frac{x}{l}$ ) имеем

$$y(\eta, t) = Y_1(\eta) \cos \omega t = (A \cos r\eta + B \sin r\eta + C \operatorname{ch} r\eta + D \operatorname{sh} r\eta) \cos \omega t; \quad (7.73)$$

для интервала  $\eta_i \leq \eta \leq \eta_{i+1}$

$$y(\eta, t) = Y(\eta) \cos \omega t = \left[ Y_1(\eta) + \frac{r}{2} \sum_{k=1}^i \alpha_k \Phi_k(\eta - \eta_k) Y(\eta_k) \right] \cos \omega t, \quad (7.74)$$

где

$$\Phi(\eta - \eta_k) = \operatorname{sh} \beta(\eta - \eta_k) - \sin \beta(\eta - \eta_k);$$

$$r^4 = \frac{\rho F l^4 \omega^2}{EJ}; \quad \alpha_i = \frac{Q_k}{F \rho l};$$

причем  $Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots, Q_n$  — сосредоточенные нагрузки, приложенные в точках  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ .

На основании расчета каждой плоской рамы найдем зависимости между силами, приложенными к продольным ригелям, и перемещениями узлов рам, например, для первого ригеля:

$$\left. \begin{aligned} P_{11} &= a_{11}Y_{11} + a_{12}Y_{12} + \dots + a_{1k}Y_{1k}; \\ P_{12} &= a_{21}Y_{21} + a_{22}Y_{22} + \dots + a_{2k}Y_{2k}; \\ &\dots \\ P_{n1} &= a_{n1}Y_{n1} + a_{n2}Y_{n2} + \dots + a_{nk}Y_{nk}. \end{aligned} \right\} \quad (7.75)$$

Нагрузки в узлах с учетом сосредоточенных масс будут: для первого ригеля

$$\begin{aligned} Q_{11} &= -P_{11} + m_{11}\omega^2 Y_{11}; \\ Q_{21} &= -P_{21} + m_{21}\omega^2 Y_{21}; \\ &\dots \\ Q_{n1} &= -P_{n1} + m_{n1}\omega^2 Y_{n1}; \end{aligned}$$

для *k*-го ригеля

$$\begin{aligned} Q_{1k} &= -P_{1k} + m_{1k}\omega^2 Y_{1k}; \\ Q_{2k} &= -P_{2k} + m_{2k}\omega^2 Y_{2k}; \\ &\dots \\ Q_{nk} &= -P_{nk} + m_{nk}\omega^2 Y_{nk}, \end{aligned}$$

где  $Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{nj}$  — смещения узлов *j*-го поперечного ригеля.

После подстановки этих значений  $Q$  в выражение (7.75) и замены  $P_{ik}$  их значениями (7.76), удовлетворяя для каждого поперечного ригеля двум условиям на правом конце (считая, что условия для левого конца удовлетворены), получим систему из  $2k$  трансцендентных уравнений ( $k$  — число ярусов), из которых может быть найдено любое количество корней.

При этом  $Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{nj}$  для *j*-го поперечного ригеля выражаются в зависимости лишь от двух произвольных постоянных для этого ригеля, остающихся в общем решении (7.75) после удовлетворения граничных условий на левом конце.

### Уравнение частоты для сосредоточенных масс

Для упрощения в дальнейшем будем считать, что все нагрузки, в том числе и вес поперечных ригелей, перенесены в узлы рам и что каждый ригель имеет постоянное сечение. В таком случае, если не учитывать жесткости рам в поперечном направлении, получим систему уравнений для определения частот колебаний.

Так как по условию ригель невесомый, то дифференциальное уравнение изогнутой оси его будет

$$EJ_j \frac{\partial^4 y_j}{\partial x^4} = f_j(x) \cos \omega t, \quad (7.76)$$

причем можно взять

$$y_j(x, t) = Y_j \cos \omega t,$$

где  $Y_j$  определяется выражением (3.37):

$$Y_j = A_j + B_j x + C_j \frac{x^2}{3} + D_j \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6EJ_j} \int_0^x (x - \tau)^3 f_j(\tau) d\tau. \quad (7.77)$$

При сосредоточенных нагрузках в узлах получим для первого интервала  $0 \leq x \leq x_1$

$$Y = A_j + B_j x + C_j \frac{x^2}{2} + D_j \frac{x^3}{6},$$

для интервала  $x_n \leq x \leq x_{n+1}$

$$Y_j = A_j + B_j x + C_j \frac{x^2}{2} + D_j \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6EJ_j} \sum_{k=1}^n Q_{kj} (x - x_k)^3. \quad (7.78)$$

Сосредоточенные нагрузки определяются так же, как указано выше.

Таким образом, выражение для прогиба  $j$ -го поперечного ригеля для пролета между  $h$  и  $h + 1$  плоской рамы будет

$$Y_{\mathbf{1}}(x) = A_j + B_j x + C_j \frac{x^2}{2} + D_j \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6EJ_j} \sum_{i=1}^n (-P_{ij} + m_{ij} \omega^2 Y_{ij}) \times \\ \times (x - x_i)^3, \quad (7.79)$$

где  $(x_{n-1} = L)$

$$Y_j(0) = Y_{1j}; \quad Y_j(x_1) = Y_{2j}; \quad \dots; \quad Y_j(x_{n-1}) = Y_{nj}. \quad (7.80)$$

Произвольные постоянные определяются из условий на концах ригеля. Если, например, левый конец оперт, то для него при наличии сосредоточенной силы  $Q_{nj}$  необходимо удовлетворить условиям:

$$Y'(0) = 0, \quad -EJ_j Y_j''(0) = P_{1j} - m_{1j} \omega^2 Y_j(0); \quad (7.81)$$

для правого конца

$$Y''(L) = 0, \quad EJ_j Y_j''(L) = P_{nj} - m_{nj} \omega^2 Y_j(L). \quad (7.82)$$

Удовлетворяя условиям (7.81) и (7.82), получим значения произвольных постоянных  $A, B, C, D$  в зависимости  $Q_{1j}, Q_{2j}, \dots, Q_{nj}$ , где

$$Q_{ij} = -P_{ij} + m_{ij} \omega^2 Y_{ij}.$$

К уравнению частоты приходим одним из методов, указанных в гл. 2. Можно, например, выразить все  $Y_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) для  $j$ -го ригеля через две произвольные постоянные  $A_j, B_j$ , оставшиеся после удовлетворения условий (7.81) на левом конце каждого ригеля. Тогда получим систему уравнений относительно  $2k$

постоянных ( $A'_j, B'_j$ ); приравнивая определитель, составленный из коэффициентов при  $A'_j, B'_j$ , нулю, получим уравнение частоты.

Можно не выражать явно  $Y_{ij}$ , а удовлетворить условиям на правом конце и исключить  $A'_j, B'_j$ , выразив их в зависимости от  $Y_{ij}$ ; затем, полагая для каждого ригеля последовательно  $x = 0$ ,  $x = x_1, \dots, x = x_{n-1}$  и принимая во внимание, что согласно условиям (7.81)  $Y_i(x_{i-1} - 1) = Y_{ij}$ , получим систему уравнений относительно  $Y_{ij}$ ; приравнивая нулю определитель этой системы, составленный из коэффициентов при  $Y_{ij}$ , получим также уравнение частоты.

Как видно, вычисление частот рамного каркаса, даже в случае точечных масс, затруднительно. Необходимо отметить, что в предыдущем мы пренебрегали жесткостью рам в поперечном направлении и жесткостью на кручение стоек. Первый фактор, как мы отметили выше, может быть учтен, если написать добавочные уравнения, учитывающие связь продольных ригелей с продольными рамами. Влияние жесткости на кручение стоек можно было бы учесть путем введения в уравнения добавочных членов, учитывающих момент от кручения стоек.

Анализ примеров показывает, что в ряде случаев при определении низких частот рам с упругими продольными ригелями можно воспользоваться допущением об абсолютной жесткости их. Дальнейшие подробности по расчету пространственных рам с абсолютно жесткими и упругими ригелями можно найти в литературе.

---

## КОЛЕБАНИЯ РЕШЕТЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЙ

### СОСТАВНАЯ СТОЙКА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОЯСАМИ

#### Частотные уравнения с учетом решетки

Для определения частот колебаний составных стоек, состоящих из параллельных поясов и соединительной решетки, в том случае, когда сечение поясов не меняется по длине, могут быть использованы результаты, полученные выше (гл. 6) для определения частот колебаний с учетом перерезывающих сил.

В составных стойках получаются добавочные смещения вследствие перекашивания решетки от влияния перерезывающих сил. Выше были написаны соотношения между перерезывающей силой и углом сдвига  $\tau$  в виде

$$Q = k' \tau GF, \quad (8.1)$$

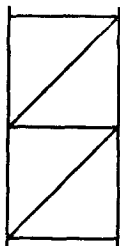


Рис. 8.1

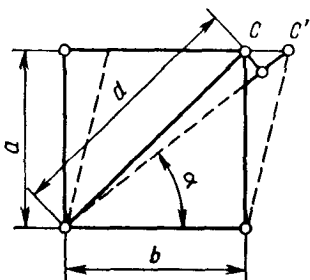


Рис. 8.2

где  $k'$  — коэффициент, который для сплошной стойки зависит от формы сечения.

Для того чтобы применить выводы гл. 6 к колебанию составных стоек, необходимо поступить так же, как это сделал С. П. Тимошенко при рассмотрении устойчивости составных стоек, — подобрать лишь множитель  $k'$ , т. е. установить зависимость между  $Q$  и  $\xi$ . Эта зависимость устанавливается без всяких затруднений из рассмотрения перекашивания решетки.

Если обозначим  $F$  — площадь сечения поясов;  $F_d$  — диагонали;  $F_p$  — распорки, то, например, для решетки согласно рис. 8.1 получим смещение распорки, равное указанному на рис. 8.2:

$$CC' = \frac{Qb}{EF_p} + \frac{Qd}{EF_d \cos^2 \alpha}.$$

Здесь первый член соответствует перемещению от сжатия распорок, второй — от удлинения диагонали.

$$\text{Угол сдвига } \tau = \frac{CC'}{a} = \frac{bQ}{aEF_p} + \frac{dQ}{aEF_\partial \cos^2 \alpha}.$$

Следовательно, вместо  $\frac{1}{k'G}$  в уравнение (8.1) необходимо подставить выражение

$$\frac{b}{aEF_p} + \frac{d}{aEF_\partial \cos^2 \alpha},$$

или вместо  $\frac{1}{k'G}$

$$v = \frac{bF}{aEF_p} + \frac{dF}{aEF_\partial \cos^2 \alpha}. \quad (8.2)$$

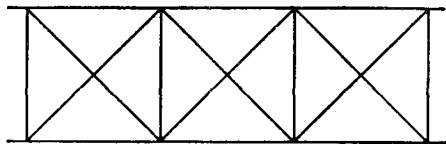


Рис. 8.3

Дифференциально уравнение имеет прежний вид:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - (\rho J + EJ \rho v) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho J \rho v \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0. \quad (8.3)$$

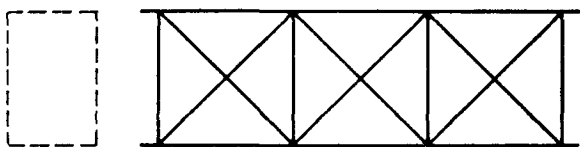


Рис. 8.4

Аналогичным образом находим для решетки с двойными диагоналями (рис. 8.3)

$$v = \frac{F}{EF_p \operatorname{tg} \alpha} + \frac{F}{2EF_\partial \sin \alpha \cos^2 \alpha}; \quad (8.4)$$

для стойки из четырех уголков (рис. 8.4)

$$v = \frac{F}{2EF_p \operatorname{tg} \alpha} + \frac{F}{4EF_\partial \sin \alpha \cos^2 \alpha};$$

для стойки с поперечными планками (рис. 8.5)

$$v = \frac{abF}{12EJ_2} + \frac{a^2 F_1}{24EJ_1},$$

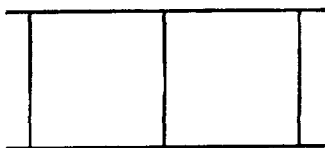


Рис. 8.5

где  $J_2$  — момент инерции планки;  $J_1$  — момент инерции одного пояса.

Уравнения частот, полученные выше для стержней, сохраняются в силе, необходимо лишь вместо  $\frac{1}{k'G}$  поставить  $v$ .

Корни характеристического уравнения будут

$$\left. \begin{aligned} s_1 = -s_3 &= \sqrt{-\frac{b_2}{2} + \sqrt{c\beta^4 + \beta^2}}; \\ s_2 = -s_4 &= \sqrt{\frac{b_2}{2} + \sqrt{c\beta^4 + \beta^2}}; \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

частота колебаний

$$\omega^2 = \frac{\beta^2 \delta^2}{l^4}, \quad \text{где } \delta^2 = \frac{EJ}{\rho F}. \quad (8.6)$$

Значения коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= \frac{r^2}{l^2} (1 + \nu E)^2; \quad c = \frac{r^4}{4l^4} (1 - \nu E)^2; \\ b_0 &= 1 - \frac{r^4}{l^4} \beta^2 \nu E; \quad a = \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{l^2} \nu E; \\ d &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{r^4}{l^4} \beta^2 (\nu E)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Уравнения для определения частот колебаний некоторых частных случаев остаются прежними.

Для стойки, заделанной внизу и свободной вверху, с грузом на конце, уравнение частоты может быть получено в виде

$$\Delta(\beta) = [Z_3''(1) + 2\alpha\beta^2 Z_3(1)] [Z_3''(1) + b_2 Z_3(1) + \alpha\beta^2 b_0 Z_4(1)] - \\ - [Z_3'(1) + 2\alpha\beta^2 Z_4(1)] [Z_3''(1) + b_2 Z_3'(1) + \alpha\beta^2 b_0 Z_3(1)] = 0, \quad (8.8)$$

где штрихом обозначены производные по  $\xi$ ; значения функций определяются согласно формул (4.82).

Для случая опертых концов имеем

$$\text{sh } \frac{s_1}{2} \sin \frac{s}{2} \left\{ s s_1 \text{ch } \frac{s_1}{2} \cos \frac{s}{2} (s^2 + s_1^2) - \right. \\ \left. - \alpha\beta^2 \left[ s_1 \sin \frac{s}{2} \text{ch } \frac{s_1}{2} (d + a s_1^2) - s (d - a s^2) \cos \frac{s}{2} \text{sh } \frac{s_1}{2} \right] \right\} = 0; \quad (8.9)$$

для случая заделанных концов

$$\left( \frac{1}{s_1} \sin \frac{s}{2} \text{ch } \frac{s_1}{2} - \frac{1}{s} \text{sh } \frac{s}{2} \cos \frac{s_1}{2} \right) \left\{ (s^2 + s_1^2) \left( s \text{ch } \frac{s_1}{2} \sin \frac{s}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + s_1 \text{sh } \frac{s_1}{2} \cos \frac{s}{2} \right) + \alpha\beta^2 \left( \cos \frac{s}{2} \text{ch } \frac{s_1}{2} - 1 \right) [2d - a (s^2 - s_1^2)] - \right. \\ \left. - \frac{\alpha\beta^2}{s s_1} \text{sh } \frac{s_1}{2} \sin \frac{s}{2} [a (s^4 + s_1^4) - d (s^2 - s_1^2)] \right\} = 0. \quad (8.10)$$

Здесь первые множители соответствуют антисимметричным колебаниям (2, 4, 6-й, . . . , тон).



Когда один конец заделан, а другой оперт, получим

$$s_1 \sin \frac{s}{2} \operatorname{ch} \frac{s_1}{2} - s \operatorname{sh} \frac{s_1}{2} \cos \frac{s}{2} = 0, \quad (8.11)$$

причем везде взято  $\alpha = \frac{m}{\rho Fl}$ .

Из уравнений (8.9)—(8.11) могут быть найдены частоты колебаний с помощью пробных подстановок.

**Пример.** Определить число колебаний стойки, состоящей из четырех уголков  $130 \times 130 \times 10$  общей площадью  $F = 101,2 \text{ см}^2$ . Высота стойки  $l = 8b$  ( $b$  — ширина панели), решетка двойная. Диагонали и распорки состоят из уголков  $60 \times 40 \times 6$ , площадь сечения уголка  $5,72 \text{ см}^2$ . Угол наклона диагоналей  $45^\circ$ . Вес решетки распределяем равномерно по длине стоек. Вес решетки составляет около 50% веса стоек, а полная масса стойки  $M = 1,5\rho Fl$ .

Масса груза  $m$ , связанного сверху со стойкой, равна  $1,1M$ .

Определим сначала число колебаний стойки без учета влияния решетки. Уравнение частоты для этого случая

$$1 + \cos r \operatorname{ch} r - \alpha r (\sin r \operatorname{ch} r - \cos r \operatorname{sh} r) = 0,$$

где  $\alpha = 1,1$ .

Корни этого уравнения:  $r_1 = 1,224$ ;  $r_2 = 4,022$ , ... или  $\beta_1 = 1,50$ ;  $\beta_2 = 16, 17$ , ... Первый корень может быть также определен и подсчитан по Релею. Коэффициенты, необходимые для расчета, найдены по формулам (8.4) и (8.7):

$$\nu E = \frac{101,2}{2 \cdot 5,72} + \frac{101,2}{4 \cdot 5,72 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = 21,3;$$

радиус инерции  $r = \frac{l}{16}$ ;

$$b_2 = \frac{1}{256} (1 + 21,3) \beta^2 = 0,0873 \beta^2;$$

$$b_0 = 1 - 0,000325 \beta^2; \quad a = \frac{21,3}{2 \cdot 256} = 0,0418.$$

Для коэффициентов, входящих в выражение (8.8), соответствующих разным значениям  $\beta$ , составляем таблицу и вычисляем значения  $\Delta\beta$  (табл. 8.1).

Знак меняется для  $\beta \approx 1,5$ , второй корень находится в интервале между 12. и 13.

Таблица 8.1

Значения  $\Delta\beta$  и функций, входящих в уравнения (8.8)

$\beta$	$s$	$s_1$	$\cos s$	$\sin s$	$\operatorname{ch} s_1$	$\operatorname{sh} s_1$	$Z_3(1)$	$Z'_3(1)$	$Z''_3(1)$	$Z'''_3(1)$	$Z_4(1)$	$\Delta\beta$
1,0	1,022	0,9780	0,5217	0,8332	1,518	1,142	0,4981	0,5940	0,9983	0,0788	0,1666	0,555
1,5	1,266	1,188	0,3001	0,1539	1,793	1,488	0,4975	0,5920	0,9975	0,1830	0,1618	-0,014
2,5	1,665	1,492	-0,0941	0,9956	2,2355	2,1105	0,4859	0,5614	0,9980	0,4833	0,1634	-1,596
12,0	4,268	2,376	-0,4229	-0,9020	5,4274	5,3345	0,2454	0,3697	0,9954	5,935	0,1029	-0,100
13,0	4,504	2,353	-0,2069	-0,9784	5,3061	5,2110	0,2134	0,3041	0,9752	6,089	0,09412	3,76

Интерполируя, получаем  $\beta'_1 = 1,488$ ;  $\beta'_2 = 12,03$ . Число колебаний определяем по формуле

$$n = \frac{60}{2\pi} \beta \sqrt{\frac{EJ}{MI^3}} = \frac{60}{2\pi} \beta \sqrt{\frac{Er^2F}{MI^3}}.$$

Сравнивая эти значения  $\beta'_1$ ,  $\beta'_2$  со значениями  $\beta_1 = 1,5$ ,  $\beta_2 = 16,17$ , которые получаются, если не учитывать сил перерезывания, видим, что вследствие влияния решетки частота колебаний первого тона снижается лишь на 0,8%, второго — уже на 25,6%.

В данном случае для основного тона снижение частоты от влияния решетки незначительно, для второго тона оно уже имеет существенное значение и пренебрегать им не следует. Для менее жестких решеток снижение частоты может быть значительно и для основного тона.

## КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВОЙ ФЕРМЫ

### Дифференциальные уравнения движения

Стержневую ферму можно привести к системе с ограниченным количеством степеней свободы, предполагая, что все массы, связанные с фермой, перенесены в узлы, причем в узлы перенесена и половина масс стержней, примыкающих к узлу. Таким образом, задача сводится к определению собственных частот системы масс, связанных между собой упругими стержнями и имеющих как вертикальные, так и горизонтальные смещения.

Статическую деформацию и усилия в стержнях в расчет не принимаем, так как они не оказывают влияния на установившееся колебательное движение фермы.

Обозначим (рис. 8.6):

$S_{hk}$  — усилие в стержне  $h-k$  при колебании;

$\alpha_{hk}$  — угол, составляемый стержнем с горизонтальным направлением;

$m$  — число стержней, сходящихся в узле;

$M_k$  — масса, сосредоточенная в узле  $k$ ;

$x_k, y_k$  — составляющие перемещений узла  $k$ .

Уравнения движения для массы будут

$$\left. \begin{aligned} M_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= -\sum S_{kh} \cos \alpha_{hk}; \\ M_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= -\sum S_{kh} \sin \alpha_{hk}. \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

Усилия в стержне при перемещении концов стержня  $x_k, y_k, x_h, y_h$  (рис. 8.7) для малых деформаций стержня будут

$$S_{hk} = \frac{EF_{hk}}{l_{hk}} [(x_k - x_h) \cos \alpha_{hk} + (y_k - y_h) \sin \alpha_{hk}].$$

Следовательно, уравнения движения будут

$$\begin{aligned}
 & M_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = \\
 & = - \sum_{h=1}^m \frac{EF_{hk}}{l_{hk}} [(x_k - x_h) \cos \alpha_{hk} + (y_k - y_h) \sin \alpha_{hk}] \cos \alpha_{hk}; \\
 & M_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} = \\
 & = - \sum_{h=1}^m \frac{EF_{hk}}{l_{hk}} [(x_k - x_h) \cos \alpha_{hk} + (y_k - y_h) \sin \alpha_{hk}] \sin \alpha_{hk}.
 \end{aligned}
 \tag{8.13}$$

Для опорных точек уравнения должны быть написаны в зависимости от рода закрепления.

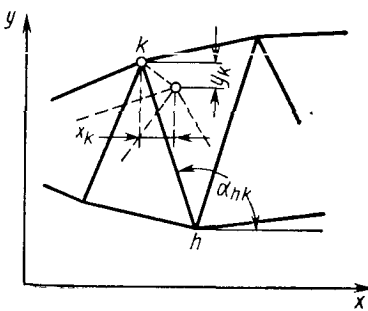


Рис. 8.6

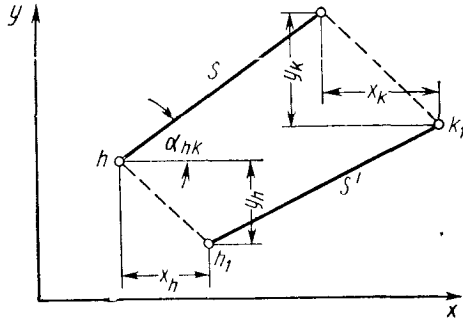


Рис. 8.7

Решение этой системы может быть найдено в виде

$$x_k = u_k \cos \omega t; \quad y_k = v_k \cos \omega t. \tag{8.14}$$

После подстановки этих выражений в формулу (8.13) получим систему  $n$  уравнений ( $n$  — число степеней свободы):

$$\begin{aligned}
 & M_k u_k \frac{\omega^2}{E} = \\
 & = \sum_{h=1}^m \frac{F_{hk}}{l_{hk}} [(u_k - u_h) \cos \alpha_{hk} + (v_k - v_h) \sin \alpha_{hk}] \cos \alpha_{hk}; \\
 & M_k v_k \frac{\omega^2}{E} = \\
 & = \sum_{h=1}^m \frac{F_{hk}}{l_{hk}} [(u_k - u_h) \cos \alpha_{hk} + (v_k - v_h) \sin \alpha_{hk}] \sin \alpha_{hk}.
 \end{aligned}
 \tag{8.15}$$

Приравняв определитель этой системы, составленный из коэффициентов при  $v_k, u_k$ , нулю, получим уравнение частоты

типа векового уравнения. Найти частоты колебаний с помощью этого уравнения при большом количестве стержней без ЭЦВМ почти невозможно. Поэтому было предложено применять метод последовательных приближений.

Правую часть системы уравнений (8.15) можно рассматривать как сумму стержневых усилий для  $E = 1$ , т. е. уравнения (8.15) будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E} M_k u_k \omega^2 &= \sum \sigma_{hk} \cos \alpha_{hk}, \\ \frac{1}{E} M_k v_k \omega^2 &= \sum \sigma_{hk} \sin \alpha_{hk}, \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

причем размерность левой части должна быть соблюдена.

Уравнения эти представляют условия статического равновесия для фермы под действием грузов

$$Q_k = \frac{1}{E} M_k u_k \omega^2; \quad Q'_k = \frac{1}{E} M_k v_k \omega^2.$$

В таком случае ход вычисления частоты будет следующий. Загружаем ферму такой статической нагрузкой, при которой можно ожидать форму деформации, примерно соответствующую динамической форме для тона колебаний, который необходимо определить. Для этой нагрузки определяем усилия в стержнях и находим вертикальные  $v$  и горизонтальные  $u$  смещения. Затем подсчитываем величины  $Q_k, Q'_k$ .

Загружаем ферму этими нагрузками и определяем новые перемещения  $v'$  и  $u'$ . В таком случае приближение для  $\omega_1$  будет

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt[4]{(\sum M_k v'_k)^2 + (\sum M_k u'_k)^2}}. \quad (8.17)$$

Затем прикладываем в узлах нагрузки  $Q''_j, Q''_{i1}$  и по этим нагрузкам снова определяем перемещения  $v'', u''$  и новое значение  $\omega_2$ :

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt[4]{(\sum M_k v''_k)^2 + (\sum M_k u''_k)^2}}. \quad (8.17')$$

Вычисление прекращаем, когда полученное значение  $\omega_i^2$  будет мало отличаться от предыдущего  $\omega_{i-1}^2$ . Обычно процесс сходится довольно быстро, поэтому второго или третьего приближения бывает достаточно.

Численного примера для этого метода приводить не будем, а в дальнейшем приведем более простые методы подсчета основной частоты.

## Подсчет основной частоты по энергетическому методу

Для определения основной частоты колебаний стержневой фермы поступаем аналогично тому, как мы неоднократно уже делали при подсчете основной частоты для балок. Загружаем ферму такой статической нагрузкой, при которой можно ожидать, что форма изгиба фермы будет примерно соответствовать динамической для основного тока. Затем находим с помощью обычных методов строительной механики перемещения узлов вертикальные  $v$  и горизонтальные  $u$  смещения.

Обозначая через  $M_i$  массы, сосредоточенные в узлах, и вычисляя максимальную удвоенную кинетическую  $T$  и потенциальную  $V$  энергии, получим для квадрата основной частоты

$$\omega^2 = \frac{2V}{\sum M_i v_i^2 + \sum M_i u_i^2}, \quad (8.18)$$

где  $\omega^2 T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum M_i v_i^2$  — максимальная кинетическая энергия для смещения в вертикальном направлении;

$\omega^2 T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum M_i u_i^2$  — то же в горизонтальном направлении.

Для сосредоточенных нагрузок  $2V = \sum P_i v_i$  (где  $v_i$  — перемещение под грузом  $P_i$ ), а для распределенной (в узлах) нагрузки  $2V = \sum P_i v_i$ .

Значение перемещений узлов фермы может быть найдено либо с помощью построения диаграммы перемещения, либо с помощью метода фиктивных грузов, который в ряде случаев удобен и более нагляден, чем построение диаграммы перемещений, и является весьма эффективным при разыскании основной частоты колебаний стержневых систем.

Сущность этого метода основана на свойствах веревочного многоугольника и заключается, как известно, в следующем.

Если построен веревочный многоугольник для системы грузов  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (рис. 8.8), то величина  $H$  ( $\eta_2 - \eta_1$ ) представляет собой разность изгибающих моментов под грузами  $P_1$  и  $P_2$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} H(\eta_2 - \eta_1) &= Q_1 \lambda_2; \\ H(\eta_3 - \eta_2) &= Q_2 \lambda_3, \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  — соответственно поперечная сила на протяжении  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ . Так как  $Q_1 - Q_2 = P_1$ , то  $P_2 = H \left( \frac{\eta_2 - \eta_1}{\lambda_2} - \frac{\eta_3 - \eta_2}{\lambda_3} \right)$ .

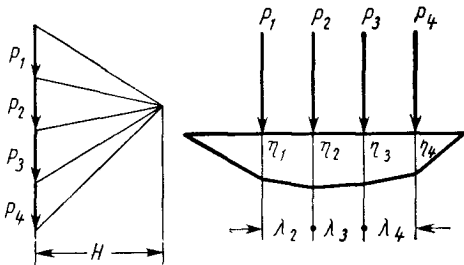


Рис. 8.8

Величину фиктивных грузов  $P_1, P_2, \dots$  мы можем подобрать так, чтобы ординаты веревочной кривой  $\eta_1, \eta_2$  совпали с прогибами  $y_1, y_2, \dots$ , т. е. для узла  $m$  ( $H = 1$ )

$$P_m = \frac{y_m - y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{y_{m+1} - y_m}{\lambda_{m+1}}, \quad (8.20)$$

где  $y_{m-1}, y_m, y_{m+1}$  — прогибы узлов  $m-1, m, m+1$ .

Для нахождения  $P$ , например, в случае фермы, показанной на рис. 8.9, поступают следующим образом. Выделяя треугольник  $m-1, m, m+1$ , прикладываем в узлах  $m-1, m+1$  силы  $\frac{1}{\lambda_m}$ ;  $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$  и в нижнем узле равнодействующую  $\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}}$ .

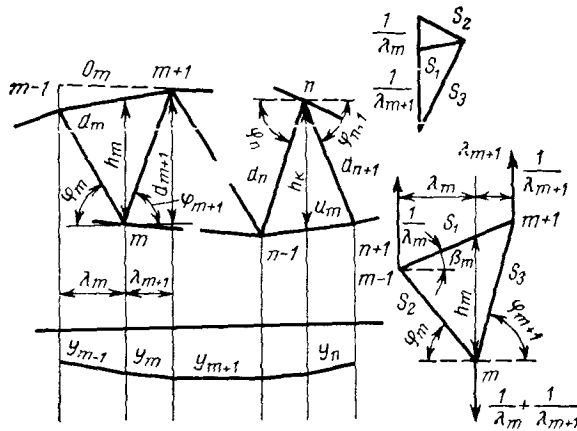


Рис. 8.9

Усилия  $S_1, S_2, S_3$  находят путем разложения, исходя из подобия треугольников  $-S : \frac{1}{\lambda_m} = \frac{\lambda_m}{\cos \beta_m} : h_m$ , т. е.

$$S_1 = -\frac{1}{h_m \cos \beta_m}; \quad S_2 = \frac{1}{h_m \cos \varphi_m}; \quad S_3 = \frac{1}{h_m \cos \varphi_{m+1}}. \quad (8.21)$$

Применяя начало возможных перемещений и беря за возможные действительные перемещения, соответствующие заданным нагрузкам, можно написать для работы внешних сил

$$U = \frac{1}{\lambda_m} (y_m - y_{m-1}) - \frac{1}{\lambda_{m+1}} (y_{m+1} - y_m); \quad (8.22)$$

для работы внутренних сил

$$V = -S_1 \delta O_m - S_2 \delta d_m - S_3 \delta d_{m+1}, \quad (8.23)$$

где  $\delta O_m, \delta d_m, \delta d_{m+1}$  — действительные удлинения сторон.

Так как  $U = P_m$ , то из условия  $U = V$  получим величину фиктивного груза:

$$P_m = \frac{1}{h_m} \left( -\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} \right); \quad (8.24)$$

для  $k$ -го узла верхнего пояса

$$P_k = \frac{1}{h_k} \left( \frac{\delta u_k}{\cos \gamma_k} - \frac{\delta d_k}{\cos \varphi_k} - \frac{\delta d_{k+1}}{\cos \varphi_{k+1}} \right). \quad (8.25)$$

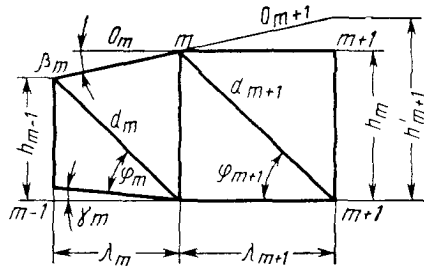


Рис. 8.10

Аналогичные формулы выведены и для системы со стойками. Например, для системы с нисходящими раскосами (рис. 8.10):

для узлов нижнего пояса

$$P_m = \frac{1}{h_m} \left( -\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\delta u_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} + \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\delta h_m h'_{m-1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{\delta h_{m-1} h_m}{\lambda_m} \right); \quad (8.26)$$

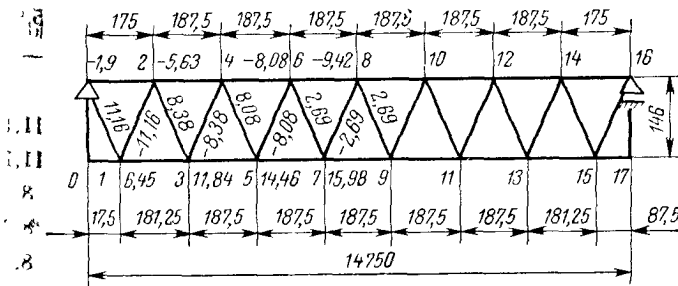


Рис. 8.11

для узлов верхнего пояса

$$P_m = \frac{1}{h_m} \left( -\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\delta u_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} + \frac{\delta d_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\delta d_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \frac{\delta h_m h'_{m-1}}{\lambda_m} + \frac{\gamma h_{m+1} h_m}{\lambda_{m+1}} \right).$$

Пользуясь значением фиктивных грузов, без всяких затруднений находим основную частоту колебаний стержневой системы.

Пр и м е р. Чтобы показать применение этого метода, рассмотрим балочную сквозную ферму с параллельными поясами и треугольной решеткой (рис. 8.11) и нагрузим ее постоянной нагрузкой 10 т/м. Строим для этой нагрузки диаграмму Кретоны и определяем усилия в стержнях.

Длины и площади сечений элементов, а также полученные усилия и изменения длины приведены в табл. 8.2; изменения длин, увеличенные в 1000 раз, указаны на рис. 8.11.

Т а б л и ц а 8.2

Усилия в элементах фермы

Элементы конструкции (см. рис. 8.12)	Длина элемента <i>l</i> в см	Усилия $S \cdot 10^{-3}$ в кг	Площадь поперечного сечения <i>F</i> в см <sup>2</sup>	Изменение длины стержня $\lambda \cdot 10^3$ в см
Верхний пояс				
0'—2	175,0	—3,90	171,20	—1,90
2—4	187,5	—10,803		—5,63
4—6		15,48		—3,06
6—8		—18,05		—9,43
Нижний пояс				
1—3	181,25	7,785	104,22	6,45
3—5	187,5	13,80		11,84
5—7		17,43		14,46
7—9		18,64		15,98
Раскосы				
0—1	170,2	7,575	55,08	11,16
1—2	173,5	—7,775		—11,16
2—3		5,883		8,38
3—4		—5,583		—8,38
4—5	173,5	3,348	34,26	8,08
5—6		—3,348		—8,08
6—7		1,116	2,69	
7—8		—1,116	—2,69	

Для определения смещений *v*, *u* применяем метод фиктивных грузов. Сначала вычисляем значения фиктивных грузов.

Для треугольников (рис. 8.12) значения углов  $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots$  будут

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{146}{87,5} = 1,6687; \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{146}{93,75} = 1,5574$$

$$\varphi_2 = 54^\circ 04' 03''; \quad \varphi_3 = 57^\circ 17' 45'';$$

$$\cos \varphi_2 = 0,5140; \quad \cos \varphi_3 = 0,5403.$$



Согласно формуле (8.25) получим для узлов верхнего пояса (рис. 8.12)

$$P_2 = \frac{10^{-3}}{146} \left( \frac{\delta U_2}{\cos \varphi_2} - \frac{\delta d_2}{\cos \varphi_2} - \frac{\delta d_3}{\cos \varphi_3} \right) =$$

$$= \frac{10^{-3}}{146} \left( 6,45 + \frac{11,16}{0,5140} - \frac{8,38}{0,5403} \right) = 0,0867 \cdot 10^{-3};$$

$$P_4 = \frac{10^{-3}}{146} \left[ 11,84 + \frac{1}{0,5403} (8,38 - 8,08) \right] = 0,0849 \cdot 10^{-3};$$

$$P_6 = \frac{10^{-3}}{146} \left[ 14,46 + \frac{1}{0,5403} (8,08 - 2,69) \right] = 0,1674 \cdot 10^{-3};$$

$$P_8 = \frac{10^{-3}}{146} \left[ 15,98 + \frac{1}{0,5403} (2,69 + 2,69) \right] = 0,1776 \cdot 10^{-3};$$

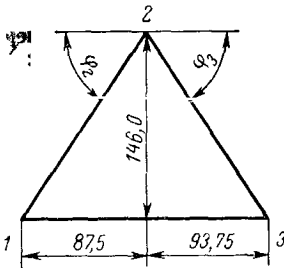


Рис. 8.12

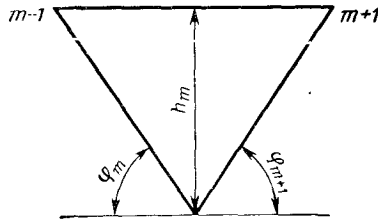


Рис. 8.13

для узлов нижнего пояса (рис. 8.13) ( $\cos \varphi_2 = 0,5140$ )

$$P_1 = \left( -\delta O_1 + \frac{\delta d_1}{\cos \varphi_1} + \frac{\delta d_2}{\cos \varphi_2} \right) \frac{1}{h} =$$

$$= \frac{10^{-3}}{146} \left[ 1,9 + \frac{11,6 - 11,6}{0,5285} \right] = 0,013 \cdot 10^{-3};$$

$$P_3 = \left( -\delta O_3 + \frac{\delta d_3}{\cos \varphi_3} + \frac{\delta d_4}{\cos \varphi_4} \right) \frac{1}{h} = \frac{5,63}{146} 10^{-3} = 0,0386 \cdot 10^{-3};$$

$$P_5 = \frac{8,08}{146} 10^{-3} = 0,0553 \cdot 10^{-3};$$

$$P_7 = \frac{9,43}{146} 10^{-3} = 0,0646 \cdot 10^{-3}.$$

*Вертикальные перемещения.* Прогобы узлов определяем по ординатам веревочной кривой (8.19), т. е.

$$v_1 = A \lambda_1; v_2 = v_1 + (A - P_1) \lambda_1; v_3 = v_2 + (A - P_1 - P_2) \lambda_2,$$

где  $A$  — реакции на левой опоре от  $P_1, P_2, \dots$ ,

$$A = P_1 + P_2 + \dots + P_7 + \frac{P_8}{2} = \left( 0,0130 + 0,0867 + 0,0386 + \right.$$

$$\left. + 0,0849 + 0,0553 + 0,1674 + 0,0646 + \frac{0,1776}{2} \right) 10^{-3} = 0,5993 \cdot 10^{-3}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 v_1 &= A87,5 = 0,5993 \cdot 87,5 \cdot 10^{-3} = 0,0524; \\
 v_2 &= v_1 + (A - P_1) 87,5 \cdot 10^{-3} = 0,0524 + 0,5863 \cdot 87,5 \cdot 10^{-3} = 0,1037 \cdot 10^{-3}; \\
 v_3 &= v_2 + (A - P_1 - P_2) 93,75 \cdot 10^{-3} = 0,01037 + \\
 &+ (0,5863 - 0,0867) 93,75 \cdot 10^{-3} = 0,1037 + 0,4996 \cdot 93,75 \cdot 10^{-3} = 0,1505; \\
 v_4 &= v_3 + (0,4996 - 0,0386) 93,5 \cdot 10^{-3} = 0,1505 + 0,4610 \cdot 93,75 \cdot 10^{-3} = 0,1937; \\
 v_5 &= 0,1937 + (0,4620 - 0,0849) 93,75 \cdot 10^{-3} = \\
 &= 0,1937 + 0,3761 \cdot 93,75 \cdot 10^{-3} = 0,2290; \\
 v_6 &= 0,2290 + (0,3761 - 0,0553) 93,75 \cdot 10^{-3} = 0,2591; \\
 v_7 &= 0,2591 + 0,1534 \cdot 93,75 \cdot 10^{-3} = 0,2735; \\
 v_8 &= 0,2735 + 0,0888 \cdot 93,75 \cdot 10^{-3} = 0,2818; \\
 v_9 &= 0,2818 - 0,0888 \cdot 93,75 \cdot 10^{-3} = 0,2735.
 \end{aligned}$$

*Горизонтальные перемещения. Верхний пояс.* Для верхнего пояса перемещения узла 2 (рис. 8.11) по направлению к неподвижному узлу  $O'$  будет:

$$\begin{aligned}
 10^2 u_2 &= \lambda_n \cdot 10^2 = 0,19; \\
 10^2 u_4 &= 10^2 u_2 + \lambda_{2-4} 10^{-1} = 0,19 + 0,563 = 0,753; \\
 10^2 u_6 &= 0,753 + 0,808 = 1,561; \\
 10^2 u_8 &= 1,561 + 0,943 = 2,5045; \\
 10^2 u_{10} &= 2,504 + 0,943 = 3,447; \\
 10^2 u_{12} &= 3,447 + 0,808 = 4,255; \\
 10^2 u_{14} &= 4,255 + 0,563 = 4,818; \\
 10^2 u_{16} &= 4,818 + 0,190 = 5,008.
 \end{aligned}$$

*Нижний пояс.* Перемещения узлов нижнего пояса симметричны относительно середины, т. е. узла 8. Относительно неподвижной точки  $O'$ , т. е.  $10^2 u_8 = 2,504$ , получим

$$\begin{aligned}
 10^2 u_7 &= \frac{\lambda_{7-9} 10^2}{2} + 10^2 u_8 = \frac{1,598}{2} + 2,504 = 3,303; \\
 10^2 u_5 &= 10^2 u_7 + \lambda_{5-7} 10^2 = 3,303 + 1,446 = 4,749; \\
 10^2 u_3 &= 4,749 + 1,184 = 5,933; \\
 10^2 u_1 &= 5,933 + 0,645 = 6,578; \\
 10^2 u_0 &= 10^2 u_1; \\
 10^2 u_9 &= 10^2 u_8 - \frac{\lambda_{7-9} 10^2}{2} = 2,504 - 0,799 = 1,705; \\
 10^2 u_{11} &= 10^2 u_0 - \lambda_{5-7} 10^2 = 1,705 - 1,446 = 0,259; \\
 10^2 u_{13} &= 0,259 - 1,184 = -0,925; \\
 10^2 u_{15} &= -0,925 - 0,645 = -1,57; \\
 10^2 u_{17} &= 10^2 u_{15}.
 \end{aligned}$$

Для подсчета потенциальной энергии распределяем нагрузку на узлы верхней панели.

Для подсчета частоты колебаний ненагруженной фермы все веса элементов поясов и решетки переносим в узлы (половину веса стержней, сходящихся в узле) и подсчитываем  $T_1$  и  $T_2$ .

Все вычисления сведены в табл. 8.3.

Таблица 8.3.

## Значения потенциальной и кинетической энергии

Узел (рис. 8.11)	Перемещения в см		Силы, сосредоточенные в узлах, $P$ в кг	Массы в узлах $10^3 M$ в $\text{кг} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^2$	Потенциальная энергия $V = \frac{1}{2} P v$	Приведенная кинетическая энергия	
	$v \cdot 10^2$	$u \cdot 10^2$				$10^4 T_1 = \frac{1}{2} M (v \cdot 10^2)^2$	$10^4 T_2 = \frac{1}{2} M (u \cdot 10^2)^2$
0	0	6,58		96,7		0,0	2,10
1	5,24			185,9		2,55	4,03
3	15,05	5,93		214,4		24,28	3,37
5	22,90	4,75				53,12	2,30
7		3,30	—		0,0		1,11
9	27,35	1,71		202,6		75,77	0,30
11	22,90	0,26				53,12	0,00
13	15,05	-0,93		214,4		24,28	0,09
15	5,24			185,9		2,55	0,23
17		-1,57		96,7			0,11
0'	0	0	875	216,9		0,00	0,00
2	10,37	0,19	1812	311,3	94,0	16,74	0,01
4	19,37	0,75		324,0	181,6	60,78	0,09
6	25,91	1,56			242,9	103,96	0,38
8	28,18	2,50	1875	309,7	264,2	122,97	0,97
10	25,91	3,45			242,9	103,96	1,85
12	19,37	4,26		324,0	181,6	60,78	2,95
14	10,37	4,82	1812	311,3	94,0	16,74	3,62
16	0	5,00	875	216,9	0	0,00	2,74
					$\Sigma =$ $= 1301,2$	$\Sigma = 797,37$	$\Sigma = 26,25$

Для частоты колебаний неагруженной фермы получим значение

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1301,2}{10^{-4} (797,37 + 26,25)}} = \sqrt{\frac{1301,2}{823,62 \cdot 10^{-4}}} = 125,7 \text{ 1/сек};$$

число колебаний  $n = \frac{60}{2\pi} 125,7 = 1200 \text{ кол/мин.}$

Как видно из табл. 8.3, величина кинетической энергии от горизонтальных смещений невелика, и ею можно пренебречь, что значительно упростит расчет. При наличии внешней нагрузки необходимо учесть еще кинетическую энергию этой нагрузки.

Например, если внешняя массовая нагрузка (давление бегунков) сосредоточена в узлах 6 и 10 и ее значение в каждом узле  $14600 \text{ кг} = Mg$ , то приведенная кинетическая энергия ее будет

$$T_3 = \frac{M}{2} (v_6^2 + v_{10}^2) = 9999,6 \text{ кг}\cdot\text{м.}$$

Следовательно,  $\omega_1 = \sqrt{\frac{V}{T_1 + T_2 + T_3}} = \sqrt{\frac{1301,2}{10^{-4} \cdot 10815}} = 34,69 \text{ 1/сек};$   
число колебаний  $n = 9,55\omega_1 = 331,3 \text{ кол/мин.}$

Когда масса сосредоточенных нагрузок значительно превышает массу фермы, лучшее приближение значения  $\omega_1$  можно было бы получить, принимая за форму изгиба ту, которая получается от действия сосредоточенных нагрузок. Число колебаний основного тона может быть также получено с достаточной точностью следующим образом.

Допустим, что стержневая ферма с нагрузкой, мало отличающейся от равномерно распределенной, заменена эквивалентной балкой постоянного сечения и жесткости с равномерно распределенной нагрузкой по длине. Определяя прогиб фермы в середине и приравнявая его прогибу балки постоянной жесткости  $v_0 = \frac{5}{384} \cdot \frac{Pl^4}{EJ}$ , находим жесткость  $EJ$ . Тогда частота колебаний  $\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \times \sqrt{\frac{EJ}{q}}$ , где  $q$  — масса фермы на одну погонную единицу.

Для рассмотренной выше фермы (см. рис. 8.11) прогиб среднего узла от нагрузки  $10 \text{ кг/см}$   $v_8 = 0,282 \text{ см}$ . Жесткость эквивалентной балки ( $P = 10 \text{ кг/см}$ )

$$EJ = \frac{5}{384v_0} Pl^4 = 0,4617l^4.$$

Вес фермы на 1 пог. см  $q = 298 \text{ кг}$ . Следовательно,

$$\omega = \pi^2 \sqrt{\frac{0,4617 \cdot 981}{2,98}} \approx 122 \text{ 1/сек.}$$

Совпадение этой частоты со значением 125,7 получается для данного случая вполне удовлетворительное.

## КОЛЕБАНИЕ ПЛИТ

### ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

#### Дифференциальное уравнение колеблющейся плиты

При определении частот колебаний будем последние рассматривать как тонкие пластинки.

Обычно под тонкой пластинкой понимается цилиндрическое или призматическое тело, высота которого мала по сравнению с остальными размерами. В дальнейшем при определении частот колебания мы будем пользоваться уравнениями теории тонких пластинок. Все эти выводы, однако, будут применимы и для плит при условии, что отношение толщины плиты к наименьшему из других ее размеров будет  $\frac{1}{10} - \frac{1}{5}$ , при условии малости прогиба по отношению к толщине [16].

Расположим оси  $x$  и  $y$  в средней плоскости пластинки, ось  $z$  направим вертикально. Выделим элемент пластинки размерами  $dx$ ,  $dy$  плоскостями, параллельными  $zx$ ,  $zy$ .

Будем предполагать по аналогии с теорией балок, что элементы выделенной нами призмы после деформации остаются плоскими и нормальными к срединной поверхности и что последняя не испытывает напряжений.

На элемент пластинки действуют нормальные  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и касательные  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$  напряжения (рис. 9.1).

Обозначим через  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$  относительные удлинения в направлении осей  $x$  и  $y$ , через  $e_{xy}$  — деформацию сдвига в плоскости  $xy$ . Тогда на основании закона Гука получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\sigma^2} (e_{xx} + \sigma e_{yy}); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\sigma^2} (e_{yy} + \sigma e_{xx}); \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\sigma)} e_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

где  $\sigma$  — коэффициент Пуассона.

Применяя те же рассуждения, что и при выводе уравнения изгиба бруса, можно написать

$$e_{xx} = \frac{z}{R_1}; \quad e_{yy} = -\frac{z}{R_2},$$

где  $R_1, R_2$  — радиусы кривизны в плоскостях  $xz, yz$  или, выражая  $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$  в зависимости от перемещений  $w$ , т. е.  $\frac{1}{R_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  и  $\frac{1}{R_2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E}{1-\sigma^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\sigma^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

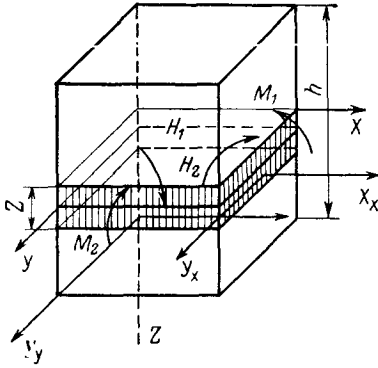


Рис. 9.1

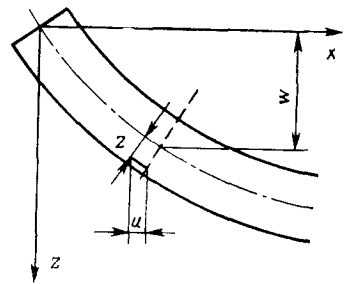


Рис. 9.2

Интенсивность изгибающих моментов вокруг осей  $y$  и  $x$

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \, dz; \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z \, dz,$$

или

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_2 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$  — цилиндрическая жесткость пластинки.

Значение  $\tau_{xy}$  выражается в зависимости от смещений  $u$  и  $v$ , параллельных осям  $x$  и  $y$ , следующим образом:

$$\tau_{xy} = \frac{E\epsilon_{xy}}{2(1+\sigma)} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Выражая эти смещения в зависимости от прогиба  $w$ , получим (рис. 9.2)

$$u = -z \operatorname{tg} \alpha = -z \frac{\partial u}{\partial y}; \quad v = -z \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$\text{Следовательно, } \tau_{xy} = -\frac{E}{1+\sigma} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z.$$

Тогда интенсивность крутящего момента будет  $H_2 = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz$

и  $H_2 = -H_1$ , так как  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ; следовательно,

$$H_1 = -H_2 = -D(1-\sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (9.3')$$

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности получим без всяких затруднений, если напишем условия равновесия элемента пластинки, находящегося под действием внешней нагрузки  $p(x, y, t)$ , нормальной к поверхности, перерезывающих сил  $N_1$  и  $N_2$ , изгибающих и скручивающих моментов  $M_1, M_2, H_1 = -H_2$ .

Отбрасывая усилия, действующие в срединной плоскости, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= -p; \\ \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} &= N_2; \\ -\frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial M_1}{\partial x} &= N_1. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

После подстановки значений  $N_1, N_2$  из второго и третьего уравнений в первое получим

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_2}{\partial y^2} = -p. \quad (9.5)$$

Заменяя здесь значения  $M_1, M_2$  и  $H_1$  при помощи формул (9.3) и (9.3'), получим дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластинки переменной жесткости  $D(x, y)$ :

$$\begin{aligned} D \Delta \Delta w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) + (\Delta D) (\Delta w) - \\ - (1-\sigma) \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = p; \quad (9.6) \end{aligned}$$

для пластинки постоянной толщины

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{1}{D} p(x, y). \quad (9.7)$$

Для колеблющейся пластинки необходимо вместо  $p(x, y)$  подставить выражение  $F(x, y, t) = \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$ . В таком случае дифференциальное уравнение колеблющейся тонкой плиты будет

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + \frac{q}{D} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{1}{D} F(x, y, t). \quad (9.8)$$

где  $\omega(x, y, t)$  — отклонение точки  $(x, y)$  от положения равновесия;

$q = \rho h$  — масса плиты, отнесенная к единице поверхности;

$F(x, y, t)$  — интенсивность внешней нагрузки.

В полярной системе координат

$$\begin{aligned} \Delta(D \Delta \omega) - (1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} \right) - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial D}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial D}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \right] = p. \quad (9.6') \end{aligned}$$

### Потенциальная и кинетическая энергия плиты

**Энергия плиты, изогнутой от действия поперечных нагрузок**  
Потенциальная энергия, приобретенная элементарным объемом плиты при деформации

$$dV = \left( \frac{e_{xx} \sigma_x}{2} + \frac{e_{yy} \sigma_y}{2} + \frac{e_{xy} \tau_{xy}}{2} \right) dx dy dz.$$

После подстановки значений для  $e_{xx}$ ,  $\sigma_x$ ,  $e_{yy}$ ,  $\sigma_y$ ,  $e_{xy}$ ,  $\tau_{xy}$  получим

$$\begin{aligned} dV = \frac{E z^2}{2(1 - \sigma^2)} \left[ \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2(1 - \sigma) \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy dz; \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b D \left[ \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2(1 - \sigma) \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (9.9) \end{aligned}$$



### Кинетическая энергия пластинки

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^a \int_0^b h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy. \quad (9.10)$$

В косоугольной системе координат  $\xi, \eta$  (см. рис. 9.20), связанной с декартовой соотношениями  $\xi = \frac{x}{\cos \theta}$ ,  $\eta = y - x \operatorname{tg} \theta$ , потенциальная энергия

$$V = \frac{1}{2 \cos \theta} \iint D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1 - \sigma) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right] \right\} d\xi d\eta; \quad (9.11)$$

кинетическая

$$T = \frac{1}{2} \rho \cos \theta \iint h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 d\xi d\eta, \quad (9.12)$$

где  $\Delta w = \frac{1}{\cos \theta} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2 \sin \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right]$ .

В полярной системе координат

$$V = \frac{1}{2} \iint D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1 - \sigma) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} r dr d\varphi; \quad (9.13)$$

$$T = \frac{\rho}{2} \iint h(r) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 r dr d\varphi. \quad (9.14)$$

**Энергия изогнутой плиты с учетом сил, действующих в срединной плоскости.** Если помимо поперечных нагрузок, вызывающих изгиб пластины, действуют силы в срединной плоскости пластины от силовых и температурных факторов, то возникает в ней напряженное состояние.

Работа, произведенная при изгибе силами, действующими в плоскости пластины, для элементарного объема

$$dV = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon'_{xx} + \sigma_y \epsilon'_{yy} + \tau_{xy} \epsilon'_{xy}) dx dy dz,$$

где  $\epsilon'_{xx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$ ;  $\epsilon'_{yy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$ ;  $\epsilon'_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$  — относительные деформации удлинения и сдвига в срединной плоскости.

Следовательно, работа, произведенная при изгибе поперечными силами,

$$V_1 = \frac{1}{2} \iint h(x, y) \left\{ \sigma_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right\} dx dy. \quad (9.15)$$

Потенциальная энергия пластинки от совместного действия усилий в срединной плоскости и поперечных сил (9.9)

$$V = \frac{1}{2} \iint h(x, y) \left[ \sigma_x \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] dx dy + \\ + \frac{1}{2} \iint D(x, y) \left\{ (\Delta \omega)^2 + 2(1 - \sigma) \left[ \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy; \quad (9.16)$$

в полярных координатах

$$V = \frac{1}{2} \iint h(r, \varphi) \left[ \sigma_r \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + \sigma_y \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\tau_{r\varphi} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right] r dr d\varphi + \frac{1}{2} \iint D(r, \varphi) \left\{ (\Delta \omega)^2 - 2(1 - \sigma) \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} \right) - \left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} r dr d\varphi. \quad (9.16')$$

### Граничные условия

В зависимости от способа заделки на контуре граничные условия могут быть в основном заданы в следующем виде.

Для опертого края прогиб и изгибающий момент должны обращаться в нуль, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \omega = 0; \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \text{ для } x = 0 \text{ или } x = a \\ \text{или} \\ \omega = 0; \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \text{ для } y = 0 \text{ или } y = b. \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

Для заделанного края необходимо удовлетворить условиям

$$\left. \begin{aligned} \omega = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \text{ для } x = 0 \text{ или } x = a \\ \text{или} \\ \omega = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \text{ для } y = 0 \text{ или } y = b. \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

Несколько сложнее условия для свободного края. Для этого случая необходимо, чтобы момент и перерезывающая сила обращались в нуль. При этом путем элементарных рассуждений устанавливается, что распределенные крутящие пары статически эквивалентны перерезывающей силе  $\frac{\partial H}{\partial y}$  или  $\frac{\partial H}{\partial x}$ . Поэтому необходимо, например, для свободного края  $x = 0$  или  $x = a$  удовле-

творить условиям  $M_1 = 0$ ;  $N_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} = 0$ , откуда для  $D = \text{const}$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} = 0. \quad (9.19)$$

Аналогично для  $y = 0$  или  $y = b$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0. \quad (9.20)$$

Помимо этих условий могут быть и другие, например, пластинка может опираться на балки или может быть упруго заделана по контуру.

В некоторых случаях граничные условия могут быть видоизменены. В частности, для случая симметричной деформации пластинки относительно прямой  $x = \frac{a}{2}$  или  $y = \frac{b}{2}$  и одинаковой заделки сторон  $x = 0$ ,  $x = a$  можно вместо условий для  $x = a$  написать условия симметрии для  $x = \frac{a}{2}$ , т. е. условия равенства нулю угла наклона касательной и перерезывающей силы

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad N_1 = 0 \quad \text{для } x = \frac{a}{2} \\ \text{или для } h = \text{const} & \\ & \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{для } x = \frac{a}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

В полярных координатах для изгибающих и крутящих моментов получим значения

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right) \right]; \\ M_\varphi &= -D \left[ \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right]; \\ H_{r\varphi} &= -(1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.22)$$

**Поперечные силы**

$$\left. \begin{aligned} N_r &= -D \frac{\partial \Delta w}{\partial r} \quad (r = \text{const}); \\ N_\varphi &= -D \frac{\partial \Delta w}{r \partial \varphi} \quad (\varphi = \text{const}). \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

**Перерезывающая сила на контуре для  $r = a$**

$$Q = N_r + \frac{\partial H_{r\varphi}}{r \partial \varphi}. \quad (9.24)$$

Для криволинейного контура плиты переменной жесткости (рис. 9.3) имеем изгибающий и крутящий моменты на контуре

$$\left. \begin{aligned} M_n &= -D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos^2 \alpha + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin^2 \alpha + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin 2\alpha \right]; \\ M_{ns} &= D(1 - \sigma) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \right]. \end{aligned} \right\} (9.22')$$

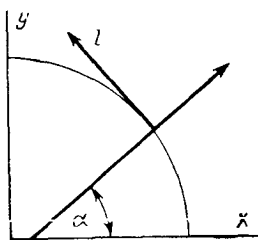


Рис. 9.3

Перерезывающая сила

$$\begin{aligned} Q_n &= -\frac{\partial}{\partial n} (D \Delta w) \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial s} (D \Delta w) \sin \alpha + \\ &\quad + (1 - \nu) \times \left\{ \frac{\partial D}{\partial n} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} \sin \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \cos \alpha \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial D}{\partial s} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \sin \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} \cos \alpha \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.24')$$

В формулах (9.22'), (9.24')  $\alpha$  — угол между нормалью  $n$  к контуру  $L$  и осью  $x$ ;  $\frac{\partial}{\partial s}$  — производная по дуге контура.

Условия на свободном контуре  $L$

$$M_n|_L = 0; \quad Q_n - \frac{\partial M_n}{\partial n} \Big|_L = 0.$$

## СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕНАГРУЖЕННЫХ ПЛИТ

### Плита, опертая по контуру

В дальнейшем для удобства вычислений будем пользоваться безразмерными координатами  $\xi, \eta$ , связанными с координатами  $x, y$  соотношениями  $\xi = \frac{x}{a}$ ;  $\eta = \frac{y}{a}$ .

В таком случае для свободных колебаний уравнение (9.8) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^4 w}{d\xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \frac{qa^4}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (9.25)$$

Решение уравнения (9.25) ищем в форме

$$w = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) W(\xi, \eta), \quad (9.26)$$

где  $W$  — функция лишь  $x$  и  $y$ .

После подстановки этого значения в уравнение (9.25) получим для определения  $W$  уравнение

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - \beta^2 W = 0, \quad (9.27)$$

где  $\beta^2 = \frac{a^4 q \omega^2}{D}$ .

Для того чтобы удовлетворить условиям на контуре (9.17), необходимо взять для прогиба пластинки выражение в виде двойного ряда

$$W(\xi, \eta) = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\mu_1\eta, \quad (9.28)$$

где  $\frac{1}{\mu} = \mu_1 = \frac{a}{b}$ .

Это выражение, как легко видеть, удовлетворяет для  $x = 0$ ,  $x = a$  ( $\xi = 0$ ,  $\xi = 1$ ) и  $y = 0$ ,  $y = b$  ( $\eta = 0$ ,  $\eta = \frac{b}{a}$ ) условиям на контуре (9.17).

После подстановки значения для  $W$  в уравнение (9.27) получим

$$\sum_m \sum_n A_{mn} [\pi^4 (m^2 + \mu_1^2 n^2)^2 - \beta^2] \sin m\pi\xi \sin n\pi\mu_1\eta = 0.$$

Умножая это выражение на  $\sin i\pi\xi \sin k\pi\mu_1\eta d\xi d\eta$  и интегрируя по площади пластинки, получим

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{b}{a}} \sum_m \sum_n A_{mn} [\pi^4 (m^2 + \mu_1^2 n^2)^2 - \beta^2] \times \\ \times \sin m\pi\xi \cdot \sin i\pi\xi \cdot \sin k\pi\mu_1\eta \cdot \sin n\pi\mu_1\eta d\eta d\xi = 0.$$

По условиям ортогональности тригонометрических функций все члены с индексами  $m \neq i$ ,  $n \neq k$  пропадают и остается лишь выражение

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{b}{a}} A_{mn} [\pi^4 (m^2 + \mu_1^2 n^2)^2 - \beta^2] \sin^2 m\pi\xi \cdot \sin^2 n\pi\mu_1\eta d\xi d\eta = 0.$$

Это выражение тождественно обращается в нуль для

$$\beta^2 = \pi^4 (m^2 + \mu_1^2 n^2)^2.$$

Таким образом, частоты собственных колебаний опертой плиты определяются формулой

$$\omega = \frac{\pi^2}{a^2} (m^2 + \mu_1^2 n^2) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \quad (9.29)$$

Придавая различные значения  $m$  и  $n$ , будем получать частоты, соответствующие различным тонам колебаний.

Наименьшая частота колебаний (основной тон) получается для  $m = 1$ ,  $n = 1$ :

$$\omega = \frac{\pi^2}{a^2} (1 + \mu_1^2) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \quad (9.30)$$

Уравнение изогнутой поверхности для этого случая

$$w(x, y, t) = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \cos \omega t.$$

Изменяя значения  $m$  и  $n$ , увидим, что пластинку можно разделить узловыми линиями (с нулевыми прогибами) на отдельные части (рис. 9.4).

Для  $m = 2, n = 1$  пластинку можно разделить на две части, так как

$$W = A_{21} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \cos \omega t,$$

и для  $x = \frac{a}{2}$

$$w \left( \frac{x}{2}, y, t \right) = 0.$$



Рис. 9.4

Накладывая различные формы деформированных поверхностей с одинаковыми частотами, получим различное положение узловых линий (рис. 9.4).

### Плита с двумя опертыми краями

Рассмотрим прямоугольную плиту, стороны которой  $x = 0, x = a$  оперты, стороны  $y = 0, y = b$  заделаны любым образом. Для этого случая решение (9.27) получается без затруднений, если взять для  $W(\xi, \eta)$  выражение

$$W(\xi, \eta) = \sum_m Y_m(\eta) \sin m\pi\xi, \quad (9.31)$$

удовлетворяющее условиям для  $x = 0, x = a$  ( $\xi = 0, \xi = 1$ ).

После подстановки в уравнение (9.27) получим для определения  $Y_m(\eta)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Y_m^{(IV)}(\eta) - 2m^2\pi^2 Y_m''(\eta) + (m^4\pi^4 - \beta^2) Y_m(\eta) = 0. \quad (9.32)$$

Корни характеристического уравнения

$$s^4 - 2m^2\pi^2 s^2 + (m^4\pi^4 - \beta^2) = 0$$

будут

$$\left. \begin{aligned} s_{1m} = -s_{3m} &= \sqrt{m^2\pi^2 - \beta}; \\ s_{2m} = -s_{4m} &= \sqrt{m^2\pi^2 + \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (9.33)$$

Решение можно записать в виде

$$Y_m(\eta) = A_m \operatorname{sh} s_{1m}\eta + B_m \operatorname{ch} s_{1m}\eta + C_m \operatorname{sh} s_{2m}\eta + D_m \operatorname{ch} s_{2m}\eta. \quad (9.34)$$

Удовлетворяя выбранным условиям для  $y = 0$  и  $y = b$  ( $\eta = 0$ ,  $\eta = \mu$ ), получим систему однородных уравнений относительно постоянных  $A_m, B_m, C_m, D_m$ ; определитель, составленный из коэффициентов при них, дает уравнение частоты.

Рассмотрим, например, пластинку, край которой  $y = 0$  оперт, а край  $y = b$  заделан. Тогда из условия

$$W(0, \xi) = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0 \quad \text{для } \eta = 0$$

получим  $Y_m(\eta) = A_m \operatorname{sh} s_{1m}\eta + C_m \operatorname{sh} s_{2m}\eta$ .

Удовлетворяя условиям  $W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0$  для  $\eta = \frac{b}{a} = \mu$ ,

получим  $A_m \operatorname{sh} \frac{s_{1m}}{\mu_1} + C_m \operatorname{sh} \frac{s_{2m}}{\mu_1} = 0$ ;

$$A_m s_{1m} \operatorname{ch} \frac{s_{1m}}{\mu_1} + C_m s_{2m} \operatorname{ch} \frac{s_{2m}}{\mu_1} = 0.$$

Из условия совместности этих уравнений имеем

$$s_{2m} \operatorname{ch} \frac{s_{2m}}{\mu_1} \operatorname{sh} \frac{s_{1m}}{\mu_1} - s_{1m} \operatorname{ch} \frac{s_{1m}}{\mu_1} \operatorname{sh} \frac{s_{2m}}{\mu_1} = 0$$

или  $\frac{1}{s_{1m}} \operatorname{th} \frac{s_{1m}}{\mu_1} - \frac{1}{s_{2m}} \operatorname{th} \frac{s_{2m}}{\mu_1} = 0$ .

Корни этого уравнения находятся без всяких затруднений с помощью таблиц функций. Для  $\beta > m^2 \pi^2$  необходимо перейти к круговым функциям.

### Плита, заделанная по контуру

Получение уравнения частот колебаний плиты, заделанной по контуру, представляет затруднения математического характера. Отметим ход решения уравнения (9.25) для этого случая, которое дано в работах [128, 127].

Условия на контуре должны быть следующие

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{для } x = 0, x = a;$$

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad \text{для } y = 0, y = b.$$

Задаемся перемещением  $W$  в виде ряда

$$W = \sum_m \sum_n A_{mn} \left[ \frac{x^3}{a^3} - \frac{2x}{a^2} + \frac{x}{a} + (-1)^m \left( \frac{x^3}{a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a} \right] \left[ \frac{y^3}{b^3} - 2 \frac{y^2}{b^2} + \frac{y}{b} + (-1)^n \left( \frac{y^3}{b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) - \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{b} \right]. \quad (9.35)$$

Как легко проверить, эта функция удовлетворяет всем условиям на контуре.

Подберем теперь коэффициенты  $A_{mn}$  таким образом, чтобы значение  $W$  (9.35) удовлетворяло тождественно уравнению (9.27). Для этого подставим значение (9.35) в дифференциальное уравнение (9.27) и разложим полученное выражение в двойной ряд Фурье

$$\sum_m \sum_n a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (9.36)$$

Условия обращения в нуль (9.36) приводят к системе линейных уравнений относительно неизвестных  $a_{mn}$ .

После ряда упрощений и суммирования некоторых выражений с учетом типа колебаний эта система уравнений может быть значительно упрощена.

В работах С. Игуши было получено значительное число частот и форм колебаний для плит, заделанных по контуру.

Не останавливаясь на этих результатах, в табл. 9.1 приводим данные расчета на ЭЦВМ для квадратных плит с различными условиями заделки по контуру, полученных по описанному ниже методу (стр. 300).

Таблица 9.1

Собственные значения  $\beta$  для квадратных пластин с различными условиями закрепления краев

Условия заделки		Число узловых линий $m$ по $x$	Число узловых линий $n$ по оси $y$			
$x=0,$ $x=a$	$y=0,$ $y=a$		1	2	3	4
Заделан		0	—	15,207	49,638	104,561
		1		20,496	56,496	111,164
Свободен	Оперт	2		39,751	78,724	117,378
		3		77,348	117,378	176,708
Заделан		2	23,959	40,044	28,095	133,869
		3	63,284	80,645	117,60	171,370
Заделан	Свободен	4	123,404	140,648	—	—
		5	201,211	220,898	168,304	—
Заделан		2	—	27,088	60,839	107,625
		3		60,839	81,924	130,926
Оперт		4		107,625	130,926	164,274
		5				
Заделан		2	—	35,965	73,390	130,77
		3		73,390	108,071	164,98
		4		130,77	164,98	220,13
		5		210,191	243,08	297,13



Первые шесть форм 1—6 приведены на рис. 9.5. Значения коэффициента  $\beta$  основного тона закрепленной прямоугольной плиты следующие:

$\frac{b}{a}$	$\beta$	$\frac{b}{a}$	$\beta$
1	35,98	2,5	23,77
1,5	27,00	3,0	23,19
2,0	24,57	—	22,37

Частота колебаний определяется по формуле  $\omega = \frac{\beta}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ .

### Плита со свободными краями

Изучение колебаний плиты со свободными краями было проведено еще Ритцом с помощью предложенного им метода. Значительное число частот и форм колебаний было получено С. Игуши.

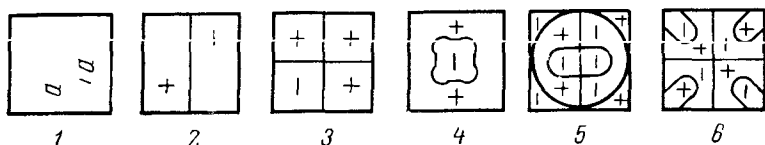


Рис. 9.5

Ниже даны значения коэффициента  $\lambda$  ( $\beta = \pi^2 \lambda$ ) для свободной пластинки в зависимости от форм колебаний, приведенных на рис. 9.6.

Форма колебаний	$\lambda$	Форма колебаний	$\lambda$	Форма колебаний	$\lambda$	Форма колебаний	$\lambda$
1	1,3657	6	6,900	10	10,686	15	16,364
2	1,9855	7	6,6232	11	11,866	16	17,071
3	2,4591	8	7,0420	12	12,406	17	17,596
4	3,5261	9	7,8615	13	13,321	18	20,736
5	6,4528			14	15,830		

Формы колебаний удобно брать в различном виде, в зависимости от типов колебаний. Например, для форм, симметричных относительно обеих средних линий (формы 3, 5, 12 . . .),

$$W(x, y) = \alpha_0 u_{\alpha_0}(\xi) + b_0 u_{\beta_0}(\eta) + \sum_n \alpha_n u_{\alpha_n}(\xi) (-1)^2 \cos n\pi\eta + \sum_n b_n u_{\beta_n}(\eta) (-1)^{\frac{m}{2}} \cos m\pi\xi.$$

Для форм, симметричных относительно диагоналей и антисимметричных относительно обеих средних линий (1, 9, 14 . . .),

$$W(x, y) = \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \alpha'_n [v_n(\xi) \sin n\pi\eta + v_n(\eta) \sin n\pi\xi]$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

Соответствующим образом приняты формы и для других случаев [симметричных относительно обеих средних линий и анти-

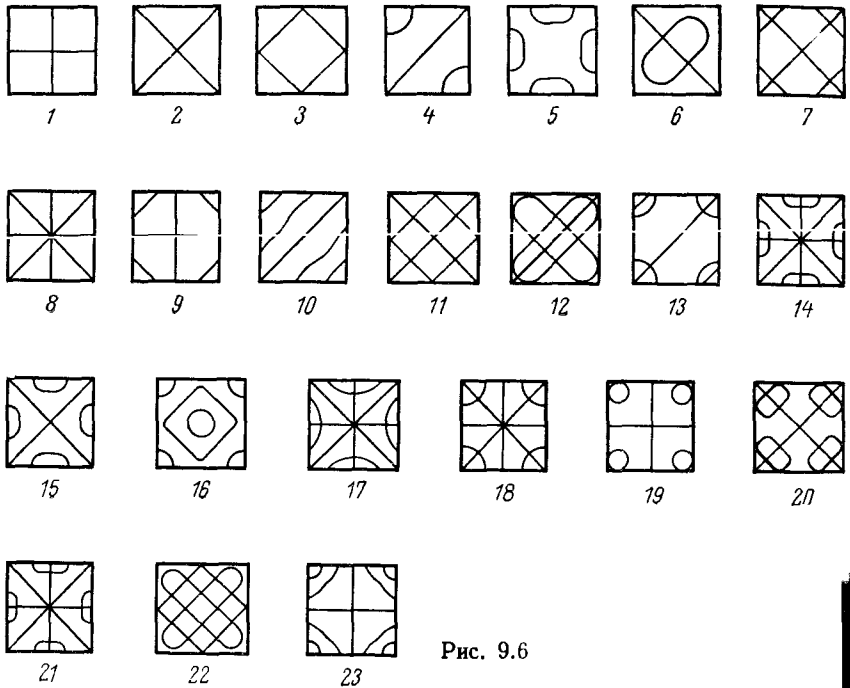


Рис. 9.6

симметричных относительно диагоналей (2, 7, 11, 15), антисимметричные относительно обеих средних линий и диагоналей (15, 8, 17), антисимметричные относительно средней линии  $\eta = 0$  и симметричные относительно линии  $\xi = 0$  (4, 16, 10, 13)].

## КОЛЕБАНИЯ КРУГЛЫХ ПЛИТ

### Дифференциальное уравнение

При рассмотрении колебаний круглой плиты дифференциальное уравнение равновесия можно получить, исходя из принципа Гамильтона, используя выражения (9.13) и (9.14) для потенциальной и кинетической энергии, или непосредственно из условий

равновесия. Дифференциальное уравнение движения плиты постоянной толщины (9.8) в полярных координатах

$$\Delta \Delta w + \frac{q}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{D} F(r, \varphi, t), \quad (9.37)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа в координатах  $(r, \varphi)$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Когда к контуру круглой пластинки постоянной толщины приложено постоянное растягивающее или сжимающее усилие интенсивностью  $N$  на единицу длины, дифференциальное уравнение колеблющейся пластинки будет

$$\Delta \Delta w \pm \frac{N}{D} \Delta w + \frac{q}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (9.38)$$

где знак «минус» для растягивающего усилия, «плюс» для сжимающего.

### Свободные колебания круглой плиты

Для свободных колебаний решение (9.37) ищем в виде

$$w(r, \varphi, t) = W(r, \varphi) (A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

После подстановки значения  $w(r, \varphi, t)$  в уравнение (9.37)

$$\Delta \Delta W + \frac{q}{D} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

и введения безразмерного радиуса  $\rho_1 = \frac{r}{a}$  получим

$$\Delta \Delta W - \beta^4 W = 0, \quad (9.39)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ .

Дифференциальное уравнение (9.39) можно записать в символическом виде

$$(\Delta - \beta^2)(\Delta + \beta^2)W = 0. \quad (9.40)$$

Решение каждого уравнения

$$\left. \begin{aligned} (\Delta - \beta^2)W_1 &= 0; \\ (\Delta + \beta^2)W_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.41)$$

будет решением уравнения (9.40).

Уравнения (9.41) в развернутом виде

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \pm \beta^2 W = 0. \quad (9.42)$$

Принимая

$$W = A \cos(n\varphi + \psi) u(r), \quad (9.43)$$

получим для определения  $u(r)$  уравнение

$$\frac{d^2 u}{d\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{du}{d\rho_1} + \left( \beta^2 \pm \frac{n^2}{\rho_1^2} \right) u = 0, \quad (9.44)$$

которое для верхнего знака имеет решение в функциях Бесселя мнимого аргумента  $I_n(\beta\rho_1)$ ,  $K_n(\beta\rho_1)$ , для нижнего — действительного аргумента  $J_n(\beta\rho_1)$ ,  $N_n(\beta\rho_1)$ .

Решение уравнения (9.40):

$$W(\rho_1\varphi) = [A_n J_n(\beta\rho_1) + B_n N_n(\beta\rho_1) + C_n I_n(\beta\rho_1) + D_n K_n(\beta\rho_1)] \cos n\varphi. \quad (9.45)$$

Удовлетворяя граничным условиям на контуре, в зависимости от условий заделки получим уравнение частоты. Граничные условия для круглой пластинки можно записать в следующем виде:

Т а б л и ц а 9.2

Значения коэффициента  $\beta$  для пластинки

s	n=0	n=1	n=2	n=3
<i>Закрепленная по контуру</i>				
0	10,21	21,22	34,84	51,04
1	39,78	61,00	88,36	111,00
2	88,90	120,56	158,76	190,30
3	145,60	199,06	242,71	289,17
<i>Свободная</i>				
0	—	—	5,251	12,23
1	9,076	20,52	35,24	52,91
2	38,62	59,86	83,91	111,30
3	87,80	119,03	154,01	192,10
<i>Опертая по контуру</i>				
0	4,977	13,94	25,65	—
1	29,76	48,51	70,14	—
2	74,20	102,80	134,33	—

условия для круглой пластинки можно записать в следующем виде:

для заделанной пластинки при  $r = a$

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0; \quad (9.46)$$

для опертого края при  $r = a$

$$\omega = 0, \quad M_r = 0; \quad (9.47)$$

для свободной пластинки

$$M_r = 0, \quad Q_r = 0. \quad (9.48)$$

Круговая частота колебаний пластинки

$$\omega = \frac{\beta}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \quad (9.49)$$

Значение коэффициента  $\beta$  может быть взято из табл. 9.2, где число узловых диаметров обозначено через  $n$ , а число узловых окружностей — через  $s$ .

Значения  $\beta$  для свободной пластинки, закрепленной в центре, следующие:

s	$\beta$	s	$\beta$
0	3,75	2	60,68
1	20,91	3	119,7

Для круглой пластинки, заземленной по контуру и нагруженной в центре сосредоточенной массой  $m$ , для осесимметричных колебаний значения  $\beta$  в зависимости от  $\mu = \frac{m}{\rho h a^2}$  приведены на рис. 9.7.

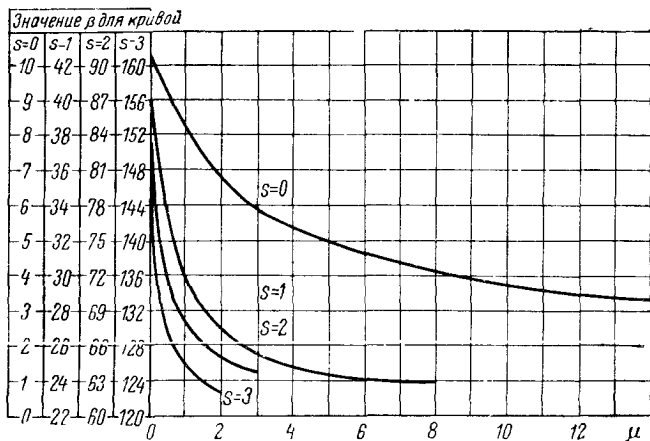


Рис. 9.7

### Круглая пластинка под действием равномерно растягивающих или сжимающих сил

Интенсивность усилий, приложенных по контуру в срединной плоскости, обозначим  $N$ .

Дифференциальное уравнение изгиба для случая растяжения

$$\Delta \Delta w - \frac{N}{D} \Delta w + \frac{\rho h}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (9.50)$$

Решение уравнения (9.50) для свободных колебаний ищем в виде

$$w(r, \varphi, t) = u(r\varphi) \cos n(\omega t - \psi). \quad (9.51)$$

После подстановки значения (9.51) в уравнение (9.50) получим

$$\Delta \Delta u - \frac{N}{D} \Delta u - \frac{\rho h}{D} n^2 \omega^2 u = 0. \quad (9.52)$$

Уравнение (9.52) может быть записано в виде

$$(\Delta + \alpha_n^2)(\Delta - \beta_n^2)u = 0; \quad (9.53)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n^2 &= -\frac{N}{2D} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{N}{D}\right)^2 + 4\delta_n^2}; \\ \beta_n^2 &= \frac{N}{2D} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{N}{D}\right)^2 + 4\delta_n^2}, \end{aligned} \right\} \quad (9.54)$$

где  $\delta_n^4 = \frac{\rho h}{D} n^2 \omega^2$ .

Решение уравнения (9.52) будет

$$u(r) = AJ_n(\alpha_n r) + BN_n(\alpha_n r) + CI_n(\beta_n r) + DK_n(\beta_n r). \quad (9.55)$$

Удовлетворяя граничным условиям для  $r = b$  и  $r = a$ , получим частотное уравнение. Для пластинки без отверстия, защемленной по контуру, получим такое частотное уравнение:

$$\alpha_n J_n(\beta_n a) I_{n+1}(\alpha_n a) + \beta_n I_n(\alpha_n a) J_{n+1}(\beta_n a) = 0. \quad (9.56)$$

Значения  $\delta_{ns}^2 a^2$  для равномерно растянутого диска при  $n = 0$  приведены в табл. 9.3.

Таблица 9.3

Значения  $\delta_{ns}^2 a^2$  для растянутой пластинки

s	$\sqrt{\frac{N}{D}} a$				
	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4
0	10,22	10,55	11,49	12,80	14,60
1	39,77	40,19	41,42	43,38	46,00
2	89,10	89,55	90,88	93,04	95,98

Значения частоты колебаний  $\omega_1 = \delta_{ns}^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h_1}}$ .

Для случая равномерно сжатой пластинки значение корней может быть взято из табл. 9.4.

Таблица 9.4

Значения  $\delta_{ns}^2 a^2$  для сжатой пластинки

Число узловых диаметров n	s=0		s=1		s=2	
	$\sqrt{\frac{N}{D}} a$	$\delta_{np}^2 a^2$	$\sqrt{\frac{N}{D}} a$	$\delta_{n1}^2 a^2$	$\sqrt{\frac{N}{D}} a$	$\delta_{n2}^2 a^2$
0	0	10,22	0	39,77	0	89,10
	1	9,87	2	38,05	3	84,99
	2	8,75	4	32,35	6	71,23
	3	6,41	6	19,66	9	39,22
	3,832	0	7,016	0	10,174	0
1	0	21,26	0	60,83	0	120,88
	1	20,86	2	59,06	3	116,48
	2	19,61	4	53,39	6	102,42
	3	17,32	6	42,30	9	74,78
	4	13,43	8,417	0	11,62	0
5,135	0					
2	0	34,88				
	2	33,15				
	4	27,27				
	6	11,97				
	6,379	0				

## Кольцевые круглые плиты

Приводим некоторые результаты для кольцевых плит постоянной толщины, радиус внутреннего отверстия которых  $r = b$ ,  $\frac{b}{a} = d$ .

На рис. 9.8 и 9.9 приведены первые три значения  $k = \sqrt{\beta}$  для пластинки: а) защемленной при  $r = a$  и свободной при  $r = b$ ; б) свободной при  $r = b$  и опертой при  $r = a$ ; в) с сосредоточенной массой в центре (рис. 9.7).

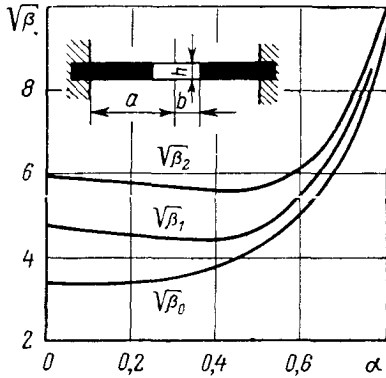


Рис. 9.8

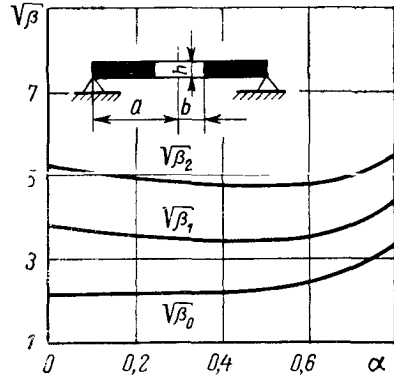


Рис. 9.9

### Колебания эллиптической пластинки

Решение задачи для эллиптической пластинки получается, если вместо прямоугольных координат  $x, y$  ввести эллиптические координаты  $\xi, \eta$ , получаемые из выражения  $x + iy = c \operatorname{ch}(\xi + i\eta)$ . При этом  $\xi = \operatorname{const}$  — софокусные эллипсы,  $\eta = \operatorname{const}$  — гиперболы.

Уравнения софокусных эллипсов и гипербол ( $c_2 = a^2 - b^2$ ) будут

$$\frac{x^2}{(c \operatorname{ch} \xi)^2} + \frac{y^2}{(c \operatorname{sh} \xi)^2} = 1;$$

$$\frac{x^2}{(c \cos \eta)^2} - \frac{y^2}{(c \sin \eta)^2} = 1.$$

Контур плиты задан уравнением  $\xi = \xi_0$ . На контуре плиты должно быть

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \operatorname{ch} 2\xi_0. \quad (9.57)$$

Дифференциальное уравнение  $\Delta \Delta \omega + \frac{\rho h}{D} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0$   
или уравнения

$$\left. \begin{aligned} \Delta \omega - \beta_1 \omega &= 0, \\ \Delta \omega + \beta_1 \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.58)$$

должны быть записаны в эллиптической системе координат:

$$\frac{1}{h_1^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right) \pm \beta_1 \omega = 0, \quad (9.59)$$

где  $h_1^2 = \frac{c^2}{2} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)$ .

Уравнение (9.59) является уравнением Маттье, теория которого хорошо разработана.

Частота колебаний эллиптической плиты, заделанной по контуру, отнесенная к меньшей полуоси, определяется по формуле

$$\omega = \frac{\beta}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$

$$\text{Для основного тона } \beta = 6,325 \sqrt{1 + \frac{2}{3} \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^4}. \quad (9.60)$$

### СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НАГРУЖЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛИТ

#### Изложение метода

Будем по-прежнему предполагать, что плита ограничена контуром  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ . Края плиты  $x = 0$ ,  $x = a$  предполагаем шарнирно-опертыми, т. е.  $W = 0$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$  для  $x = 0$  и  $x = a$ ; края  $y = 0$ ,  $y = b$  закреплены любым способом.

Предположим, что плита в общем случае нагружена сосредоточенными нагрузками, распределенными по прямым. Решение для этого случая может быть получено с помощью общего метода составления решений уравнений с правой частью [49].

Перемещение  $w(x, y, t)$  при внешних нагрузках должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{q}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{D} F(x, y, t), \quad (9.61)$$

где  $F(x, y, t)$  — внешняя сила, отнесенная к единице поверхности; полагаем, что она будет периодической функцией времени

$$F(x, y, t) = p(x, y) (A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Для простоты рассуждений допустим сперва, что плита нагружена по одной прямой  $y = d_1$ . Нагрузку по этой прямой предпо-



лагаем сначала распределенной на участке от  $y = d_1$  до  $y = d_1 + \sigma$ . В направлении оси  $x$  нагрузка меняется по любому закону и может быть прерывной или непрерывной.

Таким образом, предполагаем, что нагрузка

$$F(x, y, t) = p(x, y) (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \text{ для } d_1 \leq y \leq d_1 + \sigma. \quad (9.62)$$

Для остальной части  $F(x, y, t) = 0$ .

Разыскиваем решение уравнения (9.8) в форме

$$\omega(x, y, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) W(x, y), \quad (9.63)$$

где  $W$  — функция  $x$  и  $y$ .

Возьмем вместо  $x$  и  $y$  безразмерные координаты  $\xi = \frac{x}{a}$ ,  $\eta = \frac{y}{a}$ .

Получаем для определения  $W$  уравнение

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - \beta^2 W = \frac{a^4}{D} f(\xi, \eta), \quad (9.64)$$

где по-прежнему  $\beta^2 = \frac{a^4 q \omega^2}{D}$ ;

$$f(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq \eta \leq \eta_1, \quad \eta_1 + \sigma_1 \leq \eta \leq \mu, \\ \rho_1(\xi, \eta) & \text{для } \eta_1 \leq \eta \leq \eta_1 + \sigma_1, \end{cases}$$

причем  $a\eta_1 = d_1$ ;  $\sigma_1 a = \sigma$ .

Так как по условию плита оперта по краям  $x = 0$  и  $x = a$ , то решение уравнения (9.64) ищем в виде

$$W = \sum_n V_n(\eta) \sin n\pi\xi. \quad (9.65)$$

Условия на контуре для  $x = 0$ ,  $x = a$  при этом выполняются. Подставляя значения (9.65) в уравнение (9.64), получим

$$\sum_n \{V_n^{IV} - 2n^2\pi^2 V_n'' + (n^4\pi^4 - \beta^2) V_n\} \sin n\pi\xi = \frac{a^4}{D} f(\xi, \eta). \quad (9.65')$$

Умножая обе части этого равенства на  $\sin k\pi\xi$  и интегрируя в пределах от 0 до 1, получим

$$V_n^{IV} - 2n^2\pi^2 V_n'' + (n^2\pi^4 - \beta^2) V_n = \varphi(\eta), \quad (9.66)$$

так как в левой части все интегралы, содержащие произведение  $\sin k\pi\xi \cdot \sin n\pi\xi$ , для  $k \neq n$  пропадут.

В уравнении (9.66)

$$\varphi(\eta) = \frac{2a^4}{D} \int_0^1 f(\xi, \eta) \sin n\pi\xi d\xi. \quad (9.67)$$

Решение этого уравнения будет

$$V_n(\eta) = Y_n(\eta) + \Phi_n(\eta), \quad (9.68)$$

где  $Y_n(\eta)$  — общее решение уравнения (9.66) без правой части;  $\Phi_n(\eta)$  — частное решение с правой частью.

Решение уравнения (9.66) без правой части  $Y_n(\eta)$  согласно формуле (9.34) имеет вид

$$Y_n(\eta) = A_n \operatorname{sh} s_{1n}\eta + B_n \operatorname{ch} s_{1n}\eta + C_n \operatorname{sh} s_{2n}\eta + D_n \operatorname{ch} s_{2n}\eta; \quad (9.69)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} s_{1n} &= -s_{3n} = \sqrt{n^2\pi^2 - \beta^2}; \\ s_{2n} &= -s_{4n} = \sqrt{n^2\pi^2 + \beta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.70)$$

Решение  $Y_n(\eta)$  (9.66) удобно представить в виде

$$Y_n(\eta) = A_n Y_{0n}(\eta) + B_n Y_{1n}(\eta) + C_n Y_{2n}(\eta) + D_n Y_{3n}(\eta), \quad (9.71)$$

где каждое из частных решений  $Y_{0n}$ ,  $Y_{1n}$ ,  $Y_{2n}$ ,  $Y_{3n}$  и производные по  $\eta$  от них, до третьего порядка включительно, удовлетворяют для  $\eta = 0$  условиям типа Коши:

$$\left. \begin{aligned} Y_{0n}(0) &= 1; \quad Y'_{0n}(0) = 0; \quad Y''_{0n}(0) = 0; \quad Y_{0n}(0) = 0; \\ Y_{1n}(0) &= 0; \quad Y'_{1n}(0) = 1; \quad Y''_{1n}(0) = 0; \quad Y_{1n}(0) = 0; \\ Y_{2n}(0) &= 0; \quad Y'_{2n}(0) = 0; \quad Y''_{2n}(0) = 1; \quad Y_{2n}(0) = 0; \\ Y_{3n}(0) &= 0; \quad Y'_{3n}(0) = 0; \quad Y''_{3n}(0) = 0; \quad Y_{3n}(0) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (9.72)$$

Решения  $Y_{in}$  при условиях (9.72) могут быть также вычислены без всяких затруднений. После вычислений для этих условий получим

$$\left. \begin{aligned} Y_{0n} &= \frac{1}{2\beta} (s_{2n}^2 \operatorname{ch} s_{1n}\eta - s_{1n}^2 \operatorname{ch} s_{2n}\eta); \\ Y_{1n} &= \frac{1}{2\beta} \left( \frac{s_{2n}^2}{s_{1n}} \operatorname{sh} s_{1n}\eta - \frac{s_{1n}^2}{s_{2n}} \operatorname{sh} s_{2n}\eta \right); \\ Y_{2n} &= \frac{1}{2\beta} (\operatorname{ch} s_{2n}\eta - \operatorname{ch} s_{1n}\eta); \\ Y_{3n} &= \frac{1}{2\beta} \left( \frac{1}{s_{2n}} \operatorname{sh} s_{2n}\eta - \frac{1}{s_{1n}} \operatorname{sh} s_{1n}\eta \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.73)$$

Частное решение с правой частью  $\Phi_n(\eta)$  ищем при граничных условиях  $V_n(0) = V'_n(0) = V''_n(0) = V'''_n(0) = 0$ . (9.74)

В операционной форме для условий (9.74) уравнение (9.66) будет иметь вид  $[p^4 - 2n^2\pi^2 p^2 + (n^4\pi^4 - \beta^2)] V_n = \varphi_n$ ; отсюда

$$V_n \equiv F^{-1}(p) \varphi(p) \delta = \frac{\varphi(p)}{p^4 - 2n^2\pi^2 p^2 + (n^4\pi^4 - \beta^2)} \delta,$$

где  $\delta$  — единичная функция.

Разлагая рациональную дробь на простейшие, имеем

$$V_n = \sum_{i=1}^4 \frac{\varphi(\rho) \delta}{F'(s_{in})(\rho - s_{in})},$$

где  $F'(s_{in}) = 4s_{in}(s_{in}^2 - n^2\pi^2)$ .

Отсюда согласно общим правилам имеем частное решение

$$\Phi_n(\eta) = \int_0^\eta \varphi(t) \sum \frac{e^{s_{in}(\eta-t)}}{F'(s_{in})} dt.$$

То обстоятельство, что  $\Phi_n(\eta)$  есть частное решение уравнения (9.66) с правой частью, удовлетворяющее условиям (9.74), легко проверяется путем дифференцирования  $\Phi_n(\eta)$  по параметру  $\eta$ , принимая во внимание формулу Эйлера

$$\sum_{i=1}^4 \frac{s_{in}^j}{F'(s_{in})} = \begin{cases} 0 & \text{для } j = 0, 1, 2; \\ 1 & \text{для } j = 3. \end{cases}$$

Подставляя в  $\Phi_n(\eta)$  значения  $s_{in}$  (9.70) и переходя к гиперболическим функциям, имеем

$$\Phi_n(\eta) = \int_0^\eta \varphi(t) Y_{3n}(\eta-t) dt. \quad (9.75)$$

Подставляя значение  $\varphi(t)$  из формулы (9.67), получим

$$\Phi_n(\eta) = \frac{2a^4}{D} \int_0^1 \sin n\pi\xi d\xi \int_0^\eta f(\xi, t) Y_{3n}(\eta-t) dt. \quad (9.76)$$

Принимая во внимание, что  $f(\xi, \eta)$  обращается в нуль для  $0 \leq \eta \leq \eta_1$  ( $0 \leq y \leq d_1$ ), имеем  $\Phi_n(\eta) = 0$  для  $0 \leq \eta \leq \eta_1$  (9.77)

Для интервала  $\eta_1 + \sigma_1 \leq \eta \leq \frac{b}{a}$ , принимая во внимание, что  $f(\xi, \eta)$  в этом интервале также обращается в нуль, получим

$$\Phi_n(\eta) = \frac{2a^4}{D} \int_0^1 \sin n\pi\xi d\xi \int_{\eta_1}^{\eta_1 + \sigma_1} \rho_1(\xi, t) Y_{3n}(\eta-t) dt. \quad (9.78)$$

Предположим теперь, что  $\sigma_1$  неограниченно убывает, а нагрузка  $\rho_1(\xi, \eta)$  стремится к нагрузке, сосредоточенной по прямой  $y = d_1$  ( $\eta = \eta_1$ ), т. е. когда  $\sigma \rightarrow 0$ , то  $\rho_1\sigma \rightarrow \rho$  или  $\rho_1\sigma_1 a \rightarrow \rho$ , где  $\rho$  — интенсивность нагрузки на единицу длины, распределенной по прямой  $y = d_1$ . Тогда из уравнения (9.78) следует, что

$$\Phi_n(\eta) = \frac{2a^3}{D} \int_0^1 \rho(\xi) Y_{3n}(\eta - \eta_1) \sin n\pi\xi d\xi. \quad (9.79)$$

Последовательные производные функции  $\Phi_n(\eta)$  уравнения (9.75) будут

$$\begin{aligned}\Phi'_n(\eta) &= \int_0^\eta \varphi(t) Y_{2n}(\eta-t) dt; & \Phi''_n(\eta) &= \int_0^\eta \varphi(t) Y'_{2n}(\eta-t) dt; \\ \Phi'''_n(\eta) &= \int_0^\eta \varphi(t) Y_{0n}(\eta-t) dt.\end{aligned}$$

Таким образом, общее решение уравнения (9.64) будет иметь вид

$$W(\xi, \eta) = \sum_n [Y_n(\eta) + \Phi_n(\eta)] \sin n\pi\xi. \quad (9.80)$$

Пользуясь формулой (9.79), можно получить частное решение для любого распределения нагрузки вдоль прямой. Ниже рассмотрим несколько частных случаев.

### Прямоугольная плита, нагруженная сосредоточенными грузами

Предположим сперва, что с плитой связана одна сосредоточенная сила  $H$ , приложенная в точке с координатами  $x = c_1$ ,  $y = d_1$  ( $\xi = \xi_1$ ,  $\eta = \eta_1$ ). Рассматриваем эту нагрузку как предельное положение нагрузки, распределенной по закону прямоугольника в пределах от  $x = c_1$  до  $x = c_1 + \sigma_2$  (от  $\xi = \xi_1$  до  $\xi = \xi_1 + \sigma'_2$ ) в предположении, что  $\rho\sigma_2 \rightarrow H$  или  $\rho\sigma'_2 a \rightarrow H$ . Тогда из уравнений (9.77) и (9.78) следует, что

$$\Phi_n(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq \eta \leq \eta_1; \\ \frac{2a^2}{D} H \sin n\pi\xi Y_{3n}(\eta - \eta_1) & \text{для } \eta_1 \leq \eta \leq \frac{b}{a}. \end{cases} \quad (9.81)$$

Предположим теперь, что с точкой  $x = c_1$ ,  $y = d_1$  связан груз массой  $P$  и, кроме того, в этой точке плита подперта упругой стойкой, коэффициент жесткости которой  $c$  (т. е.  $c$  — сила, при которой получается осадка стойки, равная единице).

В таком случае давление на плиту при колебательном движении равно силе инерции груза и упругому отпору стойки, т. е.

$$\begin{aligned}H(A \cos \omega t + B \sin \omega t) &= -P \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c w = \\ &= (P\omega^2 - c) W(\xi_1, \eta_1) (A \cos \omega t + B \sin \omega t).\end{aligned} \quad (9.82)$$

Следовательно, для  $\Phi_n(\eta)$  (9.81) получим значение

$$\Phi_n(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq \eta \leq \eta_1; \\ \frac{2\beta^2}{a^2 q} \left(P - \frac{c}{\omega^2}\right) \sin n\pi\xi_1 Y_{3n}(\eta - \eta_1) W(\xi_1, \eta_1) & \text{для } \eta > \eta_1.\end{cases} \quad (9.83)$$

Когда имеется ряд нагрузок, распределенных по прямым  $\eta = \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_i, \dots, \eta_k$ , по которым приложены грузы  $P_{ij}$ , и пластинка подперта упругими опорами жесткостью  $c_{ij}$ , причем грузы и опоры предполагаются лежащими на пересечении с прямыми  $\xi = \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_i, \dots, \xi_k$ , то общее решение уравнения (9.64) для интервала  $\eta_k \leq \eta \leq \eta_{k+1}$  может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
 W(\xi, \eta) &= \sum_n V_n(\eta) \sin n\pi\xi = \\
 &= \sum_n \left[ Y_n(\eta) + \sum_j^{1, k} \sum_i^{1, l} \frac{2\beta^2}{a^2 q} \left( P_{ij} - \frac{c_{ij}}{\omega^2} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \sin n\pi\xi_i W(\xi_i, \eta_i) Y_{3n}(\eta - \eta_i) \right] \sin n\pi\xi. \quad (9.84)
 \end{aligned}$$

В частности, некоторые грузы  $P_{ij}$  и упругие опоры могут отсутствовать.

Общее решение уравнения (9.66) без правой части, т. е. выражение  $Y_n(\eta)$ , необходимо брать в зависимости от условий закрепления для  $\eta = 0$ . На основании условий (9.72) получим:

- а)  $Y_n(\eta) = B_n Y_{1n} + D_n Y_{3n}$  для опертого края;
- б)  $Y_n(\eta) = C_n Y_{2n} + D_n Y_{3n}$  для закрепленного края;
- в)  $Y_n(\eta) = A_n (Y_{0n} + n^2 \pi^2 \delta Y_{2n}) + B_n [Y_{1n} + (2 - \sigma) \times n^2 \pi^2 Y_{3n}]$  для свободного края.

Эти значения представляют собой также полные решения для первого интервала.

### Составление уравнения частот для случая нескольких грузов

Для случая сравнительно большого числа грузов и упругих опор нахождение частот колебаний из уравнения (9.84) можно вести следующим образом.

Задаем ряд значений для  $\beta$ :  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ . Для каждого из значений  $\beta$  определяем сперва значения прогибов  $W(\xi_i, \eta_1)$  под грузами и опорами для первой прямой  $\eta = \eta_1$ :

$$W(\xi_i, \eta_1) = \sum_n Y_k(\eta_1) \sin k\pi\xi_i.$$

Это выражение будет зависеть лишь от системы двух произвольных постоянных  $A'_k$  и  $B'_k$  входящих в  $Y_k(\eta_1)$ .

Зная значение  $W(\xi_i, \eta_1)$ , можем определить значение

$$W(\xi_i, \eta_2) = \sum_n \left[ Y_n(\eta_2) + \sum_i^{1, l} \frac{2\beta^2 P_i}{a^2 q} \times \right. \\ \left. \times \sin n\pi\xi_i W(\xi_i, \eta_1) Y_{3n}(\eta_2 - \eta_1) \right] \sin n\pi\xi$$

в зависимости от тех же постоянных. Таким образом, для последнего участка получим значения для  $W(\xi, \eta)$  в виде выражения

$$W(\xi, \eta) = \sum_n \left\{ Y_n(\eta) + \sum_i [f_i(\eta) A'_i + f_{1i}(\eta) B'_i] \right\} \sin n\pi\xi.$$

Удовлетворяя двум граничным условиям при  $\eta = \mu$  для каждого  $n$ , получим систему  $2n$  однородных уравнений относительно постоянных  $A'_i$  и  $B'_i$ . Вычисляя определители этой системы  $\Delta(\beta_i)$ , ищем перемены знака ряда чисел:  $\Delta(\beta_1)$ ,  $\Delta(\beta_2)$  и т. д.

Для случая небольшого числа сосредоточенных грузов и опор уравнение частоты можно получить непосредственно, не определяя явно  $W(\xi_i, \eta_i)$ . Для этого подчиняем

$$V_n = Y_n(\eta) + \sum_i \sum_j \frac{2\beta^2}{a^2 q} \left( P_{ij} - \frac{c_{ij}}{\omega^2} \right) \sin n\pi\xi_i W(\xi_i, \eta_i) Y_{3n}(\eta - \eta_j) \quad (9.84')$$

условиям для  $y = 0$  и  $y = b$  для каждого  $n$  и определяем произвольные постоянные, входящие в  $Y_n$ , в зависимости от  $W(\xi_i, \eta_i)$ . Полагая последовательно в выражении (9.84')  $\xi = \xi_1, \eta = \eta_1, \dots$ , получим систему однородных уравнений относительно прогибов  $W(\xi_1, \eta_1), W(\xi_2, \eta_2), \dots, W(\xi_l, \eta_l)$ .

Приравнявая определитель этой системы, составленный из коэффициентов при  $W(\xi_i, \eta_i)$ , нулю, получим уравнение частоты.

### Прямоугольная плита, опертая по контуру, с сосредоточенным грузом

Пусть груз приложен в точке  $x = a_1, y = b_1$  ( $\xi = \xi_1, \eta = \eta_1$ ). Для случая опертой плиты удобно взять решение уравнения в первом интервале  $0 \leq \eta \leq \eta_1$  в виде

$$W(\xi, \eta) = \sum_n (A_n \operatorname{sh} s_{1n}\eta + B_n \operatorname{sh} s_{2n}\eta) \sin n\pi\xi. \quad (9.85)$$

Перемещение пластинки при наличии силы  $H$  в точке  $\xi = \xi_1, \eta = \eta_1$  для интервала  $\eta_1 \leq \eta \leq \mu$  определяется выражением (9.81):

$$W(\xi, \eta) = \sum_n \left[ A_n \operatorname{sh} s_{1n}\eta + B_n \operatorname{sh} s_{2n} + \right. \\ \left. + \frac{2a^2 H}{D} \sin n\pi\xi_1 Y_{3n}(\eta - \eta_1) \right] \sin n\pi\xi. \quad (9.86)$$

Удовлетворяя условиям  $W = 0$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0$  для  $\eta = \mu$  ( $y = b$ ), найдем значения  $A_n$  и  $B_n$  в виде

$$A_n = \frac{a^2 H}{\beta s_{1n} D} \cdot \frac{\text{sh } s_{1n} v_1}{\text{sh } s_{1n} \mu} \sin n\pi \xi_1; \quad B_n = -\frac{a^2 H}{\beta s_{2n} D} \cdot \frac{\text{sh } s_{2n} v_1}{\text{sh } s_{2n} \mu} \sin n\pi \xi_1,$$

в которых  $v_1 = \mu - \eta_1$ , где  $\mu = \frac{b}{a}$ ,  $\eta_1 = \frac{b_1}{a}$ .

Таким образом, значение прогиба в первом интервале

$$W(\xi, \eta) = \frac{a^2 H}{\beta D} \sum_n \left[ \frac{\text{sh } s_{1n} v_1}{s_{1n} \text{sh } s_{1n} \mu} \text{sh } s_{1n} \eta - \frac{\text{sh } s_{2n} v_1}{s_{2n} \text{sh } s_{2n} \mu} \text{sh } s_{2n} \eta \right] \sin n\pi \xi_1 \sin n\pi \xi. \quad (9.87)$$

Выражение для прогиба в интервале  $\eta_1 \leq \eta \leq \mu$  может быть получено заменой  $\eta$  на  $\mu - \eta = v$ ,  $v_1$  на  $\eta_1$ , т. е.

$$W(\xi, \eta) = \frac{a^2 H}{\beta D} \sum_n \left[ \frac{\text{sh } s_{1n} \eta_1 \text{sh } s_{1n} v}{s_{1n} \text{sh } s_{1n} \mu} - \frac{\text{sh } s_{2n} \eta_1 \text{sh } s_{2n} v}{s_{2n} \text{sh } s_{2n} \mu} \right] \sin n\pi \xi_1 \sin n\pi \xi. \quad (9.88)$$

Подставляя вместо  $H$  значение (9.83), получим

$$W(\xi, \pi) = \frac{\beta}{a^2 q} \left( P - \frac{c}{\omega^2} \right) W(\xi_1, \eta_1) \sum_n \left[ \frac{\text{sh } s_{1n} v_1}{s_{1n} \text{sh } s_{1n} \mu} \text{sh } s_{1n} \eta - \frac{\text{sh } s_{2n} v_1}{s_{2n} \text{sh } s_{2n} \mu} \text{sh } s_{2n} \eta \right] \sin n\pi \xi_1 \sin n\pi \xi, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_1. \quad (9.89)$$

Полагая в этом выражении  $\xi = \xi_1$ ,  $\eta = \eta_1$ , получим уравнение частоты для пластинки с сосредоточенным грузом в точке  $\xi = \xi_1$ ,  $\eta = \eta_1$ :

$$\beta \sum_n \left[ \frac{\text{sh } s_{1n} v_1 \text{sh } s_{1n} \eta_1}{s_{1n} \text{sh } s_{1n} \mu} - \frac{\text{sh } s_{2n} v_1 \text{sh } s_{2n} \eta_1}{s_{2n} \text{sh } s_{2n} \mu} \right] \sin^2 n\pi \xi_1 = \frac{Q}{\mu \left( P - \frac{c}{\omega^2} \right)}, \quad (9.90)$$

где  $Q = \rho h a b$  — масса пластинки.

В частности, для прямоугольной пластинки с грузом в средней точке  $x = \frac{a}{2}$ ;  $y = \frac{b}{2}$  ( $\xi_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\eta_1 = \frac{\mu}{2}$ ) при колебаниях, симметричных относительно прямой  $\xi_1 = \frac{1}{2}$ , уравнение частоты примет вид

$$f(\beta) \equiv \frac{\beta}{\pi} \sum_n^{1, 3, 5, \dots} \left( \frac{1}{s_{1n}} \text{th } \frac{s_{1n} \mu}{2} - \frac{1}{s_{2n}} \text{th } \frac{s_{2n} \mu}{2} \right) = \frac{2Q}{\pi \mu \left( P - \frac{c}{\omega^2} \right)}. \quad (9.91)$$

Точки пересечения  $f(\beta)$  с кривой  $\frac{2Q}{\mu \left( P - \frac{c}{\omega^2} \right)}$  дают значения  $\beta_i$ ,

а следовательно, и частоту  $\omega_i = \beta_i \sqrt{\frac{D}{\rho h a^4}}$ .

Для случая квадратной пластинки ( $\mu = 1$ ) при отсутствии упругой опоры значение  $f(\lambda)$  ( $\lambda = \frac{\beta}{\pi^2}$ ) можно взять из табл. 9.5 [18]. График функции  $f(\lambda)$  изображен на рис. 9.10.

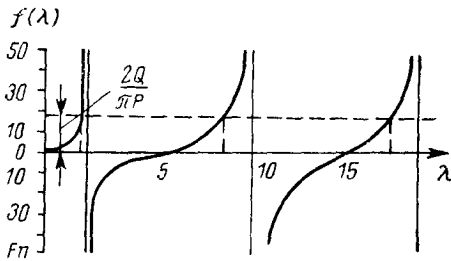


Рис. 9.10

Точки пересечения прямой  $\frac{2Q}{\pi P}$  с кривой  $f(\lambda)$  дают значения  $\lambda_i$ ; частоты колебаний плиты, нагруженной сосредоточенными грузами, равны

$$\omega_i = \frac{\pi^2 \lambda_i}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

Помимо рассмотренного типа колебаний плита может иметь еще колебания, общие с ненагруженной плитой, когда груз остается в покое. Частоты колебаний этого типа определяются без затруднений.

Таблица 9.5

Значения функции  $f(\lambda)$  для квадратной плиты

$\lambda$	$f(\lambda)$	$\lambda$	$f(\lambda)$	$\lambda$	$f(\lambda)$
0	0	2,0	$-\infty$	10	$-\infty$
0,2	0,0289	2,1	-26,9900	10,1	-264,8749
0,4	0,1197	2,2	-13,9576	10,2	-129,7239
0,6	0,2818	2,5	-6,5248	10,5	-61,1816
0,8	0,5382	3,0	-3,7910	11,0	-23,3897
1,0	0,9323	4,0	-1,7000	12,0	-13,6614
1,2	1,3698	5,0	-0,5124	13,0	-7,6301
1,4	2,6115	6,0	1,2861	14,0	-3,5239
1,6	4,7415	7,0	3,7948	15,0	0,6548
1,7	7,4900	8,0	8,5774	16,0	6,4283
1,8	11,1529	9,0	22,0731	17,0	19,7360
1,9	24,3803	9,5	40,3092	17,5	42,6342
2,0	$\infty$	9,8	124,2640	17,8	113,0558
		9,9	238,0385	17,9	155,2336
		10,0	$\infty$	18,0	$\infty$

### Квадратная плита с четырьмя симметрично расположенными равными грузами

Предположим, что грузы расположены в точках  $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ ,  $\left(\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}\right)$ ,  $\left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ ,  $\left(\frac{3a}{4}, \frac{3a}{4}\right)$ ; масса каждого груза —  $P$ .



Колебания для этого случая сводятся к четырем типам (симметрично-симметричные, антисимметрично-симметричные, симметрично-антисимметричные, антисимметрично-антисимметричные).

Если составить уравнение частоты для первого типа, то оказывается, что мы придем к прежнему уравнению, т. е. частота колебаний плиты симметрично-симметричного типа, нагруженной в четырех точках указанным образом, совпадает с частотой этого же типа для плиты, нагруженной только одним грузом  $P$  в средней точке  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$ .

Для случая антисимметрично-симметричных колебаний по отношению к осям  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$  квадратной плиты при четырех грузах характеристическое уравнение будет

$$f_2(\lambda) = \lambda\pi \sum_n^{1, 3, 5, \dots} \left[ \frac{1}{s_{1n}} \operatorname{th} \frac{s_{1n}}{4} - \frac{1}{s_{2n}} \operatorname{th} \frac{s_{2n}}{4} \right] = \frac{2Q}{\pi P},$$

где  $Q$  — масса всей плиты.

Это уравнение соответствует уравнению частоты плиты с отношением сторон  $\mu_1 = \frac{a}{b} = 2$ :

$$f_1(\lambda) = \lambda\pi \sum_n^{1, 3, 5, \dots} \left( \frac{1}{s_{1n}} \operatorname{th} \frac{s_{1n}}{4} - \frac{1}{s_{2n}} \operatorname{th} \frac{s_{2n}}{4} \right) = \frac{2qa^2}{\pi P}, \quad (9.92)$$

где вместо  $\mu_1 Q$  стоит  $qa^2$ . Значения функции  $f_1(\lambda)$  приведены в табл. 9.6.

Таблица 9.6

Значения функции  $f_1(\lambda)$

$\lambda$	$f_1(\lambda)$	$\lambda$	$f_1(\lambda)$	$\lambda$	$f_1(\lambda)$
0	0	5,0	$-\infty$	13,0	$-\infty$
1,0	0,2650	5,1	-153,5112	13,5	-71,4574
2,0	1,1836	5,2	-66,2149	14,0	-37,8496
3,0	3,3561	5,5	-27,5738	15,0	-20,3772
4,0	9,9930	6,0	-14,4680	16,5	-11,7206
4,5	22,5453	7,0	-7,1951	18,0	-7,0385
4,8	61,1634	8,5	-1,5711	20,0	-2,2286
4,9	125,1397	10,0	-2,9591	23,0	16,5164
5,0	$\infty$	11,0	8,9760	25,0	15,8490
		12,0	26,6930	26,50	29,6531
		12,5	60,2381	28,00	77,1999
		12,8	159,6640	28,50	152,1900
		12,9	211,6283	29,00	$\infty$
		13,0	$\infty$		

**КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛИТ,  
ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ  
И НАГРУЖЕННЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ГРУЗАМИ**

**Изложение метода**

Приведенный выше метод можно без всяких затруднений обобщить для случая, когда прямоугольная плита подкреплена системой параллельных ребер или балок, направленных нормально к опорным сторонам  $x = 0, x = a$  ( $\xi = 0, \xi = 1$ ) (рис. 9.11), кроме того, нагружена сосредоточенными грузами и подперта точечными опорами.

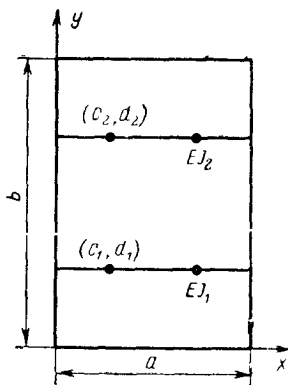


Рис. 9.11

Общее выражение для перемещения  $w(x, y, t)$  имеет по-прежнему вид уравнения (9.63):  $w(x, y, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \times W(x, y)$ ,

$$\begin{aligned} \text{причем } W(x, y) &= \sum_n V_n(\eta) \sin n\pi\xi = \\ &= \sum_n [Y_n(\eta) + \Phi_n(\eta)] \sin n\pi\xi, \end{aligned}$$

где  $\Phi_n(\eta)$  — частное решение уравнения (9.66).

Найдем сперва частное решение уравнения  $\Phi_n(\eta)$  для случая плиты, подпертой одним ребром по прямой  $y = d_1$  ( $\eta = \eta_1$ ). Решение уравнения в первом интервале  $0 \leq \eta \leq \eta_1$  при отсутствии нагрузок в нем будет

$$W(\xi, \eta) = \sum_n Y_n(\eta) \sin n\pi\xi,$$

так как  $V_n(\eta)$  для этого интервала совпадает с  $Y_n(\eta)$ .

В интервале  $\eta_1 \leq \eta \leq \mu$  частное решение  $\Phi_n(\eta)$  получается без всяких затруднений из выражения (9.79):

$$\Phi_n(\eta) = \frac{2a^3}{D} \int_0^1 p(\xi) Y_{sn}(\eta - \eta_1) \sin n\pi\xi d\xi,$$

если вместо  $p(\xi)$  подставим его значение, равное давлению ребра на плиту, т. е.  $p(\xi) = -\left(\frac{EJ}{a^4} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\rho_1 F}{\partial t^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)_{\eta=\eta_1}$ , и заменим  $w(x, y, t)$  согласно (9.63). После вычислений получим

$$p(\xi) = \sum_k \left[ \rho_1 F \omega^2 - \frac{EJ}{a^4} k^4 \pi^4 \right] V_k(\eta_1) \sin k\pi\xi. \quad (9.93)$$

Подставляя значение (9.93) в формулу (9.79) и интегрируя по  $\xi$ , имеем

$$\Phi_n(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq \eta \leq \eta_1; \\ \left( \frac{\beta^2 Q_1}{a^2 q} - \frac{B_1}{aD} n^4 \pi^4 \right) V_n(\eta_1) V_{3n}(\eta - \eta_1) & \text{для } \eta \geq \eta_1; \end{cases}$$

здесь масса ребра  $Q_1 = \rho_1 F a$ ;  $q = \rho h$ ;  $B_1 = E_1 J_1$  — жесткость ребра. Остальные обозначения соответствуют прежним.

Теперь без всяких затруднений может быть написано общее решение. Пусть плита по прямым  $\eta = \eta_1, \eta = \eta_2, \dots, \eta = \eta_k, \dots$  подкреплена ребрами жесткостью  $B_1 = E_1 J_1, B_2 = E_2 J_2, \dots, B_k, \dots$  и массами  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots$

По этим же прямым приложены грузы  $P_{ij}$  в точках  $\xi_i, \eta_j$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ), и плита подперта упругими точечными опорами с коэффициентом жесткости  $c_{ij}$ , причем предполагаем, что грузы и опоры лежат на пересечении с прямыми  $\xi = \xi_1, \xi = \xi_2, \dots$ . Тогда общее решение уравнения (9.64) путем рассуждений, аналогичных приведенным для случая сосредоточенных грузов, может быть найдено для интервала  $\eta_k \leq \eta \leq \eta_{k+1}$  в виде

$$W(\xi, \eta) = \sum_n V_n(\eta) \sin n\pi\xi,$$

где

$$V_n(\eta) = Y_n(\eta) + \sum_j^{1, k} \left[ \left( \frac{\beta^2 Q_j}{a^2 q} - \frac{B_j}{aD} n^4 \beta^4 \right) V(\eta_j) + \sum_i^{1, l} \frac{2\beta^2}{a^2 q} \left( P_{ij} - \frac{c_{ij}}{\omega^2} \right) \sin n\pi\xi_i W(\xi_i, \eta_j) \right] Y_{3n}(\eta - \eta_j)$$

для  $\eta_k \leq \eta \leq \eta_{k+1}$ .

Общее решение  $Y_n(\eta)$  уравнения без правой части, входящее в это выражение, необходимо по-прежнему выбрать в зависимости от условий заделки «а», «б» или «в» (стр. 265).

В первом интервале выбранное значение  $Y_n(\eta)$  будет также полным решением, так как

$$V_n(\eta) = Y_n(\eta) \quad \text{для } 0 \leq \eta \leq \eta_1.$$

Частоты колебаний плиты, подкрепленной ребрами, могут быть определены методом, аналогичным изложенному выше для плиты с сосредоточенными грузами.

Применяя, например, второй из указанных выше методов, необходимо последовательно определить значение

$$V_n(\eta_j) = Y_n(\eta_j) + \Phi_n(\eta_j) \tag{9.94}$$

в зависимости от двух произвольных постоянных и  $W(\xi_i, \eta_j)$ .

Так, для опертых концов

$$V_n(\eta_1) = B_n Y_{1n}(\eta_1) + D_n Y_{3n}(\eta_1);$$

$$V_n(\eta_2) = Y_n(\eta_2) + \left\{ \left( \frac{\beta^2 Q}{a^2 q} - \frac{EJ}{aD} n^4 \pi^4 \right) V_n(\eta_1) + \right. \\ \left. + \sum_i \frac{2\beta^2}{a^2 q} \left( P_i - \frac{c_i}{\omega^2} \right) \sin n\pi \xi_{i1} W(\xi_i, \eta_1) \right\} Y_{3n}(\eta - \eta_1).$$

Подставляя в последнее выражение значение  $V_n(\eta_1)$ , можно выразить  $V_n(\eta_2)$  через  $B_n, D_n$  и  $W(\xi_i, \eta_1)$ . Аналогично вычисляем значения  $V_n(\eta_3), V_n(\eta_4)$  и т. д.

Удовлетворяя, наконец, условиям для  $\eta = \mu$ , вычисляем  $B_n, D_n$  в зависимости от  $W(\xi_i, \eta_j)$ .

Приняв затем прогиб в каждой точке, где имеется масса или опора, равным  $W(\xi_i, \eta_j)$ , получим систему однородных уравнений относительно  $B_n, D_n, W(\xi_i, \eta_j)$ , определитель которой и дает уравнение частоты.

Можно также явно не выражать  $V_n(\eta)$  через  $B_n, D_n$ , а определить  $B_n$  и  $D_n$  из граничных условий для  $\eta = \mu$  в зависимости от  $V_n(\eta_k), W(\xi_i, \eta_j)$ , поступая в дальнейшем, как указано выше.

Для большого числа ребер и грузов удобнее применять первый метод. Рассмотрим теперь несколько частных случаев.

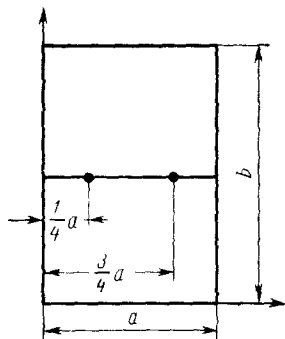


Рис. 9.12

#### Плита, подкрепленная одним ребром и подпертая в двух точках

В качестве примера рассмотрим прямоугольную плиту, подкрепленную по середине ребром и подпертую двумя опорами одинаковой жесткости  $c_1$  (рис. 9.12) на расстоянии

$$\xi_1 = \frac{1}{4}; \quad \xi_2 = \frac{3}{4} \quad \text{для } \eta = \frac{\mu}{2}.$$

В этих же точках приложены сосредоточенные массы  $P$ . Плита предполагается опертой по контуру. Для этого случая удобно взять решение уравнения в первом интервале  $0 \leq \eta \leq \mu$  в виде

$$Y_n(\eta) = A_n \operatorname{sh} s_{1n} \eta + B_n \operatorname{sh} s_{2n} \eta. \quad (9.95)$$

Для интервала  $\frac{\mu}{2} \leq \eta \leq \mu$  имеем в случае колебаний, симметричных относительно прямой  $\xi = \frac{1}{2}$ , уравнение изогнутой поверхности ( $\delta_n = n\pi$ ):

$$W(\xi, \eta) = \sum_n^{1, 3, 5, \dots} \left\{ A_n \operatorname{sh} s_{1n} \eta + B_n \operatorname{sh} s_{2n} \eta + \right. \\ \left. + \left[ A_n \left( \frac{\beta^2 Q}{a^2 q} - \frac{EJ}{aD} \delta_n^4 \right) \operatorname{sh} s_{1n} \eta_1 + B_n \left( \frac{\beta^2 Q}{a^2 q} - \frac{EJ_1}{aD} \delta_n^4 \right) \operatorname{sh} s_{2n} \eta_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4\beta^2}{a^2 q} \left( P_1 - \frac{c_1}{\omega^2} \right) \sin \frac{n\pi}{4} W(\xi_1, \eta_1) \right] Y_{3n}(\eta - \eta_1) \right\} \sin n\pi \xi, \quad (9.96)$$

так как из условия симметрии относительно  $\frac{a}{2}$

$$W(\xi_1, \eta_1) = W(\xi_2, \eta_1).$$

Подчиняя уравнение (9.96) условиям  $W(\xi, \eta) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0$  для  $\eta = \mu$ , получим для произвольных постоянных  $A_n$ ,  $B_n$  в зависимости от  $W\left(\xi_1, \frac{\mu}{2}\right)$  такие значения:

$$A_n = \frac{4\beta^2}{a^2 q \Delta_n} \left( P_1 - \frac{c_1}{\omega^2} \right) \sin \frac{n\pi}{4} \operatorname{sh} \frac{s_{1n}\mu}{2} \operatorname{sh} s_{2n}\mu W\left(\xi_1, \frac{\mu}{2}\right); \\ B_n = -\frac{4\beta^2}{a^2 q \Delta_n} \left( P_1 - \frac{c_1}{\omega^2} \right) \sin \frac{n\pi}{4} \operatorname{sh} \frac{s_{2n}\mu}{2} \operatorname{sh} s_{1n}\mu W\left(\xi_1, \frac{\mu}{2}\right),$$

где

$$\Delta_n = 2\beta \operatorname{sh} s_{1n}\mu \operatorname{sh} s_{2n}\mu - \beta^2 (\alpha - \gamma_n) \times \\ \times \left[ \frac{1}{s_{1n}} \operatorname{ch} \frac{s_{1n}}{2} \operatorname{sh} \frac{s_{2n}}{2} - \frac{1}{s_{2n}} \operatorname{sh} \frac{s_{1n}}{2} \operatorname{ch} \frac{s_{2n}}{2} \right] \operatorname{sh} \frac{s_{1n}\mu}{2} \operatorname{sh} \frac{s_{2n}\mu}{2}; \\ \alpha = \frac{Q}{a^2 q}; \quad \gamma = \frac{\gamma_1 n^4 \pi^4}{\beta^2}; \quad \left( \gamma_1 = \frac{E_1 J_1}{aD} \right).$$

После подстановки этих значений  $A_n$  и  $B_n$  в выражение

$$Y_n(\eta_1) = A_n \operatorname{sh} \frac{s_{1n}\mu}{2} + B_n \operatorname{sh} \frac{s_{2n}\mu}{2}$$

получим уравнение частоты в виде

$$\frac{2qa^2}{P - \frac{c_1}{\omega^2}} = \beta \sum_n^{1, 3, 5, \dots} \frac{\frac{1}{s_{1n}} \operatorname{th} \frac{s_{1n}\mu}{2} - \frac{1}{s_{2n}} \operatorname{th} \frac{s_{2n}\mu}{2}}{1 + \frac{\alpha - \gamma}{4} \beta \left( \frac{1}{s_{2n}} \operatorname{th} \frac{s_{2n}\mu}{2} - \frac{1}{s_{1n}} \operatorname{th} \frac{s_{1n}\mu}{2} \right)}. \quad (9.97)$$

Если ребро отсутствует ( $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 0$ ), придем к формуле С. Гершгорина (9.91).

### Квадратная плита, подкреплённая двумя ребрами

Если квадратная плита подкреплена двумя ребрами на расстоянии  $\eta_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\eta_2 = \frac{3}{4}$  и подперта четырьмя упругими опорами, то решение может быть получено так же, как и выше, без всяких затруднений, причем в зависимости от типа колебаний получение его может быть упрощено.

Необходимо для симметрично-симметричных колебаний относительно прямых  $\xi = \frac{1}{2}$ ,  $\eta = \frac{1}{2}$  взять  $n = 1, 3, 5 \dots$  и удовлетворить условиям для

$$V_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0; \quad V_n''\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Производя вычисления, получим то же уравнение (9.97), что и для квадратной плиты ( $\mu = 1$ ) с одним ребром, т. е. частоты симметрично-симметричных колебаний плиты, подпертой двумя ребрами  $\eta_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\eta_2 = \frac{3}{4}$  и в четырех точках  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{3}{4}, \frac{1}{2}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ , совпадают с частотами колебаний квадратной плиты, подпертой одним ребром посередине в двух точках (9.97).

Корни уравнения (9.97) можно найти без затруднений графически, нанося на график для заданных значений  $\alpha$ ,  $\gamma$  значения левой части и разыскивая точки пересечения с кривой  $\frac{2qa^3}{P - \frac{c_1}{\omega^2}}$ , или путем пробных подстановок  $\beta$ , в частности, с помощью ЭЦВМ.

### Прямоугольная плита, подкреплённая двумя ребрами, с грузом посередине

Предположим теперь, что плита по-прежнему опирается по контуру, но ребра расположены на одинаковых расстояниях друг от друга (рис. 9.13)

$$\eta_1 = \frac{\mu}{3}; \quad \eta_2 = \frac{2\mu}{3} \quad \left(\mu = \frac{b}{a}\right).$$

В средней точке плита нагружена сосредоточенным грузом  $P$ . Для получения уравнения частоты будем сперва предполагать, что плита нагружена двумя сосредоточенными грузами  $\frac{P}{2}$  в точках  $\xi = \frac{1}{2}$ ,  $\eta_1 = \frac{\mu}{2} - \delta$ ;  $\xi = \frac{1}{2}$ ,  $\eta_1' = \frac{\mu}{2} + \delta$ . В таком

случае уравнение изогнутой поверхности в интервале от  $\frac{\mu}{2} - \delta \leq \eta \leq \frac{\mu}{2} + \delta$  будет

$$W(\xi, \eta) = \sum_n [A_n \operatorname{sh} s_{1n} \eta + B_n \operatorname{sh} s_{2n} \eta + \beta^2 (\alpha - \gamma_n) \times \\ \times (A_n \operatorname{sh} s_{1n} \eta_1 + B_n \operatorname{sh} s_{2n} \eta_1) Y_{3n}(\eta - \eta_1) + \\ + \frac{\beta^2}{a^2 q} P \sin \frac{n\pi}{2} W\left(\xi_1, \frac{\mu}{2} - \delta\right) Y_{3n}(\eta - \eta_1)] \sin n\pi \xi. \quad (9.98)$$

Рассматривая колебания, симметричные относительно середины плиты, мы должны удовлетворить условиям (9.21):

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} = 0$$

или

$$W'\left(\frac{\xi}{2}, \frac{\mu}{2}\right) = 0, \quad W''\left(\frac{\xi}{2}, \frac{\mu}{2}\right) = 0.$$

Подняв уравнение (9.98) этим условиям и полагая затем  $\delta$  равным нулю, найдем значения постоянных  $A_n$  и  $B_n$  для случая, когда в середине плиты приложен сосредоточенный груз  $P$  в виде

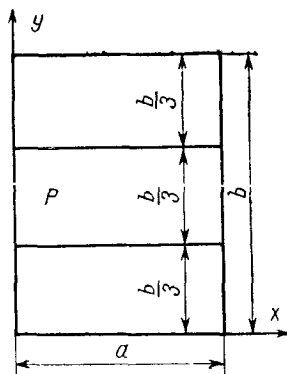


Рис. 9.13

$$- A_n = \frac{\beta^2 P}{a^2 q \Delta_n} \left[ s_{2n} \operatorname{ch} \frac{s_{2n} \mu}{2} + \gamma'_n \operatorname{sh} \frac{s_{2n} \mu}{3} Y'_{3n}\left(\frac{\mu}{6}\right) \right] \times \\ \times \sin \frac{n\pi}{2} W\left(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{2}\right); \\ B_n = - \frac{\beta^2 P}{a^2 q \Delta_n} \left[ s_{1n} \operatorname{ch} \frac{s_{1n} \mu}{2} + \gamma'_n \operatorname{sh} \frac{s_{1n} \mu}{3} Y'_{3n}\left(\frac{\mu}{6}\right) \right] \times \\ \times \sin \frac{n\pi}{2} W\left(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{2}\right),$$

где

$$\Delta_n = 2\beta s_{1n} s_{2n} \operatorname{ch} \frac{s_{1n} \mu}{2} \operatorname{ch} \frac{s_{2n} \mu}{2} + \\ + \gamma'_n \left( s_{1n} \operatorname{ch} \frac{s_{1n} \mu}{2} \operatorname{sh} \frac{s_{2n} \mu}{3} \operatorname{ch} \frac{s_{2n} \mu}{6} - s_{2n} \operatorname{ch} \frac{s_{2n} \mu}{2} \operatorname{sh} \frac{s_{1n} \mu}{3} \operatorname{ch} \frac{s_{1n} \mu}{6} \right),$$

причем

$$\gamma'_n = \beta^2 \frac{Q}{a^2 q} - \frac{EJ}{aD} n^4 \pi^4.$$

Полагая в уравнении (9.98)  $\xi = \frac{1}{2}$ ,  $\eta = \frac{\mu}{2}$  для  $\delta = 0$  и подставляя в него значение  $A_n$  и  $B_n$ , получим уравнение частоты

для колебаний, симметричных относительно  $x = \frac{a}{2}$ , в следующем виде:

$$f(\beta) \equiv \beta \sum_n^{1, 3, 5, \dots} \frac{\varphi_n \left( \frac{1}{2}, \frac{\mu}{2}, \beta \right)}{\psi_n \left( \frac{1}{2}, \frac{\mu}{2}, \beta \right)} = \frac{2a^2 q}{P}, \quad (9.99)$$

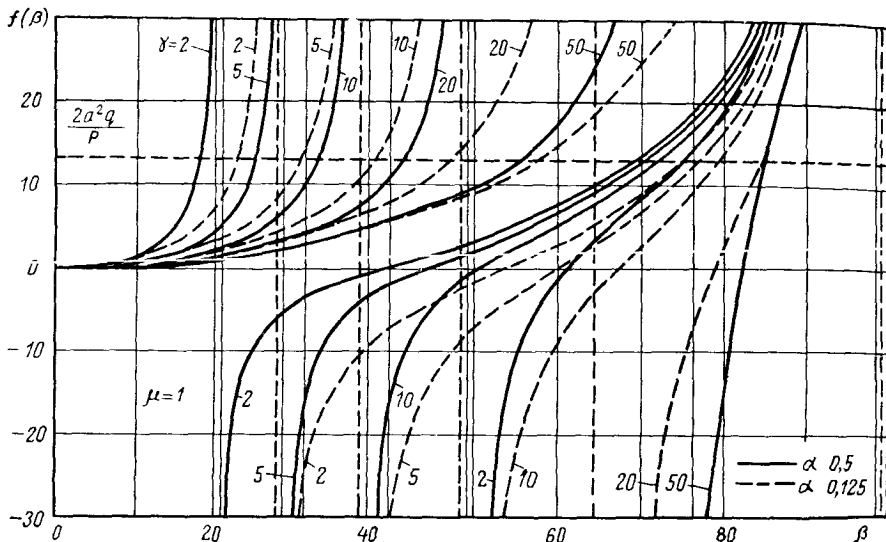


Рис. 9.14

где

$$\begin{aligned} \varphi_n \left( \frac{1}{2}, \frac{\mu}{2}, \beta \right) &= \frac{1}{s_{1n}} \operatorname{th} \frac{s_{1n}\mu}{2} - \frac{1}{s_{2n}} \operatorname{th} \frac{s_{2n}\mu}{2} + \\ &+ \frac{\gamma'_n}{s_{1n}s_{2n}} \left( \frac{\operatorname{sh} \frac{s_{2n}\mu}{3}}{\operatorname{ch} \frac{s_{2n}\mu}{2}} \operatorname{th} \frac{s_{1n}\mu}{2} - \frac{\operatorname{sh} \frac{s_{1n}\mu}{3}}{\operatorname{ch} \frac{s_{1n}\mu}{2}} \operatorname{th} \frac{s_{2n}\mu}{2} \right) Y'_{3n} \left( \frac{\mu}{6} \right) + \\ &+ \gamma'_n \left( \frac{\operatorname{sh} \frac{s_{1n}\mu}{3}}{s_{1n} \operatorname{ch} \frac{s_{1n}\mu}{2}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{s_{2n}\mu}{3}}{s_{2n} \operatorname{ch} \frac{s_{2n}\mu}{2}} \right) Y_{3n} \left( \frac{\mu}{6} \right); \\ \psi_n \left( \frac{1}{2}, \frac{\mu}{2}, \beta \right) &= \\ &= 1 + \frac{\gamma'_n}{2\beta} \left[ \frac{1}{s_{2n}} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{s_{2n}\mu}{3} \operatorname{ch} \frac{s_{2n}\mu}{6}}{\operatorname{ch} \frac{s_{2n}\mu}{2}} - \frac{1}{s_{1n}} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{s_{1n}\mu}{3} \operatorname{ch} \frac{s_{1n}\mu}{6}}{\operatorname{ch} \frac{s_{1n}\mu}{2}} \right]. \end{aligned}$$



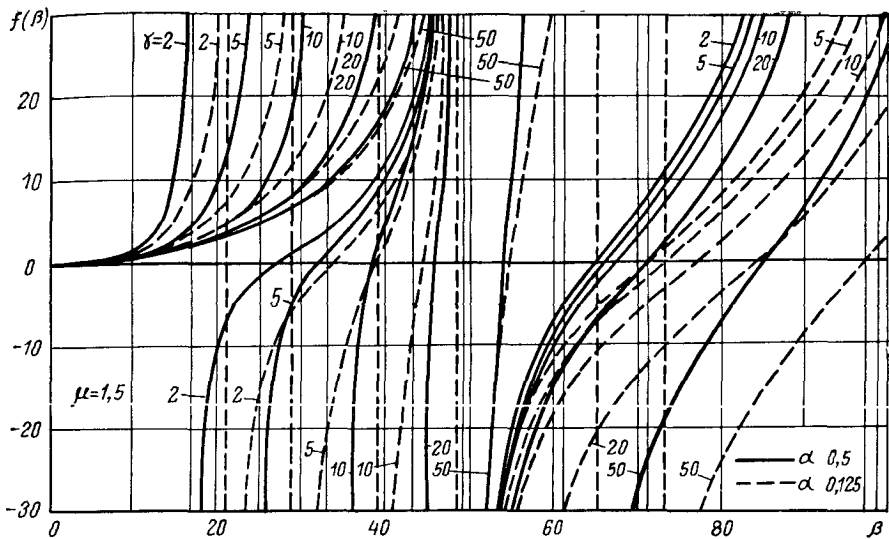


Рис. 9.15

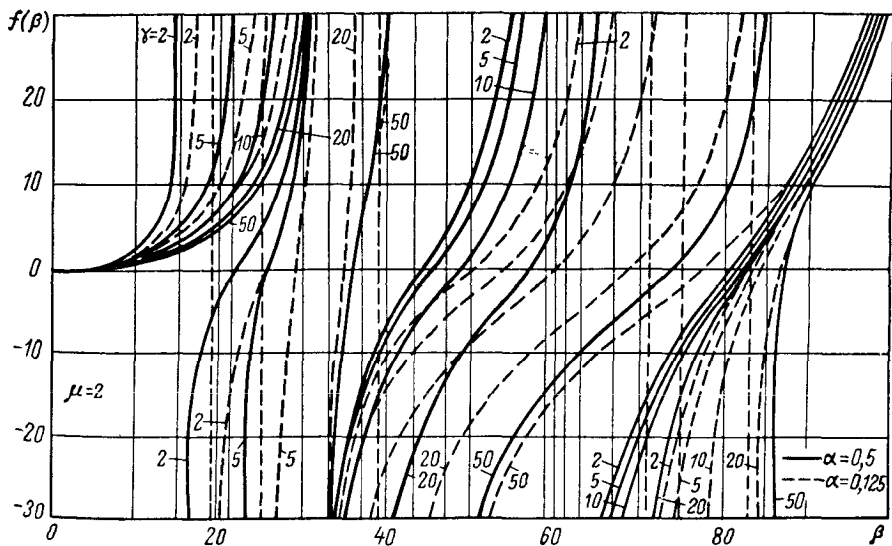


Рис. 9.16

Корни этого уравнения могут быть найдены графически, как указано выше, или с помощью ЭЦВМ.

Для облегчения пользования рассмотренными выше уравнениями приведем несколько графиков (рис. 9.14—9.16) для плиты, подкрепленной двумя ребрами (рис. 9.13), на которых обозначено

$$\alpha = \frac{Q}{a^2 q}; \quad \gamma = \frac{E_1 J_1}{aD}.$$

Графики были составлены согласно значениям корней  $\beta$  уравнения (9.99), вычисленных на ЭЦВМ по специальной программе.

### Прямоугольная плита, опертая по контуру и подкрепленная ребрами одинаковой жесткости на равных расстояниях

Если ребра находятся на одинаковых расстояниях (рис. 9.17) и жесткость их одинакова, уравнение частоты может быть получено в более простой форме. В этом случае удобно получать уравнения частоты использовать уравнения в конечных разностях.

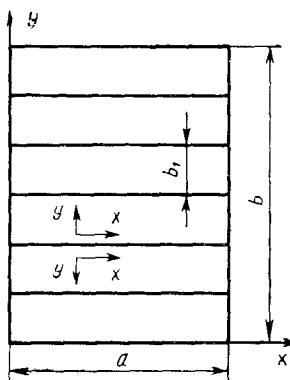


Рис. 9.17

В дальнейшем обозначим:  $b_1$  — расстояние между ребрами;  $\mu' = \frac{b_1}{a}$ ;  $n$  — число участков;  $Q = \rho F a$  — масса ребра;  $B = E_1 J_1$  — жесткость ребра;  $\gamma_m = \beta^2 \frac{Q}{a^2 q} - \frac{B}{aD} m^4 \pi^4$ . Остальные обозначения соответствуют прежним.

Для облегчения составления уравнений в конечных разностях удобно направить оси ординат для участков  $k$  и  $k+1$  в разные стороны (см. рис. 9.17). Уравнение изогнутой поверхности для  $k+1$  участка имеет вид

$$W(\xi, \eta, t) = \cos \omega t \sum_m Y_{k+1, m}(\eta) m \pi \xi.$$

Так как плита не несет внешних нагрузок, то значение  $Y_{k+1, m}$  определяется выражением (9.34).

$$Y_{k+1}(\eta) = A_{k+1} \operatorname{sh} s_{1m} \eta + B_{k+1} \operatorname{ch} s_{1m} \eta + C_{k+1} \operatorname{sh} s_{2m} \eta + D_{k+1} \operatorname{ch} s_{2m} \eta, \quad (9.100)$$

где  $s_{1m} = \sqrt{m^2 \pi^2 - \beta^2}$ ,  $s_{2m} = \sqrt{m^2 \pi^2 + \beta^2}$ .

Обозначим  $Y_m(0) = \mu_k$ ;  $Y_m''(0) = \eta_k$ .

Тогда, пользуясь функциями  $Y_{im}(\eta)$ , согласно условиям (9.73), запишем выражение (9.100) в виде

$$\left. \begin{aligned} Y_{k+1}(\eta) &= \mu_k Y_{0m}(\eta) + \eta_k Y_{2m}(\eta) + A_{k+1} \operatorname{sh} s_{1m} \eta + C_{k+1} \operatorname{sh} s_{2m} \eta \\ &\quad \text{для } (k+1)\text{-го участка;} \\ Y_k(\eta) &= \mu_k Y_{0m}(\eta) + \eta_k Y_{2m}(\eta) + A_k \operatorname{sh} s_{1m} \mu + C_k \operatorname{sh} s_{2m} \eta \\ &\quad \text{для } k\text{-го участка.} \end{aligned} \right\} (9.101)$$

Чтобы составить уравнения в конечных разностях, необходимо найти зависимости между  $\mu_k$ ,  $\eta_k$  и соседними значениями  $\mu$  и  $\eta$ . Для нахождения этих зависимостей следует принять во внимание условия сопряжения между соседними участками  $k$  и  $k+1$ , а именно:

а) для перемещений и моментов

$$W_{k+1}(0) = W_k(0); \quad W_k''(0) = W_{k+1}''(0);$$

б) для углов поворота

$$\frac{\partial W_k}{\partial \eta_{\eta=0}} = - \frac{\partial W_{k+1}}{\partial \eta_{\eta=0}};$$

в) для перерезывающих сил

$$\frac{\partial^3 W_k}{\partial \eta_{\eta=0}^3} + \frac{\partial^3 W_{k+1}}{\partial \eta_{\eta=0}^3} = - \left( \frac{B}{aD} \cdot \frac{\partial^4 W_k}{\partial \xi^4} - \frac{\beta^2 Q}{a^2 q} W_k \right)_{\eta=0},$$

так как  $W'_{k+1}(0) = -W'_k(0)$ .

Прежде всего исключим произвольные постоянные  $A_{k+1}$  и  $C_{k+1}$ , входящие в выражение (9.101) из условий  $Y_{k+1}(\mu') = \mu_{k+1}$ ;  $Y'_k(\mu') = \eta_{k+1}$ , т. е.

$$\begin{aligned} A_{k+1} \operatorname{sh} s_{1m} \mu' + C_{k+1} \operatorname{sh} s_{2m} \mu' &= \mu_{k+1} - \mu_k Y_{0m}(\mu) - \eta_k Y_{2m}(\mu'); \\ A_{k+1} s_{1m}^2 \operatorname{sh} s_{1m} \mu' + C_{k+1} s_{2m}^2 \operatorname{sh} s_{2m} \mu' &= \\ &= \eta_{k+1} - \mu_k Y''_{0m}(\mu) - \eta_k Y''_{2m}(\mu'). \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$A_{k+1} = \frac{1}{2\beta \operatorname{sh} s_{1m} \mu'} [\mu_{k+1} s_{2m}^2 - \eta_{k+1} - \operatorname{ch} s_{1m} \mu' (\mu_k s_{2m}^2 - \eta_k)];$$

$$C_{k+1} = \frac{1}{2\beta \operatorname{sh} s_{2m} \mu'} [\eta_{k+1} - s_{1m}^2 \mu_{k+1} + \operatorname{ch} s_{2m} \mu' (s_{1m}^2 \mu_k - \eta_k)],$$

Для  $A_k$ ,  $C_k$  имеем следующие значения:

$$A_k = \frac{1}{2\beta \operatorname{sh} s_{1m} \mu'} [s_{2m}^2 \mu'_{k-1} - \eta_{k-1} - \operatorname{ch} s_{1m} \mu' (\mu_k s_{2m}^2 - \eta_k)];$$

$$C_k = \frac{1}{2\beta \operatorname{sh} s_{2m} \mu'} [\eta_{k-1} - s_{1m}^2 \mu_{k-1} + \operatorname{ch} s_{2m} \mu' (s_{1m}^2 \mu_k - \eta_k)].$$

Условия «б» и «в» дают зависимости

$$\begin{aligned} (A_k + A_{k+1}) s_{1m} + (C_k + C_{k+1}) s_{2m} &= 0, \\ (A_k + A_{k+1}) s_{1m}^3 + (C_k + C_{k+1}) s_{2m}^3 &= \gamma_m \mu_k. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} A_k + A_{k+1} &= -\frac{\gamma_m}{2\beta s_{1m}} \mu_k, \\ C_k + C_{k+1} &= \frac{\gamma_m}{2\beta s_{2m}} \mu_k. \end{aligned}$$

После подстановки значений  $A_k$ ,  $C_k$ ,  $C_{k+1}$  получим систему уравнений в конечных разностях относительно  $\mu_k$ ,  $\eta_k$

$$\left. \begin{aligned} &\eta_{k+1} + \eta_{k-1} - 2\eta_k \operatorname{ch} s_{1m} \mu' = \\ &= s_{2m}^2 (\mu_{k+1} + \mu_{k-1}) - \left( 2s_{2m}^2 \operatorname{ch} s_{1m} \mu' - \gamma_m \frac{\operatorname{sh} s_{1m} \mu'}{s_{1m}} \right) \mu_k; \\ &\eta_{k+1} + \eta_{k-1} - 2\eta_k \operatorname{ch} s_{2m} \mu' = \\ &= s_{1m}^2 (\mu_{k+1} + \mu_{k-1}) - \left( 2s_{1m}^2 \operatorname{ch} s_{2m} \mu' - \gamma_m \frac{\operatorname{sh} s_{2m} \mu'}{s_{2m}} \right) \mu_k. \end{aligned} \right\} (9.102)$$

Так как предполагаем, что края плиты оперты, то должны быть выполнены условия:  $\eta_0(0) = 0$ ;  $\mu_0(0) = 0$ ;  $\eta_n(0) = 0$ ;  $\mu_n(0) = 0$ . Поэтому удобно искать решение системы (9.102) в виде  $\eta_k = B_k \sin \frac{kv\pi}{n}$ ,  $\mu_k = D_k \sin \frac{kv\pi}{n}$ , где  $v$  — целое число.

После подстановки этих значений в уравнение (9.102) получим

$$\begin{aligned} &\left( \cos \frac{v\pi}{n} - \operatorname{ch} s_{1m} \mu' \right) B_k - \\ &- \left[ s_{2m}^2 \left( \cos \frac{v\pi}{n} - \operatorname{ch} s_{1m} \mu' \right) + \frac{\gamma_m \operatorname{sh} s_{1m} \mu'}{2s_{1m}} \right] D_k = 0; \\ &\left( \cos \frac{v\pi}{n} - \operatorname{ch} s_{2m} \mu' \right) B_k - \\ &- \left[ s_{1m}^2 \left( \cos \frac{v\pi}{n} - \operatorname{ch} s_{2m} \mu' \right) + \frac{\gamma_m \operatorname{sh} s_{2m} \mu'}{2s_{2m}} \right] D_k = 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы дает уравнение частоты

$$\begin{aligned} &\left( \cos \frac{v\pi}{n} - \operatorname{ch} s_{1m} \mu' \right) \left[ s_{1m}^2 \left( \cos \frac{v\pi}{n} - \operatorname{ch} s_{2m} \mu' \right) + \frac{\gamma_m \operatorname{sh} s_{2m} \mu'}{2s_{2m}} \right] - \\ &- \left( \cos \frac{v\pi}{n} - \operatorname{ch} s_{2m} \mu' \right) \times \\ &\times \left[ s_{2m}^2 \left( \cos \frac{v\pi}{n} - \operatorname{ch} s_{1m} \mu' \right) + \frac{\gamma_m \operatorname{sh} s_{1m} \mu'}{2s_{1m}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (9.103)$$

Когда  $s_{1m}$  — мнимая величина, удобнее ее заменить значением  $s_{1m} = s'_{1m}i$ , где  $s'_{1m} = \sqrt{\beta - m^2\pi^2}$ .

Запишем уравнение (9.103) для этого случая в виде

$$f_1(\beta) = \frac{2}{\beta} \frac{\left(\cos \frac{\nu\pi}{n} - \cos s_{1m}\mu'\right) \left(\cos \frac{\nu\pi}{n} - \operatorname{ch} \mu' s_{2m}\right)}{\left(\operatorname{ch} s_{2m}\mu' - \cos \frac{\nu\pi}{n}\right) \frac{\operatorname{sh} \mu' s_{1m}}{2s_{1m}} - \left(\cos \mu' s_{1m} - \cos \frac{\nu\pi}{n}\right) \frac{\operatorname{sh} \mu' s_{2m}}{2s_{2m}}}, \quad (9.104)$$

где

$$f_1(\beta) = \frac{Q}{a^2q} - \frac{EJ}{aD} \cdot \frac{\pi^4 m^4}{\beta^2}. \quad (9.104')$$

Значения функций  $f_1(\beta)$  для  $\mu = \frac{b}{a} = 1, 1\frac{1}{2}, 2$  приведены в табл. 9.7, 9.8 и 9.9, составленных при  $m = 1$ , для  $\mu = 1, 1\frac{1}{2}, 2$ .

Пр и м е р. Возьмем прямоугольную плиту, подкрепленную пятью ребрами, со следующими данными:

Модуль упругости $E$ в $\text{т/м}^2$ . . . . .	2,1 · 10 <sup>6</sup>
Толщина плиты $h$ в м . . . . .	0,1
Ширина плиты $a$ в м . . . . .	5
Длина плиты $b$ в м . . . . .	10
Вес единицы объема в $\text{кг/м}^3$ . . . . .	2400
Сечение ребер в $\text{м}^2$ . . . . .	0,30 × 0,50
Момент инерции ребра $J$ в $\text{м}^4$ . . . . .	0,003125

Величины, входящие в формулу (9.10) будут:

$$\text{вес ребра } Q = 0,30 \cdot 0,50 \cdot 2400 \cdot 5 = 1800 \text{ кг,}$$

$$\text{вес плиты на } 1 \text{ м}^2 \text{ } q = 0,1 \cdot 2400 = 240 \text{ кг;}$$

$$\mu' = \frac{10}{6 \cdot 5} = \frac{1}{3}; \quad \alpha = \frac{1800}{5^2 \cdot 0,24} = 0,30;$$

$$\gamma = \frac{EJ}{aD} = \frac{12(1 - 0,0278) 0,003125}{5 \cdot 0,1^3} = 7,291;$$

$$f_1(\beta) = 0,300 - \frac{709,49}{\beta^2}.$$

Разыскивая по табл. 9.9 значение функции  $f(\beta)$ , совпадающее со значением  $f_1(\beta)$  (9.104), получим для  $\mu' = \frac{1}{3}$  и  $\frac{\nu}{n} = \frac{1}{6}; \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$  следующие значения корней  $\beta$ :  $\beta_1 = 34,5; \beta_2 = 36,4; \beta_3 = 40,7; \beta_4 = 49,0$ .

Частоты колебаний  $\omega_i = \beta_i \sqrt{\frac{D}{a^4q}} = 3,431\beta_i$  будут  $\omega_1 = 118,4 \text{ 1/сек; } \omega_2 = 124,9; \omega_3 = 139,6; \omega_4 = 168,1$ .

Значение функции  $f(\beta)$

$\beta$	Пять ребер ( $\mu' = \frac{1}{6}$ )			Четыре ребра	
	$\frac{v}{n} = \frac{1}{6}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{6}$	$\frac{v}{n} = \frac{3}{6}$	$\frac{v}{n} = \frac{1}{5}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{5}$
2	16,0612	100,9680	398,6392	19,2641	120,6517
3	7,0458	44,7827	177,0835	8,4509	53,5135
4	3,8904	25,1178	99,5391	4,6663	30,0152
5	2,4299	16,0158	63,6471	2,9146	19,1388
6	1,6366	8,0902	44,1502	1,9630	15,2306
8	0,8477	4,8287	24,7640	1,0168	1,3560
10	0,4826	3,1777	15,7910	0,5780	4,6369
12	0,2842	2,2281	10,9168	0,3410	3,1598
16	0,0870	1,4146	6,0702	0,1044	1,6911
20	0,0043	0,8457	3,8269	-0,0052	1,2112
24	0,05393	0,5366	2,6083	-0,06474	0,6419
26	-0,07062	0,4327	2,1986	-0,08478	0,5177
30	-0,0946	0,3153	1,6113	-0,1136	0,3395
35	-0,1138	0,1841	1,1409	-0,1367	0,1969
40	-0,1263	0,0100	0,8356	-0,1517	0,1041
45	-0,1349	0,0430	0,6262	-0,1622	0,0405
50	-0,1410	-0,0043	0,4764	-0,1697	-0,0052
55	-0,1456	-0,0325	0,3655	-0,1754	-0,0391
60	-0,1492	-0,0540	0,2611	-0,1797	-0,0649
65	-0,1520	-0,0708	0,2454	-0,1832	-0,0852
70	-0,1542	-0,0865	0,1632	-0,1861	-0,1042
75	-0,1560	-0,0968	0,1210	-0,1885	-0,1146
80	-0,1576	-0,1054	0,0865	-0,1906	-0,1255
90	-0,1601	-0,1175	0,0337	-0,1940	-0,1424
100	-0,1619	-0,1274	-0,0043	-0,1970	-0,1550
110	-0,1635	-0,1349	-0,0326	-0,1992	-0,1648
120	-0,1648	-0,1408	-0,0525	-0,2015	-0,178
130		-0,1456	-0,0716	-0,1659	-0,1254
140		-0,1495	-0,0854	-0,1670	-0,1624

Значение функции  $f(\beta)$

$\beta$	Пять ребер ( $\mu' = \frac{1}{4}$ )			Четыре ребра ( $\mu' = \frac{3}{10}$ )		
	$\frac{v}{n} = \frac{1}{6}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{6}$	$\frac{v}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{v}{n} = \frac{1}{5}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{5}$	$\frac{v}{n} = \frac{3}{5}$
2	12,4384	46,4919	148,7080	14,9077	55,4413	172,8533
3	5,3896	20,5256	65,959	6,4598	24,4776	76,6735
4	2,9225	11,4375	36,9974	3,5030	13,6405	43,0106
5	1,7806	7,2308	23,5921	2,1344	8,6241	27,4294
6	1,1603	4,9457	16,3102	1,3909	5,8993	18,9656
8	0,5435	2,6736	9,0696	0,6516	3,1899	10,5497
10	0,2579	1,6219	5,7182	0,3093	1,9357	6,6542

Таблица 9.7

для плиты  $\mu = \frac{b}{a} = 1$ 

$(\mu' = \frac{1}{5})$	Три ребра $(\mu' = \frac{1}{4})$			Два ребра $(\mu' = \frac{1}{3})$	
	$\frac{v}{n} = \frac{3}{5}$	$\frac{v}{n} = \frac{1}{4}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{4}$	$\frac{v}{n} = \frac{3}{4}$	$\frac{v}{n} = \frac{1}{3}$
465,6959	24,0461	148,7080	524,6619	31,8824	184,8210
206,8741	10,5489	65,959	233,0776	13,9877	81,9874
116,2865	5,8249	36,9914	131,0230	7,7245	45,9956
74,3574	3,6383	23,5921	83,7864	4,8255	29,3365
51,5810	2,4506	16,3102	58,1269	3,2507	28,2879
28,9341	1,2695	9,0696	32,6132	1,6847	11,2888
18,4518	0,7228	5,7182	17,1604	0,9597	7,1238
12,7577	0,4258	3,8976	12,2323	0,5657	4,8610
7,0739	0,1304	1,8215	8,0104	0,1735	2,6186
5,0578	-0,0065	1,2492	5,0578	-0,0086	1,5681
3,0515	-0,08098	0,7937	3,4538	-0,1083	1,0009
2,5729	-0,10609	0,6405	2,9144	-0,1421	0,8099
1,8866	-0,1422	0,4206	2,1409	-0,1911	0,5351
1,3370	-0,1714	0,2443	1,5214	-0,2314	0,3136
0,9812	-0,1905	0,1295	1,1190	-0,2588	0,1682
0,7354	-0,2039	0,0505	0,8427	-0,2789	0,0664
0,5602	-0,2138	0,0065	0,6446	-0,2946	-0,0087
0,4304	-0,2214	-0,0490	0,4977	-0,3078	-0,0667
0,3315	-0,2274	-0,0818	0,3855	-0,3194	-0,1138
0,2545	-0,2324	-0,1078	0,2977	-0,3302	-0,1538
0,1932	-0,2367	-0,1287	0,2276	-0,3406	-0,1997
0,1435	-0,2405	-0,1461	0,1704	-0,3510	-0,2236
0,1028	-0,2438	-0,1608	0,1231	-0,3618	-0,2576
0,4020	-0,2499	-0,1847	0,0491	-0,3855	-0,3358
-0,0052	-0,2556	-0,2039	-0,0386	-0,4791	-0,4567
-0,0395	-0,2618	-0,2204	-0,0511	-0,4509	-0,7938
-0,0662	-0,2670	-0,2356	-0,0932	-0,5010	-0,4502
-0,0879	-0,2731	-0,1795	-0,1289	-0,5742	-0,2505
-0,1059	-0,2798	-0,1854	-0,1624	-0,6916	-0,2659

Таблица 9.8

для плиты  $\mu = \frac{3}{2}$ 

Три ребра $(\mu' = \frac{3}{8})$			Два ребра $(\mu' = \frac{1}{2})$	
$\frac{v}{n} = \frac{1}{4}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{4}$	$\frac{v}{n} = \frac{3}{4}$	$\frac{v}{n} = \frac{1}{3}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{3}$
18,5696	67,9138	192,3176	24,4343	82,5850
8,0472	29,9881	85,3218	10,5921	36,4844
4,3643	16,7141	47,8733	5,7471	20,3489
2,6596	10,509	30,5398	3,5043	12,8802
1,7335	7,2324	21,1241	2,2857	8,8229
0,8125	3,9135	11,7616	1,0733	4,7877
0,3860	2,377	7,4278	0,5111	2,9188

$\beta$	Пять ребер ( $\mu' = \frac{1}{4}$ )			Четыре ребра ( $\mu' = \frac{3}{10}$ )		
	$\frac{v}{n} = \frac{1}{6}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{6}$	$\frac{v}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{v}{n} = \frac{1}{5}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{5}$	$\frac{v}{n} = \frac{3}{5}$
12	0,1028	1,0506	3,8976	0,1233	1,2543	4,5380
16	-0,0515	0,4824	2,0873	0,0619	0,6765	2,4335
20	-0,1231	0,2192	1,2492	-0,1479	0,2623	1,4589
24	-0,1621	0,1380	0,7937	-0,1950	0,1652	0,9290
26	-0,1753	0,07613	0,6405	-0,2110	0,09122	0,7506
30	-0,1943	-0,0413	0,4206	-0,2342	-0,0496	0,4913
35	-0,2097	-0,0969	0,2443	-0,2533	-0,1168	0,2883
40	-0,2199	-0,1333	0,1295	-0,2663	-0,1612	0,1536
45	-0,2272	-0,1586	0,0505	-0,2759	-0,1925	0,0602
50	-0,2327	-0,1769	-0,0065	-0,2805	-0,2457	-0,0078
55	-0,2369	-0,1908	-0,0490	-0,2897	-0,2338	-0,0593
60	-0,2405	-0,2017	-0,0818	-0,2951	-0,2485	-0,0999
70	-0,2462	-0,2179	-0,1287	-0,3049	-0,2720	-0,1607
80	-0,2509	-0,2296	-0,1608	-0,3143	-0,2914	-0,2067
90	-0,2553	-0,2390	-0,1847	-0,3241	-0,3097	-0,2467
100	-0,2596	-0,2472	-0,2039	-0,3347	-0,3287	-0,2865
110	-0,2640	-0,2549	-0,2204	-0,3419	-0,3499	-0,3323
120	-0,2687	-0,2625	-0,2356	-0,3795	-0,3750	-0,3926
130	-0,2739	-0,2704	-0,1795		-0,4066	-0,4856
140	-0,2795	-0,2788	-0,1854		-0,4481	-0,6634

Значения функции  $f(\beta)$

$\beta$	Пять ребер ( $\mu' = \frac{1}{3}$ )				Четыре ребра	
	$\frac{v}{n} = \frac{1}{6}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{6}$	$\frac{v}{n} = \frac{3}{6}$	$\frac{v}{n} = \frac{4}{6}$	$\frac{v}{n} = \frac{1}{5}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{5}$
2	12,3185	31,8824	83,0796	184,8210	14,7416	37,8927
3	5,2907	13,9877	36,7489	81,9874	6,3319	16,6266
4	2,8309	7,7245	20,5331	45,9956	3,3884	9,1833
5	1,6923	4,8255	13,0275	29,3365	2,0259	5,7381
6	1,0738	3,2507	8,9503	28,2879	1,2858	3,8665
8	0,4587	1,6847	4,8962	11,2888	0,5495	2,0052
10	0,1739	0,9597	3,0195	7,1238	0,2084	1,1433
12	0,0190	0,5657	1,9998	4,8610	0,0228	0,6747
16	-0,1354	0,1735	0,9854	2,6186	-0,1628	0,2075
20	-0,2074	-0,0086	0,5152	1,5681	-0,2500	-0,0010
24	-0,2471	-0,1083	0,2589	1,0001	-0,2889	-0,1061
26	-0,2607	-0,1421	0,1723	+0,8099	-0,3160	-0,1718
30	-0,2806	-0,1911	0,0476	0,5351	-0,3417	-0,2324
35	-0,2975	-0,2314	-0,0537	0,3136	-0,3647	-0,2841
40	-0,3095	-0,2588	-0,1209	0,1682	-0,3824	-0,3213
45	-0,3188	-0,2789	-0,1688	0,0064	-0,3977	-0,3510
50	-0,3266	-0,2946	-0,2048	-0,0087	-0,4128	-0,3771
55	-0,3336	-0,3078	-0,2335	-0,0667	-0,4264	-0,4018
60	-0,3402	-0,3191	-0,2575	-0,1138	-0,4416	-0,4271
64	-0,013453	-0,3302	-6,2746	-0,1462	-0,4547	-0,4488
70	-0,3532	-0,3406	-0,2983	-0,1897	-0,4767	-0,4859
74	-0,3587	-0,3510	-0,3134	-0,2169	-0,4936	-0,05000
80	-0,3673	-0,3618	-0,3362	-0,2576	-0,5232	-0,5701
90	-0,3836	-0,3855	-0,3729	-0,3358	-0,5898	-0,7164
100	-0,4032	-0,4141	-0,431	-0,4567	-0,694	-1,0543
110	-0,4274	-0,4509	-0,5080	0,7438	-0,8804	-2,7721
120	-0,4582	-0,5010	-0,6389	-3,4502	-1,3071	2,1906
130	-0,4986	-0,5742	-0,9259	-0,2505	-3,2635	0,5942
140	-0,5538	-0,6916	-2,1199	-0,2659	+3,6520	0,2664



Три ребра ( $\mu' = \frac{3}{8}$ )			Два ребра ( $\mu' = \frac{1}{2}$ )	
$\frac{v}{n} = \frac{1}{4}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{4}$	$\frac{v}{n} = \frac{3}{4}$	$\frac{v}{n} = \frac{1}{3}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{3}$
0,1540	1,5420	0,0734	0,2045	1,9023
-0,0774	0,7108	2,7314	-0,1036	0,8877
-0,1856	0,3247	1,6462	-0,2508	0,4125
-0,2451	0,1135	1,0553	-0,3369	0,1475
-0,2659	0,04181	0,8560	-0,3671	0,05512
-0,02965	-0,0622	-0,5690	-0,4165	0,0850
-0,3227	-0,1480	-0,3368	-0,4665	-0,2149
-0,3418	-0,2067	-0,1828	-0,5124	-0,3287
-0,3571	-0,2504	-0,0733	-0,5613	-0,4598
-0,3706	-0,2854	-0,0098	-0,6194	-0,6761
-0,3832	-0,3157	-0,0775	-0,6954	-1,3336
-0,3957	-0,3439	-0,1373	-0,8044	5,4535
-0,4226	-0,4015	-0,2612	-1,3149	0,2306
-0,4551	-0,4741	-0,4916	-15,5103	0,0007
-0,4981	-0,5824	-6,3540	0,9429	-0,0874
-0,5584	-0,8252	-0,3494	0,3072	-0,1371
-0,6504	-1,7051	-0,0661	0,1010	-0,1710
-0,8084	3,6298	-0,1029	-0,0069	-0,1976
-1,1422	0,6385	-0,0461	-0,0729	-0,2209
-2,3087	0,2666	-0,0797	-0,1273	-0,2433

Таблица 9.9

для плиты  $\mu = 2$

$(\mu' = \frac{2}{5})$	Три ребра ( $\mu' = \frac{1}{2}$ )			Два ребра ( $\mu' = \frac{2}{3}$ )	
	$\frac{v}{n} = \frac{1}{4}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{4}$	$\frac{v}{n} = \frac{3}{4}$	$\frac{v}{n} = \frac{1}{3}$	$\frac{v}{n} = \frac{2}{3}$
95,8877	18,2871	15,9847	105,0254	23,733	54,3834
42,4215	7,8568	20,4843	46,4836	10,2053	23,8981
23,7082	4,2059	11,1539	25,9938	5,4698	13,2275
15,0465	2,5159	6,9738	16,5097	3,277	8,2877
10,3413	1,5976	4,7029	11,3576	2,0849	5,6035
5,6624	0,6838	2,4439	6,2341	0,8968	2,9318
3,4963	0,2598	1,3910	3,8617	0,3430	1,6915
2,3192	0,0285	0,8272	2,5719	0,0379	1,0135
1,1473	-0,2046	0,2566	1,2862	-0,2856	0,3254
0,6029	-0,3168	-0,0129	0,6864	-0,4453	-0,0174
0,3049	-0,3825	-0,1658	0,3547	-0,5624	-0,2428
0,2038	-0,4067	-0,2202	0,2403	-0,6156	-0,3445
0,0568	-0,4460	-0,3047	0,0693	0,7280	-0,5943
-0,0649	-0,4864	-0,3862	-0,0846	-0,9205	-1,7633
-0,1490	-0,5244	-0,4592	-0,2159	-1,2987	-0,9604
-0,2127	-0,5648	-0,5381	-0,3733	-2,6725	-0,1742
-0,2656	-0,6123	-0,6398	-0,7176	5,8419	-0,0168
-0,3140	-0,6720	-0,7974	39,251	-0,9938	-0,1091
-0,3630	-0,7527	-1,1092	0,48147	0,3996	-0,1678
-0,4064	-0,8424	-1,7669	0,18217	0,1981	-0,1944
-0,4873	-1,0588	11,7800	0,0237	0,0307	-0,2373
-0,5620	-1,3208	1,4767	-0,0303	-0,0421	-0,2617
-0,7456	-2,3479	0,4970	-0,0825	-0,1261	-0,2954
-2,3120	3,1028	0,1224	-0,1352	-0,2510	-0,3527
1,0420	0,6624	-0,0127	-0,1600	-0,4662	-0,4254
0,2784	0,2676	-0,0855	-0,1943	-13,8438	-0,5615
0,1034	0,1019	-0,1341	-0,2155	0,2146	-0,8232
0,0048	0,0060	-0,1718	-0,2348	0,0081	-3,7797
-0,0459	-0,0632	-0,2055	-0,2539	-0,0689	0,8885

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В предыдущих разделах нами были определены частоты собственных колебаний плит. Эти частоты обычно и представляют практический интерес, так как зная их, можно жесткость плиты подобрать таким образом, чтобы частоты собственных колебаний отличались от частоты  $k$  вынужденных колебаний, происходящих от неуравновешенной силы  $H \sin kt$  механизма, установленного на плите.

Без всяких затруднений можно определить величину амплитуды вынужденных колебаний, зная амплитуду неуравновешенной силы  $H$  и массу механизма  $P$  (без учета затухания).

Рассмотрим, например, плиту, подкрепленную двумя ребрами на одинаковых расстояниях друг от друга (см. рис. 9.13). Для определения прогиба в этом случае необходимо учесть в выражении для прогиба (9.98) частное решение (9.81):

$$\Phi_n(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq \eta \leq \eta_1; \\ \frac{2a^3}{D} \cdot \frac{H}{2} \sin \frac{n\pi}{2} Y_{3n} \left( \eta - \frac{\mu}{2} + \sigma \right) & \\ & \text{для } \frac{\mu}{2} - \delta \leq \eta \leq \frac{\mu}{2} + \delta. \end{cases}$$

Тогда уравнение изогнутой поверхности (9.98) в интервале  $\frac{\mu}{2} - \delta \leq \eta \leq \frac{\mu}{2} + \delta$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} W(\xi, \eta) = & \sum_n \left\{ A_n \operatorname{sh} s_{1n} \eta + B_n \operatorname{sh} s_{2n} \eta + \right. \\ & \left. + \gamma'_n (A_n s_{1n} \eta_1 + B_n \operatorname{sh} s_{2n} \eta_1) Y_{3n}(\eta - \eta_1) + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\beta^2 P}{\omega^2 q} W \left( \xi_1, \frac{\mu}{2} - \delta \right) + \frac{a^2 H}{D} \right] \sin \frac{n\pi}{2} Y_{3n}(\eta - \eta_2) \right\} \sin n\pi \xi. \end{aligned} \quad (9.105)$$

Производя вычисления так же, как и для случая  $H = 0$ , получим для амплитуды в точке  $\xi = \frac{1}{2}$ ;  $\eta = \frac{\mu}{2}$ , где приложена сосредоточенная масса  $P$  и сила  $H \sin \omega t$ , значение

$$W \left( \frac{1}{2}, \frac{\mu}{2}, \beta \right) = \frac{Ha^2}{\left[ 1 - \frac{P}{2a^2 q} f(\beta) \right] 2\beta D} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{\Phi_n \left( \frac{1}{2}, \frac{\mu}{2}, \beta \right)}{\Psi_n \left( \frac{1}{2}, \frac{\mu}{2}, \beta \right)}. \quad (9.106)$$

Когда  $\omega$  стремится к частоте собственных колебаний плиты, нагруженной грузом  $P$ , знаменатель стремится к нулю и  $W$  неограниченно возрастает.

**ПРИМЕНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ  
К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПЛИТ,  
ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ**

**Плиты, подкрепленные перекрестными ребрами**

Предположим, что плита подкреплена сравнительно большим числом ребер в двух направлениях (рис. 9.18). Если плита оперта по контуру, частота колебаний может быть получена с помощью энергетического метода. Для этого задаемся выражением изогнутой поверхности пластинки в виде

$$\omega(x, y, t) = W(x, y) \cos \omega t. \quad (9.107)$$

Так как плита по условию оперта по контуру, то удобно взять для  $W(x, y)$  выражение

$$W(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (9.108)$$

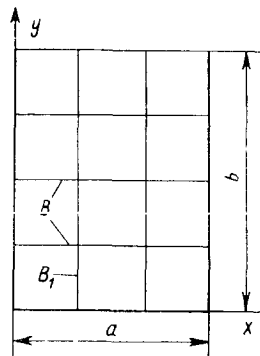


Рис. 9.18

удовлетворяющее условиям на контуре. В дальнейшем обозначим:  $B$  — жесткость ребер, параллельных оси  $x$ ;  $Q = F\rho a$  — масса одного из этих ребер;  $r$  — число ребер;  $B_1$  — жесткость ребер, параллельных оси  $y$ ;  $Q_1 = F_1\rho b$  — масса ребра;  $p$  — число ребер;  $\mu = \frac{b}{a}$ ,  $\alpha_1 = \frac{aD}{B_1}$ .

Прогиб ребра, лежащего на прямой  $x = x_i$ ,

$$W(x_i, y) = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (9.109)$$

где

$$A_{ni} = a_{1n} \sin \frac{\pi x_i}{a} + a_{2n} \sin \frac{2\pi x_i}{a} + \dots$$

Аналогично прогиб для ребра  $y = y_i$

$$W(x, y_i) = \sum_m B_{mi} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (9.110)$$

где

$$B_{mi} = a_{m1} \sin \frac{\pi y_i}{b} + a_{m2} \sin \frac{2\pi y_i}{b} + \dots$$

Пользуясь энергетическим методом, определяем сперва потенциальную и кинетическую энергии ребер и плиты.

Потенциальная энергия всех ребер

$$V_p = \left\{ \frac{B_1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^b \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=x_i}^2 dy + \frac{B}{2} \sum_{i=1}^r \int_0^a \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{y=y_i}^2 dx \right\} \cos^2 \omega t.$$

Так как

$$\int_0^b \sin \frac{i\pi y}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0 & \text{для } i \neq k, \\ \frac{b}{2} & \text{для } i = k, \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^b \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 dy &= \int_0^b \left( A_{1i} \frac{\pi^2}{b^2} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{2i} \frac{4\pi^2}{b^2} \sin \frac{2\pi y}{b} + \dots \right)^2 dy = \\ &= \frac{\pi^4}{2b^3} \sum_{n=1}^{\infty} A_{ni}^2 n^4, \end{aligned}$$

таким же образом

$$\int_0^a \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{2a^3} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mi}^2 m^4.$$

Следовательно, для потенциальной энергии ребер получим выражение

$$V = \left[ \frac{\pi_4 B_1}{4b^3} \sum_{i=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} A_{ni}^2 n^4 + \frac{\pi^4 B}{4a^3} \sum_{i=1}^r \sum_{m=1}^{\infty} B_{mi}^2 m^4 \right] \cos^2 \omega t. \quad (9.111)$$

Кинетическая энергия ребер

$$\begin{aligned} T_p &= \left[ \frac{F_1 \rho}{2} \sum_{i=1}^p \int_0^b W^2(x_1, y) dy + \frac{F \rho}{2} \sum_{i=1}^r \int_0^a W^2(x, y_i) dx \right] \omega^2 \sin^2 \omega t = \\ &= \left[ \frac{Q_1}{4} \sum_{i=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} A_{ni}^2 + \frac{Q}{4} \sum_{i=1}^r \sum_{m=1}^{\infty} B_{mi}^2 \right] \omega^2 \sin^2 \omega t. \quad (9.112) \end{aligned}$$

Потенциальная энергия плиты (9.9) равна

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{D}{2} \cos^2 \omega t \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2(1 - \sigma) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

После подстановки значения для  $W$  из уравнения (9.108) получим

$$V_n = \frac{\pi^4 ab}{8} D a_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \cos \omega t. \quad (9.113)$$

Кинетическая энергия плиты согласно уравнению (9.10) равна

$$T_n = \frac{\rho h}{2} \omega^2 \sin^2 \omega t \int_0^a \int_0^b W^2(x, y) dx dy = \frac{\rho hab}{8} \omega^2 a_{mn}^2 \sin^2 \omega t. \quad (9.114)$$

Для получения уравнения частоты берем максимальную потенциальную и максимальную приведенную кинетическую энергии плиты и ребер и составляем условие обращения в минимум выражения

$$V_{\max} - \omega^2 T_{\max} = V_n + V_p - \omega^2 (T_n + T_p).$$

т. е. условие

$$\frac{\partial (V_{\max} - \omega^2 T_{\max})}{\partial a_{mn}} = 0.$$

Это условие дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial (V_{\max} - \omega^2 T_{\max})}{\partial a_{mn}} &\equiv \frac{\pi^4 ab}{4} D a_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \\ &+ \frac{\pi^4 B_1}{2b^3} n^4 \sum_{i=1}^p A_{ni} \sin \frac{m\pi x_i}{b} + \frac{\pi^4 B}{2a^3} m^4 \sum_{i=1}^r B_{mi} \sin \frac{n\pi y_i}{b} - \\ &- \omega^2 \left[ \frac{Q_1}{2} \sum_{i=1}^p A_{ni} \sin \frac{m\pi x_i}{a} + \frac{Q}{2} \sum_{i=1}^r B_{mi} \sin \frac{n\pi y_i}{b} + \right. \\ &\left. + \frac{\rho hab a_{mn}}{4} \right] = 0. \end{aligned} \quad (9.115)$$

Так как  $A_{ni}$  и  $B_{mi}$  содержат параметры  $a_{jk}$ , то мы получили систему алгебраических уравнений относительно  $a_{jk}$ . Определитель этой системы дает уравнение частоты.

В случае, когда число продольных и поперечных ребер сравнительно велико, в выражении для изогнутой поверхности (9.108) мы ограничимся лишь членами, для которых

$$m + n < 2(p + 1) \text{ и } m + n < 2(r + 1),$$

тогда уравнение (9.115) может быть значительно упрощено. Так как по условию ребра расположены на равных расстояниях друг от друга, то  $\sin \frac{m\pi x_i}{a} = \sin \frac{m\pi i}{p+1}$ ;  $\sin \frac{n\pi y_i}{b} = \sin \frac{n\pi i}{r+1}$ .

Теперь, применяя общеизвестные соотношения для сумм:

$$\sum_{i=1}^p \sin \frac{m\pi i}{p+1} \sin \frac{n\pi i}{p+1} = 0,$$

когда  $m \pm n$  не делится на  $2(p+1)$   $m \neq n$ ;

$$\sum_{i=1}^p \sin \frac{m\pi i}{p+1} \sin \frac{n\pi i}{p+1} = -\frac{p+1}{2},$$

когда  $m+n$  делится на  $2(p+1)$ ;

$$\sum_{i=1}^p \sin \frac{m\pi i}{p+1} \sin \frac{n\pi i}{p+1} = \frac{p+1}{2},$$

когда  $m-n$  делится на  $2(p+1)$ ;

$$\sum_{i=1}^p \sin^2 \frac{m\pi i}{p+1} = 0,$$

когда  $m$  делится на  $p+1$ ;

$$\sum_{i=1}^p \sin^2 \frac{m\pi i}{p+1} = \frac{p+1}{2},$$

когда  $m$  не делится на  $p+1$ ,

(9.116)

увидим, что в каждом из уравнений (9.115) останется лишь один параметр  $a_{mn}$ .

В таком случае для квадрата частоты получим следующее выражение:

$$\omega^2 = \frac{B_1 \pi^4}{b^3 Q_1} \cdot \frac{n^4 + \frac{r+1}{p+1} \mu^4 m^4 \frac{B}{B_1} + \frac{\alpha_1}{p+1} (m^2 \mu^2 + n^2)^2}{1 + \frac{r+1}{p+1} \cdot \frac{Q}{Q_1} + \frac{G_1}{(p+1) Q_1}}, \quad (9.117)$$

где  $G_1$  — масса плиты;  $\mu = \frac{b}{a}$ ;  $\alpha_1 = \frac{aD}{B_1}$ .

Если ребра, параллельные оси  $y$ , отсутствуют, то

$$\omega^2 = \frac{B_1 \pi^4}{a^3 Q} \cdot \frac{m^4 + \frac{\alpha_1'}{(r+1) \mu^3} (m^2 \mu^2 + n^2)^2}{1 + \frac{G}{(r+1) Q}}, \quad (\alpha_1' = \frac{aD}{B}). \quad (9.118)$$

В таком случае, когда плита подперта в ряде точек еще стойками, причем коэффициент жесткости стойки, лежащей на пере-

сечении  $i$ -й горизонтали и  $j$ -й вертикали, будет  $c_{ij}$ , то в правой части (9.115) необходимо добавить

$$\frac{\partial V_s}{\partial a_{mn}} = -\frac{1}{2} c_{ij} \left( \frac{\partial W^2}{\partial a_{mn}} \right)_{x=x_i, y=y_j},$$

т. е. получили выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_s}{\partial a_{mn}} = & \sum_{j=1}^{p_1} \sum_{i=1}^{r_1} c_{ij} \sin \frac{n\pi y_i}{b} \sin \frac{m\pi x_j}{a} \times \\ & \times \sum_k \sum_l a_{kl} \sin \frac{k\pi x_i}{a} \sin \frac{l\pi y_j}{b}, \end{aligned} \quad (9.119)$$

где  $p$  — число рядов стоек, лежащих на прямых, параллельных оси  $y$ ;

$r$  — число рядов стоек, лежащих на прямых, параллельных оси  $x$ .

Пример. Для сравнения результатов, полученных по точной формуле (9.104) с приближенной (9.118), берем прямоугольную плиту с данными, взятыми из предыдущего примера  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2$ ;  $h = 0,1$ ;  $\sigma = \frac{1}{6}$ ;  $a = 5 \text{ м}$ ;  $b = 10 \text{ м}$ ; вес единицы объема  $2400 \text{ кг/м}^3$ ; вес плиты  $G = 0,1 \cdot 2,4 \cdot 5 \cdot 10 = 12 \text{ т}$ ; вес ребра  $q = 0,3 \cdot 0,5 \cdot 2,4 \cdot 5 = 1,8 \text{ т}$ ;  $J_1 = 0,003125$ ;  $\alpha' = \frac{aD}{EJ} = \frac{1}{7,291}$ ;  $\mu = 2$ .

Для  $m$  и  $n$  берем значения  $m = 1, n = 1, 2, 3, 4$  и находим для них  $\omega_1 = 119 \text{ 1/сек}$ ,  $\omega_2 = 125$ ,  $\omega_3 = 140$ ,  $\omega_4 = 169$ .

Сравнивая с результатами расчетов, приведенными выше, увидим, что для данного примера получается почти точное совпадение.

### Плиты, подкрепленные ребрами одного направления

Обычно в промышленных сооружениях жесткость колонн значительна, жестки и продольные ребра. Поэтому представляется возможным во многих случаях при определении числа колебаний перекрытий рассматривать лишь элемент перекрытия, ограниченный двумя продольными ребрами, с длиной, равной шагу колонн, как плиту, подкрепленную ребрами и определенным способом заделанную на контуре при наличии некоторого груза (например, масса машины).

Выше нами уже было выведено значение частоты для плиты, подкрепленной ребрами и опертой по контуру.

Выведем теперь расчетные формулы для некоторых других случаев опирания по контуру для основного тона при наличии сосредоточенного груза массой  $M$ , связанного с серединой перекрытия.

В последующем везде приняты обозначения (рис. 9.19):

$B_1 = E_1 J_1$  — жесткость продольных балок;

$B = E_2 J$  — жесткость промежуточных поперечных балок;

$B'$  — жесткость крайних балок;

$F_1, F$  — соответствующие площади поперечных сечений ребер;

$a$  — длина плиты;

$b$  — длина поперечного ребра (ширина плиты);

$\rho_1$  — масса единицы объема материала продольного ребра;

$\rho_1$  — масса единицы объема материала поперечного ребра;

$\rho$  — масса единицы объема материала плиты;

$Q_1 = F_1 \rho_1 a$  — масса продольной балки;

$Q = F \rho_1 b$  — масса промежуточного поперечного ребра;

$Q'$  — масса крайнего поперечного ребра;

$h$  — толщина плиты;

$G_1 = ab\rho h$  — масса плиты;

$M$  — масса груза, приложенного в точках  $x = \frac{a}{2}$ ,

$y = \frac{b}{2}$ ,  $\mu = \frac{b}{a}$ ,

$p$  — число промежуточных поперечных ребер;

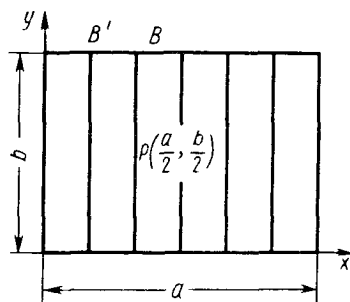


Рис. 9.19

$$\delta_0 = \frac{M}{(p+1)Q}; \quad \delta_1 = \frac{G_1}{(p+1)Q};$$

$$\delta_2 = \frac{Q_1}{Q}; \quad \delta' = \frac{Q'}{(p+1)Q};$$

$$k = \frac{B_1}{B}; \quad k' = \frac{B_1}{(p+1)B};$$

$$\alpha = \frac{bD}{B}; \quad \lambda_p = \sqrt{\frac{B}{b^3 Q}};$$

$$n = \frac{60}{2\pi} \pi^2 \lambda_p = \frac{60}{2\pi} \pi^2 \sqrt{\frac{B}{b^3 Q}} \text{ — число колебаний в 1 мин.}$$

Уравнение частот в дальнейшем везде будем составлять по методу Релея—Ритца аналогично изложенному выше. Пользуясь выбранным значением  $W(x, y)$ , подсчитываем потенциальную и кинетическую энергии в зависимости от неопределенных параметров  $a_{mn}$ .



Для плиты по формулам (9.9) и (9.10)

$$V_{\max} = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1 - \sigma) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy; \\ T_{\max} = \frac{\rho h}{2} \int_0^a \int_0^b W^2 dx dy;$$

для ребер по формулам (9.61)

$$V_{1\max} = \frac{B}{2} \sum_{i=1}^p \int_0^b \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=x_i}^2 dy; \\ \bar{T}_{1\max} = \frac{\rho_1 F}{2} \sum_{i=1}^p \int_0^b \bar{W}_{x=x_i}^2 dy.$$

После этого составляем условие минимума для выражения  $\frac{\partial(V_{\max} - \omega^2 T_{\max})}{\partial a_{mn}} = 0$ , которое и дает уравнение частоты.

Рассмотрим несколько частных случаев.

**Прямоугольная плита, опертая по контуру, с грузом по середине.** Решение для этого случая при отсутствии груза было получено выше (9.117).

Квадрат частоты при принятых выше обозначениях равен

$$\omega^2 = \pi^4 \lambda_p^2 \frac{1 + \frac{\alpha}{(\rho + 1)\mu^3} (1 + \mu^2)^2}{1 + \delta_1 + 4\delta_0}. \quad (9.120)$$

**Прямоугольная плита, стороны которой  $y = 0$ ,  $y = b$  заделаны,  $x = 0$ ,  $x = a$  свободно оперты.** Уравнение изогнутой поверхности можно взять в виде  $W(x, y) = Y_1(y) \sin \frac{\pi x}{a}$ .

Для  $Y_1(y)$  можно, например, взять фундаментальную функцию колеблющегося стержня с заделанными концами (гл. 4).

Если взять начало координат в точке  $x = 0$ ,  $y = \frac{b}{2}$ , то фундаментальная функция для заданного расположения координат может быть получена из условий заделки:  $Y\left(\pm \frac{b}{2}\right) = 0$ ;  $Y'\left(\pm \frac{b}{2}\right) = 0$ ;

из условий симметрии  $Y'(0) = 0$ ;  $Y'''(0) = 0$ .

Условия симметрии дают

$$Y_1(y) = A \operatorname{ch} \frac{2ry}{b} + C \cos \frac{2ry}{b}; \quad (9.121)$$

из условий заделки получаем

$$\begin{cases} A \operatorname{ch} r + C \cos r = 0; \\ A \operatorname{sh} r - C \sin r = 0. \end{cases} \quad (9.122)$$

Составляя определитель, получим  $\operatorname{th} r + \operatorname{tg} r = 0$ .

Это уравнение дает значение фундаментальных чисел  $r = 0$ ;  $r = \frac{4,730}{2}$ ; ... Исключая  $C$  из выражения (9.21) с помощью уравнений (9.122), получим для фундаментальной функции значение

$$Y_1(y) = A \left( \cos r \operatorname{ch} \frac{2ry}{b} - \operatorname{ch} r \cos \frac{2ry}{b} \right). \quad (9.123)$$

Подставляя значение  $W(x, y)$  в выражение

$$V_{\max} + V_{1 \max} = \omega^2 (T_{\max} + T_{1 \max})$$

и принимая во внимание значения для сумм (9.116), получим после вычислений следующее значение для  $\omega^2$ :

$$\omega^2 = \frac{4,730^4 B}{\sigma F b^4} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha}{(\rho + 1)\mu} (1 + 1,218\mu^2 + 0,1946\mu^4)}{1 + \frac{G_1}{(\rho + 1)Q}}. \quad (9.124)$$

Прямоугольная плита, стороны которой  $x = 0$ ,  $x = a$  заделаны,  $y = 0$ ,  $y = b$  оперты, подперта в вершинах упругими стойками и ребрами (см. рис. 9.19) и несет массу  $M$  в точке  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$ . Уравнение изогнутой поверхности берем в виде

$$W(x, y) = a_0 + a_1 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (9.125)$$

Потенциальная энергия ребер

$$\begin{aligned} V_{1 \max} &= \frac{B}{2} \sum_{i=1}^p \int_0^b \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x=x_i}^2 dy = \\ &= \frac{B}{2} \sum_{i=1}^p a_1^2 \int_0^b \frac{\pi^4}{b^4} \sin^2 \frac{\pi y}{b} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x_i}{a} \right)^2 dy. \end{aligned}$$

Кинетическая энергия ребер

$$\begin{aligned} T_{1 \max} &= \sum_{i=1}^p \frac{\rho_1 F}{2} \int_0^b W_{x=x_i}^2 dy = \\ &= \frac{\rho_1 F}{2} \sum_{i=1}^p \int_0^b \left[ a_0 + a_1 \left( 1 - \cos \frac{2\pi i}{\rho + 1} \right) \sin \frac{\pi y}{b} \right]^2 dy. \end{aligned}$$

С помощью соотношения (9.116) для сумм

$$S_1 = \sum_{i=1}^p \left(1 - \cos \frac{2\pi i}{p+1}\right)^2; \quad S_2 = \sum_{i=1}^p \left(1 - \cos \frac{2\pi i}{p+1}\right)$$

получим значения

$$S_1 = \frac{3(p+1)}{2}, \quad S_2 = p+1.$$

Тогда

$$V_{1 \max} = \frac{3B\pi^4}{8b^3} (p+1) a_1^2;$$

$$T_{1 \max} = \frac{\rho_1 F}{2} \left[ bpa_0^2 + 4 \frac{b}{\pi} (p+1) a_0 a_1 + \frac{3}{4} b (p+1) a_1^2 \right].$$

Учитывая потенциальную энергию плиты и колонн, получим

$$V_{\max} = \frac{3B\pi^4}{8b^3} (p+1) a_1^2 + \frac{D\pi^4}{2} a_1^2 \left[ \frac{4b}{a^3} + \frac{3a}{4b^3} + \frac{2}{ab} \right] + \frac{1}{2} ca_0^2,$$

где  $c$  — коэффициент жесткости колонн, приходящихся на данную плиту, т. е. сила, при которой получается осадка, равная единице.

Кинетическая энергия ребер, плиты и груза

$$\begin{aligned} \omega^2 T_{\max} = \omega^2 \left\{ \frac{\rho F}{2} \left[ a_0^2 bp + 4a_0 a_1 \frac{b}{\pi} (p+1) + a_1^2 \frac{3b(p+1)}{4} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\rho h}{2} \left( a_1^2 \frac{3ab}{4} + a_0 a_1 \frac{4ab}{\pi} + a_0^2 ab \right) + \frac{M}{2} (2a_1 + a_0)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Составляя условия для определения коэффициентов  $a_0$ ,  $a_1$

$$\frac{\partial (V_{\max} - \omega^2 T_{\max})}{\partial a} = 0 \quad (9.126)$$

и вводя принятые обозначения, получим следующую систему уравнений:

$$\left[ \frac{cb_3}{\pi^4 EJ} - (p+1) \left( \frac{p}{p+1} + \delta_0 + \delta_1 \right) \lambda^2 \right] a_0 -$$

$$- \frac{2}{\pi} (p+1) (1 + \pi\delta_0 + \delta_1) \lambda^2 a_1 = 0;$$

$$- \frac{2}{\pi} (p+1) (1 + \pi\delta_0 + \delta_1) \lambda^2 a_0 + \left[ 4a\mu^2 \left( \mu + \frac{3}{16\mu^3} + \frac{1}{2\mu} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4} (p+1) - \frac{3}{4} (p+1) \left( 1 + \frac{16}{3} \delta_0 + \delta_1 \right) \lambda^2 \right] a_1 = 0.$$

Приравнивая определитель, составленный из коэффициентов при  $a_0$ ,  $a_1$ , нулю, получим квадратное уравнение для определения  $\beta^2$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{cb^3}{\pi^4 EJ} - (p+1) \left( \frac{p}{p+1} + \delta_0 + \delta_1 \right) \lambda^2 \right] \times \\ & \times \left[ 4a\mu^2 \left( \mu + \frac{3}{16\mu^3} + \frac{1}{2\mu} \right) + \frac{3}{4} (p+1) - \frac{3}{4} (p+1) \times \right. \\ & \left. \times \left( 1 + \frac{16}{3} \delta_0 + \delta_1 \right) \lambda^2 \right] - \frac{4}{\pi^2} (p+1)^2 (1 + \pi\delta_0 + \delta_1)^2 \lambda^4 = 0. \quad (9.127) \end{aligned}$$

Наименьший корень этого уравнения дает частоту основного тона.

Прямоугольная плита, стороны которой  $y = 0$ ,  $y = b$  оперты,  $x = 0$ ,  $x = a$  заделаны, с массой  $M$  посредине. Если в предыдущем примере  $a_0 = 0$ , то получим рассматриваемый случай.

При наличии груза массой  $M$  в точке  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$

$$\lambda^2 = \frac{1 + \frac{16}{3} \cdot \frac{\alpha\mu^3}{p+1} \left( \mu + \frac{1}{2\mu} + \frac{3}{16\mu^3} \right)}{1 + \frac{G}{(p+1)Q} + \frac{16}{3} \cdot \frac{M}{(p+1)Q}}. \quad (9.128)$$

Частота колебаний  $\omega = \lambda\pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{q\nu^3}}$ .

Прямоугольная плита, подкрепленная ребрами, заделана на контуре, состоящем из упругих балок, с массой  $M$  посредине. Уравнение изогнутой поверхности

$$\begin{aligned} W(x, y) = & a_1 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \\ & + a_2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) + a_3 \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right). \quad (9.129) \end{aligned}$$

Вычисляя аналогично предыдущему значения потенциальной и кинетической энергии и принимая во внимание значения сумм (9.116), после составления условий минимума

$$\frac{\partial (V_{\max} - \omega^2 T_{\max})}{\partial a_i} = 0$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 & \left[ 4\alpha \left( 3\mu^3 + 2\mu + \frac{3}{\mu} \right) + 12(p+1) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{9}{4}(p+1) \left( 1 + \frac{64}{9} \delta_0 + \delta_1 \right) \lambda^2 \right] a_1 + \\
 & + \left[ 8\alpha\mu^3 - \frac{3}{2}(p+1) \left( 1 + \frac{16}{3} \delta_0 + \delta_1 \right) \lambda^2 \right] a_2 + \\
 & + \left[ 8 \left( 1 + \frac{\alpha}{\mu(p+1)} \right) - \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{16}{3} \delta_0 + \delta_1 \right) \times \right. \\
 & \quad \left. \times \lambda^2 \right] (p+1) a_3 = 0; \\
 & \left[ 8\alpha\mu^3 - \frac{3}{2}(p+1) \left( 1 + \frac{16}{3} \delta_0 + \delta_1 \right) \lambda^2 \right] a_1 + \\
 & + \left[ 8(\lambda + 2k)\mu^3 - \frac{3}{2}(p+1) \left( 1 + \frac{8}{3} \delta_0 + \delta_1 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2\delta_2' \right) \lambda^2 \right] a_2 - (p+1)(1 + \delta_1 + 4\delta_0) \lambda^2 a_3 = 0; \\
 & \left[ 8 \left( 1 + \frac{\alpha}{(p+1)\mu} \right) - \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{16}{3} \delta_0 + \delta_1 \right) \lambda^2 \right] \times \\
 & \times a_1 - (1 + \delta_1 + 4\delta_0) \lambda^2 a_2 + \left[ 8 \left( \frac{p}{p+1} + 2k' + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\alpha}{(p+1)\mu} \right) - \frac{3}{2} \left( 1 + 2\delta_2' + \delta_1 + \frac{8}{3} \delta_0 \right) \lambda^2 \right] \times \\
 & \quad \times a_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{9.130}$$

Определитель, составленный из коэффициентов при  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , дает уравнение частоты третьей степени относительно  $\lambda^2$ .

**Плита, заделанная по контуру.** Полагая в уравнении (9.129)  $a_2$  и  $a_3$  равными нулю, получим значение для квадрата частоты плиты, заделанной по контуру,

$$\omega^2 = \frac{16\pi^4 B}{3Qb^3} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha}{3(p+1)} \left( 3\mu^3 + 2\mu + \frac{3}{\mu} \right)}{1 + \delta_1 + \frac{64}{9} \delta_0}. \tag{9.131}$$

В частности, для плиты, заделанной по контуру, при отсутствии ребер и груза получим

$$\omega^2 = \frac{16\pi^4 D}{3\rho h b^4} \left( 1 + \frac{2}{3} \mu^2 + \mu^4 \right). \tag{9.132}$$

Для квадратной плиты ( $\mu = 1$ ) частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{128}{9}} \cdot \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = 37,218 \frac{1}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$

Точное значение частоты для рассматриваемого случая, для основного тона (табл. 9.1), будет

$$\omega = \frac{35,965}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$

Таким образом, приближенное значение отличается от точного всего лишь на 3,5%.

**Прямоугольная плита, заделанная по контуру, со сторонами  $y = 0$ ,  $y = b$ , связанными с упругими балками.** Для случая когда ребра связаны с упругими балками, которые не могут прогибаться, для изогнутой поверхности берем уравнение

$$W(x, y) = a_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{y}\right) + a_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right). \quad (9.133)$$

Для определения  $\lambda$  имеем биквадратное уравнение

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda^2 \left(1 + \frac{64}{9} \delta_0 + \delta_1\right) - \frac{16}{3} \cdot \frac{\alpha}{\rho + 1} \left(\mu^3 + \frac{2\mu}{3} + \frac{1}{\mu}\right) - \frac{16}{3} \right] \times \\ & \times \left[ \lambda^2 \left(1 + \frac{8}{3} \delta_0 + \delta_1 + 2\delta_2\right) - \frac{16}{3} \cdot \frac{\alpha + 2k}{\rho + 1} \mu^3 \right] - \\ & - \frac{2}{3} \left[ \lambda^2 \left(1 + \frac{16}{3} \delta_0 + \delta_1\right) - \frac{16}{3} \cdot \frac{\alpha \mu^3}{\rho + 1} \right]^2 = 0. \quad (9.134) \end{aligned}$$

**Прямоугольная плита, заделанная по контуру, со сторонами  $x = 0$ ,  $x = a$ , связанными с упругими ребрами.** Уравнение изогнутой поверхности

$$W(x, y) = a_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) + a_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right). \quad (9.135)$$

Предполагая, что каждое крайнее ребро имеет жесткость  $B'$ , получим биквадратное уравнение по отношению  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda^2 \left(1 + \frac{64}{9} \delta_0 + \delta_1\right) - \frac{16}{3} \cdot \frac{\alpha}{\rho + 1} \left(\mu^3 + \frac{2\mu}{3} + \frac{1}{\mu}\right) - \frac{16}{3} \right] \times \\ & \times \left[ \lambda^2 \left(1 + 2\delta' + \delta_1 + \frac{8}{3} \delta_0\right) - \frac{16}{3} \cdot \frac{\alpha}{(\rho + 1) \mu} \right] - \\ & - \frac{2}{3} \left[ \lambda^2 \left(1 + \frac{16}{3} \delta_0 + \delta_1\right) - \frac{16}{3} \cdot \frac{\alpha}{(\rho + 1) \mu} - \frac{16}{3} \right]^2 = 0. \quad (9.136) \end{aligned}$$

**Пример.** Рассмотрим плиту с прежними данными за исключением размера  $a$  в предположении, что сосредоточенная нагрузка отсутствует.

Поперечное сечение продольных балок берем  $F_1 = 0,60 \cdot 1 \text{ м}^2$ ,  $a = 9 \text{ м}$ . Момент инерции  $J_1 = 0,05 \text{ м}^4$ .

Для ребер поперечное сечение  $F = 0,25 \cdot 0,37 \text{ м}^2$ ;  $b = 5,00 \text{ м}$ ;  $J = 0,001 \text{ м}^4$ ; число ребер  $p = 5$ . Толщина плиты  $h = 0,1 \text{ м}$ . Модуль упругости для плиты и балок  $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ т/м}^2$ ,  $\gamma = 2,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\sigma = \frac{1}{6}$ . Имеем  $\mu = \frac{b}{a} = \frac{5}{9} = 0,555$ . Вес плиты  $gG_1 = 10800 \text{ кг}$ , вес ребра  $gQ = 1092 \text{ кг}$ .

Вес продольной балки  $gQ_1 = 0,60 \cdot 1,00 \cdot 2,4 \cdot 9 \cdot 10^3 = 12960 \text{ кг}$ ,  $\delta_0 = 0$ ;  $\delta_1 = \frac{G}{(p+1)Q} = 1,648$ ;  $\delta_2 = \frac{Q_1}{Q} = 11,87$ ;  $k' = \frac{k}{6}$ ;

$$\delta' = \frac{1}{6}; \quad k = \frac{B_1}{B} = \frac{0,05}{0,001} = 50,0;$$

$$\alpha = \frac{bD}{EJ} = \frac{5 \cdot 0,1^3 E}{12(1-\sigma^2) E 0,001} = 0,429.$$

Определитель, составленный из коэффициентов при  $a_1, a_2, a_3$  и дает уравнение частоты

$$\begin{vmatrix} 84,06 - 35,75\lambda^2 & 0,5883 - 23,83\lambda^2 & 54,18 - 23,83\lambda^2 \\ 0,5883 - 23,83\lambda^2 & 137,73 - 273,5\lambda^2 & -15,88\lambda^2 \\ 54,18 - 23,83\lambda^2 & -15,88\lambda^2 & 56,18 - 25,83\lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя значение этого определителя и располагая его по степеням  $\lambda^2$ , получим уравнение третьей степени относительно  $\lambda^2$ :

$$\lambda^6 - 5,2803\lambda^4 + 8,180\lambda^2 - 3,125 = 0.$$

Корни этого уравнения будут  $\lambda_1^2 = 0,672$ ;  $\lambda_2^2 = 2,143$ ;  $\lambda_3^2 = 2,570$ .

Число колебаний в 1 мин

$$n = \frac{60}{2\pi} \lambda_{i\pi^2} \sqrt{\frac{EJ}{Qb^3}} = \frac{60}{2\pi} \lambda_{i\pi^2} \sqrt{\frac{2,10 \cdot 10^8 \cdot 0,001g}{1,092 \cdot 5^3}} = 1158\lambda_i;$$

отсюда  $n_1 = 872$ ;  $n_2 = 1695$ ;  $n_3 = 1740$ .

Для случая этой же плиты, заделанной по контуру,  $\lambda^2 = 2,408$ .

При абсолютно жестких продольных балках уравнение частоты можно получить из первого и третьего уравнений (9.130), полагая  $a_2 = 0$ .

Уравнение частоты будет  $\lambda^4 - 4,494\lambda^2 + 5,033 = 0$ .

Корни уравнения для этого случая  $\lambda_1^2 = 2,125$ ;  $\lambda_2^2 = 2,368$ .

Когда поперечные балки на контуре абсолютно жесткие, уравнение частоты (9.134) может быть получено из первого и второго уравнений (9.130), полагая  $a_3 = 0$ , т. е.  $(84,06 - 35,75\lambda^2)(137,73 - 273,5\lambda^2) - (0,5883 - 23,83\lambda^2)^2 = 0$  или  $\lambda^4 - 3,1279\lambda^2 + 1,4614 = 0$ . Отсюда  $\lambda_1^2 = 0,5717$ ;  $\lambda_2^2 = 2,5563$ .

## КОЛЕБАНИЯ ПЛИТ ПЕРЕМЕННОЙ И ПОСТОЯННОЙ ЖЕСТКОСТИ СО СЛОЖНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В предыдущих разделах были изучены колебания пластин для тех случаев, когда решения находятся сравнительно просто. Однако для более сложных случаев заделки пластин постоянной и переменной жесткости определить высшие частоты и формы колебаний затруднительно, а в ряде случаев невозможно. В этих случаях необходимо применение быстродействующих электронных цифровых вычислительных машин.

Ниже приводятся результаты расчетов для нескольких случаев по составленным стандартным программам расчета пластин прямоугольных, пластин, имеющих форму параллелограмма (рис. 9.20), неполного сектора (или кругового прямоугольника), трапеции, при любом законе изменения толщины, а также для пластин типа лопастей поворотнолопастных турбин (для низких и высоких напоров воды).

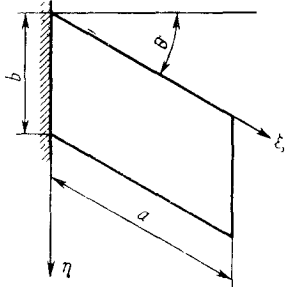


Рис. 9.20

### Изложение метода

Для получения решения задачи о колебаниях пластин переменной жесткости с различными граничными условиями на ЭЦВМ был использован метод Ритца [35, 63].

Выражение изогнутой поверхности для указанных форм пластин задаем по-прежнему в виде

$$W(\xi, \eta, t) = W(\xi, \eta) \cos pt. \quad (9.137)$$

Перемещение  $W(\xi, \eta)$  берем в виде ряда

$$W(\xi, \eta) = \sum_j a_j f_j(\xi, \eta); \quad (9.137')$$

здесь  $f_j(\xi, \eta)$  представляет собой произведение координатных функций  $X_n(\xi)$ ,  $Y_m(\eta)$ , где  $m$  и  $n$  заданы для каждого индекса  $j$ .

Если подставим  $w(\xi, \eta, t)$  в выражение для потенциальной и кинетической энергии в прямоугольных, косоугольных и полярных координатах (9.9)–(9.14), то из условия

$$\frac{\partial (V_{\max} - \omega^2 T_{\max})}{\partial a_j} = 0 \quad (9.138)$$

придем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k a_j \iint D(\xi, \eta) \{ f''_{\xi i} f''_{\xi j} + f''_{\eta i} f''_{\eta j} + [\sigma + (1 - \sigma) \sin^2 \theta] \times \\ & \times [f''_{\xi i} f''_{\eta j} + f''_{\xi j} f''_{\eta i}] + [2(1 - \sigma) + 2(1 + \sigma) \sin^2 \theta] f''_{\xi \eta i} f''_{\xi \eta j} - \\ & - 2 \sin \theta [f''_{\xi \eta i} (f''_{\xi j} + f''_{\eta j}) + f''_{\xi \eta j} (f''_{\xi i} + f''_{\eta i})] \} d\xi d\eta = \\ & = \omega^2 \rho \cos^4 \theta \sum a_j \iint h(\xi, \eta) f_i f_j d\xi d\eta \quad (i = 1, 2, 3, \dots, k). \quad (9.139) \end{aligned}$$

Для прямоугольной системы координат  $\theta = 0$ , для косоугольной  $\theta$  задано (рис. 9.20). В полярной системе координат  $r, \varphi$  необходимо положить  $\theta = 0$ ,  $d\xi d\eta = r dr d\varphi$ ;

$$f''_{\xi} = f''_r; \quad f''_{\xi \eta} = \left( \frac{1}{r} f'_\varphi \right)'_r; \quad f''_{\eta} = \frac{1}{r} f'_r + \frac{1}{r^2} f''_\varphi. \quad (9.140)$$



Обозначим для (9.139) матрицу слева через  $\Pi_{ij}$ , а матрицу справа через  $T_{ij}$  и запишем систему в виде

$$\frac{1}{\beta_1} \Pi_{ij} = T_{ij} \quad (9.141)$$

или, умножая слева на матрицу  $\Pi_{ij}^{-1}$ , обратную  $\Pi_{ij}$ , получим

$$\frac{1}{\beta} E = \Pi_{ij}^{-1} T_{ij}. \quad (9.141')$$

При определении частот и форм колебаний пластин переменной жесткости указанных очертаний для различных условий заделки был разработан алгоритм расчета на электронной машине по методу Рунца. Эта программа позволяет определить также и статические напряжения.

Число параметров, вводимое в расчет на колебания, доводится до  $k \leq 40$ , для статической задачи  $k \leq 80$  [35]. Расчетная сетка в направлении  $y$  (по дуге)  $m \leq 20$ .

Значение толщины  $h(x, y)$  задается в таблице до 121-го значения  $h$ . Толщина  $h$  может быть задана и в виде произведения  $h_1(x) h_2(y)$ .

Для расчетов по методу Рунца применялась ортонормированная система полиномов, удовлетворяющая кинетическим граничным условиям задачи. Применение системы полиномов удобно тем, что дифференцирование выполняется точно.

Программа состоит из четырех частей и программы для разметки на магнитной ленте: первая часть программы служит для ввода исходной информации и заполняется для каждого варианта заново.

Вторая часть программы служит для вычисления матриц потенциальной и кинетической энергии и столбца правых частей статической задачи.

Третья часть программы служит для определения собственных частот колебаний.

Собственные числа матриц определяются методом итерации столбцов с понижением порядка. Четвертая часть предназначена для вычисления динамических и статических прогибов.

Для расчета консольных прямоугольных пластин, пластин в форме параллелограмма, а также секторных постоянной и переменной толщины была взята ортонормированная система полиномов  $X_i(\xi)$  ( $i = 2, 3, 4, \dots$ ) по координате  $x$ , удовлетворяющая условиям

$$X_i(0) = X_i'(0) = 0$$

Приводим их выражения:

$$\left. \begin{aligned}
 X_2 &= \sqrt{5} \xi^2; \quad X_3 = \sqrt{7} \xi^2 (6\xi - 5); \\
 X_4 &= 3\xi^2 (28\xi^2 - 42\xi + 15); \\
 X_5 &= \sqrt{11} \xi^2 (120\xi^3 - 252\xi^2 + 168\xi - 35); \\
 X_6 &= \sqrt{13} \xi^2 (495\xi^4 - 1320\xi^3 + 1260\xi^2 - \\
 &\quad - 504\xi + 70); \\
 X_7 &= \sqrt{15} \xi^2 (2002\xi^5 - 6435\xi^4 + 7920\xi^3 - \\
 &\quad - 4620\xi^2 + 1260\xi - 126); \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (9.142)$$

В направлении оси  $y$  была выбрана система симметричных и антисимметричных полиномов Лежандра:

$$\left. \begin{aligned}
 Y_0 &= 1; \quad Y_1 = \sqrt{3} \eta; \quad Y_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} (3\eta^2 - 1); \\
 Y_3 &= \frac{\sqrt{7}}{2} (5\eta^3 - 3\eta); \quad Y_4 = \\
 &= \frac{3}{8} (35\eta^4 - 30\eta^2 + 3); \quad Y_5 = \\
 &= \frac{\sqrt{11}}{8} (63\eta^5 - 70\eta^3 + 15\eta); \quad Y_6 = \\
 &= \frac{\sqrt{13}}{6} (231\eta^6 - 315\eta^4 + 105\eta^2 - 5); \\
 Y_7 &= \frac{\sqrt{15}}{6} (429\eta^7 - 693\eta^5 + 315\eta^3 - \eta); \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (9.143)$$

Ниже приведем результаты расчета для нескольких случаев.

### Прямоугольная консольная пластина постоянной толщины

Для расчета были приняты координатные функции (9.142), (9.143), приведенные в табл. 9.10 для симметричных и асимметричных форм. Цифры показывают, какому параметру соответствуют какие функции. Например, 9-му параметру соответствует для симметричных колебаний член  $a_9 Y_4 X_3$  и асимметричных  $a_9 Y_5 X_3$ .

Функции $Y_i$		Значение функций						
Симметричные формы	Асимметричные формы	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$Y_0$	$Y_1$	1	2	4	7	11	16	22
$Y_2$	$Y_3$	3	5	8	12	17	23	—
$Y_4$	$Y_5$	6	9	13	18	24	—	—
$Y_6$	$Y_7$	10	14	19	26	25	—	—
$Y_8$	$Y_9$	15	20	28	27	—	—	—
$Y_{10}$	$Y_{11}$	21	30	29	—	—	—	—

В табл. 9.11 приведены значения характеристических чисел  $\beta$ , а на рис. 9.21 — формы колебаний для четырех значений отношения  $\frac{b}{a}$ , подсчитанные при числе параметров  $k = 20, 30$ , и для

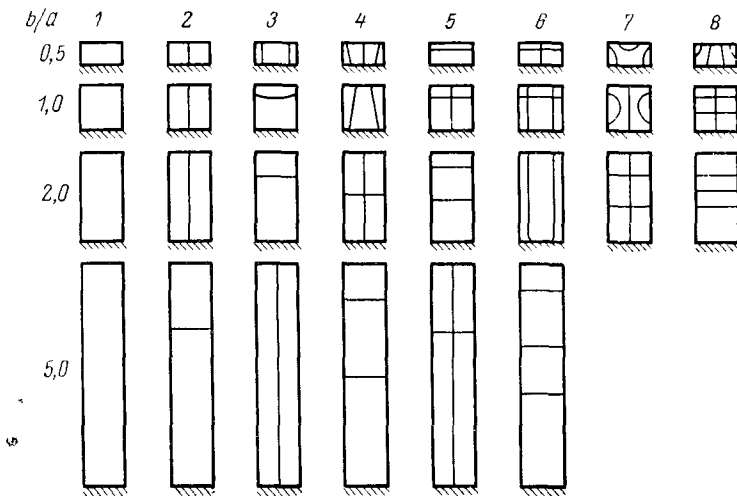


Рис. 9.21

сравнения экспериментальные значения  $\beta$ , полученные в работе [117]. Частота колебаний  $\omega = \frac{\beta}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ .

Аналогичным образом строится система степенных полиномов для других условий. Защемления противоположных сторон: шарнир—шарнир, заделка—шарнир, заделка—заделка.

Приведем еще результаты расчетов, выполненных на ЭЦВМ с 30 параметрами для нескольких типов пластин.

Частота колебаний прямоугольной консольной плиты

Отношение $\frac{b}{a}$	Число параметров $k$	Собственные значения $\beta$							
		$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$
0,5	{ 20 30	3,497	5,358	10,138	19,084	21,833	24,691	31,480	34,124
		3,493	5,355	10,186	19,081	21,846	24,681	31,431	34,019
Экспериментальное значение		3,40	5,38	10,31	—	—	—	—	—
1	{ 20 30	3,477	8,521	21,311	27,203	30,276	54,250	61,871	64,219
		3,475	—	21,301	27,201	—	54,213	61,854	—
Экспериментальное значение		3,43	8,32	20,55	27,15	29,75	—	—	—
2	{ 20 30	3,450	14,815	21,469	48,214	60,773	93,194	—	—
		3,440	—	21,428	—	60,637	93,029	93,375	108,73
Экспериментальное значение		3,42	14,52	20,86	46,9	—	93,99	—	—
5	{ 20 30	3,419	21,345	33,869	60,713	103,21	—	—	—
		3,412	21,320	—	60,665	—	107,16	—	—
Экспериментальное значение		3,35	20,88	32,4	—	97,35	—	—	—

### Косоугольная консольная пластинка

В табл. 9.12 приводятся значения собственных величин  $\beta$  для консольной пластинки в виде параллелограмма для нескольких значений  $\operatorname{tg} \theta$  для  $\frac{b}{a} = 1, h = \operatorname{const}$ .

Таблица 9.12

Собственные значения  $\beta_i$  косоугольной консольной пластины  $a = b, h = \operatorname{const}$

$\operatorname{tg} \theta$	Собственные значения $\beta_i$				
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$
0	3,475	8,521	21,31	27,2	30,27
0,1	3,502	8,555	21,47	27,38	31,69
0,20	3,549	8,649	21,91	26,96	33,04
0,4	3,722	9,039	23,67	26,34	37,26
0,6	3,972	9,717	26,18	26,67	42,98
0,8	4,291	10,672	26,84	30,26	49,08
1,0	4,556	11,455	27,52	32,54	52,53

Соответствующие формы колебаний приведены на рис. 9.22 ( $\theta = \frac{\pi}{6}$ ).

Трапециевидная пластинка, одна сторона которой заделана, а три стороны пластинки свободны. В табл. 9.13 приводятся значения первых шести собственных значений  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ). В расчетах брали 20, 25, 30 параметров. Приведенные в табл. 9.13 значения  $\beta_i$  получены для 30 параметров.

Таблица 9.13

Собственные числа  $\beta_i$  трапециевидной пластины  $\theta = 0$

для различных  $\frac{c}{b}$  и  $\frac{a}{b} = 2$  (где  $c$  — размер верхней грани)

$i$	Отношение $\frac{c}{b}$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1	43,939	25,795	19,205	15,704	13,510	11,832
2	809,24	574,67	518,21	472,48	324,36	219,17
3	2453,4	1471,2	853,19	532,01	477,11	459,14
4	4939,9	3887,3	3750,3	3575,9	2958,7	2323,4
5	13 888	8710,3	5629,1	4163,1	3698,3	3676,8
6	18 926	14 999	15 109	12 762	11 332	864,3

В табл. 9.14 приведены значения  $\beta_i$  для пластинки переменной жесткости с отношением  $\frac{a}{b} = \cos \frac{\pi}{3}$ , имеющей поперечное сечение  $\eta = \operatorname{const}$  в виде ромба, а в направлении  $\xi = \operatorname{const}$  —

в виде трапеции (рис. 9.23). Частота  $\omega_i = \frac{\beta_i}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{D_0}{\rho h a^4}}$ .

На рис. 9.24 приведены графики для  $\beta$  в зависимости от  $\frac{h_0}{H_0}$  для первых шести форм и сами формы колебаний.

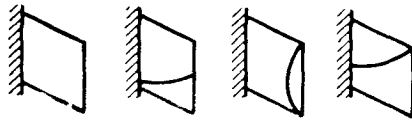


Рис. 9.22

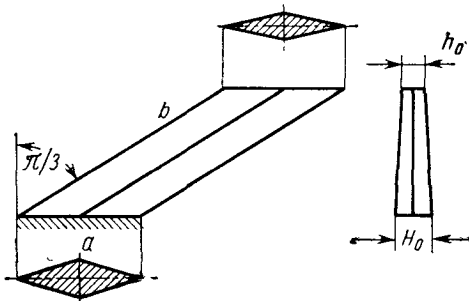


Рис. 9.23

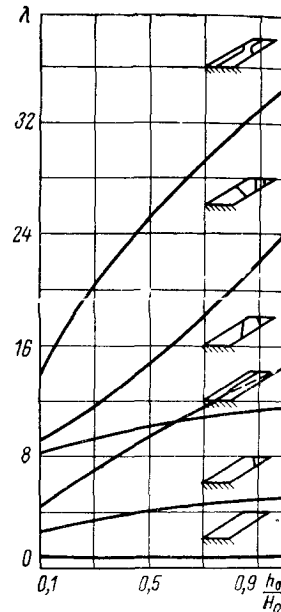


Рис. 9.24

Таблица 914

Значения  $\beta_i$  для пластинки переменной жесткости  
(см. рис. 9.23)

Значение $i$	$\frac{h_0}{H_0}$			
	0,1	0,2	0,5	1,0
1	1,0446	0,9954	0,9356	0,9203
2	2,5951	3,1513	4,0603	5,0533
3	4,3887	5,5863	9,3757	11,6190
4	8,2812	8,8272	10,1466	14,4682
5	9,0901	10,2773	14,4872	25,2441
6	13,7045	17,3945	25,1006	34,9859
7	17,0657	20,9049	33,6731	47,8025
8	22,3882	25,4815	44,4405	64,1485
9	33,0756	48,8760	60,7760	82,4528
10	42,1616	50,4987	69,0049	94,7166

## Секториальная плита в виде неполного сектора (кругового прямоугольника)

Плита ограничена двумя концентрическими кругами  $r = r_0$ ,  $r = R$  и двумя радиусами. Центральный угол равен  $\theta_0$ .

В табл. 9.15 приведены значения собственных чисел  $\beta$  для  $\frac{r_0}{R} = \frac{1}{2}$ ,  $\theta_0 = 1$ ,  $\frac{R-r_0}{R} = 1$ , а формы колебаний на рис. 9.25.

Таблица 9.15

**Собственные значения для кругового прямоугольника  
(неполного сектора)**

Число параметров	Собственные значения				
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$
10	3,052	4,564	10,012	20,480	21,003
20	3,030	4,544	9,949	20,422	20,932
30	3,027	4,540	9,945	20,409	20,913
Число параметров	Собственные значения				
	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$	$\beta_{10}$
10	25,549	35,336	43,234	55,501	65,041
20	25,420	34,075	40,279	52,453	61,892
30	25,406	34,024	40,104	52,329	61,090

Частота колебаний определяется по формуле  $\omega = \beta \frac{1}{(R-r_0)^3} \times \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ .

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН ТИПА ЛОПАСТЕЙ ОСЕВЫХ ПОВОРОТНОЛОПАСТНЫХ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ТУРБИН

#### Метод решения

В первом приближении лопасти поворотнлопастных турбин могут рассматриваться как неполные секториальные плоские пластины без учета искривления их.

Для низконапорных турбин лопасть заделана по дуговому краю меньшего радиуса, для высоконапорных — по части этого края (рис. 9.26).

При расчете частот и форм колебаний исходим из вышеуказанного метода без учета влияния присоединенных масс жидкости.

Обозначим через  $V$  потенциальную энергию пластины, а через  $T$  кинетическую энергию.

Для свободных колебаний уравнение срединной поверхности

$$\omega(r, \varphi, t) = W(r, \varphi) \sin(\omega t + \alpha).$$



Рис. 9.25

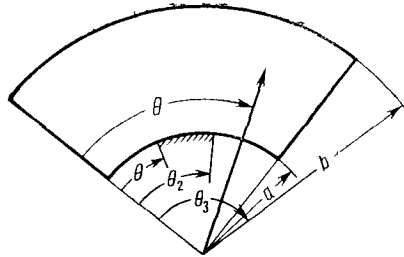


Рис. 9.26

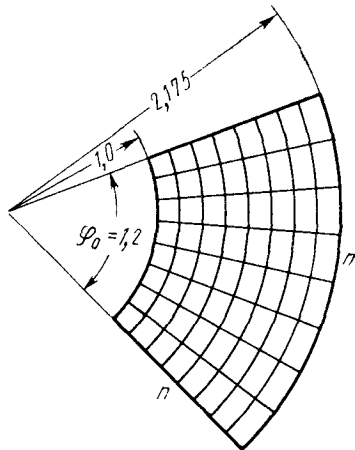


Рис. 9.27

В полярных координатах

$$V_{\max} = \frac{D_0}{2a^2} \iint H^3(\rho, \varphi) \left\{ (\Delta W)^2 - 2(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} \left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} \rho d\rho d\varphi; \quad (9.144)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 h_0 a^2 \iint H(\rho, \varphi) W^2 \rho d\rho d\varphi, \quad (9.145)$$



где  $W(\rho, \varphi)$  — амплитудное значение прогиба;  $\rho = \frac{r}{a}$ ;  $h_0$  — толщина пластины, принятая за основную;

$$H = \frac{h}{h_0}; \quad D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\sigma^2)}.$$

### Колебания пластины типа лопасти низконапорной турбины

Для этого случая полностью используется программа для расчета пластин (стр. 300).

Расчет приведен для модели лопасти ПЛ-510 на 20—25 м напора. Распределение толщин модели лопасти приведено в табл. 9.16 для сечений  $m, n$  (рис. 9.27).

Полученные частоты  $\omega$  и формы колебаний приведены в табл. 9.17 и на рисунках.

Таблица 9.16

$n$	$m$								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	0,9360	0,981	1,000	0,991	0,934	0,825	0,637	0,413	0,1700
2	0,6960	0,818	0,847	0,821	0,762	0,670	0,514	0,328	0,1460
3	0,5310	0,684	0,722	0,703	0,651	0,559	0,427	0,274	0,1250
4	0,4100	0,571	0,618	0,604	0,559	0,481	0,363	0,236	0,1110
5	0,3070	0,472	0,528	0,519	0,481	0,415	0,316	0,208	0,0967
6	0,2190	0,387	0,448	0,443	0,410	0,354	0,274	0,181	0,0873
7	0,1530	0,314	0,380	0,377	0,347	0,300	0,236	0,160	0,0802
8	0,1060	0,252	0,309	0,307	0,283	0,250	0,200	0,139	0,0731
9	0,0708	0,191	0,241	0,243	0,226	0,198	0,163	0,118	0,0660

Таблица 9.17

Число параметров $b$	Частота $\omega_i$ в 1/сек				
	1	2	3	4	5
12	2162	2809	3891	6173	7934
20	2124	2775	3618	5809	6612
30	2075	2708	3556	5512	6264



**Определение частот и форм собственных колебаний  
пластин типа лопастей высоконапорных осевых  
поворотнлопастных гидротурбин**

Рассмотрим собственные колебания пластины (рис. 9.25), имеющей в плане форму сектора кольца и свободной по всему контуру, за исключением жестко закрепленной части дугового края меньшего радиуса

$$W = \frac{\partial W}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = a, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2. \quad (9.146)$$

Считаем, что толщина пластины  $h = h(r, \varphi)$  есть функция координат. Представим прогиб пластины в виде

$$W(\rho, \varphi) = \sum_{j=1}^n a_j W_j = \sum a_j f_j(\rho) \psi_j(\varphi); \quad (9.147)$$

здесь  $W_j$  — заданные координатные функции;  $a_j$  — неопределенные параметры.

Подставляя значение (9.147) в уравнения (9.144) и (9.145), а последние в уравнение (9.138) и дифференцируя по параметрам, придем к системе  $n$  линейных однородных уравнений относительно  $a_j$ :

$$\sum_{j=1}^n a_j \iint \left\{ h^3 \sum_k F_{k_j}(\rho) \Phi_{k_j}(\varphi) - \beta h F_{k_j} \Phi_{k_j} \rho^4 \right\} \rho d\rho d\varphi = 0;$$

$$\beta = \frac{12(1-\sigma^2)\rho\omega^2}{E} \left( \frac{a^2}{h_0} \right)^2 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.148)$$

Функции  $F_k$  и  $\Phi_k$  имеют вид [35]

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= f_i'' \left( \frac{\sigma}{\rho} f' + f'' \right)_i + \frac{1}{\rho} f_i' \left( \sigma f'' + \frac{1}{\rho} f' \right)_i & \Phi_1 &= \psi_i \psi_j; \\ F_2 &= \frac{1}{\rho^2} f_j \left( \sigma f'' + \frac{1}{\rho} f' \right)_i; & \Phi_2 &= \psi_i \psi_j''; \\ F_3 &= \frac{1}{\rho^2} f_i \left( \sigma f'' + \frac{1}{\rho} f' \right)_j; & \Phi_3 &= \psi_i \psi_j''; \\ F_4 &= \frac{1}{\rho^4} f_i f_j; & \Phi_4 &= \psi_i' \psi_j''; \\ F_5 &= 2(1-\sigma) \frac{1}{\rho^4} (\rho f' - f)_i (\rho f' - f)_j; & \Phi_5 &= \psi_i' \psi_j'. \end{aligned} \right\} \quad (9.149)$$

Обозначим вектор с элементами  $a_j$  через  $V$  и запишем систему (9.148) в матричной форме

$$(\Pi - \beta_i T) V_i = 0, \quad (9.150)$$

где  $T$  и  $\Pi$  — матрицы кинетической и потенциальной энергии с элементами, вычисляемыми по формуле (9.148). Индекс  $i$  указывает номер собственного числа  $\beta_i$  и собственного вектора  $V_i$ . Простым преобразованием из уравнения (9.150) получим

$$\left(\frac{1}{\beta_i} E - \Pi^{-1}T\right) V_i = 0. \quad (9.151)$$

Отсюда видно, что собственные числа  $\mu_i$  матрицы  $\Pi^{-1}T$  равны

$$\mu_i = \frac{1}{\beta_i},$$

а собственные векторы ее совпадают с  $V_i$ . Числа  $\mu_i$  и векторы  $V_i$  определяем методом итераций с понижением порядка матрицы [98].

Для расчета конкретных пластин возьмем систему координатных функций, использованную в статической задаче [35]. Координатные функции разобьем на три группы, подчинив функции каждой группы следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} W_{1j} &= f_{1j}\psi_{1j}; \quad 1 \leq j \leq k_1, \quad \psi_{1j} = 0 \text{ при } \varphi \geq \varphi_1; \quad \psi'_{1j}(\varphi_1) = 0; \\ W_{11j} &= f_{11j}\psi_{11j}; \quad k_1 + 1 \leq j \leq k_1 + k_2; \quad f_{11j}(1) = f'_{11j}(1) = 0; \\ & \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_3; \\ W_{111j} &= f_{111j}\psi_{111j}; \quad k_1 + k_2 + 1 \leq j \leq n; \quad \psi_{111j} = 0 \text{ при } \varphi \leq \varphi_2; \\ & \quad \psi'_{111j}(\varphi_2) = 0 \\ & \quad n = k_1 + k_2 + k_3. \end{aligned} \right\} \quad (9.152)$$

Как видно, любая из функций, подчиненная условиям (9.152), удовлетворяет геометрическим условиям (9.146). Подчинение координатных функций естественным граничным условиям на свободных сторонах пластины не является необходимым для метода Ритца.

Т а б л и ц а 9.18

Координатные функции для участков плиты ( $n = 40$ )

	$T_2(y_1)$				$P_0(y_2)$							$T_2(y_3)$			
	$T_2^*$	$T_3^*$	$T_4^*$		$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_6$		$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$
$P_0^*(x)$	1	3	6	$T_2(x)$	11	13	16	20	24	26	$P_0^*(x)$	27	29	32	36
$P_1^*$	2	5	9	$T_3$	12	15	19	23	25		$P_1^*$	28	31	35	
$P_2^*$	4	8		$T_4$	14	18	22				$P_2^*$	30	34	39	
$P_3^*$	7			$T_5$	17	21					$P_3^*$	33	38		
$P_4^*$	10										$P_4^*$	37			
											$P_5^*$	40			

В качестве функции  $f$  и  $\psi$  выбираем степенные полиномы  $T$ ,  $T^*$ ,  $P$ ,  $P^*$ , распределение которых по параметрам при  $n = 40$  указано в табл. 9.18. Для стандартизации полиномов введены вспомогательные координаты

$$x = \frac{\rho - 1}{\frac{b}{a} - 1}; \quad y_1 = \frac{\varphi}{\varphi_1} - 1; \quad y_2 = \frac{2\varphi}{\varphi_2} - 1; \quad y_3 = \frac{\varphi - \varphi_2}{\varphi_3 - \varphi_2}.$$

Для функций  $f$ ,  $\psi$  приняты полиномы

$$f_I = P^*(x); \quad \psi_I = T^*(x); \quad t_{II} = T(x); \quad \psi_{II} = P(y); \\ f_{III} = P^*(x); \quad \psi_{III} = T(y).$$

где  $P_m(y)$  — полиномы Лежандра, ортонормированные в интервале  $\pm 1$ . Полиномы  $P_m^*(x)$  получены приведением полиномов к интервалу аргумента  $(0,1)$ .

Ортонормированные на интервале  $(0,1)$  полиномы  $P_m(x)$  имеют вид

$$T_2 = \sqrt{5} x^2; \quad T_3 = \sqrt{7} x^2 (6x - 5); \quad T_4 = 3x^2 (28x^2 - 42x + 15); \dots;$$

полиномы  $T_m^*(y_1)$  есть преобразованные к интервалу аргумента  $(-1,0)$  полиномы  $T_m(x)$ :

$$T_2^* = \sqrt{5} y_1^2; \quad T_3^* = \sqrt{7} y_1^2 (-6y_1 + 5); \\ T_4^* = 3y_1^2 (28y_1^2 + 42y_1 + 15), \dots$$

Для того чтобы получить достаточно точные результаты, учитывая сложный характер граничных условий на дуге  $r = a$ , необходимо вводить в расчет значительное число параметров. Разработанная программа существенно опирается на применение в качестве координатных функций полиномов. Производные от них вычисляются по программе точно, а интегрирование по площади пластины при подсчете элементов матриц  $T$  и  $\Pi$  ведется численно. Программа позволяет определять любое количество частот и форм колебаний пластины, причем может быть задано произвольное число параметров  $n \geq 40$ . В табл. 9.19 приведены результаты расчета частот модели лопасти ПЛ-495 для первых девяти тонов колебаний, выполненные при  $n = 30$  и  $40$ .

Таблица 9.19  
Частота колебаний модели лопасти  $\omega_i$  в 1/сек

Число параметров $n$	Тон колебаний								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
30 . . . . .	263	236	531	—	719	1004	1397	1479	1518
40 . . . . .	261	433	526	667	714	998	1353	1438	1472
Экспериментальное значение . . . . .	338	453	616	790	873	1177	1331	1481	1510

Краткое описание логической блок-схемы наиболее сложной части программы, управляющей подсчетом элементов матрицы потенциальной энергии, приведено в работе [101].

### Результаты расчета модели

Модель имеет размеры  $a = 250$  мм,  $b = 500$  мм,  $\varphi_1 = 0,35$ ,  $\varphi_2 = 0,95$ ,  $\varphi = 1,40$ . Распределение толщины модели, снятое с чертежа, показано на рис. 9.28. В табл. 9.19 помещены расчетные

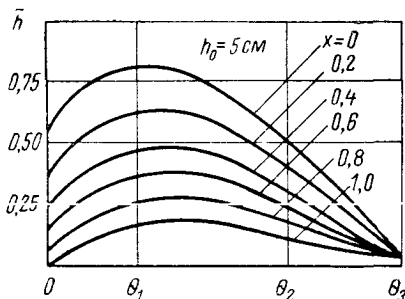


Рис. 9.28

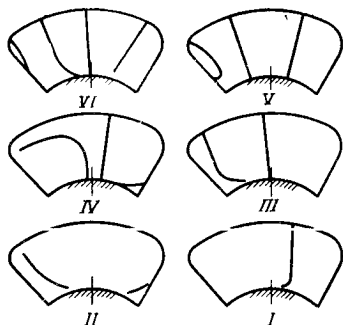


Рис. 9.29

значения частот и частоты, замеренные Д. Ульяницким при экспериментальном исследовании модели лопасти [97]. При переходе от  $n = 30$  к  $n = 40$  значения первых девяти частот изменились

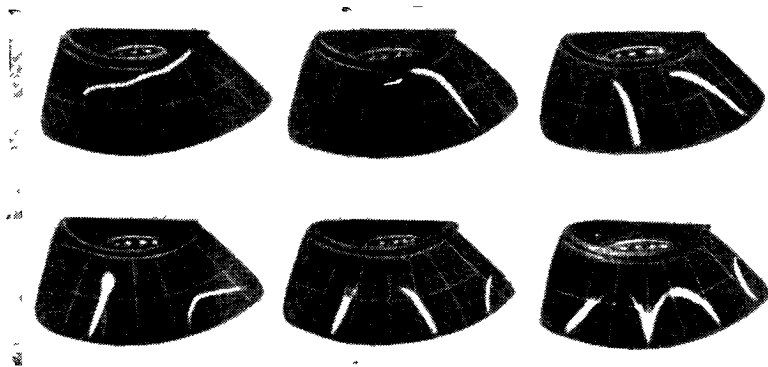


Рис. 9.30

несущественно; при этом уменьшение любой из первых шести частот не более 1%, а последние три частоты уменьшились не более чем на 3,3%. Это говорит о высокой точности расчета. Сравнивая расчетные данные с экспериментальными, следует

отметить удовлетворительное совпадение. В особенности это относится к формам колебаний. На рис. 9.29 приведены расчетные, а на рис. 9.30 — экспериментальные формы для первых шести тонов колебаний. Расхождения можно объяснить несколькими факторами. Прежде всего рассчитывалась плоская пластина, в то время как эксперимент проводился на модели лопасти, представляющей собой пологую оболочку. Далее, в расчетной схеме угловая ширина жесткого закрепления была принята равной  $\varphi_2 = 0,6$ ; у модели этот размер равен  $0,7$ . Это обстоятельство несомненно привело к занижению расчетных значений частоты, так как жесткость расчетной схемы оказалась меньшей, чем жесткость закрепления реальной модели. Имеются также некоторые расхождения в распределении толщины реальной модели и расчетной схемы.

Учитывая указанные отклонения расчетной схемы от реальной модели, а также отличную внутреннюю сходимость расчетных данных при увеличении числа параметров  $k$  от 30 до 40, следует считать, что изложенный метод расчета в применении к лопасти гидротурбины дает вполне удовлетворительные результаты.

### КОЛЕБАНИЯ ПЛИТ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Для определения частот и форм колебаний плит сложных очертаний в плане удобно применять метод  $R$ -функций.

Для примера возьмем прямоугольную плиту с входящим углом (рис. 9.31), жестко заделанную по контуру.\*

По методу Ритца необходимо для данных условий заделки найти минимум функционала

$$J = \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \omega^2 \frac{\rho h}{D} w^2 \right] dx dy.$$

Условия на контуре

$$w(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Решение берем в виде

$$w_n(x, y) = \omega^2(x, y) \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i,$$

здесь  $\omega(x, y)$  непрерывная, дважды дифференцируемая внутри области функция, удовлетворяющая условиям  $w(x, y)|_{\Gamma} = 0$  и  $\omega(x, y) > 0$  внутри области, где  $\varphi_i$  — полная система функций

\* Пример взят из работ В. Л. Рвачева и Б. В. Раковой.

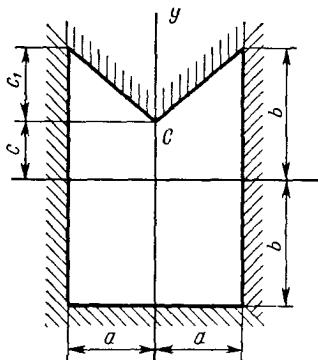


Рис. 9.31

вида  $x^i y^k$  полиномов Лежандра или другая функция  $\omega(x, y)$ , удовлетворяющая условиям для заданного контура, имеющая вид

$$\omega(x, y) = (\bar{f}_1 \wedge \bar{a} \bar{f}_2) \wedge \alpha (f_3 \wedge a f_4),$$

где  $-1 < \alpha \leq 1$  — знак отрицания,  $\wedge \alpha$  — конъюнкция

$$f_1 = a(c - y) + c_1 x \geq 0, \quad f_2 = a(c - y) - c_1 x \geq 0, \\ f_3 = a^2 - x^2 \geq 0, \quad f_4 = b^2 - y^2 \geq 0;$$

здесь (рис. 9.31)  $c_1$  — глубина вреза в плиту;  $c$  — ордината.

$$\text{Частота колебаний } \omega = \frac{\beta}{(2a)^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$

Значение  $\beta$  для  $\frac{a}{b} = 1$  в зависимости от отношения  $\frac{c_1}{b}$  приведены в табл. 9.20.

Тип колебаний Глубина вреза $c_1$	Симметричные относительно оси Oy			Антисимметричные относительно оси Oy		
$c_1 = 0$						
$c_1 = 0,5b$						
$c_1 = b$						
$c_1 = 1,5b$						
	1	2	3	1	2	3

Рис. 9.32

Таблица 9.20

Значение характеристических чисел  $\beta_i$  для квадратной плиты с вырезом

Формы колебаний	i	Отношение $\frac{c}{b}$			
		0	0,50	1,0	1,5
Симметричные	1	35,95	44,90	77,61	152,0
	2	73,10	105,7	160,0	240,8
	3	131,2	148,0	189,2	318,3
Асимметричные	1	73,10	80,33	101,8	150,8
	2	106,8	136,4	185,1	256,0
	3	164,9	235,9	264,6	351,1

Соответствующие шесть первых форм колебаний приведены на рис. 9.32.

Как видно, метод  $R$ -функций дает возможность найти частоты и формы колебаний для пластин сложных очертаний.

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН В ПОТОКЕ ГАЗА

### Обтекание пластин сверхзвуковым потоком

При обтекании пластины в потоке газа возможны в основном два вида потери устойчивости: а) статическая потеря устойчивости — дивергенция, которая заключается в монотонном выпучивании и в том, что устойчивой является не плоская, а изогнутая форма, и б) колебательный вид потери устойчивости типа флаттера, когда автоколебания поддерживаются за счет притока энергии от газовой среды, которая может иметь постоянную скорость и направление.

При больших скоростях  $u$  движения потока, если число Маха  $M = \frac{u}{c_0} \geq 2$  ( $c_0$  — скорость звука на бесконечности), для определения нормального давления на поверхность применяется так называемая «поршневая» теория [13].

Согласно этой теории предполагается (для  $M > 2$ ), что газ, находящийся в столбике, нормальном к потоку, движется с малой скоростью  $v$  по сравнению со скоростью потока  $u$ . При этом вводится гипотеза плоских сечений, которая предполагает, что боковые стенки столбика являются непроницаемыми для потока, так что движение является одномерным. Поперечные перемещения частиц происходят вдоль нормали к деформируемой поверхности пластинки. Эта гипотеза позволяет избежать сведения задачи к двумерной и необходимости учета скачков уплотнения, возникающих при набегании потока на пластинку. Величина скачка скорости предполагается незначительной, а фронт скачка уплотнения близок к поверхности.

По одномерной теории газа давление газа на поршень

$$p = p_0 \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \frac{v}{c_0} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}}, \quad (9.153)$$

где  $v$  — скорость движения поршня —

$$v = u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}; \quad (9.154)$$

$p_0$  и  $c_0$  — давление и скорость в невозмущенном потоке;  $w$  — перемещение пластинки по нормали к первоначальной поверхности ее.



После разложения уравнения (9.153) по формуле бинома в первом приближении получим

$$\Delta p = \frac{\kappa p_0}{c_0} \left( u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right). \quad (9.155)$$

Вместо уравнения (9.155) можно использовать выражение

$$\Delta p = \kappa p_0 \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} \right), \quad (9.155')$$

которое можно применять для  $M \geq 2$  (граница применимости формулы недостаточно еще выяснена).

При расчетах должно быть соблюдено условие

$$\left( u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)_{\max} < c_0. \quad (9.156)$$

Если принять  $\omega = A \sin \omega t$ , то вместо этого условия можно написать

$$M \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{\max} + \frac{A \omega}{c_0} \right) > 1. \quad (9.156')$$

В этом параграфе рассматриваются задачи, связанные с потерей устойчивости пластин, которые являются элементами обшивки или оперения летательного аппарата (панель). Возникающие в этом случае колебания носят название — панельный флаттер.

### Пластина постоянной толщины в сверхзвуковом потоке газа

Дифференциальное уравнение колеблющейся плиты постоянной толщины в сверхзвуковом потоке в безразмерных координатах  $\left( \xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}, \mu_1 = \frac{a}{b} \right)$  имеет вид

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial \xi^4} + 2\mu_1^2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \mu_1^4 \frac{\partial^4 \omega}{\partial \eta^4} = \frac{a^4}{D} q. \quad (9.157)$$

где

$$q = -\rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \frac{p_0 \kappa}{c_0} \left( \frac{u}{a} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right). \quad (9.158)$$

Предполагая, что стороны  $y = 0$ ,  $y = b$  ( $\eta = 0$ ,  $\eta = 1$ ) параллельны направлению потока, берем для прогиба плиты значение

$$\omega(\xi, \eta, t) = X_n(\xi) \sin n\pi\eta \exp \omega t. \quad (9.159)$$

После подстановки (9.159) в уравнение (9.157) получим

$$X_n^{IV} - 2\alpha_n^2 X_n'' + \alpha_n^4 X_n + kX_n' - \lambda X_n = 0, \quad (9.160)$$

где

$$\alpha_n = \mu_1 n \pi; \quad k = \frac{a^3 p_0}{D c_0} u; \quad \lambda = -\frac{a^4}{D} \left( h \rho \omega^2 + \frac{p_0 x}{c_0} \omega \right). \quad (9.161)$$

Решение уравнения (9.160) может быть представлено в виде

$$X_n = \sum_{i=1}^4 c_{in} e^{r_i n \xi}. \quad (9.162)$$

После подстановки  $X_n$  в уравнение (9.160) получим для определения  $r_i$  характеристическое уравнение

$$(r^2 - \alpha^2)^2 + kr - \lambda = (r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4) = 0. \quad (9.163)$$

Индекс  $n$  здесь и в дальнейшем опущен. В случае заземленных граней  $x = 0$ ,  $x = a$

$$X(0) = X'(0) = 0; \quad X(a) = X'(a) = 0. \quad (9.164)$$

После подстановки (9.162) в условия (9.164) получим зависимость

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ e^{r_1} & e^{r_2} & e^{r_3} & e^{r_4} \\ r_1 e^{r_1} & r_2 e^{r_2} & r_3 e^{r_3} & r_4 e^{r_4} \end{vmatrix} = 0. \quad (9.165)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $r$  левой и правой части равенства (9.163), придем к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= 0; \\ r_1 r_2 + (r_1 + r_2)(r_3 + r_4) + r_3 r_4 &= -2\alpha^2; \\ r_1 r_2 (r_3 + r_4) + r_3 r_4 (r_1 + r_2) &= k; \\ r_1 r_2 r_3 r_4 &= \alpha^4 - \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (9.166)$$

Полагая, что  $r_1$  и  $r_2$  имеют значения

$$r_{1,2} = s \pm is_1, \quad (9.167)$$

найдем из соотношений (9.166)

$$r_{3,4} = -s \pm \sqrt{s_1^2 - 2s^2 + 2\alpha^2}, \quad (9.168)$$

$$k = 4s(s_1^2 - s^2 + \alpha^2),$$

$$\lambda = \alpha^4 + (s^2 + s_1^2)(s^2 - 3s_1^2 + 2\alpha^2).$$

Определитель  $\Delta$  будет иметь вид

$$\Delta(s, s_1, \alpha) = 0. \quad (9.165')$$

Таким образом, для заданного  $\alpha$  и параметра скорости потока  $k$  из нелинейной системы уравнений

$$4\Delta s (s_1^2 - s^2 + \alpha^2) = k, \quad \Delta(s, s_1, \alpha) = 0 \quad (9.169)$$

находятся величины  $s$  и  $s_1$ , значения которых определяет характер движения. Из зависимости (9.161) между  $\lambda$  и  $\omega$  находим

$$\omega_{1,2} = -\frac{\rho_0 \kappa}{2h\rho c_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho_0 \kappa}{2h\rho c_0}\right)^2 - \frac{D}{a^4 \rho h} \lambda}. \quad (9.170)$$

Из формулы (9.170) следует:

а) если  $\lambda(s, s_1, k) > 0$ , то значение  $\text{Re } \omega < 0$ , т. е. процесс затухает;

б) если  $\lambda(s, s_1, k) < 0$ ,  $\omega_1 > 0$ , следовательно, прогиб  $w$  неограниченно и монотонно возрастает со временем и наступает дивергентная потеря устойчивости;

в) колебательный характер потери устойчивости (флаттер) с неограниченно возрастающей амплитудой возможен при  $\lambda(s, s_1, k)$  комплексном. Для случая, когда  $\text{Re } \omega = 0$ , получим два действительных корня, соответствующих двум формам колебаний. Для  $\text{Re } \omega = 0$  найдем из формулы (9.170) зависимость

$$\text{Re } \lambda = -\frac{h\rho D}{2a^4} \left(\frac{c_0}{\rho_0 \kappa} \text{Im } \lambda\right)^2. \quad (9.171)$$

Кривая  $\omega(k)$  — парабола устойчивости [68].

При отсутствии демпфирования  $\omega_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{D}{a^4 \rho h}} \lambda$ . При любом комплексном значении  $\lambda$  получается неустойчивое движение. Парабола устойчивости вырождается в действительную ось.

При некотором значении  $k = k_\phi$  обе ветви сливаются, и в случае  $k > k_\phi$  возникают неустановившиеся колебания типа флаттера. Вне параболы, когда  $\text{Re } \omega > 0$ , возможна потеря устойчивости.

В работе [68] подробно исследуется устойчивость пластин и приводятся точные решения для некоторых случаев закрепления.

### Сущность метода определения критических параметров

Для изучения устойчивости пластин в потоке газа во многих работах применяется метод Бубнова—Галеркина. Однако применение этого метода для сложных условий на контуре, в случае переменности толщины пластинки вызывает ряд затруднений; в связи с этим ряд практически важных задач до настоящего времени не рассматривался.

Более удобным при использовании ЭЦВМ для численных расчетов является непосредственное применение начала Лагранжа, пригодного также и для неконсервативных систем [62].

Согласно начала Лагранжа

$$-\delta U + \iint q \delta w \, dx \, dy = 0; \quad (9.172)$$

здесь  $-\delta U$  — энергия пластинки; значение  $q$  определяется по формуле (9.158).

Перемещение пластинки ищем в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i(\xi) Y_i(\eta) e^{i\omega t}; \quad (9.173)$$

здесь  $\alpha_i$  — неизвестные параметры;  $X_i Y_i$  — заданные координатные функции, подчиненные геометрическим условиям закрепления.

Для вариации  $\delta w$  имеем значение

$$\delta w = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i = \sum_{i=1}^n X_i(\xi) Y_i(\eta) \delta \alpha_i e^{i\omega t}. \quad (9.174)$$

В выражении для (9.172)  $\delta U$  вычисляем  $w''_{xx}$ ,  $w''_{yy}$ ,  $w''_{xy}$  и подставляем их значения, а также  $w'_x$  в формулу (9.158) для  $q$ . Собираем коэффициенты при одинаковых  $\delta \alpha_j$ . Так как  $\delta \alpha_j$  произвольно, то обращение в нуль выражения, стоящего в левой части уравнения (9.172), возможно лишь тогда, когда каждый из коэффициентов при  $\delta \alpha_j$  обратится в нуль.

Таким образом, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров  $\alpha_j$ .

Условие нетривиальности решения полученной системы можно записать в матричной форме

$$\Pi + kF - \lambda T = 0$$

или, умножая на  $(\Pi + kF)^{-1}$ , получим

$$(\Pi + kF)^{-1} T - \frac{1}{\lambda} E = 0. \quad (9.175)$$

Элементы матриц имеют значение

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &= \iint h^3 [X_i'' X_j'' Y_i Y_j + \mu_1^4 X_i X_j Y_i'' Y_j'' + \\ &+ \nu \mu_1^2 (X_i X_j'' Y_i'' Y_j + X_i'' X_j Y_i Y_j'') + 2(1 - \nu) \mu_1^2 X_i' X_j'' Y_i' Y_j'] d\xi d\eta; \\ \tau_{ij} &= \iint h X_i X_j Y_i Y_j d\xi d\eta; \quad f_{ij} = \iint X_i X_j Y_i Y_j d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Вычисляя для нескольких выбранных значений параметра  $k$  собственные числа матрицы (9.175) на основании формул (9.170) и (9.169), можно судить о характере движения. Таким образом, исследуя расположение корней  $\lambda$  относительно параболы устойчивости в зависимости от  $k$ , получим решение задачи об устойчивости невозмущенной формы пластинки.

Граница устойчивости невозмущенной формы пластины определяется значением параметра  $k_d$ , при котором собственное число становится отрицательным (дивергенция).

Кривая  $\lambda(k)$  в области действительных значений корней представляет собой петлю, две ветви которой соответствуют двум значениям  $\lambda$ . При  $k = k_\phi$  эти ветви сливаются, а при  $k > k_\phi$  появляются комплексные корни, причем одно из значений  $\omega$  имеет

$$\operatorname{Re} \omega > 0.$$

Для решения задачи составлен алгоритм, который ввиду неконсервативности системы обладает некоторыми особенностями, в частности, несимметричной матрицей  $F$ , которую удобно разбить на две матрицы с элементами  $i \leq j$  и  $i > j$ , из которых можно получить обычную квадратную матрицу.

Другая особенность заключается в наличии комплексно-сопряженной пары собственных чисел  $\lambda$ .

В этом случае собственный вектор  $Y_k$ , образованный последовательностью его итераций векторов  $Y_0$  матрицей  $A$ , в процессе его итераций будет колебаться как по величине, так и по знаку, что приводит к обнаружению комплексных собственных значений. Ход вычислений изложен в книге [98]. В зоне  $k_{кр}$  удобно находить критические точки из условия

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, k) &= 0, \\ \frac{\partial \Delta(\lambda, k)}{\partial \lambda} &= 0, \end{aligned} \quad (9.176)$$

где

$$\Delta(\lambda, k) = \operatorname{Det}(\Pi + \lambda T - kF).$$

### Прямоугольные пластины в потоке газа

Для прямоугольных пластин имеется ряд точных решений и найдены критические параметры скорости для флаттера  $k_\phi$  и дивергенции  $k_d$ .

Для квадратной пластины, две стороны которой  $y = 0$  и  $y = 1$  оперты, а стороны  $x = 0$ ,  $x = 1$  свободны, координатные функции задавались в виде

$$(y^4 - 2y^3 + y)x^{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9.177)$$

Расчеты были проведены для  $n = 3, 5, 8, 12, 15$ . Уже для  $n = 8$  было получено (поток направлен параллельно оси  $x$ )

$$k_d = 141,3; \quad k_\phi = 536.$$

Точные значения, полученные в работе [68],

$$k_d = 142,6; \quad k_\phi = 535.$$

На рис. 9.33 приведена зависимость  $\lambda(k)$  для различных  $n$ .

Квадратная плита с заделанными сторонами  $x = 0$ ,  $x = a$  и опертыми  $y = 0$ ,  $y = b$

Для  $n = 6$ ,  $k_F = 812$ ;  $n = 7$ ,  $k_F = 817$ . Точное значение  $k_F = 814$ . Координатные функции

$$(y^4 - 2y^3 + y)(x - 1)^2 x^{i+1}. \quad (9.178)$$

Формы колебаний среднего сечения пластинки для различных  $k$  приведены на рис. 9.34.

В табл. 9.21 приведены значения параметра  $k_F$  для случаев, имеющих точное решение. Поток направлен параллельно оси  $x$ .

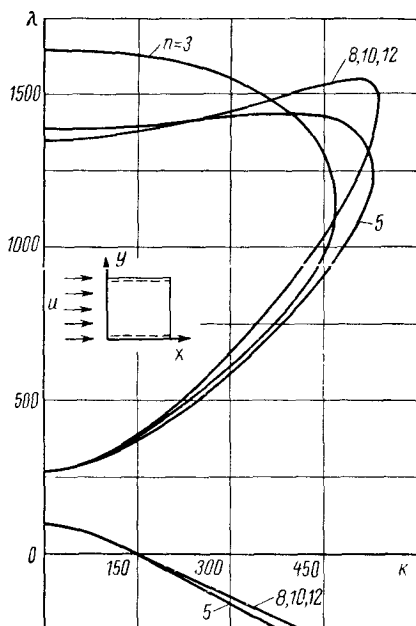


Рис. 9.33

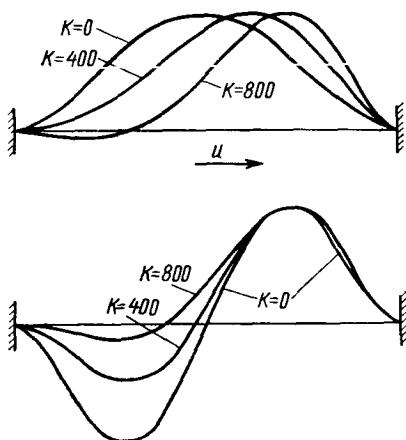


Рис. 9.34

Таблица 9.21

Значения параметра флаттера  $k_F$  для случаев, имеющих точное решение

Условия закрепления		$\frac{a}{b}$	Значение $k_F$		Число параметров
для края $x=0$ , $x=a$	для края $y=0$ , $y=b$		точное	приближенное	
Заделан — заделан	Оперт—оперт	1	814	817	7
Заделан—оперт	Оперт—оперт	1	652	652	12
Заделан—заделан	—	0	636	637	7
Свободен—свободен	Оперт—оперт	1	535	534	12
Оперт—оперт	Оперт—оперт	1	513	512	12
Заделан—оперт	—	0	480	479	6
Оперт—оперт	Оперт—оперт	$1/2$	384	384	12
Оперт—оперт	—	0	343	344	6
Заделан—свободен	—	0	135	135	6

Критические параметры  $k_F$  для квадратной плиты

Род закрепления		Условия заделки краев $y=0, y=b$						
для края $x=0$	для края $x=a$	$y=0$ заделан	$y=b$ заделан	заделан оперт	оперт оперт	заделан свободен	оперт свободен	свободен свободен
Заделан	Заделан	851	839	814	670	666	630	
Заделан	Оперт	682	676	652	502	500	471	
Оперт	Оперт	548	531	513	370	360	334	
Заделан	Свободен	377	361	332	207	170	127	
Оперт	Свободен	325	310	281	148	138	89	
Свободен	Свободен	560	548	537	56	—	617	

В табл. 9.22 приведены параметры  $k_F$  для квадратной плиты, подсчитанные указанным методом, для различных условий опирания.

### Устойчивость консольных пластин

В современных конструкциях широко применяются консольные пластины в качестве несущих поверхностей скоростных самолетов, стабилизаторов ракет и т. п.

Точное решение для такого типа пластин, тем более переменной толщины, невозможно. Для этих случаев удобно по-прежнему использовать вариационное уравнение Лагранжа. В качестве координатных функций в направлении свободно—свободно можно использовать присоединенные полиномы Лежандра, в направлении заделка—свободно — систему полиномов, приведенных выше (стр. 302).

Проведение расчетов и анализ их результатов больших затруднений не представляют, если попутно определять и формы колебаний.

В табл. 9.23 приводятся критические параметры потока для консольной прямоугольной трапеции в плане. Верхние три строки относятся к случаю обтекания со стороны скошенной кромки, три нижних — со стороны прямой. Формы колебаний для этого случая приведены в табл. 9.24, из которой можно сделать ряд выводов. Как видно, критическая скорость зависит от отношения  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{b}$ . При обтекании со стороны скошенной кромки при уменьшении  $\frac{c}{b}$  параметр  $k_F$  увеличивается, и для треугольной пластинки ( $\frac{c}{b} = 0$ ) параметр  $k_F$  в 2—3 раза больше, чем для прямоугольной  $\frac{c}{b} = 1$  (рис. 9.35).

Критические параметры потока для прямоугольной трапеции

$a/b \backslash c/b$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	
0,5 1,0 2,0	85,0 172 339	64,2 130 260	46,2 101 217	35,5 787 179	31,2 63,8 152	37,8 56,1 134	
0,5 1,0 2,0	-222 -95,3* -120	-109 -88,0 —	-63,6 -165 -349	-43,6 -112 —	-38,0 -77,0 —	-36,8 -56,1 -134	

Потеря устойчивости носит изгибно-крутильный характер, кроме диапазона  $\frac{c}{b} < 0,6$  для  $\frac{a}{b} = 2$  (две изгибные формы).

При обтекании со стороны прямой кромки критические значения  $k_F$  больше, чем в предыдущем случае. Для  $\frac{a}{b} \geq 1$

с уменьшением  $\frac{c}{b}$  возможна дивергентная потеря устойчивости.

В табл. 9.23 критические параметры  $k_\theta$  отмечены звездочкой. Величина  $|k_F|$  изменяется от 166 при  $\frac{c}{b} = 0,4$  до 88 при  $\frac{c}{b} = 0,2$ .

Поведение кривых для  $\frac{a}{b} = 1$  видно из рис. 9.35: положительным значениям  $k$  соответствует обтекание со стороны скошенной кромки. Для  $\frac{c}{b} \geq 0,28$  взаимодействует первая и вторая форма. Для  $\frac{c}{b} = 2$  и  $k < 0$  овал  $\lambda(k)$  размыкается и наименьшее значение  $k$  соответ-

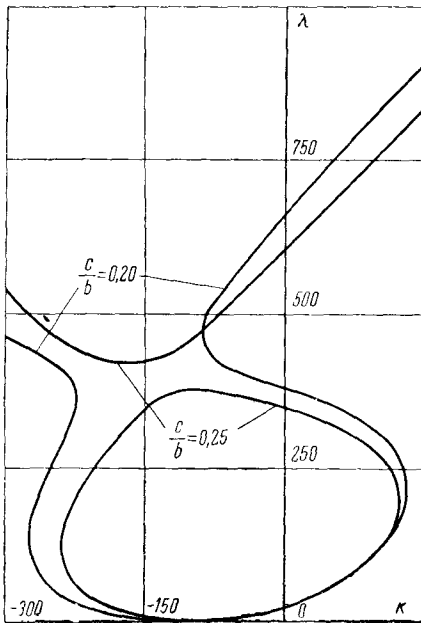
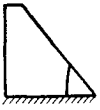
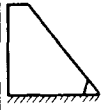
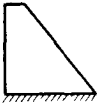
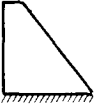

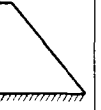
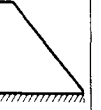
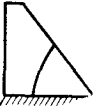
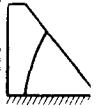
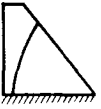
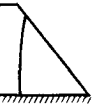
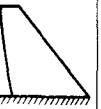
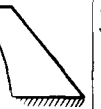


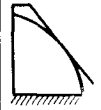
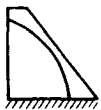
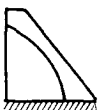
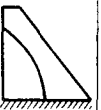

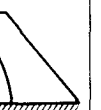


Рис. 9.35



Формы колебаний для консольной прямоугольной трапеции

$\beta$	Значение параметра $k$						
	125	100	50	0	-55	-75	-85
$\beta_1$	 177,5	 114,3	 55,1	 23,3	 5,33	 3,14	 1,15
$\beta_2$	 258,0	 310,5	 355,1	 382,5	 412,0	 428,6	 444,3
$\beta_3$	 867,9	 827,3	 745,6	 662,2	 563,2	 520,1	 491,2

← ————— u ————— →

вует флаттеру, при котором взаимодействуют вторая и третья формы. Это обстоятельство легко установить из таблицы, где приведены первые три формы колебаний.

Выше приведено несколько простых примеров расчета обтекания пластин. Приведенный метод на основе составленных программ позволяет рассмотреть и другие случаи обтекания, а также обтекание пластины переменной жесткости.

## КОЛЕБАНИЯ ТУРБИННЫХ ЛОПАТОК

### КОЛЕБАНИЯ ОТДЕЛЬНОЙ ЛОПАТКИ

Рабочие лопатки являются наиболее ответственными элементами паровых и газовых турбин. В рабочих условиях на них действуют возмущающие силы, кратные числу оборотов ротора  $n$  и произведению числа направляющих лопаток на число оборотов  $zn$  [56]. Для отстройки рабочих лопаток от опасных резонансных режимов необходимо исследовать спектр собственных частот свободных колебаний лопаток.

Лопатки современных турбомашин представляют собой закрученные стержни переменного поперечного сечения, связанные в пакеты проволокой и бандажом.

Поперечное сечение лопатки имеет несимметричный профиль. При этом, как показано в гл. 3, возникают совместные изгибно-крутильные колебания, выражаемые уравнениями (3.39). Кроме того, лопатки колеблются в поле центробежных сил, влияние которых заметно сказывается на их собственных частотах. Расчет лопатки как стержня, колеблющегося в плоскости наименьшей жесткости, позволяет определить лишь первую частоту лопатки.

Для определения высших частот необходимо рассматривать уравнения изгибно-крутильных колебаний с учетом центробежных сил. Эта задача не имеет решения в замкнутом виде. Поэтому для ее решения привлекаются приближенные методы. В этой главе будут рассмотрены метод начальных параметров и энергетический метод, получившие наиболее успешное приложение к проблеме изгибно-крутильных колебаний лопаток.

#### Работа центробежных сил

Рассмотрим лопатку в системах координат  $xyz$  и  $x_1y_1z_1$ , таких же, как в гл. 3 (рис. 10.1). Они вращаются вместе с лопаткой, причем оси  $x$  и  $x_1$  параллельны оси вращения.  $R$  — радиус диска, на котором укреплен лопатка;  $\omega_0$  — угловая скорость вращения диска с лопатками. На элемент объемом  $dF dz$  действует центробежная сила

$$dP = \rho \omega_0^2 dF dz R. \quad (10.1)$$

Так как эта сила действует в плоскости, параллельной плоскости  $zOy$ , то ее можно разложить на две силы:  $dP_z$  — параллельную  $Oz$ , и  $dP_y$  — параллельную  $Oy$ . Воспользовавшись подобием треугольников  $dPA$   $dP_y$  и  $AO_1A_1$ , получим

$$\left. \begin{aligned} dP_z &= \rho\omega_0^2(R+z-\zeta) dF dz; \\ dP_y &= \rho\omega_0^2 V(x, y, z, t) dF dz, \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

где  $\zeta$  — разница между длиной проекции на ось  $z$  отклоненной оси и первоначальной длиной оси части лопатки длиной  $z$ .

Работа элементарных центробежных сил на перемещениях элемента лопатки из отклоненного положения в исходное будет равна работе вертикальной составляющей на пути  $\zeta$  и работе горизонтальной составляющей на пути  $V$ :

$$dA_{\omega_0} = \int_0^{\zeta} dP_z \delta\zeta + \int_{V(x, y, z, t)}^0 dP_y \delta V(x, y, z, t);$$

или, учитывая выражения (10.2),

$$\begin{aligned} dA_{\omega_0} &= \rho\omega_0^2 \left[ \int_0^{\zeta} (R+z-\zeta) \delta\zeta - \int_0^V V \delta V \right] dF dz = \\ &= \rho\omega_0^2 \left[ (R+z)\zeta - \frac{\zeta^2}{2} - \frac{V^2}{2} \right] dF dz. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Работа центробежных сил всей лопатки при возвращении ее из отклоненного положения в нулевое

$$A_{\omega_0} = \rho\omega_0^2 \int_0^l \int_F \left[ (R+z)\zeta - \frac{\zeta^2}{2} - \frac{V^2}{2} \right] dF dz, \quad (10.4)$$

где  $l$  — длина лопатки.

Длина искривленной оси части лопатки длиной  $z$

$$\begin{aligned} S(z) &= \int_0^z \left[ 1 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz \approx \int_0^z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dz, \end{aligned}$$

если отбросить при разложении в ряд малые величины выше второго порядка малости.

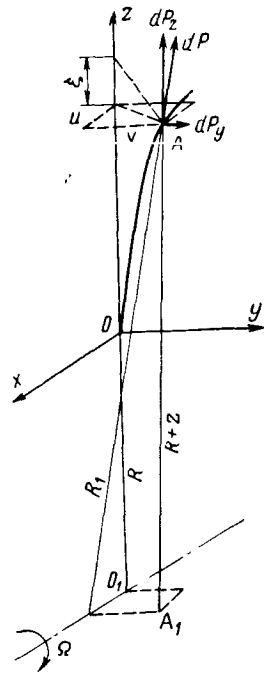


Рис. 10.1

Разница между длиной искривленной оси и ее проекцией на ось  $z$

$$\left. \begin{aligned} \xi = S(z) - S_0(z) &= \int_0^z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dz - z; \\ \xi &= \frac{1}{2} \int_0^z \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dz. \end{aligned} \right\} (10.5)$$

Воспользуемся выражениями для перемещения любой точки стержня (3.28), полученными в гл. 3, тогда

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \int_0^z \left\{ \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 r_1^2 + \right. \\ &+ \left. 2 \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial (u_1 + u_2)}{\partial z} - 2 \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial (v_1 + v_2)}{\partial z} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial z} + 2 \frac{\partial v_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial z} \right\} dz. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Подставляя выражения (3.28) и (10.6) в уравнение (10.4) и пренебрегая малыми величинами выше второго порядка малости, получим выражение для работы центробежных сил:

$$\begin{aligned} A_{\omega_0} &= \frac{1}{2} \rho \omega_0^2 \int_0^l \left\{ (R+z) F \int_0^z \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \right)^2 \right] dz - \right. \\ &- \left. 2(R+z) S_{x_1} \int_0^z \frac{\partial \theta}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) dz + \right. \\ &+ \left. 2(R+z) S_{y_1} \int_0^z \frac{\partial \theta}{\partial z} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) dz + (R+z) I_p \int_0^z \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 dz - \right. \\ &- \left. (v_1 + v_2)^2 F + 2\theta (v_1 + v_2) S_{y_1} - \theta^2 (J_y + S_{y_1}) \right\} dz, \quad (10.7) \end{aligned}$$

### Кориолисовы силы, действующие на лопатку

Вращательное движение лопатки с диском можно рассматривать как переносное, а колебательное движение в системе  $xyz$  как относительное. В этом случае каждый элемент лопатки получает кориолисово ускорение, действующее в плоскости вращения, которое можно разложить на составляющие в направлении  $z$  и  $y$ :

$$a_y = -2\omega_0 \frac{\partial W}{\partial t}; \quad a_z = 2\omega_0 \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Следуя принципу Даламбера, можно сказать, что на элемент лопатки объемов  $dF dz$  действуют кориолисовы силы

$$dF_{ky} = 2\omega_0 \rho \frac{\partial W}{\partial t} dF dz, \quad dF_{kz} = -2\omega_0 \rho \frac{\partial V}{\partial t} dF dz. \quad (10.8)$$

## Элементарная работа кориолисовых сил

$$\delta A_k = -2\omega_0 \rho \int_0^l \int_F \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} \delta V + \frac{\partial V}{\partial t} \delta(\zeta - W) \right\} dF dz.$$

Воспользовавшись выражением (10.6) для  $\zeta$  и выражениями (3.28) для  $V$  и  $W$  и пренебрегая членами высшего порядка малости и второстепенными, в результате получим выражение для вариации работы кориолисовых сил лопатки:

$$\begin{aligned} \delta A_k = 2\omega_0 \rho \int_0^l \left\{ - \left[ \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial t} x_s \right] F \delta \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} F (\delta v_1 + \delta v_2 - \right. \\ \left. - x_s \delta \theta) + \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} I_y + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} I_{xy} \right] \delta \theta, - \right. \\ \left. - \frac{\partial \theta}{\partial t} (I_y + I_{xy}) \frac{\partial}{\partial z} (\delta u_1 + \delta v_1) \right\} dz. \end{aligned} \quad (10.9)$$

## Уравнения колебаний вращающейся лопатки

При рассмотрении колебаний вращающейся турбинной лопатки к потенциальной энергии следует добавить работу центробежных и кориолисовых сил при перемещении лопатки из отклоненного положения в состояние равновесия. Продольные колебания при этом, обычно, не рассматриваются.

Для получения уравнений колебаний можно снова воспользоваться принципом Остроградского—Гамильтона

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U - \delta A_{\omega_0} - \delta A_k) dt = 0. \quad (10.10)$$

При вычислении вариаций выражений, содержащих члены вида  $\int_0^z \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz$ , воспользуемся теоремой о перемене порядка интегрирования:

$$\begin{aligned} A'_{\omega_0} &= \delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (R+z) F \int_0^z \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 dz dz dt = \\ &= \delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 dz \int_z^l (R+z) F dz dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial u_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\delta u_1) dz \int_z^l (R+z) F dz dt. \end{aligned}$$

Далее, интегрируя по частям, получаем

$$A'_{\omega_0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u_1}{\partial z} \delta u_1 \int_z^l (R+z) F dz \Big|_0^l dt - \\ - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial z} \int_z^l (R+z) F dz \right] \delta u_1 dz dt.$$

Подставим в выражение (10.10) выражения (3.33), (3.35), (10.7) и (10.9), пренебрегая в них членами, относящимися к продольным колебаниям. После вычислений, приравнявая нулю выражения при вариациях  $\delta u_1$ ,  $\delta v_1$ ,  $\delta u_2$ ,  $\delta v_2$  и  $\delta \theta$ , придем к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z^2} \left[ E \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} J_y + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} J_{xy} - \tau_0 J_{yr} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] - \rho \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} J_y + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} J_{xy} \right) + \rho \left[ F \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} S_{x_1} \right] - \\ & + \rho \omega_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial (u_1 + u_2)}{\partial z} \int_z^l (R+z) F dz + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \theta}{\partial z} \int_0^l (R+z) S_{x_1} dz \right] - 2\omega_0 \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( J_y \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = 0; \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left[ G \frac{\partial u_2}{\partial z} k_1 F \right] - \rho \left[ F \frac{\partial^2 (u_1 + u_2)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} S_{x_1} \right] - \\ & - \rho \omega_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial (u_1 + u_2)}{\partial z} \int_z^l (R+z) F dz + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \theta}{\partial z} \int_z^l (R+z) S_{x_1} dz \right] = 0; \end{aligned} \right\} (10.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ E \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} J_x + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} J_{xy} - \tau_0 J_{xr} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] - \\ & - \rho \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} J_x + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} J_{xy} \right) + \rho \left[ F \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} S_{y_1} \right] - \rho \omega_0^2 [F(v_1 + v_2) - \theta S_{y_1}] - \\ & - \rho \omega_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial (v_1 + v_2)}{\partial z} \int_z^l (R+z) F dz - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \theta}{\partial z} \int_z^l (R+z) S_{y_1} dz \right] - 2\omega_0 \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( J_{xy} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} \left[ G \frac{\partial v_2}{\partial z} k_2' F \right] - \rho \left[ F \frac{\partial^2 (v_1 + v_2)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} S_{y_1} \right] + \\
& + \rho \omega_0^2 [F (v_1 + v_2) - \theta S_{y_1}] - \rho \omega_0^2 \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial (v_1 + v_2)}{\partial z} \int_z^l (R + z) F dz - \frac{\partial \theta}{\partial z} \int_z^l (R + z) S_{y_1} dz \right] = 0; \\
& \frac{\partial}{\partial z} \left[ G J_{d_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \tau_0 E \left( - \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} J_{y_r} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} J_{x_r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \tau_0 J_r \right) \right] - \\
& - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ E J_\varphi \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] + \beta \frac{\partial}{\partial z} \left( J_\varphi \frac{\partial^3 \theta}{\partial z \partial t^2} \right) - \rho \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} J_p + \right. \\
& + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_1 + u_2) S_{x_1} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_1 + v_2) S_{y_1} \left. \right] + \rho \omega_0^2 [\theta (I_y + S_{y_1}) - \\
& - (v_1 + v_2) S_{y_1}] + \rho \omega_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial z} \int_z^l (R + z) I_p dz + \right. \\
& + \frac{\partial (u_1 + u_2)}{\partial z} \int_z^l (R + z) S_{x_1} dz - \frac{\partial (v_1 + v_2)}{\partial z} \int_z^l (R + \\
& \left. + z) S_{y_1} dz \right] + 2\rho \omega_0 \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} J_y + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} J_{xy} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{10.11}$$

Следует отметить, что кориолисовы силы могут быть учтены только при совместных изгибно-крутильных колебаниях лопадки, когда они создают дополнительную связь между различными видами колебаний. При свободных колебаниях кориолисовы силы вызывают сдвиг фаз между различными видами колебаний и незначительное изменение собственных частот и форм колебаний [15]. Поэтому в этом случае они могут не учитываться.

Пусть  $S_{x_1} = Fb \cos \beta$ ,  $S_{y_1} = Fb \sin \beta$ . Пренебрегая влиянием сдвига инерции поворота и депланацией поперечного сечения и считая характер колебаний гармоническим с частотой  $\omega$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ E \left( J_y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + J_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \tau_0 J_{y_r} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] - \rho \omega^2 F (u + \\
& + \theta b \cos \beta) - \rho \omega_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \int_z^l (R + z) F dz + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \theta}{\partial z} \int_z^l (R + z) F b \cos \beta dz \right] = 0;
\end{aligned} \tag{10.12}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ E \left( J_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + J_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \tau_0 J_{xr} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] - \rho (\omega^2 + \omega_0^2) F (v - \\
& \quad - \theta b \sin \beta) - \rho \omega_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial v}{\partial z} \int_z^l (R + z) F dz - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial \theta}{\partial z} \int_z^l (R + z) F b \sin \beta dz \right] = 0; \\
& \frac{\partial}{\partial z} \left[ (GJ_{d_0} + \tau_0^2 E J_r) \frac{\partial \theta}{\partial z} - \tau_0 E \left( J_{yr} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + J_{xr} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right] - \\
& \quad - \rho \omega^2 [J_{\rho \theta} + u F b \cos \beta - v F b \sin \beta] + \beta \omega_0^2 [\theta (J_y + \\
& \quad + F b \sin \beta) - v F b \sin \beta] + \rho \omega_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial z} \int_z^l (R + z) I_p dz + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial u}{\partial z} \int_z^l (R + z) F b \cos \beta - \frac{\partial v}{\partial z} \int_z^l (R + z) F b \sin \beta \right] = 0.
\end{aligned} \tag{10.12}$$

Уравнения (10.12) достаточно точно описывают колебания длинных, а уравнения (10.11) — коротких турбинных и компрессорных лопаток. Более подробная система уравнений колебаний вращающегося стержня приведена в работе [15].

## КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК, СВЯЗАННЫХ БАНДАЖОМ

### Моменты, вызываемые упругими связями

Проволока и бандаж, которыми связаны лопатки в пакеты, создают при отклонении лопатки восстанавливающие моменты [56].

Введем обозначения (рис. 10.2 и 10.3):

- $2\theta$  — угловой шаг между соседними лопатками;
- $t_i = 2\theta (z_i + R)$  — шаг между упругими линиями лопаток на уровне  $i$ -й связи;
- $t_{i0}$  — расстояние между лопатками с учетом толщины;

$J_{z_i}^c, J_{x_i}^c, J_{\rho i}^c$  — осевые и полярный моменты инерции упругой связи;

$F_i^c$  — площадь поперечного сечения связи.

Рассмотрим влияние связи при изгибе лопатки в плоскости  $zOy$ . Разрежем проволоку в средней между соседними лопатками точке.



В месте разрезов возникнут силы

$$P_i^c = \frac{M_{xi}^c}{l_i}, \quad (10.13)$$

где  $M_{xi}^c$  — момент упругого воздействия связи.

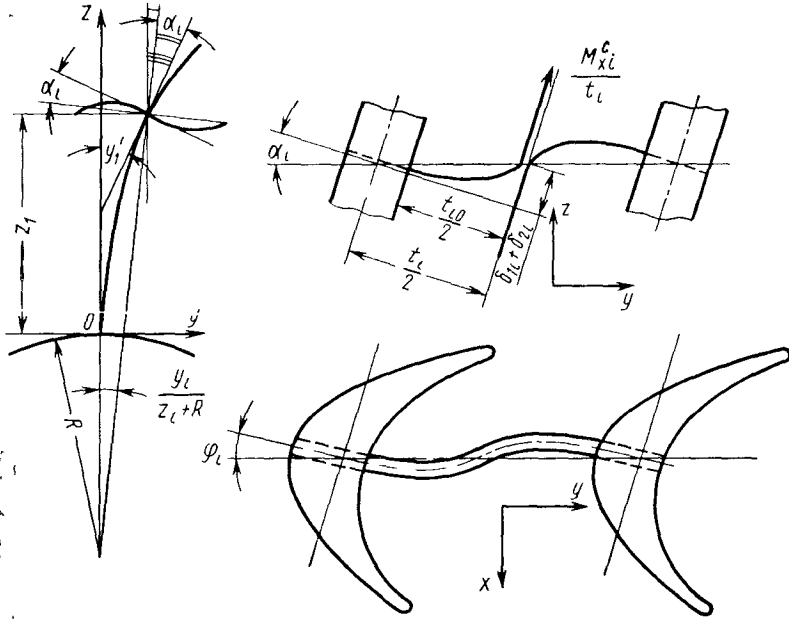


Рис. 10.2

Рассмотрим участок проволоки длиной  $\frac{t_{i0}}{2}$  как консоль, жестко заделанную в лопатке. Сила  $P_i^c$  вызовет на конце консоли прогиб

$$\delta_{1i} = \frac{P_i^c t_{i0}^3}{24E J_{xi}^c}. \quad (10.14)$$

Так как длина связи между лопатками достаточно мала, то следует учесть и влияние сдвига. При этом перемещение на конце консоли

$$\delta_{2i} = \frac{\tau_i t_{i0}}{2G} = \frac{P_i^c t_{i0}}{2GF_i^c}; \quad (10.15)$$

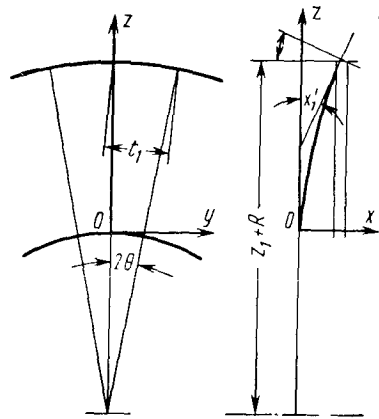


Рис. 10.3

угол поворота лопатки в месте присоединения связи

$$\alpha_i = 2 \frac{\delta_{1i} + \delta_{2i}}{t_i}. \quad (10.16)$$

Используя значения (10.13), (10.14), (10.15), получим

$$\alpha_i = M_{xi}^c \left( \frac{t_{i0}^3}{12t_i^2 E J_{xi}^c} + \frac{t_{i0}}{t_i^2 G F_i^c} \right).$$

Однако на рис. 10.2 видно, что

$$\alpha_i = y_i' - \frac{y_i}{z_i + R};$$

отсюда

$$M_{xi}^c = K_{xi} \left( y_i' - \frac{y_i}{z_i + R} \right), \quad (10.17)$$

где

$$\frac{1}{K_{xi}} = \frac{t_{i0}^3}{12t_i^2 E J_{xi}^c} + \frac{t_{i0}}{t_i^2 G F_i^c}. \quad (10.18)$$

Аналогичным образом находим

$$M_{kpi}^c = K_{kpi} \varphi_i, \quad (10.19)$$

где

$$\frac{1}{K_{kpi}} = \frac{t_{i0}^3}{12t_i^2 E J_{zi}^c} + \frac{t_{i0}}{t_i^2 G F_i^c}. \quad (10.20)$$

Упругий момент  $M_{yi}^c$  можно определить, рассматривая поворотную деформацию кругового кольца (роль которого выполняет бандаж) под действием сосредоточенных моментов, приложенных в местах соединения лопаток с бандажом [5]. Если центробежный момент бандажа считать равным нулю, что обычно выполняется, то

$$M_{yi}^c = K_{yi} X_i', \quad (10.21)$$

где

$$\frac{1}{K_{yi}} = 2 \frac{z_i + R}{t_i} \left( \frac{\varepsilon}{E J_{pi}^c} + \frac{1}{2E J_{zi}^c} \right), \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta). \quad (10.22)$$

### Определение собственных частот лопаток по методу начальных параметров

При расчете собственных частот лопаток получил распространение метод начальных параметров, предложенный А. Крыловым еще в 1933 г. Позднее нашел применение также аналогичный метод [142].

По этому методу распределенная масса лопатки заменяется системой сосредоточенных масс, соединены невесомыми участками постоянной жесткости. Решая уравнения от участка к участку, выразим силы и моменты на конце лопатки. Эти зависимости носят линейный характер относительно корневых сил и моментов и дают частотное уравнение.

Расчетные формулы записываются в виде рекуррентных соотношений или в матричном виде, что удобно для программирования.

Эти методы относятся к пространственным изгибным и изгибно-крутильным колебаниям. Они позволяют получить несколько первых частот с помощью ЭЦВМ.

Остановимся сначала на более простом методе. В ка-

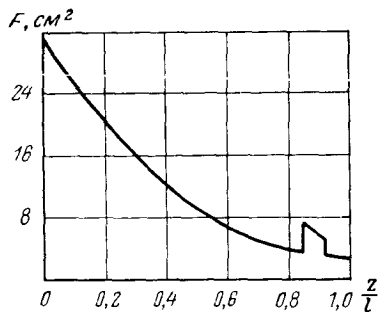


Рис. 10.4

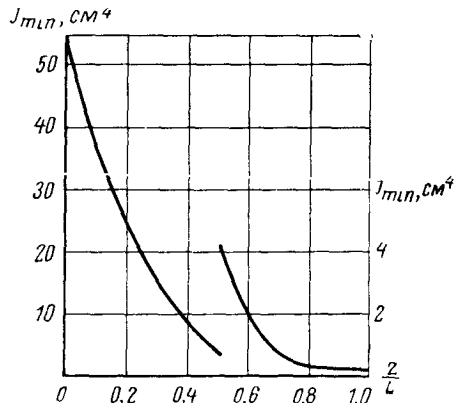


Рис. 10.5

честве примера была взята лопатка последней ступени цилиндра низкого давления турбины ПВК-150. Длина лопатки  $l = 780$  мм, радиус  $R = 673$  мм, число оборотов  $n = 3000$  об/мин. Изменение площади поперечного сечения лопатки, моментов инерции  $J_{\min}$ ,  $J_{\max}$  и угла закрутки относительно корневого сечения дано на рис. 10.4—10.7.

Лопатки связаны проволокой и бандажом. Программа для определения частот и форм колебаний, а также для определения закона изменения изгибающих моментов составлена для уравнений, вытекающих из выражений (10.12):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ EJ_y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + EJ_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \\
 & + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho \omega_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \int_z^l (R+z) F dz \right] = 0; \\
 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ EJ_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + EJ_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \\
 & + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho \omega_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial v}{\partial z} \int_z^l (R+z) F dz \right] - \rho F \omega_0^2 v = 0;
 \end{aligned}$$

здесь  $u$  — перемещение в аксиальном направлении;  $v$  — в тангенциальном. Лопатка при расчете разбивается на  $n$  участков, в каждом из которых площади и моменты инерции предполагаются постоянными. Влияние бандажа и проволоки учитывается обычным образом. Закрутка изменялась ступенчато от участка к участку.

При расчете лопатка была разделена на 10 участков. Массы

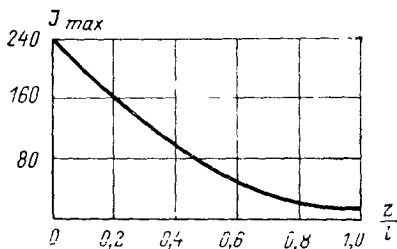


Рис. 10.6

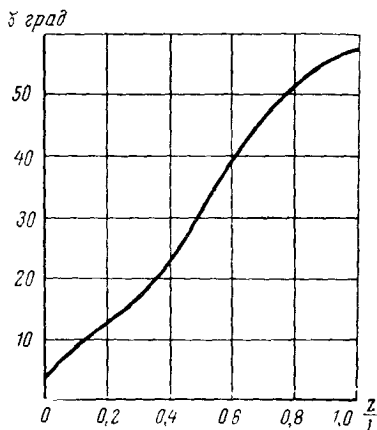


Рис. 10.7

располагались в местах сопряжения участков. Это число участков



Рис. 10.8

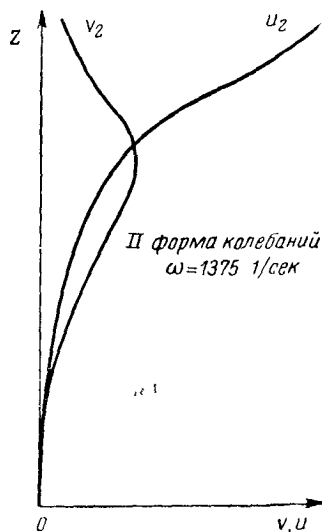


Рис. 10.9

позволило получить четыре первые частоты, соответствующие им формы и моменты (рис. 10.8—10.12). График остаточных моментов приведен на рис. 10.13.

Изложим подробнее метод расчета изгибно-крутильных колебаний, представляющий собой по существу метод начальных параметров [105].

Лопатка заменяется точечными массами  $m_i$ , сосредоточенными в сечениях  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots, N$  (при этом учитываются массы упругих связей). Массы соединены невесомыми упругими

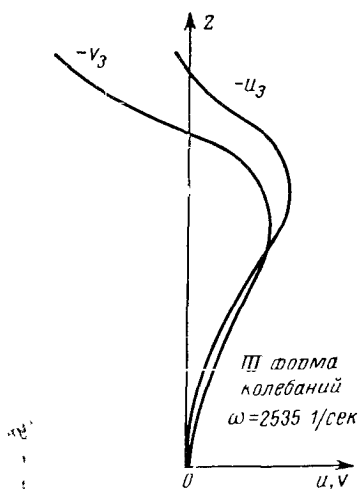


Рис. 10.10

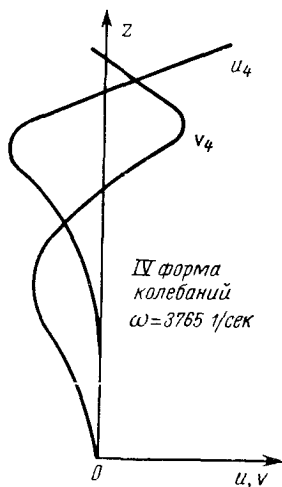


Рис. 10.11

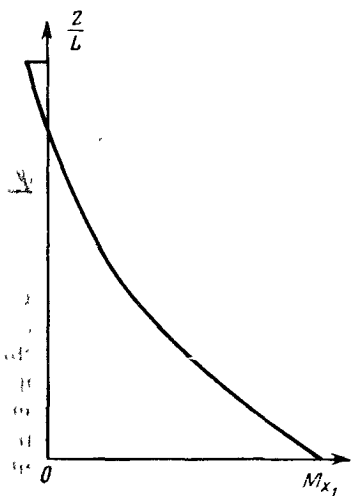


Рис. 10.12

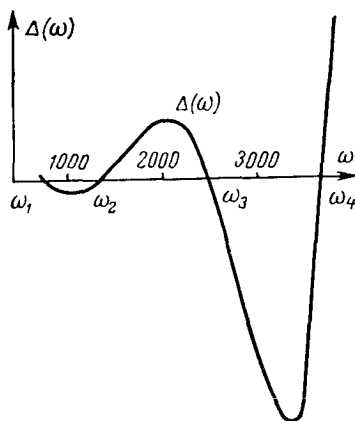


Рис. 10.13

участками постоянной жесткости, имеющими линейную закрутку в отличие от соединения незакрученными участками, принятого в других работах. Геометрическое место центров тяжести не совпадает с геометрическим местом центров изгиба.

Система  $XYZ$  (рис. 10.14) — прямоугольная правая система координат, вращающаяся вместе с лопаткой, ось  $X$  параллельна оси вращения, ось  $Z$  направлена по радиусу от центра вращения, начало координат совпадает с центром изгиба корневого сечения.

Система  $uvz$  — так же прямоугольная система координат; направление оси  $z$  совпадает с направлением оси  $Z$ , начало координат помещается последовательно в точках пересечения оси с параллельными  $XU$  плоскостями, в которых расположены сосредоточенные массы в центре тяжести  $i$ -го сечения в ненапряженном состоянии; оси  $u$  и  $v$  при движении вдоль оси  $z$  поворачиваются, оставаясь все время параллельными главным осям инерции соответствующих сечений.

Далее,  $\psi$  — угол между осями  $u$  и  $X$ ; (угол закрутки лопатки);  $O$  — центр изгиба

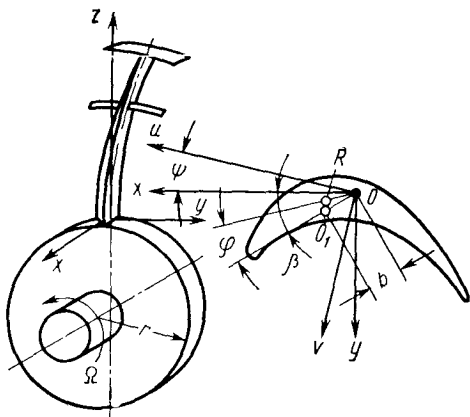


Рис. 10.14

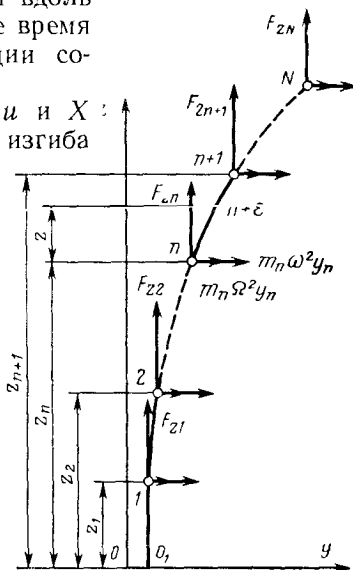


Рис. 10.15

сечения;  $O_1$  — центр тяжести сечения;  $b$  — расстояние между  $O$  и  $O_1$ ;  $\beta$  — угол между осью  $X$  и прямой  $OO_1$ ;  $E$ ,  $G$  — модули упругости при растяжении и сдвиге;  $J_u$ ,  $J_v$ ,  $J_p$  — главные осевые и полярный моменты инерции;  $R$  — радиус диска, на котором закреплена лопатка;  $\omega_0$  — угловая скорость вращения диска;  $\omega$  — частота колебаний лопатки;  $\varphi$  — амплитуда угла закручивания при крутильных колебаниях;  $x$ ,  $y$  — амплитудные отклонения центра изгиба;  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  — амплитудные отклонения центра тяжести от исходного состояния в направлениях  $X$  и  $Y$  соответственно.

Если колебания малые (т. е.  $\varphi$  мало), то зависимости между  $x$ ,  $y$  и  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  выразятся равенствами

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i + \varphi_i b_i \sin \beta_i; \\ \bar{y}_i &= y_i - \varphi_i b_i \cos \beta_i. \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

Закрутка в любом сечении

$$\psi_{n+\varepsilon} = \psi_n + k_n z.$$

При этом  $z$  меняется в пределах

$$0 \leq z \leq Z_{n+1} - Z_n,$$

когда

$$0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Полагая колебания лопатки гармоническими, можно исключить время из уравнения колебаний и рассматривать амплитудные значения сил, моментов и перемещений.

Центробежные и инерционные силы приложены в центре тяжести сечения, а момент этих сил берется относительно оси, проходящей через центр изгиба.

Центробежные силы, действующие на  $i$ -ю массу (рис. 10.15),

$$F_{zi} = F_i = \omega_0^2 m_i (Z_i + R);$$

и

$$F_{yi} = F_i \frac{\bar{y}_i}{Z_i + R} = \omega_0^2 m_i \bar{y}_i.$$

В корневом сечении действует сила, представляющая собой сумму всех центробежных сил, приложенных к лопатке:

$$F_0 = \omega_0^2 \sum_i^N m_i (Z_i + R), \quad (10.24)$$

в любом другом сечении действует продольная сила

$$F_n = F_0 - \omega_0^2 \sum_i^n m_i (Z_i + R).$$

Моменты внешних сил, действующие на лопатку в сечении  $n + \varepsilon$

$$M_{x, n+\varepsilon} = M_{x0} + P_{y0} (Z_n + z) + (\omega_0^2 + \omega^2) \sum_i^n m_i \bar{y}_i (Z_n + z - Z_i) +$$

$$+ F_0 y_{n+\varepsilon} - \omega_0^2 \sum_i^n m_i (Z_i + R) (y_{n+\varepsilon} - \bar{y}_i) + \sum_i^n M_{xi}^c;$$

$$M_{y, n+\varepsilon} = M_{y0} + P_{x0} (Z_n + z) + \omega^2 \sum_i^n m_i \bar{x}_i (Z_n + z - Z_i) +$$

$$+ F_0 x_{n+\varepsilon} - \omega_0^2 \sum_i^n m_i (Z_i + R) (x_{n+\varepsilon} - \bar{x}_i) + \sum_i^n M_{yi}^c;$$

$$M_{\kappa\rho, n+\varepsilon} = M_{\kappa\rho 0} - \omega^2 \times$$

$$\times \left[ \sum_i^n \rho J_{\rho i} \Phi - \sum_i^n m_i \bar{y}_i b_i \cos \beta_i + \sum_i^n m_i \bar{x}_i b_i \sin \beta_i \right] +$$

$$+ \omega_0^2 \sum_i^n m_i \bar{y}_i b_i \cos \beta_i + \sum_i^n M_{\kappa\rho i}, \quad (10.25)$$

где  $M_{xi}^c$ ,  $M_{yi}^c$ ,  $M_{kpi}^c$  — воздействие упругой связи (бандажа или проволоки).

Соотношения между перемещениями  $x$ ,  $y$  и  $u$ ,  $v$  (см. рис. 10.1)

$$\left. \begin{aligned} u &= x \cos \psi_{n+\epsilon} - y \sin \psi_{n+\epsilon}; \\ v &= x \sin \psi_{n+\epsilon} + y \cos \psi_{n+\epsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

Продифференцировав равенства (10.26) дважды по  $z$ , получим

$$\left. \begin{aligned} u'' + 2k_n v' - k_n^2 u &= x'' \cos \psi_{n+\epsilon} - y'' \sin \psi_{n+\epsilon}; \\ v'' - 2k_n u' - k_n^2 v &= x'' \sin \psi_{n+\epsilon} + y'' \cos \psi_{n+\epsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (10.27)$$

Для пространственно изогнутого стержня справедливы равенства

$$\left. \begin{aligned} EJ_{yn} x'' + EJ_{xy, n} y'' &= M_{y, n+\epsilon}; \\ EJ_{xn} y'' + EJ_{xy, n} x'' &= M_{x, n+\epsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (10.28)$$

Исключив  $x''$  и  $y''$  из равенства (10.27) при помощи формулы (10.28) и выразив  $J_{xn}$ ,  $J_{yn}$ ,  $J_{xy, n}$  через  $J_{un}$ ,  $J_{vn}$ , получим два уравнения

$$\left. \begin{aligned} u'' + 2k_n v' - k_n^2 u &= \\ &= \frac{1}{EJ_{vn}} [M_{y, n+\epsilon} \cos \psi_{n+\epsilon} - M_{x, n+\epsilon} \sin \psi_{n+\epsilon}]; \\ v'' - 2k_n u' - k_n^2 v &= \\ &= \frac{1}{EJ_{un}} [M_{x, n+\epsilon} \cos \psi_{n+\epsilon} + M_{y, n+\epsilon} \sin \psi_{n+\epsilon}]. \end{aligned} \right\} \quad (10.29)$$

Подставим значение моментов из равенства (10.25) и, воспользовавшись формулами (10.23) и выражениями (10.17), (10.19), (10.21) для упругого воздействия проволоки (бандажа), после несложных преобразований получим уравнения колебаний в виде

$$\left. \begin{aligned} u'' + 2k_n v' - \left( k_n^2 + \frac{F_n}{EJ_{vn}} \right) u &= \\ &= \frac{1}{EJ_{vn}} [(P_{xn} z + \tilde{M}_{yn}) \cos \psi_{n+\epsilon} - (P_{yn} z + \tilde{M}_{xn}) \sin \psi_{n+\epsilon}]; \\ v'' - 2k_n u' - \left( k_n^2 + \frac{F_n}{EJ_{un}} \right) v &= \\ &= \frac{1}{EJ_{un}} [(P_{yn} z + \tilde{M}_{xn}) \cos \psi_{n+\epsilon} + (P_{xn} z + \tilde{M}_{yn}) \sin \psi_{n+\epsilon}]. \end{aligned} \right\} \quad (10.30)$$

К этим уравнениям необходимо добавить уравнение для крутильных колебаний на участке между массами  $m_n$  и  $m_{n+1}$ :

$$GJ_{pn} \frac{d\varphi}{dz} = M_{kp, n}. \quad (10.31)$$



Здесь  $P_{xn}$ ,  $P_{yn}$ ,  $\tilde{M}_{xn}$ ,  $\tilde{M}_{yn}$ ,  $M_{крn}$  — постоянные для данного участка и вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned}
 P_{yn} &= P_{y0} + (\omega_0^2 + \omega^2) \left[ \sum_i^n m_i y_i - \sum_i^n m_i \varphi_i b_i \cos \beta_i \right]; \\
 P_{xn} &= P_{x0} + \omega^2 \left[ \sum_i^n m_i x_i + \sum_i^n m_i \varphi_i b_i \sin \beta_i \right]; \\
 \tilde{M}_{xn} &= M_{x0} + P_{y0} Z_n + \\
 &+ \omega^2 \sum_i^{n-1} (Z_n - Z_i) (m_i y_i - m_i \varphi_i b_i \cos \beta_i) + \\
 &+ \omega_0^2 (Z_n + R) \sum_i^n (m_i y_i - m_i \varphi_i b_i \cos \beta_i) + \\
 &+ \sum_i^n K_{xi} \left( y_i' - \frac{y_i}{Z_i + R} \right); \\
 \tilde{M}_{yn} &= M_{y0} + P_{x0} Z_n + \\
 &+ \omega^2 \sum_i^{n-1} (Z_n - Z_i) (m_i x_i + m_i \varphi_i b_i \sin \beta_i) + \\
 &+ \omega_0^2 \sum_i^n (Z_i + R) (m_i x_i + m_i \varphi_i b_i \sin \beta_i) + \sum_i^n K_{yi} x_i'; \\
 M_{кр. n} &= M_{кр0} - \omega^2 \times \\
 &\times \left[ \sum_i^n \rho J_{\rho i} \varphi_i - \sum_i^n m_i y_i b_i \cos \beta_i + \sum_i^n m_i x_i b_i \sin \beta_i \right] + \\
 &+ \omega_0^2 \sum_i^n m_i y_i b_i \cos \beta_i + \sum_i^n K_{кр i} \varphi_i
 \end{aligned} \right\} \quad (10.32)$$

(членами, содержащими множитель  $\varphi_i b_i^2$ , пренебрегаем, но при необходимости их нетрудно учесть).

Следует отметить, что при преобразовании уравнений (10.29) в (10.30) в левую часть были перенесены слагаемые моментов, содержащие  $y_{n+\varepsilon}$ ,  $x_{n+\varepsilon}$ . Поэтому действительные изгибающие моменты

$$\left. \begin{aligned}
 M_{xn} &= \tilde{M}_{xn} + F_n y_n; \\
 M_{yn} &= \tilde{M}_{yn} + F_n x_n.
 \end{aligned} \right\} \quad (10.33)$$

Каждый раз начало координат помещается в новой точке, поэтому в  $n$ -м сечении будут иметь место условия сопряжения:

$$\begin{aligned} u_{n+\varepsilon}|_{z=0} &= u_n; \quad u'_{n+\varepsilon}|_{z=0} = u'_n; \\ v_{n+\varepsilon}|_{z=0} &= v_n; \quad v'_{n+\varepsilon}|_{z=0} = v'_n; \quad \varphi_{n+\varepsilon}|_{z=0} = \varphi_n. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Для корневого сечения лопатки условия заделки имеют вид

$$\begin{aligned} u_0 &= e_u P_{u0}; \quad u'_0 = \lambda_u M_{u0}; \\ v_0 &= e_v P_{v0}; \quad v'_0 = \lambda_v M_{v0}; \quad \varphi_0 = e_\varphi M_{\varphi p0}, \end{aligned} \quad (10.35)$$

где  $e_u, e_v, e_\varphi, \lambda_u, \lambda_v$  — упругие постоянные, учитывающие податливость заделки лопатки в диск, определяемые экспериментально. Если лопатка считается заделанной абсолютно жестко, то упругие постоянные заделки следует положить равными нулю.

Вследствие того, что лопатка была заменена системой сосредоточенных масс, соединенных невесомыми участками постоянной жесткости, система трех уравнений с переменными коэффициентами распалась на две независимые системы (10.30) и (10.31), которые могут быть проинтегрированы.

Решение системы (10.30) может быть представлено как сумма решения системы без правой части при учете граничных условий (10.34) и частного решения системы с правой частью при нулевых начальных условиях.

Характеристическое уравнение системы (10.30) имеет вид

$$\begin{vmatrix} p_n^2 - \left( k_n^2 + \frac{F_n}{EJ_{vn}} \right) & 2k_n p_n \\ -2k_n p_n & p_n^2 - \left( k_n^2 + \frac{F_n}{EJ_{un}} \right) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$p_n^4 - p_n^2 2\alpha_n + \beta_n^2 = 0, \quad (10.36)$$

если

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{2} \left( \frac{F_n}{EJ_{vn}} + \frac{F_n}{EJ_{un}} - 2k_n^2 \right); \\ \beta_n^2 &= \left( k_n^2 + \frac{F_n}{EJ_{vn}} \right) \left( k_n^2 + \frac{F_n}{EJ_{un}} \right). \end{aligned} \quad (10.37)$$

Окончательные решения системы (10.30)  $u_{n+\varepsilon}$  и  $v_{n+\varepsilon}$  являются функциями перемещений на конце предыдущего участка  $u_n, v_n, u'_n, v'_n, \varphi_n$ , а также  $\alpha_n, \beta_n, k_n, J_{un}, J_{vn}, P_{yn}, P_{xn}, \tilde{M}_{xn}, \tilde{M}_{yn}, M_{кр. n}$ . Общих выражений  $u_{n+\varepsilon}$  и  $v_{n+\varepsilon}$  не приводим ввиду их громоздкости, отсылая желающих к работам [14, 105]. К перемещениям  $u_{n+\varepsilon}$ ,

$v_{n+\varepsilon}$  необходимо добавить решение уравнения (10.31) для крутильных колебаний:

$$\varphi_{n+\varepsilon} = \varphi_n + \frac{M_{кр. n}}{GJ_{рп}} z.$$

Таким образом, зная линейные и угловые перемещения  $x_n, y_n, \varphi_n, x'_n, y'_n$  в  $n$ -м сечении, при помощи выражений (10.32) для сил и моментов и полученных решений уравнений (10.30) и (10.31) можно определить перемещения в  $(n+1)$ -м сечении. Чтобы перейти к перемещениям в координатах  $X, Y$ , воспользуемся формулами

$$\left. \begin{aligned} x_{n+\varepsilon} &= u_{n+\varepsilon} \cos \psi_{n+\varepsilon} + v_{n+\varepsilon} \sin \psi_{n+\varepsilon}; \\ y_{n+\varepsilon} &= v_{n+\varepsilon} \cos \psi_{n+\varepsilon} - u_{n+\varepsilon} \sin \psi_{n+\varepsilon}; \\ x'_{n+\varepsilon} &= u'_{n+\varepsilon} \cos \psi_{n+\varepsilon} + v'_{n+\varepsilon} \sin \psi_{n+\varepsilon} + k_n y_{n+\varepsilon}; \\ y'_{n+\varepsilon} &= v'_{n+\varepsilon} \cos \psi_{n+\varepsilon} - u'_{n+\varepsilon} \sin \psi_{n+\varepsilon} - k_n x_{n+\varepsilon}, \end{aligned} \right\} (10.38)$$

где  $u'_{n+\varepsilon}, v'_{n+\varepsilon}$  можно найти, продифференцировав соответствующие выражения для  $u_{n+\varepsilon. 1}, u_{n+\varepsilon. 2}, v_{n+\varepsilon. 1}, v_{n+\varepsilon. 2}$ .

Расчет спектра собственных частот и форм колебаний ведется в последовательности, применяемой в методах начальных параметров. В качестве начальных параметров берутся силы и моменты в корневом сечении лопатки. Частоте  $\omega$  дается какое-либо значение, после чего проводятся пять просчетов, каждый из которых ведется при значениях начальных параметров, представленных в табл. 10.1.

Каждый подсчет ведется по участкам от корневого сечения до свободного конца лопатки:

1. Определяем  $P_{yn}, P_{xn}, \tilde{M}_{xn}, \tilde{M}_{кр. n}$  по формулам (10.32).
2. Находим перемещения в  $(n+1)$ -м сечении, пользуясь решениями уравнений (10.30) и (10.31).
3. Переходим к перемещениям в координатах  $X, Y$ , после чего повторяем цикл для следующего участка. В результате имеем силы, моменты и перемещения, полученные при условиях, указанных в табл. 10.1;  $M_{xn}, M_{yn}$  определяются по формулам (10.33).

Таблица 10.1

Матрица начальных параметров

Номер подсчета	$P_{y0}$	$M_{x0}$	$P_{x0}$	$M_{y0}$	$M_{кр0}$
I	1	0	0	0	0
II	0	1	0	0	0
III	0	0	1	0	0
IV	0	0	0	1	0
V	0	0	0	0	1

Все формулы линейны относительно начальных параметров, поэтому можно записать:

$$\left. \begin{aligned}
 P_{y_n} &= [P_{y_n}]_I P_{y_0} + [P_{y_n}]_{II} M_{x_0} + [P_{y_n}]_{III} P_{x_0} + \\
 &\quad + [P_{y_n}]_{IV} M_{y_0} + [P_{y_n}]_V M_{\kappa\rho_0}; \\
 M_{x_n} &= [M_{x_n}]_I P_{y_0} + [M_{x_n}]_{II} M_{x_0} + [M_{x_n}]_{III} P_{x_0} + \\
 &\quad + [M_{x_n}]_{IV} M_{y_0} + [M_{x_n}]_V M_{\kappa\rho_0}; \\
 P_{x_n} &= [P_{x_n}]_I P_{y_0} + [P_{x_n}]_{II} M_{x_0} + [P_{x_n}]_{III} P_{x_0} + \\
 &\quad + [P_{x_n}]_{IV} M_{y_0} + [P_{x_n}]_V M_{\kappa\rho_0}; \\
 M_{y_n} &= [M_{y_n}]_I P_{y_0} + [M_{y_n}]_{II} M_{x_0} + [M_{y_n}]_{III} P_{x_0} + \\
 &\quad + [M_{y_n}]_{IV} M_{y_0} + [M_{y_n}]_V M_{\kappa\rho_0}; \\
 M_{\kappa\rho_n} &= [M_{\kappa\rho_n}]_I P_{y_0} + [M_{\kappa\rho_n}]_{II} M_{x_0} + [M_{\kappa\rho_n}]_{III} P_{x_0} + \\
 &\quad + [M_{\kappa\rho_n}]_{IV} M_{y_0} + [M_{\kappa\rho_n}]_V M_{\kappa\rho_0}.
 \end{aligned} \right\} (10.39)$$

Силы и моменты на свободном конце лопатки равны нулю поэтому определитель системы (10.39) в этом случае

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} [P_{y_N}]_I & [P_{y_N}]_{II} & [P_{y_N}]_{III} & [P_{y_N}]_{IV} & [P_{y_N}]_V \\ [M_{x_N}]_I & [M_{x_N}]_{II} & [M_{x_N}]_{III} & [M_{x_N}]_{IV} & [M_{x_N}]_V \\ [P_{x_N}]_I & [P_{x_N}]_{II} & [P_{x_N}]_{III} & [P_{x_N}]_{IV} & [P_{x_N}]_V \\ [M_{y_N}]_I & [M_{y_N}]_{II} & [M_{y_N}]_{III} & [M_{y_N}]_{IV} & [M_{y_N}]_V \\ [M_{\kappa\rho_N}]_I & [M_{\kappa\rho_N}]_{II} & [M_{\kappa\rho_N}]_{III} & [M_{\kappa\rho_N}]_{IV} & [M_{\kappa\rho_N}]_V \end{vmatrix} = 0. \quad (10.40)$$

Значения  $\omega$ , при которых определитель (10.40) обращается в нуль, и будут искомыми собственными частотами лопатки  $\omega_c$ . На свободном конце при  $\omega = \omega_c$  имеем однородную систему, из которой можно определить начальные параметры, положив один из них равным какому-нибудь значению (например, единице) и отбросив одно уравнение. После этого становится возможным подсчитать собственные формы колебаний:

$$\left. \begin{aligned}
 x_n &= [x_n]_I P_{y_0} + [x_n]_{II} M_{x_0} + [x_n]_{III} P_{x_0} + \\
 &\quad + [x_n]_{IV} M_{y_0} + [x_n]_V M_{\kappa\rho_n}; \\
 y_n &= [y_n]_I P_{y_0} + [y_n]_{II} M_{x_0} + [y_n]_{III} P_{x_0} + \\
 &\quad + [y_n]_{IV} M_{y_0} + [y_n]_V M_{\kappa\rho_n}; \\
 \varphi_n &= [\varphi_n]_I P_{y_0} + [\varphi_n]_{II} M_{x_0} + [\varphi_n]_{III} P_{x_0} + \\
 &\quad + [\varphi_n]_{IV} M_{y_0} + [\varphi_n]_V M_{\kappa\rho_n}.
 \end{aligned} \right\} (10.41)$$

Равенства (10.39) можно использовать, чтобы определить распределение моментов и перерезывающих сил при собственных колебаниях лопатки.

Данный момент запрограммирован для электронной машины. Программа позволяет исследовать влияние различных факторов на частоты совместных изгибно-крутильных колебаний лопаток турбомашин.

В настоящее время метод начальных параметров при условии замены континуальной системы дискретной получил широкое распространение при расчетах на колебания лопаток и роторов турбомашин [7]. Однако при значительном усложнении расчетной схемы объекта за счет учета многих факторов и, особенно, для не консервативных задач использование дискретных методов встречает значительные трудности.

В этих условиях успешно могут быть применены вариационные методы расчета в форме  $(i, j)$ , удобной для рассматриваемой задачи.

### Энергетический метод расчета на колебания турбинных и компрессорных лопаток

Из множества возможных движений системы действительное движение, согласно принципу Остроградского—Гамильтона, доставляет минимум функционалу

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (T - U - A_{\omega_0}) dt. \quad (10.42)$$

Такое движение описывается полученными выше уравнениями. Однако удобнее получить решение приближенно вариационными методами.

При расчете закрученных стержней для улучшения сходимости вариационного энергетического метода следует аппроксимировать не перемещения, а моменты и усилия, в связи с чем удобно выразить потенциальную энергию стержня через усилия и моменты, действующие в направлении главных осей инерции в каждом поперечном сечении.

Таковыми осями в данном случае являются оси  $\xi\eta z$  (рис. 3.7).

Выражение потенциальной энергии (3.33) после некоторых упрощений может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} \text{Ф. 1.0} \\ \text{Ф. 1.0} \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \frac{M_{\xi}^2}{EJ_{\xi}} + \frac{M_{\eta}^2}{EJ_{\eta}} + \frac{M_{\theta}^2}{GJ_d} - \right. \\ \left. - 2\tau_0 \frac{M_{\theta}}{GJ_d} \left( \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}} J_{\xi r} + \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}} J_{\eta r} \right) + \frac{P_{\xi}^2}{GFk_{\xi}} + \frac{P_{\eta}^2}{GFk_{\eta}} \right] dz. \quad (10.43) \end{aligned}$$

Здесь введены некоторые новые обозначения:

$J_{\xi}, J_{\eta}$  — главные моменты инерции поперечного сечения;  
 $k_{\xi}, k_{\eta}$  — коэффициенты формы поперечного сечения при сдвиге в направлениях  $\xi$  и  $\eta$ ;

$GJ_d$  — крутильная жесткость закрученного стержня;

$$\begin{aligned} GJ_d &= GJ_{d_0} + \tau_0^2 EJ_r; \\ J_{\xi r} &= J_{xr} \cos \alpha + J_{yr} \sin \alpha; \\ J_{\eta r} &= J_{yr} \cos \alpha - J_{xr} \sin \alpha; \end{aligned}$$

$\alpha$  — угол закрутки данного сечения;  $\tau_0 = \frac{d\alpha}{dz}$  — закрутка стержня.

Моменты и усилия равны

$$\left. \begin{aligned} M_{\xi} &= EJ_{\xi} \kappa_{\xi}; & P_{\xi} &= GFk_{\xi} \gamma_{\xi}; \\ M_{\eta} &= EJ_{\eta} \kappa_{\eta}; & P_{\eta} &= GFk_{\eta} \gamma_{\eta}; \\ M_{\theta} &= FId \frac{\partial \theta}{\partial z}; \end{aligned} \right\} \quad (10.44)$$

где  $\kappa_{\xi}$ ,  $\kappa_{\eta}$  — компоненты кривизны вследствие изгиба в системе координат  $\xi\eta z$ , а  $\gamma_{\xi}$ ,  $\gamma_{\eta}$  — сдвиги в системе  $\xi\eta z$ . Эти величины связаны с соответствующими величинами в системе  $xyz$  соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} &= \kappa_{\eta} \cos \alpha + \kappa_{\xi} \sin \alpha; \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} &= \kappa_{\xi} \cos \alpha + \kappa_{\eta} \sin \alpha; \\ \frac{\partial u_2}{\partial z} &= \gamma_{\xi} \cos \alpha + \gamma_{\eta} \sin \alpha; \\ \frac{\partial v_2}{\partial z} &= \gamma_{\eta} \cos \alpha - \gamma_{\xi} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (10.45)$$

Чтобы учесть влияние упругих связей, следует добавить к потенциальной энергии работу упругих моментов, вызываемых связями:

$$A_c = \frac{1}{2} \sum_i \left[ K_{xi} \left( v'_i - \frac{v_1 + v_2}{R + z} \right)_i^2 + K_{yi} (u'_i)_i^2 + K_{\kappa p i} \theta_i^2 \right], \quad (10.46)$$

где  $K_{xi}$ ,  $K_{yi}$ ,  $K_{\kappa p i}$  — коэффициенты жесткости связей, определяемые по формулам (10.18), (10.20), (10.22).

Аппроксимируемые величины задаются в виде рядов

$$\left. \begin{aligned} M_{\xi} &= \sum_{j=1}^n M_{\xi j}(z) f_j(t); \\ M_{\eta} &= \sum_{j=1}^m M_{\eta j}(z) f_{n+j}(t); \end{aligned} \right\} \quad (10.47)$$

$$\left. \begin{aligned}
 P_{\eta} &= \sum_{j=1}^p P_{\eta j}(z) f_{n+m+j}(t); \quad n+m+p+q+s=N; \\
 P_{\xi} &= \sum_{j=1}^q P_{\xi j}(z) f_{n+m+p+j}(t); \\
 M_{\theta} &= \sum_{j=1}^s M_{\theta j}(z) f_{n+m+p+q+j}(t),
 \end{aligned} \right\} (10.47)$$

где  $f_k(t)$  — варьируемые функции, а  $M_{\xi j}(z)$ ,  $M_{\eta j}(z)$ ;  $P_{\eta j}(z)$ ,  $P_{\xi j}(z)$ ;

$M_{\theta j}(z)$  — известные базисные функции, удовлетворяющие необходимым условиям (они должны составлять полную систему функций, быть линейно независимыми и удовлетворять граничным условиям).

В программе \* для ЭЦВМ М-20 предусмотрена возможность расчетов с различными базисными функциями, задаваемыми как аналитически, так и численно. Расчеты показывают, что хорошую сходимость обеспечивают полиномы, удовлетворяющие граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 M_{\xi j} \\
 M_{\eta j}
 \end{aligned} \right\} &= \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 \left(\frac{z}{l}\right)^{j-1}; \\
 \left. \begin{aligned}
 P_{\xi j} \\
 P_{\eta j}
 \end{aligned} \right\} &= \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(\frac{z}{l}\right)^{j-1}; \\
 M_{\theta j} &= \left[1 - \left(\frac{z}{l}\right)^2\right] \left(\frac{z}{l}\right)^{j-1}.
 \end{aligned} \right\} (10.48)$$

Перемещения определяются интегрированием на основании зависимости (10.44), (10.45) и (10.46):

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= \sum_{j=1}^n u_{11j} f_j + \sum_{j=1}^m u_{12j} f_{n+j}; \\
 v_1 &= \sum_{j=1}^n v_{11j} f_j + \sum_{j=1}^m v_{12j} f_{n+j}; \\
 u_2 &= \sum_{j=1}^p u_{21j} f_{n+m+j} + \sum_{j=1}^q u_{22j} f_{n+m+p+j}; \\
 v_2 &= \sum_{j=1}^p v_{21j} f_{n+m+j} + \sum_{j=1}^q v_{22j} f_{n+m+p+j}; \\
 \theta &= \sum_{j=1}^s \theta_j f_{n+m+p+q+j},
 \end{aligned} \right\} (10.49)$$

\* Программа составлена в Харьковском филиале Института механики АН УССР инж. П. П. Гонтаровским.

здесь

$$\begin{aligned}
 u_{11j} &= \int_0^z dz \int_0^z \frac{M_{\xi j}}{EJ_{\xi}} \sin \alpha dz; & v_{11j} &= \int_0^z dz \int_0^z \frac{M_{\xi j}}{EJ_{\xi}} \cos \alpha dz; \\
 u_{12j} &= \int_0^z dz \int_0^z \frac{M_{\eta j}}{EJ_{\eta}} \cos \alpha dz; & v_{12j} &= - \int_0^z dz \int_0^z \frac{M_{\eta j}}{EJ_{\eta}} \sin \alpha dz; \\
 u_{21j} &= \int_0^z dz \int_0^z \frac{P_{\eta j}}{GF_{k\eta}} \sin \alpha dz; & v_{21j} &= \int_0^z dz \int_0^z \frac{P_{\eta j}}{GF_{k\eta}} \cos \alpha dz; \\
 u_{22j} &= \int_0^z dz \int_0^z \frac{P_{\xi j}}{GF_{k\xi}} \cos \alpha dz; & v_{22j} &= - \int_0^z dz \int_0^z \frac{P_{\eta j}}{GF_{k\eta}} \sin \alpha dz; \\
 \theta_j &= \int_0^z \frac{M_{\theta j}}{GJ_d} dz.
 \end{aligned} \tag{10.50}$$

Следует отметить, что перемещения, согласно формулам (10.49) и (10.50), удовлетворяют условиям заделки при  $z = 0$  независимо от выбора базисных фракций.

Подставим значения усилий и моментов (10.47) в выражение потенциальной энергии (10.43), а значения перемещений (10.49) — в выражения кинетической энергии (3.55), работы центробежных сил (10.7) и работы упругих связей (10.46). В выражении (3.55) пренебрегаем членами, содержащими  $\omega$ . Затем подставляем выражения для  $u = P_0 + A_c, A_{\omega 0}$  и  $T$  в функционал (10.42) и, варьируя по неизвестным функциям  $f_k(t)$ , приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^N \left( A_{jk} \frac{d^2 f_j}{dt^2} + C_{jk} f_j \right) = 0; \tag{10.51}$$

$$k = 1, 2, \dots, N.$$

Матрицы  $A$  и  $C$ , элементами которых являются коэффициенты  $A_{jk}$  и  $C_{jk}$ , будут вещественными и симметричными.

Предполагая свободные колебания лопатки гармоническими, приходим к задаче определения вещественных собственных чисел и векторов вещественной матрицы  $AC^{-1}$ . Для решения этой задачи используется итерационный степенной метод.

В ХФИМ АН УССР вариационный метод запрограммирован для ЭЦВМ М-20. В результате определяются собственные частоты и формы колебаний лопаток, относительные моменты, усилия и напряжения. Для определения напряжений в заданной точке



лопатки можно воспользоваться выражениями (3.31), (3.32) и (3.30) совместно с формулами (10.44) и (10.45).

В качестве иллюстрации в табл. 10.2 приведено сравнение экспериментальных собственных частот лопатки мощного осевого компрессора с частотами, рассчитанными энергетическим методом с учетом и без учета различных факторов: частоты изгибно-крутильных колебаний по теории стержней Кирхгофа—Клебша ( $J_{\xi r} = J_{\eta r} = 0$ ), частоты с учетом упругой связанности изгибных и крутильных колебаний ( $J_{\xi r} \neq 0$ ,  $J_{\eta r} \neq 0$ ) и частоты колебаний с дополнительным учетом сдвига.

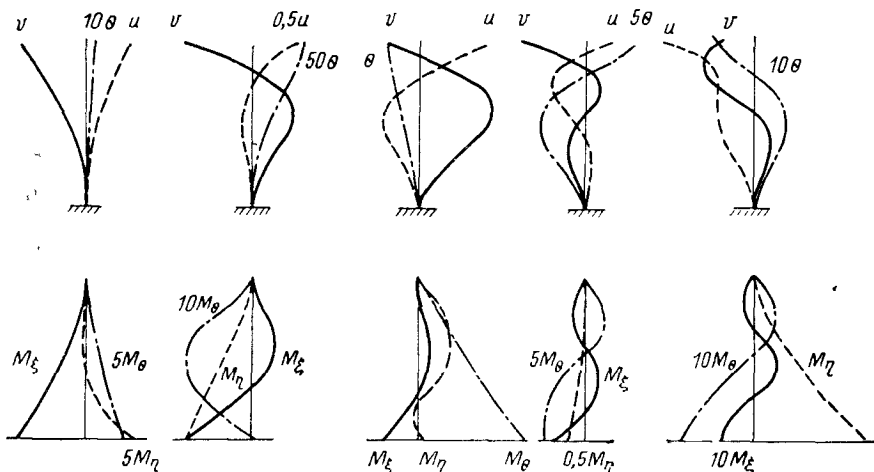


Рис. 10.16

На рис. 10.16 представлены первые пять форм изгибно-крутильных колебаний этой лопатки и распределение изгибающих и крутящих моментов по длине лопатки.

Таблица 10.2

Частоты изгибно-крутильных колебаний лопатки компрессора в *гц*

Изгибно-крутильные колебания	Тон колебаний								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Данные эксперимента	408—501	1600—1750	2010—2240	3180—3350	—	4150—4230	6250	7300—7900	8200—8600
По Кирхгоф—Клебшу	456,5	1659	1809	3616	3866	4387	5726	7364	8327
С учетом упругой связанности	454	1631	2124	3777	4245	4585	6639	7904	9432
С учетом сдвига	453	1610	1987	3636	3997	4409	6605	7836	9423

Вариационные методы позволяют рассмотреть колебания и неконсервативных систем. На основании обобщенного принципа Остроградского—Гамильтона, учитывая работу кориолисовых сил и внешних сил, зависящих от перемещений и их скоростей, можно записать  $|i|$ :

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta T \left( \frac{df_k}{dt}, \frac{df_l}{dt} \right) - \delta U(f_k f_l) - \delta A_{\omega_0}(f_k f_l) - \delta A_k \left( \frac{df_k}{dt} f_l \right) - \sum_n Q_n \left( f_k, \frac{df_k}{dt} \right) \delta q_n(f_l) \right] dt = 0, \quad (10.52)$$

где  $Q_n$  — обобщенные неконсервативные силы, а  $q_n$  — соответствующие перемещения.

Возьмем в качестве сил  $Q_n$  аэродинамические силы  $L_a$  и момент  $M_a$ , возникающие при колебаниях профиля в потоке (3.57), а также силы демпфирования в материале, найденные согласно гипотезе вязкого трения (6.2).

После варьирования по неизвестным функциям  $f_k(t)$  и интегрирования по частям приходим к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^N \left( A_{jk} \frac{d^2 f_j}{dt^2} + B_{jk} \frac{df_j}{dt} + G_{jk} f_j \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (10.53)$$

С помощью замены переменных

$$\begin{aligned} f_j &= \psi_j, \\ \frac{df_j}{dt} &= \psi_{N+j}, \end{aligned}$$

система (10.53) может быть приведена к виду

$$\sum_{j=1}^{2N} \left( D_{kj} \frac{d\psi_j}{dt} + \delta_{kj} \psi_j \right) = 0; \quad k = 1, 2, \dots, 2N, \quad (10.54)$$

где  $\delta_{kj}$  — символы Кронекера:

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = j; \\ 0 & \text{при } k \neq j. \end{cases}$$

Матрица  $D$  имеет вид

$$D = \left\| \begin{array}{cc} -BC^{-1} & -AC^{-1} \\ E & 0 \end{array} \right\|.$$

Отыскивая решение системы (10.54) в виде  $\psi_j = R_j e^{\lambda t}$ , приходим к задаче определения комплексных собственных чисел  $\lambda = \varepsilon + i\omega$  матрицы  $D$ , которая также решается итерационным методом.

При этом  $\omega$  представляет собой частоту колебаний стержня в потоке, а  $\varepsilon$  определяет затухание в системе. В момент возникновения флаттера  $\varepsilon = 0$ . При расчетах изменяют скорость потока, входящую в выражения (3.57) для  $L_a$  и  $M_a$ , до тех пор, пока  $\varepsilon$  не изменит свой знак, а затем уточняют значение критической скорости флаттера с помощью линейной интерполяции.

При исследовании флаттера вращающихся лопаток и воздушных винтов было установлено, что кориолисовы силы вызывают дополнительный сдвиг фаз между изгибными и крутильными колебаниями, что ведет к изменению мгновенного угла атаки профиля и, следовательно, изменению аэродинамических сил  $L_a$  и  $M_a$ . В результате происходит изменение критической скорости флаттера. На рис. 10.17 показано изменение критической скорости флаттера при изменении угловой скорости вращения лопатки  $\omega_0$  с учетом и без учета кориолисовых сил. Принято, что  $\frac{\partial C_y}{\partial \alpha} = 2,85$ ;  $\frac{\partial C_m}{\partial C_y} = 0,25$ ;  $\delta = 0,0025$ .

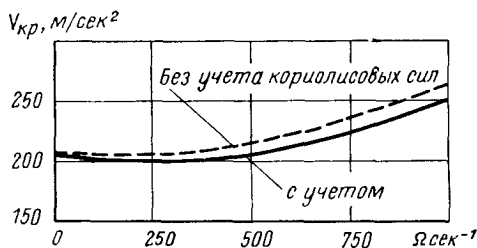


Рис. 10.17

## КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК С УЧЕТОМ ЗАТУХАНИЯ

### Уравнение поперечных колебаний

В настоящее время нет достаточно данных для нахождения амплитуд вынужденных колебаний турбинных лопаток; так как нет достоверных данных о возмущающих силах, действующих на лопатки, о величине конструкционного демпфирования от проволочек и бандажей, а также в месте заделки.

Вынужденные поперечные колебания турбинных лопаток с учетом внутреннего затухания в материале, с помощью методов нелинейной механики подробно изучено Г. С. Писаренко [75].

Приближенное значение резонансных амплитуд колебаний стержней или лопаток с учетом затухания в материале, зависящем от внутреннего сопротивления, может быть найдено с помощью обычных методов нелинейной механики (стр. 483).

В настоящем параграфе дается приближенный метод нахождения резонансных амплитуд колебаний стержней с учетом затухания в материале, зависящего от внутреннего сопротивления [100].

Кратко остановимся на этом методе, который дает возможность найти с достаточной для практики точностью резонансные амплитуды колебаний вращающихся лопаток постоянного и переменного сечений, связанных бандажом или проволокой.

Согласно гл. 6 берем зависимость между напряжениями и деформациями в следующем виде:

$$\sigma = E \left[ \varepsilon + \frac{1}{\omega} (\mu_0 + \mu_1 |\varepsilon_1| + \mu_2 \varepsilon_1^2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right]. \quad (10.55)$$

где  $\omega$  — частота колебаний;

$\varepsilon$  — относительное удлинение волокна, находящегося на расстоянии  $\eta$  от нейтральной оси:

$$\varepsilon = \eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2};$$

$\varepsilon_1$  — амплитуда колебаний волокна.

Так как мы имеем дело с бесконечным количеством степеней свободы, то

$$y(x, t) = \sum_i y_i(x, t) = \sum_i Y_i(x) S_i(t) = \sum_i A_i X_i(x) S_i(t). \quad (10.56)$$

Для  $\sigma$  получим выражение

$$\sigma = E \left[ \eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sum_i \frac{1}{\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right|} (\mu_0 + \mu'_1 |\varepsilon_1| + \mu'_2 \varepsilon_1^2) \eta \frac{\partial^2 y_i}{\partial t \partial x^2} \right],$$

где  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$  — частота колебаний для функции  $S_i(t)$ .

Изгибающий момент в данном сечении

$$M = \int \sigma b(\eta) \eta d\eta, \quad (10.57)$$

где  $b(\eta)$  — ширина сечения.

Выведем теперь дифференциальное уравнение поперечных колебаний лопатки длиной  $l$ , постоянного сечения, с концом которой связана сосредоточенная масса (масса шага бандаж). Лопатка закреплена в диске с радиусом  $R$  и вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  (см. рис. 10.1).

Здесь и в дальнейшем обозначим:

$X_1(x)$  — первая собственная функция;

$$\text{sign } X''(x) \begin{cases} = 1 & \text{для } X''(x) > 0, \\ = -1 & \text{для } X''(x) < 0; \end{cases}$$

$\omega_0$  — угловая скорость вращения диска;

$R$  — радиус диска;

$l$  — длина лопатки;

$l_0$  — расстояние между лопатками;

$$\kappa_1 = \mu_1 \frac{\int b\eta^3 d\eta}{J}, \quad \kappa_2 = \mu_2 \frac{\int b\eta^4 d\eta}{J};$$

$m_2$  — масса единицы длины бандажа;

$F(x, t)$  — функция, характеризующая распределение нагрузки;

$\mu_0, \mu_1, \mu_2$  — коэффициенты, характеризующие затухание;

$A_1$  — амплитуда вынужденных колебаний;

$p$  — частота вынужденных колебаний;

$\beta q$  — интенсивность внешней равномерно распределенной нагрузки. С концом вращающегося стержня связана масса  $m$ .

Мы предполагаем, что

$$\sigma = E \left( \varepsilon + \sum_i \frac{\chi}{\rho_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} \right), \quad (10.55')$$

где  $\chi$  берем в виде функции амплитуды колебаний

$$\chi = \mu_0 + \mu_1 |\varepsilon_i| + \mu_2 \varepsilon_i^2. \quad (10.58)$$

Такая зависимость (10.5) соответствует эллиптической петле гистерезиса. Так как

$$\varepsilon_i = \eta \frac{\partial^2 Y_i}{\partial x^2}; \quad Y_i = A_i X_i(x),$$

то изгибающий момент в сечении  $x$  будет  $M = \int b\sigma\eta d\eta$ , т. е.

$$M = EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sum_i \frac{EJ}{\rho_i} \left[ \mu_0 + \mu_1 A_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \operatorname{sign} X_i'' + \mu_2 A_i^2 \left( \frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \right)^2 \right] \times \\ \times \frac{\partial^3 y_i}{\partial t \partial x^2}, \quad (10.59)$$

где

$$\mu_1 = \mu_1 c_1; \quad \mu_2 = \mu_2 c_2; \quad c_1 = \frac{\int b|\eta^3| d\eta}{J}; \quad c_2 = \frac{\int b\eta^4 d\eta}{J}. \quad (10.60)$$

Зная момент внутренних сил, можно записать уравнение вынужденных колебаний стержня в виде

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \sum_i \frac{1}{\rho_i} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \left[ \mu_0 + \mu_1 A_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \operatorname{sign} X_i'' + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_2 A_i^2 \left( \frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \right)^2 \right] \frac{\partial^3 y_i}{\partial t \partial x^2} \right\} + \rho F \omega_0^2 (R+x) \frac{\partial y}{\partial x} + \\ + \omega_0^2 \left[ m_2 t_0 (R+l)^2 + \frac{1}{2} \rho F (R+l)^2 - \frac{1}{2} \rho F (R+x)^2 \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \\ = F(x, t). \quad (10.61)$$

Решение этого уравнения приведено в книге [100].

### Свободные колебания стержня с учетом затухания, зависящего от удлинения

Для свободных колебаний консольного стержня можно использовать полученные выше результаты в предположении, что напряжение и деформация связаны зависимостью (10.6).

Перемещение стержня  $y(x, t) = \sum A_i X_i(x) S_i(t)$ .

Значение  $S_i(t)$  определяется из дифференциального уравнения

$$S_1'' + \omega^2 S_1 + \frac{EJ}{\omega} \cdot \frac{1}{\rho F} \cdot \frac{s^4}{l^4} \left\{ \mu_0 + 21,913c_1 \frac{\mu_1 A_1}{l^2} + \right. \\ \left. + 438,81c_2 \frac{\mu_2 A_1^2}{l^4} \right\} S_1' = 0; \quad (10.62)$$

здесь  $c_1 = \frac{\int b |\eta^3| d\eta}{J}$ ;  $c_2 = \frac{\int b \eta^4 d\eta}{J}$ .

Для прямоугольного сечения  $c_1 = \frac{3}{8} h$ ;  $c_2 = \frac{3}{20} h$ .

В уравнении (10.62)  $A_1$  — функции времени. Это уравнение можно использовать для определения коэффициентов затухания, если  $A_1(t)$  рассматривать как медленно меняющиеся функции времени, так как величина  $A_1$  заметно уменьшается лишь за много циклов.

Если сопоставить уравнение (10.62) с уравнением колебаний

$$S_1'' + \frac{EJ}{\omega \rho F} \cdot \frac{s^4}{l^4} \cdot \frac{\delta}{\pi} S_1' + \omega^2 S_1 = 0, \quad (10.63)$$

где  $\delta$  — декремент затухания, то можно для некоторого момента времени записать, что

$$\frac{\delta}{\pi} = \mu_0 + 8,217h \frac{\mu_1 A_1}{l^2} + 65,822h^2 \frac{\mu_2 A_1^2}{l^4}. \quad (10.64)$$

Из этой зависимости можно найти значения коэффициентов  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , если имеется осциллограмма, по которой можно получить для заданного падения амплитуд  $\delta$  и  $A_{co}$ . Устанавливая такую зависимость для ряда интервалов  $t$ , можно по обычным правилам обработки кривых найти значения  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  (10.64) из полученной системы уравнений с тремя неизвестными. В частности, можно выразить в уравнении (10.64)  $A_1$  через амплитуду относительной деформации крайнего волокна

$$\varepsilon_0 = \frac{h}{2} A_1 X''(0).$$

В этом случае имеем зависимость

$$\mu_0 + 0,2568 \cdot 10^{-6} \sigma_0 \mu_1 + 0,06427 \cdot 10^{-12} \sigma_0^2 \mu_2 = \frac{\delta}{\pi}, \quad (10.65)$$

где  $\sigma_0$  в  $\text{кг/см}^2$ ;  $E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ .

## Влияние заделки на частоту колебаний

Опыты показывают, что как бы ни была совершенна заделка, упругость ее позволяет заделанному концу стержня получать линейные и угловые смещения. Поэтому пренебрегать деформациями в месте заделки не следует. Влияние заделки особенно существенно, как показывают опыты, для сравнительно коротких стержней.

Для определения влияния заделки и силы зажатия на частоту колебаний проводились экспериментальные исследования, в частности, в Лаборатории проблем быстроходных машин и механизмов АН УССР\*.

Проведенные опыты показывают, что с увеличением зажатия плоских образцов частота сначала возрастает, затем при достижении определенной величины она остается постоянной, хотя не достигает расчетного значения, а для коротких стержней получается значительно ниже.

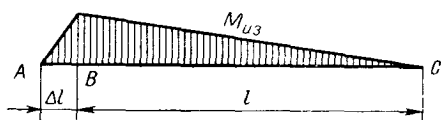


Рис. 10.18

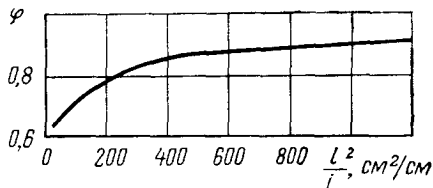


Рис. 10.19

Напряжения от изгиба распространяются на некоторую глубину от места заделки и обращаются в нуль на некотором расстоянии от начала заделки. Опыты показывают, что эта глубина

$$\Delta l = k \sqrt[4]{\frac{Jl^2}{F}} = k \sqrt[4]{i\bar{l}} \left( i^2 = \frac{J}{F} \right).$$

Для одинакового материала стержня и заделки (сталь)

$$\Delta l \approx 0,93 \sqrt[4]{i\bar{l}} \quad (i, \text{ см}). \quad (10.66)$$

Зная величину  $\Delta l$  и задаваясь законом изменения изгибающего момента  $M$  на протяжении  $l + \Delta l$ , найдем угол поворота  $\varphi$  и смещение  $y(0)$ .

Для линейного закона изменения  $M$  на протяжении  $\Delta l$  (рис. 10.18)

$$M = \frac{Pl}{\Delta l} x; \quad \varphi = \frac{Pl \Delta l}{2EJ}; \quad y(0) = \frac{Pl(\Delta l)^2}{6EJ}.$$

\* Кузнецов В. С. и Лысенко Б. М. К вопросу о влиянии упругости заделки на собственную частоту колебаний турбинных лопаток. Сб. трудов Лаборатории проблем быстроходных машин и механизмов. Вып. 5. Изд-во АН УССР, 1955.

Затем находим безразмерные коэффициенты жесткости заделки

$$\bar{y} = \frac{P}{y(0)} \cdot \frac{l^3}{EJ}; \quad \bar{h} = \frac{Pl}{\varphi(0)} \cdot \frac{l}{EJ} \quad (10.67)$$

или

$$\bar{\omega} = \frac{6l^2}{(\Delta l)^2}, \quad \bar{h} = \frac{2l}{\Delta l}.$$

После замены  $\Delta l$  его значением (10.89) получим

$$\bar{\omega} = \frac{6}{k^2} \cdot \frac{l}{\rho}; \quad \bar{h} = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{l}{i}}. \quad (10.68)$$

Пользуясь графиками (рис. 149, 151) для  $k = 3,6$ , можно определить значение коэффициента уменьшения частоты

$$\omega = \omega_0 \varphi = \varphi \cdot 3.515 \sqrt{\frac{Ei^2}{\rho i^4}}. \quad (10.69)$$

Значение  $\varphi$  приведено на рис. 10.19. Опыты подтверждают, что критерием снижения частоты является параметр  $\frac{l^2}{i}$ .

Опытные данные можно использовать для определения снижения частот колебаний стержней, условия заделки которых приближаются к принятым при эксперименте.

В действительности лопатки связаны с диском, насаженным на вал, поэтому для определения частот колебаний необходимо рассматривать совместно упругую систему вал—диск—лопатки, что дает возможность учесть динамическую податливость всех элементов. Этот вопрос рассмотрим в следующей главе.



## ГЛАВА 11

### КОЛЕБАНИЯ ДИСКОВ

#### ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИСКОВ

##### Основные типы колебаний

Диски, передающие крутящие моменты от лопаток к валу, являются ответственной частью машины. Они подвергаются воздействию рабочей среды, температуры, неравномерно распределенной по радиусу диска, действию инерционных сил.

При колебаниях невращающихся дисков возможны тангенциальные (колебания кручения) и радиальные (колебания удлинения) колебания. При вращении диска эти колебания связаны с помощью сил Кориолиса и возникают совместные кручения — удлинения. Помимо этого, возникают изгибные колебания дисков (аксиальные колебания).

Так как с диском связаны лопатки, и диск насажен на упругий вал, то в действительности следует рассматривать колебания всей системы диск—лопатки—вал в целом.

Существующие методы расчета лопаток не учитывают связи лопаток с дисками. В дальнейшем рассмотрим тангенциальные колебания облопаченных дисков с учетом вращения и выясним влияние вращения, а затем подробно рассмотрим колебания при допущении, что вращением диска можно пренебречь.

Помимо этого, рассмотрим задачу об изгибных колебаниях облопаченного диска с учетом напряжений в срединной плоскости диска от центробежных сил и температурного нагрева.

##### Дифференциальное уравнение колебаний кручения и удлинения диска

Рассмотрим диск переменной толщины  $y(r)$ , вращающийся с угловой скоростью  $\omega$ . Обозначим через  $v(r, t)$  тангенциальное перемещение,  $u(r, t)$  — радиальное,  $\theta = \frac{v}{r}$  — угловое смещение (рис. 11.1).

Относительные удлинения в предположении, что  $\rho$  и  $\nu$  не зависят от угла  $\varphi$ , будут

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad e_\theta = \frac{u}{r}; \quad e_{r\theta} = r \frac{\partial \theta}{\partial r} = \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right). \quad (11.1)$$

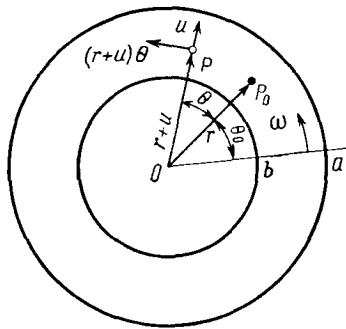


Рис. 11.1

Согласно закону Гука, напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\sigma^2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \sigma \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\sigma^2} \left( \sigma \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right); \\ \tau_{r\theta} &= G \frac{\partial \theta}{\partial r} r. \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Дифференциальное уравнение колебаний диска проще всего можно получить исходя из принципа Гамильтона [150].

Используя зависимости (11.1) и (11.2), получим значение вариации потенциальной энергии системы

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^{2\pi} \int_b^a (\sigma_r \delta e_r + \sigma_\theta \delta e_\theta + 2\tau_{r\theta} \delta e_{r\theta}) y(r) r dr d\theta = \\ &= \frac{2\pi}{2} \delta \int_0^a y(r) r \left\{ \frac{E}{1-\sigma^2} \left[ \left( \frac{du}{dr} \right)^2 + 2\sigma u \frac{du}{r dr} + \frac{u^2}{r^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + Gr^2 \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 \right\} dr. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Вариация работы сил Кориолиса

$$\begin{aligned} \delta K &= \iint \rho y(r) \left[ 2\omega(r+u) \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta u - 2\omega \frac{\partial u}{\partial t} (r+u) \delta \theta \right] r dr d\theta = \\ &= 2\pi 2\rho \omega \int_b^a yr^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \delta \theta \right) dr. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Вариация потенциальной энергии от действия центробежной силы на перемещении  $\delta u$  будет

$$\delta \Phi = -2\pi \frac{\rho}{2} \omega^2 \delta \int_b^a yr u^2 dr, \quad (11.5)$$

## Вариация кинетической энергии

$$\delta T = 2\pi \frac{\rho}{2} \delta \int_b^a yr \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + r^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right] dr. \quad (11.6)$$

Согласно принципу Гамильтона необходимо найти стационарное значение выражения

$$\delta = \int_{t_1}^{t_2} [T - \Phi + K - U] dt = 0 \quad (11.7)$$

для известных условий, налагаемых на вариации.

После подстановки в выражение (11.7) значений (11.3), (11.4), (11.5), (11.6) и вычислений получим уравнения Грэмеля [150]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \left( \frac{y'}{y} + \frac{3}{r} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\rho}{G} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{2\omega}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= 0; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left( \frac{y'}{y} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{\sigma y'}{ry} - \frac{1}{r^2} + \rho \frac{1 - \sigma^2}{E} \omega^2 \right) \rho - \\ - \rho \frac{1 - \sigma^2}{E} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega r \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

Члены  $\frac{2\omega}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$  и  $-2\omega \frac{\partial \theta}{\partial r}$  учитывают действие сил Кориолиса. Они устанавливают связь между колебаниями кручения и удлинения.

Принимая  $\theta = \psi(r) \sin pt$ ,  $v = V \sin pt$ ,  $u = R \cos pt$  и подставляя их значения в уравнения (11.8), приходим к системе

$$\left. \begin{aligned} \psi'' + \left( \frac{y'}{y} + \frac{3}{r} \right) \psi' + \lambda^2 \psi + \frac{2\omega}{\rho} \lambda^2 \frac{R}{r} &= 0 \left( \lambda^2 = \frac{\rho}{G} p^2 \right); \\ R'' + \left( \frac{y'}{y} + \frac{1}{r} \right) R' + \left[ \left( 1 + \frac{\omega^2}{\rho^2} \right) \mu^2 + \frac{\sigma y'}{y} - \frac{1}{r^2} \right] R + \\ + \frac{2\omega}{\rho} \mu^2 r \psi &= 0 \left( \mu^2 = \frac{1 - \sigma}{2} \lambda^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

## ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА С ЛОПАТКАМИ

### Возможные формы колебаний

Поведение системы, состоящей из массы  $M$ , к которой прикреплено  $n$  одинаковых масс  $m$  с одинаковыми коэффициентами жесткости (идеализированный ротор с лопатками) и перемещающимися только в одном направлении, параллельно друг другу, было изучено Д. Джонсоном и Р. Бишопом [132].

Такая система имеет  $n + 1$  степень свободы, и следовательно,  $n + 1$  главную форму колебаний. Эта система имеет такие частоты:

$$\omega_0^2 = 0; \omega_1^2 = \omega_2^2 = \dots = \omega_{n-1}^2 = \frac{k}{m}; \omega_n^2 = \frac{k(M + m)}{Mm}.$$

Главная форма  $\omega_0^2 = 0$  соответствует движению всей системы как твердого тела. Форма  $\omega_n^2$  соответствует случаю, когда все малые массы движутся в одной фазе с равными амплитудами, а большая масса движется в противоположной фазе, т. е. систему можно представить состоящей из двух масс —  $M$  и  $nm$ , связанных пружиной с жесткостью  $nk$ .

Равночастотные формы колебаний остаются неопределенными. Формы колебаний определяются из условий ортогональности между собой.

В указанной работе вычислены коэффициенты влияния, которые дают возможность определить  $q_r$  при положении силы к массе  $m$ , т. е.  $q_r = \alpha_{rs} F e^{i\omega t}$ .

В дальнейшем при изучении тангенциальных колебаний облопаченного диска будем исходить из случая синфазных колебаний лопаток. Цель дальнейшего исследования — выяснение влияния жесткости диска на колебания лопаток.

Рассмотрим сперва случай невращающегося диска. В дальнейшем выясним влияние вращения диска.

### Уравнения колебаний кручения облопаченных дисков гиперболического профиля

Дифференциальное уравнение колебаний лопатки постоянного сечения длиной  $l$  имеет вид

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} - \frac{\rho F l^4}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \left( \xi = \frac{x}{l} \right).$$

Принимая  $y(\xi, t) = Y(\xi) \sin pt$ , получаем

$$\frac{d^4 Y}{d\xi^4} - s^4 Y(\xi) = 0 \left( s^4 = p^2 \frac{E \rho l^4}{EJ} \right). \quad (11.10)$$

Если выразить  $\lambda$  через  $s$ , то получим

$$\lambda^2 = p^2 \frac{\rho}{G} = s^4 \frac{2(1 + \sigma)J}{Fl^4}. \quad (11.11)$$

Дифференциальное уравнение колебаний кручения невращающегося диска (11.9) будет

$$\psi'' + \left( \frac{y'}{y} + \frac{3}{r} \right) \psi' + \lambda^2 \psi = 0. \quad (11.12)$$

Касательное напряжение ( $v = V \sin pt$ )

$$\tau = Gr \frac{\partial \psi}{\partial r} = G \left( \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right). \quad (11.13)$$

Если  $y = cr^{-n}$ , то уравнение (11.13) имеет вид

$$\psi'' + \frac{3-n}{r} \psi' + \lambda^2 \psi = 0. \quad (11.14)$$

Решение уравнения (11.14) можно выразить через функции Бесселя:

$$\psi(r) = r^k [A_k J_k(\lambda r) + B_k N_k(\lambda r)] \left( k = \frac{n}{2} - 1 \right). \quad (11.15)$$

В частности имеем

$$\left. \begin{aligned} \psi &= r^{-1} (A \cos \lambda r + B \sin \lambda r) & (y = cr^{-1}); \\ \psi &= A \cos \lambda r + B \sin \lambda r & (y = cr^{-3}). \end{aligned} \right\} \quad (11.16)$$

Чтобы избежать сильного уменьшения толщины диска с увеличением  $r$ , Ф. Граммель также задает и особый профиль

$$y(r) = cr^{-3} \exp(2kr).$$

Для этого профиля

$$\psi(r) = [A_1 \cos r\lambda_1 + B_1 \sin r\lambda_1] e^{-kr} \quad (\lambda_1 = \sqrt{\lambda^2 - k^2}). \quad (11.17)$$

Для  $\lambda < k$  вместо  $\lambda_1$  необходимо подставить  $c\lambda'_1 = i\sqrt{k^2 - \lambda^2}$ .  
Решение уравнения (11.10) для консольного стержня имеет вид

$$\begin{aligned} Y(\xi) &= A (\operatorname{sh} s\xi - \sin s\xi) + B (\operatorname{ch} s\xi - \cos s\xi) + V_a \cos s\xi + \\ &+ \frac{l}{s} \varphi(a) \sin s\xi, \end{aligned} \quad (11.18)$$

где  $V_a$  — перемещение конца лопатки  $\xi = 0$ ;

$\varphi(a) = \frac{\partial V}{\partial r_{r=a}}$  — угол поворота, равный

$$\varphi(a) = a\psi'(a) + \psi(a) = \psi(a) \left[ 1 + a \frac{\psi'(a)}{\psi(a)} \right]. \quad (11.19)$$

### Граничные условия и условия сопряжения

Для диска с отверстием условия закрепления по внутреннему контуру  $r = b$  могут быть следующими:

$$\left. \begin{aligned} V(b) = 0 \text{ или } \psi = 0 \text{ при } r = b, \text{ диск закреплен;} \\ \tau = 0 \text{ или } \psi'(b) = 0 \text{ при } r = b, \text{ диск свободен;} \\ \tau - \varepsilon\psi = 0 \text{ или } \psi' - b_0\psi = 0 \text{ при } r = b, \text{ диск упруго закреплен.} \end{aligned} \right\} \quad (11.20)$$

Здесь  $b_0$  — коэффициент, который зависит от упругости закрепления при  $r = b$  (для  $b = \infty$  имеем жесткое закрепление,  $b_0 = 0$  соответствует свободному краю).

Вычислим коэффициент закрепления для случая, когда диск связан с весовым или невесовым валом (рис. 11.2), причем для упрощения предполагаем, что с валом диаметром  $d = 2b$  и длиной  $L$  связан один диск.

Угол закручивания вала ( $\eta = \frac{x}{L}$ )

$$u(x_1, t) = \psi(\eta) \sin pt.$$

В месте расположения диска при  $\eta = \eta_1$  приложен к валу крутящий момент  $M_1$ . В таком случае (гл. 13)

$$\left. \begin{aligned} \psi(\eta) &= A \cos \beta \eta + B \sin \beta \eta \quad \text{для } 0 \leq \eta \leq \eta_1; \\ \psi(\eta) &= A \cos \beta \eta + B \sin \beta \eta - \frac{M_1 L}{BC} \sin \beta (\eta - \eta_1) \quad \text{для } \eta > \eta_1, \end{aligned} \right\} (11.21)$$

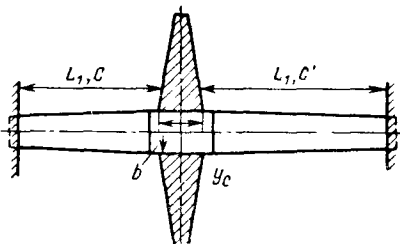


Рис. 11.2

где  $C = GJ_p = \frac{\pi d^4}{32} G$  — жесткость вала на кручение;

$$\beta^2 = \rho^2 \frac{\rho}{G} L^2 = \lambda^2 L^2.$$

Если левый конец закреплен, а правый свободен, то

$$u(0) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta_{\eta=1}} = 0.$$

Постоянная  $A = 0$ . Из условия  $u'(1, t) = 0$  получим  $B$ , а также  $u\psi(\eta)$ . Для  $\eta = \eta_1$  получим

$$\psi(\eta_1) = \frac{M_1 L \sin \beta \eta_1 \cos \beta (1 - \eta_1)}{C \beta \cos \beta}.$$

Так как

$$M_1 = 2\pi b^2 y(b) \tau = 2\pi b^3 y(b) G \psi'(b),$$

то после подстановки  $M_1$  в уравнение (11.21) получим

$$b_0 = \frac{C \beta \cos \beta}{2\pi b^3 y(b) GL \cos \beta \eta_1 \sin \beta (1 - \eta_1)}. \quad (11.22)$$

Аналогичным образом для двух закрепленных концов получим

$$b_0 = \frac{C \beta \sin \beta}{2\pi b^3 y(b) GL \sin \beta (1 - \eta_1) \sin \beta \eta_1}. \quad (11.23)$$

В случае невесомого вала для указанных выше условий получим [5]

$$b_0 = \frac{C}{2\pi b^3 y(b) GL}; \quad b_0 = \frac{L_1 C_1 + L_1' C_1'}{2\pi b^3 y(b) G L L_1}. \quad (11.24)$$

Для малых  $\beta$ ,  $b_0$  выражения (11.22) и (11.23) совпадают с выражениями (11.24).

Условия жесткого сопряжения лопатки с диском были учтены в формуле (11.18). Условие равновесия сил по контуру диска  $r = a$  шириной  $y(a)$  будет

$$2\pi a y_a \tau(a) = ZQ(0), \quad (11.25)$$

где  $Z$  — число лопаток;

$Q(0)$  — перерезывающая сила от одной лопатки при  $x = 0$ ;

$$Q(0) = -EJY_x''(0) = -\frac{EJ}{l^3} Y_{\xi}''(0). \quad (11.26)$$

Кроме условий (11.20), (11.25), необходимо удовлетворить условиям на конце лопатки  $x = l$ .

Пусть концы лопатки связаны бандажом. Масса бандаж, проходящая на один шаг, будет  $P$ . На лопатку действует момент при  $\xi = 1$ . Тогда на конце лопатки должны быть такие условия: для моментов

$$EJY_x'' + pY_x' = 0 \text{ при } x = l; \quad (11.27)$$

для перерезывающих сил  $EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - P \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$  при  $x = l$

или  $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} Y_{\xi}''(1) + \beta s Y_{\xi}'(1) &= 0 \left( \beta = \frac{pl}{sEI} \right), \quad Y_{\xi}''(1) + \alpha s Y_{\xi}(1) = \\ &= 0 \left( \alpha = \frac{P}{F\rho l} \right). \end{aligned} \quad (11.28)$$

Коэффициент  $p$  определяется по данным, приведенным в литературе.

Условие (11.25) на внешнем контуре диска имеет вид

$$2\pi a y_a \tau(a) = -\frac{EJ}{l^3} s^3 \left[ 2A - \frac{l}{s} \psi(a) \left( 1 + \alpha \frac{\psi'(a)}{\psi(a)} \right) \right] Z. \quad (11.29)$$

После подстановки значения (11.18) в условия (11.28) найдем значение  $A$  в зависимости от  $\psi(a)$  и  $\psi'(a)$ . После исключения  $A$  в условии (11.29) получим трансцендентное уравнение относительно  $s$  для определения частот совместных колебаний диск — лопатки

$$\begin{aligned} E(s) - \alpha s B(s) + \beta [A(s) + \alpha s D(s)] - \left\{ [S_1(s) + 2\alpha s A(s) + \right. \\ \left. + \beta (2B(s) + \alpha s S_1(s))] \left( 1 + \frac{a}{K(a)} \right) + \frac{2as}{l} [A(s) + \alpha s C(s) + \right. \\ \left. + \beta (S_1(s) + \alpha s A(s))] \right\} \frac{(1 + \sigma) J s^2 Z}{2\pi a y_a l^2} \frac{K(a)}{a} = 0; \end{aligned} \quad (11.30)$$

здесь  $A(s), B(s), \dots, E(s)$  — табулированные функции частот [11];

$$\begin{aligned} A(s) &= \operatorname{ch} s \sin s + \operatorname{sh} s \cos s; & S_1(s) &= 2\operatorname{sh} s \sin s, \\ B(s) &= \operatorname{ch} s \sin s - \operatorname{sh} s \cos s; & D(s) &= \operatorname{ch} s \cos s - 1, \\ C(s) &= 2\operatorname{ch} s \cos s; & E(s) &= \operatorname{ch} s \cos s + 1. \end{aligned}$$

Значение  $K(a) = \frac{\psi(a)}{\psi'(a)}$  находим в зависимости от профиля диска. Функции  $\psi(a), \psi'(a)$  зависят от  $\lambda$ , а следовательно, и от  $s$  (11.11).

### Значение функций $K(a)$ для дисков гиперболического профиля

Постоянные, входящие в уравнение (11.15), находим исходя из условий

$$\left. \begin{aligned} \psi'(b) &= b_0 \psi(b); \\ \psi(a) &= \frac{V_a}{a} = a^k [A_k J_k(\lambda a) + B_k N_k(\lambda a)]. \end{aligned} \right\} \quad (11.31)$$

После этого находим

$$K(a) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{J_k(a\lambda) - \delta N_k(a\lambda)}{J_{k-1}(a\lambda) - \delta N_{k-1}(a\lambda)}, \quad (11.32)$$

где  $\delta = \frac{\lambda J_{k-1}(\lambda b) - b_0 J_k(\lambda b)}{\lambda N_{k-1}(\lambda b) - b_0 N_k(\lambda b)}$ .

Значение  $K(a)$  для нескольких профилей диска будет

$$y = c; \quad K(a) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{J_1(\lambda a) - \delta N_1(\lambda a)}{J_2(\lambda a) - \delta N_2(\lambda a)}, \quad (11.33)$$

где  $\delta = \frac{\lambda J_2(\lambda b) + b_0 J_1(\lambda b)}{\lambda N_2(\lambda b) + b_0 N_1(\lambda b)}$ ;

$$yr^3 = c; \quad K(a) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{b_0 + \lambda \operatorname{ctg} \lambda (a-b)}{\lambda - b_0 \operatorname{ctg} \lambda (a-b)}; \quad (11.34)$$

$$yr = c; \quad K(a) = -\frac{a[1 + b_0 b + \lambda b \operatorname{ctg} \lambda (a-b)]}{1 + b_0 b + \lambda^2 ab - \lambda(a-b + b_0 ab) \operatorname{ctg} \lambda (a-b)}; \quad (11.35)$$

$$y = cr^{-3} \exp(2Kr); \quad K(a) = -\frac{k + b_0 + \lambda'_1 \operatorname{cth} \lambda'_1 (a-b)}{\lambda^2 + kb_0 - \lambda'_1 b_0 \operatorname{cth} \lambda'_1 (a-b)}. \quad (11.36)$$

Для учета влияния массы обода диска примем, что толщина диска изменяется по закону особого профиля (закон Граммеля)

$$y_2(r) = cr^{-3} \exp(2k_1 r).$$



Если взять  $k_1$  из условия минимума  $y_2(r)$  при  $r = a + \frac{H}{2}$ , где  $H$  — ширина обода,  $2a$  — внутренний диаметр обода, то  $y_2(r)$ , мало отличается от постоянной, если  $k_1$  — малая величина.

Для интервала  $a \leq r \leq a + H$  согласно выражению (11.17) имеем

$$\psi_2(r) = e^{-k_1 r} (A_1 \cos \lambda_1 r + B_1 \sin \lambda_1 r). \quad (11.37)$$

Чтобы найти значения постоянных  $A_1, B_1$ , необходимо записать условия сопряжения диска с ободом ( $r = a$ ):

для касательных сил при  $r = a$   $y_1(a) \psi_1'(a) = y_2(a) \psi_2'(a)$ ;

для перемещений  $\psi_1(a) = \psi_2(a) = \frac{V_a}{a}$ .

После вычислений получим для формулы (11.37) значение

$$\begin{aligned} \psi_2(r) = e^{-k_1(r-a)} \left\{ \cos \lambda_1(r-a) + \frac{1}{\lambda_1} \left[ k_1 + \frac{1}{K(a)} \frac{y_1}{y_2} \right] \times \right. \\ \left. \times \sin \lambda_1(r-a) \right\} \frac{V_a}{a}. \end{aligned} \quad (11.38)$$

Если удовлетворить условиям сопряжения обода с лопатками при  $r = a_1$ , т. е. условиям

$$y(0) = V(a_1); \quad y_x'(0) = \frac{\partial V}{\partial r_{r=a_1}}, \quad 2\pi a_1 y_2 \tau(a_1) - ZQ(0) = 0,$$

то получим уравнение (11.30), только вместо  $K(a)$  необходимо поставить  $K'(a)$  и заменить  $a$  на  $a_1$ .

### Влияние продольной растягивающей силы

Для упрощения вычислений вместо распределенной центробежной силы приложим к концу лопатки в направлении радиуса продольную растягивающую силу.

Уравнение колебаний лопатки имеет вид

$$y(x, t) = Y(\xi) \sin pt,$$

где

$$\frac{d^4 Y}{d\xi^4} - q^2 \frac{d^2 Y}{d\xi^2} - s^4 Y = 0 \left( q^2 = \frac{N l^2}{EJ} \right). \quad (11.39)$$

Решение уравнения (11.39) аналогично уравнению (11.10)

$$\begin{aligned} Y(\xi) = A \left( \operatorname{ch} s_1 \xi - \frac{s_1}{s_2} \sin s_2 \xi \right) + B \left( \operatorname{ch} s_1 \xi - \cos s_2 \xi \right) + \\ + V_a \cos s_2 \xi + \frac{l}{s^2} \psi(a) \sin s_2 \xi, \end{aligned} \quad (11.40)$$

где

$$s_1 = \sqrt{\frac{q^2}{2} + \sqrt{\frac{q^4}{4} + s^4}}; \quad s_2 = \sqrt{-\frac{q^2}{2} + \sqrt{\frac{q^4}{4} + s^4}};$$

$$s_1^4 + s_2^4 = q^4 + 2s^4; \quad s_1 s_2 = s^2; \quad s_1^2 - s_2^2 = q^2; \quad s_1^2 + s_2^2 = q_1^2.$$

Граничные условия на конце лопатки  $\xi = 1$  ( $x = l$ ) при бандже и продольной силе для изгибающих моментов и поперечных сил имеют вид

$$\left. \begin{aligned} Y''_{\xi}(1) + \beta_s Y'_{\xi}(1) &= 0 \quad \left( \beta = \frac{\rho l}{sEJ} \right); \\ Y'''_{\xi}(1) - q^2 Y'_{\xi}(1) + \alpha s \cdot Y(1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.41)$$

Если выражение (11.40) подчинить условиям (11.41), то найдем постоянную  $A$ , подставляя значение которой в условия сопряжения лопатки с диском (11.29), получим частотное уравнение.

В частности, если бандаж отсутствует ( $\alpha = \beta = 0$ ), частотное уравнение имеет вид

$$2s^4(1 + \operatorname{ch} s_1 \cos s_2) + q^4 \operatorname{ch} s_1 \cos s_2 + s^2 q^2 \operatorname{sh} s_1 \sin s_2 -$$

$$- \left\{ \left[ 2s^4 \operatorname{sh} s_1 \sin s_2 - \frac{q^2}{s^2} (q^4 + 3s^4) \operatorname{ch} s_1 \cos s_2 - s^2 q^2 \right] \left[ 1 + \frac{a}{K(a)} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{l} q_1^2 (s_1^3 \operatorname{ch} s_1 \sin s_2 + s_2^3 \operatorname{sh} s_1 \cos s) \right\} \frac{J(1 + \sigma) Z s^2}{\pi a y a^2} \cdot \frac{\Psi(a)}{a \Psi'(a)} = 0. \quad (11.42)$$

### Приложение полученных результатов к частным случаям

Приведем данные расчета для диска особого профиля (рис. 11.3) и гиперболического  $yr = c$ .

Длину лопаток принимаем в зависимости от радиуса  $a = 66$  см равной  $l = \frac{a}{8}, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}$ , по оси абсцисс откладываем значение

$$H_0 = \sqrt[3]{\frac{12JZ}{100y_a}},$$

где  $Z$  — число лопаток;

$y_a$  — толщина диска при  $r = a$ . В частности, для стержня с сечением  $bH$  ( $b = y_a$ )  $Z = 100$ ,  $H_0 = H$ . По оси ординат откладываем значение  $s^2$ , частоту собственных колебаний находим по формуле (11.10). Внутренний радиус  $r = b = 15a = 9,9$  см.

Толщина диска изменяется по закону  $y = cr^{-3} \exp(2kr)$  ( $k = \frac{2}{40}$ ). Минимальная толщина диска при  $r = \frac{3}{2k} = 60$  см. Значение корней находим из частотных уравнений (11.30) и (11.42), значение  $K_a$  — из уравнения (11.36) при наличии обода согласно стр. 365.

На рис. 11.4 приведены значения  $s_1^2$  для лопаток длиной  $l = \frac{a}{8}, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}$  для  $b_0 = \infty$  и  $b_0 = 0$ .

При закрепленном крае  $r = b$  ( $b_0 = \infty$ ) получим снижение частоты по отношению к частоте консольного стержня ( $s_1^2 = 3,516$ ), которое значительно больше для коротких лопаток. Если край  $r = b$  свободен  $b_0 = 0$ , частота несколько повышается, причем для длинных лопаток больше, чем для коротких.

Влияние степени закрепления  $b_0$  для  $l = \frac{a}{2}$  показано на

рис. 11.5. Область между граничными кривыми заштрихована. Для одного и того же значения  $b_0$  частоты лежат выше и ниже граничных кривых. Влияние на частоты для длинных лопаток меньше. На рис. 11.5 приведено и значение второй частоты для  $b_0 = 0, b_0 = \infty$ . Как видно, вторая частота для

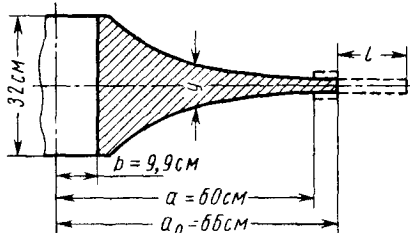


Рис. 11.3

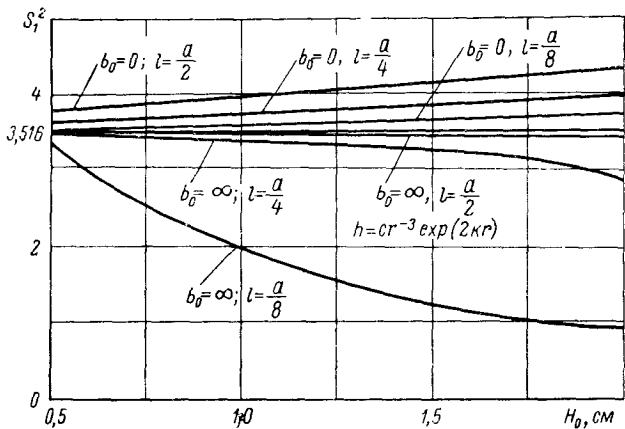


Рис. 11.4

жесткого закрепления взятого диска значительно отличается от второй частоты консольного стержня.

Влияние обода и продольной силы показано на рис. 11.6. Толщина обода  $y_2 = 2y_a$ ,  $a = 66$  см. Для  $b_0 = \infty$  обод снижает частоту, для  $b = 0$  — повышает. При расчете в уравнении (11.42) с учетом продольной силы было принято  $q^2 = 3$ . Граничные кривые соответственно снижаются,

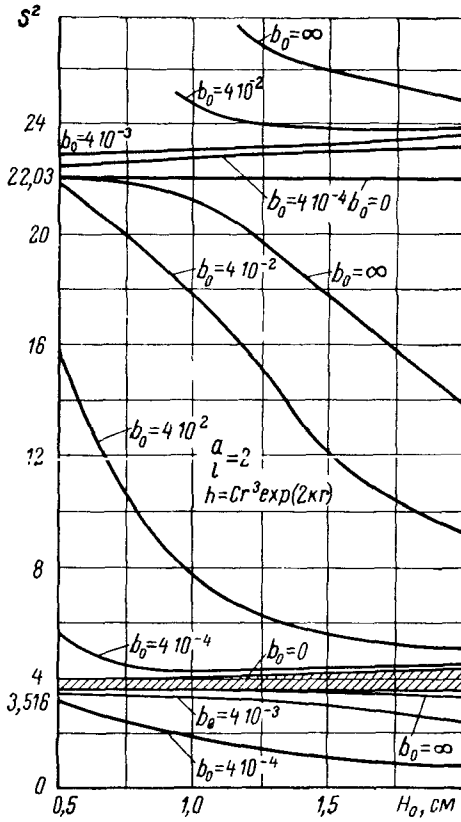


Рис. 11.5

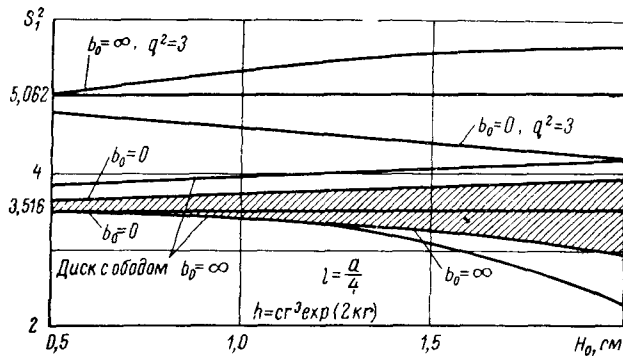


Рис. 11.6

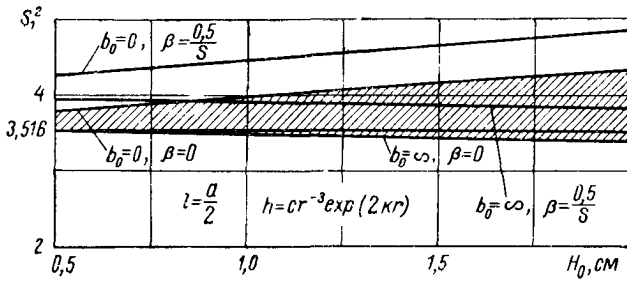


Рис. 11.7

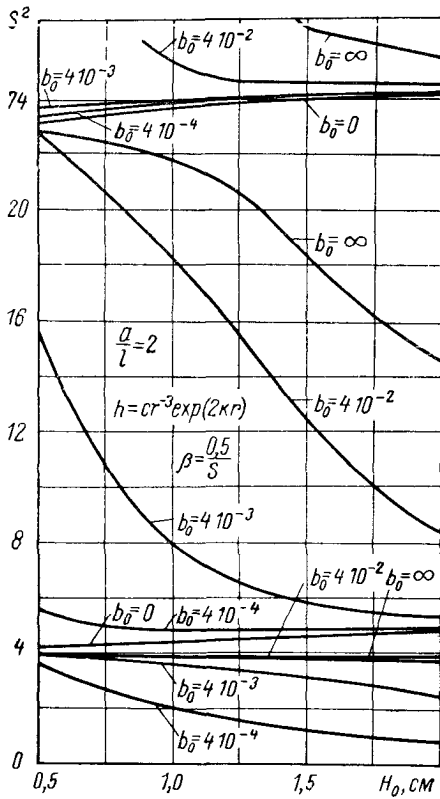


Рис. 11.8

Влияние бандажа ( $\beta = \frac{0,5}{s}$ ,  $\alpha = 0$ ) на частоту колебаний показано на рис. 11.7 (более подробно см. на рис. 11.8).

На рис. 11.9 для гиперболического профиля видно влияние жесткости закрепления диска на частоту колебаний. Влияние на частоту отношения  $\frac{b}{a}$  указано на рис. 11.10.

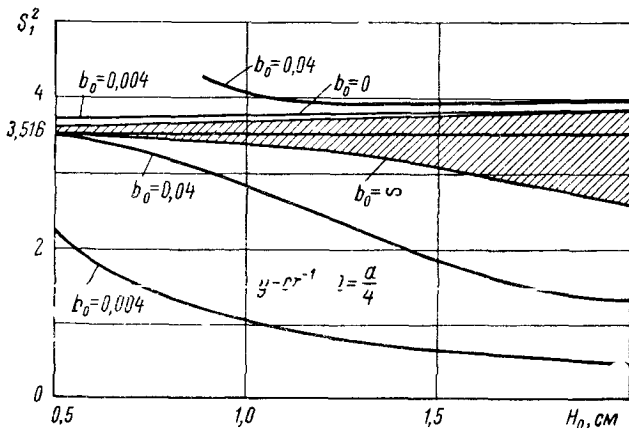


Рис. 11.9

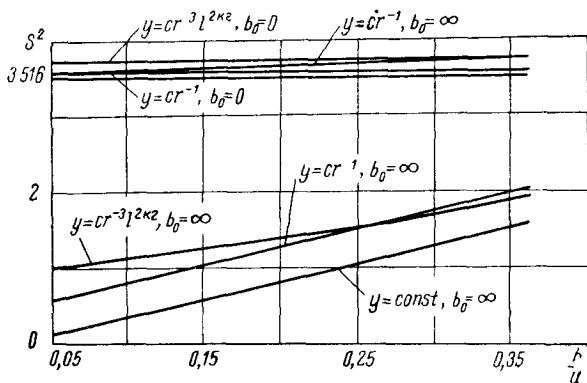


Рис. 11.10

Для проверки теоретических данных был изготовлен диск из алюминиевого сплава АК-4 (модуль  $E = 0,687 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>;  $2a = 90$  см;  $y = 2$  см;  $Z = 120$ ;  $l = 15$  см;  $F = bh = 2 \cdot 12$  см<sup>2</sup>). Диск был жестко зажат между двумя шайбами и притянут болтами. Возбуждение осуществлялось с помощью виброустановки. Экспериментально найдены первые три частоты, а также первые две формы тангенциальных колебаний с помощью кристал-

дического пьезоэлемента. В результате исследований было выявлено, что все лопатки колебались в одной фазе и экспериментальные частоты ( $\nu_1 = 100$  гц,  $\nu_2 = 520$  гц,  $\nu_3 = 2800$  гц) хорошо совпадали с расчетными ( $\nu_1 = 127$  гц,  $\nu_2 = 510$  гц).

Для консольного стержня  $\nu_1 = 450$  гц. Формы колебаний, подсчитанные теоретически и найденные экспериментально, хорошо совпадают, причем и для первой, и для второй форм наблюдается упругая деформация как диска, так и лопаток. Однако для второй формы узловой диаметр, проходящий по лопаткам, находится на расстоянии  $l_1 = 0,35l$  от корня, в то время как для консольного стержня  $l_2 = 0,744l$ .

На основании проведенных расчетов и экспериментальной проверки тангенциальных колебаний дисков можно отметить следующее: жесткость диска является существенным фактором, влияющим на спектор тангенциальных колебаний лопаток, который зависит от степени заделки, размеров лопатки, обода, бандажа, упругости заделки по внутреннему контуру; спектр частот колебаний с учетом диска может значительно отличаться от спектра консольного стержня.

#### ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА СОВМЕСТНО С ЛОПАТКАМИ

##### Дифференциальное уравнение для диска постоянной толщины и его решение

Выше предполагалось, что диск неподвижен. Для вращающегося диска колебания кручения связаны с колебаниями удлинения и частоты колебаний кручения — удлинения отличны от частот невращающегося диска.

Принимаем по-прежнему

$$\theta = \psi \sin pt; \quad v = V \sin pt; \quad u = R \cos pt. \quad (11.43)$$

Для вращающегося диска постоянной  $y = y_a$  получим дифференциальные уравнения колебаний в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \psi'' + \frac{3}{r} \psi' + \lambda^2 \psi + 2k\lambda^2 \frac{1}{r} R &= 0; \\ R'' + \frac{1}{r} R' + \left[ (1 + k^2) \mu^2 - \frac{1}{r^2} \right] R + 2k\mu^2 r \psi &= 0; \end{aligned} \right\} (11.44)$$

здесь

$$k = \frac{\omega}{p}; \quad \lambda^2 = \frac{\rho}{G} p^2; \quad \mu^2 = \frac{1-\sigma}{2} \lambda^2 = \frac{1-\sigma}{2} \cdot \frac{\rho}{G} p^2. \quad (11.45)$$

Подставляя  $\psi = \frac{V}{r}$  в уравнение (11.44), запишем их следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Delta V + \lambda^2 V + 2k\lambda^2 R &= 0; \\ \Delta R + (1 + k^2)\mu^2 R &= 2k\mu^2 V = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.46)$$

Отсюда из первого уравнения

$$R = -\frac{1}{2k\lambda^2} (\Delta V + \lambda^2 V). \quad (11.47)$$

После подстановки значения  $R$  во второе уравнение (11.48) и замены  $\mu = \frac{1-\sigma}{2} \lambda^2$  получим

$$\Delta \Delta V + \frac{\lambda^2}{2} [3 - \sigma + k^2(1 - \sigma)] \Delta V - \frac{\lambda^4}{2} (3k^2 - 1)(1 - \sigma) V = 0. \quad (11.48)$$

Уравнения (11.48) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + \alpha^2)(\Delta + \beta^2) V &= 0, \text{ если } k^2 < \frac{1}{3}; \\ (\Delta + \alpha^2)(\Delta - \beta_1^2) V &= 0, \text{ если } k^2 > \frac{1}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (11.49)$$

Здесь  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $\beta_1^2$  имеют такие значения:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{\lambda^2}{4} \{ 3 - \sigma + k^2(1 - \sigma) + \\ &+ \sqrt{[3 - \sigma + k^2(1 - \sigma)]^2 + 8(3k^2 - 1)(1 - \sigma)} \}; \\ \beta^2 &= \frac{\lambda^2}{4} \{ 3 - \sigma + k^2(1 - \sigma) - \\ &- \sqrt{[3 - \sigma + k^2(1 - \sigma)]^2 + 8(3k^2 - 1)(1 - \sigma)} \}; \\ \beta_1^2 &= -\beta^2 = \frac{\lambda^2}{4} \{ -[3 - \sigma + k^2(1 - \sigma)] + \\ &+ \sqrt{[3 - \sigma + k^2(1 - \sigma)]^2 + 8(3k^2 - 1)(1 - \sigma)} \}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (11.49) будет

$$\left. \begin{aligned} V &= AJ_1(\alpha r) + BN_1(\alpha r) + CJ_1(\beta r) + DN_1(\beta r) \text{ для } k^2 < \frac{1}{3}; \\ V &= AJ_1(\alpha r) + BN_2(\alpha r) + CI_1(\beta r) + DK_1(\beta r) \text{ для } k^2 > \frac{1}{3}; \end{aligned} \right\} \quad (11.50)$$

Здесь  $I_1(\beta r)$ ,  $K_1(\beta r)$  — бесселевы функции от чисто мнимого аргумента.



Значения радиальных перемещений (11.47) принимают вид

$$\left. \begin{aligned}
 R &= -\frac{1}{2k\lambda^2} \{(\lambda^2 - \alpha^2) [AJ_1(\alpha r) + BN_1(\alpha r)] + \\
 &\quad + (\lambda^2 - \beta^2) [GJ_1(\beta r) + DN_1(\beta r)]\} \\
 &\quad \text{для } k^2 < \frac{1}{3}; \\
 R &= -\frac{1}{2k\lambda^2} \{(\lambda^2 - \alpha^2) [AJ_1(\alpha r) + BN_1(\alpha r)] + \\
 &\quad + (\lambda^2 + \beta_1^2) [CI_1(\beta r) + DK_1(\beta r)]\} \\
 &\quad \text{для } k^2 > \frac{1}{3}.
 \end{aligned} \right\} \quad (11.51)$$

Значения напряжений

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{E}{1 - \sigma^2} \left( u' + \sigma \frac{u}{r} \right); \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1 - \sigma^2} \left( \sigma u' + \frac{u}{r} \right); \\
 \tau &= Gr \frac{\partial \theta}{\partial r}.
 \end{aligned} \quad (11.52)$$

Запишем теперь граничные условия сопряжения. На внутреннем контуре диска для  $r = b$  условия будут такие:

$$\sigma = \varepsilon \psi = 0 \text{ или } \psi' = b_0 \psi = 0; \quad \sigma_r = \eta u. \quad (11.53)$$

Условия  $b_0 = \eta = 0$  обозначают жесткое закрепление, а условия  $b_0 = \eta = \infty$  соответствуют свободному краю.

На внешнем контуре диска ( $r = a$ ) необходимо удовлетворить условиям сопряжения диска с лопатками. Для упрощения не учитываем влияния центробежных сил на лопатки.

Прогиб консольной лопатки  $y(\xi, t) = Y(\xi) \sin pt$ , где

$$\begin{aligned}
 Y(\xi) &= A (\operatorname{sh} s\xi - \sin s\xi) + B (\operatorname{ch} s\xi - \cos s\xi) + \\
 &\quad + V_a \cos s\xi + \frac{l}{s} \frac{\partial V}{\partial r=a} \sin s\xi.
 \end{aligned} \quad (11.54)$$

В зависимости от величины  $s$  имеем значения (11.45)

$$\begin{aligned}
 p &= s^2 \sqrt{\frac{EJ}{F\rho l^4}}; \quad k = \frac{\omega}{p} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{l}{a} u_a \sqrt{\frac{F\rho}{EJ}}; \\
 \lambda^2 &= \frac{2(1 + \sigma)s^4 J}{Fl^4};
 \end{aligned} \quad (11.55)$$

здесь  $u_a = \omega a$  — линейная скорость на контуре диска ( $r = a$ );  
 $F$  — площадь поперечного сечения лопатки;  
 $J$  — момент инерции.

Для лопаток, свободных на концах ( $\xi = 1$ ),  $y''(l) = y'''(l) = 0$ .  
и уравнение изгиба имеет вид

$$y(\xi) = \frac{1}{2Es} \left\{ v(a) \left[ -A(s) \operatorname{sh} s\xi - \sin s\xi + \left( \frac{1}{2} S + E(s) \right) \times \right. \right. \\ \times \left. \left. (\operatorname{ch} s\xi - \cos s\xi) + 2E \cos s\xi \right] + \frac{l}{s} v'_r(a) \left[ - \left( \frac{1}{2} S(s) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - E(s) \right) (\operatorname{sh} s\xi - \sin s\xi) + B(s) \operatorname{ch} s\xi - \cos s\xi + \right. \\ \left. \left. \left. + 2E(s) \sin s\xi \right] \right\}, \quad (11.56)$$

здесь  $A(s)$ ,  $B(s)$ ,  $S(s)$ ,  $E(s)$  — табулирование функции:

$$\left. \begin{aligned} A(s) &= \operatorname{ch} s \sin s + \operatorname{sh} s \cos s; & S(s) &= 2 \operatorname{sh} s \sin s; \\ B(s) &= \operatorname{ch} s \sin s - \operatorname{sh} s \cos s; & E(s) &= \operatorname{ch} s \cos s + 1. \end{aligned} \right\} \quad (11.57)$$

#### Частотное уравнение для вращающегося облопаченного диска

Предположим, что лопатки жестко связаны с диском. Масса лопаток, приходящаяся на единицу поверхности контура диска,

$$m = \rho \frac{FlZ}{2\pi a a}, \quad (11.58)$$

где  $Z$  — число лопаток.

Условия сопряжения диска с лопатками будут следующие: в радиальном направлении

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -\sigma_r + m\omega^2 (1 + \varepsilon) u; \quad (11.59)$$

в тангенциальном направлении

$$Q = -\tau; \quad (11.60)$$

здесь  $\varepsilon$  — поправочный коэффициент, учитывающий, что центробежная сила вращающихся лопаток распределена по длине  $l$  и приведена к радиусу.

Интенсивность поперечной силы в корне лопаток, которая приходится на единицу поверхности контура диска,

$$Q = - \frac{ZY''_{\xi}(0)}{l^2 2\pi a a} . .$$

Подставляя в условие (11.59) значение  $u = R \cos pt$ , приведем это условие к виду

$$\omega_1 R(a) - \frac{dR}{dr} = 0, \quad (11.61)$$

где  $\omega_1 = N\mu^2 a [1 + k^2 (1 + \varepsilon)] - \frac{\sigma}{a}$ .

После подстановки значений  $Y(r)$  (11.50) и  $R(r)$  (11.51) получим

$$\left. \begin{aligned} V(r) &= r\psi(r) = D(P_1(\alpha r)\omega_1 + Q_1(\beta r)); \\ \psi'_{r=a} &= \frac{1}{a} [\alpha P_2(\alpha a)\omega_1 - Q_2(\alpha a)\beta]D; \\ R &= D[\alpha_0 P_1(\alpha r)\omega_1 + \beta_0 Q_1(\beta r)], \end{aligned} \right\} \quad (11.62)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{Q_1(\beta a)q_1 - Q_0(\beta a)q_0}{P_1(\alpha a)p_1 - P_0(\alpha a)p_0}; \\ \alpha_0 &= -\frac{1}{2k} \left(1 - \frac{a^2}{\lambda^2}\right); \quad \beta_0 = -\frac{1}{2k} \left(1 - \frac{\beta^2}{\lambda^2}\right); \end{aligned} \right\} \quad (11.63)$$

здесь обозначено ( $i = 0, 1, 2$ )

$$\left. \begin{aligned} P_i(\alpha a) &= J_i(\alpha a)n_1 + N_i(\alpha a); \\ Q_i(\beta a) &= J_i(\beta a)k_1 + N_i(\beta a) \text{ для } k^2 < \frac{1}{3}, \\ n_1 &= -\frac{N_1(\alpha b)}{J_1(\alpha b)}; \quad k_1 = -\frac{N_1(\beta b)}{J_1(\beta b)}. \end{aligned} \right\} \quad (11.64)$$

Для  $k^2 > \frac{1}{3}$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= I_1(\beta a)n_1 + K_1(\beta a); \quad Q_0 = I_0(\beta a)k_1 - K_0(\beta a); \\ n_1 &= -\frac{K_1(\alpha b)}{I_1(\alpha b)}; \quad k_1 = -\frac{K_1(\beta b)}{I_1(\beta b)}; \\ q_1 &= (1 - \sigma)\beta_0 + 2N\mu^2\kappa a^2 \left[1 + k^2 \left(1 + \frac{l}{2a}\right)\right] \frac{\beta_0}{2}; \\ p_1 &= (1 - \sigma)\alpha_0 + 2N\mu^2\kappa a^2 \left[1 + k^2 \left(1 + \frac{l}{2a}\right)\right] \frac{\beta_0}{2}; \\ q_0 &= a\beta\beta_0; \\ p_0 &= a\alpha\alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (11.65)$$

После подстановки значений (11.54) в условие

$$\frac{2(1 + \sigma)JZY'''(0)}{l^3 2\pi a \gamma a} = -a\psi'(a) + 2N\lambda^2\kappa \left(1 + \frac{l}{2a}\right)R \quad (11.60)$$

получим частотное уравнение вращающегося диска с лопатками

$$\begin{aligned} E(s) \left[1 - 2N\lambda^2\kappa \frac{R(a)}{\psi'(a)} - \left\{S(s) \left[1 + \frac{a\psi'(a)}{\psi(a)}\right] + 2\frac{a}{l} sA(s)\right\} \times \right. \\ \left. \times \frac{J(1 + \sigma)Zs^2}{2\pi a \gamma a l^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{\psi(a)}{\psi'(a)}\right] = 0; \end{aligned} \quad (11.66)$$

здесь  $E(s)$ ,  $A(s)$ ,  $S(s)$  — табулированные функции (11.57);  $\psi(a)$ ,  $\psi'(a)$  и  $R(a)$  определяются из выражения (11.62).

Частотное уравнение для невращающегося диска имеет вид

$$E(s) - \left\{ S(s) \left( 1 + a \frac{\psi(a)}{\psi'(a)} \right) + 2 \frac{a}{l} s A(s) \right\} \times \\ \times \frac{I(1+\sigma)}{2\pi a y_a} \cdot \frac{s^2}{l^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{\psi(a)}{\psi'(a)} = 0, \quad (11.67)$$

где для диска постоянной толщины

$$-\lambda \frac{\psi(a)}{\psi'(a)} = \frac{J_1(\lambda a) - \mu N_1(\lambda a)}{2 \frac{J_1(\lambda a)}{\lambda a} - J_0(\lambda a) - \mu \left[ \frac{2N_1(\lambda a)}{\lambda a} - N_0(\lambda a) \right]}; \\ \mu = \frac{J_1(\lambda b)}{N_1(\lambda b)}. \quad (11.68)$$

Пример. Для определения влияния вращения диска на частоты колебаний лопаток приведен расчет для диска радиусом  $a = 66$  см, внутренним  $b = 0,15a$ ; линейная скорость на контуре диска принята равной 270 м/сек. Толщина диска  $y_a = 2$  см. Приведенная толщина лопаток прямоугольного сечения ( $\delta H = y_a H$ )

$$H_0 = \sqrt[3]{\frac{12JZ}{100y_a}},$$

принята равной единице (при  $Z = 100$ ,  $y_a = 2$ ), постоянная

$$N = \frac{m}{a\rho} = \frac{100HbI\rho}{a\rho 2\pi a y_a} = \frac{100H}{4\pi a} \approx \frac{7096}{a}.$$

Задаваясь различными значениями  $s$ , найдем решение частотных уравнений для вращающегося (11.66) и невращающегося (11.67) дисков. Проведенные расчеты показывают, что значения  $s$  для обоих случаев почти не отличаются.

## КОЛЕБАНИЯ ДИСКОВ С УЧЕТОМ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ

### Напряжения в срединной плоскости

В гл. 9 было приведено выражение потенциальной энергии изгиба пластины при наличии усилий в срединной плоскости.

В полярной системе координат

$$V_\theta = \frac{1}{2} \iint h(r\theta) \left\{ \sigma_r \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sigma_\theta \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + 2\tau_{r\theta} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} \times \\ \times r dr d\theta + \frac{1}{2} \iint D(r, \theta) \left\{ (\Delta w)^2 + 2(1-\nu) \times \right. \\ \times \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta. \quad (11.69)$$

Найдем напряжения в срединной плоскости для вращающегося диска. При учете температуры относительные удлинения выражены в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \nu\sigma_r) + \alpha T; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu\sigma_{\theta}) + \alpha T. \end{aligned} \right\} \quad (11.70)$$

Деформации связаны с перемещениями для осесимметричной деформации зависимостями

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (11.71)$$

Вариация потенциальной энергии единицы объема

$$\delta V = (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_{\theta} \delta \varepsilon_{\theta} + 2\tau_{r\theta} \delta \varepsilon_{r\theta}).$$

После подстановки в это выражение зависимостей (11.70) и (11.71) для всего диска получим

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_0^a \int_b^a h(r) r dr d\theta (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_{\theta} \delta \varepsilon_{\theta} + 2\tau_{r\theta} \delta \varepsilon_{r\theta}) = \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \delta \left\{ \int_b^a \frac{h(r) r E}{1-\nu^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2\nu \frac{u}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \left( \frac{u}{r} \right)^2 \right] dr - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_b^a \frac{E(1+\nu)\alpha T}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) hr dr \right\}. \end{aligned}$$

Вариация потенциальной энергии от центробежных сил

$$\delta \Phi_{\omega} = -2\pi r \omega^2 \int_b^a hr^2 \delta u dr.$$

Вариация работы внешних сил

$$\left. \begin{aligned} \delta V_a &= -2\pi ah(a) p_a \delta u(a); \\ \delta V_b &= -2\pi bh(b) p_b \delta u(b). \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, задача сводится к разысканию экстремума функционала

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_b^a \frac{Eh(r) r}{1-\nu^2} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2\nu \frac{u}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{u}{r} \right)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - 2(1+\nu)\alpha T \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \right\} dr - 2\pi r \omega^2 \int_b^a hr^2 u dr - \\ &\quad - 2\pi [ah(a) p_a u_a + bh(b) p_b u_b]. \end{aligned} \quad (11.72)$$

Принимаем  $u = \sum_{k=1}^n a_k f_k$ , где  $f_k = r^{k-1}$  для диска с отверстием и  $f_k = r^k$  для диска без отверстия ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Применяя метод Ритца, приходим к системе уравнений для определения неопределенных параметров  $a_i$

$$\sum_{j=1}^n a_j \left\{ \int_0^1 \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \left( r_1 - \frac{b}{b-a} \right) f'_i f'_j + \nu (f_i f'_j + f'_j f_i) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r_1 - \frac{b}{b-a}} f_i f_j \right] dr_1 \right\} = (a-b) \int_0^1 \left[ \frac{Eh}{1-\nu} aT \times \right. \\ \left. \times \left( f'_i + \frac{1}{r_1 - \frac{b}{b-a}} f_i \right) + \rho \omega^2 \left( r_1 - \frac{b}{b-a} \right) h (b-a)^2 f_i \right] \times \\ \left. \times \left( r_1 - \frac{b}{b-a} \right) dr_1 + ah(a) p_a f_i(a) + bh(b) p_b f_i(b) \quad (11.73)$$

для  $i = 1, 2, \dots$ ;

здесь  $r_1 = \frac{r-b}{a-b}$ .

Для решения поставленной задачи составлена программа, позволяющая по методу Ритца находить значения перемещений и напряжений при количестве параметров до 18 с произвольными степенными функциями и для переменных  $h, E, \alpha, T$  и  $\nu$ .

Дифференцирование производится точно, а интегралы вычисляются по формуле Котеса.

Зная напряжения в срединной плоскости диска, можно найти потенциальную энергию его по формуле (11.69).

#### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИТЦА К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ ДИСК—ЛОПАТКИ

Потенциальная энергия системы диск—лопатки

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22}; \quad (11.74)$$

здесь  $U_{11}$  — энергия системы от перемещения в аксиальном направлении;  $U_{12}$  — энергия, появляющаяся из-за пространственной формы изгиба лопатки;  $U_{22}$  — энергия системы от перемещения в тангенциальном направлении. Такое разделение сделано с целью удобства решения задачи в матричной форме.

Имеем

$$U_{11} = V_{\partial} + V_{12} + V_{13}, \quad (11.75)$$

где  $V_{\partial}$  — энергия диска с учетом влияния его напряженного состояния (11.69);

$$V_{13} = -\frac{Z}{2\pi} \cdot \frac{\rho\omega^2}{2} \int_a^{2\pi} d\theta \int_b^{a+l} \left\{ Fr \int_a^r \left( \frac{\partial\omega}{\partial r} \right)^2 dr \right\} dr — работа центробежных сил;$$

$$V_{13} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^{a+l} \left\{ (EJ_1 \sin^2 \beta + EJ_2 \cos^2 \beta) \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \right)^2 \right\} dr — энергия изгиба лопаток в аксиальном направлении.$$

Далее,

$$U_{12} = \frac{Z}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^{a+l} \left[ (EJ_2 - EJ_1) \sin \beta \cos \beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] dr.$$

Для энергии  $U_{22}$  имеем следующее значение:

$$U_{22} = V_{2\partial} + V_{21} + V_{22} + V_{23} + V_{24}, \quad (11.76)$$

где

$$V_{2\partial} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_b^a Gh(r) \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \omega \right)^2 r^3 dr d\theta — энергия кручения диска;$$

$$V_{22} = \frac{Z}{2\pi} \cdot \frac{\rho\omega_{\theta}^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^{a+l} F \left[ u^2 - r \int_a^r \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr \right] dr — работа центробежных сил;$$

$$V_{23} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^{a+l} \left\{ [EJ_1 \cos^2 \beta + EJ_2 \sin^2 \beta] \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)^2 \right\} dr — энергия изгиба лопаток;$$

$$V_{24} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum k_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial r} \right)_i^2 \right\} d\theta — энергия связей лопаток проволокой или бандажом для  $r = r_i$ .$$

Аналогичным образом кинетическая энергия от перемещения в аксиальном направлении будет

$$T_{11} = T_{1\partial} + T_{13}. \quad (11.77)$$

$$\text{Здесь } T_{1\partial} = \frac{1}{2} \rho p^2 \int_0^{2\pi} \int_b^a h(r) \omega^2 r dr d\theta — кинетическая энергия$$

диска;

$$T_{13} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z}{2\pi} \rho p^2 \int_0^{2\pi} \int_a^{a+l} F \omega^2 dr d\theta — кинетическая энергия лопаток.$$

Кинетическая энергия от перемещения в тангенциальном направлении

$$T_{22} = T_{2\partial} + T_{23}, \quad (11.78)$$

где  $T_{2\partial} = \frac{1}{2} \rho p^2 \int_0^{2\pi} \int_b^a h(r) u^2 r dr d\theta$  — энергия кручения диска;

$T_{23} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z}{2\pi} \rho p^2 \int_0^{2\pi} \int_a^{a+l} F u^2 dr d\theta$  — энергия изгиба лопаток.

Для определения частот колебаний и соответствующих форм колебаний удобно задать перемещения  $w$ ,  $u$  в виде степенных рядов

$$u = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(r); \quad w = \sum_{i=k+1}^p \alpha_i \varphi_i(r), \quad (11.79)$$

причем  $r$  меняется в пределах от  $r = b$  до  $r = a + l$ , т. е. перемещения лопатки и диска описываются одним выражением.

Имеем следующую структуру матриц (11.74) и (11.75) после дифференцирования по параметрам:

$$U' = \begin{vmatrix} U'_{11} & U'_{12} \\ U'_{21} & U'_{22} \end{vmatrix}; \quad T' = \begin{vmatrix} T'_{11} & 0 \\ 0 & T'_{22} \end{vmatrix}.$$

Здесь обозначено:

$$U'_{11} = \frac{\partial U_{11}}{\partial \alpha_i}; \quad U'_{12} = U'_{21} = \frac{\partial U_{12}}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k);$$

$$U'_{22} = \frac{\partial U_{22}}{\partial \alpha_i} \quad (i = k + 1, \dots, p);$$

$$T'_{11} = \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k);$$

$$T'_{22} = \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_i} \quad (i = k + 1, \dots, p).$$

Таким образом, характеристические числа  $\lambda$  определяются из уравнения

$$U'^{-1} T' = \frac{1}{\lambda} E. \quad (11.80)$$

После нахождения  $\lambda$  строятся формы колебаний согласно формуле (11.79).

Ранее нами рассмотрены тангенциальные колебания облопаченных дисков и показан общий ход решения задачи об аксиальных колебаниях облопаченного диска с помощью метода Ритца. Основные сведения по расчету роторов турбомашин с помощью дискретных моделей приводим ниже.



## ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ ДИСК—ЛОПАТКИ

Для исследования изгибных колебаний облопаченных дисков турбомашин применяется метод сосредоточенных параметров, основу которого составляет замена исследуемой континуальной системы соответствующей дискретной моделью. Этот метод подробно развит в работах С. И. Богомолова [7].

Как известно, дискретная модель рабочей лопатки, совершающей изгибно-крутильные колебания может быть представлена в виде системы сосредоточенных масс, соединенных невесомыми упругими элементами. Рассматривая элемент лопатки, выделенный двумя сечениями, можно записать матричное уравнение

$$X^{k+1} = a^k X^k, \quad (11.81)$$

выражающее прогиб, угол поворота изгибающий момент и перерезывающую силу в сечениях  $k$  и  $k + 1$ . Переходя от сечения к сечению, можно с помощью уравнения (I) выразить вектор-столбец

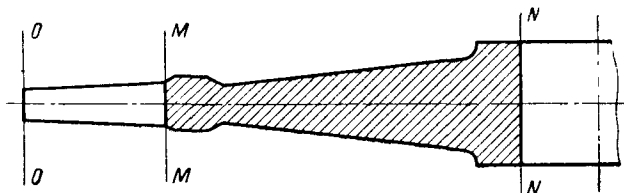


Рис. 11.11

параметров деформированного состояния лопатки в корневом сечении  $M$  через соответствующие его значения в конечном сечении  $O$  (рис. 11.11)

$$X^M = AX^O, \quad (11.82)$$

где

$$A = \alpha a^{M-1} \dots a^k \dots a^0;$$

$\alpha$  — матрица упругого защемления лопатки в диске;

$a^k$  — матрица 10-го порядка, характеризующая упругие и инерционные свойства  $k$ -го элемента лопатки.

Дискретная модель диска, совершающего изгибные колебания, представляет собой систему концентрических и массовых элементов. Упругие элементы представляют собой невесомые кольцевые пластинки переменной толщины, упругие свойства которых достаточно точно совпадают со свойствами соответствующих участков диска. Массовые же элементы, находящиеся между кольцевыми упругими элементами, обладают лишь инерционными свойствами и не имеют ни жесткости, ни протяженности в радиальном направлении.

Матричное уравнение, описывающее изгибные колебания диска, получается на основе решения задачи о статическом изгибе невесомых упругих кольцевых полос и рассмотрения динамических условий равновесия массовых элементов дискретной модели. Учитывая эти уравнения и переходя от одного дискретного элемента диска к другому, получим матричное уравнение

$$Y^N = BY^M, \quad (11.83)$$

которое устанавливает соответствие параметров деформированного состояния диска (прогиб, угол поворота, изгибающий момент и перерезывающая сила) на наружном и внутреннем контурах диска (рис. 11.10) через его упругие и инерционные свойства. В уравнении (11.83)

$$B = e^{N-1} m^{N-1} \dots e^k m^k \dots e^M m^M;$$

$e^k$  и  $m^k$  — матрицы, характеризующие упругие и массовые свойства  $k$ -го упругого и инерционного элементов соответственно.

Влияние центробежных сил и температурных напряжений на изгибные колебания дисков учитывается на основе решения соответствующей задачи для неравномерно нагретого вращающегося диска.

Для нахождения частот и форм собственных колебаний системы диск-лопатки уравнения (11.81) и (11.83) должны быть подчинены соответствующим граничным условиям и условиям сопряжения.

Теоретические и экспериментальные исследования совместных колебаний рабочих лопаток и диска позволили установить некоторые общие закономерности динамической системы диск—лопатки.

Так, можно отметить, что участие рабочих лопаток в колебаниях совместно с диском обращает облопаченный диск в систему, обладающую в диапазоне частот, представляющем практический интерес, несравненно большим числом резонансных состояний, чем отдельные рабочая лопатка или же диск [7]. Это утверждение может быть проиллюстрировано данными табл. 11.1, в которой приведены расчеты частот в герцах собственных колебаний отдельной рабочей лопатки и системы диск—лопатки рабочего колеса одной из паровых турбин. Диск этой турбины имеет наружный радиус 529 мм, радиус втулки 335 мм, а длина рабочей лопатки составляет 189 мм.

В табл. 11.1 приведены первые три частоты собственных колебаний отдельной рабочей лопатки и спектр частот облопаченного диска.

Экспериментально и теоретически установлено, что в некоторых случаях могут представлять опасность колебания облопаченных дисков с узловыми окружностями.

Частоты колебаний отдельной лопатки и системы диск—лопатки

Номер формы колебаний	Отдельная лопатка	Число узловых диаметров				
		$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
I	683	416	424	433	444	457
II	1479	648	649	650	652	654
III	2838	1750	1830	1020	2034	2180

До настоящего времени существует мнение, что изгибные колебания дисков с узловыми окружностями являются высокочастотными и поэтому никакой опасности не представляют.

Действительно, необлопаченные диски, или же диски с короткими рабочими лопатками, имеют частоты изгибных колебаний с узловыми окружностями, которые располагаются на самом полотне диска, как правило, довольно высокие, и поэтому такие колебания чаще всего безопасны. Совершенно по-иному следует подходить к оценке такого вида вибраций дисков облопаченных, если эти диски несут достаточно податливые рабочие лопатки, которые активно участвуют в колебаниях совместно с диском. Узловые окружности при колебаниях таких рабочих колес, как правило, располагаются уже не на полотне диска, а на рабочих лопатках, частоты колебаний не являются слишком высокими, а степень возбудимости этих колебаний может быть такой, что необходимо с должным вниманием отнестись к возможности их появления в рабочих колесах турбомашин.

На рис. 11.12 приведены формы колебаний рабочего колеса ступени паровой турбины, частоты которого даны в табл. 11.1. На рис. 11.12, в отчетливо видно, что третья форма колебаний системы диск—лопатки в частотном диапазоне 1750—2180 гц представляет собой колебания с узловыми окружностями, которые проходят по рабочим лопаткам. Здесь через  $u$  обозначено перемещение лопаток в тангенциальном направлении, через  $v$  — перемещение диска совместно с лопатками в аксиальном направлении,  $n$  обозначает число узловых диаметров, а по оси ординат отложены относительные значения амплитуд. Следует заметить, что частоты этих колебаний рабочего колеса ниже третьих частот собственных колебаний отдельной рабочей лопатки.

Существенное значение для динамических свойств облопаченных дисков имеет угол установки лопаток на этих дисках. Это проявляется не только в изменении частот собственных колебаний дисков в зависимости от угла установки лопаток, но главным

образом в том, что возникают дополнительные, часто низко частотные спектры колебаний облопаченных дисков.

Если угол установки лопаток на диске отличен от нуля, то при изгибных колебаниях диска возбуждаются не только аксиаль-

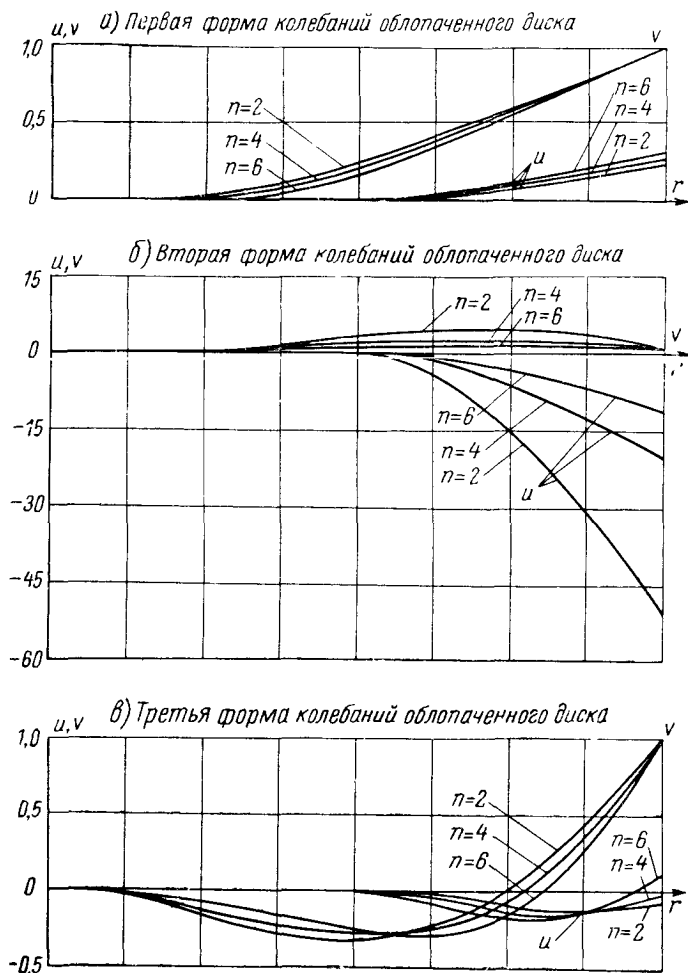


Рис. 11.12

ные, но также и тангенциальные колебания лопаток, которые являются причиной возникновения дополнительного спектра резонансных частот системы диск—лопатки. Это положение может быть подтверждено данными таблицы, а также рис. 11.12, б, откуда следует, что из-за весьма интенсивных тангенциальных колебаний

лопаток, взаимодействующих с изгибными колебаниями диска, возникает дополнительный весьма узкий спектр резонансных колебаний в диапазоне 648—654 гц.

Следует также подчеркнуть, что взаимодействие изгибных колебаний диска с колебаниями рабочих лопаток приводит к тому, что в системе диск—лопатки характер колебаний рабочих лопаток отличен от колебаний этой же лопатки, но изолированной от диска. Одни лопатки, колеблющиеся совместно с невращающимся диском, совершают только лишь изгибные, другие — изгибно-крутильные, а большинство лопаток совершают различной интенсивности изгибно-крутильные колебания даже в том случае, если центр тяжести и центр жесткости поперечного сечения рабочих лопаток совпадают. Это различие в колебаниях рабочих лопаток определяется в первую очередь положением лопаток относительно узловых радиусов диска. Таким образом, колебания диска существенным образом сказываются на характере колебаний рабочих лопаток.

---

1 2 3

### КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК

Оболочки, как элементы машин и сооружений (трубопроводов, резервуаров, воздушных баллонов и т. п.), имеют широкое применение в технике.

Во многих случаях они подвергаются действию периодических и импульсивных нагрузок, а поэтому умение определять собственные частоты колебаний оболочек имеет очень важное значение.

#### УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОБОЛОЧЕК

##### Общие уравнения в ортогональных координатах

Для произвольных ортогональных криволинейных координат квадрат линейного элемента

$$ds^2 = (A d\alpha)^2 + (B d\beta)^2,$$

где  $A$  и  $B$  — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочек.

Будем считать, что толщина оболочки  $h$  мала по сравнению с другими измерениями и радиусом; нормальные к срединной поверхности элементы не искривляются при деформациях; надавливания слоев, параллельных срединной поверхности (теория Кирхгофа—Лява) не имеет места. Тогда для компонент деформации имеем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \varepsilon_1 - z\kappa_1; & \varepsilon_{\beta\beta} &= \varepsilon_2 - z\kappa_2; & \varepsilon_{\alpha\beta} &= \gamma - z\omega_1; \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{R_1}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{w_2}{R}; \\ \gamma &= \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right); \\ \kappa_1 &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{R_1} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB} \left( \frac{v}{R_2} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \frac{\partial A}{\partial \beta}; \\ \kappa_2 &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{v}{R_2} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{AB} \left( \frac{u}{R_1} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial B}{\partial \alpha}; \\ \omega_1 &= \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{BR_2} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{w}{\partial \beta} \right) + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{AR_1} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right), \end{aligned} \right\} (12.1)$$

где

$u, v, \omega$  — компоненты перемещения точек срединной поверхности;

$R_1(\alpha, \beta); R_2(\alpha, \beta)$  — радиусы кривизны линий  $\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}$ .

Используя формулы (12.1) легко найти потенциальную и кинетическую энергию деформаций оболочки:

$$\left. \begin{aligned}
 V &= \frac{E}{2(1-\nu)} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\beta_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \varepsilon_{\alpha\alpha}^2 + \varepsilon_{\beta\beta}^2 + 2\nu\varepsilon_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\beta\beta} + \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \right\} \times \\
 &\quad \times d\alpha d\beta dz; \\
 T &= \frac{\rho}{2} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\beta_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2 \right\} d\alpha d\beta dz.
 \end{aligned} \right\} (12.2)$$

На основе принципа Гамильтона и с помощью выражений энергии (12.2) можно найти уравнения колебаний оболочки. Для этих уравнений вывел из условий равновесия элемента оболочки:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(N_{\alpha B})}{\partial\alpha} + \frac{\partial(N_{\alpha\beta A})}{\partial\beta} - N_{\alpha\beta} \frac{\partial A}{\partial\beta} - N_{\beta} \frac{\partial B}{\partial\alpha} \right\} - \frac{Q_{\alpha}}{R_1} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
 \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(N_{\alpha\beta B})}{\partial\alpha} + \frac{\partial(N_{\beta A})}{\partial\beta} - N_{\alpha} \frac{\partial A}{\partial\beta} + N_{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial\alpha} \right\} - \frac{Q_{\beta}}{R_2} &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\
 \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(Q_{\alpha B})}{\partial\alpha} + \frac{\partial(Q_{\beta A})}{\partial\beta} + \frac{V_{\alpha}}{R_1} + \frac{N_{\beta}}{R_2} \right\} &= \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}; \\
 \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(M_{\alpha B})}{\partial\alpha} + \frac{\partial(M_{\beta A})}{\partial\beta} + M_{\alpha} \frac{\partial A}{\partial\beta} - M_{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial\alpha} \right\} + Q_{\beta} &= 0; \\
 \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(M_{\alpha B})}{\partial\alpha} + \frac{\partial(M_{\alpha\beta A})}{\partial\beta} - M_{\alpha\beta} \frac{\partial A}{\partial\beta} - M_{\beta} \frac{\partial B}{\partial\alpha} \right\} - Q_{\alpha} &= 0,
 \end{aligned} \right\} (12.3)$$

где

$$N_{\alpha} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); \quad N_{\beta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1);$$

$$N_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma; \quad N_{\alpha\beta} = -N_{\beta\alpha}; \quad M_{\alpha} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu\kappa_2);$$

$$M_{\beta} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_2 + \nu\kappa_1); \quad M_{\alpha\beta} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \omega_1;$$

$$M_{\alpha\beta} = -M_{\beta\alpha}.$$

Зная выражение коэффициентов первой квадратичной формы для каждой конкретной поверхности оболочки из выражений (12.1), легко получить уравнение колебаний для оболочек различных очертаний, в частности для цилиндрической оболочки.

Краевые условия на контуре оболочки более многообразны, чем у пластинок, вследствие пространственного характера деформации. В общем случае число краевых условий на каждом крае оболочки равно четырем (учитывая уменьшение числа условий в соответствии с принципом Сен-Венана). Например, для  $\beta = \text{const}$ : заземленный край  $u = v = \omega = 0$ ;  $\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} = 0$ ; неподвижно опертый край  $u = v = \omega = 0$ ;  $M_\beta = 0$ ; свободный край  $N_\beta = 0$ ;  $N_{\alpha\beta} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_1} = 0$ ;  $Q_\beta + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} = 0$  и т. д.

### Основные уравнения теории оболочек

**Уравнение технической теории.** Уравнения (12.3) сложны, поэтому многими авторами были предложены различные варианты упрощенных уравнений. Наиболее распространено применение технической моментной теории оболочек, которая основана на следующих упрощениях:

1) принимают, что влиянием компонент растяжения в срединной поверхности из кривизны и кручения  $\kappa_1, \kappa_2, \omega_1$  можно пренебречь;

2) пренебрегают членами, содержащими Гауссову кривизну  $\frac{1}{R_1 R_2}$ , что можно сделать не только для оболочек нулевой Гауссовой кривизны (цилиндрической, конической и т. д.), но и для других, например, для пологих оболочек.

Кроме того, целесообразным оказывается ввести функцию напряжения  $\varphi = \varphi(\alpha, \beta)$  такую, что

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \\ N_\beta &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{A^2 B} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}; \\ N_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{AB} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \right\} (12.4)$$

Обозначая

$$\nabla^2 = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right],$$

можно привести систему (12.3) к общепринятому виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^4 \varphi - \nabla_k^2 \omega &= 0; \\ \nabla_k^2 \varphi + D \nabla^4 \omega - Z &= 0, \end{aligned} \right\} (12.5)$$



$$\text{где } \nabla_k^2 = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{A} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right];$$

$Z$  — нормальная к поверхности оболочки компонента внешней нагрузки.

Если ввести в рассмотрение функцию  $\Phi = \Phi(\alpha, \beta)$  по формулам  $\omega = \nabla^4 \Phi$ ;  $\varphi = Eh \nabla_k^2 \Phi$ , то система (12.5) приводится к одному уравнению восьмого порядка:

$$\nabla^8 \Phi + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} \Delta^4 \Phi - \frac{1}{Eh} Z = 0. \quad (12.6)$$

Уравнения (12.5), (12.6) часто используются в приложениях. Существуют и другие методы упрощения системы.

**Уточненные уравнения движения оболочек.** В ряде задач расчета современных конструкций приходится рассматривать волновые процессы деформации упругих систем. Теория, основанная на гипотезах Кирхгофа—Ляве, предполагает бесконечно большие скорости распространения фронтов упругих волн и не может правильно описать физическую сущность явлений, и, как показали исследования, эта теория применима при

$$\omega c^{-1} h < < 1, \quad (12.7)$$

где  $\omega$  — характерная частота процесса деформации;  $c$  — скорость звука в материале;  $h$  — толщина оболочки.

При воздействии на оболочку интенсивных кратковременных нагрузок соотношение (12.7) может не выполняться, и в этом случае для исследования динамического напряженного состояния необходимо привлекать более точные уравнения движения.

Простейшим уточнением является теория типа теории П. С. Тимошенко, в которой наряду с обычными мембранными и изгибными факторами учитывается также влияние перерезывающих сил и инерции поворота нормального элемента оболочки. Эти уравнения были получены рядом исследователей в связи с изучением распространения упругих волн в цилиндрической оболочке [143].

Компоненты перемещений

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_x(x, \theta, z, t) &= u(x, \theta, t) + z\psi_x(x, \theta, t); \\ \bar{u}_\theta(x, \theta, z, t) &= v(x, \theta, t) + z\psi_\theta(x, \theta, t); \\ \bar{u}_z(x, \theta, z, t) &= w(x, \theta, t), \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

где  $u, v, w, \psi_x, \psi_\theta$  — перемещения срединной поверхности и углы поворота в направлении координатных осей;  $z$  — расстояние от этой поверхности.

Уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1+v}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \frac{v}{a} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\
 & \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{1-v}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1+v}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial s} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial W}{\partial s} - \gamma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0; \\
 & k_1 \left( \nabla^2 W + \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_s}{\partial s} \right) - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial V}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{W}{a} \right) + \\
 & \quad + \gamma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{1-v^2}{Eh} P; \\
 & \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2} \cdot \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial s^2} + \frac{1+v}{2} \cdot \frac{\partial^2 \beta_s}{\partial x \partial s} \right] - k_1 \left( \frac{\partial W}{\partial x} + \beta_x \right) - \\
 & \quad - \gamma^2 \frac{h}{12} \cdot \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} = 0; \\
 & \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial^2 \beta_s}{\partial s^2} + \frac{1-v}{2} \cdot \frac{\partial \beta_s}{\partial x^2} + \frac{1+v}{2} \cdot \frac{\partial^2 \beta_r}{\partial x \partial s} \right] - k_1 \left( \frac{\partial W}{\partial s} + \beta_s \right) - \\
 & \quad - \gamma^2 \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^2 \beta_s}{\partial t^2} = 0;
 \end{aligned} \right\} (12.9)$$

здесь  $k_1 = \frac{1-v}{2} k$ ;  $\gamma^2 = \frac{1-v^2}{E} \rho$ ;  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}$ ;  $k$  — коэффициент сдвига;  $\beta_x$ ,  $\beta_s$  — углы наклона.

В ряде нестационарных задач для цилиндрической оболочки удобно представить систему уравнений (12.9) в разделенном относительно перемещений виде:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left( \Delta^2 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left[ \nabla^2 - \frac{2}{1-v} \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \left\{ \left[ \nabla^2 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \times \right. \\
 & \quad \times \left[ \nabla^2 - \frac{\gamma^2}{k_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{h^2}{12} W + \gamma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \left. \right\} + \\
 & + \frac{1}{a} \left[ 1 - \frac{h^2}{12k_1} \left( \nabla^2 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] \left\{ \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2}{1-v} \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \times \right. \\
 & \quad \times \left( \frac{1-v}{a} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - \left[ \nabla^2 - \frac{2}{1-v} \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \left( \frac{\gamma^2}{a} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) \left. \right\} = \\
 & \quad = \frac{1-v^2}{Ehk_1} \left[ \frac{h^2}{12k_1} \left( \nabla^2 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - 1 \right] \times \\
 & \times \left[ \left( \nabla^2 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)^2 \left( \nabla^2 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{1+v}{2} + \left( \frac{1+v}{2} \right)^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial s^2} \right] P; \\
 & \nabla^2 \nabla^2 u - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{3-v}{1-v} \nabla^2 u - \frac{2}{1-v} \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \\
 & = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - v \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{2v}{(1-v)a} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} \right);
 \end{aligned} \right\} (12.10)$$

$$\begin{aligned}
 & \nabla^2 \nabla^2 V - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{3-v}{1-v} \nabla^2 V - \frac{2}{1-v} \gamma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) = \\
 \approx & -\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + (2+v) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{2}{(1-v)a} \cdot \frac{\partial W}{\partial s} \right); \\
 & \left[ \nabla^2 - \frac{k}{h^2/12} - \frac{2}{1-v} \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \beta_x = \frac{1+v}{1-v} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \{R\}; \\
 & \left[ \nabla^2 - \frac{k}{h^2/12} - \frac{2}{1-v} \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \beta_s = \frac{1+v}{1-v} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \{R\},
 \end{aligned} \quad (12.10)$$

где

$$\begin{aligned}
 R = & \nabla^2 W + \frac{1-v}{1+v} \cdot \frac{k}{h^2/12} W - \frac{1}{k_1} \left( \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{W}{a^2} + \frac{v}{a} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \\
 & - \frac{\gamma^2}{k_1} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.
 \end{aligned}$$

Система уравнений движения (12.10) при отсутствии внешней нагрузки совпадает с системой, приведенной в работах И. Мирского и Л. Германа, а также И. Нагди и Р. Купера [141, 143].

Приведенные выше уравнения (12.9) и (12.10) являются простейшими волновыми уравнениями теории оболочек. Для них показано существование действительных характеристик.

В работе [41] дан общий метод получения уточненных уравнений теории оболочек. Метод позволяет строить уравнения движения более высокой точности, учитывая при этом все члены одинаковой степени малости. Указанный метод весьма громоздок и его следует применять, там где другие методы становятся неэффективными.

Одним из методов получения уточненных уравнений теории оболочек является метод, предложенный А. Л. Гольденвейзером [22].

Уравнения, полученные на базе более точных теорий, применяются при решении таких задач, как динамическая концентрация напряжений, динамика анизотропных и многослойных оболочечных конструкций, высокочастотные колебания, исследование волновых явлений.

## КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

### Формы колебаний оболочек

Более подробно рассмотрим колебания цилиндрических оболочек, в исследовании которых достигнуты наибольшие успехи (рис. 12.1, 12.2).

Цилиндрические оболочки могут иметь значительное количество форм колебаний, которые определяются числом  $n = 2, 3, 4, \dots$  узловых линий вдоль образующих цилиндра (рис. 12.3). Радиальные перемещения по этим линиям можно считать равными

нулю, если не учитывать перемещения вдоль касательной к параллельным кругам (для  $n = 2$ ). Вместе с тем могут существовать узловые линии по параллельным кругам, число которых может быть различно (рис. 12.4).

Поэтому при расчете необходимо установить те формы колебаний, которые могут привести к резонансу. Следует отметить, что для определенной формы с известными  $n$  и  $m$  могут существовать три типа колебаний, что видно будет из тех уравнений, которые получаются для определения частот. Это объясняется тем, что

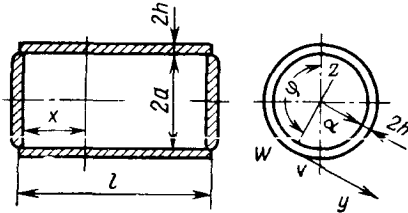


Рис. 12.1

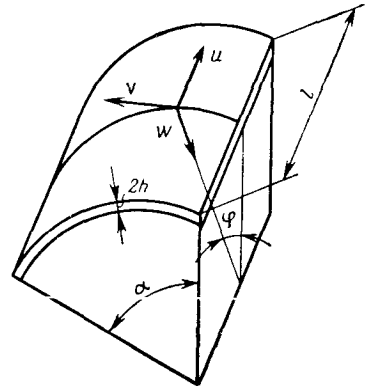


Рис. 12.2

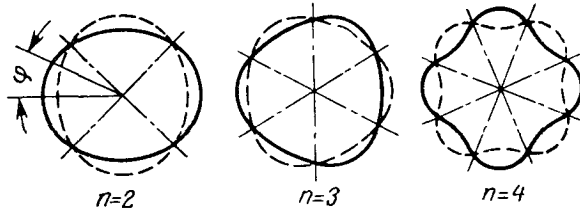


Рис. 12.3

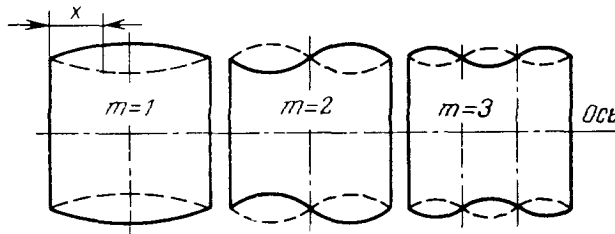


Рис. 12.4

частоты колебаний зависят от перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . При решении задачи необходимо учесть условия на краях. Ниже приведены решения для оболочки, опертой по двум торцовым параллельным кругам, для оболочки, защемленной по торцам, а также для других крайних условий.

## Дифференциальные уравнения колеблющейся оболочки и метод интегрирования

Оси координат для цилиндрической оболочки расположим обычным образом (рис. 12.1).

Обозначим:

$x$  — расстояние от концевого сечения оболочки, вдоль образующей, до некоторой точки срединной поверхности;  
 $\varphi$  — угол плоскости, проведенной через рассматриваемую точку и ось цилиндрической оболочки с неподвижной осевой плоскостью;

$a$  — радиус цилиндрической оболочки;

$2h$  — толщина оболочки;

$\rho$  — масса на единицу поверхности;

$l$  — длина оболочки в направлении образующей;

$\mu$  — коэффициент Пуассона;

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)}; \quad \beta^2 = \frac{h^2}{a^2}.$$

Составляющие перемещения некоторой точки срединной поверхности оболочки обозначим через  $u$  (вдоль образующей),  $v$  (по касательным),  $w$  (по нормали к поверхности).

Из условий равновесия элемента оболочки (рис. 12.5, 12.6) после замены составляющих усилий (нормальных  $T_1, T_2$ , скалывающих  $S_1, S_2$ , изгибающих моментов  $M_1, M_2$  и скручивающих моментов  $H_1 = -H_2$ ) их выражениями через перемещения  $u, v, w$  имеем следующую систему дифференциальных уравнений для определения этих перемещений

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{1+\mu}{2} - \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\beta^2}{3} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \varphi} - \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} - \\ & \quad - \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\beta^2}{3} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \varphi^2} = \frac{\rho a^2 (1-\mu^2)}{2Eh} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ & \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2} (1+\beta^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \left( 1 + \frac{\beta^2}{3} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \\ & \quad + \frac{\beta^3}{3} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} - \frac{3-\mu}{2} \cdot \frac{\beta^2}{3} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi} = \frac{\rho a^2 (1-\mu^2)}{2Eh} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ & \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\beta^2}{3} \cdot \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} - \frac{2-\mu}{3} \beta^2 \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi \partial \xi^2} - \frac{2}{3} \beta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^2 \partial \xi^2} - \\ & \quad - \frac{\beta^2}{3} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - w - \frac{\beta^2}{3} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} = \frac{a^2 (1-\mu^2)}{2Eh} \left( \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z(\xi, \varphi, t) \right), \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

где  $\xi = \frac{x}{a}$ , а  $Z(\xi, \varphi, t)$  — внешняя периодическая нагрузка, отнесенная к единице поверхности оболочки.

В дальнейшем будем предполагать, что цилиндрическая оболочка будет замкнута (рис. 12.1) или не замкнута (рис. 12.2),

причем в последнем случае угол дуги поперечного сечения, нормального к оси, равен  $\alpha$ .

В этом случае будем считать, что оболочка оперта по двум образующим  $\varphi = 0$ ;  $\varphi = \alpha$ , т. е. по этим образующим будут равны нулю  $u$ ,  $w$  и изгибающие моменты  $M_1$ ,  $M_2$ .

Общее решение системы уравнений может быть найдено в форме

$$\left. \begin{aligned} u &= U(\xi) \sin n\varphi \sin kt; \\ v &= V(\xi) \cos n\varphi \sin kt; \\ w &= W(\xi) \sin n\varphi \sin kt \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

и в предположении, что внешняя периодическая нагрузка задана в виде  $Z(\xi, \varphi, t) = q(\xi, \varphi) \sin kt$ .

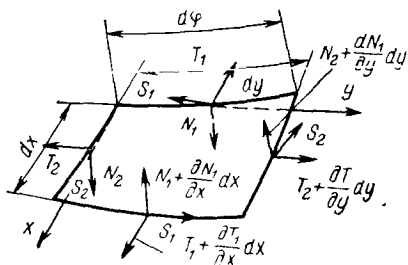


Рис. 12.5

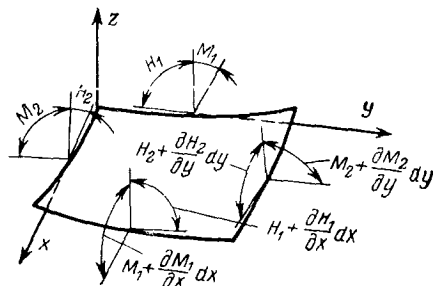


Рис. 12.6

Для случая незамкнутой цилиндрической оболочки необходимо взять вместо  $n$  значение  $\frac{\pi}{a} n$  ( $n$  — целое число).

После подстановки выражений  $n$ ,  $v$ ,  $w$  в уравнения (12.11) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $U$ ,  $V$ ,  $W$ . Решение этой системы при любых условиях заземления по двум концевым сечениям

$$x = 0; \quad x = l$$

проще всего получить с помощью операционного исчисления.

Например, для закрепленных концов оболочки ( $\xi = 0$ ;  $\xi = \frac{l}{a}$ ) необходимо удовлетворить условиям

$$\omega = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0; \quad v = 0. \quad (12.13)$$

Поэтому, вводя символ  $p$  для обозначения интегрирования, имеем для условий (12.9) при  $\xi = 0$  следующие соотношения:

$$W = \int_0^{\xi} \frac{dW}{d\xi} d\xi = \frac{1}{p} \cdot \frac{dW}{d\xi}; \quad \frac{dW}{d\xi} = \int_0^{\xi} \frac{d^2 W}{d\xi^2} d\xi = \frac{1}{p} \cdot \frac{d^2 W}{d\xi^2}.$$

Таким образом, после вычислений производных получим

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\xi} &= pW; & \frac{d^2W}{d\xi^2} &= p^2W; \\ \frac{d^3W}{d\xi^3} &= p^3W - p\omega_1; & \frac{d^4W}{d\xi^4} &= p^4W - p^2\omega_1 - p\omega_2; \\ \frac{dU}{d\xi} &= pU - p\omega_3; & \frac{d^2U}{d\xi^2} &= p^2U - p^2\omega_3; \\ \frac{dV}{d\xi} &= pV; & \frac{d^2V}{d\xi^2} &= p^2V - p\omega_4, \end{aligned}$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  — произвольные постоянные.

После подстановки этих значений для производных в уравнения (12.11) относительно  $u, v, \omega$  получим систему уравнений, из которой по обычным правилам операционного исчисления найдем  $U, V, W$ .

Удовлетворяя условиям для правого концевого сечения, получим систему четырех линейных уравнений относительно произвольных постоянных  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ . В случае, когда  $Z(x, \varphi, t) = 0$ , приравнявая нулю определитель, составленный из коэффициентов при  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ , получим уравнение частоты свободных колебаний.

Так как такой метод решения требует все же значительной вычислительной работы, то для случая, когда сечения оболочки могут быть заделаны, приведем другой метод.

### Применение тригонометрических рядов

Когда оболочка оперта по двум параллельным кругам  $x = 0, x = l$ , уравнение частоты свободных колебаний получается без всяких затруднений, если взять следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} u &= A \cos \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi \sin kt; \\ v &= B \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi \sin kt; \\ \omega &= C \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi \sin kt. \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$

После подстановки этих значений в уравнение (12.11) получим систему уравнений относительно  $A, B, C$ , определитель которой дает уравнение частоты третьей степени относительно  $k^2$ . Из этого уравнения для заданных  $m$  и  $n$  получим частоты соответствующего тона для поперечных и двух продольных колебаний опертой оболочки. Это уравнение (12.23) приведем ниже.

В том случае, когда одно или оба концевых сечения оболочки заделаны, будем искать решение, удовлетворяющее условиям закрепления, в форме двойных рядов Фурье:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_n \sum_m A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \lambda n \varphi \sin kt; \\ v &= \sum_n \sum_m B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \lambda n \varphi \sin kt; \\ \omega &= \sum_n \sum_m G_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \lambda n \varphi \sin kt. \end{aligned} \right\} \quad (12.15)$$

Эти ряды удовлетворяют всем условиям (12.13), за исключением условия  $\frac{dW}{d\xi} = 0$  для  $\xi = 0$  и  $\xi = \frac{l}{a}$ .

Для получения решения, удовлетворяющего этому условию, предположим, что нагрузка  $q(\xi, \varphi)$  везде равна нулю. За исключением интервала от  $\xi = \xi_1$  до  $\xi = \xi_1 + \sigma_1$  (от  $x = c$  до  $x = c_1 + \sigma$ ), причем в этом интервале в направлении оси  $x$  она меняется по закону прямоугольника, а по дуге круга — по закону

$$p = \sum_n \frac{s^2}{\pi^2 x^2} q_n \sin \frac{n\pi}{\alpha} \varphi \sin kt,$$

причем  $q_n \sigma \rightarrow p_n$ , когда  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $s = \alpha a$ .

Разлагая  $q(\xi, \varphi)$  в двойной ряд Фурье

$$q(\xi, \varphi) = \sum_m \sum_n q_{mn} \sin \frac{\pi}{\alpha} n \varphi \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (12.16)$$

получим при условии  $q_n \sigma \rightarrow p_n$ ,  $\sigma \rightarrow 0$

$$q_{mn} = \frac{2s^2}{\pi^2 l} p_n \sin \frac{m\pi c_1}{l}. \quad (12.17)$$

После подстановки значений  $u$ ,  $v$ ,  $\omega$  получим для определения  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$  следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} &\left( m^2 v^2 + \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 n^2 - \omega^2 \right) A_{mn} + \left( \frac{1+\mu}{2} - \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\beta^2}{3} \right) \times \\ &\quad \times \lambda v_{mn} B_{mn} + \left( \mu - \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\beta^2}{3} \right) m v C_{mn} = 0; \\ &\quad \frac{1+\mu}{2} \lambda v m n A_{mn} + \\ &\quad + \left[ \frac{1-\mu}{2} (1 + \beta^2) m^2 v^2 + n^2 \lambda^2 \left( 1 + \frac{\beta^2}{3} \right) - \omega^2 \right] B_{mn} + \\ &\quad + \left[ \lambda n + \frac{3-\mu}{2} \cdot \frac{\beta^2}{3} \lambda v^2 n m^2 + \frac{\beta^2}{3} \lambda^3 n^2 \right] C_{mn} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (12.18)$$



$$\left. \begin{aligned} & \mu\nu t A_{mn} + \left( \lambda n + \frac{2-\mu}{3} \beta^2 \lambda v^2 n m^2 + \frac{\beta^2}{3} \lambda^3 n^3 \right) B_{mn} + \\ & + \left( 1 + \frac{\beta^2}{3} v^4 m^4 + \frac{\beta^2}{3} \lambda^4 n^4 + \frac{2}{3} \beta^2 \lambda^2 v^2 n^2 m^2 - \omega^2 \right) C_{mn} = \\ & = \frac{2s^2}{\pi^2 l} \cdot \frac{(1-\mu) a^2}{2Eh} \rho_n \sin \frac{\pi m c_1}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (12.18)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} & \lambda = \frac{\pi}{a}; \quad v = \frac{\pi a}{l}; \quad s = \alpha a; \quad b = \frac{l}{s}; \\ & \omega^2 = \frac{\rho(1-\mu^2) a^2}{2Eh} k^2. \end{aligned} \right\} \quad (12.19)$$

Определяя из уравнений (12.18)  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$  и приближая  $c_1$  к нулю или к  $l$ , в предположении, что  $c_1 \rho_n \rightarrow M_n$ , когда  $c_1 \rightarrow 0$  [или  $(l-c) \rho_n \rightarrow M_n$ , когда  $c \rightarrow l$ ], придем к тому случаю, когда по концам сечением приложены изгибающие моменты.

Значение для  $\omega$  ( $\xi$ ,  $\varphi$ ) будет

$$\begin{aligned} \omega = & - \frac{2s^2(1-\mu^2)a^2}{\pi^2 E h} \sum_n \sum_m \frac{(\omega^4 + c_{mn}\omega^2 + d_{mn})m}{\omega^6 + e_{mn}\omega^4 + f_{mn}\omega^2 - g_{mn}} \times \\ & \times (M_n - \cos m\lambda M'_n) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \lambda n \varphi. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Коэффициенты  $c_{mn}$ ,  $d_{mn}$ , ...,  $g_{mn}$  имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} c_{mn} = & - \frac{3-\mu}{2} v^2 (m^2 + b^2 n^2) - \beta^2 v^2 \left( \frac{1-\mu}{2} m^2 + \frac{b^2 n^2}{3} \right); \\ d_{mn} = & \frac{1-\mu}{2} v^4 (m^2 + b^2 n^2)^2 + \delta_{mn}; \\ \delta_{mn} = & \frac{1-\mu}{2} \beta^2 v^4 \left( m^4 + \frac{1}{3} b^4 n^4 \right) + \\ & + \frac{\beta^2}{3} (4 - 3\mu + \mu^2) \lambda^2 v^2 m^2 n^2; \\ e_{mn} = & - \frac{\beta^2}{3} v^4 m^4 - \left[ \frac{3-\mu}{2} + \right. \\ & + \left. \frac{2}{3} \beta^2 \left( 3 \frac{1-\mu}{4} + \lambda^2 n^2 \right) \right] v^2 m^2 - \\ & - \left[ \frac{3-\mu}{2} + (1 + n^2 \lambda^2) \frac{\beta^2}{3} \right] n^2 \lambda^2 - 1; \\ f_{mn} = & \frac{\beta^2}{6} [3 - \mu + (1 - \mu) \beta^2] v^6 m^6 + \\ & + \left\{ \frac{1-\mu}{2} + \frac{\beta^2}{2} [1 - \mu + \right. \\ \text{отр} & \left. + n^2 \lambda^2 \left( 3 - \mu + \frac{2-\mu-\mu^2}{9} \beta^2 \right) \right\} v^4 m^4 + \end{aligned} \right\} \quad (12.21)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ (1 - \mu) \left( \frac{3 - 2\mu}{2} + n^2 \lambda^2 \right) + \right. \\
 & + \frac{\beta^2}{2} \left[ 1 - \mu + (3 - \mu) n^4 \lambda^4 - \frac{3 - \mu}{3} \lambda^2 n^2 \right] \left. \right\} v^2 n^2 + \\
 & + \frac{1 - \mu}{2} \lambda^2 n^2 (1 + \lambda^2 n^2) + \\
 & + \frac{\beta^2}{3} \lambda^2 n^2 \left[ \frac{1 - \mu}{2} n^2 \lambda^2 (1 + \lambda^2 n^2) + (n^2 \lambda^2 - 1)^2 \right]; \quad (12.21) \\
 & g_{mn} = - \frac{1 - \mu}{6} \beta^2 v^8 \gamma_{mn} + \\
 & + \frac{1 - \mu}{6} \beta^2 (2n^2 \lambda^2 - 1) (4m^2 v^2 + \lambda^2 n^2) n^2 \lambda^2 - \\
 & - \frac{1 - \mu}{6} \beta^4 v^6 m^6 \left( m^2 v^2 + \frac{4}{3} \lambda^2 n^2 \right),
 \end{aligned}$$

где

$$\gamma_{mn} = (m^2 + b^2 n^2)^4 - \delta_n^4 b^4 m^4,$$

причем

$$\delta_n^4 = \frac{3(1 - \mu^2)}{\beta^2 \lambda^4} + \frac{\beta^2}{3} n^4 - \frac{n^2}{\lambda^2} \left[ 7 - \mu^2 \left( 1 - \frac{\beta^2}{3} \right) \right]. \quad (12.22)$$

### Колебания оболочки, опертой и заделанной по торцам

Рассмотрим в отдельности оболочку, опертую по торцам и заделанную.

**Опертая оболочка.** Для опертой оболочки уравнение частоты является определителем, составленным из коэффициентов при постоянных  $A, B, C$ , т. е. уравнением

$$\omega^6 + e_{mn} \omega^4 + f_{mn} \omega^2 + g_{mn} = 0. \quad (12.23)$$

Задаваясь значениями  $n = 2, 3, 4, \dots$ , найдем корни этого уравнения для  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Значение частоты колебаний может быть получено из рис. 12.7 для  $n = 2, 3, 4, 5$ .

По оси ординат отложены значения  $\omega$ , где

$$k = \omega \sqrt{\frac{2Eh}{\rho(1 - \mu^2)a^2}};$$

по оси абсцисс  $vm = \frac{\pi am}{l}$ ; значение частоты  $f = \frac{k}{2\pi}$ .

**Заделанная оболочка.** Задаваясь определенными значениями  $n$  и удовлетворяя условиям (12.13), получим из выражения (12.20) уравнение частоты в виде простого ряда от  $m$ , которое может быть решено обычным путем при помощи пробных подстановок.

Как видно, члены этого ряда с возрастанием  $m$  будут порядка  $\frac{1}{m^2}$ , к тому же обычно  $\delta_n^4$  имеет значительную величину, так что ряд

будет сходиться медленно. Сходимость этого ряда будет значительно улучшена, если выделить ряд

$$\frac{3}{\sqrt{4\beta^2}} S(x) (M_n - \cos m\pi V'_n), \quad (12.24)$$

где

$$S(x) = \sum_m \frac{(m^2 + n^2 b^2)^2 m}{(m^2 - b^2 + n^2)^4 + \delta_n^4 b^4 m^4} \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (12.25)$$

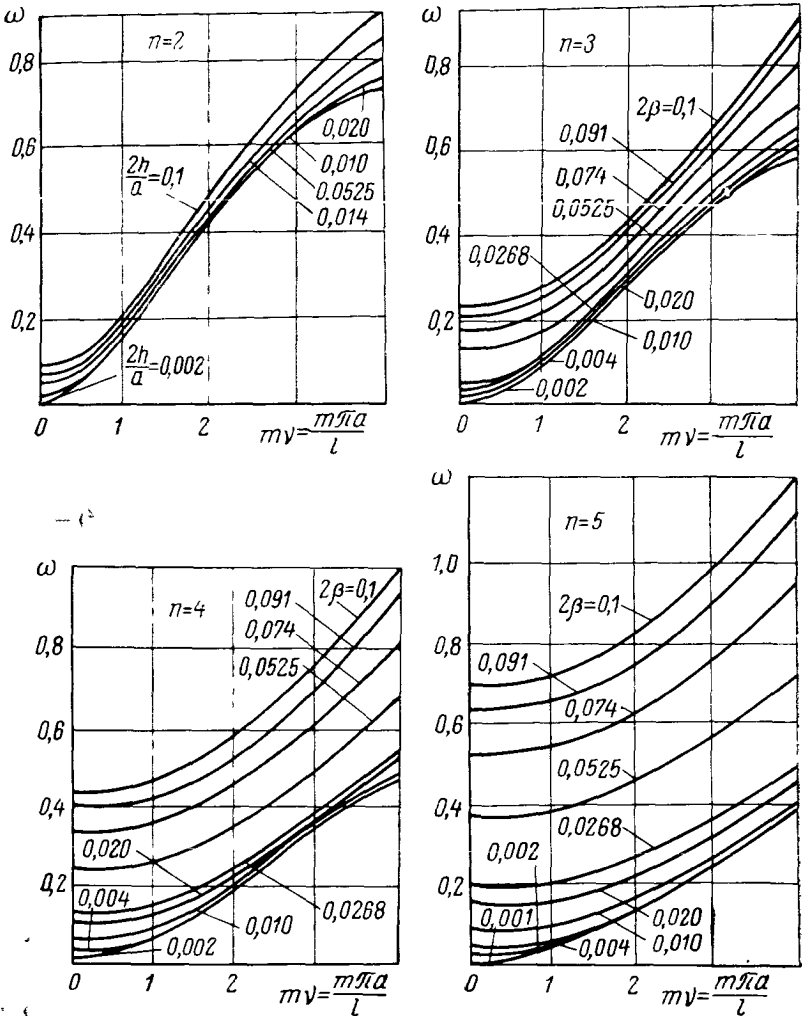


Рис. 12.7

Пример. Рассмотрим цилиндрическую оболочку со следующими данными:

$$\beta^2 = 3 \cdot 10^{-5}; \quad \mu = \frac{1}{6}; \quad \lambda = 1; \quad \nu = \frac{\pi a}{l} = 0,631; \quad b = \frac{\lambda}{\gamma} = \frac{1}{0,631}.$$

Вычисления проделаны для  $n = 4$ .

Для случая опертых концов уравнение частоты будет

$$\omega^6 + e_{m4}\omega^4 + f_{m4}\omega^2 + g_{m4} = 0.$$

Для колебаний, симметричных относительно  $a = \frac{l}{2}$ , для наименьшей частоты наименьший корень при  $m = 1$  определяется из уравнения

$$\omega^6 - 24,2336\omega^4 + 119,408\omega^2 - 0,328970 = 0;$$

отсюда

$$\omega_{\min}^2 = 0,0027565 \frac{1}{\text{сек}^2}; \quad \omega_{\min} = 0,05250 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Для заделанных концевых сечений оболочки, вычисляя коэффициенты, получим

$$\begin{aligned} a_{14} &= -1696,19; & a_{34} &= -2410,15; & a_{54} &= -4249,06; \\ b_{14} &= 41097,2; & b_{34} &= 69454,7; & b_{54} &= 159868; \\ c'_{14} &= -202259; & c'_{34} &= -412542; & c'_{54} &= -1,25729 \cdot 10^6; \\ d'_{14} &= -61,6760; & d'_{34} &= -151,761; & d'_{54} &= -492,636; \\ e_{14} &= -24,2336; & e_{34} &= -28,7473; & e_{54} &= -37,7753; \\ f_{14} &= 119,408; & f_{34} &= 171,541; & f_{54} &= 301,406; \\ g_{14} &= -20,328970; & g_{34} &= -5,74652; & g_{54} &= -41,8708; \\ \gamma_{14} &= 3,48969 \cdot 10^6; & \gamma_{34} &= 6,16387 \cdot 3^2 \cdot 10^6; & \gamma_{54} &= 16,0377 \cdot 5^2 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Значения величин:

$$t_1 = 6,9115; \quad t_2 = 5,6363; \quad \delta_n^4 = 97120,4; \quad \frac{l}{\pi} S'(0) = 0,021615.$$

Пользуясь этими значениями коэффициентов и  $S'(0)$ , для наименьшего корня уравнения получим значения:

$$\omega^2 = 0,0028675 \frac{1}{\text{сек}^2}; \quad \omega = 0,05354 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Таким образом, частота колебания

$$k = \omega \sqrt{\frac{2Eh}{\rho(1-\mu^2)a^2}}$$

для закрепленной оболочки при  $n = 4$  увеличивается по сравнению с опертой всего лишь на 2%. Таким образом, если только  $\frac{l}{a}$  не будет малой величиной, то, как и можно было предполагать, концевые моменты оказывают лишь местное влияние и мало сказываются на частоте колебаний основного тона.

## Применение энергетических методов к определению частот

Весьма эффективным с точки зрения вычислений является применение энергетических методов. При этом использование уравнений Лагранжа и метода Релея — Ритца приводит к одинаковым результатам. Принимая значения для компонентов перемещений

$$\left. \begin{aligned} u &= A_{mn} \frac{\lambda_m}{l} X'_m \left( \frac{\lambda_m x}{l} \right) \cos n\varphi \cos kt; \\ v &= B_{mn} X_m \left( \frac{\lambda_m x}{l} \right) \sin n\varphi \cos kt; \\ \omega &= C_{mn} X_m \left( \frac{\lambda_m x}{l} \right) \cos n\varphi \cos kt \end{aligned} \right\} \quad (12.29)$$

и используя выражения энергии (12.2), уравнения Лагранжа или условия Ритца, можно получить частотное уравнение

$$\omega^6 - k_2 \omega^4 + k_1 \omega^2 - k_0 = 0, \quad (12.30)$$

коэффициенты которого:

$$\begin{aligned} \delta_m k_0 &= \frac{1-\nu}{2} \delta_m \mu_m^4 (1 - \gamma_m^2 \nu^2) + \\ &+ \beta \left\{ \left[ \frac{1-\nu}{2} \delta_m n^2 + \mu_m^2 (1 - \gamma_m^2 \nu^2) \right] [n^2 + 2(1-\nu) \delta_m \mu_m^2] + \right. \\ &+ \left\{ \left( \mu_m^2 + \frac{1-\nu}{2} \delta_m n^2 \right) \left( n^2 + \frac{1-\nu}{2} \delta_m \mu_m^2 \right) - \right. \\ &\left. \left. - n^2 \mu_m^2 \left[ -\frac{\delta_m}{2} + \nu \left( \gamma_m + \frac{\delta_m}{2} \right) \right]^2 \right\} \times \right. \\ &\times \left[ \mu_m^4 - 2n^2 \mu_m^2 \gamma_m + n^4 + 2n^2 \mu_m^2 (1-\nu) (\delta_m + \gamma_m) \right] - \\ &\left. - n^2 \left[ \mu_m^2 \delta_m \gamma_m \nu (1-\nu) - 2\nu^2 \mu_m^2 \gamma_m^2 + 2 \left( \mu_m^2 + \frac{1-\nu}{2} \delta_m n^2 \right) \right]^2 \right\} \times \\ &\times \left\{ n^2 + \mu_m^2 [2\delta_m (1-\nu) - \gamma_m] \right\}; \\ \delta_m k_1 &= \left( \mu_m^2 + \frac{1-\nu}{2} \delta_m n^2 \right) \left( n^2 + \delta_m \mu_m^2 \frac{1-\nu}{2} + 1 \right) + \\ &+ \frac{1-\nu}{2} \delta_m \mu_m^2 - \nu^2 \gamma_m^2 \mu_m^2 - n^2 \mu_m^2 \left[ -\frac{\delta_m}{2} + \nu \left( \gamma_m + \frac{\delta_m}{2} \right) \right]^2 + \\ &+ \beta \left\{ \left( \mu_m^2 + \frac{3-\nu}{2} n^2 \delta_m + \frac{1-\nu}{2} \delta_m \mu_m^2 \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times [\mu_m^4 - 2n^2\mu_m^2\gamma_m + n^4 + 2n^2\mu_m^2(1-\nu)(\delta_m + \gamma_m)] + \\ & + [n^2 + 2(1-\nu)\delta_m\mu_m^2] \left[ \mu_m^2 + \frac{1-\nu}{2}\delta_m n^2 + \delta_m \right] - \\ & - 2n^2\delta_m \{ n^2 + \mu_m^2 [2(1-\nu)\delta_m - \gamma_m\nu] \}^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 = & \frac{\mu_m^2}{\delta_m} + \frac{3-\nu}{2}n^2 + 1 + \frac{1-\nu}{2}\delta_m\mu_m^2 + \beta [n^2 + 2(1-\nu)\delta_m\mu_m^2 + \\ & + \mu_m^4 - 2n^2\mu_m^2\gamma_m + n^4 + 2n^2\mu_m^2(1-\nu)(\delta_m + \gamma_m)]; \end{aligned}$$

здесь  $X_m \left( \frac{\lambda_m x}{l} \right)$  — фундаментальная функция, соответствующая крайвым условиям на торцах оболочки;  $\lambda_m$  — ее собственное число;

$$\begin{aligned} \mu_m = \frac{\lambda_m}{\alpha}; \quad \alpha = \frac{l}{a}; \quad \delta_m = \frac{1}{\lambda_m^2} \int_0^l X_m'^2 dx; \quad \frac{l}{\lambda_m^2} \\ \gamma_m = \frac{1}{\lambda_m^2} \int_0^l X_m'' X_m dx; \quad \beta = \frac{h^2}{12a^2}; \quad \frac{l}{\lambda_m^2} \end{aligned}$$

значения  $\delta_m$ ,  $\gamma_m$  для различных комбинаций крайвых условий приведены в работе [25].

Для защемленной и защемленно-опертой оболочек имеет место соотношение  $\delta_m = -\gamma_m$ , для опертой оболочки  $\delta_m = 1$ , что позволяет упростить формулы для коэффициентов уравнения.

Для реальных соотношений  $\frac{h}{a}$ ,  $\mu_m$  и  $n$  значения  $\omega$  подсчитаны в работе [115] для опертой оболочки, а в работе [25] — для защемленной, консольной и свободной оболочек. Эти результаты приведены на рис. 12.8, 12.9. Расчет частот собственных колебаний по известному параметру  $\omega$  не труден.\*

Выражение (12.26) для длинных оболочек можно упростить, используя результаты технической моментной теории оболочек.

Тогда формула для определения параметра  $\omega$  принимает такой вид:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho a^2 (1-\nu^2) 4\tau^2 j^2}{Eh}}. \quad (12.31)$$

Значительный интерес для практических приложений представляет исследование колебаний цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными и поперечными ребрами (стрингерами)

\* Толщина оболочки на рис. 12.8, 12.9 обозначена через  $h$ ,  $\Delta = \omega^2$ .

и шпангоутами). Теория колебаний таких оболочек в настоящее время еще очень несовершенна.

Наиболее интересным для приложений являются работы Галлетти [122], Миллера и других авторов.

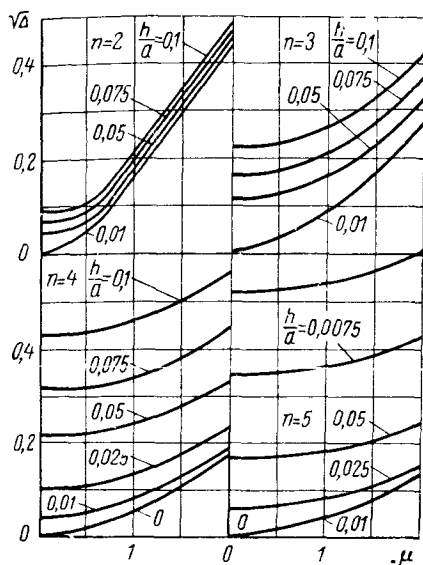


Рис. 12.8

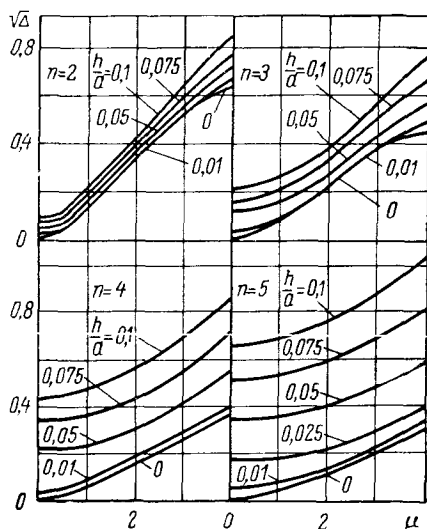


Рис. 12.9

### Контактные задачи гидроупругости для цилиндрической оболочки

Подобные задачи возникают, когда масса погруженной в жидкость конструкции соизмерима с массой вытесненной жидкости. Наличие жидкости существенно влияет на движение оболочки, которая, в свою очередь при колебаниях перераспределяет поле давления на поверхности. В этих случаях необходимо рассматривать совместные колебания системы конструкция—жидкость.

Уравнениями движения оболочки

$$L \vec{u}(x, s, t) = \vec{P}(x, s, t), \quad (12.32)$$

где  $\vec{u}(u, v, w)$  — тангенциальные и нормальные перемещения оболочек;  $P(p_1, p_2, p_3)$  — поверхностная нагрузка, которая в случае идеальной жидкости представляет нормальное давление, т. е.  $P = p_3(x, s, t)$ .

В случае потенциального движения жидкости имеем только одно скалярное волновое уравнение для описания поля скоростей

$$\nabla^2 \varphi(x, s, t) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x, s, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (12.33)$$

где  $\varphi$  — потенциал поля скоростей;  $c$  — скорость звука в среде.

$$\begin{aligned} & \times [\mu_m^4 - 2n^2\mu_m^2\gamma_m + n^4 + 2n^2\mu_m^2(1-\nu)(\delta_m + \gamma_m)] + \\ & + [n^2 + 2(1-\nu)\delta_m\mu_m^2] [\mu_m^2 + \frac{1-\nu}{2}\delta_m n^2 + \delta_m] - \\ & - 2n^2\delta_m \{n^2 + \mu_m^2 [2(1-\nu)\delta_m - \gamma_m\nu]\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 = \frac{\mu_m^2}{\delta_m} + \frac{3-\nu}{2}n^2 + 1 + \frac{1-\nu}{2}\delta_m\mu_m^2 + \beta [n^2 + 2(1-\nu)\delta_m\mu_m^2 + \\ + \mu_m^4 - 2n^2\mu_m^2\gamma_m + n^4 + 2n^2\mu_m^2(1-\nu)(\delta_m + \gamma_m)]; \end{aligned}$$

здесь  $X_m \left( \frac{\lambda_m x}{l} \right)$  — фундаментальная функция, соответствующая крайевым условиям на торцах оболочки;  $\lambda_m$  — ее собственное число;

$$\begin{aligned} \mu_m = \frac{\lambda_m}{\alpha}; \quad \alpha = \frac{l}{a}; \quad \delta_m = \frac{1}{\lambda_m^2} \int_0^l X_m'^2 dx; \quad \frac{\ell}{\lambda_m^2} \\ \gamma_m = \frac{1}{\lambda_m^2} \int_0^l X_m'' X_m dx; \quad \beta = \frac{h^2}{12a^2}; \quad \frac{\ell}{\lambda_m^2} \end{aligned}$$

значения  $\delta_m$ ,  $\gamma_m$  для различных комбинаций крайевых условий приведены в работе [25].

Для защемленной и защемленно-опертой оболочек имеет место соотношение  $\delta_m = -\gamma_m$ , для опертой оболочки  $\delta_m = 1$ , что позволяет упростить формулы для коэффициентов уравнения.

Для реальных соотношений  $\frac{h}{a}$ ,  $\mu_m$  и  $n$  значения  $\omega$  подсчитаны в работе [115] для опертой оболочки, а в работе [25] — для защемленной, консольной и свободной оболочек. Эти результаты приведены на рис. 12.8, 12.9. Расчет частот собственных колебаний по известному параметру  $\omega$  не труден.\*

Выражение (12.26) для длинных оболочек можно упростить, используя результаты технической моментной теории оболочек.

Тогда формула для определения параметра  $\omega$  принимает такой вид:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho a^2 (1-\nu^2) 4\pi^2 f^2}{Eh}}. \quad (12.31)$$

Значительный интерес для практических приложений представляет исследование колебаний цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными и поперечными ребрами (стрингерами)

\* Толщина оболочки на рис. 12.8, 12.9 обозначена через  $h$ ,  $\Delta = \omega^2$ .



и шпангоутами). Теория колебаний таких оболочек в настоящее время еще очень несовершенна.

Наиболее интересным для приложений являются работы Галлетти [122], Миллера и других авторов.

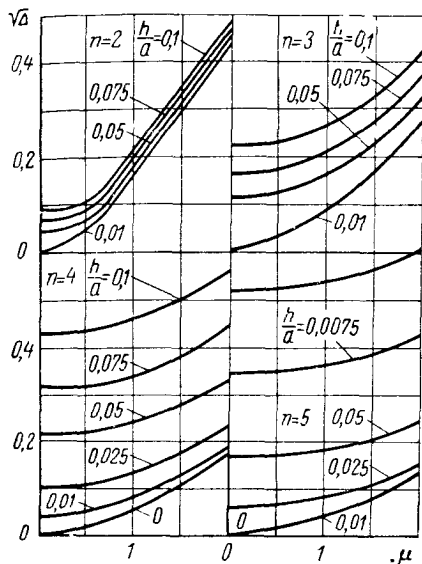


Рис. 12.8

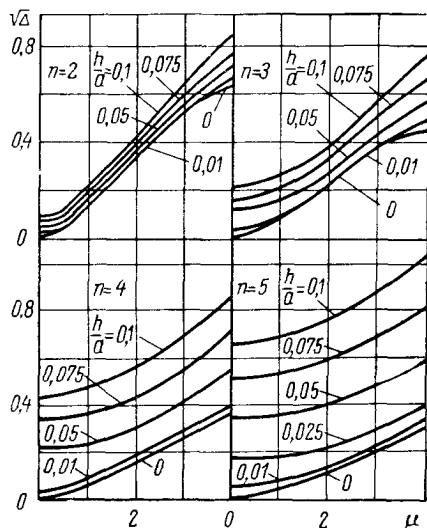


Рис. 12.9

### Контактные задачи гидроупругости для цилиндрической оболочки

Подобные задачи возникают, когда масса погруженной в жидкость конструкции соизмерима с массой вытесненной жидкости. Наличие жидкости существенно влияет на движение оболочки, которая, в свою очередь при колебаниях перераспределяет поле давления на поверхности. В этих случаях необходимо рассматривать совместные колебания системы конструкция—жидкость.

Уравнениями движения оболочки

$$L \vec{u}(x, s, t) = \vec{P}(x, s, t), \quad (12.32)$$

где  $\vec{u}(u, v, w)$  — тангенциальные и нормальные перемещения оболочек;  $P(p_1, p_2, p_3)$  — поверхностная нагрузка, которая в случае идеальной жидкости представляет нормальное давление, т. е.  $P = p, (x, s, t)$ .

В случае потенциального движения жидкости имеем только одно скалярное волновое уравнение для описания поля скоростей

$$\nabla^2 \varphi(x, s, t) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x, s, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (12.33)$$

где  $\varphi$  — потенциал поля скоростей;  $c$  — скорость звука в среде.

Компоненты скорости и давление определяются через потенциал скоростей

$$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}; \quad p = -\rho_m \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (12.34)$$

На границе между жидкостью и оболочкой должно выполняться условие совместности движения

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{r=r_0}, \quad (12.35)$$

где  $r_0$  — радиус срединной поверхности оболочки.

Если жидкость можно считать бесконечной, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty; \quad (12.36a)$$

на твердых стенках

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{r=r_1} = 0; \quad (12.36б)$$

на свободной поверхности

$$\frac{\varphi}{s_1} = 0. \quad (12.36в)$$

Точное решение системы уравнений (12.32)—(12.36) с соответствующими условиями закрепления оболочки во многих случаях получить невозможно. В случае конечного объема жидкости задача может быть решена точно путем разложения решения в ряд по собственным формам системы оболочка—жидкость. Но для среды бесконечной протяженности система оболочка—жидкость будет неконсервативной и, следовательно, метод обобщенных координат неприменим. В этом случае выбор метода решения диктуется физическим содержанием задачи.

### Колебания цилиндрических оболочек в жидкости

При исследовании свободных или вынужденных колебаний оболочки в жидкости обычно вводится гипотеза сохранения формы колебаний в вакууме и жидкости с последующим применением метода Фурье для разделения переменных в волновом уравнении (12.33). При этом волновое уравнение записывается в системе координат, связанной с геометрией оболочки. Если собственные функции получающихся дифференциальных операторов можно представить через изучение функции, то тем самым решается задача определения частоты свободных колебаний оболочки.

Для круговой цилиндрической оболочки волновое уравнение запишем в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (12.33a)$$

Интеграл свободных колебаний для шарнирно-опертой цилиндрической оболочки имеет вид

$$\omega = A_{mn} \cos n\varphi \sin \frac{m\pi z}{L} \cos \omega t. \quad (12.37)$$

Определив потенциал движения жидкости под действием колеблющейся оболочки, легко можно вычислить обобщенную силу, действующую на оболочку со стороны жидкости, а воспользовавшись уравнениями Лагранжа, — найти уменьшение частот собственных колебаний оболочки.

Решение волнового уравнения (12.29a) для случая бесконечной оболочки имеет вид

$$\Phi = A_n F_n(r) \cos n\varphi \sin \frac{\pi z}{L} \cos \omega t, \quad (12.38)$$

где  $L$  — длина полуволны деформации оболочки

$$F_n(r) = \begin{cases} H_n^{(1)}(i\beta r) & \omega < \frac{\pi c}{L}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\pi^2}{L^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}; \\ r^{-n} & \omega = \frac{\pi c}{L}; \\ H_n^{(2)}(\bar{\beta} r) & \omega > \frac{\pi c}{L}, \quad \bar{\beta} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{L^2}}; \end{cases}$$

когда жидкость окружает оболочку;

$$F_n(r) = \begin{cases} I_n(\beta r) & \omega < \frac{\pi c}{L}; \\ r^n & \omega = \frac{\pi c}{L}; \\ J_n(\beta r) & \omega > \frac{\pi c}{L}, \end{cases}$$

когда жидкость находится внутри оболочки; здесь  $c$  — скорость звука в жидкости;  $H_n^{(1)}$  и  $H_n^{(2)}$  — функции Ханкеля первого и второго рода.

Используя интегралы уравнения (12.28), можно найти обобщенную силу, действующую на оболочку со стороны жидкости:

$$Q_n = \iint_{(s)} P_a \cos n\varphi \sin \frac{\pi z}{L} ds,$$

где  $P_a = - \left( \rho_{ж} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{r=a}$  — давление жидкости на поверхности оболочки, которое легко вычислить. Используя условие излучения на поверхности оболочки

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a},$$

получим  $Q_n = c_{mn} \rho_{ж} \omega^2 \pi \frac{F_m(a)}{F'_m(a)}$ .

При помощи этого выражения для обобщенной силы и уравнений Лагранжа легко получить частотные уравнения, аналогичные уравнению (12.10), которое, однако, не станем выписывать, и ограничимся вытекающей из них приближенной формулой

$$\omega_{ж} \approx \frac{\omega_{внз}}{\sqrt{1+k}}, \quad \text{где } k = \frac{\rho_{ж}}{\rho_{об}} \Delta_1 \frac{a}{h};$$

для внешней задачи

$$\Delta_1 = \begin{cases} \frac{1}{n - i\beta a \frac{H_{n-1}^{(1)}(i\beta a)}{H_n^{(1)}(i\beta a)}}; & \rho < \frac{\pi c}{L}; \\ \frac{1}{n - \bar{\beta} a \frac{H_{n-1}^{(1)}(\bar{\beta} a)}{H_n^{(2)}(\bar{\beta} a)}} > \frac{\pi c}{L}; \end{cases}$$

для внутренней задачи

$$\Delta_1 = \begin{cases} \frac{1}{n - \beta a \frac{I_{n-1}(\beta a)}{I_n(\beta a)}} < \frac{\pi c}{L}; \\ \frac{1}{n - \bar{\beta} a \frac{J_{n-1}(\bar{\beta} a)}{J_n(\bar{\beta} a)}} > \frac{\pi c}{L}. \end{cases}$$

Параметр  $\Delta_1$  вычислен в работе [119], и эти результаты приведены в таблицах. Аналогичные результаты в виде графиков приведены в работе [129].

Значение  $\omega_{ж}$  по приближенной формуле должно определяться методом последовательных приближений, однако, когда  $\frac{\rho}{c} \ll \frac{\pi}{L}$  и колебания низкочастотные, что часто имеет место на практике, можно получить

$$\beta \approx \frac{\pi}{L}; \quad \bar{\beta} \approx i \frac{\pi}{L}.$$

Тогда значения  $\omega_{ж}$  определяют непосредственным подсчетом по приведенной формуле.

## Цилиндрическая оболочка в жидкости при воздействии нагрузки взрывного типа

Рассмотрим процесс пространственной упругой деформации цилиндрической оболочки конечной длины при прохождении плоской ударной волны давления (рис. 12.10) [42, 43].

В общем случае приходится рассматривать нестационарную контактную задачу (12.32)—(12.36). Так как точное решение такой задачи затруднительно, то следует использовать какую-либо аппро-

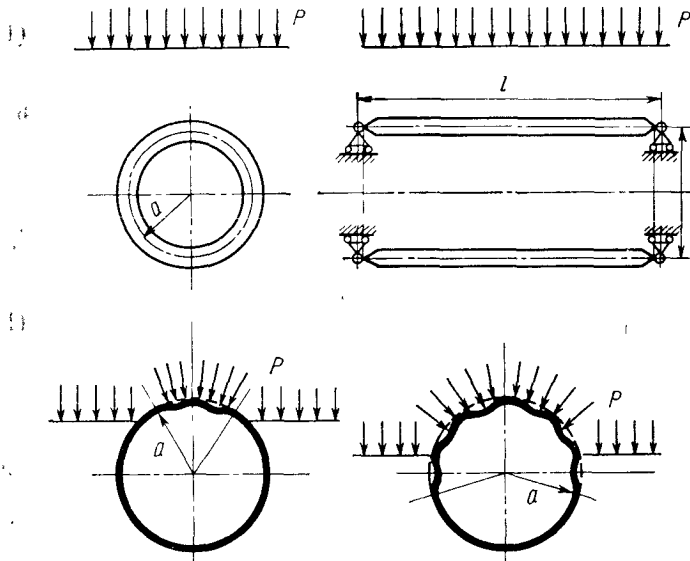


Рис. 12.10

ксимацию решения волнового уравнения (12.29а), обычно применяемую при получении инженерных решений задачи.

Простейшей аппроксимацией является гипотеза плоского излучения (каждый элемент оболочки излучает плоскую волну). В этом случае для давления получим значение

$$P = 2P_{\phi} - \rho_{ж} c_{ж} \frac{\partial w}{\partial t},$$

где  $P_{\phi}$  — давление на фронте падающей волны. Существует множество других аппроксимаций решения волнового уравнения, пригодных однако только для начального периода движения, когда падающая волна давления проходит расстояние, меньше радиуса оболочки.

Используем аппроксимацию, полученную в работе [27] и эквивалентную гипотезе цилиндрического отражения:

$$P = \frac{\rho_{жс} c_{жс}^2}{r_0} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \tau} - \omega \right) - \frac{\rho_{жс} c_{жс}}{r_0} \left[ \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} - \frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} d\tau_1 \right]_{r=r_0}. \quad (12.39)$$

Таким образом, контактная задача сводится к задаче о деформации оболочки при воздействии известной нагрузки.

Уравнение движения (12.32) запишем в виде

$$L_{ik} [u_k(x, s, t)] = P_i(x, s, t), \quad (12.40)$$

$i, k = 1, 2, 3, 4, 5$  (в общем случае),

где  $L_{ik}$  — дифференциальные операторы линейной теории оболочек;

$u_k$  — компоненты вектора перемещений

$P_i$  — компоненты вектора внешних сил.

Считаем, что на поверхности действует заданное давление, т. е. имеется только радиальная составляющая нагрузка. Исходное давление берем в виде плоской волны

$$P = P_0 f(\tau) H[\tau - \alpha(1 - \cos \eta) \cos \omega - \xi \alpha \sin \omega], \quad (12.41)$$

где  $\xi = \frac{x}{a}$ ;  $\eta = \frac{s}{a}$ ;  $\tau = \frac{ct}{a}$ ;  $c^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$  ( $c$  — скорость звука в материале);  $\omega$  — угол наклона фронта к оси оболочки.

Методом исключения компонент вектора перемещений из системы (12.40) получается система разрешающих уравнений

$$L_j^{(1)} [u_j(\xi, \eta, \tau)] = L_j^{(2)} [P_j(\xi, \eta, \tau)], \quad (12.42)$$

$$j = 1, 2, 3, 4, 5,$$

где  $L_j^{(1)}$ ,  $L_j^{(2)}$  — линейные дифференциальные операторы.

Так как оболочка замкнутая, то в направлении  $\eta$  решение  $\{u_j(\xi, \eta, \tau)\}$  с течением времени стремится к некоторым периодическим функциям

$$u_j(\xi, \eta, \tau) = u_j(\xi, \eta + 2\pi l, \tau).$$

Имея в виду применение интегрального преобразования Фурье по координате  $\eta$ , представляем компоненты вектора перемещений в виде ряда по функциям, определенным на интервале  $(-\infty < \eta < \infty)$ ,

$$W(\xi, \eta, \tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} W_l(\xi, \eta + 2\pi l, \tau). \quad (12.43)$$

Решение системы уравнений (12.42) строится методом интегральных преобразований с использованием преобразований Лапласа по  $\tau$  (с параметром  $s$ ), интегрального преобразования Фурье

по  $\eta$  (с параметром преобразования  $p$ ) и конечного интегрального синус-преобразования Фурье по осевой координате  $\xi$  с параметром  $\lambda_m = m\pi \frac{a}{e}$ .

В результате получаем формальное решение для радиальных перемещений

$$W(\xi, \eta, \tau) = \frac{2}{l/a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \lambda_m \xi \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{s\tau} ds \frac{1}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L^{(2)}(\lambda_m, p, s) \tilde{P}^*(\lambda_m, p, s) e^{i\rho\eta}}{L^{(1)}(\lambda_m, p, s)} dp, \quad (12.44)$$

где  $\tilde{P}_0^* = -2\pi P_0 F(s) \frac{\lambda_m \left[ 1 - (-1)^m e^{-\frac{l}{a} s \alpha \sin \omega} \right]}{s^2 \alpha^2 \sin^2 \omega + \lambda_m^2} I_p(sa \cos \omega),$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau,$$

$I_p(sa \cos \omega)$  — модифицированная функция Бесселя.

Для начального периода деформации, когда волна прошла расстояние меньше радиуса оболочки ( $s \gg 1, p \gg 1$ ), для внутреннего интеграла методом перевала получаем асимптотические оценки, верные при  $\sqrt{s^2 \alpha^2 + p^2} > 6$ . Внешний интеграл по  $s$  обращается при помощи теории вычетов и теоремы о свертке с использованием корней характеристического уравнения 8—10-го порядка, которое решается на ЭЦВМ.

Решения представлены хорошо сходящимися рядами (для радиальных смещений, как  $\frac{1}{m^5}$ ).

В частности, уравнения для оболочки с большим показателем изменчивости в окружном направлении (уравнение Власова—Донелла) дают следующие дифференциальные операторы:

$$L_1 = \nabla^8 + \frac{12(1-\nu^2)}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \frac{12}{\delta^2} \nabla \frac{\partial^2}{\partial \tau^2};$$

$$L_2 = \frac{12}{E\delta^3} (1-\nu^2) \nabla^4,$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ ;  $\delta = \frac{h}{a}$  — безразмерный параметр толщины оболочки.

При затухании давления за фронтом волны по экспоненциальному закону

$$f(\tau) = e^{-\beta[\tau - \alpha(1 - \cos \eta) \cos \omega - \alpha \xi \sin \omega]}$$

выражения для радиальных прогибов имеют вид

$$\frac{W(\xi, \eta, \tau)}{W_0} = \sum_{m=1, 3, 5}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m \xi}{m} \sum_{k=0}^{10} \frac{(s_k^2 \alpha^2 \sin^2 \eta \cos^2 \omega - \lambda_m^2)^2}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{10} (s_k - s_j)} \times \\ \times \lambda_m e^{s_k [\tau - \alpha (1 - \cos \eta) \cos \omega - \alpha \xi \sin \omega]},$$

где  $s_k, s_j$  — корни уравнения

$$(s + \beta)(s^2 \alpha^2 \sin^2 \omega + \lambda_m^2) \left[ (s^2 \alpha^2 \sin^2 \eta \cos^2 \omega - \lambda_m^2)^4 \frac{12(1 - \nu^2)}{\delta^2} \lambda_m^4 + \right. \\ \left. + \frac{12}{\delta^2} s^2 (s^2 \alpha^2 \sin^2 \eta \cos^2 \omega - \lambda_m^2)^2 \right] = 0,$$

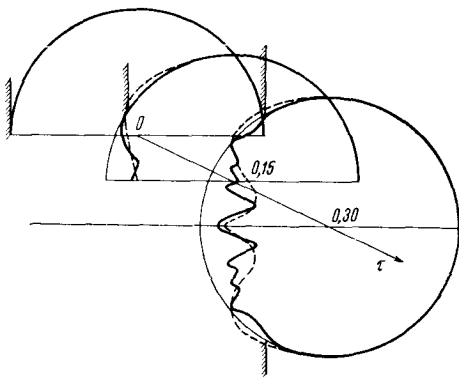


Рис. 12.11

численно определяемые с помощью ЭЦВМ.

Выражая усилия и моменты обычным образом [42, 43] через радиальные перемещения, получаем для них формулы, подобные формулам (12.44).

На рис. 12.11 приведено распределение радиальных прогибов оболочки в сечении  $\xi = 0,5 \frac{l}{a}$  и их развитие во времени. Тонкой линией нанесены результаты, полученные для бесконечно длин-

ной оболочки методом прямого численного интегрирования уравнений движения.

На рис. 12.12 и 12.13 дана картина распределения по окружной координате и времени осевых ( $N_1, M_1$ ) и окружных ( $N_2, M_2$ ) усилий и моментов для сечения  $\xi = 0,5 \frac{l}{a}$ .

Для каждого момента времени координатные оси переносятся вдоль прямой  $\tau$ . Из рисунков можно видеть, что распределение по координате усилий, действующих в срединной поверхности, имеет осциллирующий характер. На рис. 12.14 (а, б) изображено распределение радиальных прогибов по окружной координате и времени при нагружении короткой ( $\beta = 3$ ) и длинной ( $\beta = 0,1$ ) волной давления. Расчеты показали, что для короткой волны (даже большой интенсивности) максимум радиальных прогибов достигается уже в начальный период ( $\tau < 1$ ) (см. рис. 12.14, а), для длинной волны и в начальный период максимум не достигается,



а имеет место почти линейный рост радиальных прогибов во времени.

Численный анализ, проведенный при  $\omega = 0$  (фронт падающей волны параллелен оси оболочки), позволил сделать некоторые выводы (рис. 12.12—12.14).

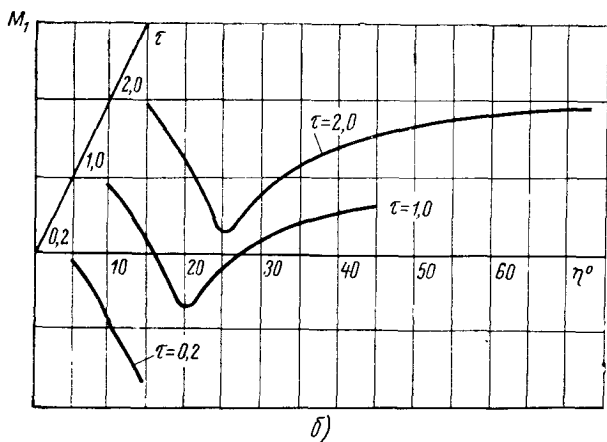
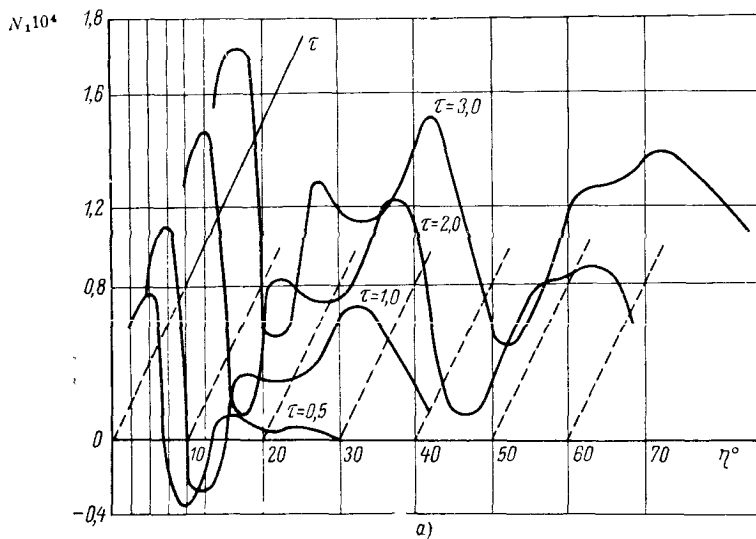


Рис. 12.12

Так, установлено, что уже в самый начальный период после соприкосновения с ударной волной (фронт падающей волны проходит расстояние в 0,2—0,3 радиуса) происходит резкий рост радиальных смещений, локализующийся в узкой зоне значений

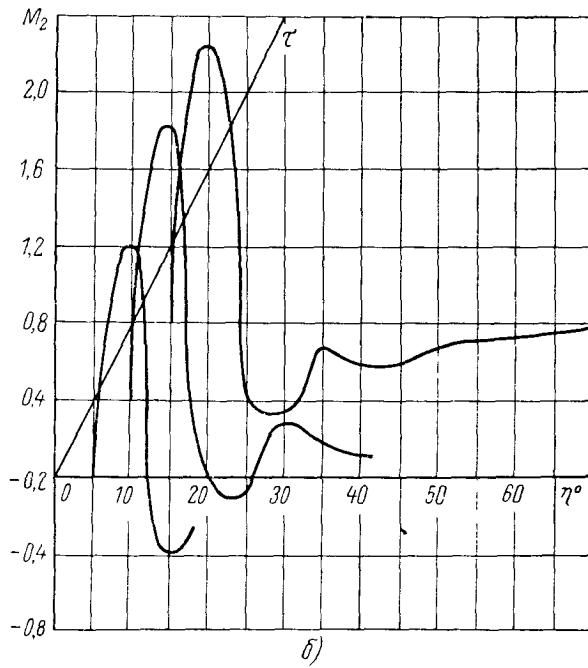
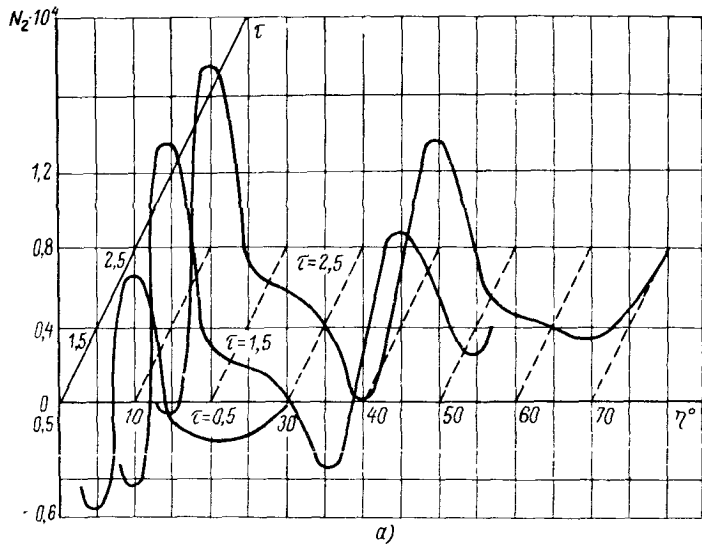


Рис. 12.13

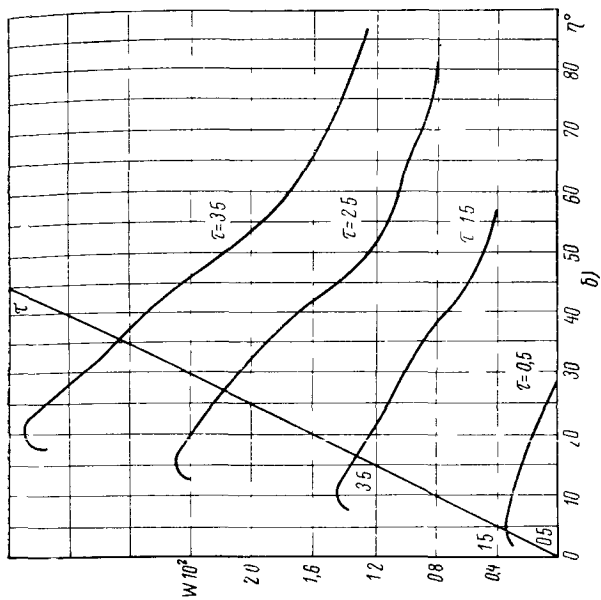
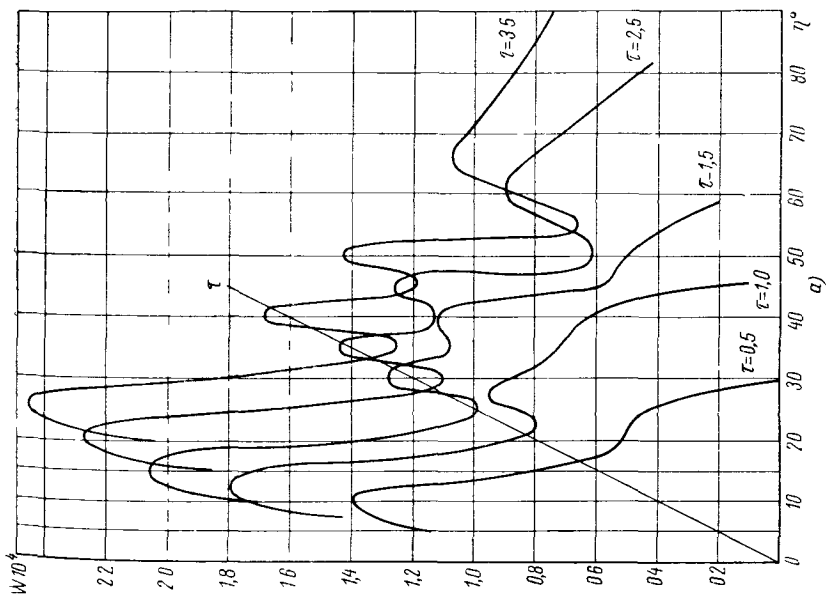


Рис 12.14

угловой координаты  $\eta \approx 15 \div 25^\circ$ . Этот результат эквивалентен результату, полученному А. С. Вольмиром [13] (см. рис. 12.12). При дальнейшем прохождении волны образуются новые выпучины с меньшей максимальной амплитудой. Длина полуволны динамической формы прогиба зависит от ряда геометрических и физических параметров оболочки и системы нагружения и равна  $\frac{a\pi}{6} \sim \frac{a\pi}{8}$ .

Установлен осциллирующий характер изменения усилий ( $N_1$ ,  $N_2$ ) и моментов ( $M_1$ ,  $M_2$ ) в направлении окружной координаты (см. рис. 12.13—12.14). На рис. 12.14, б по оси абсцисс, отложена величина угла  $\eta$ , кривые относятся к различным моментам времени  $\tau$ .

Метод, использованный при решении этой задачи, весьма эффективен при исследовании нестационарных процессов в оболочках. Он неоднократно применялся американскими исследователями при решении плоских задач [74, 143], но пока практически не имеется численных результатов полученных этим методом а также экспериментальных данных для проверки уже имеющихся результатов.

#### КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК ДРУГИХ ФОРМ

За последние десятилетия в связи с широким применением оболочек в технике, особенно на транспорте, были также исследованы колебания сферических и конических оболочек, оболочек вращения, а также пологих оболочек различной формы.

Колебания сферических оболочек при помощи уравнений Лява были исследованы в работах Г. Ламба, К. Федергофера, В. А. Новожилова, О. В. Лукина, А. Калнинса и П. М. Нагхди и др., причем удалось найти интегралы задачи в общем случае через присоединенные функции Лежандра с комплексным индексом.

Вычисления при помощи этой теории все еще неэффективны. Работа Ламба была недавно усовершенствована Бэйкером [116].

Значительное развитие получило применение технической моментной теории оболочек к исследованию колебаний сферических оболочек. В работах Рейсснера [146] и Джонсона [131] были исследованы колебания пологих сферических сегментов с различными условиями на контурной параллели. Близкая теория была использована В. Власовым и О. Онишвили [70].

Наконец, колебания сферических оболочек без растяжения средней поверхности исследованы в работах Релея и Джонсона и Рейсснера.

Колебания конических оболочек исследованы при помощи энергетических методов. В работах К. Федергофера [121], В. А. Бреславского, Э. Григолюка, И. Германа и Г. Мирского [126] получены результаты, позволяющие приближенно находить частоты

собственных колебаний усеченных конических оболочек, опертых по краям, а также конической оболочки с вершиной, защемленной или опертой по контурной параллели.

В работах Гольдберга, Богданова и Маркуса [123] осесимметричные колебания защемленной по верхнему основанию и свободной по нижнему, усеченной конической оболочки рассмотрены численными методами.

Колебания оболочек вращения в общем случае были исследованы В. С. Гонткевичем [26] при помощи метода Релея—Ритца. При этом меридиональная кривая может задаваться аналитически или численно. Полученное частотное уравнение весьма громоздко, и как правило, требует применения ЭЦВМ при расчете собственных значений конкретной оболочки.

Кроме этого, в работе [25] приведен многочисленный справочный материал по сферическим, коническим и цилиндрическим оболочкам.

Полученные в настоящее время результаты в основном относятся к пологим оболочкам. При помощи результатов технической моментной теории рассмотрены колебания пологих оболочек с различной формой срединной поверхности и контура. При этом были использованы как точные, так и приближенные методы.

Так, для сферической оболочки, круглой в плане, частоты свободных колебаний равны частотам круглой пластинки на упругом основании с коэффициентом постели

$$c = \frac{Eh}{a^2}.$$

Таким образом, техническая моментная теория дает следующее значение частоты:

$$\omega_i = \left( \left( \frac{\beta_i}{a^2} \right)^2 + \frac{Eh}{Da^2} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}},$$

где  $\beta_i$  — соответствующее собственное значение круглой пластинки (см. табл. 9.2).

Подобного рода результаты получены также для оболочек с прямоугольным контуром, для конических и параболидальных пологих оболочек и т. д. Необходимо отметить, что в силу принятых предположений уравнения технической моментной теории оболочек имеют ограниченное применение.

В настоящее время для наиболее широко распространенных в технике видов оболочек теория позволяет получить частотные уравнения (хотя бы приближенными методами), но численный справочный материал недостаточен, что связано с большим объемом вычислительной работы даже в случае применения ЭЦВМ.

В целом теория колебания оболочек, особенно оболочек сложных форм, разработана еще недостаточно.

## ПРОДОЛЬНЫЕ И КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

### СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

#### Дифференциальное уравнение продольных колебаний с учетом затухания

В предыдущих главах мы рассмотрели главным образом поперечные колебания стержней и стержневых конструкций. Продольные колебания во многих случаях могут иметь практическое значение, поэтому в дальнейшем мы приведем уравнения частот для некоторых частных случаев.

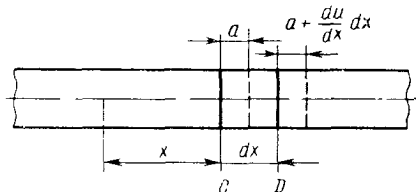


Рис. 13.1

При изучении продольных колебаний в общем случае будем учитывать также и внутреннее трение в материале, при том же простейшем предположении, какое было введено при изучении поперечных колебаний

(гл. 6), т. е. что силы внутреннего трения пропорциональны первой степени скорости деформации волокна стержня. При этом для лучшего приближения к действительности вместо коэффициента затухания следует вводить коэффициент  $\xi' = \frac{\text{тр}}{\omega}$ , где  $\omega$  — частота колебаний.

Направим ось  $x$  вдоль оси стержня, начало координат поместим в левом конце стержня и предположим, что мы растянули стержень и предоставили его самому себе (рис. 13.1). Тогда он будет совершать продольные колебания.

Обозначим:

$u(x, t)$  — перемещение сечения с абсциссой  $x$ ;

$E$  — модуль упругости материала;

$F$  — площадь сечения;

$\rho$  — масса единицы объема;

$\xi$  — коэффициент, характеризующий внутреннее затухание;

$L$  — длина стойки.

Положение сечения  $C$  в рассматриваемый момент определяется абсциссой  $x + u$ , положение сечения  $D$  — абсциссой  $x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ .

Принимая во внимание силы внутреннего трения, пропорциональные первой степени скорости деформации волокна стержня, для усилий  $T$  в сечении  $x$  получим

$$T = FE \frac{\partial u}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}. \quad (13.1)$$

В сечении  $x + dx$

$$T + dT = FE \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) + \xi \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} dx \right).$$

Следовательно, на данный элемент действует сила

$$(T + dT) - T = FE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \xi \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} dx.$$

Написав условия равновесия между действующими силами, силами инерции  $-\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  и внешней силой  $F(x, t)$ , получим уравнение продольных колебаний с учетом затухания

$$FE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x, t). \quad (13.2)$$

Для полного решения задачи необходимо после нахождения решения удовлетворить еще граничным и начальным условиям. Граничные условия на концах стержня могут быть следующие:

1) конец стержня свободен, т. е. натяжение на конце  $T$  должно быть равно нулю  $FE \frac{\partial u}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$  для  $x = 0$  или  $x = L$ ;

2) конец стержня заделан  $u = 0$  для  $x = 0$  или  $x = L$ ;

3) с концом стержня  $x = 0$  связано тело массой  $m$ ; тогда из условия равновесия силы натяжения и силы инерции массы  $m$  получим  $FE \frac{\partial u}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  для  $x = 0$ , при наличии на конце  $x = L$  массы  $m_1$  получим  $FE \frac{\partial u}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  для  $x = L$ .

Если пренебречь влиянием затухания, то предыдущие условия представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \text{ для } x = 0 \text{ или } x = L \text{ — свободный конец;} \\ u &= 0 \text{ для } x = 0 \text{ или } x = L \text{ — заделанный конец;} \\ FE \frac{\partial u}{\partial x} &= m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ для } x = 0 \\ FE \frac{\partial u}{\partial x} &= -m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ для } x = L \end{aligned} \right\} \text{ груз на конце.}$$

Начальные условия определяются в зависимости от тех перемещений и той скорости, которые сообщены в начальный момент времени каждому элементу стержня.

Эти условия в общем виде могут быть записаны так:

$$u(x, 0) = f(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(x) \quad \text{для } t = 0, \quad (13.3)$$

где  $f(x)$  и  $f_1(x)$  — заданные функции  $x$ .

При определении частот колебаний стоек будем предполагать, что в ряде точек  $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_i$  стойка связана с сосредоточенными массами и, кроме того, в этих сечениях стойка будет испытывать упругий отпор  $R_i = c_i u(x, t)$  где  $c_i$  — коэффициент упругого отпора конструкций, связанных с сечением  $x = x_i$  [ $c_i$  — сила отпора, получающаяся при амплитуде смещения  $u(x_i, t)$ , равной единице].

### Свободные колебания стержня с грузом на конце при отсутствии затухания

При отсутствии затухания уравнение продольных колебаний для стойки постоянного сечения  $F$  (рис. 13.2) будет

$$FE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (13.4)$$

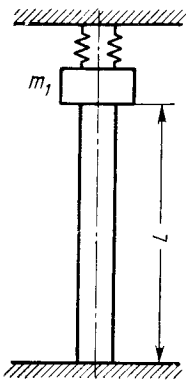


Рис. 13.2

так как  $\xi = 0$ .

Вводя безразмерную координату  $\eta = \frac{x}{L}$  и обозначая через  $a^2 = \frac{E}{\rho}$ , получим уравнение (13.4) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{L^2}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (13.5)$$

Для свободных колебаний решение уравнения (13.5) можно взять в виде

$$u = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) V(\eta).$$

После подстановки этого выражения в уравнение (13.5) получим

$$V''(\eta) + \beta^2 V(\eta) = 0, \quad (13.6)$$

где  $\beta^2 = \frac{\omega^2 L^2}{a^2}$ .

Следовательно,

$$V(\eta) = A_1 \cos \beta \eta + B_1 \sin \beta \eta. \quad (13.7)$$

Для стойки, заделанной внизу, имеем

$$u(0) = 0. \quad (13.8)$$



На верхнем конце необходимо удовлетворить условию

$$-FE \frac{\partial u}{\partial x_{x=L}} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2_{x=L}} + cu(L, t) \quad (13.9)$$

( $c$  — коэффициент, учитывающий упругий отпор) или условию  $-A_1 \beta \sin \beta + B_1 \beta \cos \beta = (\beta^2 n_1 - k) (A_1 \cos \beta + B_1 \sin \beta)$ ,

где  $n_1 = \frac{m}{F\rho L}$ ;  $k = \frac{cL}{FE}$ .

Из условия (13.8) следует  $A_1 = 0$ .

Следовательно, уравнение для определения частоты получим в виде

$$\left(\beta n_1 - \frac{k}{\beta}\right) \operatorname{tg} \beta = 1. \quad (13.10)$$

В частности, если упругий отпор отсутствует ( $k = 0$ ), получим  $\beta n_1 \operatorname{tg} \beta = 1$ .

Значения наименьшего корня этого уравнения следующие:

	$\frac{1}{n_1}$	$\beta$	$\frac{1}{n_1}$	$\beta$	$\frac{1}{n_1}$	$\beta$
0,01	0,01	0,1	1,0	0,86	5,0	1,32
0,1	0,1	0,32	1,5	0,98	10,0	1,42
0,5	0,5	0,65	2,0	1,08	20,0	1,52
0,7	0,7	0,75	3,0	1,20	100,0	1,568
0,9	0,9	0,82	4,0	1,27		

При упругом отпоре значение  $\beta$  может быть найдено из выражения (13.10) обычным путем — графически или пробными подстановками.

### Продольные колебания стойки с равными массами на одинаковых расстояниях

Перейдем теперь к более общему случаю, когда со стойкой связано несколько сосредоточенных масс  $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$  в точках с абсциссами  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$  и, помимо того, в этих точках стойка испытывает упругий отпор  $R_i = c_i u(x, t)$ .

При этом предполагаем, что все массы равны и находятся на одинаковых расстояниях.

Решение уравнения (13.5) для этого случая удобно получить, пользуясь методом уравнения в конечных разностях, который мы уже применяли в аналогичных случаях при изучении поперечных колебаний балок.

Приведем сперва решение для свободных колебаний стойки, находящейся на упругом основании (рис. 13.3), для случая, когда внешнее затухание отсутствует.

В дальнейшем обозначено:

- $m$  — масса, сосредоточенная в промежуточном узле;
- $m_0$  — масса, связанная с основанием стойки;
- $m_1$  — масса, связанная с верхним узлом;
- $l$  — расстояние между массами;
- $L$  — полная длина стойки;
- $F$  — площадь поперечного сечения стойки;
- $F_0$  — площадь подошвы основания;
- $\rho$  — масса единицы объема стойки;
- $c_0$  — коэффициент упругого сжатия основания;
- $\omega^2$  — квадрат частоты колебаний,  $\beta^2 = \frac{\omega^2 l^2}{a^2}$ ;

$u(x, t)$  — полное продольное перемещение сечения с абсциссой;

$c_i u(x, t)$  — упругий отпор в промежуточном узле;

$c_1 u(x, t)$  — упругий отпор в верхнем узле;

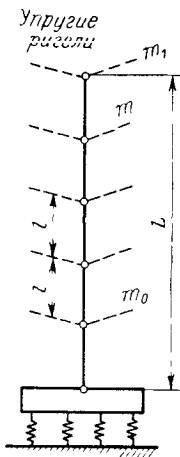


Рис. 13.3

$$k_0 = \frac{c_0 F_0 l}{FE}; \quad k' = \frac{cl}{FE}; \quad k_1 = \frac{c_1 l}{FE}; \quad n_0 = \frac{m_0}{F\rho l};$$

$$n = \frac{m}{F\rho l}; \quad n_1 = \frac{m_1}{F\rho l}.$$

Предполагается, что для данного участка начало координат расположено в нижнем узле.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний для каждого участка (без затухания) будет

$$(13.5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{l^2}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \text{где } \eta = \frac{x}{l}.$$

Будем искать перемещение в участке  $i, i + 1$  в виде

$$u_{i+1} = V_{i+1}(\eta) \cos \omega t. \quad (13.11)$$

Тогда  $V_{i+1}$  определяется из уравнения

$$V_{i+1}'' + \beta^2 V_{i+1} = 0, \quad (13.12)$$

откуда

$$V_{i+1} = A_{i+1} \cos \beta \eta + B_{i+1} \sin \beta \eta. \quad (13.13)$$

Обозначим перемещение подошвы через  $Y_0$ , перемещение узлов через  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_i$ . Тогда  $V_{i+1}(0) = Y_i$ , т. е.  $A_{i+1} = Y_i$ .

Следовательно,

$$V_{i+1} = Y_i \cos \beta \eta + B_{i+1} \sin \beta \eta. \quad (13.14)$$

Для лежащего ниже участка

$$V_i = Y_{i-1} \cos \beta \eta + B_i \sin \beta \eta, \quad (13.15)$$

для  $\eta = 1$   $V_{i+1}(1) = Y_{i+1}$ ;  $V_i(1) = Y_i$ ,

поэтому

$$\left. \begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i \cos \beta + B_{i+1} \sin \beta; \\ Y_i &= Y_{i+1} \cos \beta + B_i \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

Так как с каждым узлом связана масса  $m$  и, кроме того, в узле стойка испытывает упругий отпор, то для каждого узла необходимо удовлетворить условию

$$FE \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{x=0}} - FE \frac{\partial u_i}{\partial x_{x=l}} = \rho F \frac{\partial^2 u_{i+1}}{\partial t_{x=0}^2} + cu_{i+1, x=0}. \quad (13.17)$$

Переходя к переменной  $\eta = \frac{x}{l}$ , получим после подстановки значения  $u(\eta, t) = V(\eta) \cos \omega t$  условие

$$\beta(B_{i+1} - B_i \cos \beta) + \beta Y_{i-1} \sin \beta = -(\beta^2 n - k') Y_i. \quad (13.18)$$

Умножая теперь второе из уравнений (13.16) на  $\cos \beta$  и вычитая произведение из первого, получим после исключения  $B_{i+1} - B_i \cos \beta$  с помощью условия (13.18) следующую зависимость:

$$Y_{i+1} + Y_{i-1} = 2 \cos \beta Y_i - \frac{\sin \beta}{\beta} (\beta^2 n - k') Y_i. \quad (13.19)$$

Это и есть уравнение в конечных разностях, дающее связь между перемещениями отдельных узлов.

Решение этого уравнения ищем по обычным правилам в виде

$$Y_i = C_1 \cos i\alpha + C_2 \sin i\alpha. \quad (13.20)$$

После подстановки значений  $Y_{i-1}$ ,  $Y_i$ ,  $Y_{i+1}$  в уравнение (13.19) получим для определения  $\alpha$  уравнение

$$\cos \alpha = \cos \beta - \frac{\sin \beta}{2\beta} (\beta^2 n - k'). \quad (13.21)$$

Произвольные постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  определяются из граничных условий для нижнего и верхнего концов стойки.

Эти условия будут:

для нижнего конца стойки

$$FE \frac{\partial u_1}{\partial x_{x=0}} = m_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_{x=0}^2} + c_0 F_0 u_1(0, t),$$

где

и

$$u_1 = A_1 \cos \beta \eta + B_1 \sin \beta \eta$$

или

$$\beta B_1 = -(\beta^2 n_0 - k_0) Y_0; \quad (13.22)$$

для верхнего  $k+1$  узла

$$-FE \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_{x=l}} = m \frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial t_{x=l}^2} + cu_{k+1}(l, t)$$

или

$$-Y_k \beta \sin \beta + B_{k+1} \beta \cos \beta = (\beta^2 n_1 - k_1) Y_{k+1}. \quad (13.23)$$

Значения  $B_1, B_{k+1}$  можно определить из уравнений (13.14) и (13.15):

$$B_1 = (Y_1 - Y_0 \cos \beta) \frac{1}{\sin \beta};$$

$$B_{k+1} = (Y_{k+1} - Y_k \cos \beta) \frac{1}{\sin \beta}.$$

Подставляя значения  $B_1, B_{k+1}$  в выражения (13.22) и (13.23), заменяя значения  $Y_k$  согласно уравнению (13.20), получим для определения  $C_1$  и  $C_2$  систему уравнений

$$\left( \lambda_0 - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right) C_1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} C_2 = 0;$$

$$\left[ \lambda_1 \cos (k+1) \alpha - \frac{\cos k \alpha}{\cos \beta} \right] C_1 + \left[ \lambda_1 \sin (k+1) \alpha - \frac{\sin k \alpha}{\cos \beta} \right] C_2 = 0,$$

где

$$\lambda_0 = 1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta} (\beta^2 n_0 - k'); \quad \lambda_1 = 1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta} (\beta^2 n_1 - k_1).$$

Приравнивая определитель этой системы нулю, получим уравнение частоты для продольных колебаний стойки (см. рис. 13.3) в виде

$$\Delta(\beta) \equiv \lambda_0 \lambda_1 \sin (k+1) \alpha - (\lambda_0 + \lambda_1) \frac{\sin k \alpha}{\cos \beta} + \frac{\sin (k-1) \alpha}{\cos^2 \beta} = 0. \quad (13.24)$$

В случае, если бы нижний конец стойки находился на жестком основании (рис. 13.4), то  $u_1 = 0$ , т. е.  $C_1 = 0$  и  $B_1 = 0$ .

Уравнение частоты получаем в виде

$$\Delta(\beta) \equiv \lambda_1 \cos \beta \sin (k+1) \alpha - \sin k \alpha = 0, \quad (13.25)$$

в частности, для случая одного груза ( $k=0$ ) уравнение частоты

$$\lambda_1 \cos \beta \sin \alpha = 0.$$

Отсюда получим уравнение (13.10):

$$\lambda_1 \equiv 1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta} (\beta^2 n_1 - k_1) = 0.$$

Для случая ( $k=1$ ) получим из выражения (13.24) для стойки на упругом основании

$$2\lambda_0 \lambda_1 \left[ \cos \beta - \frac{\sin \beta}{2\beta} (\beta^2 n - k') \right] \cos \beta - (\lambda_1 + \lambda_0) = 0, \quad (13.26)$$

а из выражения (13.25) для заделанной стойки получаем

$$2 \left[ 1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta} (\beta^2 n_1 - k') \right] \left[ 1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{2\beta} (\beta^2 n - k') \right] \cos^2 \beta - 1 = 0. \quad (13.27)$$

Корни уравнения частот  $\beta_1, \beta_2$  находим обычным путем с помощью пробных подстановок, как видно на следующем примере.

**Пример.** Рассмотрим стойку (рис. 13.5) со следующими данными ( $G = mg$ ):

$$F = 0,60 \cdot 0,60 \text{ м}^2; E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2; \rho = 2,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; G_0 = 1 \cdot 10^4 \text{ кг};$$

$$G_1 = G_2 = G_3 = G = 5 \cdot 10^3 \text{ кг}; l = 4,5 \text{ м}; L = 18 \text{ м}; k + 1 = 4;$$

$$c = 0; c_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ т/м}; F_0 = 7,82 \text{ м}^2.$$

Значения величин  $k$  и  $n$  будут:

$$k_0 = 0,0217;$$

$$n_0 = 2,60; n = n_1 = 1,30.$$

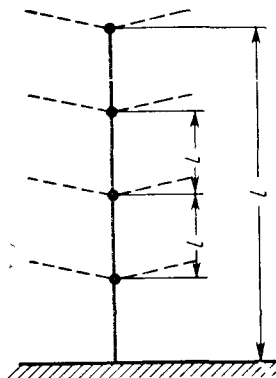


Рис. 13.4

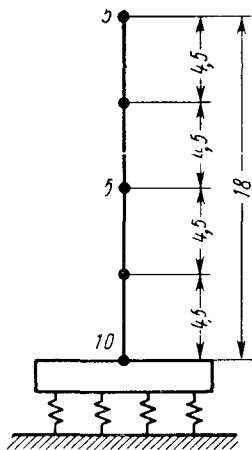


Рис. 13.5

Давая различные значения  $\beta$  и вычисляя  $\cos \alpha, \alpha, \lambda_0, \lambda_1$ , получим значения  $\Delta\beta$ .

Первый корень уравнения (13.24) будет мал. Так как вычисление значений корня  $\Delta\beta$  для малых  $\beta$  из уравнения (13.24) затруднительно и необходима большая точность, то удобнее его вычислить с помощью разложения  $\lambda_0, \lambda_1, \cos \beta$  в ряд степеням  $\beta$ .

Ограничиваясь четвертыми степенями  $\beta$ , после небольших преобразований для нашего примера получим

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta \Delta(\beta) &= (0,0217 - 4,9427\beta^2 + 6,3236\beta^4) \sin 4\alpha - \\ &- (0,0217 - 2,6036\beta^2 + 3,0308\beta^4) \sin 3\alpha = 0, \end{aligned}$$

причем  $\alpha$  определяется из выражения (13.21); для малых  $\alpha$

$$\sin 4\alpha \approx 4\alpha; \quad \sin 3\alpha \approx 3\alpha.$$

Отсюда для первого корня получим значение  $\beta_0 = 0,042$ . Для  $\beta < \beta_0$  значение  $\Delta(\beta_0)$  будет положительно.

Для вычисления следующего корня составляем табл. 13.1.

Из табл. 13.1 видно, что второй корень находится между 0,40 и 0,50; значение его будет  $\beta_1 \approx 0,423$ .

Значения функций частотного уравнения в зависимости от  $\beta$ 

$\beta$	$\cos \beta$	$\cos \alpha$	$\alpha$	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\sin 2\alpha$	$\sin 3\alpha$	$\sin 4\alpha$	$\cos^2 \beta \Delta$ ( $\beta$ )
0,15	0,9983	0,9742	0,2276	0,9629	0,9705	0,4398	0,6309	0,7897	-0,042
0,30	0,9553	0,8075	0,4567	0,7806	0,8795	0,7915	0,9799	0,9699	-0,166
0,40	0,9211	0,8199	0,6095	0,5831	0,7801	0,9388	0,9669	0,6470	-0,145
0,50	0,8776	0,7221	0,7640	0,3139	0,6451	0,9988	0,7550	0,0975	-0,487

Число колебаний

$$n = 9,55 \frac{\beta}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 6,20\beta \cdot 10^3 \text{ кол/мин}$$

или

$$n = 260 \text{ кол/мин}; n_1 = 2620 \text{ кол/мин.}$$

Если определить корень из уравнения (13.25) в предположении абсолютно жесткого основания (рис. 13.6), то получим  $\beta_1 = 0,24$  и  $n_1 = 1490 \text{ кол/мин}$ . Первый корень  $\beta_1$  соответствует тому случаю, когда стойка колеблется как твердое тело, почти не деформируясь. Действительно, частота колебаний для жесткой стойки на упругом основании

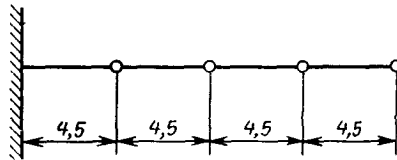


Рис. 13.6

будет иметь значение  $\omega = \sqrt{\frac{F_0 c_0}{\sum m}}$ , которое можно представить в виде

$$\left( \sum m = 11,8\rho l \right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{F_0 c_0}{\sum m}} = \frac{0,0428}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

согласно предыдущему

$$\omega = \frac{0,042}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Величина второго корня благодаря упругости основания значительно повышается.

### Свободные колебания нагруженной стойки с учетом затухания

**Общее решение.** Общее решение уравнения для стойки, с которой связаны сосредоточенные массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$  в сечениях  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , в которых стойка испытывает также упругий отпор

$$R_i = c_i u(x, t), \quad (13.28)$$

проще всего найти, рассматривая массы  $m_i$ , как предельные положения масс, равномерно распределенных в интервалах от  $x_i$  до

$x_i + \sigma_i$ , с интенсивностью на единицу длины  $m'_i$ , в предположении, что  $m'_i \sigma_i \rightarrow m_i$ , когда  $\sigma_i \rightarrow 0$ .

Аналогичное предположение вводим и по отношению к упругому отпору (13.28), т. е. будем полагать  $r_i \sigma_i \rightarrow R_i$ , когда  $\sigma_i \rightarrow 0$ .

Таким образом, значение  $F(x, t)$  уравнения (13.2) будет

$$F(x, t) = m'_i \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + r_i \text{ для } x_i \leq x \leq x_i + \varepsilon_i, \quad (13.29)$$

вне этих интервалов  $F(x, t) = 0$

Решение уравнения (13.2) ищем в форме

$$u(x, t) = \varphi(x) \sin \omega t + \psi(x) \cos \omega t. \quad (13.30)$$

Внося значения (13.30) в уравнение (13.2), получим для определения  $\varphi$  и  $\psi$  систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \varphi''(\eta) + \beta^2 \varphi(\eta) - \mu \psi''(\eta) &= F_1(\eta); \\ \psi''(\eta) + \beta^2 \psi(\eta) + \mu \varphi''(\eta) &= F_2(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (13.31)$$

где  $\eta = \frac{x}{L}$ ;  $\mu = \frac{\omega \xi}{FE}$ ;  $\beta^2 = \frac{\omega^2 L^2}{a^2}$ ;  $a^2 = \frac{E}{\rho}$ .

При этом согласно уравнению (13.29)  $F(\eta)$  везде равны нулю, за исключением интервалов  $\eta_i \leq \eta \leq \eta_i + \varepsilon_i$ , где  $F(\eta)$  имеет значение

$$\left. \begin{aligned} F_1(\eta) &= -\frac{\beta^2 m'_i}{\gamma F} \varphi(\eta) + \frac{c_i L^2}{EF} \varphi(\eta); \\ F_2(\eta) &= -\frac{\beta^2 m'_i}{\gamma F} \psi(\eta) + \frac{c_i L^2}{EF} \psi(\eta). \end{aligned} \right\}$$

Решение уравнений (13.31) при указанных условиях может быть найдено с помощью операционного исчисления, аналогично тому, как нами это проделано выше при изучении вынужденных колебаний стержней.

После вычислений получим уравнения в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\eta) &= \varphi_1(\eta) + \sum_{i=1}^k \Phi_i(\eta - \eta_i) \\ \psi(\eta) &= \psi_1(\eta) + \sum_{i=1}^k \Psi_i(\eta - \eta_i) \end{aligned} \right\} \text{ для } \eta_k \leq \eta \leq \eta_{k+1}. \quad (13.32)$$

Для первого интервала

$$\varphi(\eta) \equiv \varphi_1(\eta);$$

$$\psi(\eta) \equiv \psi_1(\eta),$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\eta) &= A \operatorname{ch} \alpha_1 \eta \cos \alpha \eta - B \operatorname{sh} \alpha_1 \eta \sin \alpha \eta - \\ &\quad - C \operatorname{sh} \alpha_1 \eta \cos \alpha \eta + D \operatorname{ch} \alpha_1 \eta \sin \alpha \eta; \\ \psi_1(\eta) &= \beta \operatorname{ch} \alpha_1 \eta \cos \alpha \eta + A \operatorname{sh} \alpha_1 \eta \sin \alpha \eta - \\ &\quad - D \operatorname{sh} \alpha_1 \eta \cos \alpha \eta - C \operatorname{ch} \alpha_1 \eta \sin \alpha \eta; \end{aligned} \right\}$$

здесь

$$\alpha_1 = \beta \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu^2)} (\sqrt{1+\mu^2} - 1)};$$

$$\alpha = \beta \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu^2)} (\sqrt{1+\mu^2} + 1)}.$$

Значения  $\Phi_i(\eta - \eta_i)$ ,  $\Psi_i(\eta - \eta_i)$  будут

$$\Phi_i(\eta - \eta_i) = \gamma_i \operatorname{sh} \alpha_1 (\eta - \eta_i) \cos \alpha (\eta - \eta_i) - \delta_i \operatorname{ch} \alpha_1 (\eta - \eta_i) \sin \alpha (\eta - \eta_i);$$

$$\Psi_i(\eta - \eta_i) = \delta_i \operatorname{sh} \alpha_1 (\eta - \eta_i) \cos \alpha (\eta - \eta_i) + \gamma_i \operatorname{ch} \alpha_1 (\eta - \eta_i) \sin \alpha (\eta - \eta_i),$$

где

$$\gamma_i = n'_i [\varphi(\eta_i) \alpha_1 - \psi(\eta_i) \alpha];$$

$$\delta_i = n'_i [\varphi(\eta_i) \alpha + \psi(\eta_i) \alpha_1];$$

здесь

$$n'_i = \frac{\beta^2 m_i}{F \rho L} - \frac{c_i L}{FE} = \beta^2 n_i - k_i.$$

В случае, когда затухание не учитывается, для стойки, несущей несколько масс в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и испытывающей в этих точках отпор (13.28), общее решение будет

$$u(\eta, t) = \varphi(\eta) \sin(kt + \delta), \quad (13.33)$$

где

$$\varphi(\eta) = A_1 \cos \beta \eta + B_1 \sin \beta \eta \quad \text{для } 0 \leq \eta \leq \eta_i;$$

$$\varphi(\eta) = A_1 \cos \beta \eta + B_1 \sin \beta \eta + \sum_{i=1}^k \frac{1}{\beta} \sin \beta (\eta - \eta_i) \varphi(\eta_i)$$

для  $\eta_k \leq \eta \leq \eta_{k+1}$ .

Для определения произвольных постоянных в общем случае при наличии масс на концах и упругого отпора необходимо удовлетворить условиям

$$\left. \begin{aligned} m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_0 u - \left( FE \frac{\partial u}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) &= 0 \quad \text{для } x = 0; \\ m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_n u + \left( FE \frac{\partial u}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) &= 0 \quad \text{для } x = L \end{aligned} \right\} \quad (13.34)$$

или

$$\left. \begin{aligned} (\beta^2 n_0 - k_0) \varphi + \varphi' - \mu \psi' &= 0, \quad (\beta^2 n_0 - k_0) \psi + \psi_1 + \mu \varphi' = 0 \\ &\text{для } \eta = 0; \\ (\beta^2 n_2 - k_n) \varphi - (\varphi' - \mu \psi') &= 0, \quad (\beta^2 n_2 - k_n) \psi - \\ &- (\psi' + \mu \varphi') = 0 \quad \text{для } \eta = 1. \end{aligned} \right\} \quad (13.34')$$



Удовлетворяя этим условиям, получим систему четырех уравнений относительно постоянных  $A, B, C, D$ ; определитель, составленный из коэффициентов при них, дает уравнение частоты.

Без учета затухания граничные условия в зависимости от условий для  $x = 0, x = L$  определяются согласно пп. 1, 3 (стр. 419).

**Свободные колебания стойки в случае равных масс при учете затухания.** Для этого случая уравнение частоты удобно составить с помощью метода уравнений в конечных разностях.

Согласно уравнению (13.30) для  $i$ -го участка (см. рис. 13.3) получим

$$u_{i+1} = \varphi_{i+1} \sin \omega t + \psi_{i+1} \cos \omega t, \quad (13.35)$$

где  $\varphi_{i+1}(\eta), \psi_{i+1}(\eta)$  можно записать в таком виде:

$$\varphi_{i+1}(\eta) = Y_i \cos \alpha \eta \operatorname{ch} \alpha_1 \eta - Y_i' \sin \alpha \eta \operatorname{sh} \alpha_1 \eta - C_{i+1} \operatorname{sh} \alpha_1 \eta \cos \alpha \eta + D_{i+1} \operatorname{ch} \alpha_1 \eta \sin \alpha \eta;$$

$$\psi_{i+1}(\eta) = Y_i' \cos \alpha \eta \operatorname{ch} \alpha_1 \eta + Y_i \sin \alpha \eta \operatorname{sh} \alpha_1 \eta - D_{i+1} \operatorname{sh} \alpha_1 \eta \cos \alpha \eta + C_{i+1} \operatorname{ch} \alpha_1 \eta \sin \alpha \eta.$$

Удовлетворяя условиям в узловой точке, получим аналогично предыдущему

$$\left. \begin{aligned} Y_{i+1} + Y_{i-1} &= 2Y_i \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha - 2Y_i' \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \alpha + \\ &+ (\beta^2 n - k) [(a \operatorname{sh} \alpha_1 \cos \alpha - b \operatorname{ch} \alpha_1 \sin \alpha) Y_i - \\ &- (b \operatorname{sh} \alpha_1 \cos \alpha + a \operatorname{ch} \alpha_1 \sin \alpha) Y_i']; \\ Y_{i+1}' + Y_{i-1}' &= 2Y_i' \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha + 2Y_i \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \alpha + \\ &+ (\beta^2 n - k') [(b \operatorname{sh} \alpha_1 \cos \alpha + a \operatorname{ch} \alpha_1 \sin \alpha) Y_i + \\ &+ (a \operatorname{sh} \alpha_1 \cos \alpha - b \operatorname{ch} \alpha_1 \sin \alpha) Y_i'], \end{aligned} \right\} (13.36)$$

где  $a = \frac{\mu \alpha - \alpha_1}{(\alpha \mu - \alpha_1)^2 + (\alpha + \alpha_1 \mu)^2}$ ;  $b = \frac{\alpha + \mu \alpha_1}{(\alpha \mu - \alpha_1)^2 + (\alpha + \alpha_1 \mu)^2}$ .

Решение системы уравнений (13.36) в конечных разностях ищем в виде

$$Y_i = A \eta_i^i; \quad Y_i' = B \eta_i^i. \quad (13.37)$$

После подстановки значений  $Y_i, Y_i'$  в систему (13.36) получим

$$A [u - (2 \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha + \alpha_1)] + B (2 \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \alpha + b_1) = 0;$$

$$-A (2 \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \alpha + b_1) + B [u - (2 \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha + \alpha_1)] = 0;$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} u &= \eta_1 + \frac{1}{\eta_1}; \\ \alpha_1 &= (\beta^2 n - k') [a \operatorname{sh} \alpha_1 \cos \alpha - b \operatorname{ch} \alpha_1 \sin \alpha]; \\ b_1 &= (\beta^2 n - k') [b \operatorname{sh} \alpha_1 \cos \alpha + a \operatorname{ch} \alpha_1 \sin \alpha]. \end{aligned} \right\} (13.38)$$

Отсюда

$$u_1 = c + id; u_2 = c - id,$$

где

$$c = 2 \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha + a_1; d = 2 \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \alpha + b_1.$$

Определяя из уравнения (13.38)  $\eta_1$ , получим четыре значения

$$\eta_{1,3} = r_1 (\cos \varphi_1 \pm i \sin \varphi_1); \quad \eta_{2,4} = r_2 (\cos \varphi_2 \pm i \sin \varphi_2),$$

а следовательно

$$Y_i = A_1 r_1' \cos i\varphi_1 + A_2 r_1' \sin i\varphi_1 + B_1 r_2' \cos i\varphi_2 + B_2 r_2' \sin i\varphi_2. \quad (13.39)$$

Аналогично

$$Y_i' = \beta_1 (A_1 r_1' \cos i\varphi_1 + A_2 r_1' \sin i\varphi_1) + \beta_2 (B_1 r_2' \cos i\varphi_2 + B_2 r_2' \sin i\varphi_2), \quad (13.40)$$

$$\text{где } \beta_1 = \frac{u_1 - (2 \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha + a_1)}{2 \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \alpha + b_1}; \quad \beta_2 = \frac{u_2 - (2 \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha + a_1)}{2 \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \alpha + b_1}.$$

Удовлетворяя условиям для  $i = 0, i = k + 1$ , получим уравнение частоты. Останавливаться подробно на этом случае не будем.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУЧЕНИЯ ВАЛОВ ПРИ УЧЕТЕ ЗАТУХАНИЯ

### Дифференциальное уравнение колебаний кручения

Если учесть внутреннее и внешнее затухания для колебаний кручения цилиндрического стержня (вала), то при обычных предположениях (поперечные сечения при поворачивании одного относительно другого остаются плоскими и радиусы сечений не искривляются) дифференциальное уравнение для колебаний кручения вала может быть записано в виде

$$GJ_p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho J_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \xi_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \xi_2 \frac{\partial u}{\partial t} = F(x, t), \quad (13.41)$$

где  $GJ_p$  — жесткость вала на кручение;  
 $\rho J_p$  — момент инерции единицы длины вала ( $\rho$  — масса единицы объема);  
 $\xi_1, \xi_2$  — коэффициенты, характеризующие внутреннее и внешнее затухание вала;  
 $u(x, t)$  — угол скручивания в некотором сечении вала;  
 $F(x, t)$  — интенсивность внешнего скручивающего момента.

### Крутильные колебания вала с дисками

Рассмотрим вынужденные колебания кручения вала длиной  $l$  в предположении, что на вал насажен ряд дисков в точках с абсциссами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , с моментами инерции относительно оси вала  $J_1, J_2, \dots, J_n$ , помимо того, к валу приложены внешние

скручивающие моменты, которые для простоты будем предполагать приложенными в тех же точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (рис. 13.7).

При наличии подшипников будем предполагать, что моменты сопротивления их от сил трения  $R_1 \frac{\partial u}{\partial t}, R_2 \frac{\partial u}{\partial t}, \dots$  приложены в точках  $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$ , причем  $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_{n-1} < x_n$ .

Свободные колебания, которые со временем затухают, принимать во внимание не будем\*.

Массы шкивов, как обычно, будем рассматривать как предельное положение масс, равномерно распределенных в интервалах

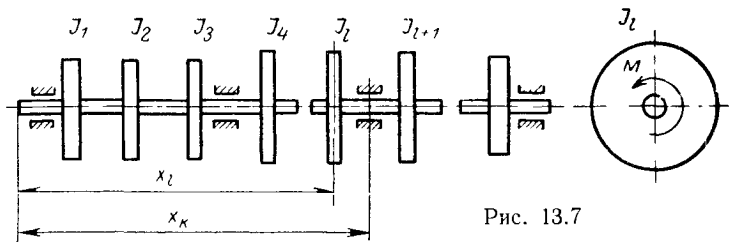


Рис. 13.7

от  $x_1$  до  $x_1 + \sigma$ , от  $x_2$  до  $x_2 + \sigma, \dots$ , с моментами инерции на единицу длины  $i_1, i_2, \dots$ , в предположении, что  $i_k \sigma_k \rightarrow J_k$ , когда  $\sigma_k \rightarrow 0$ . Аналогичное предположение примем по отношению к сопротивлению подшипников, т. е. будем считать, что  $r_i \sigma'_i \rightarrow R_i$ , когда  $\sigma'_i \rightarrow 0$ .

Такие же предположения примем для внешних периодических скручивающих моментов  $M'_1, M'_2, \dots, M'_n$ :

$$M'_i = M_i \sin kt + N_i \cos kt,$$

причем

$$m_i \sigma_i \rightarrow M_i; n_i \sigma_i \rightarrow N_i, \text{ когда } \sigma_i \rightarrow 0.$$

Постоянные скручивающие моменты во внимание не принимаем, так как они на установившееся колебательное движение вала влияния не оказывают.

Таким образом, для  $F(x, t)$  имеем значение

$$\left. \begin{aligned} F(x, t) &= i_k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m_k \sin kt + n_k \cos kt \\ &\text{для } x_k \leq x \leq x_k + \sigma_k; \\ \text{и } R \quad F'(x, t) &= r_k \frac{\partial u}{\partial t} \text{ для } x'_k \leq x \leq x'_k + \sigma'_k, \end{aligned} \right\} \quad (13.42)$$

где  $i_k \sigma_k \rightarrow J_k; m_k \sigma_k \rightarrow M_k; n_k \sigma_k \rightarrow N_k; r_k \sigma'_k \rightarrow R_k$

при  $\sigma_k \rightarrow 0; \sigma'_k \rightarrow 0$ .

\* Крутильные колебания невесомых валов подробно рассмотрены ниже.

За исключением указанных интегралов,  $F(x, t)$  везде равна нулю. Решение уравнения (13.41) для вынужденных колебаний ищем в форме

$$u = \varphi(x) \sin kt + \psi(x) \cos kt. \quad (13.43)$$

Подставляя значение (13.43) в уравнение (13.41), получим для определения  $\varphi$  и  $\psi$  систему двух дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \varphi''(\eta) + \beta^2 \varphi(\eta) - \mu \psi''(\eta) + \mu_1 \psi(\eta) &= F_1(\eta); \\ \psi''(\eta) + \beta^2 \psi(\eta) + \mu \varphi''(\eta) - \mu_1 \varphi(\eta) &= F_2(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (13.44)$$

$$\text{где } \eta = \frac{x}{l}; \quad \mu = \frac{\xi_1 l^2}{GJ_p}; \quad \mu_1 = \frac{\xi_2 k l^2}{GJ_p}; \quad \beta^2 = \frac{k^2 l^2}{a^2}; \quad a^2 = \frac{G}{\rho},$$

причем согласно значений (13.42)  $F_1(\eta)$  и  $F_2(\eta)$  будут везде равны нулю, за исключением интервалов  $\eta_i \leq \eta \leq \eta_i + \varepsilon_1$ ,  $\eta'_i \leq \eta \leq \eta'_i + \varepsilon'_i$  ( $\varepsilon_k = \frac{\sigma_k}{l}$ ), где  $F_1(\eta)$  и  $F_2(\eta)$  имеют значения

$$\left. \begin{aligned} F_1(\eta) &= -\frac{q \beta^2 i_k}{\rho J_p} \varphi(\eta) + \frac{m_k l^2}{GJ_p}; \\ F_2(\eta) &= -\frac{q \beta^2 i_k}{\rho J_p} \psi(\eta) + \frac{n_k l^2}{GJ_p} \quad \text{для } \eta_k \leq \eta \leq \eta_k + \varepsilon_k. \end{aligned} \right\} \quad (13.45)$$

Значения функций  $\varphi(\eta)$  и  $\psi(\eta)$  определяем, пользуясь операционным исчислением для условий

$$\varphi(0) = A_1; \quad \varphi'(0) = B; \quad \psi(0) = C_1; \quad \psi'(0) = D_1. \quad (13.46)$$

Для условий (13.46) имеем выражения для производных от  $\varphi$  и  $\psi$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\eta} &= p\varphi - pA_1; & \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} &= p^2\varphi - p^2A_1 - pB; \\ \frac{d\psi}{d\eta} &= p\psi - pC_1; & \frac{d^2\psi}{d\eta^2} &= p^2\psi - p^2C_1 - pD_1. \end{aligned}$$

Систему уравнений (13.44) запишем в форме

$$\left. \begin{aligned} p^2\varphi + \beta^2\varphi - \mu p^2\psi + \mu_1\psi &= F_1(\eta) + p^2A_1 + pB_1 - \\ &\quad - \mu(p^2C_1 + pD_1); \\ p^2\psi + \beta^2\psi + \mu p^2\varphi - \mu_1\varphi &= F_2(\eta) + p^2C_1 + pD_1 + \\ &\quad + \mu(p^2A_1 + pB_1), \end{aligned} \right\} \quad (13.47)$$

откуда, исключая  $\psi$  и пользуясь правилами разложения рациональных дробей на простейшие, получим

$$\varphi = A_1 + \sum_{i=1}^4 \{ [F_1(\eta) + f_1(s_i)] (\beta^2 + s_i^2) + [F_2(\eta) + f_2(s_i)] (\mu_1 s_i^2 - \mu_1) - \\ - (\mu \beta^2 + \mu_1) s_i^2 C_1 \} \frac{1}{(p - s_i) H'(s_i)},$$

где

$$\begin{aligned} f_1(s_i) &= B_1 s_i - \mu s_i D_1 - \beta^2 A_1; \\ f_2(s_i) &= D_1 s_i + \mu s_i B_1 + \mu_1 A_1, \end{aligned}$$

а  $s_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) — корни характеристического уравнения

$$H(s) = (s^2 + \beta^2)^2 + (\mu s^2 - \mu_1)^2 = 0,$$

равные

$$\begin{aligned} s_1 &= \alpha_1 + i\alpha; \quad s_2 = -(\alpha_1 + i\alpha); \quad s_3 = -(\alpha_1 - i\alpha); \\ s_4 &= \alpha_1 - i\alpha, \end{aligned} \quad (13.48)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu^2)} \left\{ \sqrt{(\beta^4 + \mu_1^2)(1+\mu^2)} - (\beta^2 - \mu\mu_1) \right\}}; \\ \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu^2)} \left\{ \sqrt{(\beta^4 + \mu_1^2)(1+\mu^2)} + (\beta^2 - \mu\mu_1) \right\}}. \end{aligned}$$

Интерпретируя символические выражения  $(p - s)^{-1}f$  как соответствующие дифференциальные уравнения, получим для  $\varphi(\eta)$  и  $\psi(\eta)$  решение в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\eta) &= \varphi_1(\eta) + \Phi(\eta); \\ \psi(\eta) &= \psi_1(\eta) + \Psi(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (13.49)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\eta) &= A \operatorname{ch} \alpha_1 \eta \cos \alpha \eta - B \operatorname{sh} \alpha_1 \eta \sin \alpha \eta - \\ &\quad - C \operatorname{sh} \alpha_1 \eta \cos \alpha \eta + D \operatorname{ch} \alpha_1 \eta \sin \alpha \eta; \\ \psi_1(\eta) &= B \operatorname{ch} \alpha_1 \eta \cos \alpha \eta + A \operatorname{sh} \alpha_1 \eta \sin \alpha \eta - \\ &\quad - D \operatorname{sh} \alpha_1 \eta \cos \alpha \eta - C \operatorname{ch} \alpha_1 \eta \sin \alpha \eta, \end{aligned} \right\} \quad (13.50)$$

причем произвольные постоянные  $A_1, B_1, C_1, D_1$  заменены после интегрирования на  $A, B, C$  и  $D$ , связанные с ними линейными зависимостями.

В равенстве (13.49) через  $\Phi$  и  $\Psi$  обозначены частные решения уравнений (13.47) с правой частью.

В случае, если имеем только один диск, насаженный в точке, то для  $0 \leq \eta \leq \eta_1$

$$\Phi(\eta) = 0 \text{ и } \Psi(\eta) = 0;$$

для  $\eta_1 + \varepsilon_1 \leq \eta \leq 1$

$$\begin{aligned} \Phi(\eta) &= \int_{\eta_1}^{\eta_1 + \varepsilon_1} \frac{F_1(\eta) + iF_2(\eta)}{4(1+i\mu)} \left[ \frac{1}{s_1} e^{s_1(\eta-t)} + \frac{1}{s_2} e^{s_2(\eta-t)} \right] dt + \\ &\quad + \int_{\eta_1}^{\eta_1 + \varepsilon_1} \frac{F_1(\eta) - iF_2(\eta)}{4(1-i\mu)} \left[ \frac{1}{s_3} e^{s_3(\eta-t)} + \frac{1}{s_4} e^{s_4(\eta-t)} \right] dt; \end{aligned}$$

$$\Psi(\eta) = \int_{\eta_1}^{\eta_1 + \varepsilon_1} \frac{F_2(\eta) - iF_1(\eta)}{4(1 + i\mu)} \left[ \frac{1}{s_1} e^{s_1(\eta-t)} + \frac{1}{s_2} e^{s_2(\eta-t)} \right] dt +$$

$$+ \int_{\eta_1}^{\eta_1 + \varepsilon_1} \frac{F_2(\eta) + iF_1(\eta)}{4(1 - i\mu)} \left[ \frac{1}{s_3} e^{s_3(\eta-t)} + \frac{1}{s_4} e^{s_4(\eta-t)} \right] dt.$$

Подставляя вместо  $F_1(\eta)$  и  $F_2(\eta)$  их значения (13.45)

$$F_1(\eta) = -\frac{\beta^2 i k}{\rho l p} [\varphi_1(\eta) + \Phi(\eta)] + \frac{m_1 l^2}{G I_p};$$

$$E_2(\eta) = -\frac{\beta^2 i k}{\rho l p} [\psi_1(\eta) + \psi(\eta)] + \frac{n_1 l^2}{G I_p}$$

и принимая во внимание, что при переходе к пределу, в предположении, что  $i_1 \varepsilon_1 l \rightarrow I_1$ ,  $m_1 \varepsilon_1 l \rightarrow M_1$ ,  $n_1 \varepsilon_1 l \rightarrow N_1$ , когда  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ , интегралы, содержащие  $\Phi(\eta)$  и  $\psi(\eta)$ , пропадут, получим частные решения системы:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\eta) &= 0 && \text{для } 0 \leq \eta \leq \eta_1, \\ \Phi(\eta - \eta_1) &= \gamma_1 \operatorname{sh} \alpha_1 (\eta - \eta_1) \cos \alpha (\eta - \eta_1) - \\ &- \delta_1 \operatorname{ch} \alpha_1 (\eta - \eta_1) \sin \alpha (\eta - \eta_1) && \text{для } \eta_1 \leq \eta \leq l; \\ \Psi(\eta) &= 0 && \text{для } 0 \leq \eta \leq \eta_1; \\ \Psi(\eta - \eta_1) &= \delta_1 \operatorname{sh} \alpha_1 (\eta - \eta_1) \cos \alpha (\eta - \eta_1) + \\ &+ \gamma_1 \operatorname{ch} \alpha_1 (\eta - \eta_1) \sin \alpha (\eta - \eta_1) && \text{для } \eta_1 \leq \eta \leq l, \end{aligned} \right\} (13.51)$$

где

$$\gamma_1 = n_1 [\varphi_1(\eta_1) v_1 - \psi_1(\eta_1) v] - \frac{l}{G I_p \beta^2} [M_1 v_1 - N v];$$

$$\delta_1 = n_1 [\varphi_1(\eta_1) v + \psi_1(\eta_1) v_1] - \frac{l}{G I_p \beta^2} [M_1 v + N_1 v_1].$$

причем

$$n_1 = \frac{J_p}{\rho l I_p}; \quad v_1 = \frac{1}{K} \left( \alpha_1 - \frac{\alpha_1 \mu_1}{\beta^2} \right);$$

$$v = \frac{1}{k} \left( \alpha + \frac{\alpha_1 \mu_1}{\beta^2} \right); \quad K = 1 + \frac{\mu_1^2}{\beta^4}.$$

При наличии только внешнего сопротивления (13.42), приложенного в точке  $x'_1$ , частные решения  $\Phi(\eta)$  и  $\psi(\eta)$  равны нулю для  $0 \leq \eta \leq \eta'_1$ , а для  $\eta'_1 \leq \eta \leq l$ .

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{11}(\eta - \eta'_1) &= \gamma'_1 \operatorname{sh} \alpha_1 (\eta - \eta'_1) \cos \alpha (\eta - \eta'_1) - \\ &- \delta'_1 \operatorname{ch} \alpha_1 (\eta - \eta'_1) \sin \alpha (\eta - \eta'_1); \\ \Psi_{11}(\eta - \eta'_1) &= \delta'_1 \operatorname{sh} \alpha_1 (\eta - \eta'_1) \cos \alpha (\eta - \eta'_1) + \\ &+ \gamma'_1 \operatorname{ch} \alpha_1 (\eta - \eta'_1) \sin \alpha (\eta - \eta'_1), \end{aligned} \right\} (13.52)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{aR}{GI\rho\beta} [\psi_1(\eta'_1) v_1 + \varphi_1(\eta'_1) v];$$

$$\delta_1 = \frac{aR}{GI\rho\beta} [\psi_1(\eta'_1) v - \varphi_1(\eta'_1) v_1].$$

В том случае, когда имеется несколько дисков в точках  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ , а также внешнее сосредоточенное затухание (13.42) в точках  $\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_{n-1}$  ( $\eta_1 \leq \eta'_1 \leq \eta_2 \leq \eta'_2 \leq \eta_3 \dots$ ), общее решение уравнения системы (13.44) для интервала  $\eta_i \leq \eta \leq \eta'_{i+1}$  будет

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\eta) &= \varphi_1(\eta) + \sum_{k=1}^i \Phi_k(\eta - \eta_k) + \sum_{k=1}^{i-1} \Phi_{1k}(\eta - \eta'_k); \\ \psi(\eta) &= \psi_1(\eta) + \sum_{k=1}^i \Psi_k(\eta - \eta_k) + \sum_{k=1}^i \Psi_{1k}(\eta - \eta'_k), \end{aligned} \right\} (13.53)$$

где

$$\Phi_k(\eta - \eta_k) = \gamma_k \operatorname{sh} \alpha_1(\eta - \eta_k) \cos \alpha(\eta - \eta_k) - \delta_k \operatorname{ch} \alpha_1(\eta - \eta_k) \sin \alpha(\eta - \eta_k);$$

$$\Psi_k(\eta - \eta_k) = \delta_k \operatorname{sh} \alpha_1(\eta - \eta_k) \cos \alpha(\eta - \eta_k) + \gamma_k \operatorname{ch} \alpha_1(\eta - \eta_k) \sin \alpha(\eta - \eta_k);$$

$$\Phi_{1k}(\eta - \eta'_k) = \gamma'_k \operatorname{sh} \alpha_1(\eta - \eta'_k) \cos \alpha(\eta - \eta'_k) - \delta'_k \operatorname{ch} \alpha_1(\eta - \eta'_k) \sin \alpha(\eta - \eta'_k);$$

$$\Psi_{1k}(\eta - \eta'_k) = \delta'_k \operatorname{sh} \alpha_1(\eta - \eta'_k) \cos \alpha(\eta - \eta'_k) + \gamma'_k \operatorname{ch} \alpha_1(\eta - \eta'_k) \sin \alpha(\eta - \eta'_k),$$

причем

$$\gamma_k = n_k [\varphi(\eta_k) v_1 - \psi(\eta_k) v] - \frac{l}{GJ\rho\beta^2} [M_k v_1 - N_k v];$$

$$\delta_k = n_k [\varphi(\eta_k) v + \psi(\eta_k) v_1] - \frac{l}{GJ\rho\beta^2} [M_k v_1 + N_k v];$$

$$\gamma'_k = \frac{aR_k}{GI\rho\beta} [\psi(\eta'_k) v + \varphi(\eta'_k) v_1];$$

$$\delta'_k = \frac{aR_k}{GI\rho\beta} [\psi(\eta'_k) v - \varphi(\eta'_k) v_1],$$

$$\text{где } n_k = \frac{J_k}{\rho l J_\rho}.$$

При наличии только внутреннего затухания в предыдущих формулах необходимо положить  $v_1 = \alpha_1$ ,  $v = \alpha$ .

### Частные случаи

Если на концах вала также насажены диски с моментами инерции  $J_0, J$ , то необходимо удовлетворить условиям

$$\left. \begin{aligned} J_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( GJ_p \frac{\partial u}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) &= 0 \text{ для } x = 0; \\ J \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left( GJ_p \frac{\partial u}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) &= 0 \text{ для } x = l \end{aligned} \right\} \quad (13.54)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 n_0 \varphi + \varphi' - \mu \varphi' &= 0; \quad \beta^2 n_0 \psi + \psi' + \mu \varphi' = 0 \\ &\text{для } \eta = 0; \\ \beta^2 n \varphi - (\varphi' - \mu \varphi') &= 0; \quad \beta^2 n \varphi - (\psi' + \mu \varphi') = 0 \\ &\text{для } \eta = 1. \end{aligned} \right\} \quad (13.55)$$

Удовлетворяя условиям (13.55), получим систему уравнений относительно  $A, B, C$  и  $D$ , откуда и найдем их значения.

При наличии нескольких дисков и местных внешних затуханий (13.42), при удовлетворении условий для правого конца, писать общее решение для последнего участка  $\eta'_n < \eta < 1$  нет надобности, а лучше в каждом отдельном случае заранее поставить численное выражение величин, входящих в  $\Phi_i, \Psi_i, \Phi_{1i}, \Psi_{1i}$ .

В частности, при наличии только трех дисков в точках  $\eta = 0, \eta = \eta_1, \eta = 1$  и скручивающегося момента  $M \sin kt$ , приложенного к среднему диску при отсутствии внешнего затухания, можно получить следующие уравнения для определения  $C$  и  $D$ :

$$c_1 C + c_2 D = d_1; \quad -c_2 C + c_1 D = d_2,$$

где

$$c_1 = a_1 \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha + a_2 \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \alpha + a_3 \operatorname{sh} \alpha_1 \cos \alpha + a_4 \operatorname{ch} \alpha_1 \sin \alpha +$$

$$+ a_5 \operatorname{ch} \alpha_1 \eta_2 \cos \alpha \eta_2 + a_6 \operatorname{sh} \alpha_1 \eta_2 \sin \alpha \eta_2 + a_7 \operatorname{sh} \alpha_1 \eta_2 \cos \alpha \eta_2,$$

$$c_2 = a_2 \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha - a_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \alpha + a_4 \operatorname{sh} \alpha_1 \cos \alpha -$$

$$- a_3 \operatorname{ch} \alpha_1 \sin \alpha + a_6 \operatorname{ch} \alpha_1 \eta_2 \cos \alpha \eta_2 - a_5 \operatorname{sh} \alpha_1 \eta_2 \sin \alpha \eta_2 -$$

$$- a_7 \operatorname{sh} \alpha_1 \eta_2 \cos \alpha \eta_2;$$

$$d_1 = - \frac{lM}{GI_p} \operatorname{ch} \alpha_1 (1 - \eta_1) \cos \alpha (1 - \eta_1) -$$

$$- \frac{n_2 l M}{GI_p} [\alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_1 (1 - \eta_1) \cos \alpha (1 - \eta_1) -$$

$$- \alpha \operatorname{ch} \alpha_1 (1 - \eta_1) \sin \alpha (1 - \eta_1)];$$

$$d_2 = - \frac{lM}{GI_p} \operatorname{sh} \alpha_1 (1 - \eta_1) \sin \alpha (1 - \eta_1) -$$

$$- \frac{n_2 l M}{GI_p} [\alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_1 (1 - \eta_1) \cos \alpha (1 - \eta_1) +$$

$$+ \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1 (1 - \eta_1) \sin \alpha (1 - \eta_1)],$$



причем

$$\eta_2 = 2\eta_1 - 1; \quad a_1 = (\mu\alpha - \alpha_1) \left( 1 + \frac{n_1}{2n_0} + \frac{n_2}{n_0} \right) + \frac{\alpha_1 n_1 n_2 \beta^2}{2};$$

$$a_2 = (\alpha - \mu\alpha_1) \left( 1 + \frac{n_1}{2n_0} + \frac{n_2}{n_0} \right) - \frac{\alpha_1 n_1 n_2 \beta^2}{2};$$

$$a_3 = \beta^2 \left( \frac{n_1}{2} + n_2 + \frac{n_1 n_2}{2n_0} \right) - \frac{1}{n_0}; \quad a_4 = \frac{\mu}{n_0};$$

$$a_5 = \frac{n_1}{2n_0} (\mu\alpha - \alpha_1) - \frac{\alpha_1 n_1 n_2 \beta^2}{2}; \quad a_6 = (\alpha + \mu\alpha_1) \frac{n_1}{2n_0} + \frac{\alpha n_1 n_2 \beta^2}{2};$$

$$a_7 = \frac{n_1}{2} \left( 1 - \frac{n_2}{n_0} \right) \beta^2.$$

Значения  $A$  и  $B$  будут

$$\begin{aligned} \beta^2 n_0 A &= (\alpha_1 - \mu\alpha) C - (\alpha + \mu\alpha_1) D; \\ \beta^2 n_0 B &= (\alpha + \mu\alpha_1) C - (\alpha_1 - \mu\alpha) D. \end{aligned}$$

Значения  $\varphi$  и  $\psi$  определяются по формуле (13.49).

В том случае, когда внешнее и внутреннее затухания отсутствуют, для вала, несущего ряд дисков  $J_1, J_2, \dots, J_n$  в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , к которым приложены в тех же точках внешние моменты  $M_1 \sin(pt + \delta)$ , решение уравнения (13.41) в интервале  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_{i+1}$  будет

$$\begin{aligned} u &= \varphi(\eta) \sin(kt + \delta) = \\ &= \left[ A_1 \cos \beta\eta + B_1 \sin \beta\eta + \sum_{k=1}^i \Phi_k(\eta - \eta_k) \right] \sin(pt + \delta), \end{aligned}$$

причем

$$\varphi(\eta) = A \cos \beta\eta + B_1 \sin \beta\eta \quad \text{для } 0 \leq \eta \leq \eta_1;$$

$$\Phi_k(\eta - \eta_k) = \left[ \frac{M_k t}{GJ_p \beta} - \beta n_k \varphi(\eta_k) \right] \sin \beta(\eta - \eta_k).$$

Если положить  $M_k = 0$  и удовлетворить  $\varphi(\eta)$  условиям для  $\eta = 0$  и  $\eta = 1$ , то придем к уравнению частоты для свободных колебаний вала. Например, для случая трех дисков, расположенных в точках  $\eta = 0, \eta = \eta_1, \eta = 1$  с моментами инерции  $J_0, J_1, J$ , уравнение частоты будет

$$(n_0 + n) \beta \cos \beta - (\beta^2 n_0 n - 1) \sin \beta - \beta n_1 (\cos \beta \eta_1 - n_0 \beta \sin \beta \eta_1) [\beta \eta \sin \beta (1 - \eta_1) - \cos \beta (1 - \eta_1)] = 0,$$

из которого и определяют значения корней  $\beta, \beta_1, \beta_2, \dots$ .

Если моменты инерции промежуточных дисков и расстояния между ними равны, проведенные выше решения и в конечных расстояниях уравнения продольных колебаний сохраняются в силе и для крутильных колебаний. В этом случае необходимо удовлетворить лишь граничным условиям (13.54).

## КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОМАССОВЫХ СИСТЕМ

Для практических расчетов крутильных колебаний валопроводов силовых установок, реальная конструкция заменяется приведенной дискретной системой, состоящей из сосредоточенных масс в виде тонких дисков, соединенных безинерционными упругими участками. Инерционные свойства масс характеризуются массовыми моментами инерции, упругими характеристиками участков и крутильными жесткостями или податливостями.

Приведенная система должна достаточно точно отражать упругие и инерционные характеристики исходной системы.

Построение приведенной системы сводится к определению жесткостей упругих участков, равновеликих жесткостей соответствующих участков исходной системы и к определению моментов инерции сосредоточенных масс. Методы приведения подробно освещены в специальной литературе [95, 112, 118].

Опыт расчетов и экспериментальные проверки показывают, что при замене реальной системы приведенной мы получаем удовлетворительные результаты расчетов крутильных колебаний для нескольких первых частот свободных колебаний. Расчеты крутильных колебаний валопроводов силовых установок с двигателями внутреннего сгорания можно разделить на два этапа: первый — определение частот, второй — нахождение амплитуд вынужденных колебаний.

Расчеты свободных колебаний производятся с целью определения критических или резонансных чисел оборотов двигателя. Для этого периодические крутящие моменты, действующие на кривошипы коленчатого вала, записываются в виде суммы гармонических составляющих. Порядок гармонических составляющих определяется числом полных циклов их изменения за один оборот коленчатого вала и представляет собой простой ряд чисел для двухтактных двигателей или числовую последовательность, взятую через половины ( $1/2, 1, 1\frac{1}{2}, 2, \dots$ ) для четырехтактных двигателей. Каждая из гармонических составляющих в отдельности может вызвать явление резонанса.

Имея значения собственных частот крутильных колебаний валопровода двигателя  $n_1, n_2, n_3, n_4, \dots$  и диапазон изменения рабочих чисел оборотов двигателя  $n_{\min} < n < n_{\max}$  из простого соотношения  $n_s = k_s n$ , легко найти порядки  $k_s$  гармоник, попадающих в резонанс с любой  $s$ -й собственной частотой ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ), и соответствующие им резонансные числа оборотов в рабочем диапазоне двигателя. Для найденных таким образом режимов должна быть произведена оценка степени опасности резонансных колебаний. Поскольку максимальные числа оборотов в минуту современных двигателей внутреннего сгорания сравнительно невелики, а амплитуды гармонических составляющих крутящих моментов убывают с увеличением порядка гармоник, то

в реальных системах в резонансной зоне, как правило, может оказаться лишь несколько низших собственных частот колебаний и переход к приведенным системам полностью удовлетворяет практические потребности расчетов.

### Дифференциальные уравнения свободных колебаний многомассовой системы

Обозначим:  $J_r$  — момент инерции  $r$ -й массы приведенной системы;  $e_{r, r+1}$  — крутильная податливость упругого участка между  $r$ -й и  $(r + 1)$ -й массами;  $c_{r, r+1}$  — крутильная жесткость этого же участка.

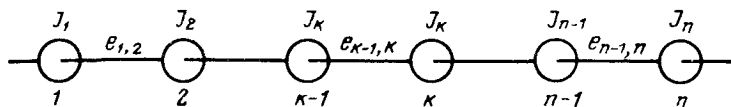


Рис. 13.8

Под крутильной податливостью понимается угол закручивания участка от единичного момента, т. е.  $e = \frac{\varphi}{M}$ , а  $c = \frac{M}{\varphi}$ .

Рассмотрим сначала простую цепную систему, для которой сосредоточенные массы соединены последовательно. Условное изображение этой системы показано на рис. 13.8.

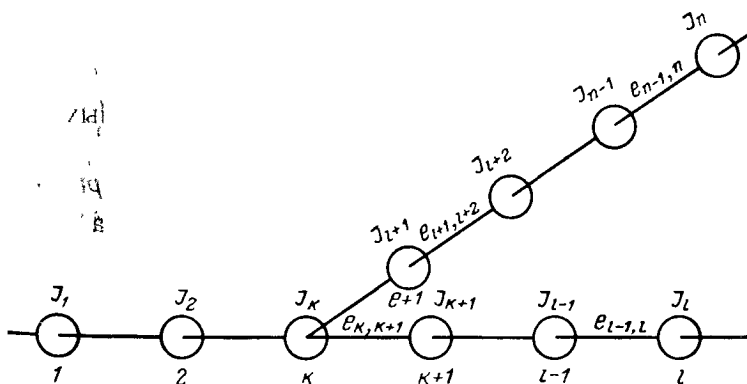


Рис. 13.9

Если применить принцип Даламбера к  $k$ -й массе с моментом инерции  $J_k$ , то дифференциальное уравнение ее движения получим в виде

$$J_k \frac{d^2 \varphi_k}{dt^2} + \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{e_{k-1, k}} + \frac{\varphi_k - \varphi_{k+1}}{e_{k, k+1}} = 0 \quad (13.56)$$

$$(k = 2, 3, \dots, n-1).$$

Для крайних масс ( $k = 1, k = n$ )  $e_{01} = e_{n, n+1} = \infty$  и уравнения будут

$$J_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{e_{1,2}} = 0, \quad J_n \frac{d^2 \varphi_n}{dt^2} + \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{e_{n-1, n}} = 0. \quad (13.56')$$

Для разветвленной системы (рис. 13.9) дифференциальные уравнения свободных колебаний записываются аналогично с учетом связей массы с участками.

Для промежуточных масс любой ветви дифференциальное уравнение имеет вид уравнения (13.56). Для масс, находящихся в местах разветвления, отличие состоит в том, что слагаемых, выражающих упругие моменты вида  $\frac{\varphi_z - \varphi_{z+1}}{e_{z, z+1}}$ , будет столько, сколько ветвей присоединено к данной массе.

Для крайних масс уравнения имеют вид уравнения (13.56), причем число таких уравнений равно числу крайних масс (числу ветвей) в приведенной системе.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИВЕДЕННЫХ СИСТЕМ

Существует ряд методов определения собственных частот и форм крутильных колебаний приведенных систем.

Рассмотрим здесь некоторые из них, используемые при применении ручных средств счета [3, 112].

#### Прямой метод расчета

Предполагая, что система совершает одно из главных колебаний, частное решение системы (13.56) берем в виде

$$\varphi_1 = \lambda_1 \sin pt, \quad \varphi_2 = \lambda_2 \sin pt, \quad \dots, \quad \varphi_n = \lambda_n \sin pt, \quad (13.57)$$

где  $\lambda_1$  — амплитуды собственных форм;  $p$  — частота главного колебания.

Подставляя эти решения в систему (13.55), получим систему алгебраических уравнений такого вида:

$$\begin{aligned} J_1 \lambda_1 p^2 - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{e_{1,2}} &= 0; \\ I_2 \lambda_2 p^2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{e_{1,2}} - \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{e_{2,3}} &= 0; \\ &\dots \dots \dots \\ J_n \lambda_n p^2 + \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_n}{e_{n-1, n}} &= 0. \end{aligned} \quad (13.58)$$

Исключая из них  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , получим уравнение  $n$ -й степени относительно  $p^2$ , называемое уравнением частот. Корни

этого уравнения дают  $n$  значений собственных частот главных колебаний системы. Подставляя полученные частоты в систему (13.58), показали соответствующие формы главных или собственных колебаний.

Прямой метод удобно применять к расчету двух-трехмассовых систем, к которым зачастую приводят многомассовые системы при ориентировочном определении низшей собственной частоты.

Найденная таким образом низшая частота позволяет сократить ручной счет при ее уточнении методами проб.

### Метод остатков (метод Толле)

Из уравнений (13.58) можно выразить все  $\lambda_i$  через предыдущие, т. е.

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \lambda_1 - e_{1,2} p^2 J_1, \\ \lambda_3 &= \lambda_2 - e_{2,3} p^2 (J_1 \lambda_1 - J_2 \lambda_2),\end{aligned}\quad (13.59)$$

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} - e_{n-1,n} p^2 (J_1 \lambda_1 + J_2 \lambda_2 + \dots + J_{n-1} \lambda_{n-1}).$$

Помимо этих зависимостей имеется равенство

$$J_1 \lambda_1 + J_2 \lambda_2 + \dots + J_n \lambda_n = 0, \quad (13.60)$$

которое получается после сложения уравнений (13.58). По методу остатка задаются некоторым значением  $p^2 = \nu$  и для  $\lambda = 1$ , используя выражения (13.59), определяют последовательно все значения  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ .

После подстановки значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  в левую часть уравнения (13.60), получаем ее значение  $\Delta(\nu) \neq 0$ , откладывая по оси абсцисс значения  $\nu$ , по оси ординат  $\Delta\nu$  строим кривую  $\Delta(\nu)$  (остаточных моментов), точки пересечения которой с осью  $\nu$  дают значения собственных частот  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-1}$ .

Толле предложена табличная форма (таблицы Толле) подсчета значений  $\lambda_i$  и  $\Delta(\nu)$  для каждого пробного  $\nu$ . Ввиду простоты расчетной схемы метод остатков представляет ряд удобств, а именно дает ясное представление сущности производимых операций, что значительно облегчает проверку правильности вычислений; применяемая при этом методе форма табличного счета пригодна и для расчета вынужденных крутильных колебаний многомассовых систем.

Основным недостатком метода является невозможность применения его к более сложным разветвленным системам без предварительного преобразования. Подробности метода изложены в специальной литературе.

### Метод непрерывных дробей (метод проф. В. Терских)

Неразветвленные системы (см. рис. 13.8). Как и прежде решенные системы (13.56) ищем в виде

$$\varphi_1 = \alpha_1 \sin \omega t, \quad \varphi_2 = \alpha_2 \sin \omega t, \quad \dots, \quad \varphi_n = \alpha_n \sin \omega t.$$

Подставляя их в систему (13.56), получим

$$\left. \begin{aligned} -J_1\omega^2\alpha_1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{e_{1,2}} &= 0; \\ \dots \dots \dots \\ -J_k\omega^2\alpha_k + \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{e_{k-1,k}} + \frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{e_{k,k+1}} &= 0; \\ \dots \dots \dots \\ -J_n\omega^2\alpha_n + \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{e_{n-1,n}} &= 0. \end{aligned} \right\} (13.61)$$

Заменяя разности амплитуд  $\alpha_k - \alpha_{k-1}$  и  $\alpha_k - \alpha_{k+1}$  их выражениями через амплитуды сил упругости, которые обозначим через  $\delta$  с соответствующими подстрочными индексами

$$\delta_{k-1,k} = \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{e_{k-1,k}}, \quad \delta_{k,k+1} = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{e_{k,k+1}} \quad (13.62)$$

$$k = 1, 2, \dots, (k-1)$$

и вводя понятие стойкости массы  $H_k$ , как коэффициент пропорциональности  $-J_k\omega^2 = H_k$  в выражении амплитуды силы инерции массы, уравнениям (13.61) с использованием выражений (13.62) можно придать такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1,2} &= H_1\alpha_1; & \delta_{2,1} &= -H_1\alpha_1; \\ \delta_{k,k+1} &= \delta_{k-1,k} + H_k\alpha_k; & \delta_{k-1,k} &= \delta_{k+1,k} + H_k\alpha_k \\ & [k = 2, 3, \dots, (n-1)]; \\ \delta_{n-1,n} &= -H_n\alpha_n; & \delta_{n,n-1} &= H_n\alpha_n. \end{aligned} \right\} (13.63)$$

Сущность метода Терских заключается в том, что используя соотношения значения (13.61) и (13.62) выражают отношения  $\delta_{k,k+1}$  к  $\alpha_k$  через стойкости  $H_r$ , податливости  $e_r$  и аналогичные отношения, сначала в порядке убывания номеров масс

$$\begin{aligned} \delta_{k,k+1} &= \delta_{k-1,k} + H_k\alpha_k; \\ \frac{\delta_{k,k+1}}{\alpha_k} &= H_k + \frac{\delta_{k-1,k}}{\alpha_k} = H_k + \frac{\delta_{k-1,k}}{\alpha_{k-1} + e_{k-1,k}\delta_{k-1,k}} = \\ &= H_k + \frac{1}{e_{k-1,k} + \frac{\alpha_{k-1}}{\delta_{k-1,k}}} = H_k + \frac{1}{e_{k-1,k} + \frac{\alpha_{k-1}}{\delta_{k-2,k-1} + H_{k-1}\alpha_{k-1}}} = \\ &= H_k + \frac{1}{e_{k-1,k} + \frac{1}{H_{k-1} + \frac{1}{e_{k-2,k-1} + \dots + \frac{1}{e_{1,2} + \frac{1}{H_1}}}}}, \end{aligned} \quad (13.64)$$

а затем в порядке возрастания этих номеров

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + e_{k, k+1} \delta_{k, k+1};$$

$$\frac{\delta_{k, k+1}}{\alpha_k} = \frac{-\delta_{k, k+1}}{-\alpha_{k+1} + e_{k, k+1} \delta_{k, k+1}} = \frac{1}{e_{k, k+1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\delta_{k, k+1}}} =$$

$$= \frac{1}{e_{k, k+1} + \frac{1}{H_{k+1} + \frac{1}{e_{k+1, k+2} + \frac{1}{H_{k+2} + \dots + \frac{1}{e_{n-1, n} + \frac{1}{H_n}}}}}}. \quad (13.65)$$

Поскольку левые части выражений (13.64) и (13.65) равны, то можно приравнять и их правые части. В результате получим уравнение, содержащее только параметры системы и неизвестную частоту ее свободных колебаний:

$$H_k + \frac{1}{e_{k-1, k} + \frac{1}{H_{k+1} + \dots + \frac{1}{e_{1, 2} + \frac{1}{H_1}}}} =$$

$$= \frac{1}{e_{k, k+1} + \frac{1}{H_{k+1} + \dots + \frac{1}{e_{n-1, n} + \frac{1}{H_n}}}}. \quad (13.66)$$

Полученное уравнение является уравнением частот свободных колебаний, записанным в форме непрерывной дроби. Это уравнение относительно  $\omega^2$  является алгебраическим уравнением  $n$ -го порядка, корни которого определяют  $n$  значений собственных частот.

Уравнению (13.66) можно придать более удобный вид

$$J_1 \omega^2 - \frac{1}{e_{1, 2} - \frac{1}{J_2 \omega^2} - \dots - \frac{1}{e_{n-1, n} - \frac{1}{J_n \omega^2}}} = 0. \quad (13.66')$$

Определение собственных частот по методу Герских, так же как и по методу остатка, осуществляется последовательными пробными.

Для каждого пробного значения  $\omega$  определяют значение цепной дроби, стоящей в левой части уравнения (13.66'), и по ее величине и знаку уточняют искомую частоту. Для подсчета цепных дробей В. Герских предложил удобную табличную форму счета.

После того как с требуемой точностью найдена одна из собственных частот колебаний системы, можно определить амплитуды собственных форм ( $\alpha_i$ ) и упругих моментов участков ( $\delta_{i-1, i}$ ), соответствующих этой частоте.

Первый способ основан на следующих зависимостях между амплитудами свободных колебаний и упругих моментов:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{k, k+1} &= \delta_{k-1, k} + H_k \alpha_k; & \delta_{k, k-1} &= \delta_{k+1, k} + H_k \alpha_k; \\ \alpha_{k+1} &= \alpha_k + e_{k, k+1} \delta_{k, k+1}; & \alpha_{k-1} &= \alpha_k + e_{k-1, k} \delta_{k-1, k}. \end{aligned} \right\} \quad (13.67)$$

Так как эти уравнения однородны, то из них можно получить лишь соотношения между амплитудами  $\alpha$  и  $\delta$ , а не абсолютные значения последних.

Если мысленно сделать надлом системы на  $(k - 1)$ -й массе и амплитуду  $\alpha_{k-1}$  свободных колебаний в месте надлома принять равной единице, то амплитуды сил упругости участков и перемещения других масс получим путем последовательного деления значений  $\alpha$  и  $\delta$  на значения соответствующих промежуточных цепных дробей, подсчитанных в процессе определения величины всей цепной дроби. Если применить обозначения Терских и значения цепной дроби от  $(k - 1)$ -й массы до 1-й или  $n$ -й массы обозначить  $H_{k-1}^{(1) \dots (n)}$ , а цепную дробь от  $(k, k + 1)$ -го участка до 1-й или  $n$ -й массы — через  $E_{k, k+1}^{(1) \dots (n)}$ , то для части системы слева от  $(k - 1)$ -й массы

$$\left. \begin{aligned} \delta_{k-2, k-1} &= \frac{1}{E_{k-1, k-2}^{(1)}}; & \alpha_{k-2} &= \frac{\delta_{k-2, k-1}}{H_{k-2}^{(1)}}; \\ \delta_{k-3, k-2} &= \frac{\alpha_{k-2}}{E_{k-2, k-3}^{(1)}}; \dots; & \alpha_1 &= \frac{\delta_{1, 2}}{H_1}. \end{aligned} \right\} \quad (13.68)$$

Для части же системы справа от  $(k - 1)$ -й массы

$$\delta_{k, k-1} = \frac{1}{E_{k-1, k}^{(n)}}, \quad \alpha_k = \frac{\delta_{k, k-1}}{H_k^{(n)}}; \dots \quad (13.68')$$

Второй способ определения амплитуд целесообразно применять для простых цепных систем, когда не вычисляются промежуточные значения функций  $H_k$  и  $E_{k, k+1}$ . Заключается он в последовательном определении амплитуд, начиная с амплитуды силы упругости в первом участке

$$\delta_{1, 2} = H_1 \alpha_1$$

и далее — всех остальных амплитуд

$$\alpha_2 = \alpha_1 + e_{1, 2} \delta_{1, 2},$$

$$\delta_{2, 3} = \delta_{1, 2} + H_2 \alpha_2,$$

.....

При подсчете принимается  $\alpha_1 = 1$ .

**Разветвленные системы** (рис. 13.9). Отличие разветвленных систем от простых заключается в том, что в них наряду с последовательным соединением масс отдельные массы или целые группы масс связаны с массами основной группы параллельно.



Деление любой разветвленной системы на основную цепь масс и ответвления носит чисто условный характер. В связи с этим порядок нумерации масс системы не имеет значения. Здесь безразлично, какую из крайних масс считать первой, какую — последней.

Рассматривая преобразование систем уравнений, описывающих свободные колебания разветвленных систем, аналогично тому как это было сделано для простых цепных систем, получим уравнение частот для системы, изображенной на рис. 13.9, в виде

$$\begin{aligned}
 & H_k + \frac{1}{e_{k, l+1} + \frac{1}{H_{l+1}}} + \dots + \frac{1}{e_{n-1, n} + \frac{1}{H_n}} + \\
 & + \frac{1}{e_{k-1, k} + \frac{1}{H_{k-1}}} + \dots + \frac{1}{e_{1, 2} + \frac{1}{H_1}} + \\
 & + \frac{1}{e_{r, k+1} + \frac{1}{H_{k+1}}} + \dots + \frac{1}{e_{l-1, l} + \frac{1}{H_l}} = 0. \quad (13.69)
 \end{aligned}$$

Путем простых преобразований уравнение (13.69) может быть представлено в виде, аналогичном уравнению (13.66').

Определение частот свободных колебаний разветвленной системы производится как и для простой цепной системы последовательными пробами.

Определение форм свободных колебаний основано на соотношениях

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\delta_{k, k+1}^{(1)}}{\alpha_k^{(1)}} = H_k^{(1)}; & \quad \frac{\alpha_{k+1}^{(1)}}{\delta_{k, k+1}^{(1)}} = E_{k, k+1}^{(1)}; \\
 \frac{\delta_{k, k-1}^{(n)}}{\alpha_k^{(n)}} = H_k^{(n)}; & \quad \frac{\alpha_{k-1}^{(n)}}{\delta_{k, k-1}^{(n)}} = E_{k-1, k}^{(n)}.
 \end{aligned} \right\} \quad (13.70)$$

Первые две формулы (13.70) справедливы, когда  $\alpha_1 = 1$ , вторые — когда  $\alpha_n = 1$ .

Если надлом системы сделан на  $(k-1)$ -й массе, то  $\alpha_{k-1} = 1$  (см. рис. 179). Для части системы слева от этой массы

$$\begin{aligned}
 \delta_{k-2, k-1} &= \frac{1}{E_{k-1, k-2}^{(1)}}; & \alpha_{k-2} &= \frac{\delta_{k-2, k-1}}{H_{k-2}^{(1)}}; \\
 \delta_{k-3, k-2} &= \frac{\alpha_{k-2}}{E_{k-2, k-3}}; & \dots; & \alpha_1 &= \frac{\delta_{1, 2}}{H_1}.
 \end{aligned} \quad (13.71)$$

Для части же системы справа от  $(k - 1)$ -й массы

$$\delta_{k, k-1} = \frac{1}{E_{k-1, k}^{(l)(n)}}; \quad \alpha_k = \frac{\delta_{k, k-1}}{H_k^{(l)(n)}}. \quad (13.72)$$

Так как в рассматриваемой системе от  $k$ -й массы начинается ответвление, то для определения амплитуд сил упругости  $\delta_{k+1, k}$  и  $\delta_{l+1, k}$  нужно найденное по выражениям (13.72)  $\alpha_k$  разделить соответственно на  $E_{k, k+1}^{(l)}$  и  $E_{k, l+1}^{(n)}$ :

$$\delta_{k+1, k} = \frac{\alpha_k}{E_{k, k+1}^{(l)}}; \quad \delta_{l+1, k} = \frac{\alpha_k}{E_{l+1, k}^{(n)}}. \quad (13.73)$$

Нахождение всех остальных амплитуд осуществляем дальнейшим последовательным делением по каждой ветви отдельно:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{\delta_{k+1, k}}{H_{k+1}^{(l)}}; & \delta_{k+2, k+1} &= \frac{\alpha_{k+1}}{E_{k+1, k+2}^{(l)}}; & \dots; & \alpha_l &= \frac{\delta_{l, l-1}}{H_l}; \\ \alpha_{l+1} &= \frac{\delta_{l+1, k}}{H_{l+1}^{(n)}}, & \delta_{l+2, l+1} &= \frac{\alpha_{l+1}}{E_{l+1, l+2}^{(n)}}; & \dots, & \alpha_n &= \frac{\delta_{n, n-1}}{H_n}. \end{aligned} \right\} \quad (13.74)$$

Для подсчета амплитуд собственных форм простых цепных и разветвленных систем Терских предложена удобная табличная форма счета [95].

#### РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ НА ЭЛЕКТРОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЕ

Описанные выше методы расчета разрабатывались применительно к ручным средствам счета и в течение длительного времени считались наиболее целесообразными. Для применения машинного счета с помощью ЭЦВМ были разработаны алгоритмы и составлены программы расчетов свободных крутильных колебаний. В первое время в качестве алгоритмов были применены вышеописанные метод «остатка» и метод Терских. В литературе описаны программы, составленные по этим алгоритмам. Опыт их применения для расчетов обнаружил ряд недостатков, в частности, необходимость вмешательства оператора в процесс счета, возможность пропуска отдельных частот при неблагоприятных обстоятельствах.

Естественно, что в основу алгоритмов могут быть взяты методы определения собственных значений и собственных векторов, разработанные в линейной алгебре. Применение различных методов линейной алгебры обнаружило, что наиболее целесообразными алгоритмами являются итерационные процессы нахождения частот, реализующие частичную или полную проблему собственных значений. Известно, что итерационные процессы для частичной проблемы обеспечивают определение собственных значений с лю-

бой точностью, причем определение последующих требует обязательного определения предыдущих. При применении таких итерационных процессов следует иметь в виду, что так как дифференциальные уравнения свободных крутильных колебаний получаются в прямой форме, то определение частот начинается с высшей. Если же нужно определять частоты, начиная с низшей, то необходимо предварительно обратить матрицу уравнений.

В практических задачах обычно интересуются низшими частотами спектра, поэтому программа для их расчета на машине должна состоять из программы обращения матрицы и программы, реализующей алгоритм итерационного процесса.

В связи с необходимостью в таких программах обращения матрицы следует учесть некоторые особенности крутильных систем. Если при составлении дифференциальных уравнений свободных колебаний в качестве обобщенных координат берутся углы закручивания участков, то наименьшая собственная частота отлична от нуля и обращение матрицы не вызывает затруднений. Если же для свободной крутильной системы в качестве обобщенных координат брать углы поворота масс, то наименьшей будет нулевая частота и после обращения матрицы первое собственное значение окажется равным бесконечности, что непригодно для счета на машине. В этом случае нужно применить сдвиг.

Известно, что собственные значения  $\lambda_i$  матрицы  $A$  связаны с собственными значениями  $\mu_i$  матрицы  $B = A - cE$  простым соотношением  $\lambda_i = \mu_i + c$ , а собственные векторы обеих матриц совпадают. Поэтому, имея матрицу  $A$ , составляем матрицу  $B = A - cE$ , наименьшее собственное значение которой отлично от нуля и равно  $c$ .

Если выбрать так, чтобы  $0 < c < p_1^2$ , где  $p_1$  — наименьшая собственная частота системы, отличная от нуля, и обратить матрицу  $B$ , то сначала процесс будет сходиться к собственному значению  $\frac{1}{c}$ , а компоненты отвечающего ему собственного вектора все будут равны единице. Продолжая определять следующие собственные значения обращенной матрицы, можно найти несколько низших частот.

В качестве программ для такого расчета можно использовать имеющиеся в вычислительных центрах стандартные программы для степенного метода в сочетании с понижением.

Нужно, однако, отметить, что указанный итерационный процесс определяет собственные значения и собственные векторы с известным приближением, причем точность определения последующих значений зависит от точности определения предыдущих.

Так как при счете на ЭВМ собственные значения и собственные векторы определяются с некоторой погрешностью, то постепенно погрешность будет накапливаться и, начиная с некоторого номера частоты, может стать недопустимой.

Это означает, что при определении полного спектра собственных частот системы с достаточно большим числом масс такая программа может дать значительные погрешности в значениях высших частот.

Наиболее рациональным алгоритмом для определения полного спектра собственных частот следует считать тот, который реализует итерационный процесс определения всего спектра сразу. Одним из эффективных и применимых для несимметричных матриц является алгоритм со сдвигом, предложенный В. Н. Кублановской. Он основан на разложении матрицы на произведение ортогональной матрицы и матрицы левой треугольной.

Последовательность матриц строится так:

$$\begin{aligned} A_1 &= A; & \Lambda_1 &= A_1 \tau_1; \\ A_2 &= \tau_1 \Lambda_1; & \Lambda_2 &= A_2 \tau_2; \\ & \dots & & \dots \\ & \dots & & \dots \\ A_k &= \tau'_{k-1} \Lambda_{k-1}; & \Lambda_k &= A_k \tau_k; \end{aligned}$$

здесь  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k, \dots$  — левые треугольные матрицы;  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$  — ортогональные матрицы.

Из построения ясно, что матрица  $A_k$  подобна матрице  $A$ :

$$A_k = T'_{k-1} A T_{k-1},$$

где  $T_{k-1} = \tau_1 \cdot \tau_1 \dots \tau_{k-1}$ .

Доказано, что для собственных значений матрицы  $A$ , различных по модулю и вещественных  $\Lambda_k$ , сходятся к левой треугольной. Ортогональные матрицы строятся с помощью элементарных матриц вращения и отражения.

Описание программы, составленной по этому алгоритму, дается в сборнике программ по линейной алгебре.

### РАСЧЕТЫ ВЫНУЖДЕННЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Расчеты свободных колебаний производятся с целью изучения свойств системы, целью же расчетов вынужденных колебаний является получение данных для оценки прочности системы в области резонанса. Следует, при этом, различать расчеты не резонансных и резонансных вынужденных колебаний. Проведение расчетов в нерезонансной области более просто и может быть выполнено без учета демпфирующих сопротивлений. При расчете резонансных колебаний должны учитываться демпфирующие сопротивления, которые, как правило, являются нелинейными и лишь с определенным приближением могут быть заменены эквивалентными линейными.

Резонансные колебания более опасны и поэтому в большинстве случаев ограничиваются расчетом лишь этих колебаний. В практике инженерных расчетов амплитуд резонансных вынужденных

колебаний широкое распространение получил энергетический метод, основанный на следующих предположениях:

а) При установившихся резонансных вынужденных колебаниях энергия, сообщенная системе возмущающими силами, и моментами равна энергии, рассеянной демпфирующими сопротивлениями.

б) Форма резонансных вынужденных колебаний совпадает с формой свободных колебаний, отвечающей резонирующей частоте (постулат Видлера).

в) В расчетах учитываются основные демпфирующие сопротивления, другие виды сопротивлений задаются на основе эмпирических, поправочных коэффициентов.

В энергетическом методе под резонансным режимом подразумевается тот, при котором частота возбуждения совпадает с одной из собственных частот. При этих предположениях расчетная схема получается простой и расчет сводится к составлению уравнения энергетического баланса с неизвестной амплитудой одной из масс системы. Остальные амплитуды определяются согласно второму предположению, т. е. по собственной форме.

Составление уравнения энергетического баланса основано на использовании широко известных в обширной литературе по крутильным колебаниям выражений для работы возмущающих гармонических составляющих периодических моментов, действующих на цилиндрические массы двигателя и для определения энергии различных видов демпфирующих сопротивлений.

Несмотря на все удобства энергетического метода главным его недостатком является недостаточная обоснованность второго предположения, которое для многих реальных систем не имеет места. Доказано [95], что точное совпадение будет лишь в том случае, когда закон изменения возмущающих моментов будет соответствовать рассматриваемой форме свободных колебаний. Для реальных систем такая тождественность, как правило, отсутствует.

Из многочисленных расчетов и экспериментальных исследований следует, что хорошее совпадение форм свободных и вынужденных колебаний происходит при малом демпфировании в системе.

В. П. Терских указывает, что формы можно принимать совпадающими при удельном демпфировании  $\mu < 0,2$  (для упругого участка крутильной системы  $\mu = \frac{W_{mpe}}{\pi A^2}$ , где  $W_{mp}$  — работа демпфирующих сил за цикл,  $e$  — податливость участка;  $A$  — амплитуда угла закручивания участка).

При значительном демпфировании предположения, положенные в основу энергетического метода, могут оказаться весьма грубыми. В этом случае частоты возбуждения, соответствующие максимальным амплитудам колебаний масс или углов закручивания участков, могут быть не равны собственным частотам. При этом максимальные амплитуды колебаний различных масс или участков

могут достигаться при разных частотах возбуждения. Кроме того, при значительном демпфировании форма вынужденных колебаний будет пространственной кривой в отличие от плоской кривой при свободных колебаниях.

Точность расчета вынужденных колебаний значительно возрастает, если отказаться от предположения о совпадении форм резонансных вынужденных и свободных колебаний. В этом случае расчет требует интегрирования системы дифференциальных уравнений, которое может оказаться весьма громоздким. Применение ЭЦВМ позволяет расширить возможности теоретического исследования резонансных и околорезонансных колебаний. Практика расчетов вынужденных крутильных колебаний реальных механических систем показала, что в большинстве случаев строящиеся для расчетов приведенные системы можно считать линейными, а нелинейные силы сопротивления линеаризовать или заменять эквивалентными линейными.

Для простой цепной линейной системы дифференциальные уравнения вынужденных колебаний имеют следующий вид:

$$I_k \ddot{\Phi}_k - c_{k-1} (\Phi_{k-1} - \Phi_k) + c_k (\Phi_k - \Phi_{k+1}) + b_k \dot{\Phi}_k + r_k (\dot{\Phi}_k - \dot{\Phi}_{k+1}) = M_k. \quad (13.75)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

Здесь моменты инерции  $I_k$  масс и крутильные жесткости участков, входящие в уравнения, являются параметрами приведенных систем и определяются при их построении. В системе (13.75) все виды сопротивлений заменены эквивалентным вязким трением, входящим в уравнения в виде моментов сил вязкого трения, действующих на массы или участки. Коэффициенты вязкого трения определяются из условия равенства работ за цикл колебаний действительных сопротивлений и эквивалентных сил вязкого трения.

Изучая колебания вблизи резонансных режимов, обычно, вместо возмущающих периодических моментов, действующих на массы, можно рассматривать их одну гармоническую составляющую с частотой, близкой или равной собственной частоте. В общем случае, гармоники равной частоты, действующие на различные массы, могут быть с разными начальными фазами. При таком возбуждении моменты, стоящие в правых частях дифференциальных уравнений, можно записать в виде

$$M_k = M'_k \sin \omega t + M''_k \cos \omega t \quad (13.76)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

где  $M'_k = M_{ok} \cos \gamma_k$ ;  $M''_k = M_{ok} \sin \gamma_k$ ;  $M_{ok}$  — амплитуда  $k$ -й гармоники;  $\gamma_k$  — ее начальная фаза;  $\omega$  — круговая частота.

Установившиеся вынужденные колебания определяются частным решением системы (17.75) в виде

$$\varphi_k = \Phi_k' \sin \omega t + \Phi_k'' \cos \omega t \quad (13.77)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

где  $\Phi_k'$  и  $\Phi_k''$  — составляющие амплитуды колебаний  $k$ -й массы.

Подставляя выражения (13.76) и (13.77) в систему (17.75), из условия тождественного равенства правых и левых частей каждого уравнения получаем систему  $2n$  линейных алгебраических уравнений относительно составляющих амплитуд вынужденных колебаний масс. В практических расчетах число степеней свободы крутильных систем достаточно велико, поэтому решение полученных алгебраических уравнений практически возможно с применением ЭЦВМ.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений могут быть использованы любые стандартные программы линейной алгебры, обычно имеющиеся в библиотеках стандартных программ вычислительных центров.

После определения составляющих амплитуд амплитуду колебаний  $k$ -массы находим по формуле

$$\Phi_k = \sqrt{(\Phi_k')^2 + (\Phi_k'')^2}. \quad (13.78)$$

Фазовое смещение  $\Psi_k$  отклонений  $k$ -й массы по отношению к фазе возмущающего момента, для которого начальная фаза принята равной нулю, определяем по формуле

$$\operatorname{tg} \Psi_k = \frac{\Phi_k''}{\Phi_k'}. \quad (13.79)$$

Максимальный угол закручивания упругого участка между  $k$ -й и  $(k + 1)$ -й массами будет равен

$$\Phi_{k, k+1} = \sqrt{(\Phi_k' - \Phi_{k+1}')^2 + (\Phi_k'' - \Phi_{k+1}'')^2}. \quad (13.80)$$

Опыт применения описанного метода расчета резонансных вынужденных колебаний показал, что с помощью ЭЦВМ возможен быстрый счет для сложных многомассовых систем. Обнаружено, что уже при демпфировании, характерном для многих реальных систем, наблюдается существенное отличие от результатов, полученных энергетическим методом. В основном оно состоит в том, что форма колебаний получается пространственной и напряжения в упругих участках существенно отличаются от рассчитанных приближенным методом. Описанный метод расчета особенно следует применять в том случае, когда на массы с большими относительными амплитудами будут действовать значительные силы сопротивления, так как в этом случае энергетический метод дает значительно меньшие напряжения.

## КОЛЕБАНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

### НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

#### Предварительные замечания

Нелинейная зависимость между силой и деформацией в механике встречается достаточно часто. Закон прямой пропорциональности вообще справедлив только для малых деформаций; с увеличением деформации величина силы может нарастать быстрее или медленнее, чем деформация. При колебаниях сложных конструкций с изменением деформации вступают в работу новые упругие элементы или, наоборот, некоторые выключаются. Примером колебаний такой системы может быть колебание машины на амортизаторах с ограничителями хода.

В подобных случаях применение линейных схем для решения конкретных задач изучения колебательных процессов недостаточно. Возникает необходимость исследования нелинейных колебаний.

Учитывая сказанное, рассмотрим здесь кратко основные методы исследования нелинейных уравнений.

Для простоты изложения остановимся сперва на изучении свободных колебаний системы с нелинейной восстанавливающей силой, т. е. описываемой дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x + \mu f(x) = 0, \quad (14.1)$$

где для простейшего случая  $f(x) = x^3$ .

В дальнейшем кратко остановимся на квазигармонических колебаниях, определяемых дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых являются периодическими функциями времени, т. е. уравнениями вида

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t) y = 0, \quad (14.2)$$

где  $p(t)$ ,  $q(t)$  — периодические функции времени.



Большое значение в технике имеет также движение, описываемое уравнениями вида

$$1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + h \left( \frac{dy}{dt} \right) \frac{dy}{dt} + ky = F(t) \quad (14.3)$$

при условии, что для малых  $\frac{dy}{dt}$   $h \left( \frac{dy}{dt} \right) > 0$ , а для больших  $\frac{dy}{dt}$   $h \left( \frac{dy}{dt} \right) < 0$ .

Движение, соответствующее уравнению (14.3), называется самоколебательным, самовозбуждающимся или автоколебательным.

В этой главе кратко остановимся на основных вопросах нелинейных колебаний.

Теория нелинейных колебаний в последнее время значительно разработана, и в настоящее время имеется обширная литература по этому вопросу [2, 10, 38, 61, 88, 96].

Для изучения колебаний нелинейной системы широко применяются качественные методы, использующие изображение в фазовой плоскости и поверхности. Методы эти широко освещены в литературе, и останавливаться на них не будем.

При первых попытках разыскания периодических решений уравнений типа (14.1) пришлось столкнуться с появлением в решениях вековых, или секулярных, членов вида  $t \sin \omega t$ ,  $t^2 \sin \omega t$ , которые неограниченно растут со временем. Появление такого вида членов является основным недостатком ряда первых методов, которые были предложены для решения уравнений (14.1).

Для уничтожения вековых членов Остроградским, Рэлеем, Ньюкомбом, Линдштадтом и др. [47] был предложен ряд методов. Рассмотрим основные из них, которые дают решение задачи.

### Метод Ляпунова—Крылова

Этот метод дает возможность получить периодическое решение уравнения (14.1), не содержащее вековых членов вида  $t \sin \omega t$ . Аналогичный метод был предложен Ньюкомбом и Линдштадтом.

Обозначим частоту свободных колебаний через  $p$  и введем новую переменную  $\tau = pt + \varphi$ .

После замены переменной в формуле (14.1) получим уравнение

$$p^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + \omega^2 x + \mu f(x) = 0. \quad (14.4)$$

Решение уравнения (14.4) ищем при начальных условиях

$$x(0) = A; \quad x'(0) = 0 \quad (14.5)$$

в виде

$$x(\tau) = q_0 + \mu q_1(\tau) + \mu^2 q_2(\tau) + \dots, \quad (14.6)$$

где  $q_0(\tau)$ ,  $q_1(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$  — неизвестные функции  $\tau$ . Одновременно  $p^2$  ищем также в виде разложения

$$p^2 = a_0 + a_1\mu + \mu^2 a_2 + \dots, \quad (14.7)$$

где  $a_0, a_1, a_2 \dots$  — постоянные.

Так как при  $\mu = 0$   $p^2 = \omega^2$ , то  $a_0 = \omega^2$  и значение  $f(x)$  в уравнении (14.4) можно разложить в ряд

$$f(x) = f(q_0) + \mu f'(q_0) q_1 + \mu^2 \left[ q_2^2 f''(q_0) + \frac{1}{2} q_1^2 f''(q_0) \right] + \dots \quad (14.8)$$

После подстановки  $x(\tau)$ ,  $f(x)$ ,  $p^2$  в уравнение (14.4) и обращения в нуль коэффициентов при  $\mu^n$  получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 q_0}{d\tau^2} + q_0 &= 0; \\ \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} + q_1 &= -\frac{1}{\omega^2} f(q_0) - \frac{a_1}{\omega^2} \cdot \frac{d^2 q_0}{d\tau^2}; \\ \frac{d^2 q_2}{d\tau^2} + q_2 &= -\frac{1}{\omega^2} f'(q_0) q_1 - \frac{a_2}{\omega^2} q_0'' - \frac{1}{\omega^2} a_1 q_1'' \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

Из системы уравнений (14.9) при начальных условиях  $x(0) = A$ ,  $x'(0) = 0$  находим  $q_0, q_1, q_2$  из тех соображений, чтобы  $t$  не выходило из-под знаков тригонометрических функций.

Для простоты остановимся на примере

$$x'' + \omega^2 x + \gamma x^3 = 0. \quad (14.10)$$

Согласно предыдущему полагаем

$$\begin{aligned} x &= q_0 + \mu q_1 + \mu^2 q_2 + \dots; \\ \omega^2 &= p^2 + a_1 \mu + a_2 \mu + \dots \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (14.9) для уравнения (14.10) будет

$$\left. \begin{aligned} q_0'' + p^2 q_0 &= 0; \\ q_1'' + p^2 q_1 &= -a_1 q_0 - q_0^3; \\ q_2'' + p^2 q_2 &= -a_2 q_0 - a_1 q_1 - 3q_0^2 q_1; \\ q_3'' + p^2 q_3 &= -a_3 q_0 - a_2 q_1 - a_1 q_2 - 3q_0^2 q_2 - 3q_0 q_1^2; \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

Начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} q_0(0) &= A; & q_0'(0) &= 0 \\ q_i(0) &= 0; & q_i'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i \neq 0). \quad (14.12)$$

Согласно первому условию (14.12)  $q_0 = A \cos pt$ .  
Второе уравнение системы (14.11) будет

$$q_1'' + p^2 q_1 = -A \left( a_1 + \frac{3}{4} A^2 \right) \cos pt - \frac{1}{4} A^3 \cos 3pt.$$

Для того чтобы не появлялись секулярные члены, нужно положить  $a_1 A + \frac{3}{4} A^3 = 0$ , т. е.  $a_1 = -\frac{3}{4} A^2$ .

Тогда

$$q_1 = A_1 \cos pt + B_1 \sin pt + \frac{1}{32} \cdot \frac{A^3}{p^2} \cos 3pt. \quad (14.13)$$

Удовлетворяя условиям (14.12), получим такое выражение:

$$q_1 = \frac{1}{32} \cdot \frac{A^3}{p^2} (\cos 3pt - \cos pt).$$

После подстановки  $q_1$  в первую очередь третьего уравнения (14.11) и разложения тригонометрических функций по косинусам кратных дуг получим

$$q_2'' + p^2 q_2 = -A \left( a_2 + \frac{3}{128} \cdot \frac{A^4}{p^2} \right) \cos pt - \frac{3}{128} \frac{A^5}{p^2} (\cos 3pt + \cos 5pt), \quad (14.14)$$

где по-прежнему полагаем  $a_2 = -\frac{3}{128} \cdot \frac{A^4}{p^2}$ .

Следовательно,

$$q_2 = A_2 \cos pt + B_2 \sin pt + \frac{3}{1024} \cdot \frac{A^3}{p^2} \cos pt + \frac{1}{1024} \cdot \frac{A^5}{p^2} \cos 5pt. \quad (14.15)$$

Удовлетворяя начальным условиям (14.12), получим

$$q_2 = \frac{1}{1024} \cdot \frac{A^5}{p^4} (\cos 5pt + 3 \cos 3pt - 4 \cos pt). \quad (14.16)$$

Следовательно,

$$x = A \cos pt + \mu \frac{A^3}{32p^2} (\cos 3pt - \cos pt) + \mu^2 \frac{A^5}{1024p^4} (\cos 5pt + 3 \cos 3pt - 4 \cos pt).$$

Квадрат частоты

$$p^2 = \omega^2 + \mu \frac{3}{4} A^2 + \mu^2 \frac{3A^4}{128\omega^2}. \quad (14.17)$$

Если процесс продолжить дальше, то получим уравнение

$$\begin{aligned}
 x = & A \cos pt + \mu \frac{A^3}{32\rho^2} (\cos 3pt - \cos pt) + \\
 & + \mu^2 \frac{A^5}{1024\rho^4} (\cos 5pt + 3 \cos 3pt - 4 \cos pt) + \\
 & + \mu^3 \frac{A^7}{32768\rho^6} (\cos 7pt + 3 \cos 5pt - 3 \cos 3pt - \cos pt), \quad (14.18)
 \end{aligned}$$

где

$$\rho^2 \approx \omega^2 + \mu \frac{3A^2}{4} + \mu^2 \frac{3A^4}{128\omega^2} - \mu^3 \frac{21A^6}{1024\omega^4}. \quad (14.19)$$

В предыдущем задаче решалась при начальных условиях

$$x(0) = A, \quad x'(0) = 0.$$

В общем случае при произвольных начальных условиях решение уравнения (14.10) необходимо взять в виде

$$x_0 = a \cos(pt - \varphi), \quad (14.20)$$

где  $a$  и  $\varphi$  определяются из начальных условий  $q_0(0) = A$ ;  $q'_0(0) = B$ , т. е.

$$a = \sqrt{A^2 + \frac{B^2}{\rho^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{A}{a}; \quad \sin \varphi = \frac{B}{a\rho}.$$

Вводя новую переменную  $\tau = t - \frac{\varphi}{\rho}$ , получим начальные условия

$$q_0(0) = a; \quad q'_0(0) = 0.$$

Аналогичным образом решается задача для уравнения

$$x'' + \omega^2 x + \mu F(x') = 0. \quad (14.21)$$

В случае вынужденных колебаний, т. е. для уравнения

$$x'' + \omega^2 x + \mu x^3 = F(t). \quad (14.22)$$

по-прежнему полагаем

$$\left. \begin{aligned}
 x &= q_0 + \mu q_1 + \mu^2 q_2 + \dots; \\
 \rho^2 &= \omega^2 - a_1 \mu - a_2 \mu^2 - \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (14.23)$$

После подстановки в выражение (14.22) получим уравнения

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{q}_0 + \rho^2 q_0 &= F(t); \\
 \ddot{q}_1 + \rho^2 q_1 &= -a_1 q_0 - q_0^3; \\
 \ddot{q}_2 + \rho^2 q_2 &= -a_2 q_0 - a_1 q_1 - 3q_0^2 q_1; \\
 \dots &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (14.24)$$

Начальные условия

$$\left. \begin{aligned} q_0(0) = A; \quad q_0'(0) = 0 \\ q_i(0) = 0; \quad q_i'(0) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ для } (i \neq 0). \quad (14.25)$$

Решение первого уравнения (14.24) при условиях (14.25) будет

$$q_0 = A \cos pt + \frac{1}{p} \int_0^t F(\xi) \sin p(t - \xi) d\xi. \quad (14.26)$$

Продолжая процесс дальше, получим

$$\begin{aligned} q_1'' + p^2 q_1 = -A \left( a_1 + \frac{3}{4} A^2 \right) \cos pt - \\ - \frac{1}{4} A^3 \cos 3pt + F_1(t), \end{aligned} \quad (14.27)$$

где  $F_1(t)$  — функция от  $t$ , полученная от второго члена  $q_0$ .

Полагая  $a_1 = -\frac{3}{4} A^2$ , из уравнения (14.27) найдем

$$q_1 = \frac{1}{32} \cdot \frac{A^3}{p^2} (\cos 3pt - \cos pt) + \frac{1}{p} \int_0^t F_1(\xi) \sin p(t - \xi) d\xi. \quad (14.28)$$

Аналогичным образом находят и следующие значения  $q$ .

### Метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова

Проще всего выяснить сущность этого метода на простейшем примере уравнения (14.1):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x + \mu f(x_1 x') = 0. \quad (14.29)$$

Введем в рассмотрение функцию  $\psi = \omega t + \varphi$ , где  $\varphi$  — функция времени.

Решение уравнения (14.29) берем в виде

$$x = a \sin(\omega t + \varphi); \quad \frac{dx}{dt} = a\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad (14.30)$$

где  $a$  и  $\varphi$  — функции времени изменяются «медленно».

Дифференцируя первое уравнение (14.30) по  $t$ , получим

$$\frac{da}{dt} \sin(\omega t + \varphi) + a \frac{d\varphi}{dt} \cos(\omega t + \varphi) = 0. \quad (14.31)$$

Дифференцируя второе уравнение (14.30) по  $t$ , для уравнения (14.29) найдем

$$\begin{aligned} \omega \frac{da}{dt} \cos(\omega t + \varphi) - a\omega \frac{d\varphi}{dt} \sin(\omega t + \varphi) + \\ + \mu f[a \sin(\omega t + \varphi), a\omega \cos(\omega t + \varphi)] = 0. \end{aligned} \quad (14.32)$$

Определяя из уравнений (14.31) и (14.32)  $\frac{da}{dt}$ ,  $\frac{d\varphi}{dt}$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\mu}{\omega} f [a \sin(\omega t + \varphi); \\ a\omega \cos(\omega t + \varphi)] \cos(\omega t + \varphi) &= -\frac{\mu}{\omega} F(\omega t, \varphi); \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\mu}{a\omega} f [a \sin(\omega t + \varphi); a\omega \cos \omega t] \sin(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{\mu}{a\omega} \Phi(\omega t, \varphi). \end{aligned} \right\} (14.33)$$

Предполагаем, что  $\mu$  мало,  $a$  и  $\varphi$  мало изменяются в течение периода. Значения этих функций находят на основании принципа усреднения [6]. Функции  $F(\omega t, \varphi)$  и  $\Phi(\omega t, \varphi)$  будут периодическими функциями  $\omega t, \varphi$  с периодом  $T$ .

Разложим функции  $f \cos \psi$ ,  $f \sin \psi$  в тригонометрические ряды:

$$\left. \begin{aligned} f(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \cos \psi &= \\ = B_0 + \sum_n [B_n \cos n\psi + A_n \sin n\psi]; \\ f(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \sin \psi &= \\ = C_0 + \sum_m [C_m \cos m\psi + D_m \sin m\psi]. \end{aligned} \right\} (14.34)$$

Интегрируя выражение (14.33) в пределах от  $t$  до  $t + T$  и полагая  $a(nT) = a_n$ ,  $\varphi(nT) = \varphi_n$ , имеем

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{\mu}{\omega} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} F(\omega t, \varphi) d\psi;$$

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \frac{\mu}{a\omega} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \Phi(\omega t, \varphi) d\psi.$$

Так как  $a$  мало меняется в течение периода колебаний, то уравнения первого приближения получим в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\mu}{\omega} B_0(a); \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\mu}{a\omega} C_0(a). \end{aligned} \right\} (14.35)$$

Таким образом, для определения  $a$ , а также поправки к частоте получим систему двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\mu}{\omega} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \frac{\mu}{a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (14.36)$$

Сравнивая выражения (14.36) и (14.33), видим, что уравнения первого приближения получаются из основных, путем усреднения правых частей по времени, которое явно в них входило.

Дальнейшее развитие метод асимптотического разложения по степеням малого параметра получил в работах Н. Боголюбова и Ю. Митропольского [6, 64, 65]

### Метод Ван дер Поля

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x + \mu f(x, x') = 0, \quad (14.37)$$

где  $f(x, x')$  — нелинейная функция.

**Ван дер Поль** дал приближенное решение этого уравнения для системы, колебательное движение которой близко к гармоническому [91]. Этого можно достигнуть в том случае, когда  $2h$  и  $\mu$  будут достаточно малы, т. е. решение будет близко к решению уравнения для линейной консервативной системы.

Поэтому решение уравнения (14.37) можно искать в виде

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (14.38)$$

где  $a$  и  $b$  для стационарного колебательного режима постоянны, а для периода установления колебаний являются медленно изменяющимися функциями времени по сравнению с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

При этом необходимо иметь в виду, что приближенное решение (14.38) должно быть устойчиво по отношению к достаточно малым отклонениям.

Задача сводится к нахождению частоты  $\omega$  и амплитуды колебаний  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  при заданных начальных условиях.

Для нахождения этих значений запишем уравнение (14.37) в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = (\omega^2 - \omega_0^2) x - 2h \frac{dx}{dt} - \mu f(x, x') = \Sigma F, \quad (14.39)$$

т. е. в виде обычного уравнения консервативной линейной колебательной системы с частотой  $\omega$ .

Эта система находится под воздействием периодической силы, находящейся в правой части уравнения.

Для того чтобы найти приближенное решение уравнения (14.39), подставим в правую часть выражение (14.38). Будем полагать

$$\frac{da}{dt} \cos \omega t + \frac{db}{dt} \sin \omega t = 0, \quad (14.40)$$

что соответствует методу вариации произвольных постоянных (методу Лагранжа);  $\sum F$  может быть представлена в виде разложения в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} \sum F = \text{const} + \varphi[a(t), b\omega] \cos \omega t + \psi[a(t), b\omega] \sin \omega t + \\ + \varphi_1[a(t), b\omega] \cos 2\omega t + \psi_1[a(t), b\omega] \sin 2\omega t + \dots \end{aligned} \quad (14.41)$$

После подстановки значений  $x(t)$  из уравнения (14.38) в уравнение (14.39) получим

$$\begin{aligned} -\frac{da}{dt} \sin \omega t + \frac{db}{dt} \cos \omega t = \varphi[a(t), b\omega] \cos \omega t + \psi[a(t), b\omega] \sin \omega t + \\ + \varphi_1[a(t), b\omega] \cos 2\omega t + \psi_1[a(t), b\omega] \sin 2\omega t + \dots \end{aligned} \quad (14.42)$$

Из уравнения (14.42) получим для периода установления колебаний уравнение первого приближения (уравнения Ван дер Поля)

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\psi[a(t), b\omega]; \\ \frac{db}{dt} &= \varphi[a, b]. \end{aligned} \right\} \quad (14.43)$$

Для стационарного режима  $\frac{da}{dt} = 0$ ;  $\frac{db}{dt} = 0$ .

Для этого случая имеем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \psi[a, b, \omega] &= 0; \\ \varphi[a, b, \omega] &= 0, \end{aligned} \right\}$$

из которых и найдем значения  $A$  и  $\omega$ .

Для примера рассмотрим вынужденные колебания системы с нелинейной восстанавливающей силой. Решение дифференциального уравнения

$$x'' + \omega^2 x + \mu x^3 = P \sin pt \quad (14.44)$$

берем в виде

$$x = a \sin pt - b \cos pt. \quad (14.45)$$

Запишем уравнение (14.44) в виде

$$x'' + p^2 x = (p^2 - \omega^2) x - \mu x^3 + P \sin pt.$$



После подстановки в правую часть этого уравнения значения получим

$$x'' + p^2 x = \left[ (p^2 - \omega^2) a - \frac{3}{4} \mu a A^2 + P \right] \sin pt + \\ + \left[ -(p^2 - \omega^2) b + \frac{3}{4} \mu b A^2 \right] \cos pt, \quad (14.46)$$

где  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Амплитуда установившихся колебаний, на основании предыдущего, определяется путем приравнивания коэффициентов при  $\sin pt$  нулю, т. е. из уравнений

$$\left. \begin{aligned} (p^2 - \omega^2) a - \frac{3}{4} \mu a A^2 + P &= 0; \\ -(p^2 - \omega^2) b + \frac{3}{4} \mu b A^2 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (14.47)$$

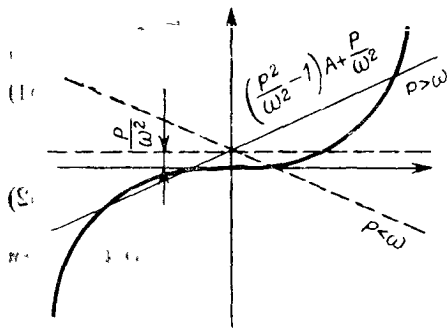


Рис. 14.1

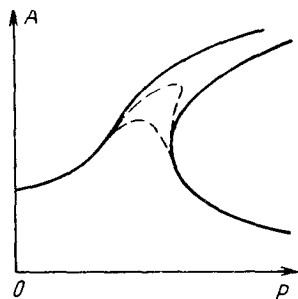


Рис. 14.2

отсюда следует  $b = 0$ ,  $a = A$ ;

$$\frac{3}{4} \mu A^3 - (p^2 - \omega^2) A - P = 0. \quad (14.48)$$

Обычно решение этого уравнения находят графически, записывая его в виде

$$y = \left( \frac{p^2}{\omega^2} - 1 \right) A + \frac{P}{\omega^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu}{\omega^2} A^3. \quad (14.49)$$

Находя точки пересечения прямой  $y = \left( \frac{p^2}{\omega^2} - 1 \right) A + \frac{P}{\omega^2}$  и кубической параболы  $y = \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu}{\omega^2} A^3$ , получим значение амплитуды (рис. 14.1).

Как видно из графика, сначала мы имеем один действительный корень, затем три. Резонансная кривая имеет вид, изображенный на рис. 14.2. При учете затухания получим кривые, показанные пунктиром.

Если  $\mu < 0$ , то, разыскивая пересечения кривых

$$y = \left(1 - \frac{\rho^2}{\omega^2}\right) A - \frac{P}{\omega^2}; \quad y = \frac{3}{4} \cdot \frac{|\mu|}{\omega^2} A^3,$$

получим значения  $A$ .

Резонансная кривая имеет в этом случае наклон в другую сторону.

### Точное решение для колебаний системы с нелинейной восстанавливающей силой

Приведем теперь точное решение уравнения [148]

$$x'' + \omega^2 x + \mu x^3 = 0 \quad (14.50)$$

и сопоставим его с решениями, полученными другими методами.

Умножая уравнение (14.50) на  $dx$ , получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} dt = -\omega^2 x dx - \mu x^3 dx$$

или

$$\frac{1}{2} d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\omega^2 x dx - \mu x^3 dx. \quad (14.51)$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\omega^2 x^2 - \frac{1}{2} \mu x^4 + C. \quad (14.52)$$

Если учесть условия  $x(0) = A$ , когда  $x'(0) = 0$ , то получим значение постоянной  $C = A^2 \omega^2 + \frac{\mu A^4}{2}$ .

Вводя безразмерную координату  $\xi = \frac{x}{A}$ , запишем выражение (14.52) в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{\omega^2 (1 - \xi^2) + \frac{\mu A^2}{2} (1 - \xi^4)}. \quad (14.53)$$

Обозначая  $b^2 = 1 + \frac{2\omega^2}{\mu A^2}$ , из выражения (14.53) получим

$$dt = \frac{\sqrt{2}}{A \sqrt{\mu}} \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(b^2 + \xi^2)}}.$$

Полагая, что при  $\xi = 0$ ,  $t = 0$ , получим

$$t = \frac{\sqrt{2}}{A \sqrt{\mu}} \int_0^{\xi} \frac{d\eta}{\sqrt{(1 - \eta^2)(b^2 + \eta^2)}}. \quad (14.54)$$

Этот интеграл с помощью подстановки

$$\eta = \frac{by}{\sqrt{1 + b^2 - y^2}}, \quad \text{т. е.} \quad y = \frac{\eta \sqrt{1 + b^2}}{\sqrt{b^2 + \eta^2}} = \sin \varphi,$$

может быть выражен через нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода. После замены переменных получим

$$t = \frac{V\bar{2}}{A V\mu(1+b^2)} \int_0^{\sin \varphi} \frac{dy}{V(1-y^2)(1-k^2y^2)} = \frac{V\bar{2} F(k, \varphi)}{A V\mu(1+b^2)}, \quad (14.55)$$

где  $k^2 = \frac{1}{1+b^2}$ .

Четвертая часть периода колебаний получается при изменении  $\varphi$  от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ . Следовательно,

$$T = \frac{4V\bar{2}}{A V\mu(1+b^2)} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{V\omega^2 + \mu A^2} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right).$$

Если  $\mu \rightarrow 0$ , получим период колебаний линейной системы ( $k \rightarrow 0$ )

$$T_0 = \frac{4}{\omega} F\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Следовательно,  $\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mu A^2}{\omega^2}}} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Таким образом, период колебаний зависит от амплитуды. Модуль интеграла

$$k = \sin \alpha = \frac{A V\bar{\mu}}{\omega V\bar{2} \sqrt{1 + \frac{\mu A^2}{\omega^2}}} = \frac{1}{V\bar{2}} \cdot \frac{\delta}{V(1 + \delta^2)},$$

где  $\delta = \sqrt{\frac{\mu A^2}{\omega^2}}$ .

Задаваясь значениями  $\delta$ , определяем  $k$  и  $\alpha$ , а затем с помощью таблиц эллиптических интегралов получим следующие значения  $\frac{T}{T_0}$ :

$\delta = A \sqrt{\frac{\mu}{\omega}}$	$\frac{T}{T_0}$	$\delta = A \sqrt{\frac{\mu}{\omega}}$	$\frac{T}{T_0}$
0,20	0,996	1,5	0,615
0,5	0,917	2	0,506
0,707	0,853	3	0,365
1	0,760	$\infty$	0

Как видно, с возрастанием амплитуды  $A$  и коэффициента  $\mu$  период колебаний убывает.

Чтобы найти форму колебаний, необходимо произвести обращение интеграла, выразив  $\xi$  в зависимости от эллиптической функции Якоби

$$\sin \varphi = snF = snt \sqrt{\omega^2 + \mu A^2}; \quad \xi = \frac{b \sin \varphi}{V b^2 + \cos^2 \varphi}.$$

Для  $\sin \varphi$  можно получить значение из приближенного выражения

$$\sin F \approx \sin y (1 + 4q \cos^2 y) \sin y,$$

где  $y = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{F(k, \varphi)}{F\left(\sin \alpha, \frac{\pi}{2}\right)}$ ,  $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$

при  $\frac{K'}{K} = \frac{F\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \frac{\pi}{2}\right]}{F\left(\sin \alpha, \frac{\pi}{2}\right)}$ .

### Одновременное действие двух гармонических возмущающих сил на нелинейную систему

При действии на систему с линейной характеристикой нескольких гармонических возмущающих сил ее вынужденные колебания представляют результат линейного наложения колебаний, вызываемых каждой отдельно действующей силой. В случае нелинейной системы принцип суперпозиции не имеет места. Покажем это на примере.

Пусть движение некоторой материальной точки определяется уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \gamma x^3 = P_1 \cos p_1 t + P_2 \cos p_2 t, \quad (14.56)$$

где  $P_1, P_2$  и  $p_1, p_2$  — соответственно амплитуды и частоты возмущающих сил.

Будем предполагать, что упругая характеристика незначительно отклоняется от прямой, т. е.  $\gamma$  — малая величина. Рассмотрим решение уравнения (14.56) в таком виде:

$$x = a_1 \cos p_1 t + a_2 \cos p_2 t, \quad (14.57)$$

где  $a_1, a_2$  — подлежащие определению амплитуды. Подставляя это выражение в уравнение (14.56) и приравнявая нулю коэффициенты при  $\cos p_1 t$  и  $\cos p_2 t$ , получим

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{P_1}{(\omega^2 - p_1^2) + \frac{3}{4} \gamma (a_1^2 - 2a_2^2)}; \\ a_2 &= \frac{P_2}{(\omega^2 - p_2^2) + \frac{3}{4} \gamma (a_2^2 + 2a_1^2)}; \end{aligned} \right\} \quad (14.58)$$

здесь оба знаменателя зависят от  $a_1$  и  $a_2$ , значит, в отличие от случая линейной характеристики обе амплитуды зависят одна от другой.

Амплитуды остаются конечными до тех пор, пока конечны величины  $P_1, P_2, \omega^2 - p_1^2$  и  $\omega^2 - p_2^2$ . Это утверждение доказывается следующим образом.

Перепишем первое уравнение (14.58) в виде

$$\frac{3}{4} \gamma \left( 1 + 2 \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) = \frac{P_1}{a_1^3} - \frac{\omega^2 - p_1^2}{a_1^2}. \quad (14.59)$$

Если  $a_1$  неограниченно возрастает, то правая часть становится сколько угодно малой, в то время как левая остается конечной. Следовательно, это уравнение может быть удовлетворено только при неограниченном возрастании  $P_1$  или  $\omega^2 - p_1^2$ . Аналогично проводится доказательство и для  $a_2$ .

### Вынужденные колебания нелинейной системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим колебания системы без трения, состоящей из двух масс  $m_1$  и  $m_2$  и двух пружин, одна из которых обладает нелинейной характеристикой (рис. 14.3). Пусть на массу  $m_1$  действует возмущающая сила  $\varepsilon_1 P \cos pt$ .

Уравнения движения системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x} + c_1(x-y) + \varepsilon_1(x-y)^3 &= \varepsilon_1 P \cos pt; \\ m_2 \ddot{y} - c_1(x-y) - \varepsilon_1(x-y)^3 + c_2 y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14.60)$$

где  $c_1, c_2$  — коэффициенты жесткости;

$\varepsilon$  — малый параметр;

$x$  и  $y$  — смещения масс.

Для интегрирования системы уравнений (14.60) воспользуемся методом малого параметра. Введем безразмерную переменную  $\tau = pt$ , тогда вместо выражения (14.60) получим (штрих обозначает производную по  $\tau$ )

$$\left. \begin{aligned} p^2 m_1 x'' + c_1(x-y) + \varepsilon_1(x-y)^3 &= \varepsilon_1 P \cos \tau; \\ p^2 m_2 y'' - c_1(x-y) - \varepsilon_1(x-y)^3 + c_2 y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.61)$$

Разложим  $x, y$  и  $p$  по степеням малого параметра:

$$\left. \begin{aligned} x(\tau) &= x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots; \\ y(\tau) &= y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \dots; \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (14.62)$$

где  $x_i(\tau), y_i(\tau)$  — пока неизвестные функции, а  $p_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) — подлежащие определению постоянные.

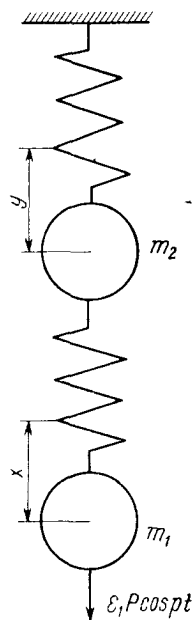


Рис. 14.3

Подставив эти выражения в уравнения (14.61) и сгруппировав члены по степеням  $\varepsilon$ , получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} p_0^2 x_0'' + \frac{c_1}{m_1} (x_0 - y_0) + \\ + \varepsilon \left[ p_0^2 x_1'' + \frac{c_1}{m_1} (x_1 - y_1) + 2p_0 p_1 x_0'' + \right. \\ \left. + (x_0 - y_0)^3 - P \cos \tau \right] + \varepsilon^2 [\dots] + \dots = 0; \\ p_0^2 y_0'' - \frac{c_1}{m_2} (x_0 - y_0) + \frac{c_2}{m_2} y_0 + \\ + \varepsilon \left[ p_0^2 y_1'' - \frac{c_1}{m_1} (x_1 - y_1) + \frac{c_2}{m_2} y_1 + 2p_0 p_1 y_0'' - \right. \\ \left. - \frac{m_1}{m_2} (x_0 - y_0)^3 \right] + \varepsilon^2 [\dots] + \dots = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.63)$$

Потребовав обращения в нуль коэффициентов при всех степенях  $\varepsilon$ , получим бесконечную последовательность пар линейных дифференциальных уравнений для  $x_i(\tau)$  и  $y_i(\tau)$ , которые могут быть решены последовательно, одно за другим.

Первые четыре уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} p_0^2 x_0'' + \frac{c_1}{m_1} (x_0 - y_0) = 0; \\ p_0^2 y_0'' - \frac{c_1}{m_2} (x_0 - y_0) + \frac{c_2}{m_2} y_0 = 0; \end{aligned} \right\} \quad (14.64)$$

$$\left. \begin{aligned} p_0^2 x_1'' + \frac{c_1}{m_1} (x_1 - y_1) = P \cos \tau - 2p_0 p_1 x_0'' - (x_0 - y_0)^3; \\ p_0 y_1'' - \frac{c_1}{m_2} (x_1 - y_1) + \frac{c_2}{m_2} y_1 = -2p_0 p_1 y_0'' + \frac{m_1}{m_2} (x_0 - y_0)^3. \end{aligned} \right\} \quad (14.65)$$

Требуется найти периодические решения  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  с периодом  $2\pi$ . Следовательно, мы должны потребовать периодичности всех функций  $x_i(\tau)$ ,  $y_i(\tau)$ , т. е. выполнения равенств

$$\begin{aligned} x_i(\tau) &= x_i(\tau + 2\pi) \\ y_i(\tau) &= y_i(\tau + 2\pi) \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

В качестве начальных условий возьмем

$$\left. \begin{aligned} x_0(0) &= A; \quad y_0(0) = B; \\ x_i'(0) &= y_i'(0) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (14.66)$$

Следует отметить, что здесь  $A$  и  $B$  нельзя выбирать независимо одно от другого.

Общее решение системы уравнений (14.64) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A_1 \cos(\omega_1 \tau - \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 \tau - \varphi_2); \\ y_0 &= B_1 \cos(\omega_1 \tau - \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 \tau - \varphi_2), \end{aligned} \right\} \quad (14.67)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, A_1, A_2$  — коэффициенты. Коэффициенты  $B_1, B_2$  выражаются через  $A_1$  и  $A_2$ .

Этому решению соответствуют свободные колебания линейризованной системы с круговыми частотами

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{p_0} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \pm \sqrt{\left( \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{4c_1c_2}{m_1m_2}} \right]}.$$

В силу условий периодичности один из двух коэффициентов  $A_1, A_2$  должен быть равен нулю, а другой должен быть равен  $A$ . Кроме того, круговая частота  $\omega_1$  (или  $\omega_2$ ), соответствующая не равному нулю коэффициенту, должна стать равной единице. Это дает

$$p_0^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \pm \sqrt{\left( \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{4c_1c_2}{m_1m_2}} \right].$$

Таким образом, для  $p_0$  возможны два значения и притом те которые совпадают с круговыми частотами свободных периодических колебаний нашей системы. Теперь функции  $x_0$  и  $y_0$  принимают вид

$$\begin{cases} x_0(\tau) = A \cos \tau, \\ y_0(\tau) = B \cos \tau, \end{cases} \quad (14.68)$$

причем между  $A$  и  $B$  существует соотношение  $\frac{A}{B} = \frac{c_1}{c_1 - m_1 p_0^2}$

или  $A = \frac{c_1}{m_1 p_0^2} D$ ;  $B = \left( \frac{c_1}{m_1 p_0^2} - 1 \right) D$ , где  $D = A - B$ .

Подставим значения (14.68) в уравнения (14.65)

$$\left. \begin{aligned} & p_0^2 x_1'' + \frac{c_1}{m_1} (x_1 - y_1) = \\ & = \left[ 2p_0 p_1 A - \frac{3}{4} (A - B)^3 + P \right] \cos \tau - \\ & \quad - \frac{1}{4} (A - B)^3 \cos 3\tau; \\ & p_0^2 y_1'' - \frac{c_1}{m_2} (x_1 - y_1) + \frac{c_2}{m_2} y_2 = \\ & = \left[ 2p_0 p_1 B + \frac{3}{4} \cdot \frac{m_1}{m_2} (A - B)^2 \right] \cos \tau + \\ & \quad + \frac{1}{4} \cdot \frac{m_1}{m_2} (A - B)^3 \cos 3\tau. \end{aligned} \right\} \quad (14.69)$$

Левые части этих уравнений с точностью до индексов совпадают с левыми частями уравнений (14.65). Поэтому круговые частоты, при которых наступает резонанс, также должны быть равны единице. Так как мы ищем периодические решения, то возможность резонанса надо исключить; для этого в правых частях

уравнений (14.69) приравняем нулю коэффициенты при  $\cos \tau$  и получим уравнения

$$2\rho_0\rho_1A - \frac{3}{4}(A - B)^3 + P = 0;$$

$$2\rho_0\rho_1B - \frac{3}{4} \cdot \frac{m_1}{m_2}(A - B)^3 = 0,$$

из которых после вычитания и последующего деления на  $D$  получим

$$2\rho_0\rho_1 = \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) D^2 - \frac{P}{D}.$$

Таким образом, начало разложения принимает вид

$$\rho = \rho_0 + \frac{\varepsilon}{2\rho_0} \left[ \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) D - \frac{P}{D} \right] + \varepsilon^2(\dots) + \dots \quad (14.70)$$

Решения  $x_1(\tau)$  и  $y_1(\tau)$  системы (14.69) складываются из интегралов однородных и частных интегралов неоднородных уравнений. Частные интегралы запишем в виде

$$x_{10}(\tau) = -C(c_2m_1 - 9\rho_0^2m_1m_2)L^3 \cos 3\tau;$$

$$y_{10}(\tau) = -9C\rho_0^2m_1D^3 \cos 3\tau,$$

где  $\frac{1}{C} = 4[(c_1 - 9\rho_0^2m_1^2)(c_1 + c_2 - 9\rho_0^2m_2) - c_1^2]$ , а так как однородные уравнения (14.69) формально совпадают с уравнениями (14.64), то их общие решения имеют вид уравнений (14.67). Долю, которую они могли бы составить в решениях  $x(\tau)$  и  $y(\tau)$ , можно включить уже в первые члены  $x_0(\tau)$  и  $y_0(\tau)$ . Поэтому можно положить, что решения однородных уравнений равны нулю, и, следовательно, принять

$$x_1(\tau) \equiv x_{10}(\tau); \quad y_1(\tau) \equiv y_{10}(\tau).$$

Окончательно имеем первые два члена разложения в ряд для  $x(t)$  и  $y(t)$ :

$$x(t) = \frac{c_1}{m_1\rho_0^2} D \cos pt - \varepsilon C(c_2m_1 - 9\rho_0^2m_1m_2) D^3 \cos 3pt;$$

$$y(t) = \left( \frac{c_1}{m_1\rho_0^2} - 1 \right) D \cos pt - \varepsilon 9C\rho_0^2m_1^2D^3 \cos 3pt,$$

причем  $D$  как разность амплитуд первых гармоник допускает произвольный выбор.



## КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

### Сущность явления

Квазигармоническими колебаниями называются негармонические колебания, определяемые дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых зависят от времени. При этих колебаниях воздействие на систему получается за счет изменения ее параметров. Поэтому такое воздействие называется параметрическим.

В качестве простейшего примера такого действия можно привести качели (рис. 14.4). Качели со стоящим на них человеком можно рассматривать как математический маятник, длина которого периодически меняется из-за приседания человека. Длина маятника изменяется с частотой  $\omega$ , вдвое большей, чем частота  $p$  качания маятника ( $\frac{\omega}{p} = 2$ ). Это обстоятельство характерно для параметрического воздействия при котором возбуждение наступает при отношении частот  $\frac{\omega}{p} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$ . Наличие параметрического воздействия легко устанавливается из упрощенного рассмотрения баланса энергии.

При приседании человек совершает работу  $\Delta W_{ab} = -mg\Delta l$ , при подъеме на пути  $cd$  — работу ( $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ )

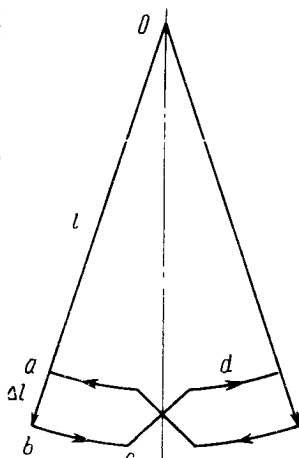


Рис. 14.4

$$\Delta W_{dc} = mg\Delta l + \frac{m}{2} [\omega(l + \Delta l)]^2 - \frac{m}{2} \omega^2 l^2;$$

$$\Delta W_{cd} = mg\Delta l + \frac{m\omega^2}{2} \Delta l 2l.$$

Поэтому баланс энергии за половину периода

$$\Delta W = 2 \frac{m(\omega l)^2}{2} \cdot \frac{\Delta l}{l} = 2T \frac{\Delta l}{l}, \quad (14.71)$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы за полпериода.

Если начальная энергия системы была  $W_0$ , то после первого полупериода запас энергии

$$\Delta W_1 = W_0 \left( 1 + 2 \frac{\Delta l}{l} \right); \quad (14.72)$$

после второго

$$\Delta W = W_0 \left( 1 + 2 \frac{\Delta l}{l} \right); \quad (14.73)$$

при наличии рассеяния энергии

$$\Delta W = 2W \left( \frac{\Delta l}{l} - \frac{\delta}{2} \right), \quad (14.74)$$

где  $\delta$  — декремент затухания равен  $\frac{\Delta W}{W}$ .

Таким образом, параметрическое возбуждение наступает при  $\frac{\Delta l}{l} > \frac{\delta}{2}$  или при определенной глубине модуляции параметра. Так как энергия нарастает со временем по геометрической прогрессии, то установившегося режима не существует.

### Нахождение решений уравнения Хилла

К уравнениям Хилла приходим во многих случаях: при рассмотрении колебаний вала несимметричного сечения стариниковой передачи, при изучении динамической потери устойчивости под действием периодических сил.

Общее решение уравнения Хилла

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (\Theta_0 + 2\Theta_1 \cos 2t + 2\Theta_2 \cos 4t + \dots) x = 0 \quad (14.75)$$

будет [51, 60]

$$x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t), \quad (14.76)$$

где  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  — два линейно независимых решения уравнений (14.75);  $A_1$ ,  $A_2$  — произвольные постоянные.

Так как  $\Theta(t)$  — периодическая функция с периодом  $2\pi$ , то  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  также должны иметь период  $2\pi$ , т. е.  $x_1(t - 2\pi)$  и  $x_2(t + 2\pi)$  будут решениями уравнений (14.75):

$$\left. \begin{aligned} x_1(t + 2\pi) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t); \\ x_2(t + 2\pi) &= d_1 x_1(t) + d_2 x_2(t); \end{aligned} \right\} \quad (14.77)$$

здесь  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  — постоянные. После подстановки значений (14.77) в уравнение (14.76) получим

$$x(t + 2\pi) = [A_1 c_1 + A_2 d_1] x_1(t) + [A_1 c_2 + A_2 d_2] x_2(t). \quad (14.78)$$

Постоянные  $A_1$ ,  $A_2$  выбираем так, чтобы

$$\left. \begin{aligned} A_1 c_1 + A_2 d_1 &= \sigma A_1; \\ A_2 d_2 + A_1 c_2 &= \sigma A_2, \end{aligned} \right\} \quad (14.79)$$

тогда при изменении аргумента на  $2\pi$

$$x(t + 2\pi) = \sigma x(t),$$

т. е.  $x(t)$  приобретает множитель  $\sigma$ .

Это условие можно соблюсти, если  $\sigma$  будет удовлетворять согласно (14.79) условию

$$\begin{vmatrix} c_1 - \sigma & d_1 \\ c_2 & d_2 - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (14.80)$$

т. е.  $\sigma$  будет корнем характеристического уравнения (14.80).

Если  $x_1$  и  $x_2$  удовлетворяют начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} x_1(0) &= 1; & x_1'(0) &= 0; \\ x_2(0) &= 0; & x_2'(0) &= 1; \end{aligned} \right\} \quad (14.81)$$

то, полагая в (14.77)  $t = 0$ , получим  $c_1 = x_1(2\pi)$ ;  $d_1 = x_2(2\pi)$ .

После дифференцирования получим  $c_2 = x_1'(2\pi)$ ;  $d_2 = x_2'(2\pi)$ .

Обычно вместо постоянной  $\sigma$  берут постоянную  $\lambda$ , связанную соотношением  $\sigma = e^{2\pi\lambda}$ , и вместо  $x(t) - y(t)$  — связанные соотношением  $y(t) = e^{-\lambda t} x(t)$ . Тогда

$$y(t + 2\pi) = e^{-\lambda(t+2\pi)} x(t + 2\pi) = y(t).$$

Так как  $\Theta(t)$  — четная функция, то  $e^{-\lambda t} y(-t)$  тоже будет решением уравнения (14.75). Следовательно,

$$x(t) = A_1 e^{\lambda t} y(t) + A_2 e^{-\lambda t} y(-t). \quad (14.82)$$

Параметр  $\lambda$  — характеристический показатель,  $y(t)$  — периодическая функция.

Характеристическое уравнение (14.80) можно упростить, если принять во внимание известное свойство линейного дифференциального уравнения, а именно: значение определителя Вронского равно постоянной, т. е.

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t) x_2'(t) - x_2(t) x_1'(t) = \text{const}. \quad (14.83)$$

Действительно, так как  $x_1''(t) + \Theta(t) x_1(t) = 0$ ;  $x_2''(t) + \Theta(t) x_2(t) = 0$ , то, исключая  $\Theta(t)$ , имеем  $x_1'' x_2 - x_2'' x_1 = 0$ , т. е.  $-x_1' x_2 + x_2' x_1 = \text{const}$  или согласно условиям (14.81) для  $t = 0$  получим  $\text{const} = 1$ , а следовательно,

$$x_1(t) x_2'(t) - x_1'(t) x_2(t) = 1.$$

Поэтому характеристическое решение

$$\sigma^2 - [c_1 + d_1] \sigma + c_1 d_2 - c_2 d_1 = 0$$

принимает вид

$$\sigma^2 - [x_1(2\pi) + x_2'(2\pi)] \sigma + 1 = 0. \quad (14.84)$$

В зависимости от величины  $x_1(2\pi) + x_2'(2\pi)$  необходимо различать три случая.

1.  $x_1(2\pi) + x_2'(2\pi) > 2$ , т. е. оба корня действительны. Так как  $\sigma_1\sigma_2 = 1$ , то один из корней больше единицы, другой меньше.

Значение комплексного логарифма будет  $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ .

Следовательно, для  $\sigma > 0$   $\ln \sigma = \ln |\sigma| + 2\pi ki$ , где  $k$  — целое число.

Имеем  $\ln \sigma_1 = -\ln \sigma_2$ . Следовательно, значение  $\lambda = \frac{1}{2\pi} \ln \sigma$  будет  $\lambda_1 = p + in$ ;  $\lambda_2 = -p + im$ .

Общий интеграл уравнения (14.75) имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{pt} y(t) + c_2 e^{-pt} y(-t). \quad (14.85)$$

Так как  $p > 1$ , то значение  $x(t)$  будет возрастать со временем, т. е. движение будет неустойчиво. Для  $\sigma < 0$  получим также уравнение (14.85).

2.  $x_1(2\pi) + x_2'(2\pi) < 2$ , т. е. оба корня комплексные, сопряженные. Так как  $\sigma_1\sigma_2 = 1$ , то модули  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  равны единице:  $\ln \sigma_1 = (\varphi + 2\pi n) i$ ;  $\ln \sigma_2 = (-\varphi + 2\pi k) i$ , где  $\varphi$  — аргумент  $z$ , который может меняться в пределах  $0 < \arg z < \pi$ .

Таким образом,  $\lambda_1 = i(p + n)$ ;  $\lambda_2 = -i(p + m)$ , где  $p$  — вещественное число, причем  $0 < p < \frac{1}{2}$ .

Следовательно, интеграл уравнения Хилла будет

$$x(t) = C_1 e^{ipt} y(t) + C_2 e^{-ipt} y(-t). \quad (14.86)$$

При возрастании  $t$   $y(t)$  остается ограниченным, поэтому можно утверждать, что в этом случае движение будет устойчивым.

3. Корни уравнения равны между собой ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \pm 1$ ). В этом случае

$$\left. \begin{aligned} x_1(t + 2\pi) &= \sigma_1 x_1(t); \\ x_2(t + 2\pi) &= d_1 x_2(t) + d_2 x_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (14.87)$$

Так как

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma & d_1 \\ 0 & d_2 - \sigma \end{vmatrix} = 0, \text{ то } d_2 = \sigma_1.$$

Если разделить второе выражение (14.87) на первое, то получим

$$\frac{x_2(t + 2\pi)}{x_1(t + 2\pi)} = \frac{x_2(t)}{x_1(t)} + \frac{d_1}{\sigma_1}. \quad (14.88)$$

Таким образом, при замене  $t$  на  $t + 2\pi$  появляется слагаемое  $\frac{d_1}{\sigma_1}$ .

Разность  $\frac{x_2(t)}{x_1(t)} - \frac{d_1}{2\pi\sigma_1} t = \varphi(t)$  согласно уравнению (14.88) будет периодической функцией с периодом  $2\pi$ , следовательно,

$$x_2(t) = \varphi_1(t) + bt x_1(t), \quad (14.89)$$

где  $\varphi_1(t + 2\pi) = \sigma_1 \varphi_1(t)$ .

Наличие второго члена в формуле (14.89) показывает, что движение при кратном корне будет неустойчивым, за исключением того случая, когда множитель при  $t$  окажется тождественно равным нулю.

Помимо приведенных имеются критерии, которые дают возможность по виду уравнения  $y'' + \Theta(t)y = 0$  судить о характере движения. Доказано, что при  $\Theta(t) < 0$   $|A| > 2$ , т. е. движение неустойчиво.

Для  $\Theta(t) > 0$  А. М. Ляпунов показал, что если  $\int_0^{2\pi} \Theta(t) dt < \frac{2}{\pi}$ , то  $|A| < 2$  и движение устойчиво. Это условие является достаточным.

### Определитель Хилла

В общем виде уравнение Хилла имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \Theta(t)y = 0, \quad (14.90)$$

где  $\Theta(t) = b_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos 2kt$ ;

функцию  $\Theta(t)$  можно представить в виде ( $b_k = b_{-k}$ )

$$\Theta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{2ikt}. \quad (14.91)$$

Решение уравнения согласно предыдущему

$$x(t) = e^{\lambda t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{2imt}, \quad (14.92)$$

где  $\lambda$  — характеристический показатель.

После подстановки  $x(t)$  в уравнение, если приравнять нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $e^{2ikt}$ , получим для определения  $a_m$  систему уравнений  $(\lambda + 2ik)^2 a_k + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m a_{k-m} = 0$ , которая может быть записана в виде

$$[b_0 - (2p + q)^2] a_p + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{p-k} a_k = 0. \quad (14.93)$$

Знак «штрих» при  $\sum$  обозначает, что при суммировании  $k = p$  исключается; здесь  $\lambda = iq$ . Для того чтобы система (14.93) допускала решение, необходимо, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при  $a, D(\lambda, b)$ , обращался в нуль.

Из формулы (14.93) получим систему уравнений

$$a_p + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{b_{p-k}}{b_0 - (2p+q)^2} a_k = 0. \quad (14.94)$$

Определитель этой системы  $D(q, b) = 0$  можно записать в таком виде:

$$\begin{array}{cccccc} k = -3 & k = -2 & k = -1 & k = 0 & k = 1 & \dots \\ \hline p = -3 & \left| \begin{array}{ccccc} 1 & \frac{-b_1}{(6-q)^2 - b_0} & \frac{-b_2}{(6-q)^2 - b_0} & \frac{-b_3}{(6-q)^2 - b_0} & \frac{-b_4}{(6-q)^2 - b_0} \\ \frac{-b_1}{(4-q)^2 - b_0} & 1 & \frac{-b_1}{(4-q)^2 - b_0} & \frac{-b_2}{(4-q)^2 - b_0} & \frac{-b_3}{(4-q)^2 - b_0} \\ \frac{-b_2}{(2-q)^2 - b_0} & \frac{-b_1}{(2-q)^2 - b_0} & 1 & \frac{b_1}{(2-q)^2 - b_0} & \frac{-b_2}{(2-q)^2 - b_0} \\ \frac{-b_3}{q^2 - b_0} & \frac{-b_2}{q^2 - b_0} & \frac{-b_1}{q^2 - b_0} & 1 & \frac{-b_1}{q^2 - b_0} \\ \frac{-b_4}{(2+q)^2 - b_0} & \frac{-b_3}{(2+q)^2 - b_0} & \frac{-b_2}{(2+q)^2 - b_0} & \frac{-b_1}{(2+q)^2 - b_0} & 1 \end{array} \right. \\ p = -2 & & & & & \\ p = -1 & & & & & \\ p = 0 & & & & & \\ p = 1 & & & & & \\ \dots & & & & & \end{array} \quad (14.95)$$

Определитель (14.95) можно записать так:

$$D(q, b) = \dots \left[ 1 - \frac{b_0}{(6-q)^2} \right] \left[ 1 - \frac{b_0}{(4-q)^2} \right] \left[ 1 - \frac{b_0}{(2-q)^2} \right] \times \\ \times \left[ 1 - \frac{b_0}{q^2} \right] \left[ 1 - \frac{b_0}{(2+q)^2} \right] \dots \Delta(q, b).$$

Следовательно,

$$\Delta(q, b) = \left| \begin{array}{ccc} 1 - \frac{b_0}{(6-q)^2} & \frac{-b_1}{(6-q)^2} & \frac{-b_2}{(6-q)^2} \\ \frac{-b_1}{(4-q)^2} & 1 - \frac{b_0}{(4-q)^2} & \frac{-b_1}{(4-q)^2} \\ \frac{-b_2}{(2-q)^2} & \frac{-b_1}{(2-q)^2} & 1 - \frac{b_0}{(2-q)^2} \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right| \quad (14.96)$$

для  $q = 0; b_1 = b_2 = \dots = 0$

$$\Delta(0, 0) = \dots \left( 1 - \frac{b_0}{6^2} \right) \left( 1 - \frac{b_0}{4^2} \right) \left( 1 - \frac{b_0}{2^2} \right) b_0 \left( 1 - \frac{b_0}{2^2} \right) \dots = \\ = \left[ \sqrt{b_0} \left( 1 - \frac{b_0}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{b_0}{4^2} \right) \left( 1 - \frac{b_0}{6^2} \right) \dots \right]^2.$$

Для  $\sin \alpha$  известно разложение

$$\sin \alpha = \alpha \left(1 - \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{9\pi^2}\right) \dots \quad (14.97)$$

Следовательно, множитель при  $D(0, b)$  равен значению

$$\frac{4 \sin^2 \frac{\pi \sqrt{b_0}}{2}}{\pi^2}.$$

Таким образом,

$$\Delta(0, b) = \frac{4}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi \sqrt{b_0}}{2} D(0, b). \quad (14.98)$$

Рассматривая выражение (14.96), увидим, что если определитель  $\Delta(q, b)$  имеет один корень  $q = q_0$ , то все остальные корни будут определяться величинами  $q = \pm(q_0 \pm 2j)$ , так как подстановка вместо  $q$  в выражение (14.96) этой величины будет соответствовать смещению строк определителя.

Эти корни являются корнями уравнения

$$\cos \pi q - \cos \pi q_0 = \sin^2 \frac{\pi q_0}{2} - \sin^2 \frac{\pi q}{2},$$

поэтому величина определителя (14.96) будет

$$\Delta(q, b) = B \left( \sin^2 \frac{\pi q_0}{2} - \sin^2 \frac{\pi q}{2} \right). \quad (14.99)$$

Полагая  $b = 0$ , из уравнения (14.96) получим значение  $q_0 = \sqrt{b_0}$ . Тогда из выражения (14.98) следует

$$\Delta(q, 0) = B \left( \sin^2 \frac{\pi \sqrt{b_0}}{2} - \sin^2 \frac{\pi q}{2} \right).$$

Полагая  $q = 0$ , получим

$$B = \frac{\Delta(0, 0)}{\sin^2 \frac{\pi \sqrt{b_0}}{2}}. \quad (14.100)$$

Так как согласно разложению (14.97)  $\Delta(0, 0) = \sin^2 \frac{4}{\pi^2} \sqrt{b_0} \frac{4}{\pi^2}$ , то  $B = \frac{4}{\pi^2}$ . Поэтому из формулы (14.99) следует, что  $\Delta(0, b) = \frac{4}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi q_0}{2}$ , и после подстановки значения  $\Delta(0, b)$  в выражение (14.98) получим

$$\sin^2 \left( \frac{\pi}{2} i\lambda \right) = D(0, b) \sin^2 \frac{\pi \sqrt{b_0}}{2} \quad (14.101)$$

или

$$\operatorname{ch} \pi \lambda = 1 - 2D(0, b) \sin^2 \left( \frac{\pi \sqrt{b_0}}{2} \right). \quad (14.102)$$

Это и есть уравнение Хилла, которое дает возможность найти характеристическое значение  $\lambda$ .

Определитель  $D(0, b)$  уже не содержит значения  $\lambda$ , что чрезвычайно облегчает вычисления. Если бы не была найдена зависимость (14.102), то пришлось бы задавать для  $\lambda$  ряд значений, вычислять  $D(\lambda, b)$  и искать перемену знака определителя.

Таким образом, ход решения задачи заключается в том, что из уравнения Хилла находим корень уравнения  $\lambda = iq$ , зная который, находим величины  $b_i$  в зависимости от одного из них.

После этого можно определить характер движения исходя из уравнения (14.102)  $\cos \pi q = 1 - 2D(0, b) \sin^2 \frac{\pi \sqrt{b_0}}{2}$ .

Если  $\left| 1 - 2D(0, b) \sin^2 \frac{\pi \sqrt{b_0}}{2} \right| < 1$ , то  $q$  — вещественное число и  $\lambda = iq$  — чисто мнимое. В этом случае движение будет устойчиво, так как с возрастанием  $t$   $x$  остается ограниченным.

Если же  $\left| 1 - 2D(0, b) \sin^2 \frac{\pi \sqrt{b_0}}{2} \right| > 1$ , то  $q$  — мнимое число и движение будет неустойчиво.

Границы областей неустойчивого движения определяются равенством  $\left| 1 - 2D(0, b) \sin^2 \frac{\pi \sqrt{b_0}}{2} \right| = 1$ .

### Колебание груза на пружине с периодически изменяющейся жесткостью

Частота изменения жесткости пусть будет  $\omega$  (рис. 14.5). Найдем теперь решение уравнения [17]

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - [\lambda + \gamma \Phi(\tau)] x = 0, \quad (14.103)$$

где

$$\Phi(\tau) = \begin{cases} +1 & \text{для } 0 < \tau < \pi \quad (0 < \omega t < \pi), \\ -1 & \text{для } \pi < \tau < 2\pi; \end{cases} \quad (14.104)$$

$$\tau = \omega t; \quad \lambda = \frac{K}{\omega^2 m}; \quad \gamma = \frac{\Delta K}{\omega^2 m}; \quad \frac{K}{m} = \omega_1^2.$$

Решение уравнения (14.87) простое, а вместе с тем это решение достаточно хорошо характеризует аналогичные процессы, когда коэффициент при  $x$  имеет период  $2\pi$ .



Согласно условию (14.88) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + (\lambda + \gamma)x = 0 \text{ для } 0 < \tau < \pi \text{ (} 0 < \omega t < \pi \text{);} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + (\lambda - \gamma)x = 0 \text{ для } \pi < \tau < 2\pi. \end{aligned} \right\} (14.105)$$

Найдем решение этого уравнения при начальных условиях:

$$\left. \begin{aligned} x_1(0) = 1; \quad x_1'(0) = 0; \\ x_2(0) = 0; \quad x_2'(0) = 1. \end{aligned} \right\} (14.106)$$

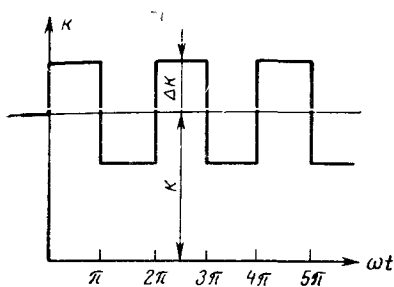


Рис. 14.5

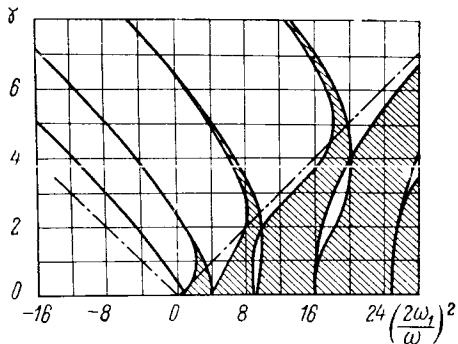


Рис. 14.6

При этих условиях решение уравнения (14.105) для интервала от 0 до  $\pi$  ( $k_1 = \sqrt{\lambda + \gamma}$ ) будет

$$\left. \begin{aligned} x_1 = \cos k_1 \tau; \\ x_2 = \frac{1}{k_1} \sin k_1 \tau. \end{aligned} \right\} (14.107)$$

Для интервала  $\pi < \tau < 2\pi$ ,  $k_2 = \sqrt{\lambda - \gamma}$  решения  $x_{12}$  и  $x_{22}$  будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} x_{12} = A_2 \cos k_2 \tau + \frac{B_2}{k_2} \sin k_2 \tau \text{ для } \pi < \tau < 2\pi; \\ x_{22} = A_2' \cos k_2 \tau + \frac{B_2'}{k_2} \sin k_2 \tau \text{ для } \pi < \tau < 2\pi. \end{aligned} \right\} (14.108)$$

Для нахождения постоянных  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $A_2'$ ,  $B_2'$  необходимо удовлетворить условиям сопряжения, т. е.

$$\left. \begin{aligned} x_{12}(\pi) = x_1(\pi); \\ x_{12}'(\pi) = x_1'(\pi); \\ x_{22}(\pi) = x_2(\pi); \\ x_{22}'(\pi) = x_2'(\pi). \end{aligned} \right\} (14.109)$$

Следовательно, для  $\tau = \pi$  условия (14.109) дают

$$A_2 \cos k_2 \pi + \frac{B_2}{k_2} \sin k_2 \pi = \cos k_1 \pi;$$

$$-A_2 k_2 \sin k_2 \pi + B_2 \cos k_2 \pi = -k_1 \sin k_1 \pi.$$

Отсюда найдем  $A_2$  и  $B_2$ , следовательно,

$$x_{12} = (k_2 \cos k_1 \pi \sin k_2 \pi - k_1 \sin k_1 \pi \cos k_2 \pi) \frac{\sin k_2 \tau}{k_2} + \\ + \frac{1}{k_2} (k_2 \cos k_1 \pi \cos k_2 \pi + k_1 \sin k_1 \pi \sin k_2 \pi) \cos k_2 \pi. \quad (14.110)$$

Для второго решения

$$A_2' \cos k_2 \pi + \frac{B_2'}{k_2} \sin k_2 \pi = \frac{1}{k_1} \sin k_1 \pi;$$

$$-k_2 A_2' \sin k_2 \pi + B_2' \cos k_2 \pi = \cos k_1 \pi.$$

Находя отсюда  $A_2'$  и  $B_2'$ , после подстановки их значений в формулу (14.92) получим

$$x_{22}(\tau) = \left\{ \frac{k_2}{k_1} \sin k_1 \pi \sin k_2 \pi + \cos k_1 \pi \cos k_2 \pi \right\} \frac{\sin k_2 \tau}{k_2} + \\ + \frac{1}{k_2} \left\{ \frac{k_2}{k_1} \sin k_1 \pi \cos k_2 \pi - \cos k_1 \pi \sin k_2 \pi \right\} \cos k_2 \tau. \quad (14.111)$$

Составляя теперь выражение  $x_{12}(2\pi) + x_{22}'(2\pi)$ , т. е. полагая в формулах (14.110) и (14.111)  $\tau = 2\pi$ , найдем, что

$$x_{12}(2\pi) + x_{22}'(2\pi) = 2 \left( \cos k_1 \pi \cos k_2 \pi - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \sin k_1 \pi \sin k_2 \pi \right).$$

Характеристическое уравнение согласно решению (14.84)

$$\sigma^2 - 2 \left( \cos k_1 \pi \cos k_2 \pi - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \sin k_1 \pi \sin k_2 \pi \right) \sigma + 1 = 0.$$

Движение будет неустойчиво, если

$$\left| \cos k_1 \pi \cos k_2 \pi - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \sin k_1 \pi \sin k_2 \pi \right| > 1.$$

Граничные кривые для этого случая нанесены на рис. 14.6. По оси ординат нанесены значения  $\gamma = \frac{\Delta K}{K} \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)^2$ , по оси абсцисс  $\left( \frac{2\omega_1}{\omega} \right)^2$ . Заштрихованная область соответствует устойчивой области.

Как видно из рис. 14.6, первая критическая частота для малых  $\lambda$  появляется при значении  $\frac{\omega_1}{\omega} \cong \frac{1}{2}$ , т. е. первый резонанс появляется при частоте, равной половине частоты возмущения.

## Поперечные колебания балки под действием периодической продольной силы [4]

Предположим, что осевая сила будет функцией времени

$$T = S(t).$$

Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \pm \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \pm S(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (14.112)$$

Будем предполагать, что стержень подвергается действию продольной силы  $S(t) = S_1 \sin kt$ . Для опертого стержня решение уравнения получим в виде

$y(x, t) = T(t) \sin \frac{\pi x}{l}$ . После подстановки этого выражения в формулу (14.96) получим

$$\rho F \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{EJ\pi^4}{l^4} \left( 1 - \frac{l^2 S(t)}{EJ\pi^2} \right) \times T(t) = 0$$

или

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 \left[ 1 - \frac{l^2 S_1}{EJ\pi^2} \sin kt \right] T = 0, \quad (14.113)$$

где  $\omega^2$  — квадрат собственной частоты для опертого стержня.

Уравнение (14.113) представляет собой уравнение Матье

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (\theta_0 - 2\theta \cos 2\omega t) y = 0. \quad (14.114)$$

Решениями этого уравнения будут функции  $ce_n$ ,  $se_n$  с периодом  $\pi$  или  $2\pi$ . Свойства решений вытекают из общей теории уравнений Хилла. Уравнения хорошо изучены [60]. На рис. 14.7 заштрихованная область соответствует области устойчивых решений, незаштрихованная — неустойчивым. Границы области между этими областями имеют решения уравнения (14.114) с периодом  $\pi$  или  $2\pi$ .

Для того чтобы выяснить явление резонанса для случая продольных периодических сил, удобнее всего применить для первого приближения метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.

Так как мы исследуем явление резонанса, то вполне естественно искать решение (14.114) в виде

$$T(t) = a \sin \left( \frac{r}{s} kt + \varphi \right), \quad (14.115)$$

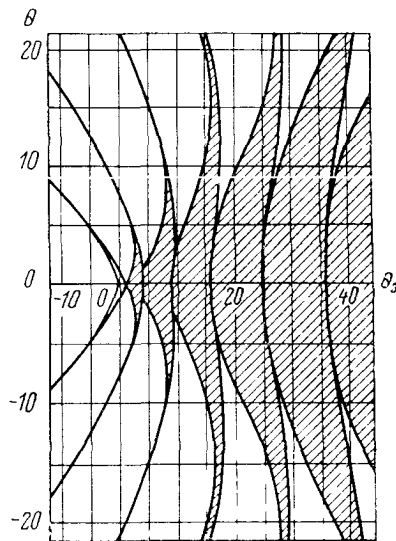


Рис. 14.7

где  $\frac{r}{s} k$  соответствует примерно собственной частоте, т. е.  $\omega \approx \frac{r}{s} k$ .

В выражении (14.115)  $a$  и  $\varphi$  — некоторые функции времени, которые необходимо найти.

Пользуясь принципом усреднения Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, получаем для определения  $a$  и  $\varphi$  следующие уравнения первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\omega S_1}{4P_{кр}} a \cos 2\varphi; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega - \frac{k}{2} - \frac{\omega S_1}{4P_{кр}} \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (14.116)$$

С помощью замены переменных  $a \cos \varphi = u$ ;  $-a \sin \varphi = v$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \left( \omega - \frac{k}{2} \right) v + \frac{\omega S_1}{4P_{кр}} u; \\ \frac{dv}{dt} &= - \left( \omega - \frac{k}{2} \right) u + \frac{\omega}{4} \frac{S_1}{P_{кр}} v. \end{aligned}$$

Эта система уравнений решается обычным путем. Корни характеристического уравнения  $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\left( \frac{S_1 \omega}{4P_{кр}} \right)^2 - \left( \omega - \frac{k}{2} \right)^2}$ .

В этом случае, когда  $\lambda_1, \lambda_2$  будут действительны, значения решений для  $u$  и  $v$ , содержащие  $e^{\lambda t}$ , будут неограниченно возрастать.

Условие вещественности  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  будет  $\frac{S_1}{4P_{кр}} > \left| \frac{\omega - \frac{k}{2}}{\omega} \right|$ , откуда

$$2\omega \left( 1 - \frac{S_1}{4P_{кр}} \right) < k < 2\omega \left( 1 + \frac{S_1}{4P_{кр}} \right). \quad (14.117)$$

Следовательно, если частота вынужденных колебаний будет лежать в этом интервале, то наступит явление параметрического резонанса. Таким образом, это явление получим примерно для собственной частоты, равной половине частоты возбуждения.

В предыдущем мы считали, что внешняя сила  $S(t) = S_1 \sin kt$ . Если имеется еще постоянная слагаемая, т. е.

$$S(t) = S_0 + S_1 \sin nt,$$

где  $n$  — целое число, то для зоны неустойчивости можно получить следующее выражение, если вместо  $\omega$  ввести число колебаний  $n$ ,

$$\begin{aligned} 2n_0 \left( 1 - \frac{S_0}{2P_{кр}} \right) - \frac{S_1 n_0}{2P_{кр}} &< n_{кр} < \\ < 2n_0 \left( 1 - \frac{S_0}{2P_{кр}} \right) + \frac{S_1 n_0}{2P_{кр}}. \end{aligned} \quad (14.118)$$

## Поперечные колебания стержней при действии продольной периодической силы при учете затухания

Коэффициент затухания не зависит от амплитуды. При учете затухания необходимо найти решение уравнения

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu EJ \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} + P(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad (14.119)$$

где продольная сила  $P(t) = P_0 + P_1 \cos 2\omega t$ .

Для случая опертых концов берем решение в виде

$$y(x, t) = T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (14.120)$$

После подстановки значения (14.120) в уравнение (14.119) получим для определения  $T_n(t)$  следующее уравнение:

$$T_n'' + \mu \omega_n^2 T_n' + \left[ \omega_n^2 - \frac{P_{кр}}{\rho F E J} (P_0 + P_1 \cos 2\omega t) \right] T_n = 0, \quad (14.121)$$

где  $\omega_n^2 = \frac{EJ}{\rho F l^4} n^4 \pi^4$ ,  $P_{кр} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}$ .

Для того чтобы привести это уравнение к обычному виду, вместо  $T_n(t)$  вводим новую переменную

$$T_n(t) = e^{-\frac{1}{2} \mu \omega_n^2 t} s_n(t); \quad (14.122)$$

тогда дифференциальное уравнение для  $s_n(t)$  будет

$$s_n''(t) + (\theta_0 - 2\theta \cos 2\omega t) s_n(t) = 0, \quad (14.123)$$

т. е. получается уравнение Матье.

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= \omega_n^2 + \frac{\mu^2 \omega_n^4}{4} + \frac{\omega_n^2}{\rho F} \cdot \frac{P_0}{P_{кр}}; \\ 2\theta_1 &= \frac{P_1}{P_{кр}} \omega_n^2. \end{aligned} \right\} \quad (14.124)$$

Решение уравнения (14.114) будет  $c e_n$  и  $s e_n$ .

Таким образом, в области устойчивых решений будет ( $\rho$  — действительно)

$$T_n(t) = e^{-\frac{\mu \omega_n^2 t}{2}} A \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{2r} \cos(2r - \rho_1) \omega t \quad (14.125)$$

или

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{\mu \omega_n^2 t}{2}} A \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{2r+1} \cos(2r + 1 + \rho_1) \omega t; \\ T_n(t) &= e^{-\frac{\mu \omega_n^2 t}{2}} B \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{2r+1} \sin(2r + \rho_1) \omega t \quad (14.125') \end{aligned}$$

ИЛИ

$$e^{-\frac{\mu\omega_n^2 t}{2}} B \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{2r+1} \sin(2r+1 + \rho_1) \omega t.$$

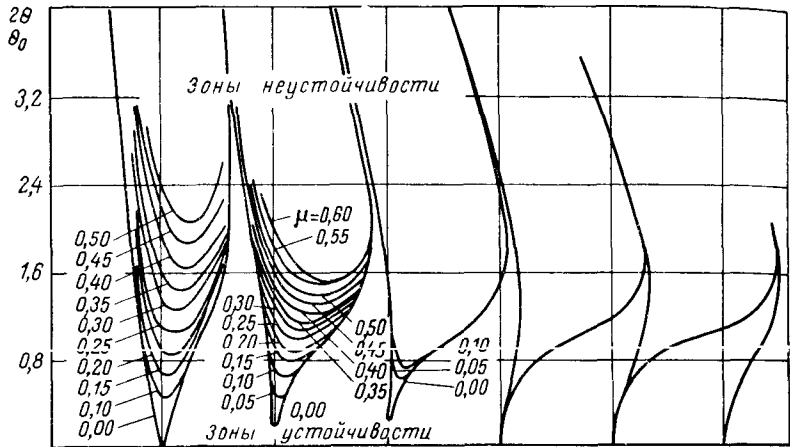


Рис. 14.8

Для  $se_n$ ,  $se_n$ , лежащих в области неустойчивых решений,

$$T_{1n} = e^{-\left(\frac{\mu\omega_n^2}{2} - \rho_1\right)\omega t} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_2 e^{2r\omega t}$$

ИЛИ

$$e^{-\left(\frac{\mu\omega_n^2}{2} - \rho_1\right)\omega t} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{2r+1} e^{(2r+1)\omega t};$$

$$T_{2n} = e^{-\left(\frac{\mu\omega_n^2}{2} - \rho_1\right)\omega t} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{2r} e^{-2r\omega t}$$

ИЛИ

$$e^{-\left(\frac{\mu\omega_n^2}{2} - \rho_1\right)\omega t} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{2r+1} e^{-(2r+1)\omega t}.$$

Таким образом,  $y$  устойчиво и стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ ,  
когда  $\rho_1 < \frac{\mu\omega_n^2}{2}$ ;

$y$  неустойчиво и стремится к  $\pm \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , когда  $\rho > \frac{\mu \omega_n}{2}$ ;  $y$  нейтрально или периодическая функция с периодом  $\pi$  или  $2\pi$ , когда  $\frac{\mu \omega_n^2}{2} = \rho$ ;

$y$  устойчиво и стремится к 0, когда  $t \rightarrow 0$ . Во всех случаях через  $\rho_1$  обозначено характеристическое число.

Значение коэффициента затухания следует выбирать в зависимости от гипотез, которые принимают за основу.

На рис. 14.8 приведены граничные кривые в области устойчивых и неустойчивых решений для уравнения (14.123). На нем отмечены области, соответствующие устойчивым и неустойчивым решениям. Из рисунка видно, что зона устойчивости при наличии затухания будет шире, чем без затухания.

### Внутреннее трение, зависящее от амплитуды колебаний

Выше было принято, что затухание есть линейная функция скорости деформации волокон стержня. Значение амплитуды при этом остается неопределенным. Для нахождения величины амплитуды необходимо исходить из действительного закона затухания.

Дифференциальное уравнение (14.119) при учете продольной периодической силы будет

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{\rho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \left[ \mu_0 + \mu_1 A_1 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \operatorname{sign} X + \mu_2 A_1^2 \left( \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2 \partial t} \right\} + P_0 (1 + q \cos 2pt) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (14.126)$$

Решение этого уравнения найдем по методу Ван дер Поля.

Пусть

$$y(x, t) = X_1(x) S(t). \quad (14.127)$$

После подстановки значения  $y(x, t)$  в уравнение (14.126), умножая на  $X_1(x) dx$  и интегрируя от 0 до  $l$ , получим для нахождения  $S(t)$  следующее уравнение  $\left( N = \int_0^l X_1^2 dx \right)$ :

$$S''(t) + p^2 S(t) = -\omega^2 S(t) + p^2 S(t) - \frac{EJ}{\rho p F N} S'(t) \int_0^l \left[ \mu_0 + \mu_1 A_1 \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} \operatorname{sign} X_1'' + \mu_2 \left( \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} \right)^2 A_1^2 \right] X_1''(x) dx - \frac{P_0}{F N \rho} (1 + q \cos 2pt) S(t) \int_0^l X_1''(x) X_1(x) dx. \quad (14.128)$$

$$\text{Обозначим } \frac{\int_0^l X''^2 dx}{\int_0^l X^2 dx} = \gamma_2; \quad \frac{\int_0^l X''^3 dx}{\int_0^l X^2 dx} = \gamma_3; \quad \frac{\int_0^l X''^4 dx}{\int_0^l X^2 dx} = \gamma_4.$$

$$\text{Так как } \frac{r^4}{l^4} \int_0^l X^2 dx = - \int_0^l X'' X dx = \int_0^l X''^2 dx,$$

$$\text{то } \gamma = \frac{r^4}{l^4}.$$

$$\text{Интегрируя по частям, получим } \int_0^l X''(x) X(x) dx = - \int_0^l X'^2 dx.$$

Так как критическая нагрузка для стержня, определяемая

$$\text{по энергетическому методу, будет } P_{кр} = \frac{EJ \int_0^l y'^2 dx}{\int_0^l y'^2 dx},$$

то

$$\frac{\int_0^l X_1''(x) X_1(x) dx}{\int_0^l X_1^2(x) dx} = - \frac{\gamma_2 \int_0^l X'^2(x) dx}{\int_0^l X^2 dx} = - \frac{r^4}{l^4} \cdot \frac{EJ}{P_{кр}}. \quad (14.129)$$

Следовательно, уравнение (14.112) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} S''(t) &= p^2 S(t) = (p^2 - \omega^2) S(t) - \\ &- \frac{EJ}{\rho \rho F} S'(t) [\mu_0 \gamma_2 + \mu_1 A \operatorname{sign} X'' \gamma_3 + A^2 \mu_2 \gamma_4] + \\ &+ \frac{P_0}{P_{кр}} \omega^2 (1 + q \cos 2pt) S(t) = 0. \end{aligned} \quad (14.130)$$

Решение этого уравнения ищем в виде ( $a^2 + b^2 = A^2$ )

$$S(t) = a \sin pt - b \cos pt. \quad (14.131)$$

Тогда правая часть уравнения (14.130) примет вид

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= f(a, b) \sin \omega t + F(a, b) \cos \omega t = \\ &= \cos pt \left\{ -(p^2 - \omega^2) b - \right. \end{aligned}$$

$$\left. - a \omega^2 \left[ \mu_0 + A \mu_1 \gamma_2 \frac{l^4}{r^4} \operatorname{sign} X_1'' + A^2 \mu_2 \frac{l^4}{r^4} \gamma_4 \right] - \right.$$



$$-\omega^2 \frac{P}{P_{\kappa\rho}} b \left(1 + \frac{q}{2}\right) \} + \sin pt \left\{ a(\rho^2 - \omega^2) - b\omega^2 \left(\mu_0 + \mu_1 A \gamma_3 \frac{l^4}{r^4} \operatorname{sign} X'' + A^2 \mu_2 \gamma_4 \frac{l^4}{r^4}\right) + \omega^2 \frac{P}{P_{\kappa\rho}} a \left(1 - \frac{q}{2}\right) \right\}.$$

Уравнение установления имеет вид

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\rho} F(a, b); \quad \frac{db}{dt} = \frac{1}{2\rho} f(a, b).$$

Приравнявая  $\frac{da}{dt}$  и  $\frac{db}{dt}$  нулю, получим уравнения для определения стационарной амплитуды:

$$\begin{aligned} a\omega^2 \left[ \frac{r^4}{l^4} \mu_0 + A_1 \mu_1 \frac{l^4}{r^4} \gamma_3 \operatorname{sign} X'' + A^2 \mu_2 \frac{l^4}{r^4} \gamma_4 \right] + \\ + b \left[ (\rho^2 - \omega^2) + \frac{P}{P_{\kappa\rho}} \omega^2 \left(1 + \frac{q}{2}\right) \right] = 0; \quad (14.132) \\ a \left[ (\rho^2 - \omega^2) + \omega^2 \frac{P}{P_{\kappa\rho}} \left(1 - \frac{q}{2}\right) \right] - \\ - b\omega^2 \left[ \mu_0 + A \mu_1 \gamma_3 \frac{l^4}{r^4} \operatorname{sign} X'' + A^2 \mu_2 \frac{l^4}{r^4} \right] = 0. \end{aligned}$$

Определитель, составленный из коэффициентов при  $a$  и  $b$  (14.129), дает условие для определения стационарной амплитуды

$$\begin{aligned} \left[ \rho^2 - \omega^2 - \frac{P_0}{P_{\kappa\rho}} \omega^2 \left(1 - \frac{q}{2}\right) \right] \left[ \omega^2 - \rho^2 - \frac{P}{P_{\kappa\rho}} \omega^2 \left(1 + \frac{q}{2}\right) \right] = \\ = \omega^4 \left[ \mu_0 + \mu_1 \gamma_3 \frac{l^4}{r^4} A \operatorname{sign} X'' + \mu_2 \frac{l^4}{r^4} A^2 \gamma_3^2 \right]^2. \end{aligned}$$

Следовательно ( $P_1 = qP_0$ ),

$$\begin{aligned} A \mu_1 \gamma_3 \frac{l^4}{r^4} \operatorname{sign} X'' + A^2 \gamma_4 \frac{l^4}{r^4} \mu_2 = \\ = \sqrt{\left( \frac{\rho^2}{\omega^2} - 1 + \frac{P_0}{P_{\kappa\rho}} + \frac{P_1}{2P_{\kappa\rho}} \right) \left( 1 - \frac{\rho^2}{\omega^2} - \frac{P_0}{P_{\kappa\rho}} - \frac{P_1}{2P_{\kappa\rho}} \right)} - \mu_0. \end{aligned} \quad (14.133)$$

Отсюда следует, что параметрический резонанс ограничен зоной

$$\sqrt{1 - \frac{P_0}{P_{\kappa\rho}} - \frac{P_1}{2P_{\kappa\rho}}} + \delta_1 < \frac{P}{\omega} < \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_{\kappa\rho}} + \frac{P_1}{2P_{\kappa\rho}}} - \delta_2, \quad (14.134)$$

где  $\delta$  зависит от  $\mu_0$ .

В частности, если  $\mu_2 = 0$ , то амплитуда колебаний

$$A = \frac{r^4}{l^4} \cdot \frac{1}{\mu_1 \gamma_3 \operatorname{sign} X^n} \times \\ \times \sqrt{\left( \frac{p^2}{\omega^2} - 1 + \frac{P_0}{P_{кр}} + \frac{P_1}{2P_{кр}} \right) \left( 1 - \frac{p^2}{\omega^2} - \frac{P_0}{P_{кр}} - \frac{P_1}{2P_{кр}} \right) - \mu_0}. \quad (14.135)$$

Таким образом, параметрический резонанс наступает при настройке частоты возмущающей силы на половину собственной частоты.

### Поперечные колебания стоек с грузом на конце при учете сжатия стоек

Выше мы рассмотрели случаи, когда стержень находится под действием продольных сил.

При подсчете частот, однако, мы не принимали во внимание сжатия стоек и не рассматривали влияния продольных колебаний на поперечные. Эта задача представляет большой практический интерес так как во многих случаях стойки значительно загружены, так что сжатие стоек может быть значительно.

Рассмотрим стержень, с концом которого связан груз  $P$  [8, 50].

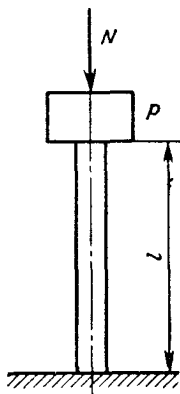


Рис. 14.9

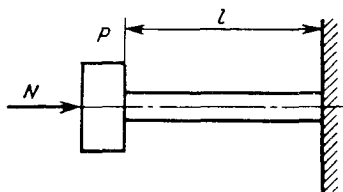


Рис. 14.10

Обозначая продольное перемещение (вдоль оси) конца стержня через  $u$ , получим для осевой силы для вертикального стержня (рис. 14.9)

$$N = P \left( 1 - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right),$$

для горизонтального стержня (рис. 14.10)

$$N = - \frac{P}{g} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.$$

Уравнение поперечных колебаний при наличии продольной силы  $N$  будет

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (14.136)$$

Вводя обозначения

$$\frac{F\rho}{EJ} = n^2; \quad \frac{Pl^2}{EJ} = \lambda; \quad S = \frac{1}{l^2} \left( \delta - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right), \quad (14.137)$$

где  $\delta$   $\begin{cases} 0 & \text{для горизонтального положения;} \\ 1 & \text{для вертикального положения,} \end{cases}$

приведем это уравнение к виду 
$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + n^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\lambda S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Вводя «безразмерное» время  $\tau = \omega t$ , где  $\omega$  — частота поперечных колебаний, приведем уравнение (14.136) к виду

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + n^2 \omega^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = -\lambda S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (14.138)$$

Помимо этого уравнения, мы должны написать еще уравнение продольных колебаний стойки

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (14.139)$$

Граничные условия для  $x = 0$  и  $x = l$  должны быть:

а)  $u = 0$  при  $x = 0$ ;

б)  $EF \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{P}{g} \cdot \frac{\partial^2 (u + v)}{\partial t^2}$  при  $x = l$ ,

где  $v$  — укорочение стойки вследствие поперечного изгиба:

$$v = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (14.140)$$

Предположим теперь, что  $S$  будет периодической функцией вида ( $\tau = \omega t$ )

$$S = A_0 + A_1 \cos \tau + A_2 \cos 2\tau + \dots \quad (14.141)$$

Для получения решения уравнения для «малого» параметра  $\varepsilon$  необходимо воспользоваться методом одновременного разложения  $\omega^2$  и  $y$  по степеням «малого» параметра:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \nu_0 + \varepsilon \nu_1 + \varepsilon^2 \nu_2 + \dots; \\ y &= y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (14.142)$$

Для поперечного прогиба стержня в первом приближении имеем

$$y = Y \varphi_1(x) \cos \omega t, \quad (14.143)$$

где  $\varphi_1(x)$  — фундаментальная функция для колеблющегося стержня.

Вертикальное перемещение конца стойки вследствие поперечного изгиба

$$v = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{Y^2}{2} (1 + \cos 2\omega t) \int_0^l \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (14.144)$$

Продольное перемещение стойки в первом приближении

$$u = \left( A_1 \sin 2\beta \frac{x}{l} + A_2 \cos 2\beta \frac{x}{l} \right) \cos 2\omega t. \quad (14.145)$$

Так как по условию  $u = 0$  для  $x = 0$ , то  $A_2 = 0$ .

Беря вместо  $A_1$  значение  $\frac{A}{\sin 2\beta}$ , получаем

$$u = A \frac{\sin 2\beta \frac{x}{l}}{\sin 2\beta} \cos 2\omega t. \quad (14.146)$$

Постоянная  $A$  определяется из граничного условия «а»:

$$A = \frac{Y^2 \int_0^l \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 dx}{2 \left[ \frac{EFg}{2aP\omega^2} \operatorname{ctg} 2\beta - 1 \right]}, \quad (14.147)$$

где  $a^2 = \frac{E}{\rho}$ ;  $\beta = \frac{\omega l}{a}$ .

$$(m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots).$$

Следовательно, значение  $S$  по уравнению (14.137) будет:

$$S = \frac{1}{l^2} (\delta + 4\omega^2 A \cos 2\tau), \quad (14.148)$$

т. е.  $A_0 = \frac{\delta}{l^2}$ ;  $A_2 = \frac{4\omega^2}{l^2}$ ;  $A_m = 0$ .

После вычислений Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов для квадрата частоты во втором приближении получают  $\left( \lambda_1 = \frac{1}{l^4} \right)$

$$\omega^2 = \frac{1}{n^2} \left\{ \lambda_1 + \frac{\lambda}{l^2} \left( \delta + \frac{2\omega^2}{g} A \right) \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \varphi_1 dx \right\}, \quad (14.149)$$

или

$$\omega^2 = \frac{EJ}{F\theta l^4} \left\{ r^4 - \frac{Pl^2}{EJ} X \left( \delta - \frac{2\omega^2}{g} A \right) \right\}, \quad (14.149')$$

где  $X = l^2 T_1 = -l^2 \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \varphi_1 dx$ .

Из этого выражения можно вычислить  $\omega$  как функцию амплитуды  $A$ :

$$\omega^2 = \frac{\frac{EJ}{F\rho l^4} \left( r^4 - \frac{Pl^2}{EJ} X\delta \right)}{1 + 2 \frac{P}{Q} X \frac{A}{l}}, \quad (14.150)$$

где  $Q = F\rho l$  — масса стержня.

Знак для  $A$  необходимо взять такой же, какой будет у знаменателя в уравнении (14.147).

Как легко проверить, значение  $\frac{r^4 EJ}{Xl^2}$  близко к критическому значению для данного стержня при рассматриваемых условиях заделки. Поэтому формулы (14.149') и (14.150) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 \left\{ 1 - \frac{P}{P_{кр}} \left( \delta - \frac{2\omega^2}{g} A \right) \right\}; \\ \omega^2 &= \frac{\omega_0^2 \left( 1 - \frac{P}{P_{кр}} \delta \right)}{1 + \frac{2\omega^2}{g} \cdot \frac{P}{P_{кр}} A}. \end{aligned} \right\} \quad (14.151)$$

В частности, если не учитывать влияния нормальных сил инерции груза ( $A = 0$ ), то получим  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{P}{P_{кр}} \delta}$ .

Для малых значений  $\frac{P}{P_{кр}}$ , как это обычно бывает,  $\delta = 1$ .

Как показывают вычисления, поправка для частоты с учетом сжатия стоек обычно невелика. Величина этой поправки повышается при увеличении отношения веса груза к его критическому значению:

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{P}{2P_{кр}} \right).$$

### Поперечные колебания стоек с грузом при учете сжатия и затухания

Учтем при решении задачи влияние затухания. Уравнение поперечных колебаний стойки при наличии продольной периодической силы  $P = P_0 + P_1 \cos 2pt$  с учетом влияния груза, упругого отпора и затухания будет

$$\begin{aligned} EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{P} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \left[ \mu_0 + \mu_1 A \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \operatorname{sign} X + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_2 A^2 \left( \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right)^2 \right] \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} \right\} + P_0 (1 + q \cos 2pt) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \\ \left. \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right\} + \left( P - kz - M \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (14.152)$$

Здесь  $M$  — масса груза, связанного с концом стойки;  $k$  — коэффициент упругого отпора от поперечных связей;

$$z = u + \Delta v_1 + \Delta v_2, \quad (14.153)$$

где  $u$  — продольное упругое перемещение конца стойки;  $\Delta v_1$  — укорочение конца стойки из-за поперечных деформаций ( $\Delta v_1$  — постоянная составляющая,  $\Delta v_2$  — переменная).

Для большой общности учтем влияние затухания, не зависящего от частоты при продольных колебаниях стойки. Уравнение продольных колебаний стойки

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\omega} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (14.154)$$

где  $\omega$  — частота поперечных колебаний.

При  $x = 0$  и  $x = l$  необходимо удовлетворить граничным условиям:

а)  $u = 0$  при  $x = 0$ ;

б)  $EF \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{\omega} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -\frac{P}{g} \cdot \frac{\partial^2 (u + v)}{\partial t^2} - c(u + \Delta v_2)$  при  $x = l$ .

Осадка стойки из-за поперечного изгиба

$$v = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (14.155)$$

Для поперечного прогиба стойки в первом приближении берем выражение

$$y(x, t) = X_1(x) S_1(t) = A_1 X(x) \cos pt. \quad (14.156)$$

Вертикальное смещение конца стойки

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} S_1^2 \int_0^l X_1'^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} A_1^2 (1 + \cos 2pt) \int_0^l X_1'^2 dx. \end{aligned}$$

Продольное перемещение стойки ищем в виде ( $\omega = 2p$ )

$$u(x, t) = \varphi(x) \sin \omega t + \psi(x) \cos \omega t.$$

Так как по условию «а»  $u = 0$  при  $x = 0$ , то в решении уравнения (14.154) для  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  необходимо взять следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= -C \operatorname{sh} \alpha_1 \eta \cos \alpha \eta + D \operatorname{ch} \alpha_1 \eta \sin \alpha \eta; \\ \psi(x) &= -D \operatorname{sh} \alpha_1 \eta \cos \alpha \eta - C \operatorname{ch} \alpha_1 \eta \sin \alpha \eta, \end{aligned} \right\} \quad (14.157)$$

$$\text{где } \mu_1 = \frac{\mu}{\omega}; \quad \alpha_1 = \frac{\beta}{\sqrt{2(1+\mu_1^2)}} \sqrt{\sqrt{1+\mu_1^2}-1};$$

$$\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{2(1+\mu_1^2)}} \sqrt{\sqrt{1+\mu_1^2}+1}.$$

После подстановки  $u, v$  в условие «б» на верхнем конце получим

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 n \varphi - (\varphi' - \xi \psi') &= 0; \\ \beta^2 n \psi - (\psi' + \xi \varphi') &= -\frac{1}{4} \beta^2 n A_1^2 \int_0^l X'^2 dx, \end{aligned} \right\} \quad (14.158)$$

$$\text{где обозначено } a^2 = \frac{E}{\rho}; \quad n = \frac{M}{\rho Fl} - \frac{cl}{EF\beta^2}; \quad \beta^2 = \frac{\omega^2 l^2}{a^2}; \quad \xi = \frac{\mu}{\omega EF}.$$

Удовлетворяя условиям для  $\eta = 1$ , получим следующие значения:

$$C = \frac{1}{4} \beta^2 \frac{nb_1}{\Delta} A^2 \int_0^l X'^2 dx; \quad D = -\frac{1}{4} \beta^2 n \frac{a_1}{\Delta} A^2 \int_0^l X'^2 dx,$$

$$\begin{aligned} \text{где } a_1 &= -\beta^2 n \operatorname{sh} \alpha_1 \cos \alpha + (\alpha_1 - \xi \alpha) \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha - (\alpha + \xi \alpha_1) \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \alpha; \\ b_1 &= \beta^2 n \operatorname{ch} \alpha_1 \sin \alpha - (\alpha_1 - \xi \alpha) \operatorname{sh} \alpha_1 \sin \alpha - (\alpha + \xi \alpha_1) \operatorname{ch} \alpha_1 \cos \alpha; \end{aligned} \quad (14.159)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2\alpha_1 - \cos 2\alpha) \beta^4 n^2 - [(\alpha_1 - \xi \alpha) \operatorname{sh} 2\alpha_1 + \\ &+ (\alpha + \xi \alpha_1) \sin 2\alpha] \beta^2 n + \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\alpha) \frac{(1 + \xi^2) \beta^2}{\sqrt{1 + \mu_1^2}}. \end{aligned}$$

Значения перемещения в точке  $\xi = 1$

$$u(1, t) = \{\varphi_1(1) \sin \omega t + \psi_1(1) \cos \omega t\} \frac{1}{4\Delta} \beta^2 n A^2 \int_0^l X'^2 dx. \quad (14.160)$$

В уравнении (14.160)  $\varphi_1(1)$  и  $\psi_1(1)$  имеют следующие значения:

$$\varphi_1(1) = -\frac{1}{2} (\alpha_1 - \mu \alpha) \sin 2\alpha + \frac{1}{2} (\alpha + \mu \alpha_1) \operatorname{sh} 2\alpha_1;$$

$$\begin{aligned} \psi_1(1) &= -\frac{\beta^2 n}{2} (\operatorname{ch} 2\alpha_1 - \cos 2\alpha) + \frac{1}{2} (\alpha_1 - \mu \alpha) \operatorname{sh} 2\alpha_1 + \\ &+ \frac{1}{2} (\alpha + \mu \alpha_1) \sin 2\alpha; \end{aligned}$$

Коэффициент при  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  будет иметь значение

$$P - kz - M \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = P - \frac{k}{4} A^2 \int_0^l X'^2 dx + \frac{\beta^4 n^2}{4\Delta} \cdot \frac{EF}{l} \left[ \varphi_1(1) \sin \omega t + \right. \\ \left. + \left( \psi_1(1) + \frac{\Delta}{\beta^2 n} \right) \cos \omega t \right] A^2 \int_0^l X'^2 dx. \quad (14.161)$$

После подстановки из формулы (14.156)

$y(x, t) = X(x) S(t) = X(x) (a \sin pt - b \cos pt)$   
в уравнение (14.152) и умножая на  $X(x) dx$  получим для определения  $S(t)$  после интегрирования такое уравнение:

$$S''(t) + p^2 S(t) = \cos pt \left\{ -b(p^2 - \omega_0^2) - a\omega_0^2 \left[ \mu_0 + A\mu_1 \gamma_3 \frac{l^4}{r^4} \operatorname{sign} X' + \right. \right. \\ \left. \left. + A^2 \mu_2 \gamma_4 \frac{l^4}{r^4} \right] - \omega_0^2 \frac{P_0}{P_{kp}} \left( 1 + \frac{q}{2} \right) b - \frac{\omega_0^2}{P_{kp}} \left( P - \frac{k}{4} A^2 v_1^2 \right) b + \right. \\ \left. + \frac{EF}{l} \cdot \frac{\beta^4 n^2 v_1^2}{8\Delta P_{kp}} \omega_0^2 A^2 \left[ \varphi_1(1) a - \left( 1 + \frac{\Delta}{\beta^2 n} \right) \psi_1(1) b \right] \right\} + \\ + \sin pt \left\{ a(p^2 - \omega_0^2) - \omega_0^2 b \left[ \mu_0 + A\mu_1 \gamma_3 \frac{l^4}{r^4} \operatorname{sign} X'' + \right. \right. \\ \left. \left. + A^2 \mu_2 \frac{l^4}{r^4} \gamma_4 \right] + \omega_0^2 \frac{P}{P_{kp}} a \left( 1 - \frac{q}{2} \right) + \frac{\omega_0^2}{P_{kp}} \left( P - \frac{k}{4} A^2 v_1^2 \right) a - \right. \\ \left. - \frac{\beta^4 n^2 \omega_0^2 v_1^2}{8\Delta P_{kp}} \cdot \frac{EF}{l} A^2 \left[ \varphi_1(1) b + \left( 1 + \frac{\Delta}{\beta^2 n} \right) \psi_1(1) a \right] \right\}. \quad (14.162)$$

Уравнения первого приближения будут

$$\frac{da}{dt} = -a \left\{ \omega_0^2 \left[ \mu_0 + \mu_1 \frac{l^4}{r^4} \gamma_3 A \operatorname{sign} X'' + \mu_2 \frac{l^4}{r^4} \gamma_4 A^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{EF}{l} \cdot \frac{\beta^4 n^2 v_1^2}{8\Delta P_{kp}} \omega_0^2 \varphi_1(1) A^2 \right\} - b \left\{ p^2 - \omega_0^2 + \frac{\omega_0^2 P_0}{P_{kp}} \left( 1 + \frac{q}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\omega_0^2}{P_{kp}} \left( P - \frac{k}{4} A^2 v_1^2 \gamma_1 \right) + \frac{EF}{l} \cdot \frac{\omega_0^2}{P_{kp}} v_1^2 \psi_1(1) \left( 1 + \frac{\Delta}{\beta^2 n} \right) A^2 \right\}; \\ \frac{db}{dt} = a \left\{ p^2 - \omega_0^2 + \frac{P}{P_{kp}} \omega_0^2 \left( 1 - \frac{q}{2} \right) + \frac{\omega_0^2}{P_{kp}} \left( P - \frac{k}{4} A^2 v_1^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{\beta^4 n^2}{8\Delta} \cdot \frac{EF}{l} \cdot \frac{\omega_0^2}{P_{kp}} v_1^2 \psi_1(1) \left( 1 + \frac{\Delta}{\beta^2 n} \right) A^2 \right\} - b \left\{ \omega_0^2 \left( \mu_0 + \mu_1 \frac{l^4}{r^4} \gamma_3 A \operatorname{sign} X'' + \right. \right. \\ \left. \left. + A^2 \mu_2 \frac{l^4}{r^4} \gamma_4 \right) + \frac{EF}{l} \cdot \frac{\omega_0^2}{P_{kp}} \cdot \frac{\beta^4 n^2}{8\Delta} v_1^2 \varphi_1(1) A^2 \right\}.$$



Определитель, составленный из коэффициентов при  $a$  и  $b$ , дает уравнения для определения установившейся амплитуды:

$$\begin{aligned} & \omega_0^4 \left\{ \left[ \mu_0 + \mu_1 \frac{l^4}{r^4} \gamma_3 A \operatorname{sign} X'' + \mu_2 A^2 \gamma_4 \right]^2 - \left( \frac{EF}{l} \right)^2 \frac{\beta^8 n^4}{64 \Delta^2} \times \right. \\ & \times \frac{v_1^4}{P_{кр}^2} \varphi_1^2(1) A^4 \left. \right\} + \left\{ \left[ p^2 - \omega_0^2 + \frac{P}{P_{кр}} \omega_0^2 + \omega_0^2 \frac{1}{P_{кр}} \left( P - \frac{k}{4} A^2 v_1^2 \right) \right]^2 - \right. \\ & \left. - \omega_0^4 \left[ \frac{P}{P_{кр}} \cdot \frac{q}{2} + \frac{EF}{l} \cdot \frac{\beta^4 n^2}{8 \Delta} v_1^2 \varphi_1(1) \left( 1 - \frac{\Delta}{\beta^2 l} \right) \right]^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (14.163)$$

## САМОВОЗБУЖДАЮЩИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ (АВТОКОЛЕБАНИЯ)

### Сущность явления

Помимо рассмотренных выше видов колебаний для консервативных систем, вибрационных и ротационных, во многих случаях в природе встречаются колебания, которые называются самовозбуждающимися колебаниями, или автоколебаниями.

При этом для консервативных систем существует бесчисленное количество периодических колебательных режимов, для самоколебательных систем — конечное число колебательных движений.

Основным признаком самоколебательной системы является то, что для поддержания стационарного режима в таких системах не нужно внешнего периодического воздействия, а незатухающие колебания поддерживаются источником энергии, дающим постоянное по времени воздействие, которое благодаря характеру (устройству) системы дает при колебаниях переменное воздействие, поддерживающее стационарные колебания.

Иногда рассматривают автоколебания как свободные колебания с отрицательным затуханием. В качестве примеров таких колебаний можно привести свисток или флейту, которые звучат под действием равномерного дутья, скрипичную струну, которая совершает колебательное движение за счет источника энергии непрерывного воздействия смычка, не имеющего периодического характера или непрерывно вращающегося диска.

Автоколебательной системой можно отчасти считать паровую машину, а также часы.

В часах регулятором хода является система баланс — спираль, т. е. твердое тело, которое качается около оси, проходящей через центр тяжести масс. В маятниковых часах маятник снабжен анкером (равноплечим рычагом), с которым связано ходовое колесо.

Колебательные движения баланса или маятника происходят за счет пополнения энергии в определенные моменты от спуска гирь или заведенной пружины.

Чтобы лучше пояснить сущность явления, остановимся на двух простых примерах.

## Колебания маятника, насаженного на вращающийся вал

Этот вопрос был рассмотрен выдающимся ученым Н. Е. Жуковским. Такой вид колебаний можно рассматривать как простейшую модель ряда более сложных автоколебаний.

На вал, вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , насажена втулка маятника. Если угловая скорость вращения маятника будет  $\frac{d\varphi}{dt}$ , то скорость скольжения  $\Omega = \omega - \frac{d\varphi}{dt}$ . Уравнение вращательных колебаний маятника:

$$J\Psi'' + b\Psi' + mgl\Psi = M(\omega - \varphi'), \quad (14.164)$$

где  $m$  — масса маятника;  $b\Psi'$  и  $M\Omega$  — моменты сил трения.

Положение равновесия маятника  $\Psi = \Psi_0$ ,  $\Psi' = 0$ :

$$mgl\Psi_0 = M\omega; \quad \Psi_0 = \frac{M\omega}{mgl}.$$

Рассматриваем малые колебания около положения равновесия  $\Psi = \Psi_0 + \varphi$  и разлагаем в ряд момент

$$M(\omega - \varphi') = M(\omega) - c\varphi' + d\varphi'^2 - \dots,$$

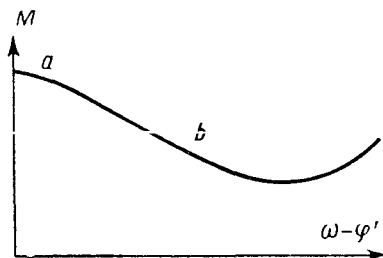


Рис. 14.11

где  $C = \frac{\partial M(\omega - \varphi')}{\partial (\omega - \varphi')}$ .

Тогда уравнение (14.164) принимает вид

$$J\varphi'' + b\varphi' + mgl\varphi = M(\omega - \varphi') - M(\omega) = -c\varphi'$$

или

$$J\varphi'' + (b + c)\varphi' + mgl\varphi = 0. \quad (14.165)$$

Зная зависимость между моментом сил трения и относительной скоростью скольжения  $\omega - \varphi'$  (рис. 14.11), можно выяснить характер движения. Если  $c = 0$ , то подвес «идеальный» и характеристика сил трения не зависит от  $\omega - \varphi'$ .

Если  $\omega$  выбрана так, что  $c = \frac{\partial M}{\partial (\omega - \varphi')} < 0$  (участок  $a - b$ ), то коэффициент  $c$  соответствует отрицательному затуханию. Если  $|c| > b$ , то коэффициент затухания  $b + c$  будет отрицательным и появятся нарастающие колебания. При движении маятника и вала в одном направлении  $\omega - \varphi'$  меньше, чем при обратном движении вала, т. е. в первом случае сила трения больше, чем при движении маятника в обратном направлении, причем она способствует движению маятника и вала в одном направлении и противодействует при их обратном движении.

Энергия, которая передается от вала к маятнику (работа сил трения), при движении маятника по часовой стрелке больше энер-

гин, отнимаемой у маятника работой сил трения при обратном движении.

Поэтому в течение одного периода колебаний энергия передается маятнику и увеличивает его амплитуду. Такое положение будет до тех пор, пока колебание маятника не начнет происходить в области нелинейного участка и не установится равновесие полного баланса энергии, т. е. при некоторой амплитуде в системе возникнут устойчивые периодические колебания и система будет самоколебательной. Таким образом, мы имеем дело с отрицательным затуханием и переход к автоколебаниям зависит от закона изменения  $c$ , т. е. закона изменения крутизны характеристики. Теперь ясно, почему эти колебания называются самовозбуждающимися. Переход к отрицательному затуханию создает неустойчивое положение равновесия в системе и в ней процесс установится самоколебательный.

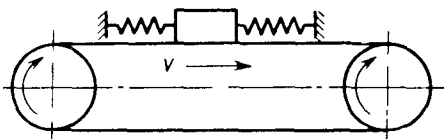


Рис. 14.12

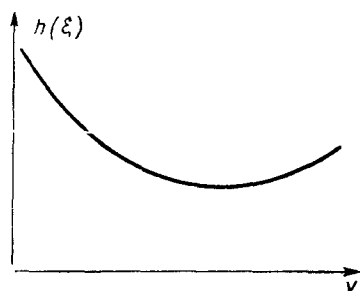


Рис. 14.13

В качестве простого примера самовозбуждающихся колебаний можно привести колебания ползуна на ремне, движущемся со скоростью  $v$  (рис. 14.12). Ползун связан с неподвижными опорами с помощью пружин.

При движении ремня между ползуном и ремнем возникает сила трения, которая направлена против движения. Величина этой силы зависит от скорости скольжения ползуна относительно ремня (рис. 14.13):

$$\xi = \frac{\partial x}{\partial t} - v_0,$$

где  $x$  — расстояние ползуна от неподвижной точки.

Уравнение движения имеет вид

$$m\xi'' + \varphi(x' - v_0) + k\xi = 0. \quad (14.166)$$

Можно изменить начало отсчета, выбрав за начало координат точку статического равновесия, для которой  $\varphi(-v_0) + k\xi = 0$ , т. е.  $\xi_1 = -\frac{1}{k}\varphi(-v_0)$ . Следовательно, координата  $y = \xi + \frac{1}{k}\varphi(-v_0)$ . После замены переменных уравнение (14.166) принимает вид

$$m y'' + h(y') + ky = 0, \quad (14.167)$$

где  $h(y') = \varphi(y' - v_0) - \varphi(-v_0)$ .

Производная функция  $h(y')$  имеет отрицательное значение, если абсолютная величина трения будет уменьшаться при возрастании  $v$ . Это обстоятельство, как отмечалось выше, является причиной самоколебательного процесса.

Таких примеров самоколебательных процессов можно привести достаточно много. Эти колебания могут возникнуть в муфтах фрикционных передач, в подшипниках при наличии зазора при сухом трении, в тормозных башмаках при перемещении по бандажу колеса вагона при включении тормоза, при работе станков и т. д.

С явлениями самовозбуждающихся колебаний связаны колебания цепных мостов, явление флаттера крыла самолета и лопаток турбомашин. Колебания в этих случаях возникают за счет перехода энергии потока в энергию колебательного движения.

### Автоколебания ротора при наличии гироскопических моментов [52]

Рассмотрим более сложный случай автоколебаний вращающегося ротора, где под автоколебанием неуравновешенных роторов понимается самовозбуждение колебаний с частотами, близкими к собственным, которые возникают помимо вынужденных колебаний.

Простейшая система — невесомый и консольный вал с отбалансированным диском (рис. 14.14).

Обозначим:

$u(x, t), v(x, t)$  — перемещения точек оси вала в неподвижной системе координат;

$\eta, \zeta$  — координаты центра тяжести диска  $\eta = u(l, t); \zeta = v(l, t);$

$\alpha_1 = u'(l, t), \beta_1 = v'(l, t).$

С помощью величин  $\eta, \zeta, \alpha_1, \beta_1$  вторые производные по  $x$  от  $u$  и  $v$  в произвольном сечении вала при пренебрежении нелинейными упругими силами представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} u''(x, t) &= \frac{2}{l^2} (2\alpha_1 l - 3\eta) + \frac{6}{l^3} (2\eta - \alpha_1 l)(l - x); \\ v''(x, t) &= \frac{2}{l^2} (2\beta_1 l - 3\zeta) + \frac{6}{l^3} (2\zeta - \beta_1 l)(l - x). \end{aligned} \right\} (14.168)$$

Внутреннее трение в материале, являющееся одной из причин автоколебаний роторов за критической скоростью, учтем следующим образом:

$$\sigma = E \left( e + h \frac{\partial e}{\partial t} \right); \quad h = \frac{\delta}{\Omega^2 - \nu} (\nu \approx 0), \quad (14.169)$$

где  $\sigma$  — суммарное напряжение с учетом сил внутреннего трения;  
 $e$  — относительная деформация;  
 $\Omega$  — частота циклов изменения деформации;  
 $\delta$  — коэффициент внутреннего трения.

При этом предполагается, что  $v = v(\Omega)$ , а  $\delta$  зависит от амплитуды  $e_0$  и среднего значения  $e_m$  относительной деформации. По Боку,  $v = 0$ .

Относительное удлинение в точке поперечного сечения вала с координатами  $y$  и  $z$  (рис. 14.15)

$$e = -y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Так как при угловой скорости вращения вала

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega z \text{ и } \frac{\partial z}{\partial t} = \omega y,$$

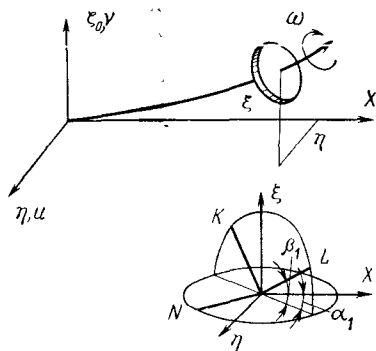


Рис. 14.14

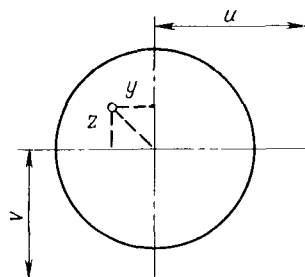


Рис. 14.15

то

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -y \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \omega \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - z \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} - \omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right),$$

следовательно,

$$\sigma = E \left[ -y \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + h\omega \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} - h\omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right]. \quad (14.170)$$

Пользуясь этим выражением, получим в рассматриваемом сечении вала проекции изгибающего момента  $M_T$  и  $M_B$  и перере-

зывающих сил  $Q_G$  и  $Q_B$  на горизонтальную и вертикальную плоскости:

$$\left. \begin{aligned} M_G &= - \int_F \sigma_y dF = EJ [u'' + h(\dot{u}'' + \omega v'')]; \\ M_B &= - \int_F \sigma_z dF = EJ [v'' + h(\dot{v}'' - \omega u'')]; \\ Q_G &= - \frac{\partial M_G}{\partial x} = - EJ [u''' + h(\dot{u}''' + \omega v''')]; \\ Q_B &= - \frac{\partial M_B}{\partial x} = - EJ [v''' + h(\dot{v}''' - \omega u''')]. \end{aligned} \right\} (14.171)$$

На вал со стороны диска действуют момент  $M$  и сила  $R$ , проекции которых на координатные оси равны:

$$\begin{aligned} J_G = M_G(l) &= EJ \frac{2}{l^2} [(2\alpha_1 l - 3\eta) + \\ &+ h(2\dot{\alpha}_1 l - 3\dot{\eta}) + h\omega(2\beta_1 l - 3\zeta)]; \\ J_B = M_B(l) &= EJ \frac{2}{l^2} [(2\beta_1 l - 3\zeta) + \\ &+ h(2\dot{\beta}_1 l - 3\dot{\zeta}) - h\omega(2\alpha_1 l - 3\eta)]; \\ R_G = Q_G(l) &= EJ \frac{6}{l^3} [(2\eta - \alpha_1 l) + \\ &+ h(2\dot{\eta} - 2\dot{\alpha}_1 l) + h\omega^2(2\zeta + \beta_1 l)]; \\ R_B = Q_B(l) &= EJ \frac{6}{l^3} [(2\zeta - \beta_1 l) + \\ &+ h(2\dot{\zeta} - 2\dot{\beta}_1 l) - h\omega(2\eta + \alpha_1 l)]. \end{aligned}$$

Силы внешнего трения принимаются пропорциональными скорости движения центра тяжести диска, причем коэффициент пропорциональности — квадратичная функция его перемещения.

Дифференциальные уравнения движения центра тяжести диска будут

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\eta} &= -R_G - m\dot{\eta}[\chi_0 + \chi_1(\eta^2 + \zeta^2)]; \\ m\ddot{\zeta} &= -R_B - m\dot{\zeta}[\chi_0 + \chi_1(\eta^2 + \zeta^2)]. \end{aligned} \right\} (14.172)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta} + a_1\dot{\eta} - a_2\alpha_1 &= \mu F_1; \\ \ddot{\zeta} + a_1\dot{\zeta} - a_2\beta_1 &= \mu F_2, \end{aligned} \right\} (14.173)$$

где

$$\begin{aligned} \mu F_1 &= -ha_1\dot{\eta} + ha_2\dot{\alpha}_1 - h\omega a_1\dot{\zeta} + \\ &+ h\omega a_2\beta_1 - \eta\chi_1(\eta^2 + \zeta^2) - \eta\chi_0; \\ \mu F_2 &= -ha_1\dot{\zeta} + ha_2\dot{\beta}_1 + h\omega a_1\dot{\eta} - \\ &- h\omega a_2\alpha_1 - \zeta\chi_1(\eta^2 + \zeta^2) - \zeta\chi_0; \\ a_1 &= \frac{12EJ}{ml^3}; \quad b_1 a_2 = \frac{6EJ}{ml^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим движение диска относительно центра тяжести (рис. 14.14, 14.15); углы Резаля  $\alpha$  и  $\beta$  связаны с производными  $\alpha_1 = u'(l, t)$  и  $\beta_1 = v(l, t)$  зависимостями

$$\beta_1 = \frac{1g\beta}{\cos\alpha}; \quad 1g\alpha = \alpha_1. \quad (14.174)$$

Отсюда

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{1 + \alpha_1^2} \dot{\alpha}_1; \quad \dot{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}} \left( \dot{\beta}_1 - \frac{\alpha_1 \beta_1 \dot{\alpha} - \beta_1^2 \dot{\beta}}{1 + \alpha_1^2 + \beta_1^2} \right). \quad (14.175)$$

Используем закон моментов в относительном движении диска по отношению к его центру тяжести. Проекции угловой скорости диска на оси Резаля  $N, K, L$

$$\omega_N = -\dot{\beta}; \quad \omega_K = \alpha \cos\beta; \quad \omega_L = \dot{\alpha} \sin\beta + \dot{\varphi}. \quad (14.176)$$

Проекции кинетического момента диска, взятого относительно центра тяжести диска,

$$L_K = J_1 \dot{\alpha} \cos\beta; \quad L_N = -J_1 \dot{\beta}; \quad L_L = J_0 (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin\beta), \quad (14.177)$$

где  $J_1$  и  $J_0$  — экваториальный и полярный моменты инерции диска.

Проектируя этот момент на неподвижные оси  $u$  и  $v$ , получим

$$\left. \begin{aligned} L_u &= L_N \cos\alpha + (L_L \cos\beta - L_K \sin\beta) \sin\alpha; \\ L_v &= L_K \cos\beta + L_L \sin\beta. \end{aligned} \right\} \quad (14.178)$$

Согласно обобщенному уравнению Эйлера для оси  $L$  и выражений (14.176) и (14.177)  $\frac{dL_L}{dt} = 0$ . Из уравнения моментов для осей  $u$  и  $v$

$$\frac{dL_u}{dt} = M_B; \quad \frac{dL_v}{dt} = -M_G$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} + b_1 \dot{\beta}_1 - b_2 \eta + b_3 \alpha_1 &= \mu F_3; \\ \ddot{\beta}_1 - b_1 \dot{\alpha}_1 - b_2 \zeta + b_3 \beta_1 &= \mu F_4. \end{aligned} \right\} \quad (14.179)$$

где

$$b_1 = \frac{J_0 \omega}{J_1}; \quad b_2 = \frac{6EJ}{J_1 l^2}; \quad b_3 = \frac{4EJ}{J_1 l};$$

$$\mu F_3 = \left( \frac{1}{2} b_1 \dot{\beta}_1 + \ddot{\alpha}_1 \right) (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + (b_1 \beta_1 + 2\dot{\alpha}_1) (\alpha_1 \dot{\alpha}_1 + \beta_1 \dot{\beta}_1) -$$

$$- h (b_3 \dot{\alpha}_1 - b_2 \dot{\eta}) - h\omega (b_3 \beta_1 - b_2 \zeta);$$

$$\mu F_4 = \left( -\frac{1}{2} b_1 \dot{\alpha}_1 + \ddot{\beta}_1 \right) (\alpha_1^2 + \beta_1^2) - (b_1 \alpha_1 - 2\dot{\beta}_1) (\alpha_1 \dot{\alpha}_1 + \beta_1 \dot{\beta}_1) -$$

$$- h (b_3 \dot{\beta}_1 - b_2 \dot{\zeta}) + h\omega (b_3 \alpha_1 - b_2 \eta).$$

В правых частях  $\mu F_3$  и  $\mu F_4$  опущены величины выше третьего порядка малости.

После подстановки  $\eta = x_1$ ;  $\dot{\eta} = x_2$ ;  $\zeta = x_3$ ;  $\dot{\zeta} = x_4$ ;  $\alpha_1 = x_5$ ;  $\dot{\alpha}_1 = x_6$ ;  $\beta_1 = x_7$ ;  $\dot{\beta}_1 = x_8$  уравнения (14.173) и (14.179) приводим к так называемому каноническому виду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; & \dot{x}_5 &= x_6; \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_1 + a_2 x_2 + \mu F_1; & \dot{x}_6 &= b_2 x_1 - b_3 x_5 - b_1 x_8 + \mu F_3; \\ \dot{x}_3 &= x_4; & \dot{x}_7 &= x_8; \\ \dot{x}_4 &= -a_2 x_3 + a_2 x_7 + \mu F_2; & \dot{x}_8 &= b_2 x_3 + b_1 x_6 - b_3 x_7 + \mu F_4, \end{aligned} \right\} \quad (14.180)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 F_1 &= -h(a_1 x_2 - a_2 x_6) - h\omega(a_1 x_3 - a_2 x_7) - \\ &\quad - \chi_0 x_2 - \chi_1 x_2(x_1^2 + x_3^2); \\ \mu F_2 &= -h(a_1 x_4 - a_2 x_8) + h\omega(a_1 x_1 - a_2 x_5) - \\ &\quad - \chi_0 x_4 - \chi_1 x_4(x_1^2 + x_3^2); \\ \mu F_3 &= \left(\frac{1}{2} b_1 x_8 + \frac{dx_6}{dt}\right)(x_5^2 + x_7^2) + \\ &\quad + (b_1 x_7 + 2x_6)(x_5 x_6 + x_7 x_8) - \\ &\quad - h(b_3 x_6 - b_2 x_2) - h\omega(b_3 x_7 - b_2 x_3); \\ \mu F_4 &= \left(-\frac{1}{2} b_1 x_6 + \frac{dx_8}{dt}\right)(x_5^2 + x_7^2) + \\ &\quad + (2x_8 - b_1 x_5)(x_5 x_6 - x_7 x_8) - \\ &\quad - h(b_3 x_8 - b_2 x_4) + h\omega(b_3 x_5 - b_2 x_1). \end{aligned} \right\} \quad (14.181)$$

Для нахождения стационарных решений нелинейной гироскопической системы (14.180) в первом приближении применяем асимптотический метод. Приводим систему (14.180) к стандартному виду. Для этого определяем собственные частоты и собственные функции порождающей системы и с ней сопряженной.

Порождающая система [т. е. система (14.180) при  $\mu = 0$ ] при введении комплексных переменных

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + ix_3; & z_2 &= x_2 + ix_4; \\ z_3 &= x_5 + ix_7; & z_4 &= x_6 + ix_8. \end{aligned}$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2; & \dot{z}_2 &= -a_1 z_1 + a_2 z_3; & \dot{z}_3 &= z_4; \\ \dot{z}_4 &= b_2 z_1 + ib_1 z_4 - b_3 z_3. \end{aligned}$$



Полагая  $z_j = B_j \exp i\lambda t$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), получим

$$\left. \begin{aligned} i\lambda B_1 - B_2 &= 0; \\ a_1 B_1 + i\lambda B_2 - a_2 B_3 &= 0; \\ i\lambda B_3 - B_4 &= 0; \\ -b_2 B_1 + B_3 b_3 + (\lambda - b_1) i B_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14.182)$$

откуда выводим фундаментальное уравнение

$$f_1(\lambda) = \lambda^4 - b_1 \lambda^3 - (a_1 + b_3) \lambda^2 + a_1 b_1 \lambda + a_1 b_3 - a_2 b_2 = 0. \quad (14.183)$$

Уравнение (14.183) имеет два положительных корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и два отрицательных  $-\lambda_3$  и  $\lambda_4$ . При этом  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются частотами прямой прецессии, а  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  — частотами обратной прецессии.

Из системы уравнений (14.182)

$$\begin{aligned} B_2 &= i\lambda_k B_1; & B_3 &= \frac{1}{a_2} (a_1 - \lambda_k^2) B_1; \\ B_4 &= \frac{i\lambda_k}{a_2} (a_1 - \lambda_k^2) B_1. \end{aligned} \quad (14.184)$$

Отделяя вещественные части функции  $z_j$  от мнимых, получим для каждой собственной частоты  $\lambda_k$  два частных независимых решения порождающей системы  $\varphi_{sk}(\lambda_k t)$  и  $\varphi_{sk}^*(\lambda_k t)$  ( $s = 1, \dots, \dots, 8; k = 1, 2, 3, 4$ ). Сопряженная система для уравнений (14.180)

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_1 y_2 - b_2 y_6; & \dot{y}_5 &= -a_2 y_2 + b_3 y_6; \\ \dot{y}_2 &= -y_1; & \dot{y}_6 &= -y_5 - b_1 y_8; \\ \dot{y}_3 &= a_1 y_4 - b_2 y_8; & \dot{y}_7 &= -a_2 y_4 + b_3 y_8; \\ \dot{y}_4 &= -y_3; & \dot{y}_8 &= -b_1 y_6 - y_7 \end{aligned} \right\} \quad (14.185)$$

подстановкой

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + iy_3; & z_2 &= y_2 + iy_4; & z_3 &= y_5 + iy_7; \\ z_4 &= y_6 + iy_8 \end{aligned}$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= a_1 z_2 - b_2 z_4; & \dot{z}_2 &= -z_1; \\ \dot{z}_3 &= -a_2 z_2 + b_3 z_4; & \dot{z}_4 &= -z_2 + ib_1 z_4. \end{aligned} \quad (14.186)$$

Полагая  $z_j = C_j \exp(i\lambda t)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), получим

$$\left. \begin{aligned} i\lambda C_1 - a_1 C_2 + b_2 C_4 &= 0; \\ C_1 + i\lambda C_2 &= 0; \\ a_2 C_2 + i\lambda C_3 - b_3 C_4 &= 0; \\ C_3 + i(\lambda - b_1) C_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.187)$$

Фундаментальное уравнение системы (14.187) совпадает с системой (14.182). Из уравнения (14.187)

$$C_2 = \frac{i}{\lambda} C_1; \quad C_3 = \frac{(\lambda - b_1)(a_1 - \lambda^2)}{b_2 \lambda} C_1;$$

$$C_4 = \frac{i}{b_2 \lambda} (a_1 - \lambda^2) C_1. \quad (14.188)$$

Таким же образом определяются частные решения  $\psi_{sk}$  и  $\psi_{sk}^*$  ( $s = 1, \dots, 8; k = 1, \dots, 4$ ) сопряженной системы (14.185).

Для приведения исходной системы (14.180) к стандартному виду введем новые переменные  $A_i(t), \theta_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) подстановкой

$$x_s = \sum_{k=1}^4 A_k \varphi_{sk}(\theta_k) \quad (t = 1, \dots, 8) \quad (14.189)$$

или в развернутом виде

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=1}^4 A_i \cos \theta_i; \quad x_2 = - \sum_{i=1}^4 \lambda_i A_i \sin \theta_i; \quad x_3 = \sum_{i=1}^4 A_i \sin \theta_i; \\ x_4 &= \sum \lambda_i A_i \cos \theta_i; \quad x_5 = \frac{1}{a_2} (a_1 - \lambda_1^2) A_i \sin \theta_i; \\ x_6 &= - \frac{1}{a_2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i (a_1 - \lambda_i^2) A_i \sin \theta_i; \\ x_7 &= \frac{1}{a_2} \sum_{i=1}^4 (a_1 - \lambda_i^2) A_i \sin \theta_i; \\ x_8 &= \frac{1}{a_2} \sum \lambda_i (a_1 - \lambda_i^2) A_i \sin \theta_i. \end{aligned} \right\} (14.190)$$

Это дает

$$\sum_{i=1}^4 \varphi_{si}(\theta_i) \frac{dA_i}{dt} - \sum_{i=1}^4 \varphi_{si}^* \left( \frac{dA_i}{dt} - \lambda_i \right) A_i = \mu \bar{F}_s. \quad (14.191)$$

Функции  $\mu \bar{F}_s$  равны нулю для  $s = 1, 3, 5, 7$  и  $\frac{\mu F_s}{2}$  для  $s = 2, 4, 6, 8$ ;  $\frac{\mu F_s}{2}$  — почти периодические функции аргументов  $\theta_k$ , которые получаются заменой в равенствах (14.181)  $x_s$  их значениями (14.189).

Функции  $\varphi_{si}, \varphi_{si}^*, \psi_{si}, \psi_{si}^*$  удовлетворяют условиям ортогональности

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^8 \varphi_{si} \psi_{sj} &= \sum_{s=1}^8 \varphi_{si}^* \psi_{sj} = \sum_{s=1}^8 \varphi_{si} \psi_{sj}^* = \sum \varphi_{si}^* \psi_{sj}^* = 0 \quad (i \neq j); \\ \sum_{i=1}^8 \varphi_{si} \psi_{sj}^* &= \sum \varphi_{si}^* \psi_{sj} = 0 \quad (i \neq j). \end{aligned} \right\} (14.192)$$

Не равные нулю суммы определяются по формулам

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \sum_{s=1}^8 \varphi_{si} \psi_{si} = \sum_{s=1}^8 \varphi_{si}^* \psi_{si}^* = \\ &= 2 + \frac{1}{a_2 b_2 \lambda_i} (a_1 - \lambda_i^2) (2\lambda_i - b_1). \end{aligned} \quad (14.193)$$

Умножая уравнение с номером  $s$  системы (14.191) последовательно на  $\psi_{sk}$  и  $\psi_{sk}^*$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) и суммируя по  $s$ , получим исходную нелинейную гироскопическую систему (14.191) в стандартном виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta_k \frac{dA_k}{dt} &= \mu \sum_{i=1}^4 F_i \psi_{2i, k}(\theta_k); \\ \frac{d\theta_k}{dt} &= \lambda_k - \frac{\mu}{\Delta_k} \cdot \frac{1}{A_k} \sum_{i=1}^4 F_i \psi_{2i, k}^*(\theta_k). \end{aligned} \right\} \quad (14.194)$$

Ограничимся отысканием стационарных решений уравнений (14.180) для нерезонансного случая.

Применяя к системе (14.180) преобразования Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, сделаем замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} A_k &= y_k + \mu U(t, y, \theta); \\ \theta_k &= \lambda_k t + \theta_k + \mu V(t, y, \theta) \end{aligned} \quad (14.195)$$

так, чтобы производные новых переменных  $y$  и  $\theta$  по времени были бы равны

$$\left. \begin{aligned} \Delta_k \frac{dy_k}{dt} &= \mu Y_k(y_1, \dots, y_4) + \mu^2 Y_k^*(t, y, \theta); \\ \Delta_k \frac{d\theta_k}{dt} &= \mu Z_k(y_1, \dots, y_4) + \mu^2 Z_k^*(t, y, \theta). \end{aligned} \right\} \quad (14.196)$$

При этом функции  $U_k, V_k, Y_k^*, Z_k^*$  должны быть почти периодическими по  $t$  и периодическими по  $\theta$  с периодом  $2\pi$ . В нерезонансном случае функции  $Y_k$  и  $Z_k$  в связи с этим определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} Y_k &= \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{i=1}^4 F_i(y, \lambda_k t + \theta) \psi_{2i, k}(\lambda_k t + \theta) dt; \\ Z_k &= \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{y_k} \int_0^t \sum_{i=1}^4 F_i(y, \lambda_k t + \theta) \psi_{2i, k}^*(\lambda_k t + \theta) dt \end{aligned} \right\} \quad (14.197)$$

или после преобразований

$$\left. \begin{aligned} Y_k &= -a_{k0}y_k - a_{kk}y_k^3 - \sum_{i \neq k} a_{ki}y_k y_i^2; \\ Z_k &= \frac{(a_1 - \lambda_k^2)^2}{2a_2^3 b_2} \left\{ (a_1 - \lambda_k^2)^2 \left( 2\lambda_k - \frac{J_0}{J_1} \omega \right) y_k^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=1}^4 y_i^2 (a_1 - \lambda_i^2)^2 \left[ \lambda_k \left( 2\lambda_k - \frac{J_0}{J_1} \omega \right) + \right. \\ &\left. \left. + \lambda_i \left( 2\lambda_i - \frac{J_0}{J_1} \omega \right) \right] \right\}, \end{aligned} \right\} (14.198)$$

где

$$\begin{aligned} a_{k0} &= h\lambda_k(\lambda_k - \omega) \left[ 1 + \frac{(a_1 - \lambda_k^2)^2}{a_2 b_2} \left( 1 - \frac{J_0}{J_1} \cdot \frac{\omega}{\lambda_k} \right) \right] + \chi_0; \\ a_{kk} &= \chi_1 + \frac{h}{a_2^3 b_2} (a_1 - \lambda_k^2)^4 (\lambda_k - \omega) \left( \lambda_k - \frac{J_0}{J_1} \omega \right); \\ a_{ki} &= \frac{A_{ki}}{\lambda_k}; \quad A_{ki} = A_{ik} = \chi_1 (\lambda_k + \lambda_i) + \\ &+ \frac{h}{a_2^3 b_2} (a_1 - \lambda_k^2)^2 (a_1 - \lambda_i^2)^2 \left[ \lambda_k (\lambda_k - \omega) \left( \lambda_k - \frac{J_0}{J_1} \omega \right) + \right. \\ &\left. + \lambda_i (\lambda_i - \omega) \left( \lambda_i - \frac{J_0}{J_1} \omega \right) \right]. \end{aligned}$$

Точные уравнения (14.196) заменим уравнениями первого приближения

$$\left. \begin{aligned} \Delta_k \frac{dy_k}{dt} &= \mu Y_k(y_1, \dots, y_4); \\ \Delta_k \frac{d\theta_k}{dt} &= \mu Z_k(y_1, \dots, y_4). \end{aligned} \right\} (14.199)$$

Полагая в них  $Y_k(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$ , найдем в первом приближении стационарные значения  $y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0$  амплитуд почти периодических колебаний, частоты которых будут

$$\lambda_k + \frac{1}{\Delta_k} Z_k(y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0). \quad (14.200)$$

Уравнения  $Y_k(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$  допускают несколько систем стационарных решений:

- 1)  $y_1^0 = y_2^0 = y_3^0 = y_4^0 = 0$ , автоколебания отсутствуют;
- 2) одночастотный автоколебательный режим

$$(y_{k1}^0) = -\frac{a_{k10}}{a_{k_1 k_1}}; \quad y_{k2}^0 = y_{k3}^0 = y_{k4}^0 = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4);$$

здесь коэффициенты  $a_{k,0}$  и  $a_{k_1 k_1}$  должны быть разных знаков, так как  $a_{30}, a_{40}, a_{33}, a_{44}$  положительны, то могут возникнуть лишь два одночастотных колебательных режима

$$y_1^2 = -\frac{a_{10}}{a_{11}}; \quad y_2 = y_3 = y_4 = 0;$$

$$y_2^2 = -\frac{a_{20}}{a_{22}}; \quad a_1 = a_3 = a_4 = 0;$$

3) многочастотные автоколебательные режимы (двух-, трех-, четырехчастотные); так, при двухчастотном автоколебательном режиме

$$(y_{k_1}^0)^2 = -\frac{1}{D_2} \left| \frac{a_{k_1 0} a_{k_1 k_2}}{a_{k_2 0} a_{k_2 k_2}} \right|; \quad (y_{k_2}^0)^2 = -\frac{1}{D_2} \left| \frac{a_{k_1 k_1} a_{k_1 0}}{a_{k_2 k_1} a_{k_2 0}} \right|;$$

$$y_{k_3} = y_{k_4} = 0.$$

Аналогично определяются квадраты амплитуд для остальных режимов.

Необходимо определить области существования стационарных режимов и исследовать устойчивость в этих областях.

Частные производные функции

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Y_k}{\partial y_k} &= -a_{k0} - 3a_{kk}y_k^2 - \sum_{i \neq k} a_{ki}y_i^2; \\ \frac{\partial Y_k}{\partial y_i} &= -2a_{ki}y_k y_i \quad (i \neq k). \end{aligned} \right\} \quad (14.201)$$

Уравнения в вариациях для системы (14.199) будут

$$\Delta_k \frac{d\omega_k}{dt} = \mu \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial Y_k}{\partial y_i} \right)_0 \omega_i, \quad (14.202)$$

где  $\omega_i$  — малые возмущения;

$\left( \frac{\partial Y_k}{\partial y_i} \right)_0$  вычисляется при стационарных значениях аргументов  $y_k^0$ .

При отсутствии автоколебаний и при условии, что  $y_1^0 = y_2^0 = y_3^0 = y_4^0 = 0$ , уравнения в вариациях принимают такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 \frac{d\omega_1}{dt} &= -a_{10}\omega_1; \quad \Delta_2 \frac{d\omega_2}{dt} = -a_{20}\omega_2; \\ \Delta_3 \frac{d\omega_3}{dt} &= -a_{30}\omega_3; \quad \Delta_4 \frac{d\omega_4}{dt} = -a_{40}\omega_4. \end{aligned} \right\} \quad (14.203)$$

Так как  $a_{30}$  и  $a_{40}$  всегда положительны и, кроме того,  $a_{20} > a_{10}$ , то единственным условием устойчивости прямолинейной формы вала будет  $a_{10} > 0$  или

$$\delta\lambda_1(\omega) \operatorname{sign} [\lambda_1(\omega) - \omega] \left[ 1 + \frac{[a_1 - \lambda_1^2(\omega)]^2}{a_2 b_2} \left( 1 - \frac{J_0}{J_1} \cdot \frac{\omega}{\lambda_1(\omega)} \right) \right] + \chi_0 > 0. \quad (14.204)$$

Отметим, что наименьший корень уравнения  $a_{10}(\omega) = 0$ ,  $\omega = \omega_0 > \lambda_1$ , так как  $a_{10}(\lambda_1) > 0$ . При  $\omega < \omega_0$  нулевое решение устойчиво.

Установим условия устойчивости одночастотного автоколебательного режима

$$y_1^2 = -\frac{a_{10}}{a_{11}}; \quad y_2 = y_3 = y_4 = 0. \quad (14.205)$$

Уравнения в вариациях для этого случая будут

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 \frac{dw_1}{dt} &= 2a_{10}\omega_1; \quad \Delta_2 \frac{dw_2}{dt} = \left(-a_{20} + \frac{a_{21}a_{10}}{a_{11}}\right)\omega_2; \\ \Delta_3 \frac{dw_3}{dt} &= \left(-a_{30} + \frac{a_{31}a_{10}}{a_{11}}\right)\omega_3; \quad \Delta_4 \frac{dw_4}{dt} = \left(-a_{40} + \frac{a_{41}a_{10}}{a_{11}}\right)\omega_4. \end{aligned} \right\} \quad (14.206)$$

Амплитуда  $y_1$  принимает вещественное значение при  $a_{10} < 0$  и  $a_{11} > 0$  или при  $a_{10} > 0$  и  $a_{11} < 0$ . При  $a_{10} > 0$  движение неустойчиво, так как  $\frac{dw_1}{dt} > 0$ . Поэтому решение (14.205) следует рассматривать в интервале значений угловой скорости  $\omega$ , при которых одновременно  $a_{10} < 0$  и  $a_{11} > 0$ . Условие  $a_{10} > 0$  соблюдается для  $\omega > \omega_0$ . Если  $J_0 > J_1$ , то при  $\omega > \omega_0 > \lambda_1$  всегда  $a_{11} > 0$ . Следовательно, уравнение (14.205) возможно на всем диапазоне угловых скоростей  $\omega > \omega_0$ . Первое условие устойчивости (14.205) заведомо выполняется; для устойчивости рассматриваемого одночастотного режима должны быть соблюдены неравенства

$$\begin{aligned} -a_{20}a_{11} + a_{21}a_{10} &< 0; \quad -a_{30}a_{11} + a_{31}a_{10} < 0; \\ -a_{40}a_{11} + a_{41}a_{10} &< 0. \end{aligned}$$

Дальнейшие подробности можно найти в работе [52].

## ГЛАВА 15

### ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС

Основные детали современных быстроходных машин, в частности паровых и газовых турбин, двигателей внутреннего сгорания (рабочие лопатки, диски, роторы, коленчатые валы), во многих случаях работают в условиях, при которых эксплуатационные обороты превышают резонансные или критические значения. Работа этих машин во время пуска и остановки сопровождается прохождением через резонанс. При этом могут возникать значительные колебания, момент наступления и амплитуда которых зависят от скорости прохождения через резонансную зону.

Изучение нестационарных процессов имеет большое значение для решения ряда практических задач электротехники, радиотехники и акустики. Вопрос о поведении систем в переходном режиме возникает в связи с созданием анализаторов спектра, локационных установок с частотной модуляцией, а также в связи с частотным способом управления асинхронным двигателем.

Таким образом, в целом ряде областей техники выявляется необходимость в расчете переходных процессов, среди которых наибольшее внимание уделяется прохождению через резонанс.

Задача о переходе через резонанс линейной системы с одной степенью свободы при линейном изменении частоты возмущающей силы рассматривалась Ф. М. Льюнсом [137] и затем многими авторами как в линейной, так и нелинейной постановке. Медленный переход через резонанс нелинейных систем изучался Ю. А. Митропольским [64] с помощью методов нелинейной механики Крылова—Боголюбова, а также В. О. Кононенко [46] и др. Рядом авторов рассматривались вопросы взаимодействия колебательных систем с источником энергии органической мощности.

В данной главе приводятся решения ряда задач о прохождении через резонанс систем с одной и любым количеством степеней свободы, выполненные нами совместно с Е. Г. Голоскоковым [21, 106, 108].

**ПРОХОЖДЕНИЕ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ  
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ**

**Уравнение движения и его интеграл при линейной  
скорости прохождения**

Предположим, что мгновенная частота возмущающей силы изменяется с течением времени по линейному закону, т. е. что источник энергии обладает неограниченной мощностью.

В таком случае задача определения вынужденных колебаний при переходе через резонанс с учетом линейного трения, пропорционального скорости деформации, сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\ddot{\varphi} + \mu\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = P(t) \cos\left(\frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0\right), \quad (15.1)$$

где  $P(t)$  — амплитуда возмущающей силы;

$\varepsilon$  — скорость изменения частоты возмущающей силы;

$\delta_0$  — начальная фаза;

$\mu$  — коэффициент затухания;

$\omega_0$  — частота свободных колебаний системы;

$\varphi(t)$  — отклонение системы от положения равновесия;

$\varepsilon t$  — мгновенная частота.

Вместо  $\varphi$  удобно рассматривать комплексную переменную  $\psi$ , связанную с  $\varphi$  зависимостью  $\varphi = \operatorname{Re} \psi$  и удовлетворяющую уравнению

$$\ddot{\psi} + \mu\dot{\psi} + \omega_0^2\psi = P(t)e^{-i\left(\frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0\right)} \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (15.2)$$

При начальных условиях  $\psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0$  из выражения (15.2) имеем

$$\psi = \frac{1}{\omega} \int_0^t P(\tau) \exp\left[-i\left(\frac{\varepsilon\tau^2}{2} + \delta_0\right) - \frac{\mu}{2}(t - \tau)\right] \sin \omega(t - \tau) d\tau, \quad (15.3)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\mu^2}{4}}$ .

Выражая в формуле (15.3) синус через показательные функции и вынося за знак интеграла множители, не зависящие от  $\tau$ , получим

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2i\omega} \exp\left[\left(i\omega - \frac{\mu}{2}\right)t - i\delta_0\right] \times \\ &\times \int_0^t P(\tau) \exp\left[-i\frac{\varepsilon\tau^2}{2} - \left(i\omega - \frac{\mu}{2}\right)\tau\right] d\tau - \\ &- \frac{1}{2i\omega} \exp\left[-\left(i\omega - \frac{\mu}{2}\right)t - i\delta_0\right] \times \\ &\times \int_0^t P(\tau) \exp\left[-i\frac{\varepsilon\tau^2}{2} + \left(i\omega - \frac{\mu}{2}\right)\tau\right] d\tau. \end{aligned} \quad (15.4)$$



Произведем замену переменной  $\tau$  в первом и во втором интегралах, введя соответственно

$$v = \frac{i-1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( \varepsilon\tau + \omega + i\frac{\mu}{2} \right); \quad u = \frac{1-i}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( \varepsilon\tau - \omega + i\frac{\mu}{2} \right); \quad (15.5)$$

тогда

$$\psi = \frac{i-1}{2\omega\sqrt{\varepsilon}} \left[ e^{-v^2} \int_{v_0}^v P e^{v^2} dv + e^{-u^2} \int_{u_0}^u P e^{u^2} du \right] \exp \left[ -i \left( \frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0 \right) \right]. \quad (15.6)$$

Здесь  $u_0$  и  $v_0$  — значения  $u$  и  $v$  при  $\tau = 0$ . Обозначая множитель перед  $\exp \left[ -i \left( \frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0 \right) \right]$  в формуле (15.6) через

$$A(t) = \frac{i-1}{2\omega\sqrt{\varepsilon}} \left[ e^{-v^2} \int_{v_0}^v P e^{v^2} dv + e^{-u^2} \int_{u_0}^u P e^{u^2} du \right], \quad (15.7)$$

представим решение уравнения (15.1) в виде

$$\varphi = |A| \cos \left( \frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0 + \delta \right), \quad (15.8)$$

где  $\delta(t) = -\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A}$ ;

$\operatorname{Re} A$ ,  $\operatorname{Im} A$  — действительная и мнимая части функции  $A(t)$ .

Из выражения (15.8) следует, что  $|A|$  является огибающей кривой колебательного процесса, т. е. законом изменения амплитуды вынужденных колебаний рассматриваемой системы с переменной частотой.

Как было принято, мгновенная частота возмущающей силы меняется по закону  $p = \varepsilon t$ . Отсюда следует, что изменение переменной  $t$  от 0 до  $\infty$  соответствует росту частоты, а изменение  $t$  от  $-\infty$  до 0 — ее убыванию.

Рассмотрим эти случаи.

### Возрастание частоты $p$

Пусть  $p(t) = \operatorname{const}$ . Тогда для определения величины  $A(t)$  необходимо вычислить интеграл вида

$$\int_{z_0}^z e^{z^2} dz. \quad (15.9)$$

Функция  $e^{z^2}$  является аналитической в области изменения комплексной переменной. В таком случае к интегралу (15.9) применима теорема Коши, согласно которой указанный интеграл полностью определяется точками  $z_0$  и  $z$  и не зависит от пути интегрирования.

Введем в рассмотрение интеграл вероятностей от комплексного аргумента [37, 99]

$$W(z) = e^{-z^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{z^2} dz \right), \quad (15.10)$$

отсюда

$$e^{-z^2} \int_z^{i\infty} e^{z^2} dz = i \frac{\sqrt{\pi}}{2} W(z). \quad (15.11)$$

Используя выражение (15.11), получим следующее выражение:

$$A = \frac{(1+i)P}{4\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \left[ W(u) + W(v) - W(u_0) e^{u_0^2 - u^2} - W(v_0) e^{v_0^2 - v^2} \right]. \quad (15.12)$$

Здесь последние два члена в квадратных скобках, умноженные на  $\exp \left[ -i \left( \frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta \right) \right]$ , представляют собой свободные затухающие колебания системы, вызванные приложением нагрузки в начальный момент. В этом легко убедиться, проделав несложные выкладки.

Введем следующие обозначения:

$$A_{cm} = \frac{P}{\omega^2} \text{ — статическое отклонение системы } (\omega \approx \omega_0);$$

$A_p$  — амплитуда колебаний при установившемся резонансе;

$$\lambda^0 = \frac{\omega}{\mu} = \frac{A_p}{A_{cm}} \text{ — динамический коэффициент при установившемся резонансе;}$$

$$\lambda = \frac{|A|}{A_{cm}} \text{ — динамический коэффициент при вынужденных колебаниях с переменной частотой;}$$

$$h = \frac{\mu}{2\sqrt{\varepsilon}} \text{ — безразмерный параметр.}$$

Тогда в соответствии с формулой (15.12) выражение для амплитуды вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы при переходе через резонанс будет иметь вид ( $0 \leq t < \infty$ )

$$|A| = A_{cm} \lambda^0 h \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left| W(u) + W(v) - W(u_0) e^{u_0^2 - u^2} - W(v_0) e^{v_0^2 - v^2} \right|. \quad (15.13)$$

Отсюда динамический коэффициент в нестационарном процессе

$$\lambda = \lambda^0 h \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left| W(u) + W(v) - W(u_0) e^{u_0^2 - u^2} - W(v_0) e^{v_0^2 - v^2} \right|. \quad (15.14)$$

Как будет видно из дальнейшего, целесообразно ввести так называемый относительный динамический коэффициент при переходе через резонанс

$$\beta = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{|A|}{A_p}, \quad (15.15)$$

который представляет собой отношение динамических коэффициентов при неустановившемся и стационарном резонансах или отношение соответствующих амплитуд.

Структура формулы для  $\beta$  позволяет построить достаточно простые графики для определения максимальных амплитуд колебаний по заданным безразмерным параметрам  $\lambda^0$  и  $h$ .

### Изменение амплитуды силы по закону $P(t) = q\varepsilon^2 t^2$

Выше мы считали амплитуду возмущающей силы постоянной. Практический интерес представляет рассмотрение случая, когда эта амплитуда зависит от времени. Так, например, когда действует центробежная сила от неуравновешенной массы, то амплитуда возмущающей силы пропорциональна квадрату угловой скорости вращения, т. е. квадрату частоты возмущения.

Пренебрегая касательной составляющей силы инерции при линейном законе изменения частоты, можно амплитуду возмущающей силы представить в виде

$$P(t) = q\varepsilon^2 t^2, \quad (15.16)$$

где  $q$  — коэффициент пропорциональности.

Отсюда видно, что  $q = A_{cm}$  при  $\varepsilon t = \omega_0$ , т. е. что  $q$  — является статическим отклонением системы от положения равновесия под действием силы  $P = q\omega_0^2$ , соответствующей моменту резонанса.

Из выражений (15.5) и (15.16) следует, что

$$P(\tau) = 2q i \varepsilon (u - u_0)^2 = 2q i \varepsilon (v - v_0)^2. \quad (15.17)$$

Подставляя уравнение (15.17) в (15.7), получим

$$A = -q \sqrt{\varepsilon} \frac{1+i}{\omega} \left[ e^{-u^2} \int_{u_0}^u (u - u_0)^2 e^{u^2} du + e^{-v^2} \int_{v_0}^v (v - v_0)^2 e^{v^2} dv \right]. \quad (15.18)$$

Выполняя в уравнении (15.18) интегрирование по частям и используя интеграл вероятностей от комплексного аргумента, придем к выражению

$$A = (i-1) q \frac{\sqrt{\pi\varepsilon}}{4\omega} \left\{ (2u_0^2 - 1) [W(u) - W(u_0) e^{u_0^2 - u}] + \right. \\ \left. + \frac{2iu_0}{\sqrt{\pi}} e^{u_0^2 - u} + (2v_0^2 - 1) [W(v) - W(v_0) e^{v_0^2 - v}] + \right. \\ \left. + \frac{2iv_0}{\sqrt{\pi}} e^{v_0^2 - v} + 2 \frac{1+i}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \omega \right\}; \quad (15.19)$$

здесь, как и выше, слагаемые, содержащие множители  $\exp(u_0^2 - u^2)$  и  $\exp(v_0^2 - v^2)$  умноженные на  $\exp\left[-i\left(\frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0\right)\right]$ , представляют затухающие свободные колебания рассматриваемой системы.

Если пренебречь затухающими колебаниями, то при достаточно малых отношениях  $\frac{\varepsilon}{\omega^2}$  и  $\frac{\mu}{\omega}$  можно показать, что колебания около резонанса близки к тем, которые были бы вызваны возмущающей силой с постоянной амплитудой  $P = q\omega^2$ .

Действительно, так как

$$u_0 = \frac{1-i}{2\sqrt{\varepsilon}} \left(i \frac{\mu}{2} - \omega\right); \quad v_0 = \frac{1-i}{2\sqrt{\varepsilon}} \left(i \frac{\mu}{2} + \omega\right),$$

то из формулы (15.19) имеем

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1+i)P}{4\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \left\{ \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{i\omega^2} - i \frac{\mu}{\omega} - \frac{\mu^2}{4\omega^2} \right] W(u) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{i\omega^2} + i \frac{\mu}{\omega} + \frac{\mu^2}{4\omega^2} \right] W(v) \right\} - q \approx \\ &\approx \frac{(i+1)P}{4\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} [W(u) + W(v)], \end{aligned} \quad (15.20)$$

что совпадает с выражением (15.12), если и там пренебречь затухающими колебаниями.

Таким образом, задача определения амплитуды колебаний по формулам (15.13) и (15.19) сводится к вычислению интеграла вероятностей от комплексного аргумента, достаточно подробные таблицы которого имеются в литературе [37, 99]. Применение указанных таблиц исключает трудоемкое численное интегрирование и быстро приводит к результату.

Для того чтобы воспользоваться таблицами в работах [37, 99], необходимо иметь некоторые вспомогательные формулы. Получим эти формулы.

Переменные  $u$  и  $v$  — комплексные величины:

$$u = x_1 + iy_1; \quad v = x_2 + iy_2. \quad (15.21)$$

На основании этого и (15.5) получаем

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda^0 h \left( \xi - 1 + \frac{1}{2\lambda^0} \right); & y_1 &= \lambda^0 h \left( 1 - \xi + \frac{1}{2\lambda^0} \right); \\ x_2 &= -\lambda^0 h \left( 1 + \xi + \frac{1}{2\lambda^0} \right); & y_2 &= \lambda^0 h \left( 1 + \xi - \frac{1}{2\lambda^0} \right), \end{aligned} \right\} \quad (15.22)$$

где  $\xi = \frac{\varepsilon t}{\omega}$ .

Для сокращения вычислений формулы (15.22) приведем к виду

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda^0 h (\xi - 1) + \frac{h}{2}; & y_1 &= h - x_1; \\ x_2 &= -(2\lambda^0 h + x_1); & y_2 &= -(x_2 + h). \end{aligned} \right\} \quad (15.23)$$

По значениям  $x_1, y_1, x_2, y_2$  при помощи таблиц в работе [37] находим функции  $\bar{W}(u)$  и  $\bar{W}(v)$ . При этом

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}(z) &= U(x, y) + iV(x, y); \\ z &= x + iy. \end{aligned} \right\} \quad (15.24)$$

В таблицах интеграла вероятностей [37] значения  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  приведены только для  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$ . В нашем случае, т. е. при изучении нестационарных процессов,  $x$  и  $y$  могут быть как положительными, так и отрицательными. Поэтому необходимо иметь формулы перехода от табулированных значений функции  $\bar{W}(z)$  при  $x > 0$  и  $y > 0$  к значениям  $\bar{W}(z)$  для  $x < 0$  и  $y < 0$ .

Из выражения (15.10) вытекает функциональное соотношение

$$\bar{W}(-z) = 2e^{-z^2} - \bar{W}(z). \quad (15.25)$$

Далее, в силу того, что функция  $\bar{W}(iy)$  вещественна в точках, расположенных симметрично относительно мнимой оси, функция принимает комплексно-сопряженные значения

$$\bar{W}(-x + iy) = \overline{\bar{W}(z)}, \quad \bar{W}(x - iy) = \overline{\bar{W}(-z)}, \quad z = x + iy. \quad (15.26)$$

Отсюда с учетом уравнений (15.24) и (15.25) получаем искомые формулы:

$$\begin{aligned} U(x, -y) &= U(-x, -y); & V(x, -y) &= -V(-x, -y); \\ U(-x, y) &= U(x, y); & V(-x, y) &= -V(x, y); \\ U(-x, -y) &= 2e^{y^2 - x^2} \cos 2xy - U(x, y); \\ V(-x, -y) &= -2e^{y^2 - x^2} \sin 2xy - V(x, y), \end{aligned} \quad (15.27)$$

где  $x > 0$  и  $y > 0$ .

Вместо  $\bar{W}(z)$  можно пользоваться другой табулированной функцией из работы [37]:

$$W_1(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{z^2} dz. \quad (15.28)$$

Решения, полученные выше, легко могут быть выражены через  $W_1(z)$ . Формулы (15.27) распространяются и на функцию  $W_1(z)$  при учете соотношения

$$W(z) = e^{-z^2} + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} W_1(z). \quad (15.29)$$

### Убывание частоты $p$

В отличие от предыдущего случая здесь  $t$  меняется от  $-\infty$  до 0, а решение при нулевых начальных условиях должно удовлетворять равенствам

$$\psi = 0, \quad \dot{\psi} = 0 \quad \text{для } t \rightarrow -\infty; \quad (15.30)$$

тогда выражение для  $\psi$  будет

$$\psi = \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t P(\tau) \exp \left[ -i \left( \frac{\varepsilon \tau^2}{2} + \delta_0 \right) - \frac{\mu}{2} (t - \tau) \right] \sin \omega (t - \tau) d\tau \quad (15.31)$$

при  $t_0 \rightarrow -\infty$ .

Полагая амплитуду возмущающей силы постоянной, окончательный вид решения получим из выражения (15.12), что сократит количество выкладок. Для этого в выражении (15.12) нижние пределы интегрирования  $u_0$  и  $v_0$  заменим соответственно на  $u_\infty$  и  $v_\infty$ , которые являются значениями переменных  $u, v$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Тогда получим выражение для комплексной амплитуды колебаний ( $-\infty < t \leq 0$ ):

$$A = \frac{(1+i)P}{4\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \left[ W(u) + W(v) - W(u_\infty) e^{u_\infty^2 - u^2} - W(v_\infty) e^{v_\infty^2 - v^2} \right]; \quad (15.32)$$

здесь  $u$  и  $v$  по-прежнему определяются по формулам (15.5), но при  $-\infty < t < 0$ .

Выполним предельный переход, т. е. найдем значение интеграла вероятностей, когда  $t \rightarrow -\infty$ . При  $|z| > 15$  действительная и мнимая части функции  $w(z)$  могут быть вычислены по следующим асимптотическим формулам, справедливым для  $x > 0$  и  $y > 0$  [99]:

$$\left. \begin{aligned} U(x, y) &= \alpha y \left[ \frac{1}{(x-c)^2 + y^2} + \frac{1}{(x+c)^2 + y^2} \right]; \\ V(x, y) &= \alpha \left[ \frac{x-c}{(x-c)^2 + y^2} + \frac{x+c}{(x+c)^2 + y^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (15.33)$$

где  $\alpha = 0,28209$ ,  $c = 0,70711$ .

Отсюда для  $x \rightarrow \infty$  и  $y \rightarrow \infty$

$$\lim U(x, y) = 0; \quad \lim V(x, y) = 0. \quad (15.34)$$

Когда  $t \rightarrow -\infty$ , то из формул (15.22) следует, что  $x_1 \rightarrow -\infty$ ,  $x_2 \rightarrow \infty$ ,  $y_1 \rightarrow \infty$ ,  $y_2 \rightarrow -\infty$ . На основании этого с учетом соотношений (15.25) и (15.33) имеем

$$\left. \begin{aligned} \lim W(u) &= W(u_\infty) = 0; \\ \lim e^{v^2} W(v) &= e^{v_\infty^2} W(v_\infty) = 2. \end{aligned} \right\} \quad (15.35)$$

Подстановка значения (15.35) в формулу (15.32) приводит к выражению

$$A(t) = \frac{(1-i)P}{4\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} [W(u) + W(v) - 2e^{v^2}] \quad (-\infty < t \leq 0), \quad (15.36)$$

которое с помощью уравнения (15.25) дает формулу для относительного динамического коэффициента

$$\beta = h \sqrt{\frac{\pi}{2}} |W(u) - W(-v)| \quad (-\infty < t \leq 0), \quad (15.37)$$

которая в дальнейшем, при вычислениях и анализе результатов, будет являться основной.

### Пропорциональность амплитуды возмущающей силы квадрату убывающей частоты

Получим решение для случая, когда амплитуда возмущающей силы пропорциональна квадрату частоты

$$P(t) = q(p_0 - \varepsilon t)^2; \quad (15.38)$$

здесь  $p_0$  — частота, с которой происходили колебания рассматриваемой системы до момента времени  $t = 0$ . В этом случае способ получения решения, использованный при  $P = \text{const}$ , оказывается непригодным, так как  $t$  изменяется не в бесконечном интервале, а от 0 до  $t_1 = \frac{p_0}{\varepsilon}$ . В момент времени  $t_1$  действие внешней нагрузки прекращается и частота ее равна нулю.

Итак, дифференциальное уравнение колебаний системы имеет вид

$$\ddot{\psi} + \mu\dot{\psi} + \omega_0^2\psi = P(t) \exp \left[ i p_0 t - i \frac{\varepsilon t^2}{2} + i\delta \right]. \quad (15.39)$$

Решение уравнения (15.39):

$$\begin{aligned} \psi = \psi_1 + \frac{1}{\omega} \int_0^t P(\tau) \exp \left[ i \left( p_0 \tau - \frac{\varepsilon \tau^2}{2} + \delta_0 \right) - \right. \\ \left. - \frac{\mu}{2} (t - \tau) \right] \sin \omega (t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (15.40)$$

где  $\psi_1$  — решение соответствующего однородного уравнения. Постоянные интегрирования, входящие в выражение для  $\psi_1$ , определяются из начальных условий

$$\psi = \psi_0; \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (15.41)$$

Пусть до момента времени  $t = 0$  система совершала установившиеся вынужденные колебания с частотой  $p_0$  в соответствии с дифференциальным уравнением

$$\ddot{\psi}_b + \mu \dot{\psi}_b + \omega_0^2 \psi_b = q p_0^2 e^{i(p_0 t + \delta_0)}. \quad (15.42)$$

Отсюда

$$\psi_b = \frac{q p_0^2}{\omega_0^2 - p_0^2 - i p_0 \mu} e^{i(p_0 t + \delta_0)}, \quad (15.43)$$

и, следовательно, необходимые начальные значения функции будут

$$\psi_0 = \frac{q p_0^2 e^{i(p_0 t' + \delta_0)}}{\omega_0^2 - p_0^2 - i p_0 \mu}; \quad \dot{\psi}_0 = i p_0 \psi_0, \quad (15.44)$$

где  $t'$  — момент времени, начиная с которого убывает частота возмущающей силы и который соответствует моменту времени  $t = 0$  при новом отсчете времени.

Выражение для  $\psi_1(t)$  имеет вид

$$\psi_1 = e^{-\frac{\mu t}{2}} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t). \quad (15.45)$$

Из начальных условий (15.41) и (15.44) получаем

$$c_1 = \psi_0; \quad c_2 = \frac{\psi_0}{\omega} \left( \frac{\mu}{2} + i p_0 \right). \quad (15.46)$$

Дальнейшие выкладки аналогичны проведенным выше.

Заменяя в уравнении (15.40) синус через показательные функции, вводим новые переменные

$$\begin{aligned} u &= \frac{1-i}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( \varepsilon \tau - \omega - p_0 + i \frac{\mu}{2} \right); \\ v &= \frac{i-1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( \varepsilon \tau + \omega - p_0 + i \frac{\mu}{2} \right), \end{aligned} \quad (15.47)$$

которые при  $\tau = 0$  будут

$$u_0 = \frac{1-i}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( i \frac{\mu}{2} - \omega - p_0 \right); \quad v_0 = \frac{i-1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( i \frac{\mu}{2} + \omega - p_0 \right), \quad (15.48)$$

и преобразуем формулу (15.38)

$$P(\tau) = q(p_0 - \varepsilon \tau)^2 = 2iq\varepsilon(u - u_1)^2 = 2iq\varepsilon(v - v_1)^2, \quad (15.49)$$

где

$$u_1 = \frac{1-i}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( i \frac{\mu}{2} - \omega \right); \quad v_1 = \frac{i-1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( i \frac{\mu}{2} + \omega \right). \quad (15.50)$$



Тогда выражение (15.40) перепишем в виде

$$\psi = \psi_1 - \frac{(1+i)q\sqrt{\varepsilon}}{\omega} \left[ e^{-u^2} \int_{u_0}^u (u-u_1)^2 e^{u^2} du + e^{-v^2} \int_{v_0}^v (v-v_1)^2 e^{v^2} dv \right] \exp \left[ i \left( p_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0 \right) \right]. \quad (15.51)$$

Окончательное выражение для вынужденных колебаний системы при переходе через резонанс, когда амплитуда возмущающей силы пропорциональна квадрату убывающей частоты, получим, введя интеграл вероятностей (15.10)

$$\begin{aligned} \psi = \psi_1(t) + (i-1) \frac{\sqrt{\pi\varepsilon}}{4\omega} q \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{\pi}} 2\omega + \right. \\ \left. + (2u_1^2 - 1) [W(u) - W(u_0) e^{u_0^2 - u^2}] + (2v_1^2 - 1) [W(v) - W(v_0) e^{v_0^2 - v^2}] + \right. \\ \left. + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} [(2u_1 - u_0) e^{u_0^2 - u^2} + (2v_1 - v_0) e^{v_0^2 - v^2}] \right\} \times \\ \times \exp \left[ i \left( p_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta \right) \right]. \quad (15.52) \end{aligned}$$

Определив модуль  $|\psi|$ , мы тем самым найдем огибающую кривой колебательного процесса, или амплитуду.

Здесь также справедливо утверждение о том, что при  $\frac{\varepsilon}{\omega^2} \ll 1$  и  $\frac{\mu}{\omega} \ll 1$  колебания будут близки к тем, которые были бы вызваны возмущающей силой с постоянной амплитудой.

Необходимые для вычислений формулы (15.22) в этом случае принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{h}{2} - \lambda^0 h (1 + \xi); & y_1 &= \frac{h}{2} + \lambda^0 h (1 + \xi); \\ x_2 &= -\frac{h}{2} + \lambda^0 h (1 - \xi); & y_2 &= -\frac{h}{2} + \lambda^0 h (1 - \xi), \end{aligned} \right\} \quad (15.53)$$

где  $\xi = \frac{p_0 - \varepsilon t}{\omega}$ .

Отсюда находят действительную и мнимую части комплексных величин  $u_0$ ,  $v_0$  и  $u_1$ ,  $v_1$  соответственно при  $\xi = \frac{p_0}{\omega}$  и  $\xi = 0$ .

### Решение задачи при учете сил трения в комплексной форме

Переход через резонанс системы с одной степенью свободы может быть рассмотрен при учете затухания в комплексной форме, что дает независимость петли гистерезиса от частоты колебаний [87, 148].

Дифференциальное уравнение колебаний под действием произвольной силы  $F(t)$  имеет вид

$$m\ddot{\zeta} + c \left(1 \pm i \frac{\psi_1}{2\pi}\right) \dot{\zeta} = F(t), \quad (15.54)$$

где  $m, c$  — масса и жесткость системы;

$\psi_1$  — коэффициент поглощения энергии колебаний.

Для интегрирования уравнения (15.54) применяем операционный метод. Изображение функции  $\xi(t)$  при нулевых начальных условиях имеет вид

$$\zeta(p) = \frac{1}{m} \cdot \frac{F_1(p)}{p^2 + \omega_0^2 \left(1 \pm i \frac{\psi_1}{2\pi}\right)}; \quad (15.55)$$

здесь

$$\zeta(p) \div \rightarrow \zeta(t); \quad F_1(p) \div \rightarrow F(t).$$

Полюсами функции (15.55) являются

$$\begin{aligned} p_1 &= \omega_0 \left(-\frac{\psi_1}{4\pi} + i\right); & \bar{p}_1 &= -\omega_0 \left(\frac{\psi_1}{4\pi} + i\right); \\ p_2 &= \omega_0 \left(\frac{\psi_1}{4\pi} + i\right); & \bar{p}_2 &= \omega_0 \left(\frac{\psi_1}{4\pi} - i\right), \end{aligned} \quad (15.56)$$

из которых два ( $p_2$  и  $\bar{p}_2$ ) не имеют физического смысла, так как они приводят не к затуханию колебаний, а к их увеличению. Эти полюсы мы не будем учитывать. Теорема свертывания дает искомого решение

$$\zeta(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t F(\tau) e^{-\frac{\psi_1\omega_0}{4\pi}(t-\tau)} \sin \omega_0(t-\tau) d\tau; \quad (15.57)$$

отсюда следует, что при  $\mu = \frac{\psi_1}{2\pi} \omega_0$  и  $\omega \approx \omega_0$  результат учета затухания по Е. С. Сорокину совпадает с гипотезой Фохта.

В случае системы с  $n$  степенями свободы удобнее использовать комплексный модуль упругости.

### Максимальные динамические коэффициенты при переходе через резонанс

Ниже приводятся графики максимальных значений при нестационарном переходе через резонанс. В связи с построением этих графиков сделаем некоторые замечания, основанные на результатах вычислений.

При возрастании частоты возмущающей силы модуль функции  $W(u)$  значительно больше, чем  $|W(v)|$ . С ростом произведения  $\lambda^{\circ}h$  величина  $W(v)$  убывает и становится пренебрежимо малой.

При убывании частоты  $p$ , наоборот,  $|W(-v)| \gg |W(v)|$ ; учитывая это, представим выражение (15.37) для относительного динамического коэффициента  $\beta$  в виде

$$\beta = (1 + \alpha) \beta^0, \quad (15.58)$$

где

$$\beta^0 = h \sqrt{\frac{\pi}{2}} |W(-v)|, \quad (15.59)$$

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta^0} - 1 = \frac{|W(u) - W(-v)|}{|W(-v)|} - 1 \quad -\infty < t \leq 0. \quad (15.60)$$

В силу отмеченного выше для достаточно больших значений коэффициента  $\alpha$  является малой величиной по сравнению с единицей и, следовательно,  $\beta \approx \beta^0$ . Значение частоты возмущающей

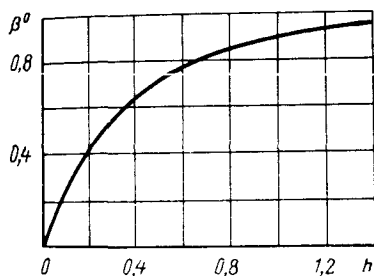


Рис. 15.1

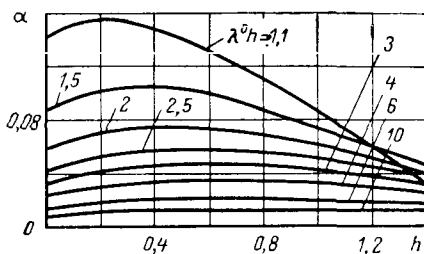


Рис. 15.2

силы, при которой достигается максимальная амплитуда колебаний, хорошо определяется приближенной формулой А. М. Каца [39], которая в наших обозначениях имеет вид

$$\xi_m = \frac{p}{\omega} = 1 \pm \frac{1,0854}{\lambda^0 h (1 + 0,28h)^2}, \quad (15.61)$$

где знак «плюс» соответствует возрастанию, а «минус» — убыванию частоты  $p$ .

Так как при выбеге  $\xi \leq 0$ , то, подставляя

$$\xi = \frac{1,0854}{\lambda^0 h (1 + 0,28h)^2} - 1 \quad (15.62)$$

в выражение для  $v$  (15.21), замечаем, что  $\beta^0$ , соответствующее максимуму амплитуды колебаний, зависит только от одного параметра  $h$ . Это дает возможность построить график коэффициента  $\beta^0$  как функции одной переменной  $h$ , а не двух  $\lambda^0$  и  $h$ , что упрощает задачу. Переменная же  $u$ , а вместе с ней и  $\alpha$  зависят от  $\lambda^0$  и  $h$ .

На рис. 15.1 и 15.2 приведены графики  $\beta^0$  и  $\alpha$  и соответствующие максимумам амплитуд колебаний при выбеге системы, когда амплитуда возмущающей силы является постоянной вели-

чиной. Для нахождения максимального значения относительного динамического коэффициента при убывании частоты и постоянной амплитуде возмущающей силы необходимо воспользоваться формулой

$$\beta = (1 + \alpha) \beta^0 \quad (15.63)$$

и графиками (рис. 15.1 и 15.2), из которых по заданным  $\lambda^0$  и  $h$  определяются величины  $\alpha$  и  $\beta$ . Как следует из рис. 15.2, уже при  $\lambda^0 h > 6$  можно принять  $\beta = \beta^0$ . При  $h > 1,4$  коэффициент  $\beta$

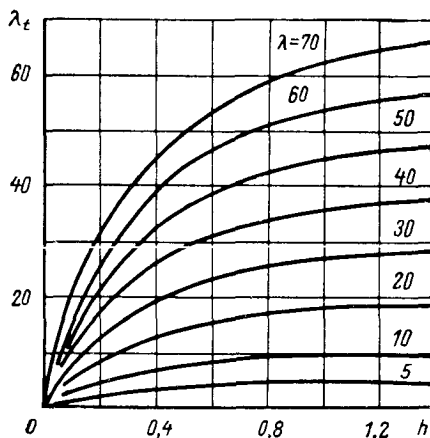


Рис. 15.3

близок к единице, и в этом случае не имеет смысла рассматривать нестационарный процесс.

Случай, когда  $\lambda^0 h < 1,1$ , в практике маловероятен, а если и возможен, то наибольшая

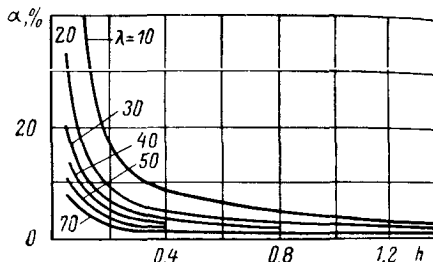


Рис. 15.4

амплитуда достигается при  $\xi = 0$ , и ее легко вычислить по формуле

$$|A(t)| = A_{cm} \lambda^0 h \sqrt{\frac{\pi}{2}} |W(u_0) - W(-v_0)|. \quad (15.63')$$

На рис. 15.3 приведены графики динамического коэффициента

$$\lambda_t = \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \left| \frac{4(1+i)}{\sqrt{\pi}} + \frac{2u_0^2 - 1}{\lambda^0 h} W(u) + \frac{2v_0^2 - 1}{\lambda^0 h} W(v) \right|, \quad (15.64)$$

когда амплитуда возмущающей силы пропорциональна квадрату возрастающей частоты.

На рис. 15.4 представлены для этого же случая кривые поправочного коэффициента  $\alpha_t$ , который позволяет вычислить относительный динамический коэффициент  $\beta_t = \frac{\lambda_t}{\lambda^0}$ , воспользовавшись формулой

$$\beta_t = (1 + \alpha_t) \beta^0. \quad (15.65)$$

Итак, при  $\lambda^0 \leq 70$  коэффициент  $\lambda_t$  может быть определен по рис. 15.3 или по рис. 15.1 и 15.4 ( $h \geq 0,1$ ) с помощью формулы

(15.65). Когда  $\lambda^0 > 70$  и  $h \geq 0,1$ , коэффициент близок к нулю, и в этом случае можно положить  $\lambda_\lambda = \lambda^0 \beta$ .

Сделаем некоторые выводы из приведенных графиков. Для этого построим ряд кривых  $\lambda$ , как функции  $\mu$  (рис. 15.5). Графики наглядно показывают, что решение без учета затухания ( $\mu = 0$ ) всегда дает завышенные значения. Только в случае систем с достаточно малым затуханием и при сравнительно больших скоростях это решение дает приемлемые результаты, т. е. незначительно отличается от решений для  $\mu \neq 0$ .

Коэффициент  $\lambda$ , вычисленный без учета затухания, для системы с большим затуханием, проходящей через резонанс с малой скоростью  $\varepsilon$ , может превышать в несколько раз даже динамический коэффициент  $\lambda^0$  при установившемся резонансе, что является абсурдом. Следовательно, пренебрежение затуханием в расчетах переходных процессов не всегда допустимо.

С ростом  $\mu$  влияние скорости  $\varepsilon$ , оказываемое на  $\lambda$ , становится все менее существенным. В области больших  $\mu$  коэффициенты  $\lambda$  и  $\lambda^0$  мало отличаются один от другого, особенно для сравнительно медленного прохождения через резонанс.

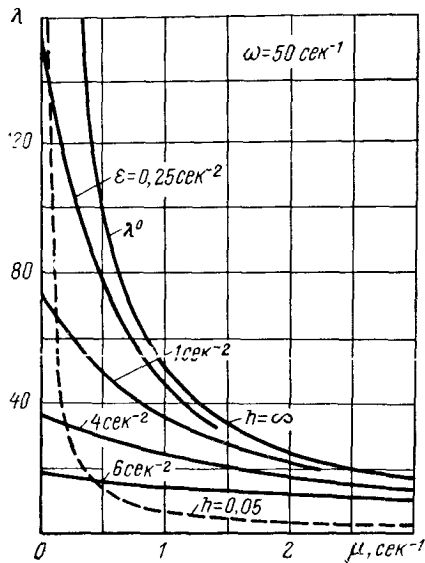


Рис. 15.5

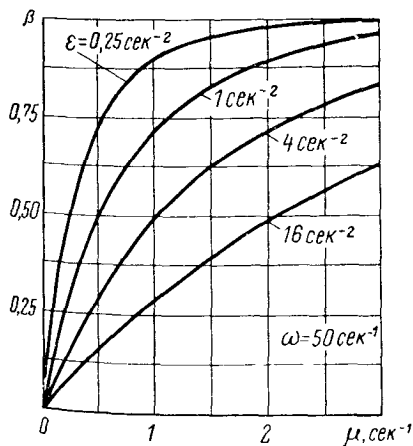


Рис. 15.6

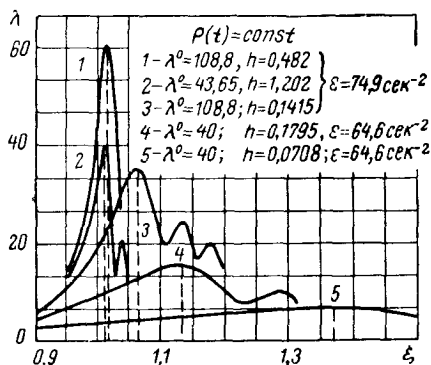


Рис. 15.7

Так, например, при  $h > 1,4\lambda = \lambda^0$  с точностью до 5%. Следовательно, при

$$\mu > 2,8 \sqrt{\varepsilon} \quad (15.66)$$

можно пренебречь изменением частоты возмущающей силы и вместо нестационарного процесса рассматривать стационарный.

При

$$\mu < 0,1 \sqrt{\varepsilon} \quad (15.67)$$

в нестационарном процессе можно пренебречь затуханием, что приведет к ошибке, не превышающей 10%. На рис. 15.5 пунктирная линия делит график на две области: в первой области условие (15.67) выполняется, во второй — не выполняется.

Коэффициенты  $\beta$  и  $\lambda$  являются нелинейными функциями  $\mu$  и  $\varepsilon$ . С ростом  $\mu$  коэффициенты  $\lambda$  и  $\lambda^0$  убывают так, что относительный динамический коэффициент  $\beta$  увеличивается, асимптотически приближаясь к единице (рис. 15.6). С ростом же  $\varepsilon$ , наоборот,  $\beta$  убывает, приближаясь к нулю. Таким образом, влияние  $\mu$  и  $\varepsilon$  на  $\beta$  в определенной мере компенсируют друг друга. Увеличение затухания делает упругую систему менее чувствительной к скорости изменения частоты возмущающей силы.

Характерной особенностью прохождения системы через резонанс является наличие нескольких максимумов на резонансных кривых (рис. 15.7). При увеличении скорости изменения частоты возмущающей силы максимум амплитуды снижается, а острота первого максимума резонансной кривой становится меньше. Первый максимум имеет место не в момент совпадения ( $\xi = 1$ ) частоты внешней силы с собственной частотой системы, а позже, причем это смещение максимума при разгоне происходит в сторону больших частот ( $\xi > 1$ ), а при выбеге — в сторону меньших частот ( $\xi < 1$ ) и тем больше, чем больше  $\varepsilon$ .

## ПРОХОЖДЕНИЕ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

### Уравнения движения и их интегрирование

Будем исходить из следующей системы дифференциальных уравнений движения:

$$\sum_{k=1}^n [a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ik}\dot{q}_k + d_{ik}q_k] = Q_i(t) \quad (15.68)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Для использования предыдущих выводов необходимо привести уравнения (15.68) к системе уравнений второго порядка вида уравнения (15.1). Это приведение выполняется способом, указанным А. Н. Крыловым [48].

Применим операционный метод. При нулевых начальных условиях изображение уравнения (15.68) будет

$$\sum_{k=1}^n [a_{ik}p^2 + c_{ik}p + d_{ik}] q_k(p) = Q_i(p) \quad (15.69)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $q_i(p) \leftrightarrow q_i(t)$ ,  $Q_i(p) \leftrightarrow Q_i(t)$ .

Разрешая систему уравнений (15.69) относительно  $q_i$ , получаем

$$q_i = \frac{1}{\Delta(p)} [\Delta_{i1}(p) Q_1(p) + \Delta_{i2}(p) Q_2(p) + \dots + \Delta_{in}(p) Q_n(p)] = \frac{\Phi_i(p)}{\Delta(p)}, \quad (15.70)$$

где  $\Delta(p)$  — определитель системы;  $\Delta_{ik}$  — миноры, соответствующие элементам  $i$ -го столбца.

Пусть  $\Delta(p) = 0$  имеет только комплексные корни с отрицательной вещественной частью

$$p_k = -p_{1k} \pm ip_{2k} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (15.71)$$

Разложим  $\frac{1}{\Delta(p)}$  на простые дроби

$$\frac{1}{\Delta(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k p + \beta_k}{p^2 + \gamma_k p + \delta_k^2}. \quad (15.72)$$

Обозначая

$$\frac{\alpha_k p + \beta_k}{p^2 + \gamma_k p + \delta_k^2} \Phi_i(p) = z_{ik}(p) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (15.73)$$

интерпретируя эти выражения как дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2 z_{ik}}{dt^2} + \gamma_k \frac{dz_{ik}}{dt} + \delta_k^2 z_{ik} = \psi_{ik}(t) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (15.74)$$

где  $\psi_{ik}(t) \leftrightarrow (\alpha_k p + \beta_k) \Phi_i(p)$ ,

найдем, что  $q_i$  будет равно сумме решений  $z_{ik}(t)$

$$q_i(t) = \sum_{k=1}^n z_{ik} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \psi_{ik}(\tau) e^{-\frac{\gamma_k}{2}(t-\tau)} \sin \omega_k(t-\tau) d\tau, \quad (15.75)$$

где  $\omega^2 = \delta_i^2 - \frac{\gamma_i^2}{4}$ .

Интегралы, входящие в уравнение (15.75), легко вычисляются для случая, когда  $\psi_{ik} = P_{ik}(t) \cos\left(\frac{\varepsilon_k t^2}{2} + \varphi_0\right)$ .

### Крутильные колебания трехмассовой системы

В качестве примера рассмотрим движение системы, совершающей крутильные колебания. Запишем систему дифференциальных уравнений в виде

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + k_1 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) + k_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) + \\ &+ c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) = M_2(t); \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 + k_2 (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) + c_2 (\varphi_3 - \varphi_2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.76)$$

где

$J_i$  — момент инерции  $i$ -й массы;  
 $c_i$  — жесткость  $i$ -го участка валопровода;

$M_2(t) = M_0 \exp \left[ -i \left( \frac{\varepsilon t^2}{2} + \varphi_0 \right) \right]$  — внешний крутящий момент;

$k_i$  — коэффициент затухания.

Обозначая  $\alpha_1 = \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $\alpha_2 = \varphi_2 - \varphi_3$ , получим изображение уравнений (15.76):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(p) &= -\frac{M_2(p)}{J_2} \cdot \frac{p^2 + k'_2 p + c'_2}{\Delta(p)}; \\ \alpha_2(p) &= \frac{M_2(p)}{J_2} \cdot \frac{p^2 + k'_1 p + c'_1}{\Delta(p)}; \end{aligned} \right\} \quad (15.77)$$

здесь

$$\begin{aligned} k'_1 &= \frac{k_1}{J_1}; \quad k'_2 = \frac{k_2}{J_2}; \quad c'_1 = c_1 \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right); \quad c'_2 = c_2 \left( \frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_3} \right); \\ \Delta(p) &= \left( p^2 + k_1 \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} p + c_1 \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \right) \times \\ &\times \left( p^2 + k_2 \frac{J_2 + J_3}{J_2 J_3} p + c_2 \frac{J_2 + J_3}{J_2 J_3} \right) - \frac{1}{J_2^2} (k_1 p + c_1) (k_2 p + c_2). \end{aligned}$$

Разлагая правую часть выражения для  $\alpha_1(p)$  на простейшие дроби, затем переходя к оригиналу и используя выражение (15.10), получим при отбрасывании членов, представляющих затухающие колебания,

$$\alpha_1(t) = \frac{(i-1)M_0}{2J_2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=1}^2 [\bar{B}_i W_i(u_i) - \bar{B}_i W(v_i)] e^{-i \left( \frac{\varepsilon t^2}{2} + \varphi_0 \right)}, \quad (15.78)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2i\omega_1} \cdot \frac{(k'_2 - \mu_1) p_1 + \frac{c_2}{J_3} - \beta_1^2}{(\mu_2 - \mu_1) p + \beta_2^2 - \beta_1^2}; \\ B_2 &= \frac{1}{2i\omega_2} \cdot \frac{(k'_2 - \mu_2) p_2 + \frac{c_2}{J_3} - \beta_2^2}{(\mu_1 - \mu_2) p + \beta_1^2 - \beta_2^2}; \end{aligned}$$



$\bar{B}_1, \bar{B}_2$  — сопряженные;

$$\mu_1 = -(p_1 + \bar{p}_1); \quad \mu_2 = -(p_2 + \bar{p}_2);$$

$$\beta_1^2 = p_1 \bar{p}_1 = \omega_1^2 + \frac{\mu_1^2}{4}; \quad \beta_2^2 = p_2 \bar{p}_2 = \omega_2^2 + \frac{\mu_2^2}{4};$$

$p_1, \bar{p}_1, p_2, \bar{p}_2$  — корни уравнения  $\Delta(p) = 0$ ;

$$u_j = \frac{1-i}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( \varepsilon t - \omega_j + \frac{i\mu_j}{2} \right); \quad v_j = \frac{i-1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( \varepsilon t + \omega_j + i \frac{\mu_j}{2} \right) \quad (j = 1, 2).$$

При учете внутреннего затухания в комплексной форме по гипотезе Вагнера—Сорокина [87, 148] следует положить  $k_1, k_2 = 0$ , а вместо  $c_j$  поставить  $c_j \left( 1 \pm i \frac{\Psi}{2\pi} \right)$ , где  $\Psi$  — коэффициент поглощения энергии колебаний. В этом случае решение (15.78) будет справедливым при следующих значениях коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2i\omega_1 \Delta_2(p_1)} \left[ p_1^2 + \left( 1 + i \frac{\Psi}{2\pi} \right) \frac{c_2}{J_3} \right]; \\ B_2 &= \frac{1}{2i\omega_2 \Delta_1(p_2)} \left[ p_2^2 + \left( 1 + i \frac{\Psi}{2\pi} \right) \frac{c_2}{J_3} \right], \end{aligned} \right\} \quad (15.79)$$

где

$$\Delta_1(p) = p^2 + \mu_1 p + \beta_1^2; \quad \Delta_2(p) = p^2 + \mu_2 p + \beta_2^2;$$

$$\mu_1 = \frac{\Psi}{2\pi} \omega_1; \quad \mu_2 = \frac{\Psi}{2\pi} \omega_2.$$

Уравнение  $\Delta(p) = 0$  подстановкой

$$p^2 = -\omega^2 \left( 1 \pm i \frac{\Psi}{2\pi} \right) \quad (15.80)$$

сводится к биквадратному уравнению

$$\omega^4 - \omega^2 \left[ c_1 \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} + c_2 \frac{J_2 + J_3}{J_2 J_3} \right] + c_1 c_2 \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 J_2 J_3} = 0. \quad (15.81)$$

Отсюда на основании выражения (15.80) имеем

$$\left( \sqrt{1 \pm i \frac{\Psi}{2\pi}} \approx 1 \pm i \frac{\Psi}{4\pi} \right);$$

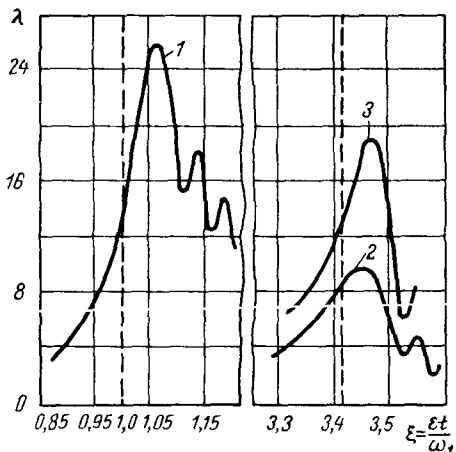
$$p_1 = -\frac{\mu_1}{2} + i\omega_1; \quad p_2 = -\frac{\mu_2}{2} + i\omega_2;$$

$$\bar{p}_1 = -\frac{\mu_1}{2} - i\omega_1; \quad \bar{p}_2 = -\frac{\mu_2}{2} - i\omega_2.$$

При этом четыре корня вида  $p = \frac{\mu}{2} \pm i\omega$ , как не имеющие физического смысла в рассматриваемой задаче, отбрасываются.

Если на всех участках валопровода коэффициент поглощения энергии колебаний  $\psi$  одинаков, то применение комплексной формы модуля упругости упрощает частотное уравнение, снижая его порядок.

Для построения резонансных кривых (рис. 15.8) приняты следующие параметры:



$$J_1 = 200 \text{ кг см сек}^2;$$

$$J_2 = 20 \quad \text{»}$$

$$J_3 = 40 \quad \text{»}$$

$$\varepsilon = 75 \text{ сек}^{-2};$$

$$k_1 = 150 \text{ кг см сек};$$

$$k_2 = 200 \quad \text{»}$$

$$\frac{\psi}{4\pi} = 0,4594 \cdot 10^{-2};$$

$$c_1 = 4 \cdot 10^6 \text{ кг см};$$

$$c_2 = 9 \cdot 10^6 \quad \text{»}$$

Коэффициент  $\psi$  определен из условия  $\psi = \frac{2\pi\mu_1}{\omega_1}$ , где  $\mu$  взято для сопротивления, пропорционального скорости.

Поэтому для обоих случаев сопротивления кривые резонанса с первой частотой практически одинаковы (кривая 1). Кривые 2 и 3 построены для резонанса со второй собственной частотой при учете затухания соответственно по Фохту и Вагнеру—Сорокину. Динамический коэффициент определен по формуле

$$\lambda = \frac{|\alpha_1(t)|}{\alpha_{cm}},$$

где

$$\alpha_{cm} = \frac{M_0}{c_1} \cdot \frac{J_1}{J_1 + J_2 + J_3}. \quad (15.82)$$

При изменении  $M_2(t)$  по закону

$$M_2(t) = M_0 \frac{\varepsilon^2 t^2}{\omega_2^2} \exp \left[ -i \left( \frac{\varepsilon t^2}{2} + \varphi_0 \right) \right] \quad (15.83)$$

максимальный динамический коэффициент будет при резонансе с первой частотой  $\lambda = 2,34$ , со второй —  $\lambda = 19,35$ .

**ПРОХОЖДЕНИЕ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ  
С НЕЛИНЕЙНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ЧАСТОТОЙ  
ВОЗМУЩАЮЩЕЙ СИЛЫ**

**Прохождение через резонанс при изменении частоты  
по параболическому закону**

Пусть мгновенная частота изменяется по параболическому закону

$$p = bt^2 + at. \quad (15.84)$$

Тогда задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \mu \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = P \exp [i\varphi(t) + \varphi_0], \quad (15.85)$$

решение которого при нулевых начальных условиях может быть записано в виде

$$z = \frac{P}{\omega} \exp \left( -\frac{\mu t}{2} \right) \int_0^t \exp i \left[ \varphi(\tau) + \varphi_0 - i \frac{\mu \tau}{2} \right] \sin \omega(t - \tau) dt, \quad (15.86)$$

где  $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\mu^2}{4}$ ;  $\varphi(t) = \frac{bt^3}{3} + \frac{at^2}{2}$ .

Перейдя к показательным функциям, запишем уравнение (15.86) в виде

$$z = z_1(t) - z_2(t); \quad (15.87)$$

здесь

$$z_1(t) = \frac{P}{2i\omega} \exp \left[ -\frac{\mu t}{2} + i\omega t + \varphi_0 \right] \int_0^t \exp i \left[ \varphi(\tau) - \omega\tau - i \frac{\mu \tau}{2} \right] d\tau; \quad (15.88)$$

$$z_2(t) = \frac{P}{2i\omega} \exp \left[ -\frac{\mu t}{2} - i\omega t + \varphi_0 \right] \int_0^t \exp i \left[ \varphi(\tau) + \omega\tau - i \frac{\mu \tau}{2} \right] d\tau; \quad (15.89)$$

Интеграл (15.88) может быть вычислен с помощью функций Ломмеля. Для этого выполним ряд преобразований, обозначив

$$u = \frac{t}{t_p} - 1; \quad t_p = \eta + i\delta; \quad (15.90)$$

где  $t_p$  является корнем уравнения

$$bt_p^2 + at_p - \omega - i \frac{\mu}{2} = 0, \quad (15.91)$$

т. е. представляет момент времени, когда частота возмущающей силы совпадает с собственной частотой. Полагая  $\frac{\mu}{\omega} = \frac{1}{\lambda^0}$  малой величиной, квадратом которой можно пренебречь, получим

$$\eta = -\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{\omega}{b}}; \quad \delta = \frac{\mu}{4b} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{\omega}{b}}}. \quad (15.92)$$

Резонансная частота достигается при  $t = \eta$ . Обозначая

$$b\eta^3 = \xi, \quad a\eta^2 = \omega \quad (15.93)$$

и пренебрегая величиной  $\delta^2$ , получим из выражений (15.91)

$$\eta\omega = \xi + \omega. \quad (15.94)$$

Следовательно,

$$\frac{\mu\eta}{2} = \frac{\xi + \omega}{2\lambda^0}; \quad \frac{t_p}{\eta} = 1 + i\nu \left( \nu = \frac{\delta}{\eta} = \frac{\xi + \omega}{2\lambda^0(2\xi + \omega)} \right). \quad (15.95)$$

Максимальная амплитуда колебаний при переходе через резонанс будет достигнута в момент времени  $t_1 = (1 + \xi)\eta > \text{Re } t_p$ . Поэтому значение интеграла  $z_1(t)$  вычисляем для  $t = (1 + \xi)\eta$ . Переходя к переменной (15.90) с учетом обозначений (15.93), (15.95), получим

$$z_1(t) = \frac{1}{2i} y_{cm} (1 + i\nu)(\xi + \omega) \exp(-\alpha + i\beta) \times \\ \times \int_{-1}^{u_1} \exp\left(-\xi_1 u^3 + \frac{\omega_1}{2} u^2\right) du; \quad (15.96)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} y_{cm} &= \frac{P}{\omega^2}; \quad u_1 = \frac{(1 + \varepsilon)\eta}{t_p} - 1; \quad \frac{\omega}{2} = \frac{\omega_0}{2} (1 + i\nu)^2 = \\ &= \frac{1}{2} [2\xi(1 + i\nu) + \omega] (1 + i\nu)^2; \\ \xi_1 &= -\frac{\xi}{3} (1 + i\nu)^3; \quad \alpha = \frac{\xi}{2\lambda^0} (\xi + \omega) - 2\frac{\xi\nu^2}{3}; \\ \beta &= \frac{\omega}{2} + \frac{\xi}{3} + (\xi + \omega)\varepsilon + \frac{1}{2} (\xi + \omega)\nu^2 + \varphi_0. \end{aligned} \right\} \quad (15.97)$$

Разобьем интервал интегрирования для  $z_1(t)$  на два — первый от  $+1$  до  $0$ , второй — от  $0$  до  $u_1$ .

$$z_1(t) = \frac{1}{2i} (\xi + \omega) y_{cm} \exp(-\alpha + i\beta) [V_1 + V_2(u_1)], \quad (15.98)$$

где

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= (1 + iv) \int_0^1 \exp i \left( \xi_1 u^3 + \frac{\omega_1}{2} u^2 \right) du; \\ V_2 &= (1 + iv) \int_0^{u_1} \exp i \left( -\xi_1 u^3 + \frac{\omega}{2} u^2 \right) du. \end{aligned} \right\} \quad (15.99)$$

Подстановкой  $v = \frac{u}{u_1}$  интеграл  $V_2$  (15.99) приводится к виду

$$V_2 = (\varepsilon - iv) \int_0^1 \exp i \left( \xi_2 v^3 + \frac{\omega_2}{2} v^2 \right) dv; \quad (15.100)$$

здесь

$$\xi_2 = \frac{\xi}{2} (\varepsilon - iv)^3; \quad \omega_2 = \omega_0 (\varepsilon - iv)^2 = \left[ \xi (1 + iv) + \frac{\omega}{2} \right] (\varepsilon - iv)^2. \quad (15.101)$$

Таким образом, интегралы  $V_1$  (15.99) и  $V_2$  (15.100) имеют подобные выражения. Представим их в виде

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp i \left( qu^3 + \frac{\omega}{2} u^2 \right) du &= \int_0^1 \left( 1 + iqu^3 + \frac{(iqu^3)^2}{2!} + \dots \right) \times \\ &\times \exp \left( i \frac{\omega u^2}{2} \right) du, \end{aligned} \quad (15.102)$$

где  $q = \xi_1$ ,  $\omega = \omega_1$  для  $V_1$  и  $q = \xi_2$ ,  $\omega = \omega_2$  для  $V_2$ .

Между интегралами, входящими в правую часть (15.102), и функциями Ломмеля  $U\left(\frac{\omega}{2}, 0\right)$  существуют зависимости [11]:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{2\nu-1} \exp \left( i \frac{\omega u^2}{2} \right) du &= \frac{\Gamma(\nu)}{2 \left( \frac{\omega}{2} \right)^\nu} \left[ U_\nu \left( \frac{\omega}{2}, 0 \right) - i U_{\nu+1} \left( \frac{\omega}{2}, 0 \right) \right] \times \\ &\times \exp \left( \frac{i\omega}{2} \right). \end{aligned} \quad (15.103)$$

Функции Ломмеля определяются следующими выражениями:

$$U_\nu \left( \frac{\omega}{2}, 0 \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left( \frac{\omega}{2} \right)^{\nu+2m}}{\Gamma(\nu+2m+1)}, \quad (15.104)$$

где  $\nu$  — любое число.

Для целых положительных

$$\left. \begin{aligned} U_{2n} &= (-1)^n \left[ \cos \frac{\omega}{2} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2m}}{(2m)!} \right]; \\ U_{2n+1} &= (-1)^n \left[ \sin \frac{\omega}{2} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right]. \end{aligned} \right\} (15.105)$$

Для больших значений  $\omega$  функция Ломмеля определяется асимптотическим разложением

$$U_\nu = \cos\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\nu\pi}{2}\right) + \sum_m \frac{(-1)^m}{\Gamma(\nu-1-2m)} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2m-\nu+2}. \quad (15.106)$$

При помощи формулы (15.103) интеграл (15.102) записывается в виде

$$\int_0^1 \exp i \left( qu^3 + \frac{\omega}{2} u^2 \right) du = \sum_\nu \frac{\Gamma(\nu) (iq)^{\frac{2\nu-1}{3}}}{2 \left(\frac{\omega}{2}\right)^\nu \Gamma\left(\frac{2(\nu+1)}{3}\right)} \times \\ \times \left[ U_\nu\left(\frac{\omega}{2}, 0\right) - i U_{\nu+1}\left(\frac{\omega}{2}, 0\right) \right] \exp \frac{i\omega}{2}, \quad (15.107)$$

где  $\nu = \frac{1}{2}(3m+1)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ).

При вычислении  $V_1$  следует воспользоваться асимптотическим разложением (15.106) или для целых  $n$  уравнениями (15.105), учитывая, что  $\frac{\omega}{2}$  по условию велико.

Подстановка этих разложений в выражение (15.102) показывает, что коэффициенты при  $\left(\frac{\omega}{2}\right)^{-k}$  являются рядами по степеням  $iq$ , которые суммируются и выражаются через следующую функцию и ее производные при  $\beta = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \psi(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp(iq\beta^{3/2}) = \beta^{-0.5} + iq\beta + \\ &\quad + \frac{1}{2!} (iq)^2 \beta^{2.5} + \dots; \\ \psi(1) &= e^{iq}; \quad \psi'(1) = -\frac{1}{2}(1-3iq)e^{iq}; \\ \psi''(1) &= \frac{3}{4}(1-iq-3q^2)e^{iq}; \\ \psi'''(1) &= -\frac{3}{8}(5-5iq+9iq^3)e^{iq}. \end{aligned} \right\} (15.108)$$

Вычисления дают следующие выражения:  
для  $V_1$  ( $q = \xi_1$ ):

$$V_1 = \sqrt{\frac{\pi i}{2}} \left(\frac{2}{\omega_0}\right)^{1/2} - \sqrt{\frac{\pi i}{2}} \left(\frac{2}{\omega_0}\right)^{1/2} \exp\left[i\left(\frac{\omega_1}{2} + \xi_1\right)\right] W\left(\sqrt{\frac{i\omega_1}{2}}\right) + \\ + \frac{i\xi}{6} \left(\frac{2}{\omega_0}\right)^2 + \frac{15\sqrt{\pi i}}{32} \left(\frac{\xi_1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{\omega_0}\right)^{3,5} + \dots - \frac{\xi}{3} \left(\frac{2}{\omega_0}\right)^2 \exp \times \\ \times \left[i\left(\frac{\omega_1}{2} + \xi_1\right)\right] \left[\frac{3}{4}i - \frac{3}{8}(1 - 3i\xi_1)\frac{2}{\omega_1} - \right. \\ \left. - \frac{3}{8}i(5 - 9\xi_1^2)\left(\frac{2}{\omega_1}\right)^2 + \dots\right], \quad (15.109)$$

где  $W_2$  — интеграл вероятностей (15.10):  
для  $V_2$ :

$$V_2 = -\frac{\sqrt{\pi i}}{2} \left[ W\left(\sqrt{\frac{i\omega_1}{2}}\right) \exp\frac{i\omega_2}{2} - i \right] \left(\frac{2}{\omega_0}\right)^{1/2} + \frac{\xi}{6} \left(\frac{2}{\omega_0}\right)^2 \times \\ \times \left[ \exp\frac{i\omega_2}{2} \left(i + \frac{\omega_2}{2}\right) - i \right] - \left(\frac{\xi}{3}\right)^2 \frac{\Gamma(3,5) \exp\left(\frac{1}{2}i\omega_2\right)}{2 \cdot 2 \left(\frac{1}{2}\omega_0\right)^{3,5}} \times \\ \times \left[ U_{3,5}\left(\frac{1}{2}\omega_2, 0\right) - iU_{4,5}\left(\frac{\omega_2}{2}, 0\right) \right] + \dots \quad (15.110)$$

При вычислении  $V_2$  использовано разложение функции Ломеля по степеням  $\frac{\omega_2}{2}$ , так как значение  $\frac{\omega_2}{2}$  из-за наличия множителя  $(\varepsilon - i\nu)^2$  невелико.

Интеграл  $z_2(t)$  вычисляется интегрированием по частям

$$z_2(t) = \frac{1}{2} y_{cm}(\xi + \omega) \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{i(2\xi\rho_0 + \omega)}{\Delta^3} + \dots \right] e^{i\beta_1} - \right. \\ \left. - \left[ \frac{1}{\Delta_0} - \frac{i\omega}{\Delta_0^3} + \dots \right] e^{-\alpha_1} \right\}; \quad (15.111)$$

здесь

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{2\lambda^0} + i\right) \rho \xi; \quad \beta_1 = \left(\frac{1}{3}\xi\rho + \frac{1}{2}\omega\right) \rho^2 + \Phi_0;$$

$$\Delta = \xi\rho^2 + \omega\rho + \Delta_0; \quad \rho = 1 + \varepsilon; \quad \Delta_0 = (\xi + \omega) \left(1 - \frac{i}{2\lambda}\right).$$

Таким образом, значение  $z(t)$  определяется формулой

$$z(t) = z[(1 + \varepsilon)\eta] = \frac{1}{2i} (\xi + \omega) y_{cm} e^{-\alpha + i\beta} [V_1 + V_2] - z_2(t), \quad (15.112)$$

с помощью которой построен ряд графиков изменения амплитуд при переходе через резонанс.

На рис. 15.9 приведены графики динамического коэффициента  $\lambda = \frac{|z(t)|}{U_{ст}}$  для различных значений  $\xi$  и  $\lambda^0$  при  $\omega = 0$ , т. е. при

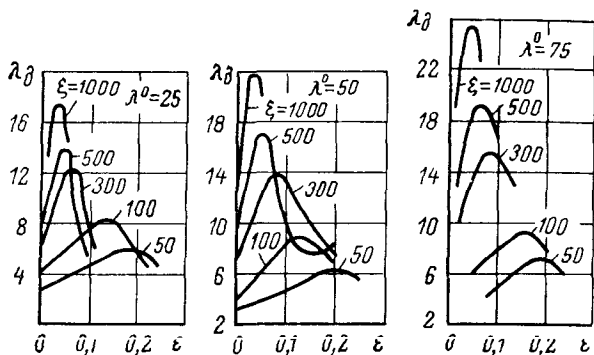


Рис. 15.9

изменении частоты возмущающей силы по закону  $p = bt^3$  большим значениям соответствует меньшая скорость перехода через резонанс.

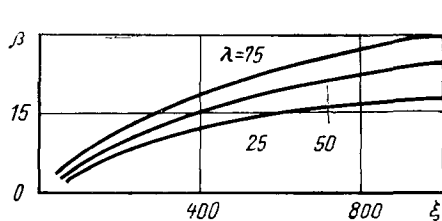


Рис. 15.10

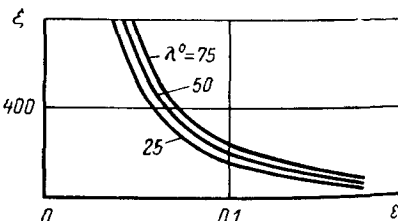


Рис. 15.11

На рис. 15.10 представлены кривые максимальных значений  $\lambda$ . По графику рис. 15.11 находим значение  $\varepsilon$ , при котором достигается первый максимум, а следовательно, и время его достижения.

### Пропорциональность возмущающей силы квадрату мгновенной частоты

В случае, когда амплитуда возмущающей силы пропорциональна квадрату мгновенной частоты (например, действует центробежная сила неуравновешенной массы)

$$P = P_1 \left( \frac{bt^2 + at}{\omega} \right)^2,$$



то значение  $z(t)$  будет

$$z(t) = \frac{P}{\omega^3} \int_0^t (b\tau^2 + a\tau)^2 \exp \left[ i \left( \frac{b\tau^3}{3} + \frac{a\tau^2}{2} + \varphi_0 \right) - \frac{\mu}{2} (t - \tau) \right] \times \\ \times \sin \omega (t - \tau) d\tau. \quad (15.113)$$

Интегрирование по частям и введение функций Ломмеля приводит к следующему выражению:

$$z(t) = -y_{cm} \exp i \left( \xi u_2^3 + \frac{u_2^2}{2} + \varphi_0 \right) + y_{cm} \exp \left[ i\varphi_0 - \frac{\xi + \omega}{2\lambda^0} u_2 \right] \times \\ \times \left[ \cos(\xi + \omega) u_2 - \frac{1}{2\lambda} \sin(\xi + \omega) u_2 \right] + \frac{1}{2i} (\xi + \omega) e^{-\alpha + i\beta} \times \\ \times [p_1(V_1 + V_2) - p_2 V_3] - \frac{y_{cm}}{2} (\xi + \omega) \times \\ \times \left\{ \left[ \frac{1 - r_1}{\Delta} - \frac{2\xi\rho + \omega - r_1\rho\xi - (\xi + \omega) \left( 1 - \frac{i}{2\lambda^0} \right)}{\Delta^3} + \dots \right] e^{i\beta} - \right. \\ \left. - \left[ \frac{1}{\Delta_0} - \frac{\omega - r_1(\xi + \omega) \left( 1 - \frac{i}{2\lambda^0} \right)}{\Delta_0^3} \right] e^{-\alpha_1} \right\}; \quad (15.114)$$

здесь  $(u_2 = \frac{t}{t_p})$ ;

$$p_1 = 1 - \frac{1}{(2\lambda^0)^2} + \frac{i}{\lambda} + \frac{\omega}{(\xi + \omega)^2} - \frac{2\xi(1 - i\nu)}{i(\xi + \omega)^2};$$

$$p_2 = 1 - \frac{1}{(2\lambda^0)^2} - \frac{i}{\lambda} + \frac{\omega}{(\xi + \omega)^2} r_1 = \frac{2\xi}{i(\xi - \omega)^2}.$$

Значения  $V_1, V_2$  определяются выражениями (15.09), (15.10), а  $V_3$  — выражением

$$V_3 = \frac{i}{\omega_0} + \frac{\xi}{8} (1 - i) V 2\pi \left( \frac{2}{\omega_0} \right)^{2,5} - \left[ i + \frac{3}{2} \xi_1 i \frac{2}{\omega_1} + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \xi_1 (1 + 3\xi_1 i) \left( \frac{2}{\omega_1} \right)^2 + \dots \right] \frac{1}{\omega_0} \exp \left( \xi_1 + \frac{\omega_1}{2} \right) + \\ + \frac{i\xi_2}{2} \exp \frac{1}{2} i\omega_2 \left[ U_{2,5} \left( \frac{\omega_2}{2}, 0 \right) - iU_{3,5} \left( \frac{1}{2} \omega_2, 0 \right) \right] \times \\ \times \Gamma(2,5) \left( \frac{2}{\omega_0} \right)^{2,5} + \dots \quad (15.115)$$

Из выражения (15.114) видно, что с течением времени колебания стремятся к установившимся и определяются первым слагаемым. Расчеты показывают, что амплитуда вблизи резонанса в данном случае мало отличается от вычисленной выше для  $P = \text{const}$ .

### Изменение частот колебаний по степенной функции третьего порядка

Для получения более подробной картины переходного процесса введем в рассмотрение более сложные законы изменения частоты возмущающей силы.

Пусть функция  $\varphi(t)$  имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{ct^4}{4} + \frac{bt^3}{3} + \frac{at^2}{2}. \quad (15.116)$$

Задача для системы с одной степенью свободы по-прежнему сводится к интегрированию уравнения (15.85), решение которого определяется выражениями (15.86)–(15.89), где  $\varphi(t)$  видно из формулы (15.116).

Введем переменную (15.90)  $u = \frac{t}{t_p} - 1$ ; при этом  $t_p = \eta + i\delta$  определяется из условия

$$ct_p^3 + bt_p^2 + at_p - \omega - \frac{i\mu}{2} = 0; \quad (15.117)$$

отсюда

$$\left. \begin{aligned} \omega\eta &= \Theta + \xi + \omega; \\ v &= \frac{\delta}{\eta} = \frac{\Theta + \xi + \omega}{2\lambda^0(3\Theta + 2\xi + \omega)}, \end{aligned} \right\} \quad (15.118)$$

где  $\Theta = c\eta^4$ , а  $\xi$  и  $\omega$  вычисляются по формулам (15.93).

Переходя к новой переменной  $u$  и учитывая выражения (15.118), получим

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2i} y_{cm} (1 + iv) (\Theta + \xi + \omega) e^{-\alpha + i\beta} \times \\ &\times \int_{-1}^w \exp(\Theta_1 u^4 - \xi_1 u^3 + \omega_1 u^2) du; \end{aligned} \quad (15.119)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{(1 + \varepsilon)\eta}{t_p} - 1; \\ \Theta_1 &= \frac{\Theta}{4} (1 + iv)^4; \quad \xi_1 = - \left[ \Theta (1 + iv) + \frac{\xi}{3} \right] (1 + iv)^3; \\ \omega_1 &= (1 + iv)^2 \omega_0 = (1 + iv)^2 \left[ \frac{3}{2} \Theta (1 + iv)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \xi (1 + iv) + \frac{\omega}{2} \right]; \\ \alpha &= \frac{\varepsilon}{2\lambda^0} (\xi + \omega + \Theta) - v^2 \left( v + \frac{\xi}{3} \right); \\ \beta &= \left( \varepsilon + \frac{v}{2\lambda^0} \right) (\xi + \omega\Theta) + \frac{\Theta}{4} + \frac{\xi}{3} + \frac{\omega}{2} + \\ &\quad + v^2 \left( \frac{3}{2} \Theta + \xi + \frac{\omega}{2} \right) + \frac{\Theta}{4} v^2. \end{aligned} \right\} \quad (15.120)$$

Перепишем интеграл (15.119) в виде

$$z_1(t) = \frac{1}{2t} y_{cm}(\Theta + \xi + \omega) e^{-\alpha + i\beta}(V_1 + V_2); \quad (15.121)$$

где

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= (1 + iv) \int_0^1 \exp i \left( \Theta_1 u^4 + \xi_1 u^3 + \frac{\omega_1}{2} u^2 \right) du; \\ V_2 &= (\varepsilon - iv) \int_0^1 \exp i \left( \Theta_2 u^4 + \xi_2 u^3 + \frac{\omega_2}{2} u^2 \right) du; \\ \Theta_2 &= (\varepsilon - iv)^4 \frac{\Theta}{4}; \quad \xi_2 = \left[ \Theta (1 + iv) + \frac{\xi}{3} \right] (\varepsilon - iv); \\ \omega_2 &= \left[ \frac{3}{2} \Theta (1 + iv)^2 + \xi (1 + iv) + \omega \right] (\varepsilon - iv)^2. \end{aligned} \right\} (15.122)$$

Интегралы (15.122), как и в предыдущем случае, могут быть вычислены с помощью функций Ломмеля при учете зависимости (15.103):

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \exp i \left( pu^4 + qu^3 + \frac{\omega}{2} u^2 \right) du = \\ &= \sum_k^{0,1} \frac{(ip)^k}{k!} \sum_{\Theta} \frac{\Gamma(\Theta)}{2 \left( \frac{\omega}{2} \right)^{\Theta}} \frac{(iq)^2 (\Theta - 2k) - 1}{\Gamma \left( \frac{2(\Theta + 1) - 4k}{3} \right)} \times \\ &\quad \times \left[ U_{\Theta} \left( \frac{\omega}{2}, \Theta \right) - U_{\Theta+1} \left( \frac{\omega}{2}, 0 \right) \right] e^{\frac{i\omega}{2}}, \end{aligned} \quad (15.123)$$

где  $\Theta = \frac{1}{2}(3m + 4k + 1)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ).

Для вычисления  $V_1$  следует воспользоваться асимптотическим разложением функций Ломмеля (15.106). После ряда преобразований получим

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\Gamma \left( \frac{1}{2} \right)}{2 \left( \frac{\omega}{2} \right)^{0,5}} e^{\frac{i\pi}{4}} + \frac{iq\Gamma(2)}{2 \left( \frac{\omega}{2} \right)^2} e^{i\pi} + \frac{(iq)^2}{2!} \cdot \frac{\Gamma(3,5)}{2} \left( \frac{\omega}{2} \right)^{-3,5} e^{\frac{i\eta\pi}{4}} + \dots \\ &\quad \dots + ip \frac{\Gamma(2,5)}{2} \left( \frac{\omega}{2} \right)^{\frac{5i\pi}{2}} + \frac{(ip)(iq)}{2} \Gamma(4) \left( \frac{\omega}{2} \right)^4 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{2} \right)^{-2} \left[ \Psi'_{\beta}(1) - \frac{i\omega}{2} \Psi(1) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{2} \right)^{-4} \left[ \Psi''_{\beta}(1) - \frac{i\omega}{2} \Psi'_{\beta}(1) \right] + \dots, \end{aligned} \quad (15.124)$$

где  $\psi(\beta) = \beta^{-0.5} e^{tq\beta^{3/2}} \beta^{2/3 + ip\beta^2}$ ;  $\psi(1) = e^{t(p+q)}$ ;

$$\psi'_\beta(1) = -\frac{1}{2} [1 - (4p + 3q)i] e^{t(p+q)};$$

$$\psi''_\beta = \frac{3}{4} (1 - iq - 3q^2) - 4p^2 - 6pq.$$

Интеграл  $V_2$  вычисляют с помощью разложения (15.104) или по правилу Симпсона, если нужно найти лишь первый максимум. Интеграл  $z_2(t)$  вычисляют интегрированием по частям.

### Применение моделирующей машины

Ниже приводятся результаты интегрирования уравнения (15.85) на электронной моделирующей машине, для применения которой решение (15.86) следует видоизменить.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\frac{du}{dt} + \psi'(t)u = Q. \quad (15.125)$$

Его решение при нулевом начальном условии  $u(0) = 0$  будет

$$u = e^{-\int \psi'(t) dt} \int_0^t Q \exp \left[ \int_0^\tau \psi'(\tau) d\tau \right] d\tau, \quad (15.126)$$

с учетом которого выражение (15.86) может быть записано в виде

$$z = \frac{y_{cm}}{2i} \{ \exp[\varphi_1(t)] u(t) - \exp[\varphi_2(t)] v(t) \}, \quad (15.127)$$

где  $u(t)$ ,  $v(t)$  — решение уравнения (15.126) соответственно при

$$\left. \begin{aligned} \psi' &= \psi'_1 = i \left[ \varphi'(t) - \omega \left( 1 + \frac{1}{2\lambda^0} \right) \right]; \\ \psi' &= \psi'_2 = i \left[ \varphi'(t) + \omega \left( 1 - \frac{i}{2\lambda^0} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15.128)$$

Полагая  $u = R_1 + iS_1$ ,  $v = R_2 + iS_2$ , получим систему уравнений первого порядка ( $i = 1, 2$ ):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR_i}{d\tau} - [\varphi'(\tau\eta) \mp \omega\eta] S_i + \frac{\omega\eta}{2\lambda^0} R_i &= Q_i; \\ \frac{dS_i}{d\tau} + [\varphi'(\tau\eta) \mp \omega\eta] R_i \mp \frac{\omega\eta}{2\lambda^0} S_i &= Q_i; \end{aligned} \right\} \quad (15.129)$$

здесь знак «плюс» берется для системы, содержащей функцию  $\psi'_2$ .  
Динамический коэффициент определяется выражением

$$\lambda = \frac{\omega\eta}{2Q} \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + (S_1 - S_2)^2}. \quad (15.130)$$

Результаты расчетов при переходе через резонанс с частотой

$$\psi'(\tau\eta) = \frac{\xi}{\eta} (\tau^2 + n\tau),$$

$$n = \frac{\omega}{\xi} \quad (15.131)$$

представлены на рис. 15.12.

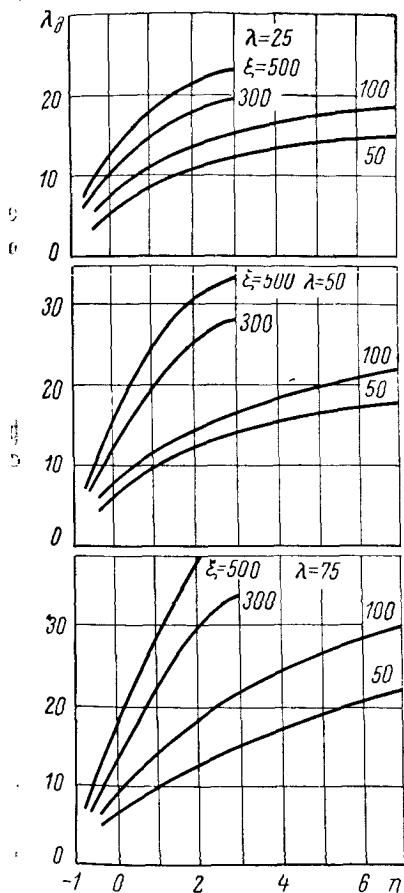


Рис. 15.12

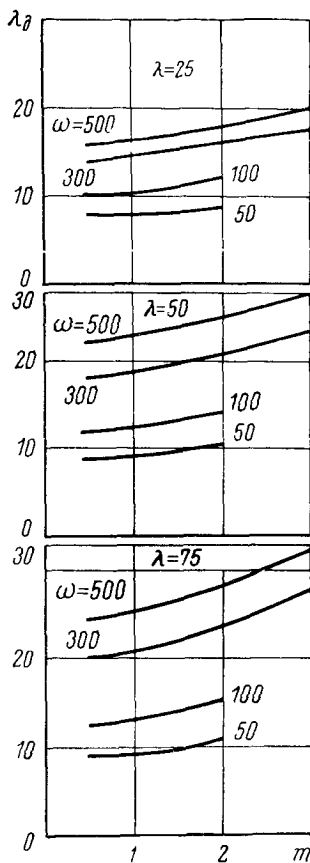


Рис. 15.13

Для случая, когда

$$\varphi(\tau\eta) = \frac{\Theta\tau^4}{4} + \frac{\omega\tau^2}{2} + \varphi; \quad \frac{\Theta}{\omega} = m \quad (15.132)$$

результаты приведены на рис. 15.13 и, когда

$$\varphi(t) = e^{at} - at - 1, \quad (15.133)$$

на рис. 15.14.

Анализ показывает, что величина первого максимума амплитуды колебаний в основном определяется значением скорости прохождения через резонанс в момент совпадения частот  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  и  $\omega$ . Поэтому для приближенной оценки максимальной амплитуды нестационарных колебаний при изменении частоты по какому-либо

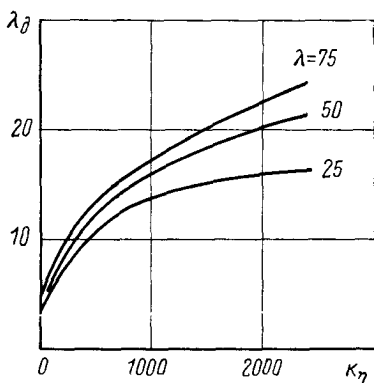


Рис. 15.14

нелинейному закону  $\frac{d\varphi}{dt} = f(t)$  можно воспользоваться результатами вычислений для случая линейной скорости прохождения через резонанс, вычислив безразмерный параметр  $h = \frac{\mu}{2\sqrt{\ddot{\varphi}(t_p)}}$ , где  $t_p$  — момент времени, определяемый из условия  $\dot{\varphi}(t_p) = \omega$ .

В частности, когда  $\varphi(t)$  определяется выражением (15.116), этот параметр будет

$$h = \frac{1}{2\lambda^0} \cdot \frac{\Theta + \xi + \omega}{\sqrt{3\Theta + 2\xi + \omega}}$$

По значению  $h$  согласно графику (рис. 15.1) определяют коэффициент  $\beta$ , а следовательно, и  $\lambda' = \lambda^0\beta$ . Отклонение  $\lambda'$  от  $\lambda$  в рассматриваемом частном случае не превышает 10—15%.

### ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ

#### Колебания стержня с сосредоточенной массой

Будем предполагать, что в сечении  $x = x_1$  сосредоточена масса  $Q_1$  и приложена возмущающая сила переменной частоты  $P_1 \cos\left(\frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0\right)$ . Амплитуда  $P$  в общем случае может быть функцией  $t$ .

Для учета внутреннего трения воспользуемся комплексным модулем упругости

$$E_1 = E \left(1 \pm i \frac{\psi_1}{2\pi}\right), \quad (15.134)$$

где  $\psi_1$  — коэффициент поглощения энергии.

В таком случае уравнение поперечных колебаний стержня с учетом затухания имеет вид

$$E_1 J \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (15.135)$$

где  $E_1 J$  — жесткость стержня;  
 $\rho F$  — масса единицы длины стержня;  
 $f(x, t)$  — интенсивность внешней нагрузки.

Принимая нулевые начальные условия, уравнение (15.136) запишем в операционной форме

$$\frac{d^4 Y}{d\eta^4} - s^4 Y = \frac{l^4}{E_1 J} F(\eta, p); \quad (15.136)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} Y(\eta, p) &\dot{\rightarrow} y(x, t); \quad \eta = \frac{x}{l}; \quad F(\eta, p) \dot{\rightarrow} f(x, t); \\ s^4 &= -\frac{\rho F l^4}{E_1 J} p^2 = -\frac{\delta^2 p^2}{\left(1 + i \frac{\Psi_1}{2\pi}\right)}; \quad \delta^2 = \frac{\rho F l^4}{E J}. \end{aligned} \right\} \quad (15.137)$$

Так как внешняя сила и масса  $Q_1$  приложены в точке  $x = x_1$ , то давление на стержень всюду равно нулю, за исключением точки  $x = x_1$  ( $\eta = \eta_1$ ), где сосредоточено усилие

$$P_1 \cos\left(\frac{e t^2}{2} + \delta_0\right) - Q_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{\eta=\eta_1}. \quad (15.138)$$

В операционной форме значение (15.138) запишется в виде

$$F_1(p) - Q_1 p^2 Y(\eta_1, p). \quad (15.139)$$

При учете внутреннего трения в комплексной форме внешнюю нагрузку будем принимать в дальнейшем в виде  $P_1 e^{-i\left(\frac{e t^2}{2} + \delta_0\right)}$ , следовательно,  $F_1(p) \dot{\rightarrow} P_1 e^{-i\left(\frac{e t^2}{2} + \delta\right)}$ . Тогда действительная часть  $y(x, t)$  будет представлять решение задачи, соответствующее принятой нагрузке.

Введя функцию влияния  $G(\eta, \eta_1, p)$ , представим прогиб под действием нагрузки согласно уравнению (15.139) в виде

$$Y(\eta, p) = [F_1(p) - Q_1 p^2 Y(\eta_1, p)] G(\eta, \eta_1, p). \quad (15.140)$$

Отсюда имеем

$$Y(\eta, p) = \frac{F_1(p)}{p} \cdot \frac{\rho G(\eta, \eta_1, p)}{1 + Q_1 p^2 G(\eta_1, \eta_1, p)} = \frac{F_1(p) F_2(p)}{p}. \quad (15.141)$$

Из уравнения (15.141) следует, что

$$y(\eta, t) = P_1 \int_0^t e^{-i\left(\frac{e \tau^2}{2} + \delta\right)} f_2(\eta, t - \tau) d\tau, \quad (15.142)$$

где

$$\frac{\rho G(\eta, \eta_1, p)}{1 + Q_1 p^2 G(\eta_1, \eta_1, p)} \dot{\rightarrow} f_2(\eta, t). \quad (15.143)$$

Функция влияния определяется из выражения (15.126). Например, для опертого стержня

$$G(\eta, \eta_1, p) = \frac{l^3 G_1(\eta, \eta_1, s)}{2E_1 J s^3} = \frac{l^3}{2E_1 J s^3} \begin{cases} \frac{\sin s\eta \sin s(1-\eta_1)}{\sin s} - \frac{\text{sh } s\eta \text{ sh } s(1-\eta_1)}{\text{sh } s}, & \eta \leq \eta_1, \\ \frac{\sin s(1-\eta) \sin s\eta_1}{\sin s} - \frac{\text{sh } s(1-\eta) \text{ sh } s\eta_1}{\text{sh } s}, & \eta \geq \eta_1. \end{cases} \quad (15.144)$$

Полюсы функции (15.143) являются корнями знаменателя

$$\Delta(s) = 1 + Q_1 p^2 G(\eta_1, \eta_1, p) = 1 - \frac{\alpha s}{2} G_1(\eta_1, \eta_1, s), \quad (15.145)$$

где  $\alpha = \frac{Q_1}{\rho Fl}$ .

В частности, для  $\eta_1 = \frac{1}{2}$   $G_1(\eta_1, \eta_1, s) = \frac{1}{2} \left( \text{tg } \frac{s}{2} - \text{th } \frac{s}{2} \right)$ .

Найдя из уравнения (15.145) корни  $s_1, s_2, s_3, \dots$ , получим на основании выражений (15.137)

$$\left. \begin{aligned} p_n &= -\frac{\mu_n}{2} + ik_n; & \bar{p}_n &= -\frac{\mu_n}{2} - ik_n; \\ \mu_n &= \frac{\psi}{2\pi} k_n; & k_n &= \frac{s_n^2}{\delta} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (15.146)$$

Согласно второй теореме о разложении

$$\frac{pG(\eta, \eta_1, p)}{1 + Q_1 p^2 G(\eta_1, \eta_1, p)} = -\frac{1}{2l\rho F} \cdot \frac{\frac{s}{p} G_1(\eta, \eta_1, s)}{\Delta(s)} \rightarrow \rightarrow -\frac{l}{\rho Fl} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(\eta, \eta_1, s_n)}{\Delta'(s_n)} \left[ \frac{e^{p_n t}}{p_n} + \frac{e^{\bar{p}_n t}}{\bar{p}_n} \right] \right\}, \quad (15.147)$$

где  $\Delta'(s) = \frac{d\Delta}{ds}$ ;  $\frac{ds}{dp} = \frac{s}{2p}$ .

Полагая в знаменателе уравнения (15.147)  $p_n \approx ik_n$ ,  $\bar{p}_n \approx -ik_n$ , найдем

$$f_2(\eta, t) = -\frac{2}{\rho Fl} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_1(\eta, \eta_1, s_n)}{k_n \Delta'(s_n)} e^{-\frac{\mu_n}{2} t} \sin k_n t. \quad (15.148)$$



С учетом уравнения (15.142) прогиб в точке  $\eta$  представляется выражением

$$y(\eta, t) = -\frac{2P_1}{\rho Fl} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_1(\eta, \eta_1, s_n)}{k_n \Delta'(s_n)} \int_0^t \exp \left[ -i \left( \frac{\varepsilon \tau^2}{2} + \delta \right) - \frac{\mu}{2} (t - \tau) \right] \sin k_n (t - \tau) d\tau. \quad (15.149)$$

Интегралы, входящие в выражение (15.149), известным образом выражаются через интеграл вероятностей от комплексного аргумента. Модуль  $|y(\eta, t)|$  представляет уравнение огибающей кривой колебательного процесса:

$$|y(\eta, t)| = \frac{P_1}{2\rho Fl} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i) G_1(\eta, \eta_1, s_n)}{k_n \Delta'(s_n)} \times \right. \\ \left. \times \left\{ W(u_n) + W(v_n) - W(u_{n0}) e^{u_{n0}^2 - u_n^2} - W(v_{n0}) e^{v_{n0}^2 - v_n^2} \right\} \right|, \quad (15.150)$$

$t \geq 0;$

здесь

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \frac{1-i}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( \varepsilon t - k_n + i \frac{\mu n}{2} \right); & u_{n0} &= u_n|_{t=0}; \\ v_n &= \frac{i-1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( \varepsilon t + k_n + i \frac{\mu n}{2} \right); & v_{n0} &= v_n|_{t=0}. \end{aligned} \right\} \quad (15.151)$$

При переходе через резонанс с первой собственной частотой и  $k_2 \gg k_1$  в выражении (15.150) целесообразно ограничиться одним слагаемым, которому соответствует  $n = 1$ .

### НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ ЗАДАНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ОПОРЫ

Пусть опора консольного стержня колеблется с переменной частотой  $\varepsilon t$  по закону

$$y_1(0, t) = f(t). \quad (15.152)$$

Дифференциальное уравнение колебательного движения стержня, в котором  $y(x, t)$  принимаем за относительное движение, имеет вид

$$EJ \left( 1 \pm i \frac{\psi_1}{2\pi} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \rho F \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = 0. \quad (15.153)$$

При нулевых начальных условиях уравнение (15.153) в операционной форме будет

$$\frac{d^4 Y}{d\eta^4} - s^4 Y = \frac{s^4}{\rho^2} F_1(p); \quad (15.154)$$

здесь  $F_1(p) \rightarrow \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$ .

Общее решение уравнения (15.154)  $Y(\eta, \rho) = A \operatorname{sh} s\eta + B \operatorname{ch} s\eta + C \sin s\eta + D \cos s\eta - \frac{F_1(\rho)}{\rho^2}$  после удовлетворения краевым условиям  $Y(0, \rho) = 0$ ;  $Y'(0, \rho) = 0$ ;  $Y''(1, \rho) = 0$ ,  $Y'''(1, \rho) = 0$ , принимает вид

$$Y(\eta, \rho) = \frac{1}{\rho} F_1(\rho) F_2(\rho) = \frac{F_1(\rho)}{\rho} \cdot \frac{H(\eta, s)}{\rho \Delta(s)}, \quad (15.155)$$

где

$$\left. \begin{aligned} H(\eta, t) &= \sin s \operatorname{sh} s (\cos s\eta - \operatorname{ch} s\eta) - \\ &- (1 + \operatorname{ch} s \cos s) (\cos s\eta + \operatorname{ch} s\eta - 2) - \\ &- (\operatorname{ch} s \sin s + \operatorname{sh} s \cos s) (\sin s\eta - \operatorname{sh} s\eta); \\ \Delta(s) &= -2(1 + \cos s \operatorname{ch} s). \end{aligned} \right\} \quad (15.156)$$

По второй теореме о разложении из операционного исчисления имеем

$$y(\eta, t) = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(\eta, s_n)}{s_n k_n \Delta'(s_n)} \int_0^t \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} e^{-\frac{\mu_n}{2}(t-\tau)} \sin k_n(t-\tau) d\tau, \quad (15.157)$$

здесь  $s_1, s_2, s_3, \dots$  корни уравнения;  $\Delta(s) = 0$ ;  $k_n = \frac{s_n^2}{\delta}$ ;  $\mu_n = \frac{\psi}{2\pi} k_n$ ;  $\Delta'(s) = 2(\operatorname{ch} s \sin s - \operatorname{sh} s \cos s)$ .

Если  $f(t)$  изменяется по закону

$$f(t) = A \exp \left[ -i \left( \frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0 \right) \right], \quad (15.158)$$

то

$$\begin{aligned} y(\eta, t) &= 4\varepsilon A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(\eta, s_n)}{k_n s_n \Delta'(s_n)} \int_0^t (\varepsilon \tau^2 + i) e^{-i \left( \frac{\varepsilon \tau^2}{2} + \delta_0 \right) - \frac{\mu_n}{2}(t-\tau)} \times \\ &\times \sin k_n(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (15.159)$$

Ограничиваясь рассмотрением прохождения через резонанс с первой собственной частотой системы, пренебрегая затухающими колебаниями и слагаемыми при  $n \geq 2$ , получим выражение для  $y(\eta, t)$ , достаточно точное вблизи резонанса:

$$\begin{aligned} y(\eta, t) &= 2A(i-1) \sqrt{\pi \varepsilon} \frac{H(\eta_1 \varepsilon_1)}{k_1 s_1 \Delta'(s_1)} \left[ \frac{1+i}{\sqrt{\pi \varepsilon}} k_1 + u_{n0}^2 W(u_n) + \right. \\ &\left. + v_{n0}^2 W(v_n) \right] e^{-i \left( \frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0 \right)}. \end{aligned} \quad (15.160)$$

Модуль  $|y(\eta, t)|$  представляет собой закон распределения амплитуд нестационарных вынужденных колебаний по оси стержня для момента времени  $t$ .

Полагая в уравнении (15.153)  $\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\frac{q}{\rho F} e^{-i\left(\frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0\right)}$ , получим выражение для  $y(\eta, t)$  при действии на стержень равномерно распределенной нагрузки  $qe^{-i\left(\frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0\right)}$ .  
В частности, для  $\eta = 1$  имеем

$$y(1, t) = -\frac{q}{\rho F} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} (1+i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} s_n + \cos s_n}{k_n s_n (\operatorname{sh} s_n \cos s_n - \operatorname{ch} s_n \sin s_n)} \times \\ \times \left[ W(u_n) + W(v_n) - W(u_{n0}) e^{u_{n0}^2 - u_n^2} - W(v_{n0}) e^{v_{n0}^2 - v_n^2} \right] \times \\ \times \exp \left[ -i \left( \frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0 \right) \right]. \quad (15.161)$$

Наконец, если опора стержня совершает вращательное движение  $\left. \frac{\partial y_1}{\partial x} \right|_{x=0} = B e^{-i\left(\frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0\right)}$ , то дифференциальное уравнение относительного движения стержня будет

$$E_1 J \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \rho F x \left. \frac{\partial^3 y_1}{\partial t^2 \partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (15.162)$$

или в операционной форме

$$\frac{d^4 Y}{d\eta^4} - s^4 Y = \frac{\eta s^4}{\rho^3} F(p), \quad (15.163)$$

где  $F(p) \rightarrow B \frac{d^2}{dt^2} e^{-i\left(\frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0\right)}$ .

После удовлетворения граничным условиям для консольного стержня и введения интеграла вероятностей решение уравнения (15.162) принимает вид

$$y(\eta, t) = 2lB (1-i) \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_1(\eta, s_n)}{k_n s_n \Delta'(s_n)} \left[ \frac{1+i}{\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}} k_n + u_{n0}^2 W(u_n) + \right. \\ \left. + v_{n0}^2 W(v_n) \right] e^{-i\left(\frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_0\right)}, \quad (15.164)$$

где

$$H_1(\eta, s) = \frac{1}{s} [\sin s \operatorname{sh} s (\operatorname{sh} s \eta - \sin s \eta) + \\ + (\cos s \operatorname{sh} s - \sin s \operatorname{sh} s) (\operatorname{ch} s \eta - \cos s \eta) - \\ - (1 + \cos s \operatorname{sh} s) (\operatorname{sh} s \eta + \sin s \eta - 2s \eta)].$$

Подобно рассмотренным вариантам легко получить решение и для других случаев, например для стержня, находящегося под действием растягивающей силы и равномерно распределенной нагрузки. На этом случае останавливаться не будем.

## КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ПЕРЕХОДЕ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС

### Изменение частоты по линейному закону

Воспользуемся дифференциальным уравнением, в котором силы трения приняты пропорциональными скорости деформации

$$D \left( 1 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, y, t), \quad (15.165)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$ ;  
 $h$  — толщина пластинки;  
 $\sigma$  — коэффициент Пуассона;  
 $\mu_1$  — коэффициент затухания;

$f(x, y, t)$  — интенсивность внешней нагрузки.

В процессе интегрирования осуществим исправление гипотезы вязкого трения, в результате чего решение будет учитывать внутреннее трение, не зависящее от частоты и соответствующее введению комплексного модуля упругости.

Пусть пластинка ограничена контуром:  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ . Введем относительные координаты  $\xi = \frac{x}{a}$ ,  $\eta = \frac{y}{b}$  и примем, что внешняя нагрузка приложена в точке  $(\xi_1, \eta_1)$  и состоит из сосредоточенной массы  $Q_1$  и возмущающей силы переменной частоты. Чтобы получить более простые конечные формулы, выражение для этой силы представим в комплексной форме:

$$P_1 \exp \left( -i \frac{\varepsilon t^2}{2} \right); \quad i = \sqrt{-1}. \quad (15.166)$$

В соответствии с принятой нагрузкой усилие на пластинку всюду равно нулю, кроме точки  $(\xi_1, \eta_1)$ , где оно представляется так:

$$P_1 e^{-\frac{i\varepsilon t^2}{2}} - Q_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\xi = \xi_1, \eta = \eta_1), \quad (15.167)$$

или в операционной форме

$$F_1(p) - Q_1 p^2 W(\xi_1, \eta_1, p), \quad (15.168)$$

где  $p^2 W(\xi_1, \eta_1, p) \div \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ ;  $F_1(p) \div \rightarrow P_1 e^{-\frac{i\varepsilon t^2}{2}}$ .

Следуя способу, изложенному в гл. 6, при записи дифференциального уравнения в операционной форме вместо  $\mu_1$  подставим  $\frac{\mu}{|Imp|}$ , получим

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - s^4 W = \frac{a^4}{K} F(\xi, \eta, \rho); \quad (15.169)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} s^4 &= -\frac{\delta^2 \rho^2 |Imp|}{|Imp| + \mu \rho}; & \delta^2 &= \frac{a^4 \rho h}{D}; \\ K &= -\rho h \frac{\rho^2}{s^4}; & F(\xi, \eta, \rho) &\rightarrow f(\xi, \eta, t); \end{aligned} \right\} \quad (15.170)$$

$Imp$  — мнимая часть  $\rho$ ;

$\mu = \frac{\Delta}{\tau}$  — коэффициент затухания;

$\Delta$  — логарифмический декремент.

Обозначая прогиб от единичной силы (функция влияния) через  $G(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, \rho)$ , получим прогиб пластинки в точке  $(\xi, \eta)$  для нагрузки по значению (15.168):

$$W(\xi, \eta, \rho) = [F_1(\rho) - Q_1 \rho^2 W(\xi_1, \eta_1, \rho)] G(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, \rho); \quad (15.171)$$

отсюда

$$W(\xi, \eta, \rho) = \frac{F_1(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho G(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, \rho)}{1 + \rho^2 Q G(\xi_1, \eta_1, \xi_1, \eta_1, \rho)} = \frac{F_1(\rho) F_2(\rho)}{\rho}. \quad (15.172)$$

На основании теоремы свертывания имеем

$$w(\xi, \eta, t) = \int_0^t P_1(\tau) e^{-\frac{i\epsilon\tau^2}{2}} f_2(\xi, \eta, t - \tau) d\tau, \quad (15.173)$$

где  $F_2(\rho) \rightarrow f(\xi, \eta, t)$ .

Так как функция влияния определяется уравнением (15.169), то ее можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, \rho) &= -\frac{1}{K} G_1(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, s) = \\ &= \frac{s^4}{a^2 \rho h \rho^2} G_1(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, s). \end{aligned} \quad (15.174)$$

Тогда уравнение для нахождения полюсов функции  $F_2(\rho)$  будет

$$\Delta(s) = 1 + \frac{b}{a} \cdot \frac{Q_1}{Q} s^4 G_1(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, s) = 0, \quad (15.175)$$

где  $Q = abh\rho$  — масса пластинки.

Отсюда определяются положительные корни  $s_1, s_2, s_3, \dots$ . Из выражения (15.170) имеем

$$p = -\frac{\mu s^4}{2\delta^2 |Imp|} \pm i \sqrt{\frac{s^4}{\delta^2} - \frac{\mu^2 s^8}{4\delta^4 |Imp|^2}}. \quad (15.176)$$

Следовательно,

$$|Imp| = \frac{s^2}{\delta \sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} \cong \frac{s^2}{\delta}, \quad (15.177)$$

если пренебречь малой величиной  $\mu^2$  по сравнению с единицей.

С учетом формул (15.176) и (15.177) получим окончательные выражения для полюсов:

$$\left. \begin{aligned} p_n &= -\frac{\mu_n}{2} + i\omega_n; & \bar{p}_n &= -\frac{\mu_n}{2} - i\omega_n; \\ \omega_n &= \frac{s_n^2}{\delta}; & \mu_n &= \mu\omega_n, \end{aligned} \right\} \quad (15.178)$$

Согласно второй теореме разложения из операционного исчисления на основании выражения (15.172) получим

$$\begin{aligned} f_2(\xi, \eta, t) &= \frac{4}{Q_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n^3 G_1(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, s_n)}{\omega_n \frac{d}{ds} [s^4 G_1(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, s)]_{s=s_n}} \cdot e^{-\frac{\mu}{2} t} \sin \omega_n t = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} f_n(\xi, \eta) e^{-\frac{\mu_n}{2} t} \sin \omega_n t. \end{aligned} \quad (15.179)$$

Подстановка уравнения (15.179) в выражение (15.173) дает

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\xi, \eta)}{\omega_n} \int_0^t P_1 \exp \left[ -i \frac{\varepsilon \tau^2}{2} - \frac{\mu_n}{2} (t - \tau) \right] \times \\ &\quad \times \sin \omega_n (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (15.180)$$

Интегралы, стоящие под знаком суммы в выражении (15.180), как показано выше, приводятся к интегралу вероятностей  $W(z)$ .

### Изменение возмущающей силы по закону $P_0 e^{\varepsilon t^2}$

Пусть амплитуда возмущающей силы изменяется по закону

$$P_1(t) = P_0 e^{\varepsilon t^2} \quad (0 \leq t < \infty), \quad (15.181)$$

тогда

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta, t) &= \frac{P_0 (t-1) \sqrt{\pi \varepsilon}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\xi, \eta)}{\omega_n} \left\{ 2\omega_n \frac{1+i}{\sqrt{\pi \varepsilon}} + \right. \\ &\quad \left. + (2u_{n0}^2 - 1) W(u_n) + (2v_{n0}^2 - 1) W(v_n) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ \frac{2iu_{n0}}{\sqrt{\pi}} - (2u_{n0}^2 - 1) W(u_{n0}) \right] e^{u_{n0}^2 - u_n^2} + \\
 & + \left[ \frac{2iv_{n0}}{\sqrt{\pi}} - (2v_{n0}^2 - 1) W(v_{n0}) \right] e^{v_{n0}^2 - v_n^2} \Big\} e^{-\frac{i\epsilon t^2}{2}}, \quad (15.182)
 \end{aligned}$$

где  $u_n, u_{n0}, v_n, v_{n0}$  определяются формулами (15.151).

Из выражения (15.172) выделением модуля определяется амплитуда колебаний  $A(\xi, \eta, t) = |\omega(\xi, \eta, t)|$ . Представим  $A(\xi, \eta, t)$  в виде суммы слагаемых, каждое из которых зависит только от одной какой-либо частоты  $\omega_n$ :

$$A(\xi, \eta, t) = \left| \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\xi, \eta, t) \right|, \quad (15.183)$$

где после пренебрежения затухающими колебаниями

$$\begin{aligned}
 A_n(\xi, \eta, t) = \frac{P_0(i-1)\sqrt{\pi\epsilon}}{4\omega_n} f_n(\xi, \eta) \left\{ 2\omega_n \frac{1+i}{\sqrt{\pi\epsilon}} + \right. \\
 \left. + (2u_{n0}^2 - 1) W(u_n) + (2v_{n0}^2 - 1) W(v_n) \right\}. \quad (15.184)
 \end{aligned}$$

Если пренебречь в момент резонанса с частотой  $\omega_n$  влиянием нерезонирующих форм колебаний, то

$$A(\xi, \eta, t) \approx |A(\xi, \eta, t)|. \quad (15.185)$$

Последнее равенство тем лучше соответствует действительности, чем меньше порядок  $n$  резонирующей частоты  $\omega_n$  и чем дальше отстоят от нее соседние частоты. Обычно это обстоятельство используется для первых номеров  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Выражение (15.185) позволяет находить максимальную амплитуду при помощи графиков (рис. 15.1 и 15.2):

$$|A_n(\xi, \eta, t)| = |f_n(\xi, \eta)| \lambda_{nt}, \quad (15.186)$$

где  $\lambda_{nt} = \left| \frac{A_n(\xi, \eta, t)}{A_{ncm}} \right| = \beta_{nt} \lambda_n^0$ ;  $\lambda_n^0 = \frac{\omega_n}{\mu_n}$  — динамические коэффициенты при нестационарном и установившемся резонансе с частотой  $\omega_n$ .

Таким образом, для определения амплитуды колебаний необходимо по значениям  $\lambda_n^0$  и  $h_n = \frac{\mu_n}{2\sqrt{\epsilon}}$  найти  $\lambda_{nt}$  (рис. 15.3) или  $\beta_{nt} = (1 + \alpha_{nt}) \beta_n^0$  (рис. 15.1 и 15.3).

Все выводы, сделанные выше при рассмотрении перехода через резонанс системы с одной степенью свободы, полностью относятся и к величине  $|\beta_n(\xi, \eta, t)|$ , которая согласно принятому допущению является амплитудой пластинки.

Выясним, как будут изменяться максимальные значения динамических коэффициентов  $\lambda_{1t}, \lambda_{2t}, \lambda_{3t}, \dots$  при последовательном прохождении через резонанс с одной и той же скоростью с частотами  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$

Так как  $\lambda_n^0 = \frac{\omega_n}{\mu_n}$  и  $h_n = \frac{\mu_n}{2\sqrt{\varepsilon}}$ , то с ростом  $n$  параметр  $h_n$  увеличивается, а  $\lambda_n^0$  остается постоянным. Следовательно, произведение  $\lambda_n^0 h_n$  также увеличивается. При помощи графиков (рис. 15.3 и 15.4) можно установить, что с ростом  $n$   $\lambda_{nt} \rightarrow \lambda_n^0$ .

Это означает, что в системе с бесконечным числом степеней свободы снижение динамического коэффициента  $\lambda_{nt}$  из-за влияния скорости перехода через резонанс  $\varepsilon$  становится все меньше по мере увеличения порядка резонирующей собственной частоты колебаний.

Этот вывод справедлив для системы, которая следует принятой гипотезе затухания.

Сказанное выше относится и к случаю  $P_1 = \text{const}$ , однако абсолютные величины амплитуд при  $P_1 = \text{const}$  и при  $P_1 \neq \text{const}$  будут отличаться за счет возрастания или убывания  $P_1(t)$ .

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИСКОВ ТУРБОМАШИН

### Диск постоянной толщины

Известно, что большое количество аварий паровых турбин происходило при критических скоростях вращения. Это обстоятельство требует тщательного изучения критических состояний и разработки мер их предотвращения или снижения степени опасности.

Аксиальные колебания дисков возбуждаются усилиями парового потока вследствие неравномерности проходных сечений каналов направляющих лопаток по окружности и ряда других причин.

Рассмотрим переход через критическую скорость диска постоянной толщины [21].

Дифференциальное уравнение колебаний диска с учетом сил трения, пропорциональных скорости деформации, имеет вид

$$D \left( 1 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \omega + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = f(r, \varphi, t), \quad (15.187)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа в полярных координатах;

$D$  — цилиндрическая жесткость диска;

$\mu_1$  — коэффициент затухания;

$\rho_1$  и  $h$  — масса единицы объема и толщина диска;

$f(r, \varphi, t)$  — интенсивность внешней нагрузки.

Прогиб  $\omega(r, \varphi, t)$  будем искать в виде ряда по фундаментальным функциям, соответствующим собственным формам колебаний круглой пластинки:

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} [\text{Re } T_{n\nu}(t) \cos n\varphi - \text{Im } T_{n\nu}(t) \sin n\varphi] R_{n\nu}(r), \quad (15.188)$$



где

$$R_{nv}(t) = A_{nv}J_n(s_v r) + B_{nv}Y_n(s_v r) + C_{nv}I_n(s_v r) + D_{nv}K(s_v r);$$

$$s^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2; \quad (15.189)$$

$\omega$  — собственная частота колебаний пластинки;  
 $\text{Re}$  и  $\text{Im}$  — действительная и мнимая части.  
 Постоянные  $A_{nv}$ ,  $B_{nv}$ ,  $C_{nv}$ ,  $D_{nv}$  и значение  $s_v$  определяются из граничных условий.

Функция  $T_{nv}(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\ddot{T}_{nv} + \mu_{1nv}^2 \dot{T}_{nv} + \omega_{nv}^2 T_{nv} = K_{nv}(t); \quad (15.190)$$

здесь

$$K_{nv}(t) = \frac{1}{2\pi r A_{nv}^0} \int_{r_0}^{r_a} r R_{nv}(r) dr \int_0^{2\pi} f(r, \varphi, t) e^{-in\varphi} d\varphi; \quad (15.191)$$

$r_0$ ,  $r_a$  — внутренний и внешний радиусы диска.  
 Величина  $A_{nv}^0$  определяется при разложении  $f(r, \varphi, t)$  в ряд по  $R_{nv}(r)$ ,  $\cos n\varphi$  и  $\sin n\varphi$ . Принимая затухание не зависящим от частоты, из уравнения (15.190) имеем

$$T_{nv}(t) = \frac{1}{\omega_{nv}} \int_0^t K_{nv}(\tau) e^{-\frac{\mu_{1nv}}{2}(t-\tau)} \sin \omega_{nv}(t-\tau) d\tau, \quad (15.192)$$

где  $\mu_{1nv} = \frac{\delta}{\pi} \omega_{nv}$ ,  $\delta$  — логарифмический декремент.

### Действие сосредоточенной постоянной силы $P$

Пусть диск вращается с постоянным ускорением  $\epsilon$ . Возникающие при этом центробежные силы не будем учитывать. Они не вносят принципиальных изменений в характер колебательного процесса, но повышают собственные частоты. В таком случае можем применить принцип инверсии, т. е. будем считать диск невращающимся, а нагрузку вращающейся вокруг его оси с тем же ускорением  $\epsilon$ , но в противоположную сторону.

Временно принимая, что сила распределена по малой площадке, будем иметь  $f(r, \varphi, t) = 0$  всюду, кроме участка

$$r_1 - \Delta r \leq r \leq r_1; \quad \frac{\epsilon t^2}{2} - \Delta\varphi \leq \varphi \leq \frac{\epsilon t^2}{2},$$

на котором  $f(r, \varphi, t) = q(t)$ . Выполнив предельный переход  $q(t) r_1 \Delta r \Delta\varphi \rightarrow P$  при  $\Delta r \rightarrow 0$  и  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ ,

из уравнения (15.191) получим

$$K_{nv}(t) = \frac{R_{nv}(r_1)}{2\pi r A_{nv}^0} P e^{-\frac{i n \epsilon t^2}{2}}. \quad (15.193)$$

При  $P = \text{const}$  введением новых переменных

$$\left. \begin{aligned} u_{nv} &= \frac{1-i}{2\sqrt{n\varepsilon}} \left( n\varepsilon t - \omega_{nv} + i \frac{\mu_{nv}}{2} \right); \\ v_{nv} &= \frac{i-1}{2\sqrt{n\varepsilon}} \left( n\varepsilon t + \omega_{nv} + i \frac{\mu_{nv}}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15.194)$$

интеграл (15.192) с учетом уравнения (15.193) выражается через интеграл вероятностей от комплексного аргумента.

После ряда преобразований получим решение задачи о вынужденных колебаниях диска при нулевых начальных условиях, когда сила действует на радиусе  $r = r_1$ :

$$\begin{aligned} \omega(r, \varphi, t) &= \frac{P}{4\rho V \pi \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{R_{n\nu}(r_1) R_{n\nu}(r)}{A_{n\nu}^0 \omega_{n\nu} \sqrt{n}} [(\text{Re } \Phi_{n\nu} - \text{Im } \Phi_{n\nu}) \times \\ &\times \cos n \left( \varphi - \frac{\varepsilon t^2}{2} \right) - (\text{Re } \Phi_{n\nu} + \text{Im } \Phi_{n\nu}) \sin n \left( \varphi - \frac{\varepsilon t^2}{2} \right)], \end{aligned} \quad (15.195)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{n\nu} &= W(u_{n\nu}) + W(v_{n\nu}) - W(u_{n\nu}^0) e^{(u_{n\nu}^0)^2 - u_{n\nu}^2} - \\ &- W(v_{n\nu}^0) e^{(v_{n\nu}^0)^2 - v_{n\nu}^2}; \\ u_{n\nu}^0 &= u_{n\nu}(0); \quad v_{n\nu}^0 = v_{n\nu}(0); \quad 0 \leq t < \infty. \end{aligned}$$

Для вращающегося диска выражение (15.195) представляет собой неподвижную в пространстве деформацию, величина которой изменяется с течением времени. Такая деформация соответствует критическому состоянию и наиболее опасна для прочности диска.

Представим прогиб в виде

$$\omega(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} W_{n\nu}(r, \varphi, t), \quad (15.196)$$

Амплитудное значение каждого слагаемого в выражении (15.196) будет

$$W_{n\nu} = \frac{R_{n\nu}(r_1) R_{n\nu}(r) P}{2\pi \rho A_{n\nu}^0 \omega_{n\nu} \mu_{n\nu}} \beta_{n\nu}, \quad (15.197)$$

где  $\beta_{n\nu} = \frac{\mu_{n\nu}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2n\varepsilon}} |\Phi_{n\nu}|$  — относительный динамический коэффициент, максимальное значение которого может быть найдено по приведенным выше графикам.

Необходимо отметить, что в рассматриваемом случае скорость изменения частоты возмущения формы колебаний, соответствующей частоте  $\omega_{nv}$ , зависит от числа узловых диаметров  $n$ :

$$\varepsilon_{nv} = n\varepsilon.$$

Следовательно, при прочих равных условиях увеличение числа узловых диаметров ведет к снижению амплитуды колебаний в нестационарном режиме.

### ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

#### Сущность метода

Излагаемый в настоящем параграфе метод построения асимптотических решений нелинейного уравнения основан на асимптотических методах нелинейной механики, созданных Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым и получивших дальнейшее развитие в исследованиях Ю. А. Митропольского [65].

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dt} \left[ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + c(\tau) x = \varepsilon F \left( \tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (15.198)$$

где  $F \left( \tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right)$  — периодическая функция по  $\theta$  с периодом  $2\pi$ ;

$\varepsilon$  — малый положительный параметр;

$t$  — время;

$\tau = \varepsilon t$  — медленное время;

$m(\tau)$ ,  $c(\tau)$  и  $v(t) = \frac{d\theta}{dt}$  — масса, жесткость и мгновенная частота внешней силы, медленно изменяющиеся со временем (медленно по отношению к естественной единице времени — периоду собственных колебаний).

Отметим, что для построения асимптотических решений функции  $m(\tau)$ ,  $c(\tau)$ ,  $v(\tau)$  и  $F \left( \tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right)$  должны иметь достаточное число производных по  $\tau$  для всех конечных значений  $\tau$  и, кроме того,  $m(\tau) \neq 0$ ,  $c(\tau) \neq 0$ .

При отсутствии возмущения, т. е. при  $\varepsilon = 0$ , и постоянных  $m(\tau)$  и  $c(\tau)$  имеем чисто гармонические колебания

$$x = a \cos(\omega t + \psi), \quad (15.199)$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ , а  $\psi$  и  $a$  — фаза и амплитуда колебания — величины постоянные и определяемые начальными условиями.

При наличии возмущения в решении могут появиться обертоны, гармоники комбинационных частот различного порядка, гармоники с частотой внешней силы. При этом частота и фаза не являются постоянными, а зависят от амплитуды колебаний, которая изменяется в зависимости от притока энергии. Кроме обычного резонанса, возможно появление резонансов на обертонах собственной частоты и частоты внешнего возмущения.

В нелинейной системе резонанс может наступить при выполнении условия

$$\omega \approx \frac{s}{r} \nu, \quad (15.200)$$

где  $s$  и  $r$  — некоторые взаимно простые целые числа, обычно небольшие. Когда  $s = r = 1$ , имеет место главный, или обыкновенный, резонанс. При  $s = 1$ , т. е.  $\omega \approx \frac{\nu}{r}$ , резонанс называется дробным, или параметрическим. При  $r = 1$ , т. е.  $\omega \approx s\nu$ , наблюдается резонанс на обертоне внешней частоты.

Надо иметь в виду, что не при всех значениях  $s$  и  $r$  наблюдается соответствующий резонанс. Числа  $s$  и  $r$  определяются характером колебательной системы.

Принимая во внимание сказанное о влиянии возмущения, решение уравнения (15.198) следует искать в виде асимптотического ряда

$$x = a \cos (s\varphi + \psi) + \varepsilon u_1 (\tau, a, \theta, s\varphi + \psi) + \varepsilon^2 u_2 (\tau, a, \theta, s\varphi + \psi) + \dots, \quad (15.201)$$

в котором  $u_1, u_2$  — периодические функции по  $\theta$  и  $s\varphi + \psi$  с периодом  $2\pi$ ;  $\varphi = \frac{1}{r} \theta$ . Выбор чисел  $s$  и  $r$  определяется характером правой части уравнения (15.198) и зависит от вида исследуемого резонанса.

Величины  $\alpha$  и  $\psi$  находятся из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1 (\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 A_2 (\tau, a, \psi) + \dots \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega (\tau) - \frac{s}{r} \nu (\tau) + \varepsilon B_1 (\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 B_2 (\tau, a, \psi) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (15.202)$$

где  $\omega (\tau) = \sqrt{\frac{c (\tau)}{m (\tau)}}$ .

Так как в выражениях (15.202) разность  $\omega (t) - \frac{s}{r} \nu (t)$  может принимать любые значения, то уравнения (15.201) и (15.202) могут быть использованы для изучения как резонансных случаев, так и поведения системы вдали от резонанса.

## Построение приближенного решения уравнения

Задача сводится к отысканию функций  $u_1, u_2, \dots, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$  таким образом, чтобы выражение (15.201) при подстановке в него  $a$  и  $\psi$ , определенных из уравнения (15.202), оказалось бы решением исходного уравнения (15.198). При этом вместо интегрирования уравнения (15.198) интегрируется система уравнений (15.202).

Для однозначности определения функций  $u_1, u_2, \dots, A_1, \dots, B_1, \dots$  вводится условие отсутствия в функциях  $u_1, u_2$  первой гармоники аргумента  $s\varphi + \psi$ . Это эквивалентно выбору в качестве  $a$  полной амплитуды основной гармоники колебания. Другими словами, функции  $u_1, u_2, \dots$  не должны содержать резонансных членов, знаменатели которых могут обратиться в нуль.

Ограничимся получением основных формул в первом приближении.

В качестве первого приближения принимаем

$$x_0 = a \cos (s\varphi + \psi), \quad (15.199')$$

где  $a$  и  $\psi$  должны быть определены из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \varepsilon A_1 (\tau, a, \psi); \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega (\tau) - \frac{s}{r} v (\tau) + \varepsilon B_1 (\tau, a, \psi). \end{aligned} \right\} \quad (15.203)$$

Дифференцируя выражение

$$x = a \cos (s\varphi + \psi) + \varepsilon u_1 (\tau, a, \theta, s\varphi + \psi), \quad (15.204)$$

с учетом уравнений (15.203) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin (s\varphi + \psi) + \varepsilon \left\{ A_1 \cos (s\varphi + \psi) - aB_1 \sin (s\varphi + \psi) + \right. \\ &\quad \left. \omega u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} v (\tau) + \frac{\partial u_1}{\partial (s\varphi + \psi)} \omega \right\} + \varepsilon^2 \dots; \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -a\omega^2 \cos (s\varphi + \psi) + \varepsilon \left\{ \left[ \left( \omega - \frac{s}{4} v \right) \frac{\partial A_1}{\partial \psi} - 2a\omega B_1 \times \right. \right. \\ &\quad \times \cos (s\varphi + \psi) - \left[ \left( \omega - \frac{s}{r} v \right) \frac{\partial B_1}{\partial \psi} a + 2\omega A_1 \right] \sin (s\varphi + \psi) - \\ &\quad \left. - a \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \sin (s\varphi + \psi) + v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + 2v\omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial (s\varphi + \psi)} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial (s\varphi + \psi)^2} \right\} + \varepsilon^2 \dots, \end{aligned} \right\} \quad (15.205)$$

Подставляя выражения (15.204) и (15.205) в уравнение (15.198), разлагая его правую часть в ряд Тейлора по степеням  $\epsilon$  и приравнивая коэффициенты при  $\epsilon$  в первой степени, находим

$$\begin{aligned}
 m \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} v^2 + 2\nu\omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial (\sigma\varphi + \psi)} + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial (\sigma\varphi + \psi)^2} + \omega^2 u_1 \right] = \\
 = F_0 - m \left[ \left( \omega - \frac{s}{r} v \right) \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - 2a\omega B_1 \right] \cos(\sigma\varphi + \psi) + \\
 + m \left[ \left( \omega - \frac{s}{r} v \right) \frac{\partial B_1}{\partial \psi} a + 2\omega A_1 + \right. \\
 \left. + \frac{a}{m} \cdot \frac{d(m\omega)}{d\tau} \right] \sin(\sigma\varphi + \psi), \quad (15.206)
 \end{aligned}$$

где  $F_0 = F[\tau, \theta, a \cos(\sigma\varphi + \psi), -a\omega \sin(\sigma\varphi + \psi)]$ .

Представим  $F_0$  и  $u_1$  в виде двойных рядов:

$$F_0 = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} F_{nm}^0(\tau, a) e^{i[n\theta + m(\sigma\varphi + \psi)]}; \quad (15.207)$$

$$u_1 = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} g_{nm}(\tau, a) e^{i[n\theta + m(\sigma\varphi + \psi)]}; \quad (15.208)$$

где

$$F_{nm}^0(\tau, a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-i[n\theta + m(\sigma\varphi + \psi)]} d\theta d(\sigma\varphi + \psi), \quad (15.209)$$

а коэффициенты  $g_{nm}(\tau, a)$  пока неизвестны.

Подставим разложения (15.207) и (15.208) в уравнение (15.198), получим

$$\begin{aligned}
 m(\tau) \sum_{n, m} [\omega^2 - (nv + m\omega^2)] e^{i[n\theta + m(\sigma\varphi + \psi)]} g_{nm} = \\
 = \sum_{n, m} F_{n, m}^0 e^{i[n\theta + m(\sigma\varphi + \psi)]} - m(\tau) \left[ \left( \omega - \frac{s}{r} v \right) \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - 2a\omega B_1 \right] \times \\
 \times \cos(\sigma\varphi + \psi) + m(\tau) \left[ \left( \omega - \frac{s}{r} v \right) \frac{\partial B_1}{\partial \psi} a + \right. \\
 \left. + 2\omega A_1 + \frac{1}{m(\tau)} \cdot \frac{d(m\omega)}{d\tau} \right] \sin(\sigma\varphi + \psi). \quad (15.210)
 \end{aligned}$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, находим

$$g_{n, m}(\tau, a) = \frac{1}{m(\tau)} \cdot \frac{F_{nm}^0}{[\omega^2 - (m\omega + nv)^2]}. \quad (15.211)$$

Очевидно, что выражение (15.211) имеет смысл при  $\omega^2 - (m\omega + nv)^2 \neq 0$ , т. е. при  $\omega \neq m\omega + nv$  и  $\omega \neq -(m\omega + nv)$  или  $(\omega = \frac{s}{r} \mathbf{v})$

$$nr + s(m \pm 1) \neq 0. \quad (15.212)$$

Следовательно, суммирование в ряде (15.208) должно выполняться только для тех значений  $n$  и  $m$ , которые удовлетворяют неравенству (15.212). Этим мы выполняем условие отсутствия в  $u_1$  первых гармоник угла  $s\varphi + \psi$ .

Для того чтобы окончательно удовлетворить уравнению (15.210), необходимо приравнять коэффициенты при первой гармонике угла  $s\varphi + \psi$ , т. е.

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n, m = -\infty \\ nr + s(m \pm 1) = 0}}^{\infty} F_{nm}^0 e^{i[n\theta + m(s\varphi + \psi)]} - \\ & m \left[ \left( \omega - \frac{s}{r} \mathbf{v} \right) \frac{\partial A_1}{\partial \psi} - 2a\omega B_1 \right] \cos(s\varphi + \psi) + \\ & \dots m \left[ \left( \omega - \frac{s}{r} \mathbf{v} \right) \frac{\partial B_1}{\partial \psi} a + 2\omega A_1 + \right. \\ & \left. + \frac{a}{m(\tau)} \cdot \frac{d[m\omega]}{d\tau} \right] \sin(s\varphi + \psi) = 0. \quad (15.213) \end{aligned}$$

Обозначая  $n = -\sigma s$  и  $m = \sigma r \pm 1$ , можем записать

$$n\theta + m(s\varphi + \psi) = \sigma r\psi \pm (s\varphi + \psi). \quad (15.214)$$

С учетом уравнения (15.209), (15.214), приравнявая коэффициенты при  $\cos(s\varphi + \psi)$  и  $\sin(s\varphi + \psi)$ , имеем из уравнения (15.213)

$$\begin{aligned} & \left( \omega - \frac{s}{r} \mathbf{v} \right) \frac{\partial A_1}{\partial \psi} - 2a\omega B_1 = \\ & = \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma = -\infty}^{\infty} e^{i\sigma r\psi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-i\sigma r\psi} \cos(s\varphi + \psi) d\theta d(s\varphi + \psi); \\ & \left( \omega - \frac{s}{r} \mathbf{v} \right) \frac{\partial B_1}{\partial \psi} a + 2\omega A_1 = \\ & = -\frac{a}{m(\tau)} \cdot \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau} - \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \times \\ & \times \sum_{\sigma = -\infty}^{\infty} e^{i\sigma r\psi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-i\sigma r\psi} \sin(s\varphi + \psi) d\theta d(s\varphi + \psi). \quad (15.215) \end{aligned}$$

Частным решением системы (15.215) будет

$$\begin{aligned}
 A_1(\tau, a, \psi) &= \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma r \psi} \left\{ \frac{(r\omega - s\nu)\sigma i}{4\omega^2 - (r\omega - s\nu)^2 \sigma^2} \times \right. \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-i\sigma r \psi} \cos(s\varphi + \psi) d\theta d(s\varphi + \psi) - \\
 &\quad \quad \quad - \frac{2\omega}{4\omega^2 - (r\omega - s\nu)^2 \sigma^2} \times \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-i\sigma r \psi} \sin(s\varphi + \psi) d\theta d(s\varphi + \psi) - \\
 &\quad \quad \quad - \frac{a}{2m\omega} \cdot \frac{d(m\omega)}{d\tau} ; \\
 B_1(\tau, a, \psi) &= -\frac{1}{2\pi^2 ma} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sigma r \psi}}{4\omega^2 - (r\omega - s\nu)^2 \sigma^2} \times \\
 &\quad \times \left\{ (r\omega - s\nu)\sigma i \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-i\sigma r \psi} \sin(s\varphi + \psi) d\theta d(s\varphi + \psi) + \right. \\
 &\quad \quad \quad + 2\omega \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0 e^{-i\sigma r \psi} \cos(s\varphi + \psi) d\theta d(s\varphi + \psi).
 \end{aligned} \tag{15.216}$$

Наличие явных выражений для  $A_1(\tau, a, \psi)$  и  $B_1(\tau, a, \psi)$  дает возможность интегрировать уравнения (15.203) каким-либо способом.

Рассмотрим частный случай уравнения (15.198)

$$\frac{d}{dt} \left[ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + c(\tau) x = \varepsilon f \left( \tau, x \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon E(\tau) \sin \theta. \tag{15.217}$$

В системе, описываемой этим уравнением, с помощью первого приближения можно обнаружить только основной резонанс ( $s = r = 1$ ).

Другие виды резонансов обнаруживаются высшими приближениями.

Получим уравнения (15.203), соответствующие данному уравнению (15.217) для  $s = r = 1$ . Так как  $s = r = 1$ , то соотношение

$$nr + s(m \pm 1) = 0 \tag{15.218}$$

принимает вид

$$n + m \pm 1 = 0. \tag{15.219}$$



Для правой части рассматриваемого уравнения (15.203) в разложении (15.207)  $n$  принимает значения  $n = \pm 1$ , когда  $m = 0$ , и  $n = 0$ , когда  $m = -\infty, \dots, +\infty$ .

Поэтому условие (15.219) выполняется только при  $n = \pm 1$ ,  $m = 0$  и  $n = 0$ ,  $m = \pm 1$ . Следовательно, в формулах (15.224) и (15.215)  $\sigma$  принимает значение 0 и  $\pm 1$ . При этом  $F_0 = E(\tau) \sin \theta$ , когда  $\sigma = \pm 1$  и  $F_0 = f = f[\tau, a \cos(\varphi + \psi), -a\omega \sin(\varphi + \psi)]$ , когда  $\sigma = 0$ .

После ряда выкладок имеем

$$x = a \cos(\theta + \psi),$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon a}{2m\omega} \cdot \frac{d(m\omega)}{d\tau} \\ \left( -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega m} \int_0^{2\pi} f_0 \sin(\theta + \psi) d(\theta + \psi) - \frac{\varepsilon E(\tau)}{m(\omega + \nu)} \cos \psi; \right. \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - \nu - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega m a} \int_0^{2\pi} f_0 \cos(\theta + \psi) d(\theta + \psi) + \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon E(\tau)}{am(\omega + \nu)} \sin \psi. \right) \end{aligned} \right\} (15.220)$$

С помощью уравнений (15.220) можно изучать как нестационарный, так и установившийся режим, когда  $\frac{da}{dt} = 0$  и  $\frac{d\psi}{dt} = 0$ .

### ПЕРЕХОД ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Исследуем нестационарный режим в нелинейной колебательной системе при прохождении через резонанс. Пусть на систему с жесткой характеристикой  $F(x) = cx + dx^3$  ( $c > 0$ ;  $d > 0$ ) действует внешняя сила с переменной амплитудой  $P$  и переменной частотой  $p(t)$ . Задача сводится к интегрированию уравнения

$$m\ddot{x} + 2n\dot{x} + cx + dx^3 = P \sin \theta(t); \quad \nu = \frac{d\theta}{dt}, \quad (15.221)$$

где  $m$  — масса системы;

$$\frac{2n}{m} = \mu \text{ — коэффициент затухания.}$$

Заменой  $x_1 = \sqrt{\frac{d}{c}} x$ ,  $t_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} t$  уравнение (15.221) приводится к виду

$$\frac{d^2 x_1}{dt_1^2} + 2\delta \frac{dx_1}{dt_1} + x_1 + x_1^3 = E_1 \sin \theta, \quad (15.222)$$

$$\text{где } \delta = \frac{n}{\sqrt{mc}}, \quad E_1 = \frac{P}{c} \sqrt{\frac{d}{c}}.$$

Предположим, что трение в системе невелико ( $\delta \ll 1$ ), а также малы амплитуды внешней силы и отклонение системы от положения равновесия ( $P_1 \ll 1$ ,  $x^2 \ll 1$ ). Кроме того, предполагаем медленное изменение частоты  $\nu$  (малое изменение за время одного периода собственных колебаний).

Для построения приближенного решения уравнений (15.221) воспользуемся асимптотическим методом нелинейной механики [65]. Согласно этому методу, решение уравнения (15.222) в первом приближении будет

$$x_1 = a \cos(\theta + \psi), \quad (15.223)$$

где  $a$  и  $\psi$  должны определяться из системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt_1} &= -\delta a - \frac{E_1}{1+\nu} \cos \psi; \\ \frac{d\psi}{dt_1} &= 1 - \nu + \frac{3a^2}{8} + \frac{E_1}{a(1+\nu)} \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (15.224)$$

При изменении частоты по линейному закону  $\nu = \beta_1 t_1$  уравнения (15.224) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dp} &= \frac{1}{\beta_1} \left[ \delta a + \frac{E_1}{1+\nu} \cos \psi \right]; \\ \frac{d\psi}{dp} &= \frac{1}{\beta_1} \left[ 1 - \nu + \frac{3a^2}{8} + \frac{E_1}{(1+\nu)a} \sin \psi \right] \end{aligned} \right\} \quad (15.225)$$

и могут быть решены методом Рунге—Кутта или методом Адамса.

Известно, что кривые прохождения через резонанс мало отличаются от стационарных резонансных кривых в области частот, где стационарная резонансная кривая близка к горизонтальной линии. Поэтому вне резонансной зоны кривые прохождения через резонанс могут быть приближенно заменены соответствующими участками стационарной резонансной кривой. Следовательно, интегрирование уравнений (15.225) не нужно проводить на всем отрезке времени. Начальные значения  $a$  и  $\psi$  выбираются из стационарного режима вблизи резонансной зоны, но в зоне быстрого возрастания амплитуд.

Полагая  $\frac{da}{dt_1} = 0$  и  $\frac{d\psi}{dt_1} = 0$ , находим из формулы (15.224)

$$\nu^2 = \left(1 + \frac{3a^2}{8}\right)^2 \pm \sqrt{\frac{E_1^2}{a^2} - 4\delta^2} \quad (0,8 \leq \nu \leq 1,2). \quad (15.226)$$

Для определенности начальные значения  $a$  и  $\psi$  будем вычислять, когда  $\nu = 0,8$  при прохождении резонансной зоны в прямом направлении и  $\nu = 1,2$  при прохождении резонансной зоны в обратном. Тогда начальная амплитуда при заданных  $E_1$  и  $\delta$

определится из уравнения (15.226). Начальную фазу находим по формуле

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1 + \frac{3a^2}{8} - v}{2\delta}. \quad (15.227)$$

Значение  $\delta$  можно выразить через коэффициент поглощения энергии колебаний  $\Psi_1$  или логарифмический коэффициент затухания так:

$$\delta = \frac{\Delta}{2\pi} = \frac{\Psi_1}{4\pi}. \quad (15.228)$$

С помощью электронной цифровой машины выполнен ряд вычислений. На рис. 15.15 и 15.16 приведены стационарная кривая и кривые прохождения через резонанс.

В табл. 15.1 и 15.2 приведены максимальные значения амплитуды колебаний при  $\frac{dv}{dt_1} > 0$  для  $\delta = 0,005; 0,01; 0,03; 0,05$ .

Т а б л и ц а 15.1

Значение  $a_m$  и  $\lambda$

$\beta_1$	$E_1 = 0,005$		$E_1 = 0,01$		$E_1 = 0,02$	
	$a_m$	$\lambda$	$a_m$	$\lambda$	$a_m$	$\lambda$
$\delta = 0,005$						
0	0,4794	1,0	0,8745	1	1,4400	1
0,01	0,1024	0,214	0,2069	0,237	0,4776	0,332
0,005	0,1127	0,235	0,2385	0,273	0,7383	0,513
0,001	0,2733	0,570	0,5509	0,630	1,1736	0,815
0,0005	0,3524	0,735	0,6865	0,785	1,2931	0,898
$\delta = 0,01$						
0	0,2472	1,0	0,4794	1,0	0,8745	1,0
0,05	0,0323	0,131	0,0646	0,135	0,1293	0,148
0,01	0,0596	0,242	0,1197	0,248	0,2440	0,278
0,005	0,0817	0,331	0,1651	0,345	0,3469	0,397
0,001	0,1759	0,713	0,3471	0,725	0,6706	0,766
0,0005	0,2056	0,830	0,4028	0,840	0,7591	0,870
0,0001	0,2377	0,960	0,4618	0,965	0,8490	0,973

В таблицах приведены значения

$$\lambda = \frac{a_{cm}}{a_d}, \quad (15.229)$$

где  $a_{cm}$  — максимальная амплитуда в стационарном режиме;  
 $a_d$  — в переходном режиме.

Значение  $a_{cm}$  определяется из системы

$$a^2 \left[ \delta^2 + \left( 1 - \nu^2 + \frac{3a^2}{8} \right)^2 \right] = \frac{E_1^2}{(1 + \nu)^2},$$

$$\nu = 1 + \frac{3a^2}{8}, \quad (15.230)$$

где второе уравнение представляет собой уравнение скелетной кривой. Исключение из системы (15.230) дает кубическое уравнение относительно

$$\frac{3}{8} a^3 + 2a - \frac{E_1}{\delta} = 0.$$

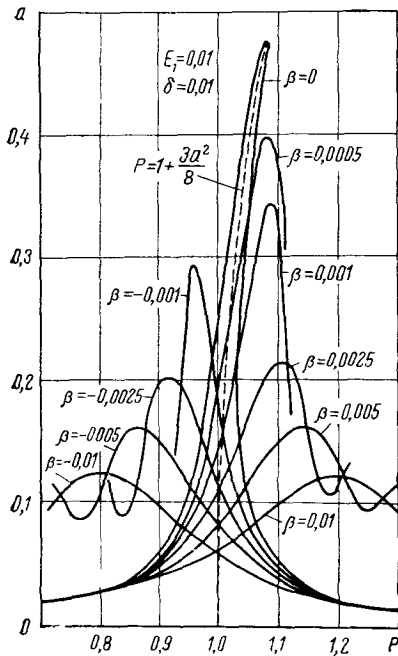


Рис. 15.15

муна наблюдаются биения амплитуд. С течением времени размахи биений и их периоды уменьшаются.

Кривые перехода через резонанс в прямом и обратном направлениях не симметричны. В случае жесткой характеристики упругой силы при прохождении через резонанс в обратном направлении амплитуда колебаний возрастает менее резко; здесь нелинейность играет роль дополнительного трения, ограничивающего амплитуду.

Расположение максимумов на резонансной кривой зависит от характера нелинейности и направления изменения частоты. С ро-

Таблица 15.2

Значение  $a_m$  и  $\lambda$  для больших затуханий

$\beta_1$	$L_1 = 0,04, \delta = 0,03$		$E_2 = 0,02, \delta = 0,05$	
	$a_m$	$\lambda$	$a_m$	$\lambda$
0	0,6216	1,0	0,1985	1,0
0,05	0,2017	0,323	0,0872	0,440
0,01	0,3711	0,596	0,1406	0,705
0,005	0,4697	0,755	0,1626	0,818
0,001	0,5864	0,945	0,1900	0,956
0,0005	0,6035	0,970	0,1942	0,977
0,0001	0,6179	0,995	0,1976	0,996

Отметим некоторые характерные особенности, наблюдаемые в нелинейных системах при переходе через резонанс.

Как и в случае прохождения через резонанс линейной системы, при увеличении скорости изменения частоты внешней силы максимум амплитуды снижается; после первого максимума

стом  $\frac{dv}{dt}$  увеличивается расстояние между точкой максимума кривой прохождения через резонанс и точкой скелетной кривой, соответствующей тому же значению амплитуды.

К нелинейному дифференциальному уравнению (15.221) в первом приближении приводит задача о нестационарных колебаниях стержня с учетом продольных усилий, возникающих, например, при изгибе балки с шарнирно-неподвижными опорами.

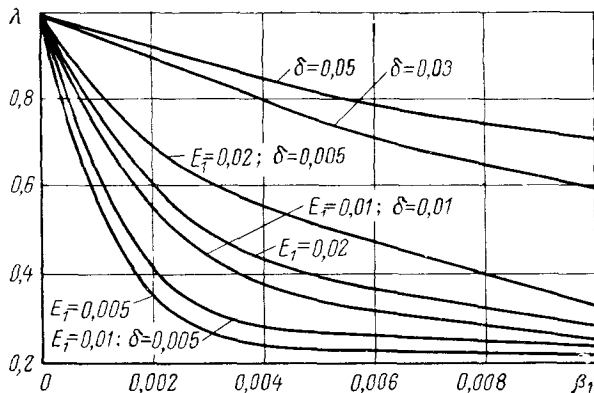


Рис. 15.16

Действительно, в этом случае дифференциальное уравнение движения балки имеет вид

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + \mu EJ \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - N \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, t), \quad (15.231)$$

где  $N$  — цепное усилие, определяемое формулой

$$N = EF \frac{\Delta l}{l} = \frac{EF}{2l} \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx,$$

возникающее из-за невозможности смещения опор.

Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (15.231) при

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (15.232)$$

по методу Галеркина заменяется системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\ddot{z}_i + \mu \omega_i^2 \dot{z}_i + \omega_i^2 z_i + \alpha_i^2 z_i \sum_{j=1}^{\infty} j^2 z_j^2 = f_i(t), \quad (15.233)$$

где  $\omega_i^2 = \left(\frac{i\pi}{l}\right)^4 \frac{EJ}{\rho F}$ ,  $\alpha = \frac{E}{4\rho} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4$ ;

$$f_i(t) = \frac{2}{\rho Fl} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{i\pi x}{l} dx.$$

Ограничиваясь одночленным представлением  $y(x, t)$  уравнения (15.232) ( $i = 1$ ), получаем уравнение

$$\ddot{z}_1 + \mu\omega_1^2\dot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 + \alpha z_1^3 = f_1(t), \quad (15.234)$$

которое при  $f(x, t) = q(x) \sin \theta(t)$  совпадает с уравнением (15.231).

Таким образом, влияние цепного усилия на нестационарные колебания при переходе через резонанс, в первом приближении сводится к следующему:

1) цепное усилие придает системе характер нелинейного вибратора с жесткой характеристикой восстанавливающей силы, описываемой кубической параболой;

2) жесткая характеристика восстанавливающей силы обуславливает более высокий уровень максимума амплитуды колебаний при прохождении резонансной зоны в прямом направлении по сравнению со случаем убывания частоты возмущающей силы.

#### Методы численного интегрирования нелинейного уравнения (15.231)

Выше было рассмотрено на основе асимптотических методов нелинейной механики построение решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с медленно изменяющимися параметрами. Было показано, что уравнение (15.222) в первом приближении имеет решение  $x_1 = a \cos(\theta - \psi)$ , где  $a$  и  $\psi$  — медленно изменяющиеся функции времени  $t_1$  определяемые системой уравнений (15.224).

Для решения уравнения (15.221) можно получить и другие методы.

В случае использования метода усреднения  $a$  и  $\psi$  должны определяться из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt_1} &= -\delta a - \frac{E_1}{2} \cos \psi; \\ \frac{d\psi}{dt_1} &= 1 - \nu + \frac{3}{8} a^2 + \frac{E_1}{2a} \sin \psi, \end{aligned} \right\} \quad (15.235)$$

где  $\nu = \frac{d\theta}{dt_1}$ .

Численное интегрирование уравнений (15.231) и (15.235) обычно выполняется при начальных значениях  $a$  и  $\psi_1$ , определяемых из условий

$$\frac{da}{dt_1} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt_1} = 0 \quad \text{при} \quad t_1 = 0.$$

Для получения решения уравнения (15.222), кроме указанных асимптотических методов нелинейной механики, может быть применено численное интегрирование непосредственно уравнения (15.222) при помощи методов Адамса или Рунге—Кутта, для чего необходимо записать уравнение (15.222) в виде системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt_1} &= y; \\ \frac{dy}{dt_1} &= -2\delta y - x_1 - x_1^3 + E_1 \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (15.236)$$

либо численное решение интегрального уравнения

$$x_1(t_1) = \frac{1}{\omega} \int_0^{t_1} [E_1 \sin \theta(\xi) - x_1^3(\xi)] e^{-\delta(t_1-\xi)} \sin \omega(t_1 - \xi) d\xi; \quad (15.237)$$

здесь  $\omega = \sqrt{1 - \delta^2}$ , а в качестве начальных условий принято  $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0$ .

Если исходить из уравнения (15.237), то интервал интегрирования разбивается на достаточно большое количество интервалов, внутри каждого из которых  $x_1$  может считаться постоянной величиной. Это приводит на каждом таком участке к алгебраическому уравнению третьей степени относительно  $x_1$ , коэффициенты которого определяются интегралами от известных функций времени. Определив из кубического уравнения значение  $x_1$  для  $i$ -го участка, переходят к построению кубического уравнения для  $(i + 1)$  участка и т. д.

Известный практический интерес представляет количественная оценка границ области изменения параметров колебательной системы, в пределах которой численное решение уравнений (15.224), (15.235), (15.236) и (15.237) дает результаты, совпадающие с приемлемой степенью точности, [73, 108].

В табл. 15.3—15.6 приводятся значения максимальной амплитуды колебаний  $a_{\max}$  при переходе через резонанс, полученные при интегрировании уравнений (15.224), (15.235), (15.236) с помощью метода Рунге—Кутта, а также при интегрировании уравнения (15.237) для  $\theta = \frac{\varepsilon_1 t_1^2}{2} + \nu_0 t_1$ . Там же приведены значения  $\nu$ , соответствующие моменту достижения максимума амплитуды колебаний.

Как следует из рис. 15.17, построенного по данным табл. 15.3 ( $\delta = E_1 = 0,01$ ), значения  $a_{\max}$ , полученные при интегрировании уравнений (15.225) и (15.235)—(15.237), достаточно хорошо совпадают для малых значений  $E_1$  и  $\varepsilon_1$ . Численное интегрирование уравнений (15.236) и (15.237) дает хорошее совпадение результатов практически независимо от величин  $E_1$  и  $\varepsilon_1$ . Расхождение результатов интегрирования уравнений (15.224), (15.235) с результатами,

Влияние параметра  $\nu_0$  на  $\nu$  и  $a_{\max}$ 

Таблица 15.3

$\nu_0$	0,2				0,0			
	Метод Ю. А. Митропольского (15.224)		Метод усреднения (15.235)		Метод непосредственного интегрирования уравнения (15.236)		Интегральный метод (15.237)	
$\varepsilon_1$	$\nu$	$a_{\max}$	$\nu$	$a_{\max}$	$\nu$	$a_{\max}$	$\nu$	$a_{\max}$
0,01	1,204	0,12214	1,204	0,12455	1,215	0,12115	1,214	0,12137
0,05	1,470	0,05861	1,470	0,06044	1,411	0,05803	1,410	0,05814
0,1	1,670	0,04189	1,670	0,04321	1,679	0,04233	1,679	0,04228
0,2	1,970	0,02894	1,960	0,03028	2,202	0,02760	2,200	0,02768
0,5	2,600	0,01902	2,575	0,01902	3,162	0,01778	3,167	0,01891
1,0	3,350	0,01517	3,300	0,01438	3,00	0,01052	3,010	0,01145

Таблица 15.4

Влияние отношения  $\frac{\nu_0}{\varepsilon_1}$  на  $\nu$  и  $a_{\max}$ 

$\nu_0/\varepsilon_1$		0,8/0,1				0,2/0,1				0,0/0,1	
Метод и уравнения		Метод Ю. А. Митропольского (15.224)		Метод усреднения (15.235)		Метод Ю. А. Митропольского (15.224)		Метод усреднения (15.235)		Метод непосредственного интегрирования уравнения (15.236)	
$\varepsilon_1$	$2\delta$	$\nu$	$a_{\max}$	$\nu$	$a_{\max}$	$\nu$	$a_{\max}$	$\nu$	$a_{\max}$	$\nu$	$a_{\max}$
0,01	0,01	1,725	0,04774	1,725	0,04877	1,680	0,04318	1,680	0,04547	1,6795	0,04363
0,01	0,02	1,710	0,04693	1,715	0,04764	1,670	0,04190	1,670	0,04321	1,679	0,04233
0,02	0,02	1,710	0,09368	1,715	0,09519	1,670	0,08384	1,670	0,08852	1,679	0,08462

Таблица 15.5

Влияние  $\nu_0$  и  $\varepsilon_1$  на  $\nu$  и  $a_{\max}$ 

$\nu_0$	0,5				0,8			
	Метод Ю. А. Митропольского (15.224)		Метод усреднения (15.235)		Метод Ю. А. Митропольского (15.224)		Метод усреднения (15.235)	
$\varepsilon_1$	$\nu$	$a_{\max}$	$\nu$	$a_{\max}$	$\nu$	$a_{\max}$	$\nu$	$a_{\max}$
0,01	1,204	0,12210	1,204	0,12436	1,203	0,12004	1,204	0,12210
0,05	1,467	0,05819	1,467	0,06032	1,487	0,05871	1,490	0,05949
0,1	1,675	0,04020	1,675	0,04157	1,710	0,04693	1,715	0,04764
0,2	1,990	0,02893	1,980	0,02973	2,030	0,03957	2,040	0,04014
0,5	2,625	0,02086	2,625	0,02099	2,675	0,03385	2,700	0,03408
1,0	3,400	0,01762	3,350	0,01727	3,400	0,03135	3,450	0,03123



Влияние величины амплитуды силы  $E_1$  на  $\nu$  и  $a_{\max}$ 

Непосредственно интегрирование уравнений (15.238) с шагом $\Delta\tau = 0,1$ ; $\nu_0 = 0$ , $\varepsilon_1 = 0,01$											
$E_1$	0,005		0,01		0,02		0,04		0,05		
	$\nu$	$a_{\max}$	$\nu$	$a_{\max}$	$\nu$	$a_{\max}$	$\nu$	$a_{\max}$	$\nu$	$a_{\max}$	
0,01	1,215	0,0660	1,214	0,1326	1,213	0,2681	1,289	0,5770	1,335	0,7725	
0,02	1,215	0,0604	1,214	0,1211	1,213	0,2460	1,263	0,5164	1,312	0,6745	
0,04	1,185	0,0519	1,184	0,1040	1,183	0,2082	1,237	0,4282	1,262	0,5454	
0,10	1,155	0,0353	1,155	0,0706	1,154	0,1412	1,182	0,2824	1,181	0,3527	
Интегрирование уравнений Ю. А. Митропольского (15.226) с шагом $\Delta\tau = 0,01$ ; $\nu_0 = 0,8$ , $\beta_1 = 0,01$											
0,01	1,21	0,0648	1,211	0,1304	1,220	0,2674	1,30	0,6176	1,516	1,0453	
0,02	1,20	0,0597	1,203	0,1200	1,215	0,2447	1,27	0,5403	1,350	0,7626	
0,04	1,19	0,0514	1,190	0,1031	1,200	0,2084	1,23	0,4390	1,271	0,5760	
0,10	1,16	0,0352	1,160	0,0705	1,160	0,1413	1,18	0,2848	1,190	0,3584	

полученными из уравнений (15.236) и (15.237), наблюдаются в области больших скоростей прохождения через резонанс.

Табл. 15.3—15.5 и рис. 15.18, построенный по данным интегрирования уравнения (15.231), характеризуют влияние пара-

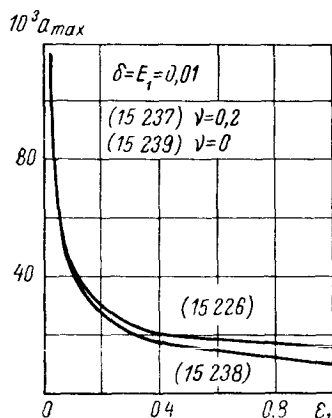


Рис. 15.17

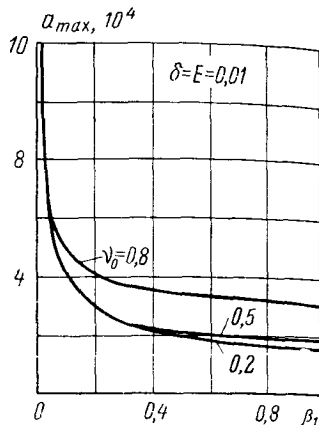


Рис. 15.18

метра  $\nu_0$ . При  $\epsilon_1 < 0,1$  это влияние оказывается незначительным. Чем меньше  $\nu_0$ , т. е. чем отдаленнее по частоте начало нестационарного процесса от резонансной зоны, тем лучше совпадают

результаты расчетов при использовании различных методов. С ростом  $\epsilon_1$  обнаруживается отличие результатов вычисления по уравнениям (15.225) и (15.235), зависящее от величины  $\nu_0$ . В связи с этим для  $\epsilon_1 > 0,1$  начальные значения  $a$  и  $\psi$  следует выбирать из условий

$$\frac{d\epsilon}{dt_1} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt_1} = 0$$

при  $t_1 = 0$  и  $\nu_0 = 0,2 \div 0,5$  (а не 0,8, как это обычно делается), если начало нестационарного процесса не определяется какими-либо конкретными условиями.

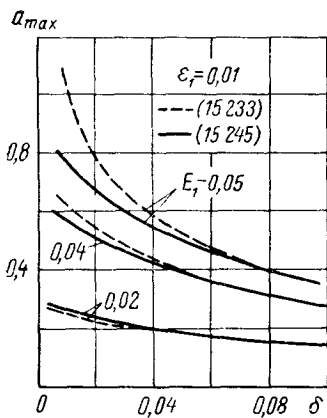


Рис. 15.19

Табл. 15.6 и рис. 15.19 дают наглядное представление о влиянии величины амплитуды возмущающей силы. Так, при помощи уравнений (15.224) для  $E_1 > 0,04$  в области малых значений  $\delta$  получаем завышенные значения максимальной амплитуды колебаний.

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

### Уравнения движения

Ниже рассматривается переход через резонанс системы, движение которой описывается уравнением Матье с правой частью. К интегрированию этого уравнения сводится задача о колебаниях стержня, пластины или оболочки, находящихся под действием нормальных и предельных сил.

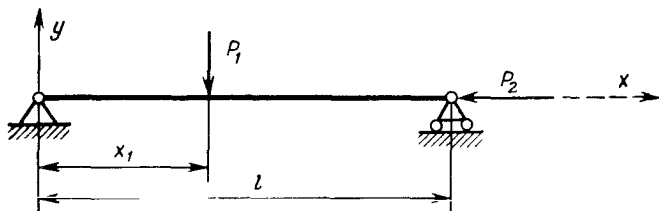


Рис. 15.20

Пусть стержень (рис. 15.20) нагружен силами

$$P_1 = P_0 \cos \frac{\varepsilon_1 t^2}{2} \quad \text{и} \quad P_2 = H_0 \cos 2 \Omega t. \quad (15.238)$$

С учетом сил трения дифференциальное уравнение движения стержня запишется в виде

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + \mu_0 EJ \frac{d^5 y}{dx^4 dt} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + P_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(t, x), \quad (15.239)$$

где  $EJ$  — жесткость стержня;

$\mu_0$  — коэффициент затухания;

$\rho F$  — масса единицы длины стержня.

Решение уравнения (15.239) может быть взято в виде ряда

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (15.240)$$

Удовлетворяющего граничным условиям. Подстановка ряда (15.240) в уравнение (15.239) дает

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \mu_m \frac{dY_n}{dt} + \omega_n^2 (1 - k_n \cos 2\Omega t) Y = \frac{P_n}{m} \cos \frac{\varepsilon_1 t^2}{2}; \quad (15.241)$$

здесь  $\mu_{1n} = \mu_0 \frac{EJ}{m} \left( \frac{\pi n}{l} \right)^4$ ;  $\omega_n^2 = \frac{EJ}{m} \left( \frac{\pi n}{l} \right)^4$ ;  $m = \rho Fl$ ;

$$P_n = 2P_0 \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad k_n = \frac{H_0}{EJ} \left( \frac{l}{\pi x} \right)^2.$$

К уравнению (15.241) аналогичным образом приводится задача об осесимметричных колебаниях цилиндрической оболочки с шарнирно-опертыми краями, находящейся под нагрузкой (рис. 15.21):

$$q(x, t) = q_0 \cos \frac{\varepsilon_1 t^2}{2}; \quad \rho = \rho_0 \cos 2 \Omega t.$$

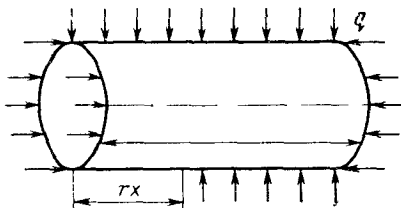


Рис. 15.21

Если пренебречь продольным инерционным членом, то уравнение осесимметричного движения цилиндрической оболочки будет

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu_0 \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + \frac{r^2}{D} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{r(1-\nu^2)}{Ea^2} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{r^4}{D} q(x, t), \quad (15.242)$$

где  $w$  — радиальное перемещение оболочки;  
 $D$  — изгибная жесткость;  
 $\nu$  и  $E$  — коэффициент Пуассона и модуль Юнга;  
 $r$  — радиус оболочки  $a^2 = \frac{h^2}{12r^2}$ ;  
 $h$  — толщина оболочки;  
 $\rho$  — плотность материала.

### Интегрирование уравнения для переходного процесса

Когда края оболочки шарнирно-оперты, в качестве решения уравнения (15.242) можно принять

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) \sin \frac{\pi n r}{l}, \quad (15.243)$$

где  $l$  — длина оболочки, а функции  $Y_n(t)$  определяются из уравнения (15.241) при соответствующем задании коэффициентов  $\omega_n$ ,  $\mu_n$ ,  $k_n$ ,  $m$  и  $P$ .

Для интегрирования уравнения (15.241) введем новую функцию  $\psi$ , такую, что  $\text{Re } \psi_n = Y_n(t)$ . Опуская индекс  $n$ , перепишем уравнение (15.241):

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + \mu_1 \frac{d\psi}{dt} + \omega^2 (1 - k \cos 2\Omega t) \psi = \frac{P}{m} e^{-i \frac{\varepsilon_1 t^2}{2}}. \quad (15.244)$$

Далее, вводя новые переменные  $\tau = \Omega t$  и  $\psi(t) = y(\tau) \exp \times \left(-\frac{\mu \tau}{2}\right)$ , преобразуем уравнение (15.244) к виду

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau) y = f(\tau), \quad (15.245)$$

где

$$f(\tau) = \frac{P}{m\Omega^2} \exp\left(\frac{\mu\tau}{2} - i\frac{\varepsilon\tau^2}{2}\right); \quad \mu = \frac{\mu_1}{\Omega}; \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\Omega^2}; \quad a = \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 - \frac{\mu^2}{4}; \quad 2q = k\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (15.246)$$

При нулевых начальных условиях решения уравнение (15.245) имеет вид

$$y(\tau) = \frac{y_2(\tau)}{c^2} \int_0^\tau f(\tau) y_1(\tau) d\tau - \frac{y_1(\tau)}{c^2} \int_0^\tau f(\tau) y_2(\tau) d\tau, \quad (15.247)$$

где  $y_1(\tau)$ ,  $y_2(\tau)$  — частные решения соответствующего однородного уравнения;

$c^2 = y_1(0) y_2'(0) - y_1'(0) y_2(0)$  — детерминант Вронского.

Будем предполагать, что  $y_1(\tau) e^{-i\beta\tau}$  и  $y_2(\tau) e^{i\beta\tau}$  являются периодическими функциями  $\tau$  [60]. Следовательно, в зависимости от значений параметров  $a$  и  $q$  период этих функций будет  $\pi$  или  $2\pi$ .

Если период равен  $\pi$ , то

$$x_1(\tau) = e^{i\beta\tau} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{2r} e^{i2r\tau}; \quad y_2(\tau) = e^{-i\beta\tau} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{2r} e^{-i2r\tau}, \quad (15.248)$$

где  $c_{2r}$  и  $\beta$  — постоянные коэффициенты, способы вычисления которых приводятся в теории уравнения Маттье [60].

Подставив выражения (15.246) в выражение (15.247), получим для  $P = \text{const}$

$$y(\tau) = \frac{P}{mc^2\Omega^2} \left\{ y_2(\tau) \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{2r} \int_0^\tau \exp\left(\gamma_{2r} + \frac{1}{2}\mu\tau\right) d\tau - y_1(\tau) \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{2r} \int_0^\tau \exp\left(\delta_{2r} + \frac{1}{2}\mu\tau\right) d\tau \right\}, \quad (15.249)$$

где

$$\gamma_{2r} = \frac{1}{2} i\varepsilon\tau^2 + i(2r + \beta)\tau; \quad \delta_{2r} = -\frac{1}{2} i\varepsilon\tau^2 - i(2r + \beta)\tau.$$

Введем новые переменные:

$$\text{для } 2r \gg 0 \quad u_{2r} = \frac{1-i}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( \varepsilon\tau - 2r - \beta + i\frac{\mu}{2} \right); \quad v_{2r} = \frac{i-1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( \varepsilon\tau - 2r + \beta + i\frac{\mu}{2} \right); \quad (15.250)$$

$$\text{для } 2r < 0 \quad \xi_{2r} = -u_{2r}; \quad \eta_{2r} = -v_{2r}, \quad (15.251)$$

с помощью которых выражение (15.249) перепишем так:

$$\begin{aligned} \psi = y(\tau) e^{-\frac{\mu\tau}{2}} = & \frac{(1-i)P}{2mc^2\Omega^2} \sqrt{\frac{\pi}{e}} \left\{ y_2(\tau) \left[ \sum_{r=0}^{\infty} c_{2r} \left( W(v_{2r}) \exp \gamma_{2r} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - W(u_{2r}^0) e^{-\frac{\mu\tau}{2}} \right) - \sum_{r=-1}^{\infty} c_{2r} \left( W(\xi_{2r}) \exp \gamma_{2r} - W(\xi_{2r}^0) e^{-\frac{\mu\tau}{2}} \right) \right] + \\ & + y_1(\tau) \left[ \sum_{r=0}^{\infty} c_{2r} \left( W(v_{2r}) \exp \delta_{2r} - W(v_{2r}^0) \exp \left( -\frac{\mu\tau}{2} \right) \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{r=-1}^{\infty} c_{2r} \left( W(\eta_{2r}) \exp \delta_{2r} - W(\eta_{2r}^0) \exp \left( -\frac{\mu\tau}{2} \right) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (15.252)$$

где  $u_{2r}^0, v_{2r}^0, \xi_{2r}^0, \eta_{2r}^0$  — значения  $u_{2r}, v_{2r}, \xi_{2r}, \eta_{2r}$  при  $\tau = 0$ ;  
 $W$  — интеграл вероятностей от комплексного аргумента (15.10).

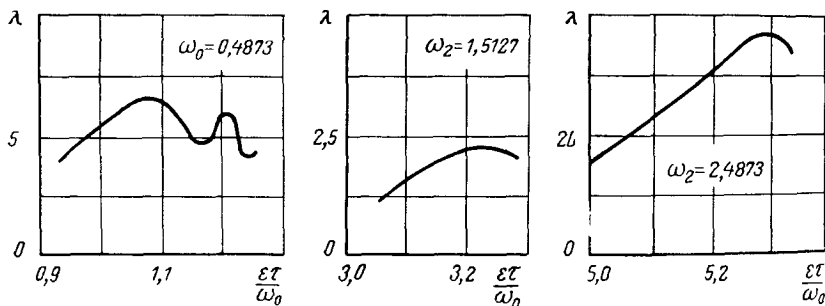


Рис 15.22

Модуль  $|\psi(\tau)|$  представляет собой огибающую кривой колебательного процесса.

Из сравнения полученного решения с решением аналогичной задачи для системы с постоянными параметрами следует, что значения

$$\omega_{2r} = |2r + \beta| \quad (\pm r \pm 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (15.253)$$

можно рассматривать как спектр безразмерных собственных частот. При этом основной частотой является частота, ближайшая к  $\sqrt{a}$ . Таким образом, в отличие от системы с постоянными параметрами, здесь имеет место не один резонанс, а бесконечное множество резонансов, из которых практическое значение могут иметь лишь несколько первых.

Выражения для  $\psi(\tau)$  и спектра частот, когда период функции  $y_1(\tau) \exp(-i\beta\tau)$  и  $y_2(\tau) \exp(i\beta\tau)$  равен  $2\pi$ , получают из формул

(15.252) и (15.253) путем замены  $2r$  на  $2r + 1$ . Значение периода определяется параметрами  $a$  и  $q$ .

На рис. 15.22 приведены кривые перехода через резонанс при  $a = 6,25$ ;  $q = 0,8$ ;  $\mu = 0,05$ ;  $\varepsilon = 0,0025$ .

В табл. 52 даны максимальные значения динамического коэффициента  $\lambda = \frac{|\Psi(\tau)|}{\Psi_{ст}}$ , вычисленные с помощью формулы (15.23) для первых трех резонирующих частот и полученные при помощи

Таблица 15.7

Значения динамического коэффициента

$2r$	$\omega_{2r}$	$c_{2r}$	$\lambda_{теор}$	$\lambda_{мод}$
0	0,4873	1	6,3	5,8
-2	1,5127	0,1967	2,3	2,2
2	2,4873	7,3083	36,4	35,7
-4	3,5172	-0,0259	—	—
4	4,4873	-0,4216	—	2,8

электронной моделирующей машины МПТ-9.

На рис. 15.23 представлены графики  $\lambda$  в зависимости от  $a$  и  $q$ , полученные на МПТ-9 при переходе системы через основной резонанс (сплошные линии) и два побочных. При этом пунктирные линии соответствуют побочным резонансам, наблюдавшимся до основного резонанса, а штрих-пунктирные — после основного резонанса ( $\omega = 3,74 \text{ сек}^{-1}$ ;  $\xi_1 = 0,04 \text{ сек}^{-2}$ ;  $\mu_1 = 0,2 \text{ сек}^{-1}$ ).

В системах с периодически изменяющимися параметрами при побочных резонансах амплитуды колебаний могут быть значительными.

В табл. 15.7 приведены результаты теоретических расчетов и значения  $\lambda$ , полученные на модели. Хорошее совпадение значений  $\lambda_{теор}$  и  $\lambda_{мод}$  подтверждает вывод о наличии в системах с периодически изменяющимися параметрами, кроме основного, как называемых побочных резонансов, амплитуда колебаний которых может быть значительной.

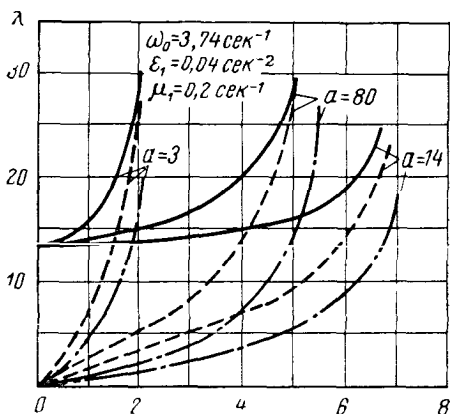


Рис. 15.23

## КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛОВ

Изучение колебаний роторов машин представляет значительный практический интерес. При проектировании роторов в первую очередь интересуются значениями собственных частот изгибных колебаний или критическими числами оборотов. На спектр частот существенное влияние оказывают жесткость опор [20], масляная пленка, гироскопический эффект, нелинейности опор, неодинаковость главных моментов инерции сечений вала, поэтому представляет интерес изучение и нестационарных колебаний гибких роторов [21, 28, 30].

В последнее время изучаются особенности нестационарного движения гибкого вала совместно с двигателем ограниченной мощности. В этом случае предположение о возможности действия линейного изменения угловой скорости отпадает. Угловая скорость вращения зависит от колебательного движения вала, т. е. система двигатель—ротор связана.

### КРИТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА ОБОРОТОВ МНОГООПОРНЫХ ВАЛОВ

#### Колебания вала на жестких опорах

Для определения критических чисел оборотов валов или собственных частот многопролетных стержней, с использованием электронных машин удобно исходить из метода, который был предложен еще в 1936 г. [144], или с помощью матричного метода. Рассмотрим их сущность.

Для нахождения частот колебаний вал подразделяется на большое количество участков и масса каждого участка делится на две половины, которые сосредотачиваются на концах участка. Жесткость вала  $EJ$  на данном участке принимается постоянной.

Следовательно, реальный вал заменяется стержнем со ступенчатым изменением жесткости; в местах изменений сечений вала приложены сосредоточенные массы или опорные реакции от подшипников (рис. 16.1).



### Дифференциальное уравнение колеблющегося вала

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right) = p(x, t), \quad (16.1)$$

где  $p(x, t)$  везде равно нулю, за исключением сечений, в которых приложены сосредоточенные нагрузки от инерции масс или реакцией опор.

Для установившихся гармонических колебаний с частотой  $\omega$

$$Y(x, t) = y(x) \sin \omega t.$$

Сосредоточенные нагрузки в этих сечениях

$$\begin{aligned} p_i(x, t) &= -m_i \frac{\partial^2 Y_i}{\partial t^2} = \\ &= m_i \omega^2 y_i(x) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Дифференциальное уравнение в каждом участке длиной  $l_i$  и жесткостью  $EJ_i$  будет

$$EJ_i \frac{d^4 y_i}{dx^4} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (16.3)$$

Задача сводится к определению собственных частот изгибных колебаний многоопорного невесомого вала, жесткость которого изменяется по ступенчатому закону; в местах изменений сечений вала приложены сосредоточенные нагрузки  $m_i \omega^2 y_i$  и реакции опор.

Решение уравнения (16.1) должно удовлетворять на левом и правом концах вала соответствующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} y = y'' &= 0 \quad \text{для } x = 0 \text{ или } x = l \quad (\text{конец оперт}); \\ y = y' &= 0 \quad \text{» } x = 0 \quad \text{» } x = j \quad (\text{конец заделан}); \\ y'' = y''' &= 0 \quad \text{» } x = 0 \quad \text{» } x = l \quad (\text{конец свободен}). \end{aligned}$$

Величина поперечной силы при переходе через сечение, в котором находится сосредоточенная масса  $m_{n-1}$ , т. е. от участка  $n-1$  к участку  $n$ , изменяется скачкообразно на величину инерционной силы от массы  $m_{n-1}$ :  $\Delta Q = m_{n-1} \omega^2 y_{n-1}$ , т. е.

$$Q_n = Q_{n-1} + m_{n-1} \omega^2 y_{n-1} \quad (0 \leq x \leq l_n).$$

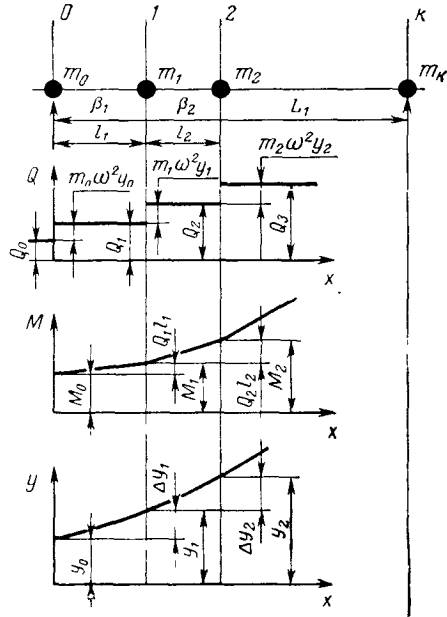


Рис. 16.1

Изгибающий момент в участке вала  $l_n$  изменяется по закону:

$$M_n = M_{n-1} + Q_n x,$$

следовательно,

$$Q_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}.$$

Уравнение изогнутой оси для участка  $l_n$

$$y_n = y_{n-1} + \theta x + \frac{1}{EJ_n} \left( M_{n-1} \frac{x^2}{2} + \frac{M_n - M_{n-1}}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right).$$

Следовательно, значения перемещения, поперечной силы, момента и угла поворота в конце  $n$ -го участка будут

$$\left. \begin{aligned} y_n &= \beta_n \left( \frac{M_{n-1}}{3} + \frac{M_n}{6} \right) l_n + \theta_{n-1} l_n + y_{n-1}; \\ Q_n &= Q_{n-1} + m_{n-1} \omega^2 y_{n-1}; \\ M_n &= M_{n-1} + Q_n l_n; \\ Q_n &= \frac{1}{2} (M_{n-1} + M_n) \beta_n + Q_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

где  $\beta_n = \frac{l_n}{EJ_n}$ .

Расчет проводим, начиная от левого конца, сперва для граничных условий

$$y_0 = 0; \theta_0 = 0; M_0 = 0; Q_0 = 1. \quad (I)$$

В результате расчета всех участков первого пролета с граничными условиями (I) с помощью формул (16.4) получим на правом конце первого пролета, содержащего  $k$  участков, значения перемещений  $y_{1k}$ ,  $\theta_{1k}$ ,  $M_{1k}$ .

Аналогичным образом проводим расчет для левого конца при следующих условиях:

$$y_0 = 0; \theta = 1; M_0 = Q_0 = 0. \quad (II)$$

В результате этого расчета получим в конце первого пролета  $y_{11k}$ ,  $\theta_{11k}$ ,  $M_{11k}$ , а следовательно, если на левом конце  $Q = Q_0$  и  $\theta = \theta_0$ , то

$$\left. \begin{aligned} y_k &= y_{1k} Q_0 + y_{11k} \theta_0; \\ \theta_k &= \theta_{1k} Q_0 + \theta_{11k} \theta_0; \\ M_k &= M_{1k} Q_0 + M_{11k} \theta_0. \end{aligned} \right\} \quad (16.5)$$

В сечении, где расположена первая промежуточная жесткая опора,  $y_k = 0$ , следовательно, из выражения (16.5) найдем

$$Q_0 = -\frac{y_{11k}}{y_{1k}} \theta_0.$$

Значения  $\theta_k$ ,  $M_k$  под этой опорой будут

$$\left. \begin{aligned} \theta_k &= \left( \theta_{11k} - \frac{y_{11k}}{y_{1k}} \theta_{1k} \right) \theta_0; \\ M_k &= \left( M_{11k} - \frac{y_{11k}}{y_{1k}} M_{1k} \right) \theta_0. \end{aligned} \right\} \quad (16.6)$$

Второй пролет рассчитываем аналогичным образом, сперва с граничными условиями

$$Q_k = 1; \quad M_k = y_k = \theta_k = 0, \quad (I')$$

а затем с условиями

$$\theta = \theta_k; \quad M = M_k; \quad Q_k = y_k = 0. \quad (II')$$

При этих условиях проводим расчет второго пролета, аналогично расчету первого пролета. В результате после расчета всех пролетов найдем для правого опертого конца значение  $\dot{M}(\omega)$  по формуле (16.6).

Расчет проводим для нескольких значений  $\omega$ :  $\omega_0$ ,  $\omega_0 + \Delta\omega$ ,  $\dots$ ,  $\omega_0 - i \Delta\omega \dots$ . Если правый конец вала оперт, то  $M(\omega_i)$  должно обращаться в нуль, значения  $\omega(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots)$ , для которых  $M(\omega_i) = 0$ , дают значения частоты.

Аналогичным образом расчет проводится и для других условий опирания. Например, если левый участок вала представляет собой консоль, то  $M_0 = 0$ ,  $Q_0 = 0$ , а  $\theta_0$  и  $y_0$  не равны нулю.

На основании изложенного метода составлена программа для расчета на электронной цифровой машине, работа которой начинается с ввода программы и исходных данных в оперативную память. По этой программе сперва производится подготовка расчета первого пролета. В фиксированные ячейки вводятся  $l_1, l_2, \dots, l_k; m_1, m_2, \dots, m_k; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  для первого пролета и производится расчет по формулам (16.4) для условий (I), после первого расчета первого пролета запоминаются результаты первого расчета  $M_{1k}, y_{1k}, \theta_{1k}, Q_{1k}$  и проводится второй расчет с граничными условиями (II).

После первого и второго расчетов первого пролета переходим к расчету второго пролета с граничными данными для первого участка этого пролета (I) и (II), где значения  $\theta_k, M_k$  определяются из формулы (16.6).

После второго расчета последнего пролета вычисляется и запоминается изгибающий момент  $M = M(\omega)$  и знак момента на крайней правой опоре и расчет повторяется для  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ ,  $\omega = \omega_0 - 2\Delta\omega$  до тех пор, пока не найдем нужное количество перемен знака  $M(\omega_i)$ .

Те значения  $\omega_i$ , для которых  $M(\omega_i) = 0$ , дают значения критических частот.

## Колебания вала на упругих опорах

При расчете критических чисел оборотов вращающихся валов следует учитывать также жесткость опоры, ее массу, а также податливость масляной пленки (рис. 16.2).

В этих условиях мы имеем опору с массой  $M$ , связанную с валом и основанием упругими элементами (пружинами), с жесткостями  $p$  — для масляной пленки и  $c$  — для опоры (рис. 16.2).

Действие опоры на вал может быть заменено действием экви-

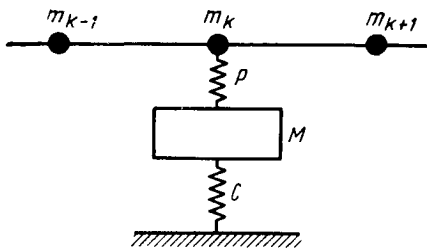


Рис. 16.2

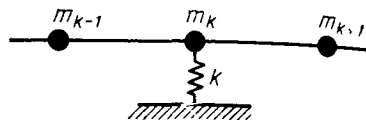
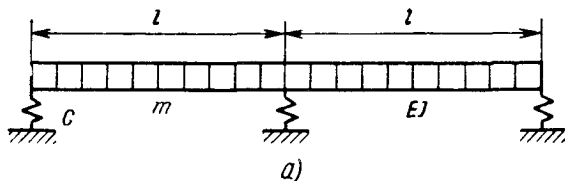


Рис. 16.3

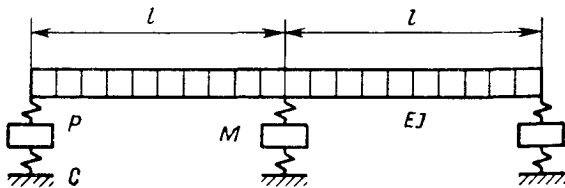
валентной опоры (рис. 16.3), имеющей динамическую жесткость, равную  $K(\omega)$ , где  $K\omega_k = P$ ; значение  $K(\omega)$  находится без затруднений из рассмотрения колебаний системы, исходя из уравнений

$$-p(Y_k - Y_1) + P \sin \omega t = 0;$$

$$-MY_1'' - cY_1 + p(Y_k - Y_1) = 0.$$



a)



б)

Рис. 16.4

Отсюда найдем  $y_k$ , полагая  $Y_k = y_k \sin \omega t$ , а следовательно, и  $K(\omega) = \frac{P}{y_k}$ , получим

$$K(\omega) = p \frac{c - M\omega^2}{c + p - M\omega^2}. \quad (16.7)$$

Граничные условия для упругих опор:

$$K_0(\omega) y_0 + Q_0 = 0; \quad M_0 = 0 \text{ (левый конец);}$$

$$K_n(\omega) y_0 - Q_{n+1} = 0; \quad M_n = 0 \text{ (правый конец).}$$

Для выявления особенностей колебаний на упругих опорах рассмотрим два примера численного расчета валов на упругих опорах, проведенных с помощью программ, разработанных на

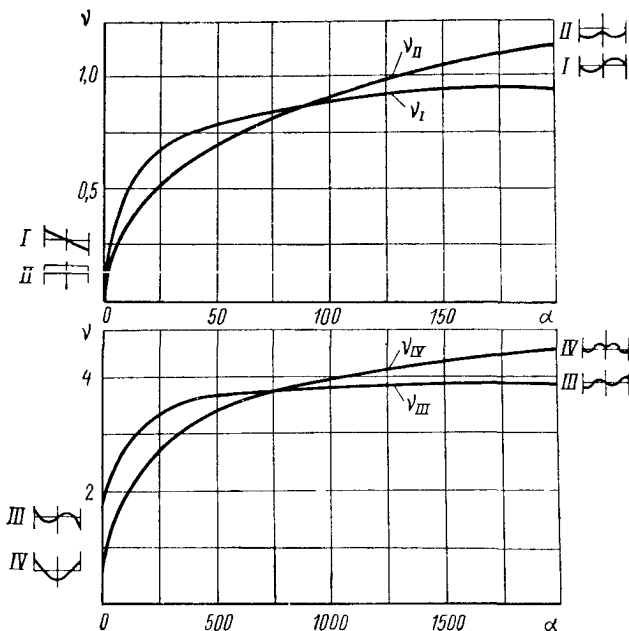


Рис. 16.5

основе указанного метода. Для этих примеров (рис. 16.4) приняты обозначения:

$$\omega_0 = \pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{F\rho l^4}} \text{ — основная частота колебаний для опертой балки длиной } l;$$

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ — безразмерная частота;}$$

$$\alpha_{nl} = \frac{\rho l^3}{EJ}; \quad \alpha_{on} = \frac{cl^2}{EJ} \text{ — безразмерные жесткости масляной пленки и опоры;}$$

$$\mu = \frac{3M}{2ml}.$$

**Вал постоянного сечения на трех одинаковых упругих опорах.**  
 При расчете вал разбит на 20 участков (рис. 16.4, а).

На рис. 16.5 представлены в безразмерных величинах результаты расчета первых четырех частот в зависимости от жесткости опор  $\alpha$ ; там же приведены формы колебаний.

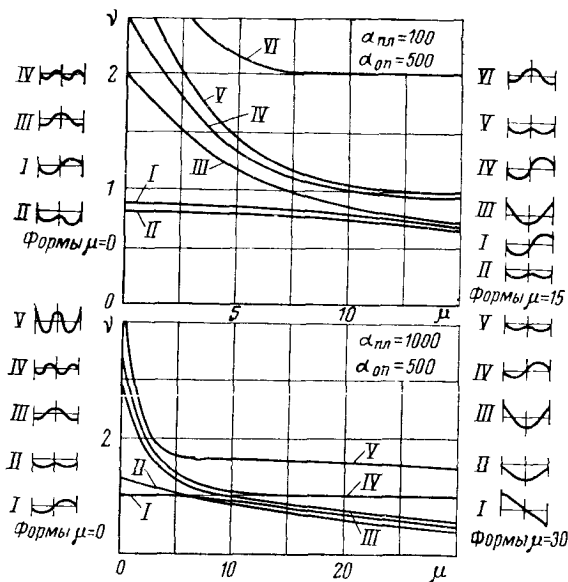


Рис. 16.6

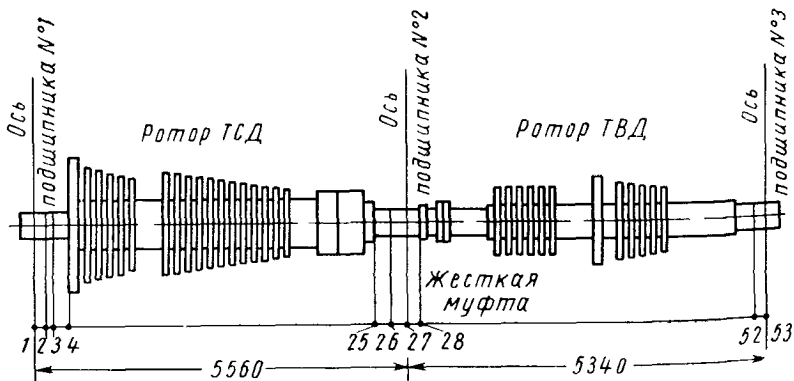


Рис. 16.7

Частоты колебаний двухопорного вала на абсолютно жестких опорах

$$\omega_1 = \omega_0; \omega_2 = 1,5613\omega_0; \omega_3 = 4\omega_0; \omega_4 = 5,048\omega_0.$$

Вал постоянного поперечного сечения на трех одинаковых упругих весомых опорах с масляной пленкой (рис. 16.4, б).

Исходные данные к расчету критических скоростей и форм колебаний системы роторов

№ сечения	$\Delta x$ , в см	$m$ в $1/кг \text{ сек}^2/см$	$\beta$ в $1/кг \cdot см$	№ сечения	$\Delta x$ , в см	$m$ в $1/кг \text{ сек}^2/см$	$\beta$ в $1/кг \cdot см$
1	18,0	0,0893	$142,0 \cdot 10^{-12}$	27	15,2	0,746	$177,0 \cdot 10^{-12}$
2	9,4	0,104	25,7	28	9,3	0,0811	31,4
3	22,95	0,3265	13,82	29	25,3	0,2529	34,2
4	32,45	0,9455	8,0	30	46,8	0,603	61,1
5	14,5	1,0375	6,2	31	16,4	0,5805	26,2
6	13,95	0,713	6,25	32	17,2	0,3785	27,2
7	15,85	0,724	7,24	33	17,45	0,387	28,5
8	16,85	0,772	7,89	34	17,55	0,391	29,6
9	69,0	1,1435	63,3	35	18,2	0,395	30,6
10	17,3	1,179	7,31	36	45,8	0,748	77,0
11	14,4	0,82	6,14	37	39,4	0,865	65,4
12	14,5	0,7895	6,06	38	16,9	0,435	34,8
13	14,85	0,8085	6,09	39	18,2	0,3555	29,55
14	15,65	0,858	6,1	40	18,2	0,4325	29,2
15	17,7	0,9385	6,78	41	16,7	0,423	26,4
16	20,4	1,0905	7,68	42	14,45	0,398	22,6
17	16,0	1,142	5,26	43	13,7	0,379	21,2
18	27,75	0,9805	10,2	44	13,7	0,3925	21,2
19	14,0	0,9935	15,15	45	38,55	0,5155	59,2
20	19,0	1,29	22,35	46	21,6	0,478	30,2
21	22,0	1,735	26,45	47	15,0	0,284	21,5
22	32,0	2,51	42,5	48	16,0	0,2975	30,8
23	43,0	3,645	59,5	49	21,5	0,2693	99,0
24	16,6	2,447	28,1	50	12,5	0,1322	74,5
25	17,9	0,5045	31,0	51	6,0	0,0984	6,16
26	20,0	0,306	51,9	52	22,0	0,1335	123
27		0,0746		53		0,1325	

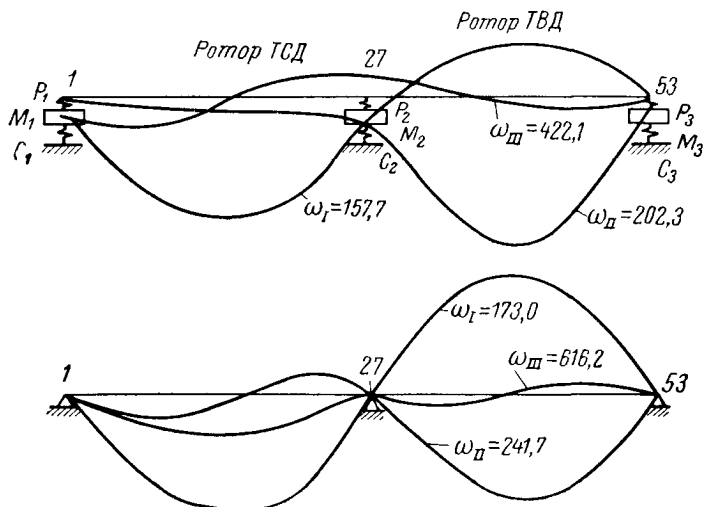


Рис. 16.8

На рис. 16.6 приведены результаты расчета для  $\alpha_{nl} = 100$  и  $\alpha_{on} = 500$ , а также для  $\alpha_{nl} = 1000$ ,  $\alpha_{on} = 500$ .

На рис. 16.6 видно, что при наличии массы опор  $M$  и масляной пленки спектр частот значительно меняется и эти факторы должны учитываться при определении критических чисел оборотов валов турбомашин.

Для того чтобы показать влияние опор и масляной пленки на критические числа оборотов и формы колебаний для реальной системы, приведем данные расчета роторов турбины среднего и высокого давления, соединенных жесткой муфтой и установленных на трех опорах. При расчете принято:

веса опор  $G_1 = G_2 = G_3 = 10\,000$  кг;

податливость масляной пленки  $p_1 = p_2 = p_3 = 2 \cdot 10^6$  кг/см;

податливость опор  $c_1 = c_2 = c_3 = 5 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>.

Расчетная схема показана на рис. 16.7, исходные данные для расчета приведены в табл. 16.1. Результаты расчета, проведенного по указанной выше программе на ЭЦВМ, представлены на рис. 16.8.

Для расчета собственных частот и форм колебаний многопролетных стержней (и валов) на ЭЦВМ удобно применять матричные методы, на которых остановимся ниже [142].

#### МЕТОД «МАТРИЦ ПЕРЕНОСА» ДЛЯ РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ФОРМ И ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ МНОГОПРОЛЕТНОГО СТЕРЖНЯ

Метод «матриц переноса» является одним из весьма эффективных приемов для нахождения собственных частот и форм колебаний многопролетных стержней при тех предположениях, которые указаны выше (стр. 572), т. е. ступенчатое изменение сечений и сосредоточенное приложение масс и сил. Метод удобен простой логикой и однотипностью операций.

#### Матричное уравнение для однородного участка весомого вала

Решение уравнения колеблющегося стержня (4.1), выраженное через функции А. Н. Крылова (4.6) можно записать в виде

$$y(x) = y_i Y_1(x) + \theta l_i Y_2(x) + M \frac{l_i^2}{EJ l_i} Y_3(x) + Q \frac{l_i^3}{EJ l_i} Y_4(x). \quad (16.8)$$

Беря производные по  $x$  от уравнения (16.8) получим значения  $\theta_{i+1}$ ,  $M_{i+1}$ ,  $Q_{i+1}$  и  $y_{i+1}$  на правом конце стержня при  $x = l_{i+1}$ , в зависимости от функций А. Крылова.

Вводя обозначения

$$y_i = y; \quad \theta l_i = \bar{\theta}_i; \quad \frac{l_i^2}{EJ} M_i = \bar{M}_i; \quad \frac{l_i^3}{EJ} Q_i = \bar{Q}_i,$$

можно записать для правого конца участка балки значения в виде матричного выражения (для  $x = l_i$ )



$$\begin{bmatrix} y \\ \bar{\theta} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} Y_1(x) & nY_2(x) & \frac{n^2}{k}Y_3(x) & \frac{n^3}{k}Y_4(x) \\ \frac{r^4}{n}Y_4(x) & Y_1(x) & \frac{n}{k}Y_2(x) & \frac{n^2}{k}Y_3(x) \\ \frac{r^4k}{n^2}Y_3(x) & \frac{r^4k}{n}Y_4(x) & Y_1(x) & nY_2(x) \\ \frac{r^4k}{n^3}Y_2(x) & \frac{r^4k}{n^2}Y_3(x) & \frac{r^4}{n}Y_4(x) & Y_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \bar{\theta} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_i; \quad (16.9)$$

здесь

$$k = \frac{EJ_l}{EJ}, \quad \frac{l_i}{l} = n_i.$$

Система уравнений (16.9) связывает четыре величины  $y$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{M}$ ,  $\bar{Q}$  левого края с величинами правого края. Символически это можно записать так:

$$[W_{i+1}] = [R_i][W_i], \quad (16.9')$$

рассматривая величины  $y$ ,  $\theta$ ,  $M$ ,  $Q$  как компоненты вектора. Матрица  $[R_i]$  называется «матрицей переноса», или матрицей Рэлея.

«Матрица переноса» относит величины  $y$ ,  $\theta$ ,  $M$ ,  $Q$  в одной точке конструкции к величинам в другой точке, например, величины  $y_0$ ,  $\theta_0$ ,  $M_0$ ,  $Q_0$  в сечении  $O$  к соответствующим величинам в сечении  $I$  стержня (рис. 16.9).

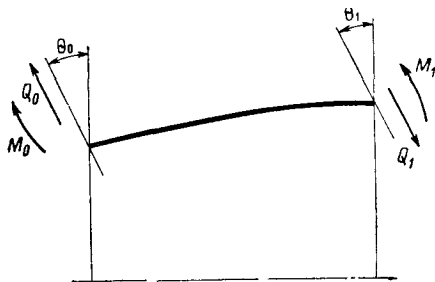


Рис. 16.9

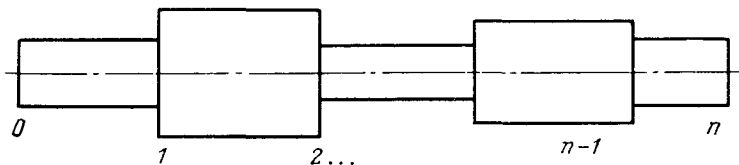


Рис. 16.10

Такие матрицы составляются для каждого участка вала.

Уравнение (16.9) можно обобщить очень простым способом для стержней  $n$ -различных сечений (рис. 16.10).

Метод расчета заключается в следующем. Составляются матрицы для каждого участка стержня, затем эти матрицы последовательно перемножаются. При подходе к промежуточной опоре составляется матрица промежуточной опоры, которая умножается

на предыдущий результат. Затем составляются матрицы для следующих участков и т. д., пока не перемножатся матрицы для всех участков. Таким образом получается матрица для всего сложного стержня

$$[W_n] = R_n \cdot R_{n-1} \cdot R_{n-2} \cdot \dots \cdot R_2 R_1 [W]_0 = P [W]_0, \quad (16.10)$$

где  $P$  — произведение матриц  $R$ , вычисленное согласно правилу: строка перемножается на столбец.

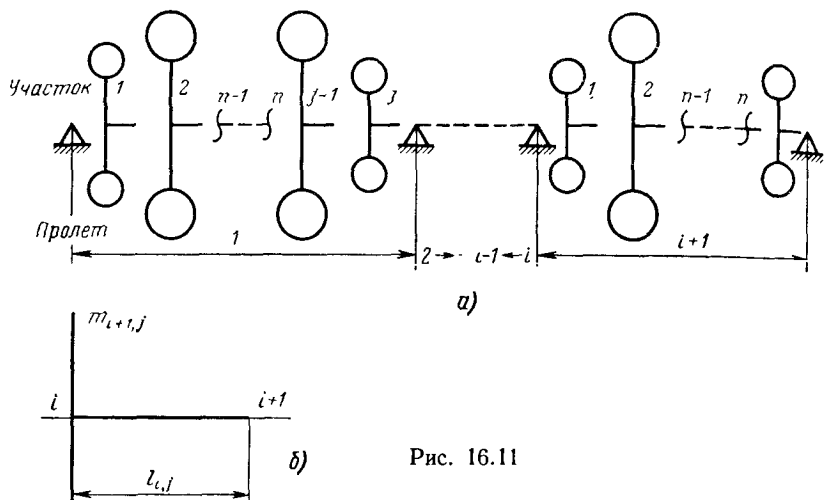


Рис. 16.11

Для определения собственной частоты стержня  $\omega_{кр}$ , необходимо приравнять нулю определитель всей системы, получающийся в зависимости от крайних условий.

Таким образом, «матрицы переноса» дают способ определения всех величин, характеризующих поведение стержня или любой другой конструкции.

«Матрица переноса»  $R$  — кососимметрична, ее детерминант равен 1, а ее обратная величина тождественна  $R$ , за исключением того, что элементы имеют переменные знаки, которые распределены в шахматном порядке, причем первый элемент (левый вверху) положительный.

Механически это означает, что перенос от точки 1 к точке 0 имеет ту же матрицу, что и переноса от 0 к 1, учитывая, что знаки  $\theta$  и  $Q$  обратны.

Функции  $Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$ ,  $Y_3(x)$ ;  $Y_4(x)$  можно представить сходящимися рядами; при  $r = 1$  и для восьмого порядка точности достаточно, например, первых трех членов.

Для численного расчета используется приближенная расчетная схема, показанная на рис. 16.11, а.

Схема строится следующим образом. Стержень разбивается на ряд участков. Масса участка разносится к его концам так,

чтобы положение центра масс не изменилось. Участок стержня между сосредоточенными массами считается невесомым с жесткостью на изгиб, равной жесткости участка стержня. Составляются матрицы для каждого участка пролета. Эти матрицы последовательно перемножаются, получается матрица всего пролета. При подходе к промежуточной опоре составляется матрица промежуточной опоры. Затем составляются матрицы участков для следующего пролета и т. д., пока не перемножатся матрицы для всех пролетов.

Основная матрица, составленная для одного участка стержня между  $i$ -м и  $(i + 1)$ -м сечениями, состоящего из сосредоточенной массы  $m_{i+1, j}$ , безмассового отрезка вала длины  $l_{i+1, j}$  и постоянной жесткости участка  $EJ_{i+1, j}$  (рис. 16.11, б), имеет вид

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{i+1, j} = \begin{bmatrix} 1 & l_i & \frac{l_i^2}{2EJ_i} & \frac{l_i^3}{6EJ_i} \\ 0 & 1 & \frac{l_i}{EJ_i} & \frac{l_i^2}{2EJ_i} \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ m_i\omega^2 & m_i\omega^2 l_i & m_i\omega^2 \frac{l_i^2}{2EJ_i} & 1 + m_i\omega^2 \frac{l_i^3}{6EJ_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{i, j} \quad (16.11)$$

Метод не изменится и в том случае, если при расчете учитывается действие на стержень неуравновешенных масс. Пусть неуравновешенная масса  $m'_{ij}$  прикреплена к основной на расстоянии  $h_{ij}$  от центра.

Если стержень вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  и его центр тяжести смещен относительно оси вращения, на него действуют силы  $m_{ij}\omega^2 y_{i-1, j}$  и  $m'_{ij}\omega^2 (h_{ij} + y_{i-1, j})$ .

Так как смещения предполагаются малыми, то составляющей  $m'_{ij}\omega^2 y_{i-1, j}$  можно пренебречь, и  $m'_{ij}\omega^2 (h_{ij} + y_{i-1, j}) \approx V_{ij}\omega^2$ , где  $V_{ij} = m'_{ij}h_{ij}$ .

Тогда  $y$ ,  $\theta$ ,  $M$  и  $Q$  на правом конце участка связаны с этими величинами на левом конце матричным уравнением

$$\begin{bmatrix} Q \\ M \\ \theta \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_{i, j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & m\omega^2 & V_i\omega^2 \\ l_i & 1 & 0 & l_i m\omega^2 & l_i V_i\omega^2 \\ \frac{l_i^2}{2EJ_i} & \frac{l_i}{EJ_i} & 1 & \frac{l_i}{2EJ_i} m\omega^2 & \frac{l_i^2}{2EJ_i} V_i\omega^2 \\ \frac{l_i^3}{6EJ_i} & \frac{l_i^2}{2EJ_i} & l_i & \frac{l_i^3}{6EJ_i} m\omega^2 + 1 & \frac{l_i^3}{6EJ_i} V_i\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ M \\ \theta \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_{i-1, j} \quad (16.12)$$


### Краевые условия $\Delta$ -матрицы

Уравнение (16.9) для балки с краями  $l$  и  $k$  можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} y \\ \bar{\theta} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \bar{\theta} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_l, \quad (16.13)$$

где  $a_{ik}$  — компоненты матрицы  $[R]$ .

Для 4-х видов закреплений определяются две компоненты векторов  $W_l$  и  $W_k$ , а две другие равны нулю



$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\theta} \\ 0 \\ \bar{Q} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ \bar{M} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y \\ \bar{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (16.13')$$

Если подставить данные крайние условия в (16.13), то можно получить такие два однородных линейных уравнения, левая часть которых равна нулю.

Так, например, для балки, слева защемленной, а справа опертой, имеем

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\theta} \\ 0 \\ \bar{Q} \end{bmatrix}; \quad 0 = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}. \quad (16.14)$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} = 0. \quad (16.15)$$

Если раскрыть определитель  $\Delta$ , то можно определить собственную частоту балки. Для стержня с несколькими сечениями, обычно, уравнение в развернутом виде нельзя записать. Численно рассчитывают детерминант путем подстановки вычисленных частот в интересующую нас область (например, в окрестностях угловой критической скорости механизма) и изменяют  $\omega$  до тех пор,

пока остаточный определитель не изменит знак на противоположный. Переход кривой  $\Delta = \Delta(\omega)$  через нуль дает затем искомую собственную частоту.

Если балка состоит из нескольких (однородных) участков (рис. 16.12) и в местах перехода нет внешних приложенных сил, то считаем на каждом месте перехода  $W_{i, \text{слева}} = W_{i, \text{справа}}$ , и матрица сечения  $R$  получается по правилу умножения матриц

$$[R] = [R_{k-1}] \dots [R_{i+1}] [R_i] \quad (16.16)$$

$$[W_k] = [R] [W_i].$$

Запишем  $R$ -матрицу для стержня, с любыми условиями закрепления на концах. Для простоты изложения рассмотрим стержень, состоящий из двух участков.

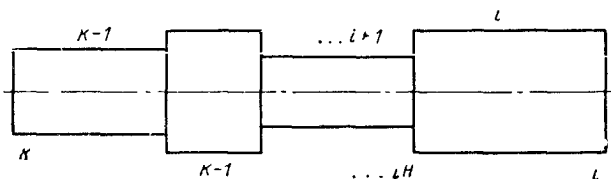


Рис. 16.12

Введем общие обозначения:  $A$  — матрица первого участка;  $B$  — матрица второго участка;  $C = AB$  — произведение матриц. Перемножим матрицы участков по схеме 16.16. Из четырех элементов матрицы произведения образуем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{ab} & c_{ad} \\ c_{bc} & c_{bd} \end{vmatrix}, \quad (16.17)$$

где  $C_{ik}$  — элементы определителя второго порядка для соответствующих условий закрепления на концах.

Или

$$\Delta = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 (B_{ai} A_{ic} B_{bk} A_{kd} - B_{bi} A_{ic} B_{ak} A_{kd}).$$

Из 32 членов этой двойной суммы 8 пропадает при  $i = k$ . Вынесем из-под знака суммы  $A_{ic}$  и  $A_{kd}$ , остатком будет определитель

$$\begin{vmatrix} B_{ai} & B_{ak} \\ B_{bi} & B_{bk} \end{vmatrix}.$$

Для  $i < k$  и  $i > k$  можно записать

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=2}^4 \begin{vmatrix} B_{ai} & B_{ak} \\ B_{bi} & B_{bk} \end{vmatrix} A_{ic} A_{kd} + \sum_{k=1}^3 \sum_{i=2}^4 \begin{vmatrix} B_{ai} & B_{ak} \\ B_{bi} & B_{bk} \end{vmatrix} A_{ic} A_{kd}.$$

Заменяем во втором члене индексы  $i$  и  $k$ , тогда оба члена можно объединить

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{k=2 \\ i < k}}^4 \begin{vmatrix} B_{ai} & B_{ak} \\ B_{bi} & B_{bk} \end{vmatrix} (A_{ic}A_{kd} - A_{kc}A_{id})$$

или

$$\begin{vmatrix} c_{ac} & c_{ad} \\ c_{bc} & c_{bd} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{k=2 \\ i < k}}^4 \begin{vmatrix} B_{ai} & B_{ak} \\ B_{bi} & B_{bk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{ic} & A_{id} \\ A_{kc} & A_{kd} \end{vmatrix}. \quad (16.18)$$

Приведем более удобную и наглядную запись определителя  $\Delta$ . Кроме значков для матрицы этого определителя введем четыре индекса: два для строк и два для столбцов. Таким образом, для определителя, стоящего слева в уравнении (16.18), можно записать  $c_{ab}^{cd}$ .

Можно установить последовательность комбинаций строк и столбцов по следующей схеме:

$$\begin{array}{l} \text{строки или столбцы} \quad \frac{a}{c} \frac{b}{d} \quad 1,2 \quad 1,3 \quad 1,4 \quad 2,3 \quad 2,4 \quad 3,4 \\ \text{комбинации индексов} \quad \frac{p}{q} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \quad (16.19)$$

При этом символом  $c_{pq}^{\Delta}$  обозначен тот определитель, элементы которого находятся по схеме (II) посредством  $p$ -й комбинации двух строк и  $q$ -й комбинации двух столбцов. Так, например:

$$c_{35}^{\Delta} = \begin{vmatrix} c_{12} & c_{14} \\ c_{42} & c_{44} \end{vmatrix}. \quad (16.20)$$

Между комбинациями значков  $p$  и  $q$  и индексами элементов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  нет никакой формальной взаимозависимости. Схема 16.18 до определенной степени произвольна. В соответствии со схемой (16.11) можно каждому определителю из уравнения (16.10) указать такой же определитель в символах (16.20). Кроме того, двойная сумма по  $ik$ , стоящая в (16.18), станет простой суммой, так как комбинации  $ik$  в двух строках  $a$  и  $b$  матрицы  $B$  запишется аналогично комбинации в двух столбцах  $c$  и  $d$  матрицы  $A$ , т. е.

$$c_{pq}^{\Delta} = \sum_{j=1}^6 B_{pj}^{\Delta} A_{jq}^{\Delta}. \quad (16.21)$$

По формуле (16.21), построенной как произведение матриц, вычисляются элементы матрицы  $6 \times 6$  элементов для возможных комбинаций граничных условий на концах. Эту матрицу назовем сопряженной присоединенной матрицей  $\Gamma^{\Delta}$ , или короче  $\Delta$ -матрицей от  $\Gamma$ . Согласно правилу (II),  $\Delta$ -матрица матрицы  $4 \times 4$  элемента является матрицей  $6 \times 6$  элементов:

$$\Gamma^\Delta = \begin{vmatrix} c_{11}^\Delta & c_{12}^\Delta & c_{13}^\Delta & c_{14}^\Delta & c_{15}^\Delta & c_{16}^\Delta \\ c_{21}^\Delta & c_{22}^\Delta & c_{23}^\Delta & c_{24}^\Delta & c_{25}^\Delta & c_{26}^\Delta \\ c_{31}^\Delta & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{41}^\Delta & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{51}^\Delta & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{61}^\Delta & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{66}^\Delta \end{vmatrix}. \quad (16.22)$$



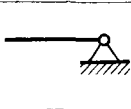
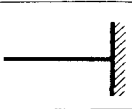
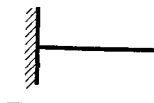
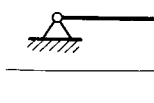


Существенной особенностью матриц, определяемых таким образом, является то, что существует общая лемма для умножения таких матриц:

если  $A$  и  $B$  есть матрицы порядка  $n$ , то  $\Gamma^\Delta = A^\Delta \cdot B^\Delta$  или  $(A \cdot B)^\Delta = A^\Delta \cdot B^\Delta$  откуда  $\Delta$ -матрица матрицы произведения равна произведению  $\Delta$ -матриц.

Введенное соотношение (16.22) позволяет сделать переход к любому, наперед заданному определителю.

$\Delta$ -матрица  $\Gamma^\Delta$  содержит все без исключения возможные определители 2-го порядка матрицы  $\Gamma$ . Ее элемент  $c_{ik}^\Delta$  является собственным значением определителя, полученного из матрицы  $\Gamma$  при любом множестве участков, составляющих балку, и при всех возможных комбинациях правых и левых краевых условий (табл. 16.2)

Таблица 16.2

							
$\Gamma^\Delta =$		$c_{11}^\Delta$	$c_{12}^\Delta$	$c_{13}^\Delta$	$c_{14}^\Delta$	$c_{15}^\Delta$	$c_{16}^\Delta$
		$c_{21}^\Delta$	$c_{22}^\Delta$	$c_{23}^\Delta$	$c_{24}^\Delta$	$c_{25}^\Delta$	$c_{26}^\Delta$
		$c_{31}^\Delta$	$c_{32}^\Delta$	$c_{33}^\Delta$	$c_{34}^\Delta$	$c_{35}^\Delta$	$c_{36}^\Delta$
		$c_{41}^\Delta$	$c_{42}^\Delta$	$c_{43}^\Delta$	$c_{44}^\Delta$	$c_{45}^\Delta$	$c_{46}^\Delta$
		$c_{51}^\Delta$	$c_{52}^\Delta$	$c_{53}^\Delta$	$c_{54}^\Delta$	$c_{55}^\Delta$	$c_{56}^\Delta$
		$c_{61}^\Delta$	$c_{62}^\Delta$	$c_{63}^\Delta$	$c_{64}^\Delta$	$c_{65}^\Delta$	$c_{66}^\Delta$

Для каждого столбца имеем два определенных краевых условия справа, указанных сверху таблицы; для каждой строки — два определенных краевых условия (указанных с левой стороны). Третья и четвертая строка или столбец соответствовали бы  $y = 0$ ,  $Q = 0$  и  $\theta = 0$ ;  $M = 0$ , что механически недопустимо.

Так, например, уравнение частот для балки слева защемленной, а справа свободно опертой имеет вид

$$c_{15}^{\Delta} = 0.$$

### $\Delta$ -матрица матрицы $R$

Вывод  $\Delta$ -матрицы матрицы  $R$  сводится к следующим преобразованиям функций  $Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$ ,  $Y_3(x)$ ,  $Y_4(x)$ , комбинации которых можно выразить с помощью четырех новых функций:

$$A(\alpha) = \frac{1}{2\alpha} (\operatorname{ch} \alpha \sin \alpha + \operatorname{sh} \alpha \cos \alpha);$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^3} (\operatorname{ch} \alpha \sin \alpha - \operatorname{sh} \alpha \cos \alpha);$$

$$s_1(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} \operatorname{sh} \alpha \sin \alpha;$$

$$E(\alpha) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha).$$

Эти функции можно разложить в хорошо сходящиеся ряды. Матрица  $R^{\Delta}$  в виде соответствующей  $\Delta$ -матрицы выглядит так:

$$R^{\Delta} = \begin{pmatrix} E(\alpha) & \frac{n}{k} A(\alpha) & \frac{n^2}{k} s_1(\alpha) & \frac{n^2}{k} s_1(\alpha) & \frac{n^3}{k} B(\alpha) & \frac{n^4}{k^2} [1 - E(\alpha)] \\ -\alpha_0^4 \frac{k}{n} B(\alpha) & 2E(\alpha - 1) & nA(\alpha) & nA(\alpha) & 2n^2 s_1(\alpha) & \frac{n^3}{k} B(\alpha) \\ -\alpha_0^4 \frac{k}{n^2} s_1(\alpha) & -\frac{\alpha_0^4}{n} B(\alpha) & E(\alpha) & E(\alpha) - 1 & nA(\alpha) & \frac{n^2}{k} s_1(\alpha) \\ -\alpha_0^4 \frac{k}{n^2} s_1(\alpha) & \frac{\alpha_0^4}{n} B(\alpha) & E(\alpha) - 1 & E(\alpha) & nA(\alpha) & \frac{n^2}{k} s_1(\alpha) \\ -\alpha_0^4 \frac{k}{n^3} A(\alpha) & -2 \frac{\alpha_0^4}{n^2} s_1(\alpha) & -\frac{\alpha_0^4}{n} B(\alpha) & -\frac{\alpha_0^4}{n} B(\alpha) & 2E(\alpha) - 1 & \frac{n}{k} A(\alpha) \\ \alpha_0^4 \frac{k^2}{n^4} [1 - E(\alpha)] & -\alpha_0^4 \frac{k}{n^3} B(\alpha) & -\alpha_0^4 \frac{k}{n^2} s_1(\alpha) & -\alpha_0^4 \frac{k}{n^2} s_1(\alpha) & -\alpha_0^4 \frac{k}{n} B(\alpha) & E(\alpha) \end{pmatrix}$$

(16 23)

Матрица  $R^{\Delta}$  (16.23) для упрощений расчетной схемы невесомого вала такова:



1	$\frac{l_i}{EJ_i}$	$\frac{l_i^2}{2EJ_i}$	$\frac{l_i^2}{2EJ_i}$	$\frac{l_i^3}{3EJ_i}$	$\frac{l_i^4}{12E^2J_i^2}$
0	1	$l_i$	$l_i$	$l_i^2$	$\frac{l_i^3}{3EJ_i}$
0	0	1	0	$l_i$	$\frac{l_i^2}{2EJ_i}$
0	0	0	1	$l_i$	$\frac{l_i^2}{2EJ_i}$
$-m_i\omega^2$	$-\frac{m_i\omega^2 l_i}{EJ}$	$-\frac{m_i\omega^2 l_i^2}{2EJ}$	$-\frac{m_i\omega^2 l_i^2}{2EJ_i}$	$1 - \frac{m_i\omega^2 l_i^3}{3EJ_i}$	$\frac{l_i}{EJ_i} \left( 1 - \frac{m_i\omega^2 l_i^3}{12EJ_i} \right)$
0	$-m_i\omega^2$	$-m_i\omega^2 l_i$	$-m_i\omega^2 l_i$	$-m_i\omega^2 l_i^2$	$1 - \frac{m_i\omega^2 l_i^3}{3EJ_i}$

(16.24)

Такие  $\Delta$ -матрицы составляются для каждого участка, и при подходе к опоре составляется соответствующая  $\Delta$ -матрица опоры. Собственное значение частоты  $\omega$  можно вычислить, выбирая нужный элемент из  $\Delta$ -матрицы для конкретной комбинации граничных условий.

### Упругая и жесткая опоры

Упругую опору можно учесть с помощью матрицы опоры  $S_i$ , определяемой между векторами  $W_i$  перед опорой и  $W_{i+1}$  за опорой

$$W_{i+1} = S_i W_i.$$

Пусть опора имеет поперечную упругую постоянную  $c_Q$  и упругую постоянную кручения  $c_M$ .

Кроме того, если масса опоры равна  $m$ , а ее момент инерции  $J'_1$ , то

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i, \\ \theta_{i+1} &= \theta_i \end{aligned}$$

и уравнение движения опоры запишется так:

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_i &= Q_{i+1} - Q_i - c_Q y_i; \\ J'_1 \ddot{\theta}_i &= M_i - M_{i+1} - c_M \theta_i. \end{aligned}$$

Или для гармонических колебаний

$$\begin{aligned} -M_{i+1} &= (c_M - J'_1 \omega^2) \theta_i - M_i, \\ -Q_{i+1} &= (m\omega^2 - c_Q) y_i - Q_i. \end{aligned}$$

Если обозначить

$$\Gamma_M = \frac{\bar{I}}{EJ} (c_M - J'\omega^2);$$

$$\Gamma_Q = \frac{\bar{I}^3}{EJ} (c_Q - m\omega^2),$$

то в матричной форме получим запись столбца  $\{W\}$ : первые три компонента остаются непрерывными, а  $Q$  увеличивается на величину, пропорциональную  $y$ ; таким же образом  $M$  увеличивается на величину, пропорциональную  $\theta$ , т. е.

$$S_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_M & 1 & 0 \\ -\Gamma_Q & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (16.25)$$

$\Delta$ -матрица матрицы  $S_i$ , построенная по изложенному правилу (16.22), имеет вид

$$S_i^A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_M & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Gamma_Q & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Gamma_M \Gamma_Q & \Gamma_Q & 0 & 0 & \Gamma_M & 1 \end{vmatrix}. \quad (16.26)$$

Решение для балки с жесткой опорой представляет особый случай. При этом для вычислений применяется не вся  $S_i^A$  матрица (16.26), а учитывается, что  $\Gamma_M = 0$  и  $\Gamma_Q \rightarrow \infty$ . Все члены матрицы  $S_i^A$  малы, по сравнению с  $\Gamma_Q$ , поэтому, разделив все члены матрицы на  $\Gamma_Q$ , получим матрицу жесткой опоры:

$$S_r^A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (16.27)$$

С помощью матриц  $S_i^A$  и  $S_r^A$  можно описать балку с любым количеством опор и шарниров очень наглядным способом. При этом запись

$$\{W_n\} = R_n \cdot S_{n-1} R_{n-1} \cdot \dots \cdot S_2 R_1 \{W_0\} \quad (16.28)$$

рассматривается как формальная запись матричного уравнения.

Пример 1. В табл. 16.3 приведены значения характеристических чисел, подсчитанных изложенным методом для простейшего случая многопролетной неразрезной балки с равными пролетами.

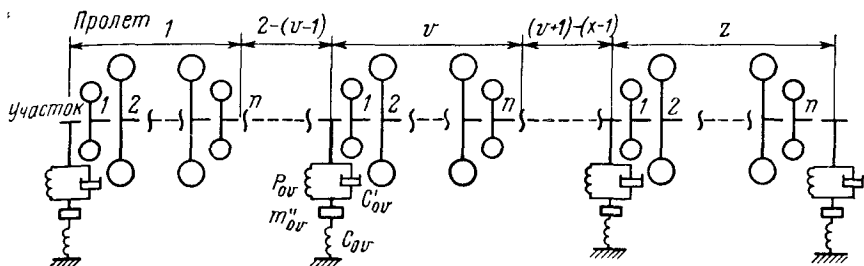


Рис. 16.13

Пример 2. В качестве примера приведены расчеты валопровода турбины ПВК-150 и генератора ТГВ-20, когда неуравновешенная масса размещена: 1) на роторе ТНД и 2) на роторе гене-

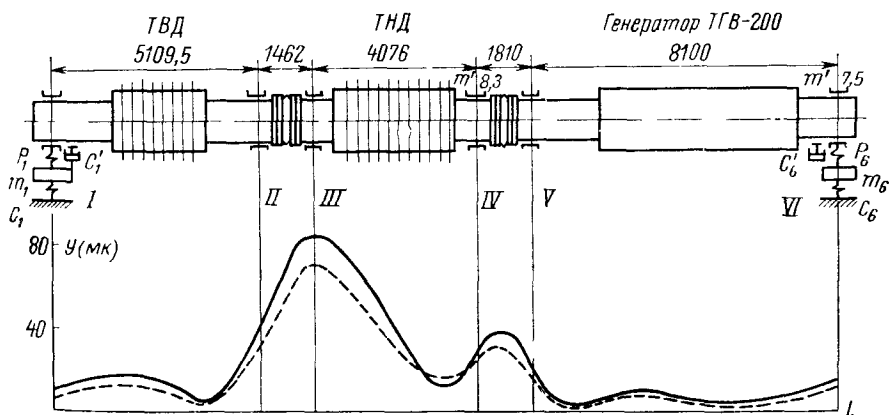


Рис 16.14

ратора ТГВ-200 при различных величинах демпфирования на опорах (рис 16.13 и 16.14).

Программа для ЭЦВМ позволяет вычислять критические скорости и прогибы валопровода в случае вынужденных колебаний и собственные частоты и формы колебаний в случае собственных колебаний. Расчет проведен для вала, лежащего на упруго-массовых опорах с учетом демпфирования масляной пленки и неуравновешенных масс. Коэффициенты демпфирования предполагаются известными.

Для расчета используется приближенная расчетная схема, представленная на рис. 16.14.

Таблица 16.3

Характеристические числа  $\beta_i = r_i^2$   
 для первых трех форм колебаний  $n$ -многопролетных балок

Род закрепления		$i$	Число пролетов балки			
для конца $x=0$	для конца $x=nl$		Один	Два	Три	Четыре
Оперт		1	9,870	9,870	9,870	9,870
		2	39,48	15,42	12,60	11,52
		3	88,83	39,49	16,52	15,42
Оперт	Заделан	1	15,42	11,52	10,63	10,31
		2	49,97	19,93	15,42	13,29
		3	102,1	42,85	21,18	17,71
Оперт	Направлен	1	2,468	3,86	3,97	3,98
		2	22,22	12,50	10,95	10,44
		3	61,70	26,07	16,79	14,01
Оперт	Свободен	1	0	2,261	2,351	2,360
		2	15,42	11,65	10,69	10,36
		3	49,97	19,64	15,35	13,32
Свободен		1	0	3,506	1,988	2,26
		2	22,37	15,34	2,706	11,63
		3	61,67	21,91	12,75	15,32
Направлен		1	9,870	2,467	3,557	3,856
		2	39,48	5,595	4,444	4,120
		3	88,83	22,21	14,69	12,50
Направлен	Свободен	1	5,60	1,367	2,271	2,354
		2	30,24	4,68	4,072	3,994
		3	74,13	17,28	13,54	12,00
Заделан		1	22,37	15,42	12,65	11,52
		2	61,67	22,38	18,47	15,42
		3	120,9	49,97	22,38	19,93
Свободен	Направлен	1	5,60	4,120	3,997	3,986
		2	30,24	17,62	13,51	11,94
		3	74,13	27,46	20,24	16,41
Заделан	Свободен	1	3,516	2,466	2,368	2,361
		2	21,95	15,40	12,71	11,57
		3	61,32	22,17	16,23	15,37

Данные к расчету на колебания валопровода турбины

№ сечения		$l$ в см	$m$ в $1/кг \cdot сек^2/см$	$\beta$ в $1/кг \cdot см$	№ сечения		$l$ в см	$m$ в $1/кг \cdot сек^2/см$	$\beta$ в $1/кг \cdot см$
Ротор ТВД	0		0,4		Муфта	22		0,398	
	1	52,4	0,086	2,939		23	47,5	0,765	1,122
	2	52,5	0,609	0,5692		24	41,5	1,332	6,901
	3	52,5	0,014	0,6515		25	55,0	0,823	0,362
	4	58,9	1,388	0,9118		26	37,0	0,169	1,402
	5	61,5	1,548	1,1365		27	59,7	0,534	1,3974
	6	53	1,274	1,0170		28	90,0	2,998	0,5042
	7	57,45	1,584	1,0439		29	153,0	7,632	0,1943
	8	56,25	2,288	0,9682		30	102,0	8,305	0,1295
	9	63,95	1,651	1,8400		31	102,0	6,644	0,1295
Муфта	10	22,5	0,6996	0,6996	32	153,0	8,305	0,1943	
	11	50,65	0,474	1,1919	33	81,25	7,365	0,4466	
	12	43,0	0,545	12,3947	34	28,25	2,563	0,3856	
	13	52,55	0,726	13,1889	35	40,8	0,438	1,1102	
	14	22,5	1,005	0,6898					
Ротор ТВД	15	41,6	0,701	0,7825	$\Sigma$		2055,75	90,69	
	16	68,5	0,398	0,1282					
	17	50,2	3,782	0,0365					
	18	42,0	5,394	0,0317					
	19	50,2	3,163	0,0365					
	20	68,5	3,163	0,1282					
	21	41,6	5,394	0,7825					
	22	22,5	3,782	0,6898					
				0,398					

Если опора имеет вид, как показано на рис. 16.13, то жесткость такой опоры определяется по формуле

$$k_{0v} = \frac{(i\omega c'_{0v} - p_{0v})(c_{0v} - m''_{0v}\omega^2)}{p_{0v} + c_{0v} - m''_{0v}\omega^2 + i\omega c'_{0v}},$$

- $\omega$  — частота;  
 $c'_{0v}$  — затухание в слое смазки левой опоры пролета;  
 $p_{0v}$  — жесткость масляной пленки левой опоры пролета;  
 $c_{0v}$  — жесткость левой опоры пролета;  
 $m''_{0v}$  — масса левой опоры пролета.

Если схема опоры имеет отличный от показанного на рис. 16.13 вид, то формула для определения жесткости опоры будет иной. При переходе через промежуточную опору выполняются условия

$$M_{n, v-1} = M_{0v}, \quad y_{n, v-1} = y_{0v},$$

$$\theta_{n, v-1} = \theta_{0v}, \quad Q_{0v} = Q_{n, v-1} - k_{0v}y_{0v}.$$

Матрица перехода для промежуточной опоры в случае вынужденных колебаний

$$\begin{pmatrix} Q \\ M \\ \theta \\ y \\ 1 \end{pmatrix}_{0v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ M \\ \theta \\ y \\ 1 \end{pmatrix}_{n, v-1}. \quad (16.29)$$

Если крайние опоры упругие, то известными граничными условиями являются

$$M_{01} = 0; \quad M_{nz} = 0; \quad y_{01} = \frac{Q_{01}}{-k_{01}}; \quad y_{nz} = \frac{Q_{nz}}{k_{0, z+1}}.$$

Основное матричное уравнение, связывающее перерезывающую силу, изгибающий момент, наклон касательной и прогиб на обоих концах участка, имеет вид

$$\begin{pmatrix} Q \\ M \\ \theta \\ y \\ 1 \end{pmatrix}_{uv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m\omega^2 & V\omega^2 \\ l & 1 & J'\omega^2 & lm\omega^2 & lV\omega^2 \\ \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l}{EJ} & \frac{l}{EJ} J'\omega^2 + 1 & \frac{l}{2EJ} m\omega^2 & \frac{l^2}{2EJ} V\omega^2 \\ \frac{l^3}{6EJ} & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^2}{2EJ} J'\omega^2 + l & \frac{l^3}{6EJ} m\omega^2 + l & \frac{l^3}{6EJ} V\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ M \\ \theta \\ y \\ 1 \end{pmatrix}_{u-1, v}. \quad (16.30)$$

Здесь  $EJ$  — изгибная жесткость участка;

$l$  — длина участка;

$m$  — масса участка;

$J'$  — момент инерции диска, относительно центральной оси, перпендикулярной к плоскости колебаний;

$v = m'r$ ;

$m'$  — несбалансированная масса;

$r$  — расстояние несбалансированной массы до центра тяжести участка.

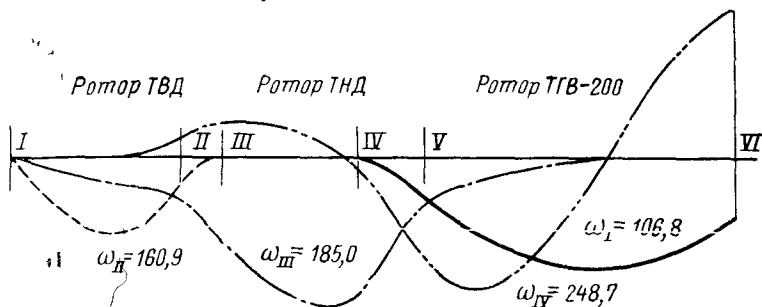


Рис. 16.15

Матрицы (16.29) и (16.30) содержат известную информацию, поэтому они могут быть перемножены.

Решив полученную систему уравнений, найдем величины перерезывающих сил, наклона касательных и прогибов на концах валопровода. После этого делается повторное умножение матриц участков и находятся прогибы для каждого участка. Далее выбираются другие значения частоты и повторением этой же схемы

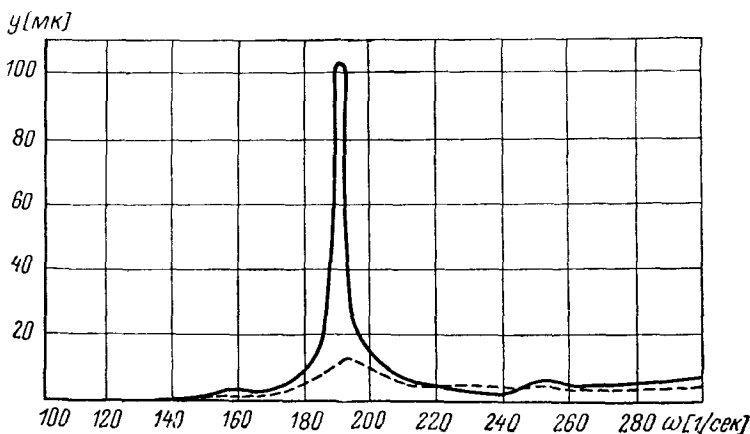


Рис. 16.16

расчета находятся соответствующие прогибы. Затем строятся графики для всех участков системы, показывающие для каждого участка соотношение между частотой и прогибом. Частоты, при которых любая часть системы колеблется с максимальным прогибом, будут собственными частотами.

Программа позволяет рассчитывать систему, имеющую до 10 пролетов, количество участков в пролете произвольно, но общее количество не должно превышать 290. Количество дисков и неуравновешенных масс в каждом пролете произвольно, но общее количество не должно превышать 10.

Результаты расчета, проведенного по программе для ЭЦВМ и расчетная схема приведены на рис. 16.13—16.16. В табл. 16.4 приведены исходные данные для расчета.

Жесткости опор и масляной пленки приняты одинаковыми  $\rho_i = c_1 = 1 \cdot 10^6$  кг/см. Масса опор не учитывалась.

### НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛА С НЕОДИНАКОВЫМИ ГЛАВНЫМИ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

#### Дифференциальные уравнения движения

Теоретический анализ показывает, что в нестационарном режиме для вала с распределенной по длине массой и для вала с массой, сосредоточенной в середине, амплитуды изменяются по одним и тем же законам. Поэтому при анализе качественной стороны явления можно ограничиться более простой схемой вала с приведенной массой (рис. 16.17).

Дифференциальные уравнения колебаний вала с диском при учете внешнего трения, пропорционального скорости, в неподвижной системе координат  $(x, y)$  имеют вид \*

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_c + x_c c (1 - \alpha \cos 2\varphi) - y_c c \alpha \sin 2\varphi + \mu x_c &= \\ &= c_1 e_1 \cos \varphi - c_2 e_2 \sin \varphi; \\ m\ddot{y}_c + y_c c (1 + \alpha \cos 2\varphi) = x_c c \alpha \sin 2\varphi + \mu y_c &= \\ &= -mg + c_1 e_1 \sin \varphi + c_2 e_2 \cos \varphi, \end{aligned} \right\} (16.31)$$

где  $m$  — масса диска;  
 $x_c, y_c$  — координаты центра тяжести диска;  
 $\varphi$  — угол поворота диска;  
 $\mu$  — коэффициент затухания;

\* Романов О. Н. Поперечные колебания вала двойкой жесткости. Львов, изд-во МВО, 1957.



$c_1, c_2$  — жесткости вала во взаимно перпендикулярных направлениях, отнесенных к главным плоскостям изгиба;

$e = \sqrt{e_1^2 + e_2^2}$  — эксцентриситет;

$$c = \frac{c_1 + c_2}{2}; \quad \alpha = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}.$$

Эта же система уравнений в подвижной системе координат  $(\xi, \eta)$  записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{\xi}_c - \dot{\xi}_c \dot{\varphi}_2 - 2\dot{\varphi}_1 \dot{\eta}_c - \dot{\varphi}_1 \dot{\eta}_c) + \mu(\dot{\xi}_c - \dot{\varphi}_1 \eta_c) + c_1 \xi_c &= c_1 e_1 - mg \sin \alpha; \\ m(\ddot{\eta}_c - \dot{\varphi}_2 \eta_c + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\xi}_c + \dot{\varphi}_1 \dot{\xi}_c) + \mu(\dot{\eta}_c + \dot{\varphi}_1 \xi_c) + c_2 \eta_c &= c_2 e_2 - mg \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (16.32)$$

полученном на основе уравнения (16.31) с помощью формул преобразования координат

$$\left. \begin{aligned} \xi_c &= x_c \cos \varphi + y_c \sin \varphi; \\ \eta_c &= y_c \cos \varphi - x_c \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (16.33)$$

Дифференциальные уравнения (16.31) показывают, что в системе возможен резонанс благодаря действию сил, обусловленных наличием эксцентриситета. Из уравнений (16.32) вытекает возможность резонанса под действием собственного веса. В этом случае имеет место переход через критическую скорость второго рода (критическую скорость собственного веса), выражаемую формулой

$$\omega^* = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{2m(c_1 + c_2)}}. \quad (16.34)$$

Для рассмотрения указанных критических состояний пригодны обе системы уравнений (16.32) и (16.33).

Приведем уравнения (16.32) к виду, удобному для численного интегрирования. Введем предположение о медленности изменения амплитуды и фазы. Обозначим  $\xi_c + i\eta_c = z$ , тогда систему (16.32) перепишем так:

$$\ddot{z} + (2i\dot{\varphi} + 2n)\dot{z} + (\omega^2 - \dot{\varphi}^2 + i\dot{\varphi} + 2ni\dot{\varphi})z - \bar{\alpha}z = a - ige^{-i\varphi}, \quad (16.35)$$

где  $2n = \frac{\mu}{m}$ ;  $\omega^2 = \frac{c_1 + c_2}{2m}$ ;

$$\alpha = \frac{c_2 - c_1}{2m}; \quad a = \frac{1}{m}(c_1 e_1 + ic_2 e_2).$$

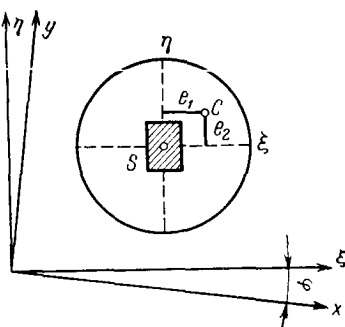


Рис. 16.17

Будем искать решение в виде

$$z = Re^{i\psi} + Ue^{i\varphi} + Ve^{i\varphi}. \quad (16.36)$$

Подстановка выражения (16.36) в систему (16.35) и пренебрежение слагаемыми с  $\ddot{R}$ ,  $\ddot{\psi}$ ,  $\dot{R}\dot{\psi}$ ,  $\psi^2$ ,  $\dot{U}$ ,  $\dot{V}$  дают следующие две системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}(4i\dot{\varphi} + 2n) + (\omega^2 - 4\dot{\varphi}^2 + 2i\ddot{\varphi} + 4in\dot{\varphi})U - \alpha\bar{V} &= 0; \\ \dot{V}2n + \omega^2V - \alpha\bar{U} &= -gi; \end{aligned} \right\} \quad (16.37)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{R} &= -\left(n + \frac{\ddot{\varphi}}{2\dot{\varphi}} + \frac{\alpha}{2\dot{\varphi}} \sin 2\psi\right) + \frac{1}{2m\dot{\varphi}} (c_2e_2 \cos \psi - c_1e_1 \sin \psi); \\ \dot{\psi} &= \frac{\omega^2 - \dot{\varphi}^2}{2\dot{\varphi}} - \frac{\alpha}{2\dot{\varphi}} \cos 2\psi + \frac{1}{2m\dot{\varphi}R} (c_1e_1 \cos \psi + c_2e_2 \sin \psi), \end{aligned} \right\} \quad (16.38)$$

где  $U$ ,  $V$  — комплексные величины;  
 $R$ ,  $\psi$  — вещественные величины.

### Интегрирование уравнений движения и результаты исследования

Дифференциальные уравнения (16.37) и (16.38) интегрируются независимо. Первые описывают движение вала с диском при переходе через критическую скорость второго рода, вторые — при переходе через критическую зону.

Рассмотрим нестационарные колебания вала при переходе через критическую скорость. Пренебрегая во втором уравнении (16.37) слагаемым  $2n\dot{V}$ , получим зависимость

$$\bar{V} = \frac{\alpha}{\omega^2}U - \frac{ig}{\omega^2}, \quad (16.39)$$

с помощью которой первое уравнение (16.37) записывается в виде

$$\dot{U}(4i\dot{\varphi} + 2n) + (\omega^2 - 4\dot{\varphi}^2 + 2i\ddot{\varphi} + 4in\dot{\varphi})U - \frac{\alpha^2}{\omega^2}U = \frac{g\alpha i}{\omega^2}. \quad (16.40)$$

Выделяя действительную и мнимую части уравнения (16.40) ( $U = A_1 + iA_2$ ), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= -\left(n + \frac{\ddot{\varphi}}{2\dot{\varphi}}\right)A_1 - \frac{1}{4\dot{\varphi}}\left(\omega^2 - 4\dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)A_2 + \frac{\alpha}{4\dot{\varphi}\omega^2}g; \\ \frac{dA_2}{dt} &= -\left(n + \frac{\ddot{\varphi}}{2\dot{\varphi}}\right)A_2 + \frac{1}{4\dot{\varphi}}\left(\omega^2 - 4\dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)A_1. \end{aligned} \right\} \quad (16.41)$$

На основании интегрирования этой системы уравнений Романовом О. Н. построен ряд графиков, часть из которых приведена на рис. 16.18 и 16.19, где

$$\lambda = \frac{|U|}{\omega^2}g; \quad \lambda_{\max} = \frac{|U|_{\max}}{\omega^2}g; \quad \frac{\alpha}{\omega^2} = 0,1; \quad \varphi = \varepsilon t; \quad h = \frac{n}{\omega}; \quad z(t) = \frac{\varphi}{\omega}.$$

$\lambda$  — динамический коэффициент;

$k$  — число свободных колебаний, совершаемое системой от состояния покоя до совпадения угловой скорости вращения с собственной частотой единицы;

$\varepsilon$  — угловое ускорение;

$z_{\max} = \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega}\right)_{\max}$  — значение  $\frac{\dot{\varphi}}{\omega}$ , при котором достигается максимум  $\lambda$ .

Вычисления показывают, что при переходе через критическую скорость второго рода нестационарные колебания могут быть значительными и опасными для прочности ротора.

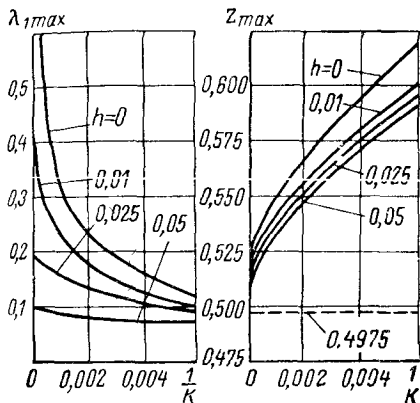


Рис. 16.18

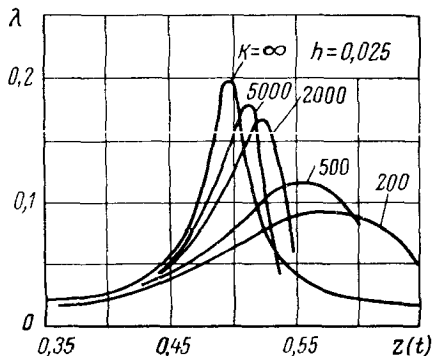


Рис. 16.19

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (16.38) следует выполнять численно. Переход через так называемую основную критическую зону характеризуется следующими особенностями.

Чем больше угловое ускорение  $\varepsilon$ , тем меньше максимальная амплитуда колебаний, тем значительнее сдвиг этого максимума по шкале частот и тем выше уровень послерезонансных биений.

С ростом отношения  $\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$  при прочих равных условиях увеличивается максимум амплитуд колебаний.

Увеличение внешнего трения уменьшает влияние разнобоя жесткости вала.

Амплитудно-фазовая характеристика переходного процесса зависит от расположения центра тяжести диска по отношению к главным плоскостям изгиба. Например, наибольший прогиб вала при  $\frac{\alpha}{\omega^2} = 0,1$ ;  $\frac{n}{\omega} = 0,01$ ;  $k = 150$  имеет место, когда  $\gamma = 25^\circ$  ( $\text{tg } \gamma = \frac{e_2}{e_1}$ ), а минимальный — при  $\gamma = -70^\circ$ .

## ПЕРЕХОД ГИБКОГО ВАЛА ЧЕРЕЗ КРИТИЧЕСКУЮ СКОРОСТЬ

### Уравнения движения для гибкого вала

Теория установившегося движения гибкого вала не дает ответа на ряд вопросов, связанных с переходом через критические обороты, в частности на вопрос об изменении максимальных прогибов. Ниже рассматривается простейший случай нестационарного процесса.

Дифференциальные уравнения движения круглого вала постоянного сечения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} EJ \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \rho F \frac{\partial^2 x_c}{\partial t^2} &= 0; \\ EJ \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \rho F \frac{\partial^2 y_c}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.42)$$

где  $x$ ,  $y$  и  $x_c$ ,  $y_c$  — координаты соответственно геометрического центра и центра тяжести поперечного сечения вала в неподвижной системе координат.

С помощью зависимостей

$$\left. \begin{aligned} x_c &= x + e \cos \varphi \\ y_c &= y + e \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (16.43)$$

из уравнений (16.42) можно исключить  $x$  и  $y$ .

Полученные уравнения удобно решать методом Фурье, разлагая эксцентриситет  $e$  в ряд по фундаментальным функциям, соответствующим формам собственных колебаний гибкого вала.

Примем, что эксцентриситет  $e$  для вала, опертого по концам, изменяется по закону

$$e = e_0 \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (16.44)$$

Кроме того, введя внешнее и внутреннее трения, пропорциональные скорости, получим следующие уравнения движения вала:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} + \mu \dot{X} + \omega_0^2 X + \mu_1 (\dot{X} + \dot{\varphi}) &= \omega_0^2 e_0 \cos \varphi(t); \\ \ddot{Y} + \mu \dot{Y} + \omega_0^2 Y + \mu_1 (\dot{Y} - \dot{\varphi}) &= \omega_0^2 e_0 \sin \varphi(t), \end{aligned} \right\} \quad (16.45)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^4 EJ}{\rho F l^4}; \quad x_c = X(t) \sin \frac{\pi z}{l}; \quad y_c = Y(t) \sin \frac{\pi z}{l};$$

$\mu$ ,  $\mu_1$  — коэффициенты внешнего и внутреннего затухания.

Уравнения (16.45) справедливы, когда мощность источника энергии, приводящего вал во вращательное движение, значительно превышает мощность, потребляемую системой в критическом состоянии. В этом случае можно считать, что угловая скорость

вала  $\dot{\varphi}(t)$  изменяется по заранее предписанному закону, не зависящему от поперечных колебаний системы.

Точное решение системы (16.45) получить весьма трудно из-за наличия переменного коэффициента  $\dot{\varphi}(t)$ . Однако, учитывая то, что вблизи скорости вращения  $\dot{\varphi} = \omega_0$  собственные колебания совершаются с частотой, равной частоте вала без внутреннего трения, причем затухание отсутствует, положим  $\mu_1 = 0$ . Тогда уравнения (16.45) разделяются и решение каждого из уравнений при  $\dot{\varphi} = \varepsilon t$  записывается с помощью интеграла вероятностей от комплексного аргумента.

Амплитудное значение прогиба определяется формулой

$$|A(t)| = |X(t) - iX'(t)| = \frac{\omega_0^2 e_0}{2\omega} \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}} |W(u) + W(v) - W(u_0) e^{u_0^2 - u^2} - W(v_0) e^{v_0^2 - v^2}|, \quad (16.46)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{u^2}{4}}$ , а величины  $u, v, u_0, v_0, W$  имеют прежний смысл (гл. 15).

Таким образом, характерные особенности перехода через резонанс системы с одной степенью свободы остаются справедливыми и в данном случае.

### Вал на упруго-податливых опорах

Рассмотрим движение вала, расположенного на упруго-податливых опорах. Примем, что коэффициенты жесткости опор в вертикальном и горизонтальном направлениях различны и равны  $c_1$  и  $c_2$ . Пусть масса системы приведена к диску, расположенному в середине пролета.

Составим уравнения движения системы диск—вал

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_c + \mu_1 \dot{x}_c + 2c_1 x_0 &= 0; \\ m\ddot{y}_c + \mu_2 \dot{y}_c + 2c_2 y_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.47)$$

где  $m$  — масса диска, а остальные обозначения поясняются на рис. 16.20.

Уравнения движения центра тяжести имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_c + \mu_1 \dot{x}_c + c(x - x_0) &= 0; \\ m\ddot{y}_c + \mu_2 \dot{y}_c + c(y - y_0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.48)$$

где  $c$  — жесткость вала в месте крепления диска;  
 $\mu_1, \mu_2$  — коэффициенты внешнего затухания.

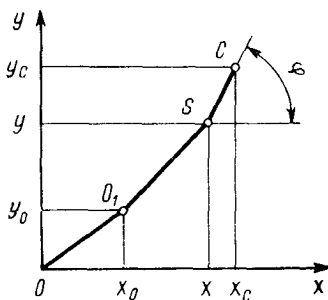


Рис. 16.20

Из выражений (16.47) и (16.48) имеем

$$2c_1x_0 = c(x - x_0); \quad 2c_2y_0 = c(y - y_0).$$

$$\text{Отсюда } x_0 = \frac{cx}{c + 2c_1}; \quad y_0 = \frac{cy}{c + 2c_2}$$

или, так как  $x_c = x + e \cos \varphi$  и  $y_c = y + e \sin \varphi$ ,

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{cx_c}{c + 2c_1} - \frac{ce}{2c_1 + c} \cos \varphi; \\ y_0 &= \frac{cy_c}{c + 2c_2} - \frac{ce}{c + 2c_2} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (16.49)$$

С помощью уравнений (16.49) уравнения (16.48) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_c + \mu_1\dot{x}_c + \frac{2cc_1}{c + 2c_1}x_c &= \frac{2cc_1e}{c + 2c_1} \cos \varphi(t); \\ m\ddot{y}_c + \mu_2\dot{y}_c + \frac{2cc_2}{c + 2c_2}y_c &= \frac{2cc_2e}{c + 2c_2} \sin \varphi(t) \end{aligned} \right\} \quad (16.50)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_c + \mu_1\dot{x}_c + \omega_1^2x_c &= \omega_1^2e \cos \varphi(t); \\ \ddot{y}_c + \mu_2\dot{y}_c + \omega_2^2y_c &= \omega_2^2e \sin \varphi(t), \end{aligned} \right\} \quad (16.51)$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{2cc_1}{c + 2c_1}; \quad \omega_2^2 = \frac{2cc_2}{c + 2c_2}; \quad \mu_1 = \frac{\mu_1'}{m}; \quad \mu_2 = \frac{\mu_2'}{m}.$$

Введем комплексные функции

$$x_c = \operatorname{Re} z_1 \quad \text{и} \quad y_c = \operatorname{Im} z_2. \quad (16.52)$$

тогда вместо уравнения (16.51) следует рассматривать уравнения

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}_1 + \mu_1\dot{z}_1 + \omega_1^2z_1 &= \omega_1^2ee^{-i\varphi}; \\ \ddot{z}_2 + \mu_2\dot{z}_2 + \omega_2^2z_2 &= \omega_2^2ee^{-i\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (16.53)$$

Пусть угловая скорость  $\dot{\varphi}(t)$  является линейной функцией времени. В таком случае решения уравнений (16.53) на основании гл. 15 будут:

$$\left. \begin{aligned} x_c = \operatorname{Re} z_1 &= |A_1| \cos \left( \frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_1 \right); \\ y_c = \operatorname{Im} z_2 &= |A_2| \sin \left( \frac{\varepsilon t^2}{2} + \delta_2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (16.54)$$

где

$$\delta_j = -\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} A_j}{\operatorname{Re} A_j} \quad (j = 1, 2).$$

Амплитуды  $|A_1|$  и  $|A_2|$  определяются формулами, аналогичными формулам (15.15) и (15.36) в зависимости от того, возрастает или убывает угловая скорость.

На основании уравнений (16.54) можно сделать следующий вывод. Так как  $x_c$  и  $y_c$  имеют составляющие

$$X_0 \cos \varphi; Y_0 \sin \varphi \quad (X_0 \neq Y_0),$$

то проекции этих составляющих на подвижные оси вала будут

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= X_0 \cos \varphi \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi \sin \varphi = \frac{X_0 + Y_0}{2} + \frac{X_0 - Y_0}{2} \cos 2\varphi; \\ \eta_0 &= Y_0 \sin \varphi \cos \varphi - X_0 \cos \varphi \sin \varphi = \frac{Y_0 - X_0}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (16.55)$$

Следовательно, упруго-податливые опоры с различными коэффициентами жесткости в горизонтальном и вертикальном направлениях вызывают появление второй гармоники колебаний вала.

На основании теоретического анализа [30, 21] можно видеть, что при переходе через критическое число оборотов вала на жестких опорах средняя составляющая напряжения в вале сравнительно медленно изменяется, неоднократно переходит через нуль и достигает наибольшего значения в момент, смещенный относительно момента достижения номинального критического числа оборотов. Напряжения в плоскости дисбаланса и в плоскости, перпендикулярной к дисбалансу, изменяются практически по одному закону, но со сдвигом приблизительно на четверть периода движения. Наибольшее значение напряжения при переходе через критическое число оборотов имеет коэффициент усиления, равный коэффициенту реакции опор. Поэтому наблюдения за изменениями напряжений в вале можно ввести косвенно, путем наблюдения за колебаниями подшипников. Однако в области критических скоростей эти коэффициенты усиления нельзя считать тождественными из-за различия демпфирования опор и вала.

### КОЛЕБАНИЯ ГИБКОГО РОТОРА НА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ОПОРАХ С УЧЕТОМ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

#### Уравнения движения

Рассмотрим нестационарное движение двухопорного ротора с диском, расположенным несимметрично относительно опор, одна из которых жесткая, а другая имеет нелинейную характеристику:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= k_1 x_2 + k_2 x_2^3; \\ P_y &= k_1 y_2 + k_2 y_2^3, \end{aligned} \right\} \quad (16.56)$$

где  $x_2, y_2$  — координаты правого конца вала (рис. 16.21);  
 $k_1, k_2$  — коэффициенты жесткости опоры;  
 $P_x, P_y$  — проекции упругой силы на оси неподвижной системы координат  $Oxuz$ .

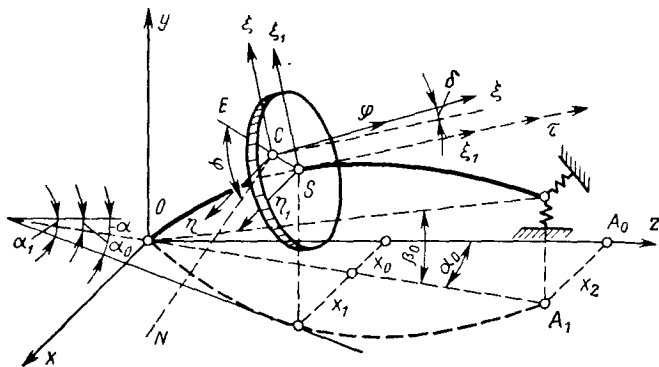


Рис. 16.21

Предположим, что эксцентриситет диска  $e$  отличен от нуля и что плоскость диска не перпендикулярна к неизогнутой оси вала. Угол, образованный осью симметрии диска  $C\xi$  с касательной

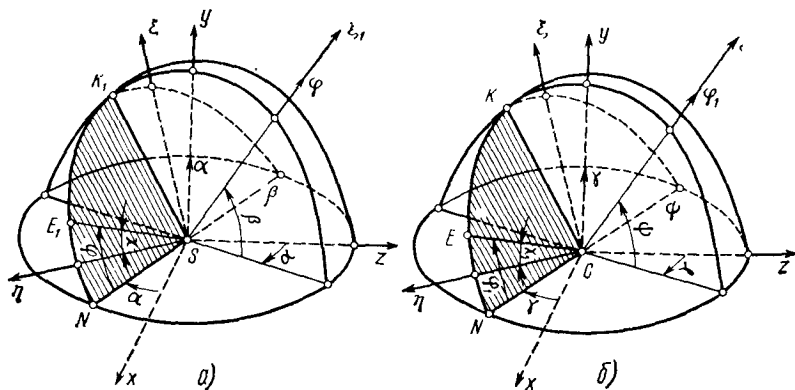


Рис. 16.22

к валу в точке  $S$  обозначим через  $\delta$ . Величины  $e$  и  $\delta$  предположим малыми, а массу вала — приведенной к диску.

Перемещения точки  $S$ , в которой ось вала пересекает ось диска, могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x_1; \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_0; \\ y &= y_0 + y_1; \quad \beta = \beta_1 + \beta_0, \end{aligned} \right\} \quad (16.57)$$



где  $x_1, y_1$  — проекции стрелы прогиба самого вала в точке на оси координат  $x, y$ ;  
 $x_0, y_0$  — смещения точки  $S$  за счет деформации опоры;  
 $\alpha_0, \beta_0$  и  $\alpha_1, \beta_1$  — проекции углов поворотов оси  $S\xi_1$ , касательной к валу, соответственно за счет деформации опоры и деформации самого вала (рис. 16.22, а).

Величины  $\alpha_0, \beta_0, x_0, y_0$  связаны с координатами точки  $A$  соотношениями

$$\alpha_0 = \frac{x_2}{l}; \quad \beta_0 = \frac{y_2}{l}; \quad x_0 = \frac{l_1}{l} x_2; \quad y_0 = \frac{l_1}{l} y_2, \quad (16.58)$$

где  $l$  — длина вала;

$l_1$  — расстояние от левой опоры до диска.

Направление оси симметрии  $S\xi$  условимся определять углами  $\varphi_1, \varphi, \psi_1$  (рис. 16.22, б). Между этими углами и ранее введенными  $\alpha, \varphi, \beta$  имеется зависимость

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi; \\ \gamma &= \alpha - \delta \sin(\varphi - \chi); \\ \psi &= \beta + \delta \cos(\varphi - \chi), \end{aligned} \right\} \quad (16.59)$$

где  $\chi$  — угол, образованный вектором  $CE$  с осью  $\eta$ .

По теореме Кенига выражение для кинетической энергии имеет вид

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} (J_N \omega_N^2 + J_K \omega_K^2 + J_\xi \omega_\xi^2), \quad (16.60)$$

где  $m, J_N, J_K, J_\xi$  — масса диска и его моменты инерции относительно трех взаимно перпендикулярных главных осей инерции  $N, K, \xi$  (рис. 16.22);

$\omega_N, \omega_K, \omega_\xi$  — проекции угловой скорости диска на те же оси.

Из рис. 16.22 следует

$$\omega_N = -\dot{\psi}; \quad \omega_K = \dot{\gamma} \cos \psi; \quad \omega_\xi = \dot{\varphi}_1 + \dot{\gamma} \sin \psi. \quad (16.61)$$

Полагая  $J_N = J_K = J$  и  $J_\xi = J_0$  и принимая во внимание выражения (16.58), (16.59), получим из выражения (16.60)

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{e}\dot{\varphi} \sin \varphi + 2\dot{y}\dot{e}\dot{\varphi} \cos \varphi + e^2 \dot{\varphi}^2) + \\ &+ \frac{1}{2} [J (\dot{\beta} - \dot{\delta} \dot{\varphi} \sin(\varphi - \chi))^2 + J (\dot{\alpha} - \dot{\delta} \dot{\varphi} \cos(\varphi - \chi))^2 \cos^2 \psi + \\ &+ J_0 (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \psi - \dot{\delta} \dot{\varphi} \cos(\varphi - \chi) \sin \psi)^2], \end{aligned} \quad (16.62)$$

где  $x = x_c - e \cos \varphi$ ;  $y = y_c - e \sin \varphi$ .

Пренебрегая слагаемыми с  $e^2$  и  $\delta^2$  и ограничиваясь рассмотрением малых деформаций вала, т. е. принимая

$$\sin \psi \simeq \psi = \beta + \delta \cos(\varphi - \chi); \quad \cos \psi = 1; \quad \psi^2 \simeq 0,$$

окончательно найдем выражение для кинетической энергии

$$\begin{aligned} T = & \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\dot{\varphi}e (\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi) + \\ & + \frac{I}{2} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{I_0}{2} \dot{\varphi}^2 + I_0 \delta \dot{\varphi} (\dot{\alpha} - \dot{\beta}) \cos(\varphi - \chi) - \\ & - I (\dot{\beta} \sin(\varphi - \chi) + \dot{\alpha} \cos(\varphi - \chi)) \delta \dot{\varphi} + I_0 \dot{\varphi} \dot{\alpha} \beta. \end{aligned} \quad (16.63)$$

Потенциальная энергия системы

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} c_{11} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + \frac{1}{2} c_{22} [(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2] - \\ & - c_{12} [(\alpha - \alpha_0)(x - x_0) + (\beta - \beta_0)(y - y_0)] + \\ & + \frac{1}{2} k_1 (x_2^2 + y_2^2) + \frac{1}{4} k_2 (x_2^4 + y_2^4). \end{aligned} \quad (16.64)$$

Здесь  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{22}$  — коэффициенты жесткости вала, связанные с коэффициентами влияния  $\alpha_{ij}$  формулами

$$\begin{aligned} c_{11} = & \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}; \quad c_{12} = c_{21} = \frac{-\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}; \\ c_{22} = & \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}. \end{aligned} \quad (16.65)$$

Исходя из уравнений Лагранжа второго рода, пренебрегая членами с  $\ddot{\varphi}$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + c_{11}(x - x_0) - c_{12}(\alpha - \alpha_0) &= m e \dot{\varphi}^2 \cos \varphi; \\ m\ddot{y} + c_{11}(y - y_0) - c_{12}(\beta - \beta_0) &= m e \dot{\varphi}^2 \sin \varphi; \\ I\ddot{\alpha} + I_0 \dot{\varphi} \dot{\beta} + c_{22}(\alpha - \alpha_0) - c_{12}(x - x_0) &= \\ &= (I_0 - I) \delta \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \chi); \\ I\ddot{\beta} - I_0 \dot{\varphi} \dot{\alpha} + c_{22}(\beta - \beta_0) - c_{12}(y - y_0) &= \\ &= -(I_0 - I) \delta \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi - \chi); \\ (k_1 x_2 + k_2 x_2^3) l + c_{12}[x - x_0 + l_1(\alpha - \alpha_0)] - \\ &- c_{22}(\alpha - \alpha_0) - c_{11} l_1 (x - x_0) = 0; \\ (k_1 y_2 + k_2 y_2^3) l + c_{12}[y - y_0 + l_1(\beta - \beta_0)] - \\ &- c_{22}(\beta - \beta_0) - c_{11} l_1 (y - y_0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.66)$$

Из последних двух уравнений в первом приближении

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= Ex + F\alpha + H (Ex + F\alpha)^3; \\ y_2 &= Ey + F\beta + H (Ey + F\beta)^3, \end{aligned} \right\} \quad (16.67)$$

где

$$G = k_1 - \frac{2l_1}{l^2} c_{12} + \frac{c_{22}}{l^2} + c_{11} \frac{l_1}{l_2}; \quad H = -\frac{k_2}{G};$$

$$E = \frac{1}{G} \left( c_{11} \frac{l_1}{l} - \frac{c_{12}}{l} \right); \quad F = \frac{1}{G} \left( \frac{c_{22}}{l} - c_{12} \frac{l_1}{l} \right).$$

Учитывая силы трения в правой опоре, пропорциональные скорости, и выражения (16.67), перепишем уравнения колебаний (16.66) в виде

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + p_1x - q_1\alpha &= -n_{11}\dot{x} - n_{12}\dot{\alpha} - \\ &- \rho (Ex + F\alpha)^3 + m\dot{\varphi}^2 \cos \varphi; \\ m\ddot{y} + p_1y - q_1\beta &= -n_{11}y - n_{12}\dot{\beta} - \\ &- \rho (Ey + F\beta)^3 + m\dot{\varphi}^2 \sin \varphi; \\ I\ddot{\alpha} + I_0\dot{\varphi}\dot{\beta} + s_1\alpha - r_1x &= -G (Ey - F\alpha)^3 - n_{22}\dot{\alpha} - n_{12}\dot{x} + \\ &+ (I_0 - I) \delta\dot{\varphi}^2 \sin (\varphi - \chi); \\ I\ddot{\beta} - I_0\dot{\varphi}\dot{\alpha} + s_1\beta - r_1y &= -G (Ey + F\beta)^3 - n_{12}\dot{y} - n_{22}\dot{\beta} - \\ &- (I_0 - I) \delta\dot{\varphi}^2 \cos (\varphi - \chi), \end{aligned} \right\} \quad (16.68)$$

здесь

$$p_{11} = c_{11} - \left( c_{11} \frac{l_1}{l} - \frac{c_{12}}{l} \right) E; \quad q_1 = c_{12} + \left( c_{11} \frac{l_1}{l} - \frac{c_{12}}{l} \right) F;$$

$$s_1 = c_{22} - \left( \frac{c_{22}}{l} - c_{12} \frac{l_1}{l} \right) F; \quad r_1 = c_{11} + \left( \frac{c_{22}}{l} - c_{12} \frac{l_1}{l} \right) E;$$

$$\rho = \left( \frac{c_{12}}{l} - c_{11} \frac{l_1}{l} \right) H; \quad G = \left( c_{12} \frac{l_1}{l} - \frac{c_{22}}{l} \right) H;$$

$$n_{11} = \chi_2 E^2; \quad n_{12} = \chi_2 EF; \quad n_{22} = \chi_2 F^2;$$

$\chi_2$  — коэффициент затухания.

### Применение асимптотического метода

Для решения системы дифференциальных уравнений (16.68) применим асимптотический метод нелинейной механики. Будем искать частное решение системы (16.68), описывающее вынужденные колебания с частотой, близкой к первой собственной частоте  $\omega_1$ .

Обозначим  $x = q_1$ ;  $y = q_2$ ;  $\alpha = q_3$ ;  $\beta = q_4$ . Для отыскания собственных частот и фундаментальных функций рассматриваемой системы положим

$$q_j = C_j^{(k)} e^{i(\omega_k t)} + \tilde{C}_j^{(k)} e^{-i\omega_k t}. \quad (16.69)$$

Подстановка значения (16.69) в однородные уравнения (16.48) дает

$$\left. \begin{aligned} (p_1 - m\omega_k^2) C_1^{(k)} - q_1 C_3^{(k)} &= 0; \\ (p_1 - m\omega_k^2) C_2^{(k)} - q_1 C_4^{(k)} &= 0; \\ -r_1 C_1^{(k)} + (s_1 - J\omega_k^2) C_3^{(k)} + iJ_0 \dot{\varphi} \omega_k C_4^{(k)} &= 0; \\ -r_1 C_2^{(k)} + (s_1 - J\omega_k^2) C_4^{(k)} - iJ_0 \dot{\varphi} \omega_k C_3^{(k)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.70)$$

Значения  $C_j^{(k)}$  определяются из сопряженной системы, а собственные частоты — из уравнения

$$[(p_1 - m\omega^2)(s_1 - J\omega^2) - r_1 q_1]^2 = J_0 \dot{\varphi}^2 \omega^2 (p_1 - m\omega^2)^2. \quad (16.71)$$

В соответствии с одночастотным методом, частное решение уравнений (16.68) в первом приближении находим по формулам

$$q_j = a C_j^{(1)} e^{i(\varphi + \psi)} + a \tilde{C}_j^{(1)} e^{-i(\varphi + \psi)} \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (16.72)$$

где  $a$  и  $\psi$  предполагаются вещественными и определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_l a - \frac{E_1(\tau) \dot{\varphi}^2 \cos(\psi - 45^\circ)}{m_1(\tau) [\omega_1 + \dot{\varphi}] + m_2(\tau)}; \\ \frac{d\psi}{dt} &= \lambda_l - \dot{\varphi} + \frac{1}{a} \cdot \frac{E_1(\tau) \dot{\varphi}^2 \sin(\psi - 45^\circ)}{m_1(\tau) [\omega_1 + \dot{\varphi}] + m_2(\tau)} + \\ &+ \frac{1}{a} \cdot \frac{H_1(\tau) \dot{\varphi}^2 \cos(\psi + \chi - 45^\circ)}{m_1(\tau) [\omega_1 + \dot{\varphi}] + m_2(\tau)}; \end{aligned} \right\} \quad (16.73)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} \delta_l &= \frac{n_l \omega_1 + \frac{d}{d\tau} [m_1 \omega_1] + m_3}{2m_1 \omega_1 + m_2}; \\ n_l &= n_{11} [C_1^{(1)} \tilde{C}_1^{(1)} + C_2^{(1)} \tilde{C}_2^{(1)}] + \\ &+ 2n_{12} [C_1^{(1)} \tilde{C}_1^{(1)} + \tilde{C}_2^{(1)} C_4^{(1)}] + n_{22} [C_3^{(1)} C_3^{(1)} + C_4^{(1)} C_4^{(1)}]; \\ \lambda_l &= \omega_1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2 L}{2m_1 \omega_1 + m_2}; \\ L &= [E + FC_3^{(1)}]^3 [\rho + \sigma C_3^{(1)}] = \\ &= [EC_2^{(1)} + FC_4^{(1)}]^3 [\rho C_2^{(1)} + \sigma C_4^{(1)}]; \\ E_1(\tau) &= \frac{V\sqrt{2}}{2} m e [1 - C_2^{(1)}]; \end{aligned} \right\} \quad (16.74)$$

$$\begin{aligned}
 H_1(\tau) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (J_0 - J) \delta(C_3^{(1)} - C_4^{(1)}); \\
 m_1 &= m(C_1^{(1)} \tilde{C}_1^{(1)} + C_2^{(1)} \tilde{C}_2^{(1)}) + J(C_3^{(1)} \tilde{C}_3^{(1)} + C_4^{(1)} \tilde{C}_4^{(1)}); \\
 im_2 &= -J_0 \dot{\varphi} C_3^{(1)} \tilde{C}_3^{(1)} + J \dot{\varphi} C_4^{(1)} C_4^{(1)}; \\
 im_3 &= -J_0 \dot{\varphi} \tilde{C}_3^{(1)} \frac{dC_4^{(1)}}{d\tau} + J \dot{\varphi} \tilde{C}_4^{(1)} \frac{dC_3^{(1)}}{d\tau}; \\
 C_1^{(1)} &= 1 + i; \quad i = \sqrt{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{16.74}$$

Приведем некоторые выводы из результатов численного интегрирования и моделирования на электронной модели системы уравнений (16.73), полученные В. А. Гробовым [28].

Стационарная резонансная кривая имеет все особенности, присущие нелинейной системе с жесткой характеристикой. В нестационарном режиме при малой нелинейности опоры колебания близки к колебаниям линейной системы. С увеличением перехода через резонансную зону имеет место снижение и смещение максимума амплитуд колебаний. Когда нелинейность опоры сравнительно большая, максимум амплитуд нестационарных колебаний, будучи меньше максимального значения амплитуды стационарных колебаний, может наступить несколько раньше, чем при стационарном режиме.

Так же как и в линейных системах при большом трении, в системе увеличение скорости прохождения через резонансную зону не дает существенного снижения максимальных амплитуд; при малом трении увеличение скорости является эффективным средством снижения амплитуд колебаний. Введение нелинейных элементов с жесткими характеристиками не способствует уменьшению максимальных амплитуд нестационарных колебаний. При мягкой характеристике достигается уменьшение амплитуд колебаний, и в этом случае они меньше, чем в линейной системе.

При переходе вала через критическую зону его деформации медленно изменяются с течением времени, переходя через нуль.

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ДВИГАТЕЛЬ—РОТОР

### Уравнения движения и их интегрирование

Рассматриваем нестационарный переход через критическое состояние системы двигатель—гибкий ротор.

Будем предполагать, что моментная характеристика двигателя не зависит от ускорения, а его мощность имеет тот же порядок, что и мощность, потребляемая системой в зоне критической скорости. Вводится упругая связь между двигателем и ротором, податливая на кручение.

В аналогичной постановке в работах [46, 79] изучались изгибные колебания системы двигатель — ротор без учета крутильных колебаний.

Пусть гибкий круглый вал с приведенной к диску массой установлен на жестких опорах и приводится во вращательное движение двигателем посредством упругой связи, крутильная жесткость которой равна  $c_{12}$  (рис. 16.23). Движение этой системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + \mu_1\dot{x} + cx + \mu(\dot{x} + \dot{\varphi}_2 y) &= ce \cos \varphi_2; \\ m\ddot{y} + \mu_1\dot{y} + cy + \mu(\dot{y} - \dot{\varphi}_2 x) &= ce \sin \varphi_2 - mg; \\ J_1\ddot{\varphi}_1 + \mu_{12}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) &= m_1(\dot{\varphi}_1); \\ J_2\ddot{\varphi}_2 + \mu_{12}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + c_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) &= -m_2 + \\ &+ ce(y \cos \varphi_2 - x \sin \varphi_2) - mge \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (16.75)$$

где  $x, y$  — координаты центра тяжести диска в неподвижной системе координат;

$\mu_1, \mu$  — коэффициенты внешнего и внутреннего затухания при изгибных колебаниях;

$\mu_{12}$  — коэффициент затухания при крутильных колебаниях;

$c$  — жесткость вала в точке крепления диска;

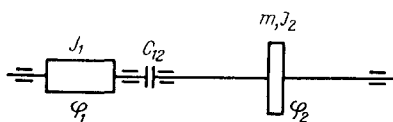
$e, J_2, m$  — эксцентриситет, момент инерции и масса диска;

$m_1$  и  $m_2$  — движущий момент и момент сопротивления;

$J_1$  — момент инерции двигателя;

$\varphi_1, \varphi_2$  — углы поворота маховой массы двигателя и диска.

Как известно [30], движение вала в заkritической области



$$\dot{\varphi}_2 > \sqrt{\frac{c}{m} \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu}\right)} \quad (16.76)$$

при введенных силах трения является неустойчивым. Из этого следует, что внешнее трение не обеспечивает устойчивости движения на любых режимах. Это противоречит опытным данным. Однако имеющееся некоторое качественное соответствие и простота учета вязких сил трения послужили оправданием их введения при

$$\dot{\varphi}_2 < \sqrt{\frac{c}{m} \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu}\right)}. \quad (16.77)$$

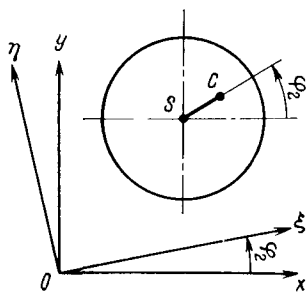


Рис. 16.23

Для интегрирования уравнений (16.75) на моделирующей машине введем новую переменную  $\tau = 0,1 \omega t$  и обозначим

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{c}{m}; & \omega_1^2 &= \frac{c_{12}}{J_1}; & \omega_2^2 &= \frac{c_{12}}{J_2}; & \omega_3^2 &= \frac{c}{J_2}; & \mu_{10} &= \frac{\mu_1}{m}; \\ \mu_0 &= \frac{\mu}{m}; & n_1 &= \frac{\mu_{12}}{J_1}; & n_2 &= \frac{\mu_{12}}{J_2}; & x_1 &= \frac{100}{n} x; \\ y_1 &= \frac{100}{n} \left( y + \frac{g}{\omega^2} \right); & \alpha_1 &= 50\varphi_1; & \beta_1 &= 50\varphi_2, \end{aligned} \right\} \quad (16.78)$$

где  $n$  и  $\omega$  — масштабные коэффициенты.

Используя обозначения (16.78), приведем уравнения (16.75) к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 10x_2; \\ x_2 &= -10 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} x_1 - 10 \frac{\mu_0 + \mu_{10}}{\omega} x_2 - 0,2 \frac{\mu_0}{\omega} \alpha_2 y_1 + \\ &\quad + C\alpha + A \cos \varphi_2; \\ y_1 &= 10y_2; \\ \dot{y}_2 &= -10 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} y_1 - 10 \frac{\mu_0 + \mu_{10}}{\omega} y_2 + 0,2 \frac{\mu_0}{\omega} \alpha_2 x_1 + \\ &\quad + A \sin \varphi_2; \\ \dot{\alpha}_1 &= 10\alpha_2; \\ \dot{\alpha}_2 &= -10 \frac{\omega_1^2}{\omega^2} (\alpha_1 - \beta_1) - 10 \frac{n_1}{\omega} (\alpha_2 - \beta_2) + M_1; \\ \beta_1 &= 10\beta_2; \\ \beta_2 &= 10 \frac{\omega_2^2}{\omega^2} (\alpha_1 - \beta_1) + 10 \frac{n_2}{\omega} (\alpha_2 - \beta_2) - M_2 + \\ &\quad + B (y_1 \cos \varphi_2 - x_1 \sin \varphi_2) - D \cos \varphi_2; \end{aligned} \right\} \quad (16.79)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{10^3 e \omega_0^2}{n \omega^2}; & B &= \frac{5n e \omega_3^2}{\omega^2}; & C &= \frac{20 \mu_0 g}{n \omega \omega_0^2}; \\ D &= \frac{500 \omega_3^2 e g}{\omega^2 \omega_0^2}; & M_1 &= \frac{500 m_1}{I_1 \omega^2}; & M_2 &= \frac{500 m_2}{I_2 \omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (16.80)$$

Точкой обозначается производная по  $\tau$ .

Для получения  $\sin \varphi_2$  и  $\cos \varphi_2$  к системе (16.79) присоединяем следующие дифференциальные уравнения:

$$\dot{\xi} = 0,2 \beta_2 \eta; \quad \dot{\eta} = -0,2 \beta_2 \xi, \quad (16.81)$$

где  $\xi = \sin \varphi_2$ ;  $\eta = \cos \varphi_2$ .

В дальнейшем принимаем  $M_2 = 0$ ,  $M_1 = \text{const}$  или считаем линейной функцией угловой скорости  $\dot{\varphi}_1$ .

Система дифференциальных уравнений (16.79) нелинейна из-за учета взаимосвязи вращательного и поперечного движения диска, имеющей место при  $e \neq 0$ . В случае, когда  $e = 0$ , изгибные колебания вала по-прежнему зависят от его вращательного движения, но обратное влияние отсутствует.

Коэффициент  $B$  удобно назвать параметром обратной связи, так как он является характеристикой обратного влияния поперечных колебаний на вращательное движение системы.

Неравенство

$$|M_1 - M_2| \gg |y_1 \cos \varphi_2 - x_1 \sin \varphi_2| B \quad (16.82)$$

в работе [79] принято в качестве условия, при выполнении которого можно пренебречь обратной связью.

Коэффициент  $D$  характеризует влияние силы веса диска на его вращательное движение и поэтому также является своего рода параметром обратной связи. Поэтому вместо (16.82) следует ввести более строгое условие

$$|M_1 - M_2| \gg |B(y_1 \cos \varphi_2 - x_1 \sin \varphi_2) - D \cos \varphi_2|. \quad (16.83)$$

### Численные результаты

Приведем некоторые результаты интегрирования дифференциальных уравнений (16.79).

На рис. 16.24 представлены графики максимальных динамических коэффициентов  $\lambda_x$  в зависимости от  $M_1 = \text{const}$  при  $C = D = 0$ .

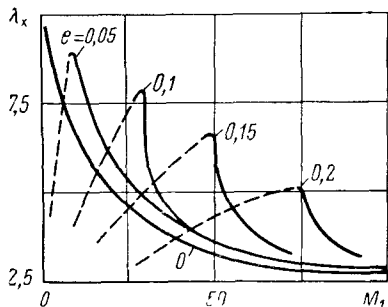


Рис. 16.24

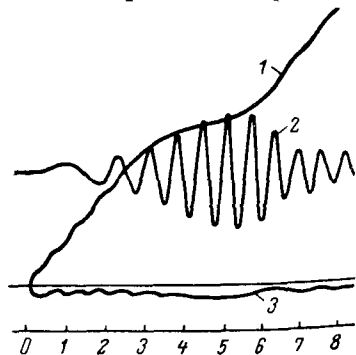


Рис. 16.25

Параметры:  $A = 50$ ;  $C = D = 0$ ;  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_0 = \omega$ ;  $n_1 = n_2 = \mu_{10} = 2\mu_0 = 0,1\omega$ . Пунктирные части кривых дают значения  $\lambda_x$  при установившихся дорезонансных колебаниях. Эти ветви соответствуют тем значениям  $M_1$ , которые еще недостаточны для перевода системы через критическое состояние. Сплош-



ные линии представляют максимальные  $\lambda_x$  при нестационарном переходе через критическое состояние. Кривая  $e = 0$  отвечает случаю отсутствия обратной связи, когда угловая скорость  $\varphi_2$  изменяется по линейному закону, соответствующему данному моменту  $M_1 = \text{const}$ .

С увеличением эксцентricитета  $e$  максимумы графиков  $\lambda_x$  снижаются и смещаются вправо, т. е. возрастает минимальное значение  $M_1^*$ , необходимое для перевода системы через критическое состояние. При фиксированном  $M_1 > M_1^*$  чем больше  $e$ , тем больше  $\lambda_x$ . Это объясняется тем, что с увеличением  $e$  возра-

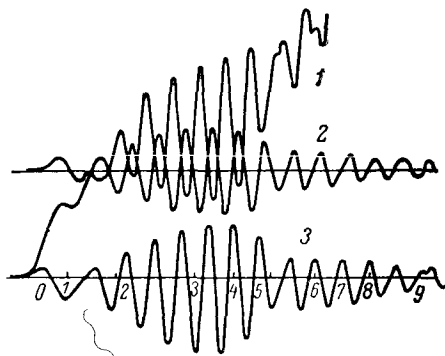


Рис. 16.26

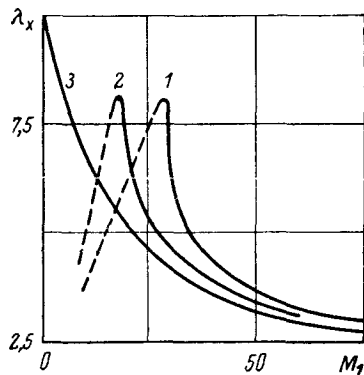


Рис. 16.27

стает и мощность, расходуемая на изгибные колебания, а мощность, потребляемая на вращение, снижается. В результате этого уменьшается скорость изменения частоты возмущающей силы, что, как известно, приводит к увеличению  $\lambda_x$ .

Результаты интегрирования уравнений (16.79) показывают, что при  $D = 0$  крутильные колебания в системе практически отсутствуют: угловая скорость плавно возрастает до критической области, а при переходе через эту область рост  $\varphi_2$  замедляется (если  $e$  достаточно велико, то возможно даже уменьшение  $\varphi_2$ , т. е. так называемое попятное движение), затем угловая скорость снова плавно возрастает. Это видно из рис. 16.25, где параметры:  $A = 50$ ;  $B = 1$ ;  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_0 = \omega$ ;  $\mu_0 = 0$ ;  $n_1 = n_2 = \mu_{10} = 0,1\omega$ ; а)  $M_1 = 30e$ ; б)  $M_1 = 27e$ ;  $\varphi_2'$  — кривая 1;  $x$  — кривая 2;  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  — кривая 3.

Действие силы веса диска ( $D \neq 0$ ) приводит к появлению крутильных колебаний в системе (рис. 16.26), что, в свою очередь, оказывает влияние на изгибные колебания. На рисунке параметры следующие:  $A = 50$ ;  $B = 1$ ;  $C = 0$ ;  $D = 78$ ;  $\mu_0 = 0$ ;  $\mu_{10} = n_1 = n_2 = 0,1\omega$ ;  $\omega_0 = \omega_3 = \omega$ ;  $M_1 = 41b$ ;  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0,5\omega^2$ ;  $\varphi_2$  — кривая 1;  $x$  — кривая 2;  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  — кривая 3.

На рис. 16.27 приведены графики  $\lambda_x$  ( $B = 1, D = 0$  — кривая 1;  $B = 0, D = 78$  — кривая 2;  $B = D = 0$  — кривая 3), которые показывают, что сила веса диска ( $D \neq 0$ ) так же, как и обратная связь ( $B \neq 0$ ), способствует увеличению коэффициента  $\lambda_x$ .

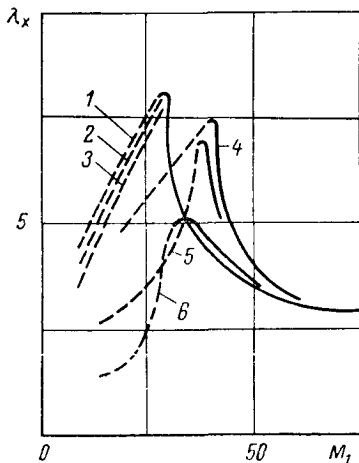


Рис. 16.28

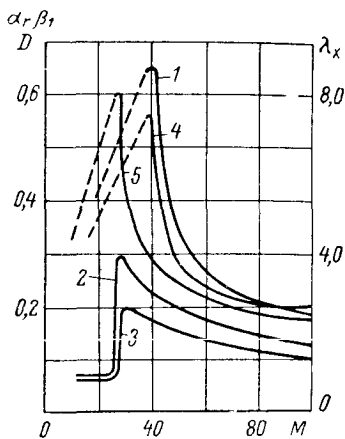


Рис. 16.29

Параметры:  $A = 50; \mu_0 = 0; \omega_{10} = n_1 = n_2 \omega_{10} = 0,1\omega; \omega^2 = \omega_0^2 = \omega_3^2 = 2\omega_1^2 = 2\omega_2^2; C = 0$ .

На рис. 16.28 представлены графики  $\lambda_x$  при  $D = 0$  (кривые 1, 2, 3) и  $D = 78$  (кривые 4, 5, 6), показывающие влияние крутильных колебаний на изгибные. Чем ближе друг к другу собственные частоты крутильных и поперечных колебаний, тем меньше пик  $\lambda_x$ . При отсутствии крутильных колебаний ( $D = 0$ ) различие собственных частот влияет незначительно (кривые 1, 2, 3 практически совпадают). Параметры:  $A = 50; B = 1; C = 0; \mu_0 = 0; n_1 = n_2 = \mu_{10} = 0,1\omega$ ; кривые 1 и 6 —  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0,3\omega^2$ ; 2 и 5 —  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0,4\omega^2$ ; 3 и 4 —  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0,5\omega^2$ .

Когда указанные собственные частоты совпадают, то в докритическом состоянии  $\lambda_x$  и  $\lambda_\varphi = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{D}$  с увеличением  $M_1$  возрастают монотонно (рис. 16.29, кривые 1 и 4). При  $\omega_1^2 + \omega_2^2 > \omega_0^2$  резонанс крутильных колебаний в системе наступает позже,

чем резонанс поперечных колебаний. При этом наблюдается скачкообразное возрастание  $\lambda_{\varphi}$  (кривые 2 и 3) в момент резкого падения  $\lambda_x$  (кривая 5).  $A = 50$ ;  $B = 1$ ;  $C = 0$ ;  $\omega_0 = \omega_3 = \omega$ ;  $\mu_0 = 0$ ;  $n_1 = n_2 = \omega_{10} = 0,1\omega$ ; а)  $D = 78$ ;  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0,5 \omega^2$ ; б)  $D = 78$  и 156;  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .

Вычисления  $\lambda_{\varphi}$  при изменении  $\mu_0$  в широких пределах показывают, что внутреннее трение в принятом нами виде не оказывает на  $\lambda_{\varphi}$  существенного влияния при переходе области критической скорости. Лишь в закритической области оно приводит к раскачиванию системы.

В предыдущих случаях крутящий момент  $M_1$  принимался постоянным, так как предварительное изучение не обнаружило сильной зависимости  $\lambda_x$  от наклона моментной характеристики двигателя.

Рис. 16.30 дает максимальные значения  $\lambda_x$  при переходе критической скорости, когда двигатель создает постоянный тормозящий момент —  $M_1$ . В этом случае с увеличением тормозящего момента наблюдается плавное убывание  $\lambda_x$  без экстремальных значений. Параметры:  $A = 50$ ;  $B = 1$ ;  $C = 0$ ;  $\mu_0 = 0$ ;  $n_1 = n_2 = \mu_{10} = 0,1\omega$ ;  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_0 = \omega$ .

Таким образом, в несбалансированной системе, податливой на кручение, благодаря действию силы веса ротора возникают крутильные колебания с частотой, равной угловой скорости вращения. Влияние этих крутильных колебаний аналогично влиянию обратной связи ( $B = 0$ ).

## ГЛАВА 17

### КОЛЕБАНИЕ БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ

Вопрос о действии движущейся нагрузки имеет до сих пор значительный интерес для техники, несмотря на его давность. В настоящее время нагрузки и скорость движения возрастают, в связи с чем увеличивается и их динамическое воздействие на конструкции. Благодаря действию подвижной нагрузки возникают дополнительные деформации и напряжения.

Дифференциальное уравнение движения груза по невесомой балке было получено Виллисом и Стоксом в 1849 г., а затем решено несколькими авторами [47, 94]. Решение задачи для случая, когда по балке движется сила, впервые было дано А. Н. Крыловым в 1905 г. [47], а затем несколько позже С. П. Тимошенко [94, 147]. Общий случай, когда по весоной балке движется груз, обладающий инерцией, рассматривался рядом авторов, которые получили приближенные решения.

Влияние движущейся массы приближенно было учтено К. Иглисом. По методу К. Иглиса, развитому в дальнейшем В. В. Болотиным [8], для ряда частных случаев были определены прогибы балок при некоторых ограничениях, накладываемых на величину скорости движения. Дальнейшее развитие метод получил в работах А. Б. Моргаевского [102].

Ряд авторов сводили уравнение колебаний балки к интегродифференциальному уравнению [102]. Однако его ядро из-за плохой сходимости не позволило найти с необходимой точностью прогибы, а тем более напряжения.

Ниже приводится решение по методу сведения к интегральным уравнениям, позволяющему вычислить с любой требуемой точностью прогибы и напряжения любого сечения балки [102].

#### **ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ГРУЗА НА ВЕСОМЫЕ БАЛКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ. ДВИЖЕНИЕ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ**

В общем виде уравнение поперечных колебаний балки с грузом членом имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 z_{\partial}}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 z_{\partial}}{\partial t^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left( P_{0k} - \frac{P_{0k}}{g} \cdot \frac{d^2 z_0}{dt^2} + G_k \sin \omega_k t \right) \delta(x - \eta_k); \quad (17.1)$$

здесь  $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  — ускорение движущегося груза;  $z_0(x, t)$  — динамический прогиб балки;  $EJ(x)$  — жесткость ее. Грузовой член представляет собой наложение динамических нагрузок от  $n$  подвижных масс, каждая из которых расположена на расстоянии  $n_k$  от левой опоры, причем это расстояние меняется по определенному закону в соответствии с законом движения груза по балке. Например, для равномерного движения  $k$ -го груза со скоростью  $v$  имеем  $\eta_k = vt$ . Здесь  $P_{0k}$  обозначен вес движущегося груза,  $G_k \sin \omega_k t$  — вертикальная составляющая центробежной силы от неуравновешенной массы [рис. 17.1].

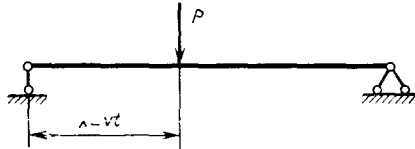


Рис. 17.1

Решение уравнения (17.1) ищем при начальных условиях, соответствующих балке, неподвижной в момент входа груза, и краевых условиях, отвечающих виду закрепления концов

$$z_0(x, t) = z_0 \sum_i q_i(t) X_i(x) = z_0 z(x, t), \quad (17.2)$$

где  $z_0$  — максимальный прогиб балки под действием сосредоточенной силы  $P_0$  (для опертой балки  $z_0 = \frac{2P_0 l^3}{\pi^4 EJ}$ );  $z(x, t)$  — коэффициент динамичности по отношению к  $z_0$ ;  $X_i(x)$  — фундаментальная функция. Решение уравнения (17.1) удобно находить методом обобщенных координат или методом интегральных уравнений.

По методу обобщенных координат [109] прогибы определяются с достаточной точностью, однако напряжения найти не удастся из-за плохой сходимости ряда.

Метод интегральных уравнений [102] позволяет получить хорошо сходящиеся ряды для прогибов (17.2) и напряжений.

Уравнения для обобщенной координаты  $q_i$  записываются в форме Лагранжа и после перехода к переменной  $\eta = vt$  принимают вид

$$\frac{d^2 q_i}{d\eta^2} + k_i^2 q_i = f_i(\eta), \quad (17.3)$$

где для свободно опертой балки

$$k_i^2 = \frac{\pi^2 i^4}{\alpha^2 l^2}; \quad \alpha = \frac{vl}{\pi} \sqrt{\frac{F\rho}{EJ}};$$

$$f_i(\eta) = \frac{\pi^2}{(l\alpha)^2} \sum_{k=1}^n p_k \left[ 1 - \frac{2\alpha^2\beta}{\pi^2} \cdot \frac{d^2z(\eta, \eta_k)}{d\eta^2} + \frac{G}{P_0} \sin \frac{\nu_k \pi \eta}{l} \right] \sin \frac{i\pi \eta_k}{l};$$

$$\beta = \frac{P_0}{F\rho l g}; \quad \nu_k = \frac{\omega_k l}{\pi v}, \quad p_k = \frac{P_k}{P_0}.$$
(17.4)

Движение нескольких грузов рассмотрено в работе [102]. Для случая движения одного груза (см. рис. 17.1)

$$f_i(\eta) = \frac{\pi^2}{(\alpha l)^2} \left[ 1 - \frac{2\alpha^2\beta}{\pi^2} \cdot \frac{d^2z(\eta, \eta)}{d\eta^2} + \frac{G}{P_0} \sin \frac{\nu \pi \eta}{l} \right].$$

Из уравнения (17.3) следует

$$q_i(\eta) = A_i(b) \cos k_i \eta + B_i(b) \sin k_i \eta +$$

$$+ \frac{1}{k_i} \int_b^\eta f_i(\lambda) \sin k_i (\eta - \lambda) d\lambda,$$
(17.5)

где  $A_i(b)$ ,  $B_i(b)$  постоянные, определяемые из условий, что для  $\eta = b$  заданы  $q(\eta)$  и  $\frac{dq}{d\eta}$ .

Вводим функцию

$$U(\eta) = l^2 \frac{d^2z(\eta, \eta)}{d\eta^2}.$$
(17.6)

Определяем из (17.6)  $z(\eta, \eta)$ :

$$z(\eta, \eta) = \frac{1}{l} K_1(b) \eta + K_2(b) + \frac{1}{l^2} \int_b^\eta (\eta - \lambda) U(\lambda) d\lambda.$$
(17.7)

Значения  $K_1(b)$  и  $K_2(b)$  находятся из условий для  $z$  и  $\frac{dz}{d\eta}$  при  $\eta = b$ .

Для численного интегрирования уравнений (17.5) и (17.7) интервал интегрирования  $\{0, l\}$  разбивается на  $n$  равных участков длиной  $\tau = \frac{l}{n}$  и значения  $q_i$ ,  $\frac{dq_i}{d\eta}$ ,  $z$ ,  $\frac{dz}{d\eta}$ , полученные в конце очередного шага, принимаются за начальные условия для  $q_i$  для следующего. Длина шага  $\tau$  выбирается так, чтобы функцию  $f_i(\eta)$  (17.4), как медленно меняющуюся, можно было принять постоянной, равной среднему значению в пределах шага, и вынести за знак интеграла. Тогда после интегрирования и введения обозначений

$$q_i(m\tau) = M(i, m), \quad \frac{1}{k_i} \cdot \frac{dq_i}{d\eta_{\eta=m\tau}} = N(i, m),$$

$$z(\eta, \eta)_{\eta=m\tau} = Q(m), \quad \frac{l}{n} \cdot \frac{dz}{d\eta_{\eta=m\tau}} = R(m)$$

выражения (17.5) и (17.7) приводятся к рекуррентному виду

$$\left. \begin{aligned} M(i, m+1) &= M(i, m) c(i) + N(i, m) s(i) + F_{i, m+1} [1 - c(i)]; \\ N(i, m+1) &= N(i, m) c(i) - M(i, m) s(i) + F_{i, m+1} s(i); \\ Q(m+1) &= Q(m) + R(m) + \frac{1}{2n^2} U_{m+1}; \\ R(m+1) &= R(m) + \frac{1}{n^2} U_{m+1}, \end{aligned} \right\} (17.8)$$

где

$$\begin{aligned} c(i) &= \cos \frac{i^2 \pi}{\alpha n}; & s(i) &= \sin \frac{i^2 \pi}{\alpha n}; \\ F_{i, m+1} &= \frac{1}{i^4} \left[ 1 - 2 \frac{\alpha^2 \beta}{\pi^2} U_{m+1} + \right. \\ &+ \left. \frac{G}{P_0} \sin \frac{\nu \pi (2m+1)}{2n} \right] \sin \frac{i \pi (2m+1)}{2n}; \end{aligned}$$

$U_{m+1}$  — среднее значение функции (17.6) на участке  $\{m\tau, (m+1)\tau\}$ .

Для определения неизвестного значения  $U_{m+1}$  необходимо использовать зависимость (17.2), которая для свободно опертой балки принимает вид

$$z(\eta, \eta) = \sum_i q_i(\eta) \sin \frac{i \pi \eta}{l},$$

или, для  $\eta = m\tau + \tau$ , согласно принятых обозначений

$$Q(m+1) = \sum_i M(i, m+1) \sin \frac{i \pi (m+1)}{n}. \quad (17.9)$$

Вычислительный процесс строится следующим образом.

После подстановки в уравнение (17.9) значений  $Q(m+1)$ ,  $M(m+1)$  согласно (17.8) и принимая нулевые начальные условия  $M(i, 0) = N(i, 0) = Q(0) = R(0) = 0$ , из (17.9) определяем  $U_1$ , затем находим  $M, N, Q, R$  (17.8) для  $m = 1$ . После подстановки этих величин в (17.9) находится  $U_2$ . Вычисление заканчивается при  $m = n - 1$ . При расчете определяют коэффициенты динамичности перемещений в сечении  $x$ :

$$z(m\tau + \tau, x) = \sum_i M(i, m+1) \sin \frac{i \pi x}{l} \quad (17.10)$$

и динамические напряжения в балке

$$\begin{aligned} \sigma_{\partial}(t, x) &= -\frac{EJ}{W} \cdot \frac{\partial^2 z_{\partial}(t, x)}{\partial x^2} = \\ &= \sigma_0 \frac{8}{\pi^2} \sum_i i^2 q_i(t) \sin \frac{i \pi x}{l}, \end{aligned} \quad (17.11)$$

где  $W$  — момент сопротивления балки;  $\sigma_0 = \frac{P_0 l}{4W}$ . Выражения для коэффициента динамичности напряжений  $\sigma(t, x) = \frac{\sigma_d(t, x)}{\sigma_0}$  при  $\eta = m\tau$  принимает вид

$$\sigma(m\tau + \tau, x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_i i^2 M(i, m+1) \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (17.11')$$

Полученный алгоритм реализован на ЭЦВМ.

### Движение груза по многопролетной балке

Расчетная схема балочных пролетных строений некоторых железнодорожных мостов представляет собой многопролетную балку с жесткими или нелинейно-упругими опорами. Если, например, эти опоры типа Дуффинга, их реакции записываются в виде

$$P_s = -c_{s1} z_d(t, \xi_s) - c_{s2} z_d^3(t, \xi_s); \quad (17.12)$$

где  $c_{s1}$  и  $c_{s2}$  — коэффициенты упругости  $s$ -й упругой опоры;  $\xi_s$  — координата упругой опоры.

Если края балки свободно оперты, решение можно искать в том же виде, что и для однопролетной балки:

$$z(t, x) = \sum_i q_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Из уравнения Лагранжа для обобщенной координаты получаем уравнение

$$\frac{a^2 q_i}{d\eta^2} + k_i^2 q_i = f_i^*(\eta), \quad (17.13)$$

где

$$f_i^*(\eta) = f_i(\eta) - \frac{\pi^2}{(\alpha l)^2} \sum_{s=1}^j [C_{s1} z(\eta, \xi_s) + C_{s2} z^3(\eta, \xi_s)] \sin \frac{i\pi \xi_s}{l};$$

$$C_{s1} = \frac{c_{s1} z_0}{P_0}; \quad C_{s2} = \frac{c_{s2} z_0^3}{P_0};$$

$j$  — число промежуточных опор.

Подобно тому, как сделано выше, получены рекуррентные формулы  $(m+1)$ -го шага (17.8). Отличие от случая однопролетной балки заключается в другом выражении для  $F_{i, m+1}$ , которое в этом случае принимает вид

$$F_{i, m+1}^* = F_{i, m+1} - \frac{1}{i^4} \sum_{s=1}^j [C_{s1} z_{m+1}(\xi_s) + C_{s2} z_{m+1}^3(\xi_s)] \sin \frac{i\pi \xi_s}{l}, \quad (17.14)$$



где  $z_{m+1}(\xi_s)$  — среднее значение прогиба на опоре на  $m + 1$  участке.

Для определения неизвестных  $U_{m+1}$  и  $z_{m+1}(\xi_s)$  используются условия для прогиба под грузом и прогиба на упругих опорах

$$\left. \begin{aligned} z(\eta, \eta) &= \sum_i q_i(\eta) \sin \frac{i\pi\eta}{l}; \\ z(\eta, \xi_s) &= \sum_i q_i(\eta) \sin \frac{i\pi\xi_s}{l} \\ (s &= 1, 2, \dots, j), \end{aligned} \right\} \quad (17.15)$$

откуда на  $m + 1$  шаге получается система нелинейных алгебраических уравнений  $(j + 1)$ -го порядка

$$\left. \begin{aligned} Q(m+1) &= \sum_i M(i, m+1) \sin \frac{i\pi x}{l}; \\ z_{m+1}(\xi_s) &= \sum_i M(i, m+1) \sin \frac{i\pi\xi_s}{l} \\ (s &= 1, 2, \dots, j). \end{aligned} \right\} \quad (17.16)$$

При проведении расчетов решение системы (17.16) найдено по методу Ньютона. При  $m = 0$  начальное приближение для всех неизвестных выбиралось равным 0,001, для последующих  $m$  начальным приближением служило решение на предыдущем шаге.

### Динамическое воздействие груза, движущегося равнопеременно, на весомые балки конечной длины

В случае равнопеременного движения груза его горизонтальное перемещение в момент времени  $t$  (рис. 17.1) будет

$$\eta = \frac{\omega t^2}{2} + vt, \quad (17.17)$$

где  $\omega$  — ускорение груза;  $v$  — его скорость при входе на балку.

Делая замену  $t = t_1 - \frac{v}{\omega}$ , получим в переменной  $t_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{2\eta\omega + v^2}$  выражение для давления в месте контакта груза и балки [правая часть формулы (17.1)]

$$\begin{aligned} P_\partial &= P_0 \left[ 1 - \frac{v^2}{g} \cdot \frac{d^2 z_\partial(\eta, \eta)}{d\eta^2} \left( 2 \frac{\eta\omega}{v^2} + 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega}{g} \cdot \frac{dz(\eta, \eta)}{d\eta} + \frac{G_0}{P_0} \left( \frac{2\eta\omega}{v^2} + 1 \right) \sin \frac{v\pi\eta}{l} \right], \quad (17.18) \end{aligned}$$

где  $G_0$  — амплитуда центробежной силы от неуравновешенной массы в момент входа груза.

Уравнение Лагранжа для обобщенной координаты получено в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_i(t)}{dt_1^2} + v^2 k_i^2 q_i(t_1) = \frac{v^2 \pi^2}{\alpha^2 l^2} \left[ 1 - 2\alpha^2 \beta \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \frac{d^2 z(\eta, \eta)}{d\eta^2} \left( \frac{2\eta}{\gamma l} + 1 \right) - \right. \\ \left. - 2\alpha^2 \beta \frac{l}{\pi^2 \gamma} \cdot \frac{dz(\eta, \eta)}{d\eta} + \frac{G_0}{P_0} \left( \frac{2\eta}{\gamma l} + 1 \right) \sin \frac{\nu \pi \eta}{l} \right] \sin \frac{i \pi \eta}{l} \equiv f(\eta), \end{aligned} \quad (17.19)$$

где  $\gamma = \frac{v^2}{l\omega}$  — безразмерный параметр, характеризующий ускорение груза.

Запишем решение этого уравнения

$$\begin{aligned} q_i(t_1) = A_i(b_1) \cos v k_i t_1 + B_i(b_1) \sin v k_i t_1 + \\ + \frac{1}{v k_i} \int_{b_1}^{t_1} f(\lambda) \sin v k_i (\eta - \lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (17.20)$$

После перехода к переменной  $\eta$  выражение для обобщенной координаты (17.20) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} q_i(\eta) = A_i(b) \cos \psi(\eta) + B_i(b) \sin \psi(\eta) + \\ + \frac{\pi \gamma}{\alpha l i^2} \int_b^\eta f_1(\eta_1) \sin [\psi(\eta) - \psi(\eta_1)] d\eta_1, \end{aligned} \quad (17.21)$$

где

$$\begin{aligned} b = \frac{\omega}{2} \left( b_1^2 - \frac{v^2}{\omega^2} \right); \quad \psi(\eta) = \frac{i^2 \pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2\eta \gamma}{l} + \gamma^2}, \\ f_1(\eta) = \frac{\alpha^2 l^2}{v^2 \pi^2} \cdot \frac{f(\eta)}{\sqrt{\frac{2\eta \gamma}{l} + \gamma^2}}. \end{aligned}$$

Полученное уравнение (17.21) подобно уравнению (17.5) и также может быть приведено к рекуррентным формулам типа (17.8). Неизвестная функция  $U(\eta)$  на каждом шаге определяется из уравнения (17.6).

### Движение груза по невесомой балке

Если при выводе уравнения колебания балки пренебречь ее инерцией по сравнению с инерцией движущейся нагрузки, т. е. рассматривать балку как невесомую, приходим к случаю Стокса.

Предположим, что балка постоянной жесткости  $EJ$  длиной  $l$  оперта при  $x = 0$  и  $x = l$ . Прогиб балки в сечении с абсциссой

$x = x_2$  под действием силы  $Q_1$ , приложенной в сечении  $x = x_1$ , будет

$$z_{\partial}(x_2) = \delta_{21} Q_1, \quad (17.22)$$

где  $\delta_{21}$  — коэффициент влияния.

Перемещение балки в точке  $x = \eta l$  под грузом

$$z_{\partial}(\eta) = \delta_{11} Q_1, \quad (17.23)$$

где

$$Q = \mu P_0 - \frac{P_0}{g} \cdot \frac{d^2 z_{\partial}}{dt^2}; \quad (17.24)$$

здесь  $\mu P_0$  — составляющая силы тяжести  $P$  на направлении перемещения (при наклонном расположении балки);  $x = vt$ .

Коэффициент влияния

$$\delta_{11} = \frac{\pi^4 z_0}{6P_0} \eta^2 (1 - \eta)^2,$$

где  $z_0 = \frac{2P_0 l^3}{\pi^4 EJ}$  — прогиб балки при  $x = \frac{l}{2}$ . Полагая

$$z_{\partial}(\eta) = z(\eta) z_0,$$

получим из (17.24) дифференциальное уравнение движения груза по невесомой балке (уравнение Стокса)

$$z'' + \frac{6\lambda z}{\pi^4 \eta^2 (1 - \eta)^2} = \lambda \mu, \quad (17.25)$$

где  $\lambda = \frac{ql^2}{v^2 z_0}$ .

Если ввести обозначения  $\alpha = \frac{vl}{\pi \sqrt{\frac{EJ}{F\rho}}}$ ,  $\beta = \frac{P_0}{F\rho l g}$ , то уравнение (17.25) можно записать в виде

$$z'' + \frac{3z}{\alpha^2 \beta \pi^2 (1 - \eta)^2 \eta^2} = \frac{\pi^2}{2\alpha^2 \beta}, \quad (17.26)$$

где  $\alpha^2 \beta = c = \frac{v^2 l P_0}{\pi^2 EJ g}$ .

Как известно, уравнение Стокса может быть приведено к уравнению с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + J(x) y = f(x) \quad (17.27)$$

и сделаем замену переменных  $y = \psi(x) z$ ,  $u = \int \varphi(x) dx$ .

После замены переменных уравнение (17.27) принимает вид

$$\frac{d^2 z}{du^2} + \frac{\psi \varphi' + 2\psi' \varphi}{\psi \varphi^2} \cdot \frac{dz}{du} + \frac{\psi'' + J(u) \psi}{\psi \varphi^2} z = \frac{f(x)}{\psi \varphi^2}, \quad (17.28)$$

чтобы обратить в нуль коэффициент при  $\frac{dz}{du}$ , необходимо положить  $\frac{\Phi'}{\Phi} + 2 \frac{\Psi'}{\Psi} = 0$ , т. е.  $\Phi(x) = \frac{C}{\Psi^2(x)}$ .

Следовательно, уравнение (17.28) будет иметь вид

$$\frac{d^2z}{du^2} + J_1(u) z = \Psi^3 f(u).$$

Для того чтобы  $J_1(u)$  было постоянной  $J_1(u) = a^2$ , необходимо чтобы

$$J(x) = \frac{a^2 e^2}{\Psi^2} - \frac{\Psi''}{\Psi} = \frac{B^2}{\Psi^2} - \frac{\Psi''}{\Psi}.$$

Если принять  $\psi = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ , то для уравнения (17.27) получим  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{m}{(ax^2 + bx + c)^2} y = f(x)$ , где  $m = (4ac - b^2)^{\frac{1}{2}}$ ; переходя к переменной  $u$ , приведенное уравнение запишем в виде

$$\frac{d^2z}{du^2} + \lambda^2 z = f\psi^3. \quad (17.29)$$

Решение этого уравнения получается без затруднений, однако оно неудобно для вычислений и на нем останавливаться не будем.

В дальнейшем приведем результаты вычислений прогибов по уравнению Стокса численным методом Адамса.

Аналогичным образом решается задача для случая жестких и упругих опор.

Приведем уравнение Стокса, обобщенное на случай равнопеременного движения груза [102]

$$\begin{aligned} \frac{d^2z(\xi, \xi)}{d\xi^2} \left( \frac{2\xi}{\gamma} + 1 \right) + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dz(\xi, \xi)}{d\xi} + \\ + \frac{3z(\xi, \xi)}{\pi^2 \alpha^2 \beta \xi^2 (1 - \xi)^2} = \frac{\pi^2}{2\alpha^2 \beta}, \end{aligned} \quad (17.30)$$

где  $\xi = \frac{\eta}{l}$ ;  $\gamma = \frac{v^2}{l\omega}$ ;  $\omega$  — ускорение груза.

Это уравнение было проинтегрировано для ряда частных случаев.

Для удобства сравнения с весомой балкой при расчетах даем значения  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha^2 \beta = C$ ).

Для численного интегрирования уравнение второго порядка (17.26) запишем в виде двух уравнений первого порядка

$$\frac{dz}{d\xi} = f_1(\xi); \quad \frac{ds}{d\xi} = f_2(\xi, z),$$

где

$$s = f_1(\xi), \quad f_2 = \frac{\pi^2}{2\alpha^2 \beta} - \frac{3}{\pi^2 \alpha^2 \beta} \cdot \frac{z}{\xi^2 (1 - \xi)^2}.$$

Начальные условия  $z = 0$ ;  $\frac{dz}{d\xi} = s = 0$  для  $\xi = 0$ .

Для расчета по методу Адамса следует иметь значение  $z$  и производных в начале координат.

Решение уравнения (17.26) можно представить в виде ряда

$$z = \eta^2 (1 - \eta)^2 (C_0 + C_1\eta + C_2\eta^2 + \dots). \quad (17.31)$$

После подстановки значения (17.31) в уравнение (17.26) и приравнивания коэффициентов при одинаковых  $\eta$  получим

$$C_0 = \frac{\pi^4}{6 + 4\alpha^2\beta\pi^2}; \quad \left(\frac{d^2z}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} = 2C_0 = \frac{\pi^4}{3 + 2\alpha^2\beta\pi^2}.$$

Коэффициент динамичности напряжений будет

$$\sigma(\xi, \xi) = \frac{24z(\xi, \xi)}{\pi^4\xi(1-\xi)}.$$

При расчете на ЭВМ шаг  $h$  для  $\xi$  принимался равным 0,001. Расчет дает пять точных значащих цифр, в чем можно убедиться, подсчитав с удвоенной точностью.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ПРИ ДВИЖЕНИИ ГРУЗА С ПОСТОЯННОЙ И ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ

### Постоянная скорость движения

В табл. 17.1 приведены наибольшие в пролете коэффициенты динамичности прогибов под грузом  $z(\xi, \xi)$ . Результаты получены по методу обобщенных координат  $|0\rangle$  при различных значениях параметров  $\alpha$  (характеризующего скорость груза) и  $\beta$  (равного отношению массы груза к массе балки). Также приведены ординаты пролета  $\xi = \frac{\eta}{l}$ , в которых прогибы максимальны.

Таблица 17.1

Коэффициенты увеличения деформаций для весомой балки

$\alpha$	$\beta = 1/3$		1/2		1		2		3	
	$z$	$\xi$	$z$	$\xi$	$z$	$\xi$	$z$	$\xi$	$z$	$\xi$
1/10	1,035	0,42	1,072	0,44	1,127	0,49	1,144	0,53	1,150	0,54
1/5	1,127	0,42	1,188	0,44	1,350	0,50	1,430	0,60	1,386	0,68
1/4	1,372	0,49	1,437	0,51	1,558	0,58	1,669	0,65	1,658	0,75
1/3	1,602	0,57	1,646	0,60	1,680	0,67	1,621	0,72	1,534	0,78
1/2	1,572	0,68	1,556	0,72	1,419	0,80	1,254	0,83	1,252	0,84

При расчетах по методу интегральных уравнений интервал интегрирования разбивался на 200 участков ( $n = 200$ ), в разложении удерживалось 50 членов ( $i = 50$ ).

Исходными данными задачи служат безразмерные параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\frac{G}{P_0}$ ,  $\nu$ . Время счета варианта на ЭЦВМ «Урал-2» — 10 мин и пропорционально  $n$  и  $i$ .

Расхождение вычисленных прогибов с данными таблицами не превышает 0,5%, что говорит о достаточной надежности результатов. На рис. 17.2 приведены графики изменения наибольших динамических коэффициентов прогибов и напряжений в зависимости от значений параметра  $\alpha$ , характеризующего скорость груза.

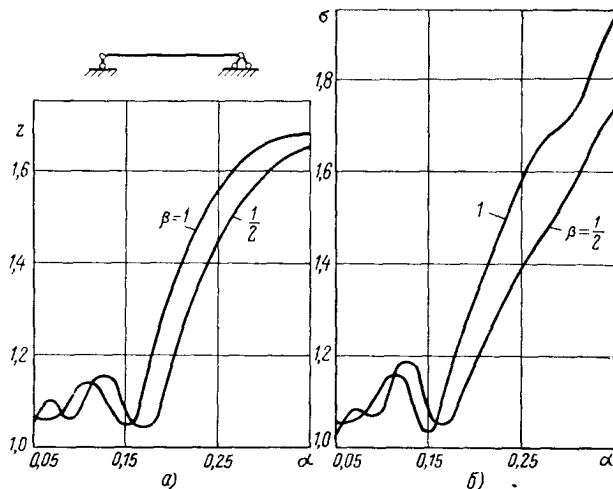


Рис. 17.2

Колебания многопролетных балок с промежуточными упругими опорами рассмотрены в работе [102]. Рис. 17.3 дополняет приведенные там результаты расчетами диаграммами наибольших прогибов  $z$  и напряжений  $\sigma$  под грузом для балок с одной промежуточной упругой опорой. Относительный коэффициент упругости опоры  $c = \frac{cz_0}{P_0}$ , где  $l$  — длина всей неразрезной балки,  $c$  — жесткость упругой  $P_0$  опоры;

$$z_0 = \frac{2P_0 l^3}{\pi^4 E J}.$$

Динамические прогибы и напряжения получаются после умножения значений  $z$  и  $\sigma$ , взятых из графиков, на соответствующие величины  $z_0$  и  $\sigma_0$ :

$$z_d = \frac{2P_0 l^3}{\pi^4 E J} z; \quad \sigma_d = \frac{P_0 l}{4W} \sigma.$$

Расчеты показали, что при малых значениях отношения массы груза к массе балки  $\beta$  уравнение Стокса приводит к значительным погрешностям по сравнению с точным методом интегральных

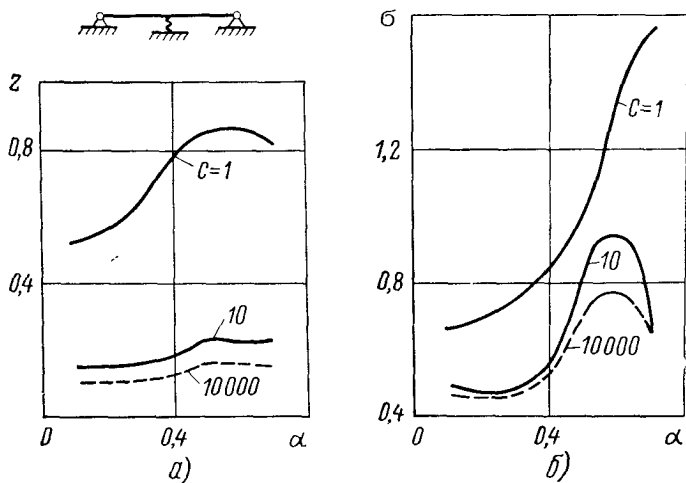


Рис. 17.3

уравнений. Но уже при  $\beta > 3$  отличие в деформациях не превышает 5%, в напряжениях — 10%, и вычисления можно проводить по более простому уравнению Стокса.

### Переменная скорость движения

Точность расчетов, проведенных по методу интегральных уравнений для весомой балки, принималась такой же, как и в случае постоянной скорости, т. е.  $n = 200$ ,  $i = 50$ .

Исходными данными здесь являлись  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\frac{G_0}{P_0}$ ,  $v$ . Время счета варианта 10 мин. Задавшись отношением скорости схода груза с балки  $v_1$  к скорости входа на балку  $v$ ,  $\gamma$ , соответствующее данному отношению  $\frac{v_1}{v} = \frac{\alpha_1}{\alpha}$ , из уравнения (17.18), положив  $\eta = l$ , найдем время пробега груза  $t = \frac{1}{\omega} \sqrt{2l\omega + v^2}$ .

Так как  $v_1 = \omega t_1$ , то  $\frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{2}{\gamma} + 1}$ .

При этом отрицательному значению  $\gamma$  отвечает равнозамедленное движение, положительному — равноускоренное.

Средняя скорость в пролете  $v_{cp} = \frac{v + v_1}{2}$ .

Расчеты проводились для равноускоренного и равнозамедленного движения при одинаковой средней скорости в пролете. Для

сравнения также был проведен расчет с постоянной скоростью движения груза, равной  $v_{cp}$ .

На рис. 17.4 приведены значения максимальных коэффициентов динамичности прогибов  $z$  и напряжений  $\sigma$ . Принималось  $\frac{v_1}{v} = \frac{1}{2} \left[ \gamma = -2, (6), v_{cp} = \frac{3}{4} v, \alpha_{cp} = \frac{3}{4} \alpha \right]$  (рис. 17.4, а) и  $\frac{v_1}{v} = 2 \left[ \gamma = 0, (6), v_{cp} = \frac{3}{2} v \right]$  (рис. 17.4, б). Графики для  $\frac{v_1}{v} = 1$  нанесены пунктиром. По оси абсцисс откладывалось  $\alpha$ , соответствующее  $v_{cp}$ . Было взято  $\beta = 1$ .

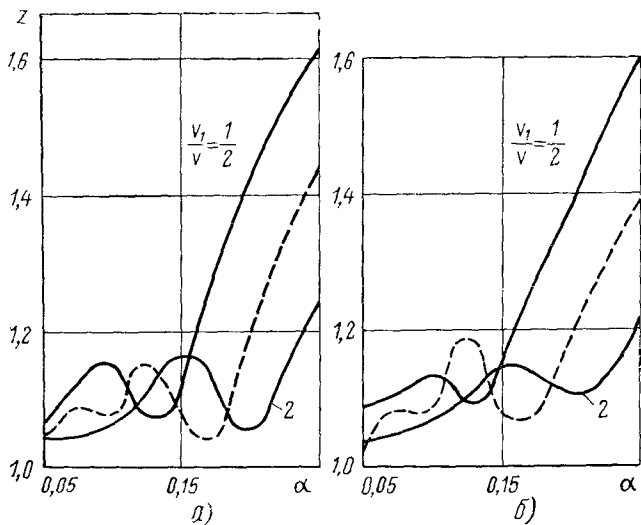


Рис. 17.4

Как видно, динамические коэффициенты при равнозамедленном движении выше, чем при равномерном и тем более при равноускоренном движении при «большом» значении средней скорости.

Расчеты, проведенные для обобщенного уравнения Стокса (в случае невесомой балки), показали, что область применения уравнения (17.26) та же, что и уравнения (17.30), т. е. для  $\beta > 3$ . При этом отличие прогибов не превышает 7%, напряжений 12%.

Ряд важных частных случаев динамического воздействия подвижных нагрузок на балки и значительное количество результатов расчета приведено в работах [9, 21, 102].

Наряду с разработкой аналитических методов решения проводилось большое число экспериментальных исследований. Опыты ставились на моделях, соответствующих расчетной схеме — балке с движущимися материальными точками, а также проводились натурные испытания мостов.



Прогибы середины однопролетной балки при нагрузке, движущейся с постоянной скоростью, вычисленные по вышеприведенному алгоритму интегральных уравнений, сравнивались с экспериментальными данными А. Г. Гальченко и С. И. Конашенко для двух типов нагрузки.

В первом случае нагрузкой являлся каток, прогоняемый с различными скоростями (10 испытаний). Во втором — группа из пяти катков, соединенных планками (9 испытаний). Для обоих типов нагрузок расхождение расчетных данных с опытами не превышало 2,9% [9].

### УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ГРУЗА И ВОЗДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИЛЫ

#### Сущность задачи

Для случая движения силы по бесконечной балке, лежащей на упругом основании, коэффициент упругости основания которого  $k$ , прогиб балки, как показал еще С. Тимошенко, значительно возрастает при достижении скорости движения  $v = v_{kp}$ , где

$$v_{kp} = \sqrt[4]{cEJ \frac{4}{(\rho F)^2}}.$$

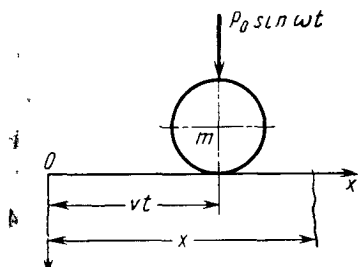


Рис. 17.5

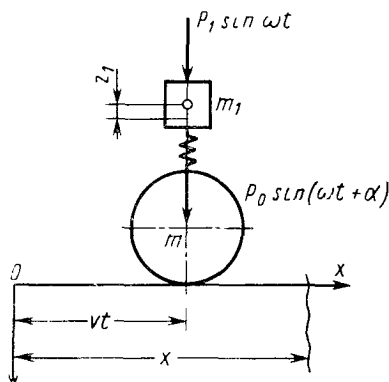


Рис. 17.6

Для реальных случаев  $v_{kp}$  выше 1500 км/ч.

Случай  $v < v_{kp}$  и  $v > v_{kp}$  подробно изучался как без учета, так и с учетом затухания, пропорционального скорости перемещения балки и равного  $\mu \frac{\partial y}{\partial t}$  [135].

Представляет интерес рассмотрение движения инерционного груза, на который действует периодическая возмущающая сила. Наличие такой силы существенно изменяет условия движения груза.

Во-первых, действие возмущающей силы обуславливает появление силы инерции груза, в результате чего будет влиять на про-

гибы инерция массы. Во-вторых, в сложном движении груза как составная его часть будет входить вынужденное колебание движения, следовательно, возможен резонансный режим.

Рассмотрим два случая: 1) на движущийся груз действует периодическая сила  $P_0 \sin \omega t$  (рис. 17.5); 2) имеется подрессоренная часть движущегося груза (рис. 17.6).

### Колебания балки при действии периодической силы на движущийся груз

Решение поставленной задачи сводится к интегрированию дифференциального уравнения движения балки относительно неподвижной системы координат [106]

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial y}{\partial t} + cy = 0, \quad (17.32)$$

которое справедливо всюду, кроме точки  $x = vt$ , где приложена внешняя нагрузка (рис. 17.5)

$$P = P_0 \sin \omega t - m \left( v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x=vt}; \quad (17.33)$$

здесь  $EJ$  — изгибная жесткость балки;  
 $\rho$  — масса единицы длины балки;  
 $\mu$  — коэффициент затухания;  
 $c$  — коэффициент упругости основания;  
 $P_0$  и  $\omega$  — амплитуда и частота возмущающей силы;  
 $m$  — масса движущегося груза;  
 $v$  — скорость движения;  
 $y(x, t)$  — перемещение балки.

Уравнение (17.32) необходимо интегрировать при следующих условиях:  $y = 0$  при  $x \rightarrow \pm \infty$ ;

$$y_1 = y_2; \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}; \quad (17.34)$$

$$EJ \left( \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} \right) + P = 0, \quad (x = vt), \quad (17.35)$$

где  $y_1 = y$  для  $x \leq vt$ ;  $y_2 = y$  для  $x \geq vt$ . Перейдем к поступательно движущейся системе координат  $(\xi, y)$ , т. е. введем новую переменную  $\xi = x - vt$ . Тогда уравнение (17.32), граничные условия (17.34) и условия сопряжения (17.35) примут вид

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} + \rho \left( v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial t} \right) + \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} - v \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + cy = 0 \quad (\xi \neq 0); \quad (17.36)$$

$$y = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \pm \infty; \quad (17.37)$$

$$y_1 = y_2; \quad \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = \frac{\partial y_2}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial \xi^2} \quad (\xi = 0); \quad (17.38)$$

$$EJ \left( \frac{\partial^3 y_1}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^3 y_2}{\partial \xi^3} \right) + P_0 \sin \omega t - m \frac{d^2 y(vt, t)}{dt^2} = 0.$$

В дальнейшем штрих будет обозначать производную по  $\xi$ .  
Решение уравнения (17.36) будем искать в виде

$$y(\xi, t) = X(\xi) \cos \omega t + Y(\xi) \sin \omega t. \quad (17.39)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (17.36) дает

$$\left. \begin{aligned} EJX^{IV} + \rho v^2 X'' - \mu v X' + (c - \rho \omega^2) X - 2\rho v \omega Y' + \mu \omega Y &= 0; \\ EJY^{IV} + \rho v^2 Y'' - \mu v Y' + (c - \rho \omega^2) Y + 2\rho v \omega X' - \mu \omega X &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.40)$$

Полагая  $X = Ae^{r\xi}$  и  $Y = Be^{r\xi}$  из уравнения (17.40), получим характеристическое уравнение

$$\Delta(r) \equiv EJr^4 + \rho v^2 r^2 - \mu v r + c - \rho \omega^2 \pm i\omega(\mu - 2\rho v r) = 0 \quad (17.41)$$

и соотношение между коэффициентами  $A$  и  $B$

$$\frac{B}{A} = - \frac{EJr^4 + \rho v^2 r^2 - \mu v r + c - \rho \omega^2}{\omega(\mu - 2\rho v r)} = \pm i \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (17.42)$$

Пусть при знаке плюс перед  $i$  корнями уравнения (17.41) будут  $r_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ ;  $r_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ ;  $r_3 = -\alpha_3 + i\beta_3$ ;  $r_4 = -\alpha_4 + i\beta_4$ , где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  — положительные величины.

При знаке минус перед  $i$  в уравнении (17.41) корни будут сопряженными  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4$ .

С учетом граничных условий (17.38) и соотношения (17.42) имеем

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= (A_1 \cos \beta_1 \xi + A_2 \sin \beta_1 \xi) e^{\alpha_1 \xi} + (A_3 \cos \beta_2 \xi + A_4 \sin \beta_2 \xi) e^{\alpha_2 \xi} \\ Y_1 &= (A_2 \cos \beta_1 \xi - A_1 \sin \beta_1 \xi) e^{\alpha_1 \xi} + (A_4 \cos \beta_2 \xi - A_3 \sin \beta_2 \xi) e^{\alpha_2 \xi} \quad \xi \leq 0; \\ X_2 &= (A_5 \cos \beta_3 \xi + A_6 \sin \beta_3 \xi) e^{-\alpha_3 \xi} + (A_7 \cos \beta_4 \xi + \\ &\quad + A_8 \sin \beta_4 \xi) e^{-\alpha_4 \xi} \\ Y_2 &= (A_6 \cos \beta_3 \xi - A_5 \sin \beta_3 \xi) e^{-\alpha_3 \xi} + (A_8 \cos \beta_4 \xi - \\ &\quad - A_7 \sin \beta_4 \xi) e^{-\alpha_4 \xi} \quad \xi \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.43)$$

Постоянные интегрирования  $A_1, A_2, \dots, A_8$  определяют из условий сопряжения (17.38), которые для  $\xi = 0$  перепишем в виде

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_2; \quad X'_1 = X'_2; \quad X''_1 = X''_2; \\ Y_1 &= Y_2; \quad Y'_1 = Y'_2; \quad Y''_1 = Y''_2; \\ EJ(X''_1 - X''_2) + m\omega^2 X_1 &= 0; \\ EJ(Y''_1 - Y''_2) + m\omega^2 Y_1 + P_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.44)$$

Удовлетворение условиям (17.34) приводит к системе алгебраических уравнений относительно  $A_1, A_2, \dots, A_8$ :

$$\sum_1^8 A_i a_{ij} = a_{i9} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 8). \quad (17.45)$$

Выражения для коэффициентов  $a_{ij}$  приведены в табл. 17.2, где  $\gamma = \frac{m\omega^2}{EJ}$ .

Таблица 17.2

Значения коэффициентов  $a_{ij}$

i	j			
	1	2	3	4
1	1	0	1	0
2	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\alpha_2$	$\beta_2$
3	$\alpha_1^2 - \beta_1^2$	$2\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2^2 - \beta_2^2$	$2\alpha_2\beta_2$
4	0	1	0	1
5	$\beta_1$	$-\alpha_1$	$\beta_2$	$-\alpha_2$
6	$2\alpha_1\beta_2$	$\beta_1^2 - \alpha_1^2$	$2\alpha_2\beta_2$	$\beta_2^2 - \alpha_2^2$
7	$\alpha_1^3 - 3\alpha_1\beta_1^2 + \gamma$	$3\alpha_1^2\beta_1 - \beta_1^3$	$\alpha_2^3 - 3\alpha_2\beta_2^2 + \gamma$	$3\alpha_2^2\beta_2 - \beta_2^3$
8	$a_{72}$	$-a_{71}$	$a_{74}$	$-a_{73}$

i	j				
	5	6	7	8	9
1	-1	0	-1	0	0
2	$\alpha_3$	$-\beta_3$	$\alpha_4$	$-\beta_4$	0
3	$\beta_3^2 - \alpha_3^2$	$2\alpha_3\beta_3$	$\beta_4^2 - \alpha_4^2$	$2\alpha_4\beta_4$	0
4	0	-1	0	-1	0
5	$-\beta_3$	$-\alpha_3$	$-\beta_4$	$-\alpha_4$	0
6	$2\beta_3\alpha_3$	$\alpha_3^2 - \beta_3^2$	$2\alpha_4\beta_4$	$\alpha_4^2 - \beta_4^2$	0
7	$\alpha_3^3 - 3\alpha_3\beta_3^2$	$\beta_3^3 - 3\alpha_3^2\beta_3$	$\alpha_4^3 - 3\alpha_4\beta_4^2$	$\beta_4^3 - 3\alpha_4^2\beta_4$	0
8	$a_{76}$	$-a_{75}$	$a_{78}$	$-a_{77}$	$\frac{P}{EJ}$

Определив  $A_i$  из формулы (17.42), легко получить амплитуду колебаний точек балки слева и справа от груза:

$$A(\xi) = \begin{cases} \sqrt{X_1^2(\xi) + Y_1^2(\xi)} & \text{для } \xi \leq 0; \\ \sqrt{X_2^2(\xi) + Y_2^2(\xi)} & \text{для } \xi \geq 0. \end{cases}$$

Тогда

$$y(\xi, t) = A(\xi) \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (17.46)$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{X_1(\xi)}{Y_1(\xi)} & \text{для } \xi \leq 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{X_2(\xi)}{Y_2(\xi)} & \text{для } \xi \geq 0. \end{cases}$$

В частности, амплитуда колебаний балки под грузом

$$A(0) = \sqrt{(A_1 + A_3)^2 + (A_2 + A_4)^2}. \quad (17.47)$$

#### Движение груза при действии периодической силы на подрессоренную массу

Рассмотрим движение сосредоточенных масс  $m$  и  $m_1$ , причем  $m_1$  является подрессоренной (рис. 17.6). Пусть на массы  $m$  и  $m_1$  действуют возмущающие силы  $P_0 \sin(\omega t + \alpha)$  и  $P_1 \sin \omega t$ , частоты которых вообще могут быть неодинаковыми.

В этом случае дифференциальные уравнения движения будут

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + \mu_1 \frac{dz_1}{dt} + c_1 z_1 = m_1 g + P_1 \sin \omega t - m_1 \frac{d^2 y(vt, t)}{dt^2}; \quad (17.48)$$

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial y}{\partial t} + cy = 0 \quad (x \neq vt), \quad (17.49)$$

где  $z_1$  — относительное смещение массы  $m_1$ ;

$c_1$  — жесткость подрессоривания;

$\mu_1$  — коэффициент затухания. Граничные условия (17.34) и условия сопряжения (17.38) остаются справедливыми и здесь, однако вместо (17.33) надо принять

$$P = P_0 \sin(\omega t + \alpha) - m \frac{d^2 y(vt, t)}{dt^2} + mg + c_1 z_1. \quad (17.50)$$

В отличие от рассмотренного выше случая здесь учитываются силы веса груза  $m_1 g$  и  $mg$ , что приводит к необходимости представить решение системы уравнений (17.48), (17.49) в виде

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0(\xi, t) + y_0(\xi); \\ z_1 &= z_0(t) + z_0; \quad z_0 = \frac{m_1 g}{c_1} = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (17.51)$$

При этом  $y_{\partial}(\xi, t)$  и  $z_{\partial}(t)$  удовлетворяют уравнениям (в подвижной системе координат)

$$\left. \begin{aligned}
 EJ \frac{\partial^4 y_{\partial}}{\partial \xi^4} + \rho \left( v^2 \frac{\partial^2 y_{\partial}}{\partial \xi^2} - 2v \frac{\partial^2 y_{\partial}}{\partial \xi \partial t} + \frac{\partial^2 y_{\partial}}{\partial t^2} \right) + \\
 + \mu \left( \frac{\partial y_{\partial}}{\partial t} - v \frac{\partial y_{\partial}}{\partial \xi} \right) + cy_{\partial} = 0; \quad \xi \neq 0; \\
 m_1 \ddot{z}_{\partial} + \mu_1 \dot{z}_{\partial} + c_1 z_{\partial} = P_1 \sin \omega t - m_1 \left. \frac{\partial^2 y_{\partial}(\xi, t)}{\partial t^2} \right|_{\xi=0}; \\
 y_{\partial} = 0 \text{ при } \xi \rightarrow \pm \infty; \\
 y_{1\partial} = y_{2\partial}; \quad y'_{1\partial} = y'_{2\partial}; \quad y''_{1\partial} = y''_{2\partial}; \quad \xi = 0; \\
 EJ (y''_{1\partial} - y''_{2\partial}) + P_0 \sin(\omega t + \alpha) - m \frac{\partial^2 y_{\partial}(\xi, t)}{\partial t^2} + c_1 z_{\partial} = 0,
 \end{aligned} \right\} (17.52)$$

а  $y_0(\xi)$  удовлетворяет уравнениям

$$\left. \begin{aligned}
 EJ y_0^A + \rho v^2 y_0'' - \mu v y_0' + cy_0 = 0, \quad (\xi \neq 0); \\
 y_0 = 0 \text{ при } \xi \rightarrow \pm \infty \\
 y_{10} = y_{20}; \quad y'_{10} = y'_{20}; \quad y''_{10} = y''_{20} \quad (\xi = 0) \\
 EJ (y''_{10} - y''_{20}) + (m_1 + m) g = 0.
 \end{aligned} \right\} (17.53)$$

Уравнения (17.52) описывают движение сосредоточенной безынерционной силы  $P = (m_1 + m) g$ , рассмотренное Кеннемом [135]. Поэтому на решении этой задачи останавливаться не будем.

Решение задачи, представленной уравнениями (17.52), ищем в виде

$$\left. \begin{aligned}
 y_{\partial}(\xi, t) = X(\xi) \cos \omega t + Y(\xi) \sin \omega t; \\
 z_{\partial}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.
 \end{aligned} \right\} (17.54)$$

Дальнейшие преобразования, аналогичные уже рассмотренным, приводят к характеристическому уравнению (17.41) и выражениям (17.43) для  $X(\xi)$  и  $Y(\xi)$ .

Удовлетворяя условиям сопряжения рассматриваемой задачи, получаем выражения для  $A$  и  $B$ :

$$\left. \begin{aligned}
 A = \frac{1}{c_1} [-k_4 P_1 - k_3 Y_1(0) + k_2 X_1(0)]; \\
 B = \frac{1}{c_1} [k_1 P_1 + k_2 Y_1(0) + k_3 X_1(0)]
 \end{aligned} \right\} (17.55)$$

и систему уравнений (17.45) для определения  $A_1, A_2, \dots, A_8$ , в которой последние два уравнения надо заменить следующими:

$$\left. \begin{aligned} & A_1 \left( a_{71} + \frac{k_2}{EJ} \right) + A_2 \left( a_{72} - \frac{k_2}{EJ} \right) + A_3 \left( a_{73} + \frac{k_2}{EJ} \right) + \\ & + A_4 \left( a_{74} - \frac{k_2}{EJ} \right) + A_5 a_{75} + A_6 a_{76} + A_7 a_{77} + A_8 a_{78} = \\ & = \frac{1}{EJ} (P_0 \sin \alpha - k_4 P_1); \\ & A_1 \left( a_{81} - \frac{k_3}{EJ} \right) + A_2 \left( a_{82} - \frac{k_3}{EJ} \right) + A_3 \left( a_{83} - \frac{k_3}{EJ} \right) + \\ & + A_4 \left( a_{84} - \frac{k_3}{EJ} \right) + A_5 a_{85} + A_6 a_{86} + A_7 a_{87} + A_8 a_{88} = \\ & = \frac{1}{EJ} (P_0 \cos \alpha + k_1 P_1), \end{aligned} \right\} (17.56)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{c_1}{k_5} (c_1 - m_1 \omega^2); & k_2 &= \frac{c_1}{k_5} m_1 \omega^2 (c_1 - m_1 \omega^2); \\ k_3 &= \frac{c_1}{k_5} \mu_1 m_1 \omega^2; & k_4 &= \frac{c_1}{k_5} \mu_1 \omega; & k_5 &= \mu_1^2 \omega^2 + (c_1 - m_1 \omega^2)^2. \end{aligned}$$

Формулы (17.45) — (17.47) остаются в силе и в этом случае.

17

### Расчеты для частных случаев

Для того чтобы воспользоваться при вычислениях вышеприведенными формулами для амплитуд колебаний, необходимо решить предварительно характеристическое уравнение (17.51)

$$E J r^4 + \rho v r^2 - \mu v r + c - \rho \omega^2 \pm i \omega (\mu - 2\rho v r) = 0.$$

Некоторые коэффициенты уравнения являются комплексными, что создает определенные затруднения при отыскании корней.

С помощью метода последовательных приближений было установлено, что для рассматривавшихся значений, коэффициентов уравнения (при верхнем знаке перед  $i$ ) его корни могут быть представлены в виде

$$r_j = R_j e^{i \left( \frac{n_j \pi}{2} + \gamma_j \right)} \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (17.57)$$

где  $\gamma_j$  — малая величина;

$R_j$  — модуль корня;

$$n_1 = 1; \quad n_2 = 7; \quad n_3 = 5; \quad n_4 = 3.$$

Значения  $R_j$  и  $\gamma_j$  определяются методом последовательных приближений из формулы (17.55) после подстановки в нее выражения (17.57) и разложения синусов и косинусов по степеням  $\gamma_j$ .

Для нескольких примеров были произведены вычисления на машине ЭЦВМ, при этом  $m = 3 \text{ кг см}^{-1} \text{ сек}^2$ ;  $c = 100 \text{ кг/см}^2$ ;  $\rho = 5 \cdot 10^{-4} \text{ кг см}^{-2} \text{ сек}^2$ ,  $EJ = 42 \times$

$\times 10^8 \text{ кг см}^2$ . Полученные максимальные значения динамического коэффициента  $\lambda = \frac{A(0)}{y_{cm}}$ ;  $y_{cm} = \frac{1}{2} P c^{-1/2} (4EJc)^{-1/4}$  в момент резонанса следующие:

$v$ в км	$\omega$ в $\text{сек}^{-1}$	$\lambda$ для $\mu = 2 \cdot 10^{-1}$
0	83	78,1
54	83	78,5
90	83	78,9
162	83	77,3

При наличии подрессоренного груза  $m_1 = 7 \text{ кг см}^{-1} \cdot \text{сек}^2$ , когда  $c_1 = 1500 \text{ кг см}^{-1}$ ;  $\mu = 2 \cdot 10^{-2}$ ;  $\mu_1 = 0$ ;  $P_1 = 0$  и  $\alpha = 0$ , имеем  $\lambda = 18,4$  при  $\omega = 14,1 \text{ сек}^{-1}$  и  $\lambda = 73,7$  при  $\omega = 86 \text{ сек}^{-1}$ . Отсюда можно сделать следующие выводы.

Динамический коэффициент для линейно-упругого основания не зависит от скорости движения груза в достаточно широком диапазоне скоростей локомотивов. Скорость движения не смещает, как показало сравнение, резонансного состояния, т. е. частота, при которой наступает резонанс, не зависит от  $v$  в указанном диапазоне. Поэтому вычисление можно вести при  $v = 0$ .

Рассматриваемая система балки — грузы имеет при одном грузе одно резонансное состояние, при двух грузах — два резонансных состояния; подрессоренная масса вводит дополнительный резонанс, снижая динамический коэффициент, имеющий место до ее введения.

### УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ СИЛЫ

#### Дифференциальные уравнения движения упругой среды и их решение

Выше рассматривался случай, когда основание является линейным, т. е. подчиняется гипотезе Винклера и не обладает инерционными свойствами. Представляет интерес выяснить влияние

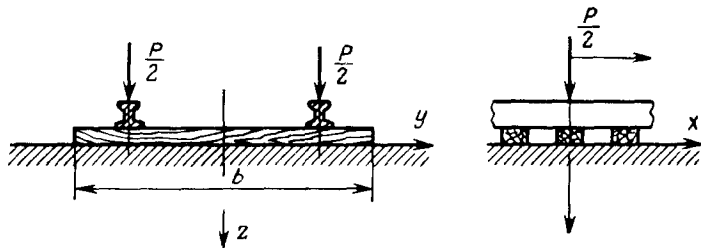


Рис. 17.7

инерционности полупространства на динамические смещения и напряжения в балке [107] при движении груза по ней (рис. 17.7).

Дифференциальные уравнения движения упругой среды имеют вид

$$\mu_1 \Delta u_i + (\lambda + \mu_1) \frac{\partial \theta}{\partial i} = \rho_1 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i = x_1, y_1, z_1); \quad (17.58)$$



здесь  $u_{x_1}, u_{y_1}, u_{z_1}$  — компоненты перемещений вдоль осей  $x_1, y_1, z_1$ ;

$$\theta = \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{y_1}}{\partial y_1} + \frac{\partial u_{z_1}}{\partial z_1}, \quad (17.59)$$

$\theta$  — относительное объемное расширение. Постоянные Ламе  $\mu$  и  $\lambda$  связаны с коэффициентом Пуассона  $\nu_1$  и модулем упругости  $E_1$  основания соотношениями

$$\lambda = \frac{\nu_1 E_1}{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}; \quad \mu_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)}.$$

Вместо координат  $x_1, y_1, z_1$  вводим подвижную систему координат  $x = x_1 - vt, y, z$ , перемещающуюся вместе с силой  $P$ .

Тогда уравнения (17.58) принимают вид

$$\mu_1 \Delta u_i + (\lambda + \mu_1) \frac{\partial \theta}{\partial i} = \rho_1 v^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}. \quad (17.60)$$

Системе уравнений (17.60) можно удовлетворить, взяв

$$u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial i} + u_{1i} \quad (i = x, y, z). \quad (17.61)$$

При этом должно быть

$$\left( \Delta^2 - h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi = 0, \quad (17.62)$$

а  $u_{1i}$  должны удовлетворить уравнениям

$$\left( \Delta - k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_{1i} = 0 \quad (i = x, y, z), \quad (17.63)$$

$$\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} = 0 \quad (17.64)$$

$$\left( k^2 = \frac{\rho_1 v^2}{\mu_1}, \quad h^2 = \frac{\rho_1 v^2}{\lambda + 2\mu_1} \right).$$

Учитывая условие симметрии относительно оси  $y$ , решение уравнений (17.63) и (17.64) берем в виде

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= \int_0^\infty \int_0^\infty [A_1(\alpha, \beta) \sin \alpha x + C_1(\alpha, \beta) \cos \alpha x] e^{-\nu z} \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta; \\ u_{1y} &= \int_0^\infty \int_0^\infty [A_2(\alpha, \beta) \cos \alpha x + C_2(\alpha, \beta) \sin \alpha x] e^{-\nu z} \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta; \\ u_{1z} &= \int_0^\infty \int_0^\infty [A_3(\alpha, \beta) \cos \alpha x + C_3(\alpha, \beta) \sin \alpha x] e^{-\nu z} \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta; \\ \Phi &= \int_0^\infty \int_0^\infty [A_4(\alpha, \beta) \cos \alpha x + C_4(\alpha, \beta) \sin \alpha x] e^{-\nu z} \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (17.65)$$

Уравнения (17.62) и (17.63) удовлетворяются при условии, что

$$\gamma_1^2 = \alpha^2 + \beta^2 - h^2 \alpha^2; \quad \gamma_2^2 = \alpha^2 + \beta^2 - k^2 \alpha^2.$$

Решение задачи ищем в предположении, что при  $z = 0$  отсутствуют касательные напряжения, т. е.

$$\tau_{xz} = \mu_1 \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)_{z=0} = 0; \quad \tau_{yz} = \mu_1 \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)_{z=0} = 0. \quad (17.66)$$

Для удовлетворения условиям (17.66), а также зависимости (17.64) приравняем нулю коэффициенты при произведениях тригонометрических функций. Тогда получим для нахождения  $A_i(\alpha, \beta)$ ,  $C_i(\alpha, \beta)$  систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \alpha C_3 - \gamma_2 C_1 - 2\alpha\gamma_1 C_4 &= 0; & -\beta C_3 - \gamma_2 C_2 + 2\gamma_1\beta C_4 &= 0; \\ -\alpha A_3 - \gamma_2 C_1 + 2\alpha\gamma_1 A_4 &= 0; & -\beta A_3 - \gamma_2 A_2 + 2\beta\gamma_1 A_4 &= 0; \\ \alpha A_1 + \beta A_2 - \gamma_2 A_3 &= 0; & \alpha C_1 + \beta C_2 - \gamma_2 C_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.67)$$

Отсюда найдем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\alpha}{\beta} A_2; & A_3 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta\gamma_2} A_2; & A_4 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma_2^2}{2\beta\gamma_1\gamma_2} A_2; \\ C_1 &= -\frac{\alpha}{\beta} C_2; & C_3 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta\gamma_2} C_2; & C_4 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma_2^2}{2\beta\gamma_1\gamma_2} C_2. \end{aligned} \right\} \quad (17.68)$$

Вместо постоянных  $A_2, C_2$  в дальнейшем вводим новые  $A'_2, C'_2$ , связанные с  $A_2, C_2$  соотношениями

$$A_2 = \frac{2\beta\gamma_2 A'_2}{2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)(1 - \nu_1)E_1}; \quad C_2 = \frac{2\beta\gamma_2 C'_2}{2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)(1 - \nu_1)E_1}. \quad (17.69)$$

Для перемещения  $u_z$  (17.61) получим значение

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1}{E_1} \int_0^\infty \int \left[ e^{-\nu_1 z} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(e^{-\gamma_2 z} - e^{-\nu_1 z})}{(1 - \nu_1)(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} \right] \times \\ &\quad \times (A'_2 \cos \alpha x + C'_2 \sin \alpha x) \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta. \end{aligned} \quad (17.70)$$

В пределе, когда  $\nu \rightarrow 0$ ,  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \rightarrow \gamma_0$ , из выражения (17.70) найдем

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1}{E_1} \int_0^\infty \int \left[ 1 + \frac{\gamma_0 z}{2(1 - \nu_1^2)} \right] (A'_2 \cos \alpha x + C'_2 \sin \alpha x) \times \\ &\quad \times \cos \beta y e^{-\nu_0 z} \, d\alpha \, d\beta. \end{aligned} \quad (17.70')$$

Эти значения совпадают с решением для статической задачи ( $v = 0$ ).

Функция  $\Phi(x, y, z)$  будет

$$\Phi = \frac{1}{k^2 E_1} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma_2^2}{\alpha^2 \gamma_1} (A_2' \cos \alpha x + C_2' \sin \alpha x) \times \\ \times \cos \beta y e^{-\gamma_1 z} d\alpha d\beta. \quad (17.71)$$

Учитывая уравнение (17.64), для объемного расширения (17.59) найдем значение

$$\theta = \Delta\Phi = h^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}.$$

Отсюда

$$\theta = -\frac{\mu_1}{(\lambda + 2\mu_1) E_1} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma_2^2}{\gamma_2} (A_2' \cos \alpha x + C_2' \sin \alpha x) \times \\ \times e^{-\gamma_1 z} \cos \beta y d\alpha d\beta. \quad (17.72)$$

Напряжение

$$\sigma_z = \lambda\theta + 2\mu_1 \frac{\partial u_z}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{2(1 - \nu_1^2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\gamma_1} \left\{ [2(\alpha^2 + \beta^2) - (1 - \nu_1) k^2 \alpha^2] e^{-\gamma_1 z} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} \gamma_1 (\gamma_2 e^{-\gamma_2 z} - \gamma_1 e^{-\gamma_1 z}) \right\} \times \\ \times (A_2' \cos \alpha x + C_2' \sin \alpha x) \cos \beta y d\alpha d\beta. \quad (17.73)$$

На поверхности полупространства для  $z = 0$  найдем ( $\gamma_0^2 = \alpha^2 + \beta^2$ )

$$\sigma_z(x, y, 0) = -\frac{1}{2(1 + \nu_1^2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{\gamma_1} \left[ \frac{4\gamma_2 (\gamma_1 - \gamma_2) \gamma_0^2}{\alpha' k^2} - k^2 \right] \times \\ \times (A_2' \cos \alpha x + C_2' \sin \alpha x) d\alpha d\beta. \quad (17.73')$$

Перейдем теперь к условиям сопряжения балки и полупространства.

### Условия сопряжения балки и полупространства и перемещения балки

Предполагаем, что давление от балок на упругое полупространство передается равномерно по ширине  $b$  (рис. 17.7).

Дифференциальное уравнение колеблющейся балки с учетом затухания имеет вид

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho}{B} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\xi}{B} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{p(x_1)}{B} \quad (17.74)$$

$$\{p(x_1) = q(x_1) - \sigma_z(0, x_1) b\},$$

где  $B$  — жесткость балок (для двух балок  $B = 2EJ$ );  
 $\rho$  — масса балок на единицу длины;  
 $b$  — ширина опорной поверхности;  
 $\sigma_z(0, x_1)$  — давление грунта на погонную единицу длины;  
 $q(x_1)$  — интенсивность внешней нагрузки.

В случае стационарного движения для прежней координаты  $x = x_1 - vt$  (17.74) запишется в виде

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \delta^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - \eta^2 \frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{B}, \quad (17.74')$$

где

$$\delta^2 = \frac{v^2 \rho}{B}; \quad \eta^2 = \frac{\xi v}{B}. \quad (17.75)$$

Значение  $p(x)$  берем в виде

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha, \quad (17.76)$$

где

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) \cos \alpha \xi d\xi; \quad B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) \sin \alpha \xi d\xi. \quad (17.77)$$

Когда нагрузка  $q(x)$  распределена в интервале  $-a \leq x \leq a$  (для сосредоточенной нагрузки  $2qa \rightarrow P$ ), когда  $a \rightarrow 0$ , значения  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$ , входящие в уравнение (17.76), будут

$$A(\alpha) = \frac{2q \sin \alpha a}{\alpha} - bA_1(\alpha); \quad B(\alpha) = -bB_1(\alpha); \quad (17.78)$$

здесь

$$A_1(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z(\xi) \cos \alpha \xi d\xi; \quad B_1(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z(\xi) \sin \alpha \xi d\xi. \quad (17.79)$$

Прогиб балки

$$y(x) = \int_0^{\infty} C(\alpha) \cos \alpha x d\alpha + \int_0^{\infty} D(\alpha) \sin \alpha x d\alpha. \quad (17.80)$$

После подстановки уравнения (17.80) в уравнение (17.74) получим, что

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 (\alpha^2 - \delta^2) C(\alpha) - \alpha \eta^2 D(\alpha) &= \frac{1}{B\pi} \left[ \frac{2q}{\alpha} \sin \alpha a - bA_1(\alpha) \right]; \\ \alpha \eta^2 C(\alpha) + \alpha^2 (\alpha^2 - \delta^2) D(\alpha) &= -\frac{1}{B\pi} bB_1(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (17.81)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} C(\alpha) &= \frac{1}{\pi B \Delta(\alpha)} \left\{ \frac{2q}{\alpha} \sin \alpha a (\alpha^2 - \delta^2) \alpha^2 - \right. \\ &\quad \left. - \alpha^2 (\alpha^2 - \delta^2) b A_1(\alpha) - \eta^2 a b B_1(\alpha) \right\}; \\ D(\alpha) &= \frac{1}{\pi B \Delta(\alpha)} \left\{ -\frac{2q}{\alpha} \sin \alpha a \eta^2 \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \eta^2 \alpha b A_1(\alpha) + \alpha^2 (\alpha^2 - \delta^2) b B_1(\alpha) \right\}, \end{aligned} \right\} (17.82)$$

где  $\Delta(\alpha) = \alpha^2 [\alpha^2 (\alpha^2 - \delta^2)^2 + \eta_1^4]$ .

По теореме Фурье для  $z = 0$  можно написать

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, y, 0) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \times \\ &\times \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \sigma_z \cos \alpha \lambda \cos \beta \mu d\lambda d\mu + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \sin \alpha x \times \\ &\times \cos \beta y d\alpha d\beta \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \sigma_z \sin \alpha \lambda \cos \beta \mu d\lambda d\mu. \end{aligned} \quad (17.83)$$

Так как  $\sigma_z$  задано в виде

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, y, 0) &= -\sigma_z(x, 0) \text{ для } |y| \leq \frac{b}{2}; \\ \sigma_z(x, y, 0) &= 0 \text{ для } |y| \geq \frac{b}{2}, \end{aligned} \quad (17.84)$$

то, учитывая обозначения (17.71), получим

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, y, 0) &= -\frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty [A_1(\alpha) \cos \alpha x + \\ &\quad + B_1(\alpha) \sin \alpha x] \frac{\sin \beta \frac{b}{2}}{\beta} \cos \beta y d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (17.85)$$

Сравнивая это значение  $\sigma_z(x, y, 0)$  со значением (17.71), найдем

$$\left. \begin{aligned} A_2'(\alpha, \beta) &= \frac{4(1 + \nu_1) \sin \frac{\beta b}{2}}{\pi^2 E(\alpha, \beta) \beta} A_1(\alpha); \\ C_2'(\alpha, \beta) &= \frac{4(1 + \nu_1) \sin \frac{\beta b}{2}}{\pi^2 E(\alpha, \beta) \beta} B_1(\alpha) \end{aligned} \right\} (17.86)$$

$$(c_v = k^2);$$

$$E(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^2}{\gamma_1} \left[ \frac{4 \gamma_2 (\gamma_1 - \gamma_2) \gamma_0^2}{\alpha^4 c_v} - c_v \right]. \quad (17.87)$$

Вводя переменную  $\frac{\beta}{\alpha} = \tau \left( u = \frac{\alpha b}{2} \right)$  и обозначая

$$S(u) = \int_0^{\infty} \frac{c v \gamma_1 \sin u \tau d\tau}{(1 - v_1) [4 \gamma_2 \gamma_0^2 (\gamma_1 - \gamma_2) - c v^2]}, \quad (17.88)$$

получим перемещение полупространства под балкой в виде

$$u_z(x, 0, 0) = \frac{4(1 - v_1^2)}{\pi^2 E_1} \int_0^{\infty} [A_1 \cos \alpha x + B_1 \sin \alpha x] \frac{S(u)}{\alpha} d\alpha. \quad (17.89)$$

Здесь и в дальнейшем  $\gamma$  соответствует  $\frac{\gamma}{\alpha}$ .

Сравнивая перемещение (17.89) с прогибом балки (17.80), найдем для  $A_1(\alpha)$  и  $B_1(\alpha)$  следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} A_1(u) &= \frac{2P}{D_1(u)} \cdot \frac{2}{b} \{u(u^2 - \delta_1^2) [u(u^2 - \delta_1^2) + \varepsilon d(u) S(u)] + \eta_1^4\}; \\ B_1(u) &= \frac{2P}{D_1(u)} \cdot \frac{2}{b} \{u(u^2 - \delta_1^2) \eta^2 - \eta_1^2 [u(u^2 - \delta_1^2) + \varepsilon d(u) S(u)]\}, \end{aligned} \right\} \quad (17.90)$$

где

$$\begin{aligned} D_1(u) &= [4u(u^2 - \delta_1^2) + \varepsilon d(u) S(u)]^2 + 4\eta_1^4; \\ d(u) &= u^2(u^2 - \delta_1^2)^2 + \eta_1^4. \end{aligned}$$

В выражении (17.90) обозначено

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{2}{\pi} (1 - v_1^2) \frac{1}{E_1} \left(\frac{2}{B}\right)^4 B; \quad \delta_1^2 = \frac{c v \rho E_1}{2(1 + v_1) \rho_1 B} \left(\frac{b}{2}\right)^2; \\ \eta_1^2 &= \frac{\xi v}{B} \left(\frac{b}{2}\right)^3. \end{aligned} \quad (17.91)$$

Перемещение под грузом будет

$$\begin{aligned} u_z(0, 0, 0) &= \frac{4(1 - v_1^2)}{\pi^2 E_1} \cdot \frac{2}{b} P \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{u(u^2 - \delta_1^2) [u(u^2 - \delta_1^2) + \varepsilon d(u) S(u)] + \eta_1^4}{2u [u(u^2 - \delta_1^2) + \varepsilon d(u) S(u)]^2 + \eta_1^4} S(u) du. \end{aligned} \quad (17.92)$$

При отсутствии затухания ( $\eta_1 = 0$ )

$$u_z(0, 0, 0) = \frac{4(1 - v_1^2)}{\pi^2 E_1} \cdot \frac{2}{b} P \int_0^{\infty} \frac{S(u) du}{2u + 2\varepsilon u^2(u^2 - \delta_1^2) S(u)}. \quad (17.93)$$

Для случая статического приложения силы  $v = 0$  получим

$$u_z(x, 0, 0) = \frac{4(1 - v_1^2)}{\pi^2 E_1} \cdot \frac{2}{b} P \int_0^\infty \frac{S_2(u) du}{2u + 2ev^4 S_2(u)}.$$

Легко убедиться, что это значение  $u_z(x, 0, 0)$  совпадает со значением прогиба для балки-полосы прямоугольного сечения  $b \times h$ , полученного нами в случае, когда  $h$  мало\*.

### Вычисление интегралов $S(u)$ для различных $u$

При вычислении интеграла (17.93) для улучшения сходимости его можно записать в виде

$$S(u) = S_1(u) + S_2(u), \quad (17.94)$$

где

$$S_2(u) = \int_0^\infty \frac{\sin u\tau d\tau}{\tau \sqrt{1 + \tau^2}} = \int_0^u K_0(u) du. \quad (17.95)$$

Интеграл  $S_2(u)$  табулирован\*\*,  $K_0(u)$  — функция Макдональда.

$$S_1(u) = \int_0^\infty \left\{ \frac{c_v \gamma_1}{(1 - v_1) \tau [4\gamma_2 v_0^2 (\gamma_1 - \gamma_2) - c_v^2]} - \frac{1}{\tau \gamma_0} \right\} \sin u\tau d\tau. \quad (17.96)$$

Интеграл  $S_1(u)$  (17.96) сходится значительно быстрее, чем  $S(u)$  (17.94). Для больших значений  $\tau$  подынтегральное выражение стремится к значению  $\frac{(1 - v_1) c_v}{\tau \gamma_0^3}$ , так как  $\gamma_1^2 - \gamma_2^2 = \frac{c_v}{2(1 - v_1)}$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma_0$ . Интеграл  $S_1(u)$  табулирован на электронной цифровой машине для различных значений  $c_v = k^2$  в интервале изменения  $u$  от 0 до 12 и от 0 до 10 с шагом  $\Delta u = 0,1$ . Значения  $S(u)$  приведены в работах [101, 102].

Перемещение под силой  $P(x = 0)$  и изгибающий момент в сечении балки под ней будут

$$u_z(0, 0, 0) = \frac{4(1 - v_1^2)}{\pi^2 E_1} \cdot \frac{2}{b} f(\epsilon, \delta) \cdot P; \quad (17.97)$$

$$M = -B u_z''(0, 0, 0) = \frac{4(1 - v_1^2)}{\pi^2 E_1} \left(\frac{2}{b}\right)^3 B m(\epsilon, \delta) P; \quad (17.98)$$

\* См. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2, 3.

\*\* Ватсон Т. Н. Теория функций Бесселя, 1949, «ИЛ», т. II.

здесь обозначено

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{u^k S(u) du}{u + \varepsilon u^2 (u^2 - \delta_1^2) S(u)} = \begin{cases} f(\varepsilon, \delta) & \text{при } k = 0, \\ m(\varepsilon, \delta) & \text{при } k = 2. \end{cases} \quad (17.99)$$

Для вычисления интегралов (17.99) их удобно представить в виде

$$\begin{aligned} F(\varepsilon, \delta) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{u^k S(u) du}{u + \varepsilon u^2 (u^2 - \delta_1^2) S(u)} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{u_0} \frac{u^k S(u) du}{u + \varepsilon u^2 (u^2 - \delta_1^2) S(u)} + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{u_0}^{\infty} \frac{u^k du}{u^2 (u^2 - \delta_1^2)} + O_k(u), \end{aligned} \quad (17.100)$$

где

$$O_k(u) = -\frac{1}{2\varepsilon} \int_{u_0}^{\infty} \frac{u^k du}{u (u^2 - \delta_1^2) [u + \varepsilon u^2 (u^2 - \delta_1^2) S(u)]}.$$

Значение второго интеграла, входящего в интеграл (17.100), удобно вычислить, исходя из разложений

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{u^2 (u^2 - \delta_1^2)} = \frac{1}{2\varepsilon} \left[ \frac{1}{3u_0^3} + \frac{\delta_1^2}{5u_0^5} + \frac{\delta_1^4}{7u_0^7} + \dots \right];$$

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{u^2 - \delta_1^2} = \frac{1}{2\varepsilon} \left[ \frac{1}{u_0} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta_1^2}{u_0^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\delta_1^4}{u_0^5} + \dots \right].$$

В предыдущем был рассмотрен случай, когда по балке движется сила.

Более общий случай, когда балка, лежащая на упругом полупространстве, находится под действием масс и периодических сил, движущихся с постоянной скоростью, рассмотрен в работе [92]. В этих работах изучены также особенности подынтегральных функций в зависимости от скорости движения масс.

Случай когда на полупространстве лежит тонкая плита, давление на которую от движущихся масс и периодических сил передается от двух балок, изучен в работе [93].



Значения коэффициентов  $f$  и  $m$

E в кг/см <sup>2</sup>	ε	c <sub>0</sub> =0		c <sub>0</sub> =0,25		c <sub>0</sub> =0,50		c <sub>0</sub> =0,70		c <sub>0</sub> =0,84		c <sub>0</sub> =0,855	
		f	m	f	m	f	m	f	m	f	m	f	m
		100	9	1,555	3,284	1,688	3,538	1,942	3,801	2,391	4,215	4,207	5,396
	15	1,442	2,339	1,558	3,194	1,778	2,670	2,168	2,944	3,747	3,240	5,684	4,428
	250	0,908	0,400	0,956	0,403	1,060	0,426	1,444	0,476	2,002	0,598	2,953	0,749
200	9	1,714	5,208	1,879	5,676	2,179	6,144	2,720	6,875	4,912	8,918	7,586	10,580
	15	1,597	3,707	1,734	4,002	2,001	4,310	2,472	4,789	4,375	6,146	6,699	7,273
	250	1,024	0,600	1,086	0,615	1,212	0,651	1,436	0,742	2,353	0,904	3,501	1,107
300	9	1,810	6,819	1,994	7,439	2,327	8,140	2,930	9,160	5,379	11,991	8,362	14,261
	15	1,690	4,856	1,850	5,280	2,141	5,709	2,666	6,375	4,789	7,342	7,371	9,765
	250	1,097	0,769	1,168	0,786	1,309	0,845	1,560	0,920	2,587	1,173	3,872	1,370
500	9	1,938	9,570	2,144	10,614	2,521	15,587	3,212	13,103	6,030	17,497	9,963	20,837
	15	1,810	6,819	1,993	7,487	2,326	8,135	2,927	9,149	5,365	11,959	8,329	14,204
	250	1,194	1,064	1,277	1,112	1,441	1,685	1,731	1,196	2,918	1,702	4,406	1,903
1000	9	2,102	15,274	2,352	17,017	2,798	18,726	3,628	21,482	7,045	29,107	11,219	35,045
	15	1,978	10,800	2,197	12,015	2,591	13,141	3,313	14,940	6,258	19,875	9,833	23,728
	250	1,334	1,669	1,438	1,770	1,637	1,896	1,991	2,090	3,445	2,688	5,282	3,060
2000	9	2,272	23,971	2,567	27,240	3,091	30,787	4,082	35,061	8,243	48,738	13,369	59,383
	15	2,147	17,082	2,407	19,252	2,872	21,209	3,736	24,380	7,300	33,120	11,631	39,833
	250	1,482	2,640	1,612	2,836	1,952	3,061	2,598	3,508	4,090	4,465	6,409	5,075

## Расчеты для частных случаев

Пользуясь таблицей, приведенной в работе [107] для функций  $S(u)$  были вычислены по правилу Симпсона на электронной цифровой машине значения интегралов  $f(\epsilon, \delta)$ ,  $m(\epsilon, \delta)$

Значения  $\epsilon$  и  $\delta$ , равные

$$\epsilon = \frac{2}{\pi} (1 - \nu_1^2) \left( \frac{2}{b} \right)^4 \frac{B}{E_1} = \frac{\epsilon_0}{E_1};$$

$$\delta_1^2 = \frac{\rho}{\rho_1} \left( \frac{b}{2} \right)^2 \frac{c_0 E_1}{2(1 + \nu_1) B} = \delta_0^2 c_0 E_1 \cdot 10^{-4},$$

брались в широком диапазоне изменения, а именно:

$$\epsilon_0 = 7,5; 9; 11; 15; 250; 1000; 4000;$$

$$\delta_0^2 = 11,5; 10,5; 5,8; 4,7; 3,0; 2,0; 1,0.$$

Модуль упругости основания  $E_1$  принимался в расчетах равным 100, 200, 300, 500, 1000, 2000  $\text{кг/см}^2$  ( $\nu_1 = 0,3$ ).

Постоянные  $\epsilon_0$  и  $\delta_0^2$  были найдены в предположении, что ширина основания  $b = 270 \text{ см}$ . Жесткость рельс принята согласно существующим ГОСТам. Боль-

Т а б л и ц а 17.4

Значения перемещения  $u_z$   
и напряжения  $\sigma$

$c_0$	$\sigma$ в $\text{кг/см}^2$	$u_z(0, 0, 0)$	$M_{u_z} \cdot 10^{-5}$	$\sigma$ в $\text{кг/см}^2$
0	0	0,2184	2,355	473,1
0,25	121,1	0,2372	2,543	531,0
0,50	171,23	0,2737	2,739	550,3
0,70	202,6	0,3382	3,043	611,3
0,84	221,8	0,5985	3,905	784,5
0,855	223,9	0,9300	4,261	856,1

шие значения  $\epsilon_0$  соответствуют случаю, когда рельсы положены на железобетонные лежни. В этом случае  $b$  значительно меньше.

В табл. 17.3 приведены значения  $f(\epsilon, \delta)$ ,  $m(\epsilon, \delta)$  для  $\epsilon_0 = 9, 15, 250$ , на рис. 17.8, 17.9 — графики функций  $f(\epsilon, \delta)$ ,  $m(\epsilon, \delta)$  для указанных значений  $\epsilon_0$  от 11 до 1000 при различных  $E$ .

Для примера предположим, что два рельса жесткостью  $B = 2 \cdot 2016 E_1$  лежат на основании шириной  $b = 270 \text{ см}$ , плотность которого  $\rho_1 = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{сек}^2 / \text{см}^2$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Для этого случая  $\epsilon^0$  и  $\delta_0^2$  соответствуют значениям

$$\epsilon_0 \approx \frac{15}{E_1}; \quad \delta_0^2 \approx 4,7 \cdot 10^{-4} c_0 E_1.$$

Перемещение  $u_z(0, 0, 0)$  (17.97) и изгибающий момент под силой  $P$  (17.98) будут

$$u_z(0, 0, 0) = \frac{2,736}{E_1} \cdot 10^{-3} f(\epsilon, \delta) P; \quad M = \frac{6,052}{E_1} 10^{-4} m(\epsilon, \delta) P.$$

В табл. 17.4 приведены значения  $f(\epsilon, \delta)$  и  $m(\epsilon, \delta)$  для указанных  $\epsilon_0$  и  $\delta_0^2$  при различных  $E_1$ ,  $c_0$ .

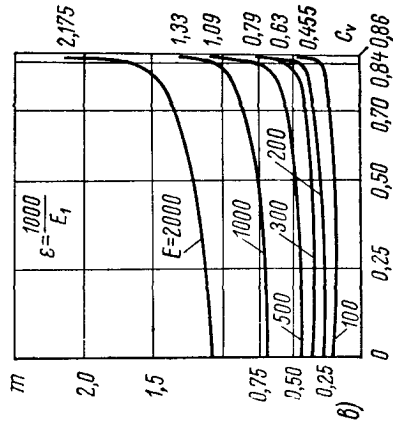
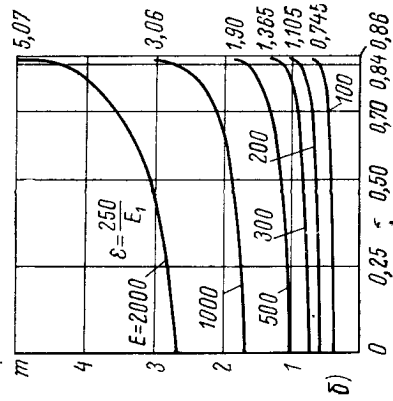
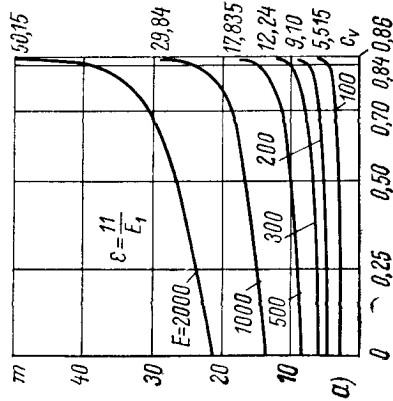
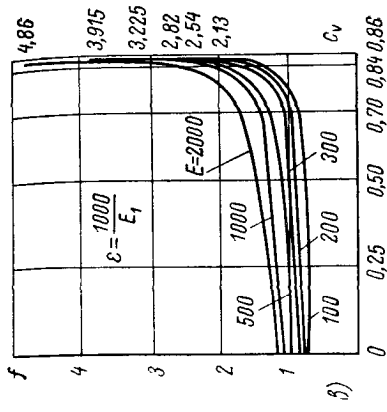
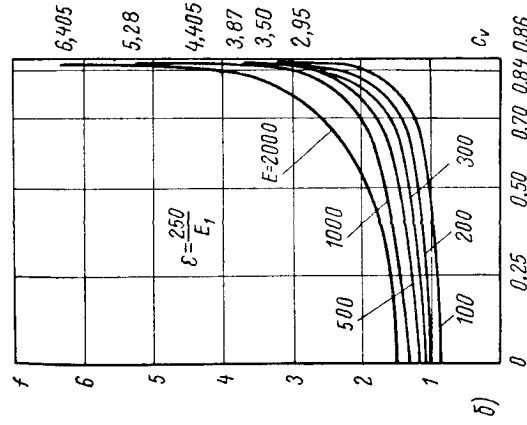
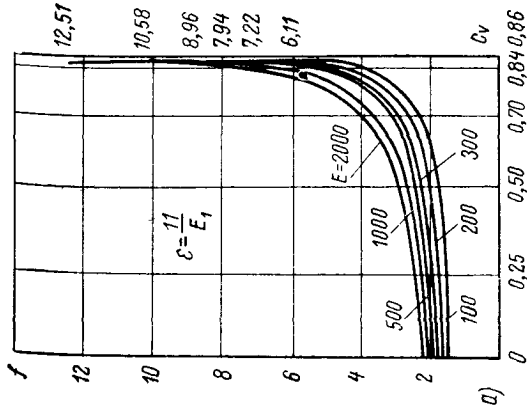


Рис. 17.8

Скорость перемещения нагрузки  $\dot{P}$  для  $\rho_1 = 1,7 \cdot 10^{-6}$  будет

$$v = \sqrt{\frac{c_0 \mu_1}{E_1}} = 4756 \sqrt{10^{-2} c_0 E_1} \text{ см/сек}; \quad v = 171,23 \sqrt{10^{-2} c_0 E_1} \text{ км/ч.}$$

Предположим, что  $E_1 = 200 \text{ кг/см}^2$ , тогда значения перемещения  $u_z(0, 0, 0)$  напряжения  $\sigma \text{ кг/см}^2$  в рельсах в зависимости от скорости  $v$  и нагрузки на рельсы  $P = 10\,000 \text{ кг}$  приведены в табл. 17.4.

Как видно из табл. 17.4, с возрастанием скорости  $v$  прогиб значительно увеличивается, напряжение  $\sigma$  в рельсах растет медленнее, однако для принятого  $E_1 = 200$  увеличивается в 1,8 раза.

Из вышеприведенных исследований вытекает, что скорость перемещения силы при учете инерционности полупространства (упругого основания) существенно отражается на динамические напряжения и смещения рельсов.

---

**КОЛЕБАНИЕ ПЛИТ,  
ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ  
ОСНОВАНИЯ И ПЛИТЫ**

**Сущность задачи**

В гл. 9 нами изучены колебания плит, ограниченных контуром, при заданных условиях опирания.

На практике приходится иметь дело с плитами, лежащими на упругом основании. Поэтому представляет интерес выяснить поведение таких плит, находящихся под действием периодических сил.

Обычное решение задачи сводится к нахождению решения дифференциального уравнения

$$\Delta \Delta w + \frac{m}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{k}{D} w = \frac{1}{D} F(x, y, t), \quad (18.1)$$

где  $k$  — коэффициент упругого сжатия грунта;  $m = \rho' h$ .

Решение этого уравнения находится без всяких затруднений так же, как и для плит без упругого основания, поэтому останавливаться на этом мы не будем.

Практический интерес представляет случай, когда плита находится не на упругом основании, расчет которого подчиняется гипотезе Винклера, а на упругом полупространстве. В этом случае ожидать бесконечных смещений даже в стадии резонанса не приходится.

Такая задача возникает при расчете полов промышленных зданий, покрытий — дорожных, аэродромных. Большое значение для практики имеет выяснение амплитуд и напряжений при непосредственной установке агрегатов с динамическими нагрузками на подстилающем слое (плите), т. е. при установке агрегатов без фундамента.

Ниже мы приводим решение для этого случая, полученное в предположении, что плита и полупространство подчиняются уравнениям теории упругости,

## Дифференциальные уравнения колебаний

Вынужденные колебания упругого полупространства под действием периодической силы были хорошо изучены в известной работе Ламба [136]. В дальнейшем применительно к сейсмическим волнам этим вопросом занимался и ряд других авторов.

В этом разделе рассматриваются вынужденные колебания бесконечного слоя (плиты) толщиной  $h$ , ограниченного двумя параллельными плоскостями и находящегося под действием периодической силы, в предположении, что имеется ось симметрии.

Помимо колебаний плиты под действием периодической силы, ниже рассмотрены колебания плиты в предположении, что с ней связана сосредоточенная масса. Случай, когда плита отсутствует, рассмотрен в работе [145].

Уравнения движения однородной и изотопной упругой среды имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (18.2)$$

где  $u, v, w$  — проекции перемещений на оси  $x, y, z$ ;  
 $\theta$  — относительное объемное расширение;

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

$\Delta$  — оператор Лапласа;  
 $\lambda$  и  $\mu$  — постоянные Ламе;  
 $\rho$  — плотность упругой среды;  
 $t$  — время.

Вместо системы уравнений (18.2) берется обычно система однотипных дифференциальных уравнений, которые по Ламбу могут быть получены следующим образом.

Для случая простого гармонического движения, которое в данном случае рассматривается, необходимо положить

$$u = u' e^{ipt}; \quad v = v' e^{ipt}; \quad w = w' e^{ipt}.$$

Системе (18.2) можно удовлетворить, беря перемещения в виде

$$\left. \begin{aligned} u' &= \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_1 \right) e^{ipt}; \quad v' = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_1 \right) e^{ipt}; \\ w &= \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} + w_1 \right) e^{ipt} \end{aligned} \right\} \quad (18.3)$$

при условии, что  $\Phi$  удовлетворяют уравнению

$$(\Delta + h^2) \Phi = 0, \quad (18.4)$$

а  $u_1, v_1, \omega_1$  определяются из уравнений

$$(\Delta + k^2) u_1 = 0; (\Delta + k^2) v_1 = 0; (\Delta + k^2) \omega_1 = 0;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = 0,$$

где

$$h_2 = \frac{\rho \rho^2}{\lambda + 2\mu}; \quad k^2 = \frac{\rho \rho^2}{\mu}.$$

В предположении, что ось  $z$  является осью симметрии деформаций, этим зависимостям можно удовлетворить, полагая

$$u_1 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z}; \quad v_1 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z}; \quad \omega_1 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + k^2 \Psi, \quad (18.5)$$

так как для перемещений, заданных таким образом, составляющая вихря перемещений на ось  $z$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

равна нулю, т. е. условия осевой симметрии удовлетворяются.

При этом для функции  $\Psi$  получим уравнение

$$(\Delta + k^2) \Psi = 0. \quad (18.6)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению из уравнений (18.4) и (18.6) значений функции  $\Phi$  и  $\Psi$ .

В цилиндрических координатах для задач, имеющих ось симметрии,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial z}$ , где  $u$  — радиальное перемещение;  $\omega$  — перемещение по оси  $z$ .

Значения перемещений  $u$  и  $\omega$  в зависимости от  $\Phi$  и  $\Psi$  будут

$$u = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \right) e^{i\rho t}; \quad \omega = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + k^2 \Psi \right) e^{i\rho t}. \quad (18.7)$$

Для составляющих напряжений — нормальных  $\sigma_z$  и касательных  $\tau$  — имеем выражения

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial \omega}{\partial z} = \\ &= \left[ -\lambda h^2 \Phi + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} + k^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) e^{i\rho t} \right]; \\ \tau &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r \partial z^2} \right) + k^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] e^{i\rho t}. \end{aligned} \quad (18.8)$$

## Определение перемещений упругого основания

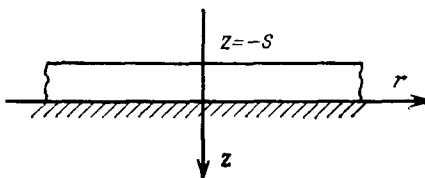
Предположим, что плита, лежащая на упругом полупространстве, ограничена плоскостями  $z = 0$  и  $z = -s$ , ось  $z$  направлена нормально к этим плоскостям плиты внутрь упругой среды, начало координат расположено в плоскости  $z = 0$ , по которой плита соприкасается с поверхностью полупространства (рис. 18.1).

К верхней плоскости плиты приложена в направлении оси  $z$  периодическая нормальная нагрузка

$$p(r, t) = q(r) e^{i\rho t},$$

симметричная относительно оси  $z$ .

В рассматриваемом случае задача сводится к нахождению решений уравнений



$$\left. \begin{aligned} (\Delta + h_1^2) \Phi_1 &= 0; \\ (\Delta + k_1^2) \Psi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.9)$$

для полупространства и

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + h^2) \Phi &= 0; \\ (\Delta + k^2) \Psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.9')$$

Рис. 18.1

для плиты при заданных граничных условиях и при наличии указанной выше сосредоточенной периодической нагрузки.

В уравнениях (18.9) и (18.9') приняты обозначения:

$$h_1^2 = \frac{\rho_1 \rho^2}{\lambda_1 + 2\mu_1}; \quad k_1^2 = \frac{\rho_1 \rho^2}{\mu_1}; \quad h^2 = \frac{\rho \rho^2}{\lambda + 2\mu}; \quad k^2 = \frac{\rho \rho^2}{\mu}, \quad (18.10)$$

где  $\rho_1$  — плотность;

$\lambda_1; \mu_1$  — постоянные Ламе для полупространства;

$\rho, \lambda, \mu$  — те же величины для плиты.

Перемещения и напряжения определяются формулами (18.3) и (18.8). При удовлетворении граничных условий будем исходить из предположения, что трение между плитой и основанием отсутствует. Такое предположение обычно принимается и другими авторами при рассмотрении аналогичных задач.

В таком случае при решении рассматриваемой задачи необходимо удовлетворить следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \tau_1(r, 0) &= 0; & (a) \quad \tau(r, 0) &= 0; & (a') \\ \sigma_{z1}(r, 0) &= \sigma_z(r, 0); & (б) \quad \omega_1(r, 0) &= \omega(r, 0); & (в) \\ \tau(r, -s) &= 0; & (г) \quad \sigma(r, -s) &= q(s) e^{i\rho t}. & (д) \end{aligned}$$

Решение уравнений (18.9) для полупространства берем в виде

$$\Phi_1 = A_1 e^{-\alpha z} J_0(r \sqrt{\alpha^2 + h_1^2}); \quad \Psi_1 = B_1 e^{-\beta z} J_0(r \sqrt{\beta^2 + k_1^2}), \quad (18.11)$$

где  $J_0$  — функции Бесселя;

$\alpha, \beta$  — произвольные постоянные.



Для неограниченного основания решение системы (18.9) будет

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= (A \operatorname{ch} \gamma z + B \operatorname{sh} \gamma z) J_0(r \sqrt{\gamma^2 + h^2}); \\ \Psi &= (C \operatorname{ch} \delta z + D \operatorname{sh} \delta z) J_0(r \sqrt{\delta^2 + k^2}), \end{aligned} \right\} \quad (18.12)$$

где  $\gamma, \delta$  — произвольные постоянные.

Для возможности удовлетворения перечисленных выше граничных условий необходимо положить в выражениях (18.11) и (18.12)

$$\alpha^2 + h_1^2 = \beta^2 + k_1^2 = \xi^2; \quad \gamma^2 + h^2 = \delta^2 + k^2 = \xi^2. \quad (18.13)$$

В таком случае согласно значений (18.7) перемещения упругого основания можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= e^{i\rho t} (-A_1 \xi e^{-\alpha z} + B_1 \xi \beta e^{-\beta z}) J_1(\xi r); \\ \omega_1 &= e^{i\rho t} (-A_1 \alpha e^{-\alpha z} + B_1 \xi^2 e^{-\beta z}) J_0(\xi r). \end{aligned} \right\} \quad (18.14)$$

Для напряжений из зависимостей (18.8) получим

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \mu_1 e^{i\rho t} [2\alpha \xi e^{-\alpha z} A_1 - (2\xi^2 - k_1^2) \xi e^{-\beta z} B_1] J_1(\xi r); \\ \sigma_{z1} &= \mu_1 e^{i\rho t} [(2\xi^2 - k_1^2) e^{-\alpha z} A_1 - 2\xi^2 \beta e^{-\beta z} B_1] J_0(\xi r). \end{aligned} \right\} \quad (18.15)$$

Для составляющих перемещений плиты  $u$  и  $w$  получим выражения

$$\left. \begin{aligned} u &= -[A \xi \operatorname{ch} \gamma z + B \xi \operatorname{sh} \gamma z + \delta \xi (C \operatorname{sh} \delta z + D \operatorname{ch} \delta z)] e^{i\rho t} J_1(\xi r); \\ w &= [\gamma (A \operatorname{sh} \gamma z + B \operatorname{ch} \gamma z) + \xi^2 (C \operatorname{ch} \delta z + D \operatorname{sh} \delta z)] e^{i\rho t} J_0(\xi r). \end{aligned} \right\} \quad (18.16)$$

Напряжение в плите будет

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \mu [(2\xi^2 - k^2) (A \operatorname{ch} \gamma z + B \operatorname{sh} \gamma z) + 2\delta \xi^2 (C \operatorname{sh} \delta z + \\ &\quad + D \operatorname{ch} \delta z)] e^{i\rho t} J_0(\xi r); \\ \tau &= \mu [-2\gamma \xi (A \operatorname{sh} \gamma z + B \operatorname{ch} \gamma z) + \xi (k^2 - 2\xi^2) (C \operatorname{ch} \delta z + \\ &\quad + D \operatorname{sh} \delta z)] e^{i\rho t} J_1(\xi r). \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

Для определения постоянных условий (а), (б), (в), (г), (д) приводят к таким зависимостям:

$$2\alpha \xi A_1 - \xi (2\xi^2 - k_1^2) B_1 = 0; \quad (a)$$

$$-2\gamma \xi B + \xi (k^2 - 2\xi^2) C = 0; \quad (a')$$

$$(2\xi^2 - k^2) A + 2\delta \xi^2 D = \frac{\mu_1}{\mu} [(2\xi^2 - k_1^2) A_1 - 2\beta \xi^2 B_1]; \quad (б)$$

$$-\alpha A_1 + \xi^2 B_1 = \gamma B + \xi^2 C, \quad (в)$$

$$2\xi \gamma [A \operatorname{sh} \gamma s - B \operatorname{ch} \gamma s] - \xi (2\xi^2 - k^2) (C \operatorname{ch} \delta s - D \operatorname{sh} \delta s) = 0. \quad (г)$$

Из уравнений  $(a_1)$ ,  $(a'_1)$ ,  $(b_1)$ ,  $(v_1)$  получим

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2\alpha} (2\xi^2 - k_1^2) B_1; & B &= -\frac{1}{2\gamma} (2\xi^2 - k^2) C; \\ C &= \frac{\rho_1 \mu}{\rho_1 \mu_1} B_1; & A &= \frac{\mu_1 F_1(\xi)}{2\alpha \mu (2\xi^2 - k^2)} B_1 - \frac{2\delta \xi^2}{2\xi^2 - k^2} D, \end{aligned} \right\} \quad (18.18)$$

где

$$F_1(\xi) = (2\xi^2 - k_1^2)^2 - 4\alpha\beta\xi^2. \quad (18.19)$$

Из условия  $(\gamma)$  имеем

$$D = \frac{B_1}{N(\xi)} \left[ \frac{\mu_1}{\mu} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} F_1(\xi) \operatorname{sh} \gamma \delta + \frac{\rho_1 \mu}{\rho_1 \mu_1} (2\xi^2 - k^2)^2 (\operatorname{ch} \gamma s - \operatorname{ch} \delta s) \right], \quad (18.20)$$

где

$$N(\xi) = 4\gamma\delta\xi^2 \operatorname{sh} \gamma s - (2\xi^2 - k^2) \operatorname{sh} \delta s. \quad (18.21)$$

Выражая произвольные постоянные  $A_1$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  через  $B_1$ , после подстановки их значений и значения  $D$  из формулы (18.20) в выражение (18.17) для  $\sigma_z(r, -s)$  и некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, -s) &= \frac{k_1^2}{k^2} \cdot \frac{\mu B_1}{4\gamma N(\xi)} \left\{ f^2(\xi) [\operatorname{ch}(\gamma - \delta)s - 1] - \right. \\ &- F^2(\xi) [\operatorname{ch}(\gamma + \delta)s - 1] + \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\rho_1 \mu^2}{\rho_1 \mu^2} F_1(\xi) \cdot [f(\xi) \operatorname{sh}(\gamma - \delta)s - \\ &\left. - F(\xi) \operatorname{sh}(\gamma + \delta)s] \right\} e^{i\rho t} J_0(\xi r), \end{aligned} \quad (18.22)$$

где  $F(\xi) = (2\xi^2 - k^2)^2 - 4\gamma\delta\xi^2$ ;  $f(\xi) = (2\xi^2 - k^2)^2 + 4\gamma\delta\xi^2$ , а  $F_1(\xi)$  определяется из выражения (18.19).

Для перемещений поверхности  $z = 0$  упругого основания имеем значения

$$\left. \begin{aligned} w_1(r, 0) &= \frac{k_1^2}{2} e^{i\rho t} J_0(\xi r) B_1, \\ u_1(r, 0) &= -\frac{\xi}{2\alpha} e^{i\rho t} (2\xi^2 - k_1^2 - 2\alpha B) J_1(\xi r) B_1. \end{aligned} \right\} \quad (18.23)$$

Нормальное напряжение  $\sigma_z$  будет

$$\sigma_z(r, 0) = \frac{\mu_1}{2\alpha} e^{i\rho t} F_1(\xi) J_0(\xi r) B_1. \quad (18.17')$$

Для перемещений нижней поверхности плиты, соприкасающейся с упругим основанием, имеем

$$\left. \begin{aligned} \omega(r, 0) &= \omega_1(r, 0); \\ u(r, 0) &= -\frac{\mu_1}{\mu} \cdot \frac{\xi e^{i\rho t}}{2\alpha N(\xi)(2\xi^2 - k^2)} \left\{ F_1(\xi) [N(\xi) - \right. \\ &\quad \left. - 2k^2\gamma\delta \operatorname{sh} \gamma s] - 2\frac{\rho_1}{\rho} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\mu^2}{\mu_1^2} k^2\alpha\delta (2\xi^2 - k^2)^2 (\operatorname{ch} \gamma s - \operatorname{ch} \delta s) \right\} J_1(\xi r) B_1. \end{aligned} \right\} (18.24)$$

Для случая свободных колебаний необходимо удовлетворить условию отсутствия нормальных напряжений на плоскости  $z = -s$

$$\sigma_z(r, -s) = 0,$$

так как условие обращения в нуль касательных напряжений соблюдено.

Это условие приводит согласно выражению (18.22) к уравнению частоты для свободных колебаний плиты, лежащей на упругом полупространстве.

$$\begin{aligned} &-F^2(\xi) [\operatorname{ch}(\gamma + \delta)s - 1] + f^2(\xi) [\operatorname{ch}(\gamma - \delta)s - 1] - \\ &- \frac{\rho\mu_1^2}{\rho_1\mu^2} \frac{\gamma}{\alpha} F_1(\xi) [F(\xi) \operatorname{sh}(\gamma + \delta)s - f(\xi) \operatorname{sh}(\gamma - \delta)s] = 0. \end{aligned} \quad (18.25)$$

Когда  $s$  стремится к нулю, уравнение частоты будет

$$F_1(\xi) = (2\xi^2 - k_1^2) - 4\alpha\beta\xi^2 = 0. \quad (18.26)$$

Это уравнение, как известно из теории волн Релея, имеет на вещественной оси только два действительных корня  $\pm x$ , другие вообще должны быть отброшены.

Значения  $x$  будут

$$\begin{aligned} x &= 1,04678k_1 \text{ для } \lambda_1 = \infty \left( \sigma = \frac{1}{2} \right); \\ x &= \frac{1}{2} \sqrt{3 + \sqrt{3k_1}} \text{ для } \lambda_1 = \mu_1 \left( \sigma = \frac{1}{4} \right), \end{aligned}$$

где  $\sigma$  — коэффициент Пуассона.

В дальнейшем будем предполагать, что для рассматриваемых значений  $ks$ ,  $\frac{k_1}{k}$  уравнение частоты (18.25) будет также иметь только два действительных корня  $\pm s$  на вещественной оси, из остальных корней должны быть приняты во внимание лишь те,

которые имеют физическое значение, т. е. для которых действительная часть  $-\alpha$  и  $-\beta$  будет отрицательной\*.

Для получения перемещений в случае свободных колебаний, необходимо в выражения (18.23), (18.24) вместо  $\xi$  подставить значение корня  $c$  уравнения частоты (18.25).

Тогда для перемещений поверхности упругого основания получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_1(r, 0) = \omega(r, 0) &= \frac{k_1^2}{2} e^{i\beta t} J_0(cr) B_1; \\ u_1(r, 0) &= -\frac{c}{2\alpha_1} e^{i\beta t} (2c^2 - k_1^2 - 2\alpha_1\beta_1) J_1(cr) B_1, \end{aligned} \right\} (18.27)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{c^2 - k_1^2}; \quad \beta_1 = \sqrt{c^2 - h_1^2}.$$

Для определения напряжений и перемещений в случае вынужденных колебаний предполагаем, что  $B_1$  будет функцией параметра  $\xi$ .

Умножая уравнение (18.22) на  $d\xi$  и интегрируя от 0 до  $\infty$ , получим для напряжения  $\sigma_z(r, -s)$  на поверхности плиты значение

$$\sigma_z(r, -s) = -\mu \frac{k_1^2}{k^2} e^{i\beta t} \int_0^\infty \frac{B(\xi)}{4\gamma N(\xi)} \left[ \varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi) \right] J_0(\xi r) d\xi; \quad (18.28)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= F^2(\xi) (\operatorname{ch}(\gamma + \delta)s - 1) - f^2(\xi) [\operatorname{ch}(\gamma - \delta)s - 1]; \\ \psi(\xi) &= \frac{\rho\mu_1^2}{\rho_1\mu^2} \gamma [F(\xi) \operatorname{sh}(\gamma + \delta)s - f(\xi) \operatorname{sh}(\gamma - \delta)s]. \end{aligned} \right\} (18.29)$$

Аналогично находим из выражений (18.17) и (18.23) значения напряжений и перемещений на поверхности  $z = 0$  упругого основания

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z1}(r, 0) = \sigma_z(r, 0) &= \frac{\mu_1}{2} e^{i\beta t} \int_0^\infty \frac{B(\xi)}{\alpha} F_1(\xi) J_0(\xi r) d\xi; \\ u(r, 0) &= e^{i\beta t} \int_0^\infty \frac{\xi B(\xi)}{i2\alpha} [k_1^2 - 2\xi^2 - 2\alpha\beta] J_1(\xi r) d\xi; \end{aligned} \right\} (18.30)$$

$$\omega(r, 0) = e^{i\beta t} \int_0^\infty \frac{k_1^2 B(\xi)}{2} J_0(\xi r) d\xi. \quad (18.31)$$

\* Это предположение о наличии двух корней  $\pm c$  сведено для простоты и справедливо лишь для некоторых значений упругих постоянных и  $ks$ . Все дальнейшие выводы без затруднений могут быть обобщены и на случай, когда уравнение частоты будет иметь ряд корней  $\pm c_l$ .

Для определения значений  $B(\xi)$  необходимо воспользоваться теоремой Фурье — Бесселя.

Согласно этой теореме  $\sigma_z(r, -s)$  может быть представлено в виде

$$\sigma_z(r, -s) = \int_0^{\infty} J_0(\xi r) \xi d\xi \int_0^{\infty} \sigma_z(\rho_1, -s) J_0(\xi \rho) \rho d\rho. \quad (18.32)$$

Сравнивая выражения (18.28) и (18.32), получим для  $B(\xi)$  значение

$$B(\xi) = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{k^2}{k_1^2} \cdot \frac{4\gamma\xi N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi)} \int_0^{\infty} \sigma_z(\rho, -s) J_0(\xi \rho) \rho d\rho. \quad (18.33)$$

Предположим теперь, что нагрузка равномерно распределена по площади круга радиуса  $a$ . Тогда

$$\sigma_z(r, -s) = \begin{cases} qe^{i\rho t} & \text{для } r < a; \\ 0 & \text{для } r > a, \end{cases}$$

где  $q$  — интенсивность равномерно распределенной нагрузки.

В таком случае

$$\int_0^{\infty} \sigma_z(\rho, -s) J_0(\xi \rho) \rho d\rho = \pi a^2 q \frac{J_1(a\xi)}{\pi a \xi} e^{i\rho t}.$$

Следовательно, для этой периодической нагрузки получим

$$B_1(\xi) = -\frac{4aq}{\mu} \cdot \frac{k^2}{k_1^2} \cdot \frac{\gamma N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi)} J_1(a\xi). \quad (18.34)$$

Для сосредоточенной нагрузки

$$\pi a^2 q \rightarrow Q; \quad \frac{J_1(a\xi)}{a\xi} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \text{когда } a \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$B_1(\xi) = -\frac{2Q}{\pi\mu} \cdot \frac{k^2}{k_1^2} \cdot \frac{\gamma\xi N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi)}. \quad (18.34')$$

Ограничимся в дальнейшем лишь случаем сосредоточенной нагрузки. После подстановки  $B(\xi)$  из (18.34') в выражения (18.30)

и (18.31) для перемещений и напряжений на поверхности упругого основания получим

$$\left. \begin{aligned} u(r, 0) &= -\frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu} \cdot \frac{k^2}{k_1^2} \cdot \int_0^\infty \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\xi^2 (k_1^2 - 2\xi^2 + 2\alpha\beta) N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi)} \times \\ &\quad \times J_1(\xi r) ds; \\ w(r, 0) &= -\frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu} k^2 \int_0^\infty \frac{\gamma \xi N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi)} J_0(\xi r) d\xi; \end{aligned} \right\} (18.35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, 0) &= -\frac{\mu_1 Qe^{ipt}}{\pi\mu} \cdot \frac{k^2}{k_1^2} \int_0^\infty \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\xi F_1(\xi) N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi)} \times \\ &\quad \times J_0(\xi r) d\xi. \end{aligned} \quad (18.36)$$

К этим значениям  $u(r, 0)$ ,  $w(r, 0)$ ,  $\sigma(r, 0)$  могут быть добавлены соответствующие значения  $u$ ,  $w$ ,  $\sigma_z$  для свободных колебаний, без нарушения граничных условий. Так как знаменатель подынтегрального выражения, входящего в уравнения (18.35) и (18.36) для значений  $\xi$ , соответствующих корням его, обращается в нуль, то подынтегральное выражение для этих значений  $\xi$  обращается в бесконечность. Поэтому в дальнейшем для полученных в виде интегралов выражений (18.27) будем принимать для них главные значения Коши\*.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ

### Изучение интегралов в комплексной области

Для дальнейшего изучения полученных выражений (18.35) представим их в несколько другом виде.

Для этого проведем интегрирование в комплексной плоскости  $\xi = \xi + i\eta$ .

Воспользуемся известными выражениями функций Бесселя в виде интегралов.

\* Т. е. если для функций  $\chi$  будет  $|\chi(\xi)| \rightarrow \infty$  при  $\xi \rightarrow c$  ( $a < c < b$ ), то

$$P \int_a^b \chi(\xi) d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{c-\varepsilon} \chi(\xi) d\xi + \int_{c+\varepsilon}^b \chi(\xi) d\xi \right\}.$$

Для функций Ганкеля  $H_p^{(1)}$ ,  $H_p^{(2)}$  имеем

$$\left. \begin{aligned} H_p^{(1)} &= \frac{2}{\pi i} e^{-\frac{1}{2} \pi \rho i} \int_0^{\infty} e^{i \zeta \operatorname{ch} u} \operatorname{ch} \rho u \, du \quad \text{для } \eta > 0; \\ H_p^{(2)} &= -\frac{2}{\pi i} e^{\frac{1}{2} \pi \rho i} \int_0^{\infty} e^{-i \zeta \operatorname{ch} u} \operatorname{ch} \rho u \, du \quad \text{для } \eta < 0. \end{aligned} \right\} (18.37)$$

Функции Бесселя и Неймана связаны с  $H_n$  соотношениями

$$\begin{aligned} J_p(\zeta) &= \frac{1}{2} [H_p^{(1)}(\zeta) + H_p^{(2)}(\zeta)]; \\ N_p(\zeta) &= \frac{1}{2i} [H_p^{(1)}(\zeta) - H_p^{(2)}(\zeta)]. \end{aligned}$$

В виде интегралов функции  $J_0$ ,  $J_1$ ,  $N_0$ ,  $N_1$  для  $\xi > 0$  можно представить таким образом:

$$\begin{aligned} J_0(\xi) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{i \xi \operatorname{ch} u} - e^{-i \xi \operatorname{ch} u}) \, du; \\ N_0(\xi) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\xi \operatorname{ch} u) \, du; \\ J_1(\xi) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{i \xi \operatorname{ch} u} + e^{-i \xi \operatorname{ch} u}) \operatorname{ch} u \, du; \\ N_1(\xi) &= -N'_0(\xi). \end{aligned}$$

После подстановки значений  $J_0(\xi r)$ ,  $J_1(\xi r)$  в выражения (18.35) запишем их в виде

$$\left. \begin{aligned} u(r, 0) &= -\frac{Qe^{i\rho t}}{\pi\mu} \cdot \frac{k^2}{k_1^2} \int_0^{\infty} \operatorname{ch} u \, du \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi) \, d\xi; \\ w(r, 0) &= -\frac{Qe^{i\rho t}}{\pi\mu} k^2 \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) \, d\xi, \end{aligned} \right\} (18.38)$$

где

$$\begin{aligned} \chi(\xi) &= -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\xi^2 (k_1^2 - 2\xi^2 + 2\alpha\beta) N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi)} e^{i\xi r \operatorname{ch} u}; \\ \omega(\xi) &= -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\gamma \xi N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi)} e^{i\xi r \operatorname{ch} u}. \end{aligned}$$

При изучении этих интегралов в комплексной области следует иметь в виду, что  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  на вещественной оси имеют точки разветвления

$$\pm k_1, 0; \pm h_1, 0; \pm k, 0; \pm h, 0.$$

Не вдаваясь в анализ функции  $\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi)$ , будем предполагать, что функция  $\varphi(\xi) - \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi)$  имеет лишь один корень  $-c_1$  на отрицательной части вещественной оси, а  $\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi)$  имеет также один корень  $c_1$  на положительной части той же оси.

Интегрирование ведем по контуру, указанному на рис. 18.2. При обходе точек  $\pm k, 0; \pm h, 0$  функции  $\chi(\xi)$ ,  $\omega(\xi)$ , как легко проверить, не меняют своих значений.

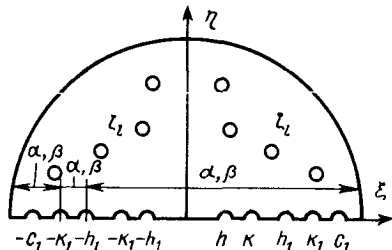


Рис. 18.2

Находя интеграл от функции  $\chi(\xi)$  по указанному контуру, получим после вычисления значения  $u(r, 0)$ ,  $\omega(r, 0)$ . При этом в выражениях для  $u(r, 0)$ ,  $\omega(r, 0)$  появляются члены с функциями Бесселя  $J_0(cr)$ ,  $N_0(cr)$ , дающие стоячие волны и члены, содержащие  $e^{ipt} H_q^{(2)}(\xi r)$ , где  $H_q^{(2)}$  определяется из уравнений (18.37),

соответствующие распространяющимся волнам. Поэтому, чтобы получить распространяющиеся волны, берем дополнительно систему перемещений для свободных колебаний, которая получится из уравнения (18.27), если принять

$$B_1 = i \frac{2Q}{k_1^2 \mu} \cdot \frac{\gamma c k^2 N(c)}{\left[ \varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi) \right]_{\xi=c}},$$

г. е. перемещения

$$\left. \begin{aligned} u(r, 0) &= i \frac{k^2 Q}{k_1^2 \mu} \cdot \frac{\gamma_1 c^2 (k^2 - 2c^2 + 2\alpha_1 \beta_1) N(c)}{\alpha \left[ \varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi) \right]_{\xi=c}} J_1(cr) e^{ipt}; \\ \omega(r, 0) &= i \frac{Q}{\mu} \cdot \frac{\gamma_1 c k^2 N(c)}{\left[ \varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi) \right]_{\xi=c}} J_0(cr) e^{ipt}. \end{aligned} \right\} (18.39)$$

Добавляя к перемещениям  $u(r, 0)$ ;  $\omega(r, 0)$  перемещения (18.39), получим окончательно значения перемещений  $u'(r, 0)$ ;  $\omega'(r, 0)$  для случая вынужденных колебаний в следующем виде ( $H$  и  $K$  — постоянные):



$$\begin{aligned}
 u(r, 0) = & -\frac{Qe^{i\rho t}}{\pi\mu} \cdot \frac{k^2}{k_1^2} \left\{ P \int_{k_1}^{\infty} \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\xi^2(k_1^2 - 2\xi^2 - 2\alpha\beta) \varphi(\xi) N(\xi)}{\varphi^2(\xi) - \frac{F_1^2(\xi)}{\alpha^2} \psi(\xi)} \times \right. \\
 & \times H_1^{(2)}(\xi r) d\xi + \int_{h_1}^{k_1} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{2\xi^2 [\varphi(\xi) - 2\beta k_1^2 \psi(\xi)] (k_1^2 - 2\xi^2) N(\xi)}{\left[ \varphi(\xi) - \frac{f_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi) \right] \left[ \varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \varphi(\xi) \right]} \times \\
 & \left. \times H_1^{(2)}(\xi r) d\xi - \frac{i\pi}{2} c_1^2 H' H_1^{(2)}(c_1 r) - \frac{i\pi}{2} c^2 H H_1^{(2)}(cr) + \sum_i v_i(\xi_i r) \right\}; \quad (18.40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w'(r, 0) = & \frac{Qe^{i\rho t}}{\pi\mu} k^2 \left\{ \int_{h_1}^{k_1} \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\xi (2\xi^2 - k_1^2)^2 \psi(\xi) N(\xi) H_0^{(2)}(\xi r) d\xi}{\left[ \varphi(\xi) - \frac{f_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi) \right] \left[ \varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi) \right]} + \right. \\
 & + P \int_{k_1}^{\infty} \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\xi F_1(\xi) \psi(\xi) N(\xi)}{\varphi^2(\xi) - \frac{F_1^2(\xi)}{\alpha^2} \varphi^2(\xi)} H_0^{(2)}(\xi r) d\xi + \\
 & \left. + \frac{i\pi}{2} [cH_0^{(2)}(cr) K - c_1 H_0^{(2)}(c_1 r) K'] - \sum v_i(\xi_i r) \right\}, \quad (18.41)
 \end{aligned}$$

$$\text{где } v_i(\xi_i r) = 2\pi_i \int_0^{\infty} R_i' \operatorname{ch} u \, du; \quad v_i(\xi_i r) = \int_0^{\infty} R_i \, du;$$

$\sum_i R_i$  — сумма вычетов для комплексных корней знаменателя

$$\xi = r_i + is_i; \quad \zeta = -r_i' + is_i',$$

лежащих в верхней полуплоскости выше вещественной оси. При этом

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_1' &= \sqrt{c_1^2 - h_1^2}; & \beta_1' &= \sqrt{c_1^2 - k_1^2}; & \gamma_1' &= \sqrt{c_1^2 - h^2}; \\
 \alpha_1 &= \sqrt{c^2 - h_1^2}; & \beta_1 &= \sqrt{c^2 - k_1^2}; & \gamma_1 &= \sqrt{c^2 - h^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (18.42)$$

При вычислении значений  $u'(r, 0)$ ;  $w'(r, 0)$  удобнее исходить из выражений (18.35), учитывая, однако, наложенные перемещения (18.39) для свободных колебаний.

В таком случае, например, для перемещения  $\omega'(r, 0)$  получим значение

$$\omega'(r, 0) = i \frac{Qe^{i\rho t}}{\mu} ck^2 k J_0(cr) - \frac{Qe^{i\rho t}}{\pi\mu} k^2 P \int_0^\infty \frac{\gamma \xi N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi)} J_0(\xi r) d\xi. \quad (18.43)$$

Вместо переменной  $\xi$  вводим безразмерную координату

$$\sigma = \frac{\xi}{k_1}.$$

Обозначая

$$l^2 = \frac{k^2}{k_1^2}; \quad n^2 = \frac{h^2}{k_1^2}; \quad n_1^2 = \frac{h_1^2}{k_1^2}; \quad k_1 s = s_0; \quad k_1 r = \rho_0$$

и заменяя переменную  $\xi$  переменной  $\sigma$ , получим, например, для  $\omega'(r, 0)$  значение

$$\omega'(r, 0) = i \frac{Qe^{i\rho t}}{\mu} \cdot \frac{c' k_1 \gamma' N'(c') l^2 J_0(cr)}{\left[ \varphi'(\sigma) + \frac{F_1'(\sigma)}{\alpha'} \psi'(\sigma) \right]_{\sigma=c''}} - \frac{Qe^{i\rho t}}{\pi\mu} k_1 l^2 P \int_0^\infty \frac{\gamma' \sigma N'(\sigma) J_0(\sigma \rho_0)}{\varphi'(\sigma) + \frac{F_1'(\sigma)}{\alpha'} \psi'(\sigma)} d\sigma, \quad (18.44)$$

где

$$\left. \begin{aligned} N'(\sigma) &= 4\delta' \sigma \gamma' \delta^2 \operatorname{sh} \gamma' s_0 - (2\sigma^2 - l^2) \operatorname{sh} \delta' s_0; \\ \varphi'(\sigma) + \frac{F_1'(\sigma)}{\alpha'} \psi'(\sigma) &= (F'(\sigma))^2 [\operatorname{ch}(\gamma' + \delta') s_0 - 1] - \\ &- (f'(\sigma))^2 [\operatorname{ch}(\gamma' - \delta') s_0 - 1] + \frac{\rho \mu_1^2}{\rho_1 \mu^2} \cdot \frac{\gamma'}{\alpha'} F_1'(\sigma) \times \\ &\times [F''(\sigma) \operatorname{sh}(\gamma' + \delta') s_0 - f'(\sigma) \operatorname{sh}(\gamma' - \delta') s_0], \end{aligned} \right\} \quad (18.45)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \sqrt{\sigma^2 - n_1^2}; \quad \beta' = \sqrt{\sigma^2 - 1}; \quad \gamma' = \sqrt{\sigma^2 - n^2}; \\ \delta' &= \sqrt{\sigma^2 - l^2}; \quad F'(\sigma) = (2\sigma^2 - l^2)^2 - 4\gamma' \delta' \sigma^2; \end{aligned} \right\} \quad (18.46)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1'(\sigma) &= (2\sigma^2 - 1)^2 - 4\alpha' \beta' \sigma^2; \\ f'(\sigma) &= (2\sigma^2 - l^2)^2 + 4\gamma' \delta' \sigma^2; \end{aligned} \right\} \quad (18.47)$$

$c' = \frac{c}{k_1}$  — корень знаменателя подынтегрального выражения.

В частности, значение прогиба в точке (0, 0) будет

$$\begin{aligned} \omega(0, 0) = & i \frac{Qe^{i\rho t}}{\mu} \cdot \frac{c' k_1 \gamma' l^2 N'(c')}{\left[ \varphi'(\sigma) + \frac{F_1(\sigma)}{\alpha'} \psi'(\sigma) \right]_{\sigma=c_1}'} - \\ & - \frac{Qe^{i\rho t}}{\pi\mu} k_1 l^2 P \int_0^{\infty} \frac{\gamma' \sigma N'(\sigma)}{\varphi'(\sigma) + \frac{F_1(\sigma)}{\alpha'} \psi'(\sigma)} d\sigma. \end{aligned} \quad (18.48)$$

Вычисление значений  $\omega'(0, 0)$  в дальнейшем будет проведено приближенным путем.

### Разложение подынтегрального выражения по степеням $s_0$

Для малых значений  $s_0 \sigma$  ( $s_0 = k_1 s$ ) удобно подынтегральное выражение (18.48) представить в виде разложения по степеням  $s_0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{2\gamma' l^4 s_0 N'(\sigma)}{\varphi'(\sigma) + \frac{F_1(\sigma)}{\alpha'} \psi'(\sigma)} = \\ = & \frac{R_0(\sigma) + s_0^2 R_2(\sigma) + s_0^4 R_4(\sigma) + \dots}{R_0(\sigma) + s_0^2 S_2(\sigma) + s_0^4 S_4(\sigma) + \dots + \frac{F_1(\sigma)}{\alpha'} \cdot \frac{\rho_1}{s_0 \rho} [R_0(\sigma) + s_0^2 T_2(\sigma) + \dots]}, \end{aligned} \quad (18.49)$$

где

$$R_0(\sigma) = 4(l^2 - n^2)\sigma^2 - l^4;$$

$$R_2(\sigma) = \frac{1}{6} [8(l^2 - n^2)\sigma^4 - (5l^4 - 4n^4)\sigma^2 + l^6];$$

$$R_4(\sigma) = \frac{1}{120} [12(l^2 - n^2)\sigma^6 - (13l^4 - 12n^4)\sigma^4 + (6l^6 - 4n^6)\sigma^2 - l^8],$$

где

$$\begin{aligned} S_2(\sigma) = & -\frac{1}{6l^4} [8(l^2 - n^2)^2 \sigma^6 - 8l^2(2l^4 - 3n^2l^2 + n^4)\sigma^4 + \\ & + 2l^4(4l^4 - 2l^2n^2 + n^4)\sigma^2 - l^8(l^2 + n^2)]; \end{aligned}$$

$$T_2(\sigma) = \frac{1}{6} [8(l^2 - n^2)\sigma^4 - 4(2l^4 - n^4)\sigma^2 + (l^6 + 3l^4n^2)].$$

Предположим теперь, что  $s_0$  мало и  $\mu$  значительно больше  $\mu_1$ . Если пренебречь членами  $s_0^2 R_2$ ;  $s_0^4 R_4$ , ...,  $s_0^4 S_4(\sigma)$ ,  $s_0^6 S_6(\sigma)$ , ...,  $s_0^2 T_2$ ,  $s_0^4 T_4$ , ... и принять

$$R_0 \cong 4(l^2 - n^2)\sigma^2; \quad S_2(\sigma) = -\frac{1}{6l^4} 8(l^2 - n^2)^2 \sigma^6,$$

то для перемещения  $w(r, 0)$  получим

$$w(r, t) = \frac{Qe^{i\omega t}}{\mu_1 \pi s} \left[ i\pi \frac{s_0}{2} \sum \frac{c'_n}{\left[ \frac{F'(\sigma)}{\alpha'} + m_1 s_0 - n_1 s_0^3 \sigma \right]_{\sigma=c'_n}} - \frac{s_0}{2} P \int_0^\infty \frac{\sigma d\sigma}{\frac{F'(\alpha)}{\alpha'} + m_1 s_0 - n_1 s_0^3 \alpha^4} \right], \quad (18.50)$$

где  $c'_n$  — корни уравнения

$$\frac{F'(\sigma)}{\alpha'} + m_1 s_0 - n_1 s_0^3 \sigma^4 = 0.$$

Значение

$$m_1 = \frac{\rho}{\rho_1}; \quad n_1 = \frac{1}{6} \frac{E(1+\nu_1)}{E_1(1-\nu_1^2)}.$$

Колебания тонкой плиты, лежащей на упругом полупространстве, изучены подробно в работе [69].

#### ПРИЛОЖЕНИЕ К ЧАСТНЫМ СЛУЧАЯМ

##### Амплитуды вынужденных колебаний плиты под действием силы

Рассмотрим плиту толщиной  $s$ , лежащую на упругом основании, со следующими данными:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = 1,5; \quad \lambda = \mu_1; \quad \lambda = \mu; \quad \mu = 100\mu_1. \quad (18.51)$$

В таком случае

$$n^2 = \frac{h^2}{k_1^2} = \frac{\rho}{\rho_1} \cdot \frac{\mu_1}{\lambda + 2\mu} = 0,5 \cdot 10^{-2}; \quad |l|^2 = \frac{k^2}{k_1^2} = \frac{\rho}{\rho_1} \cdot \frac{\mu_1}{\mu} = 1,5 \cdot 10^{-2}.$$

Вычисления приводим для значений

$$s_0 = k_1 s = 0,02; 0,03; 0,05; 0,15; 0,30.$$

Прогиб  $w'(0,0)$  определяем по формуле (18.48), причем для  $s_0 \sigma < 0,40$  пользуемся выражением (18.49), а для  $s_0 \sigma > 0,40$  — выражением (18.50).

Вычисления интегралов проведены приближенным путем с помощью формулы Симпсона.

Значение корня  $c' = \frac{c}{k_1}$  уравнения частоты свободных колебаний (18.25), полученные для принятых значений  $s_0$ , приведены в табл. 18.1.

Значения функций  $f_1$ ,  $f_2$  и амплитуды  $f_0$ 

$S_0$	$c'$	$f_1$	$f_2$	$\frac{\pi\mu s}{Q} f_0$	$S_0$	$c_1$	$f_1$	$f_2$	$\frac{\pi\mu s}{Q} f_0$
0,02	1,113	18,1	-1,04	18,1	0,10	1,128	17,0	-5,91	18,0
0,03	1,114	18,0	-1,57	18,0	0,15	1,129	16,2	-7,93	18,0
0,05	1,116	17,9	-2,60	18,0	0,30	1,034	13,6	-8,86	16,2

Прогиб в точке (0,0) плиты (и основания) для силы  $Qe^{ipt}$  будет

$$w'(0, 0) = \frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu s} (f_1 - if_2), \quad (18.52)$$

где согласно уравнения (18.48)  $f_1$  — действительная часть;  $f_2$  — коэффициент при мнимой части прогиба, умноженный на  $-\frac{\pi\mu s}{Q} e^{ipt}$ .

Полученные значения для  $f_1$  и  $f_2$  приведены в той же таблице, где максимальная амплитуда вынужденных колебаний

$$f_0 = \frac{Q}{\pi\mu s} \sqrt{f_1^2 + f_2^2}. \quad (18.53)$$

#### Амплитуды вынужденных колебаний плиты при сосредоточенной массе

Предположим, что в точке (0, -s) находится сосредоточенная масса  $m$  и в той же точке по-прежнему действует периодическая сила  $-Qe^{ipt}$ .

В таком случае нагрузка, действующая на плиту, при вынужденных колебаниях ее будет

$$Q' = -Qe^{ipt} + m \frac{\partial^2 w'(0, -s)}{\partial t^2}, \quad (18.54)$$

где  $w'$  — прогиб в точке (0, -s) плиты, который может быть представлен в виде

$$w'(0, -s) = \frac{1}{\pi\mu s} \omega_0 e^{ipt}. \quad (18.55)$$

Следовательно, аналогично уравнению (18.52) прогиб (0, -s) от нагрузки  $Q'$  по уравнению (18.54) будет

$$\frac{1}{\pi\mu s} \omega_0 e^{ipt} = \frac{1}{\pi\mu s} e^{ipt} \left( Q + mp^2 \frac{\omega_0}{\pi\mu s} \right) (f_1' + f_2' i),$$

$$\text{где } f_1' + if_2' = \frac{\pi\mu s}{Q} e^{-ipt} w'(0, -s).$$

\* Нагрузку следует считать распределенной по площади круга малого радиуса, чтобы получить конечное смещение в точке (0, -s).

Подставляя значение  $p^2 = \frac{\mu_1 k_1^2}{\rho_1} = \frac{\mu_1 s_0^2}{\rho_1 s^2}$ ,  
получим

$$w'(0, -s) = \frac{1}{\pi \mu s} \cdot \frac{(f_1' + i f_2') Q e^{i p t}}{1 - b s_0^2 (f_1' + i f_2')}, \quad (18.56)$$

где  $b = \frac{\mu_1 m}{\mu \rho_1 \pi s^3}$ .

Отделяя действительную часть для  $w'(0, -s)$ , получим значение для прогиба в точке  $(0, -s)$ , с которой связана масса  $m$ , при наличии периодической силы в той же точке  $(0, -s)$

$$\operatorname{Re} w'(0, -s) = \frac{Q}{\pi \mu s} \left\{ \left[ 1 - \frac{1 - b s_0^2 f_1'}{D} \right] \cos \rho' t + \frac{b s_0^2 f_2'}{D} \sin \rho' t \right\} \frac{1}{b s_0^2},$$

где  $D = (1 - b s_0^2 f_1')^2 + (b s_0^2 f_2')^2$   
или

$$\operatorname{Re} w'(0, -s) = A \cos(\rho' t + \delta_0). \quad (18.57)$$

Т а б л и ц а 18.2

$b$	$A$	$s_0'$
2,5	2,42	0,134
5	3,00	0,099
7,5	3,77	0,082
10	4,39	0,072

Вычисленные амплитуды  $A$  и  $\operatorname{tg} \delta_0$  будут

$$A = \frac{Q}{\pi \mu s} \sqrt{\frac{f_1'^2 + f_2'^2}{(1 - b s_0^2 f_1')^2 + (b s_0^2 f_2')^2}};$$

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{f_2'}{f_1' (1 - b s_0^2 f_1') - (b s_0^2 f_2')^2}. \quad (18.58)$$

Максимальная величина амплитуды получается из условия минимума знаменателя выражения (14.58), т. е. из условия

$$\frac{\partial}{\partial s_0} [(1 - b s_0^2 f_1'(s_0))^2 + (b s_0^2 f_2'(s_0))^2] = 0.$$

В табл. 18.2 приведены значения максимального прогиба  $A$  и соответствующие значения  $s_0'$ , вычисленные с помощью значений в табл. 18.1. Для рассматриваемого примера принято  $f_1' \approx f_1$ ;  $f_2' \approx f_2$ ;  $f_0$  в табл. 18.2 по-прежнему определяется формулой (18.53).

Значение критической частоты будет

$$\rho_{kp} = \frac{s_0'}{s_0} \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}.$$

Сравним величины прогибов, полученных выше для вынужденных колебаний плиты, с прогибами для такой же плиты, но находящейся под действием статической нагрузки.

Для этого случая имеется решение Маргерра. По Маргерру, когда в точке  $(0, -s)$  приложена сила  $Q$ , для значения прогиба при граничных условиях [(а), (б), (в), (г)], сохраняя прежние обозначения, получим

$$\omega(r, 0) = \frac{Q}{4\pi\mu s} \cdot \frac{(\lambda + 2\mu) f}{\lambda + \mu} \int_0^{\infty} \frac{(\sin z + z \operatorname{ch} z) J_0(z\rho)}{z + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2z + f(\operatorname{sh}^2 z - z^2)} dz, \quad (18.59)$$

где

$$f = \frac{\mu}{\mu_1}; \quad \rho = \frac{r}{s}.$$

Вычисляя  $\omega_{cm}(0, 0)$  по формуле (18.59), получим

$$\omega_{cm}(0, 0) = \frac{18,1Q}{\pi\mu s}.$$

Сравнивая это значение  $\omega_{cm}(0, 0)$  со значением  $f_0$  максимальной амплитуды (18.58), согласно табл. 60 увидим, что, когда  $s_0 = sk$  мало, амплитуды  $f_0$  для вынужденных колебаний почти не отличаются от  $\omega_{cm}(0, 0)$ . При наличии сосредоточенной массы в точке  $(0, -s)$  амплитуда превышает статический прогиб и с возрастанием  $b = \frac{m}{f\rho_1\pi s^3}$ , как видно из табл. 60, увеличивается.

Как видно из результатов вычислений для плиты, лежащей на упругом полупространстве, даже в стадии резонанса бесконечных смещений не получается.

Амплитуда колебаний конечна, и величина ее зависит от коэффициента  $b = \frac{m}{f\rho_1\pi s^3}$ .

Таким образом, применение гипотезы Винклера к колебаниям плит, лежащих на упругом основании, вряд ли может быть рекомендовано.

В1

к.

18.1

.

.

.

.

В



## УДАР И КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

### СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА

В предыдущем нами рассматривались задачи, связанные с нахождением частот собственных колебаний, а также вынужденные колебания под действием периодических внешних сил.

Более сложным вопросом расчета колебательного процесса является расчет колебательных процессов под действием внезапно приложенных нагрузок.

В дальнейшем мы в основном рассмотрим вопрос о действии поперечного удара на стержни и тонкие плиты.

Приближенный метод определения прогибов при действии ударной нагрузки был дан еще Коксом [95, 41]. Для определения динамического прогиба по этому методу необходимо задаться формой изгиба системы, ожидаемой при ударе (так же, как и по методу Релея), а затем приравнять кинетическую энергию груза и системы потенциальной энергии системы. Этот метод предполагает, что ударяющее тело после удара не отделяется от упругой системы.

Это приводит к известной приближенной формуле для определения динамического прогиба:

$$\omega_{\partial} = \omega_{cm} + \sqrt{\omega_{cm}^2 + \frac{v^2}{g} \cdot \frac{\omega_{cm}}{1 + k \frac{Q}{P}}}, \quad (19.1)$$

где  $Q$  — вес системы;

$P$  — вес падающего груза;

$v$  — скорость падения.

Коэффициент  $k$  показывает, какая доля веса системы должна быть прибавлена к весу груза при приведении данной системы к системе с одной степенью свободы.

Впервые более точный метод решения задачи о действии падающего груза на балку, основанный на интегрировании дифференциального уравнения колеблющейся балки, был дан Сен-Венаном.

По Сен-Венану, падающее тело сообщает свою скорость элементу балки, с которым оно вступает в соприкосновение, а затем колеблется совместно с балкой (неупругий удар).



В дальнейшем мы приведем решение задачи в предположениях Сен-Венана для случая удара груза по балке и по плите, лежащей на упругом основании.

Удар будем предполагать неупругим, т. е. падающее тело сообщает свою скорость элементу плиты в месте падения, а затем колеблется совместно с плитой. Решаем эту задачу для случая прямоугольной и круглой плит.

Решение задачи основано на интегрировании соответствующих дифференциальных уравнений колебательного движения в предположении Сен-Венана.

Приведенные ниже решения показывают, что приближенная формула (19.1) может дать большее расхождение, зависящее от отношения  $Q/P$ .

Вместе с тем при внезапном приложении нагрузки коэффициент динамичности отличается от двойного, что, конечно, и следовало бы ожидать ввиду того, что мы имеем дело с системой со многими степенями свободы.

Упругая система при воздействии импульсов внешней нагрузки подробно изучена И. Рабиновичем, А. Сеницыным, В. Терениным и др. [78, 111].

Допущение Сен-Венана необоснованное. В действительности при ударе упругого тела по упругой системе появляются в месте контакта тел местные деформации, величина которых подчиняется зависимостям, установленным рядом исследователей, начиная с известных работ Герца. Ряд новых зависимостей был получен в недавнее время И. Штаерманом.

Вследствие деформации в месте контакта процесс удара усложняется и возникает несколько повторных соударений. Впервые учет местных деформаций в месте контакта для стержня, подвергнутого удару падающего шарика, был осуществлен С. П. Тимошенко [94].

В конце этой главы приведем решение задачи об упругом ударе падающего тела, с учетом деформаций в месте контакта.

## НЕУПРУГИЙ УДАР ПО СТЕРЖНЯМ И ПЛИТАМ

### Поперечный удар по балке при учете затухания в ней

Решение задачи приведем для указанных деформаций, т. е. в предположении, что падающее тело, имеющее в начальный момент ( $t = 0$ ) скорость  $v$ , сообщает эту скорость элементу балки и остается с балкой в соприкосновении по крайней мере в течение полупериода основного тона колеблющейся балки.

Для простоты рассмотрим случай удара в среднем сечении балки, опертой по концам.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний балки с учетом затухания имеет вид (гл. 6)

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} + \delta^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \xi^4} = \frac{l^4}{EJ} f(\xi, t), \quad (19.2)$$

где  $f(\xi, t)$  — внешняя нагрузка, которая везде равна нулю, за исключением места приложения груза после удара ( $t > 0$ ).

В начальный момент балка находится под действием импульса силы, величина которого равна  $Z$ . Для любого положительного значения  $t$  давление на балку в точке  $x = \frac{l}{2}$ ,  $\xi = \frac{1}{2}$  будет

$$P = \frac{P}{g} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

За начальные условия приняты следующие.

В начальный момент

$$y(\xi, 0) = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad \text{для } t = 0 \quad (\xi = \xi_1). \quad (19.3)$$

Так как  $w = 0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$  для  $t = 0$ , то уравнение (19.2), с помощью операционного исчисления записывается в виде

$$(1 + \mu p \sigma) \frac{d^4 Y}{d\xi^4} + \delta^2 p^2 Y = 0, \quad (19.4)$$

где  $\sigma = \frac{1}{|Imp|}$ .

Функция влияния этого уравнения соответствует решению для случая сосредоточенной силы, равной единице, приложенной в точке  $\xi = \xi_1$ .

Имеем решение для этого случая:

$$\begin{aligned} G(\xi, \xi_1, p) &= A \operatorname{sh} r\xi + B \sin r\xi \quad \text{для } \xi < \xi_1; \\ G(\xi, \xi_1, p) &= A \operatorname{sh} r\xi + B \sin r\xi + \\ &+ \frac{l^3}{(1 + \mu p \sigma) EJ} \cdot \frac{1}{2r^3} [\operatorname{sh} r(\xi - \xi_1) - \sin r(\xi - \xi_1)] \\ &\quad \text{для } \xi > \xi_1; \end{aligned} \quad (19.5)$$

здесь

$$\frac{\delta^2 p^2}{1 + \mu p \sigma} = r^4. \quad (19.6)$$

При этом для  $\xi = 0$  условия

$G(0, \xi_1, p) = 0$ ;  $G'_\xi(0, \xi_1, p) = 0$  удовлетворены.

Удовлетворяя условиям опирания для  $\xi = 1$ , получим

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{l^3}{2EJ(1+\mu\rho\sigma)r^3} \cdot \frac{\operatorname{sh} r(1-\xi_1)}{\operatorname{sh} r}; \\ B &= \frac{l^3}{2EJ(1+\mu\rho\sigma)r^3} \cdot \frac{\sin r(1-\xi_1)}{\sin r}. \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

В символическом виде нагрузка, приложенная в точке  $\xi = \xi_1$ , при начальных условиях  $\omega = 0$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$ , в предположении передачи импульса в точке  $\xi = \xi_1$  будет

$$p \int_0^{\infty} f(\xi_1, t) e^{-pt} dt = P - \frac{P}{g} p^2 Y + Zp. \quad (19.8)$$

Значение  $Y(\xi, \xi_1, p)$  от нагрузки (19.8):

$$Y(\xi, \xi_1, p) = \left[ P - \frac{P}{g} p^2 Y(\xi_1, \xi_1, p) + Zp \right] G(\xi, \xi_1, p). \quad (19.9)$$

Полагая в этом выражении  $\xi = \xi_1$ , найдем  $Y(\xi_1, \xi_1, p)$ , а после подстановки значения  $Y(\xi_1, \xi_1, p)$  в правую часть (19.9) найдем

$$Y(\xi, \xi_1, p) = \frac{l^3}{EJ} \cdot \frac{P + Zp}{1 + \frac{l^3}{EJ} p^2 G_1(\xi_1, \xi_1, p)} G(\xi, \xi_1, p), \quad (19.10)$$

где  $G_1(\xi_1, \xi_1, p) = \frac{EJ}{l^3} G(\xi_1, \xi_1, p)$ ;  $\alpha = \frac{P}{Q}$ ;

здесь  $P$  — вес груза;  $Q$  — вес балки (н). Согласно формуле (19.7)

$$\begin{aligned} G_1(\xi_1, \xi_1, p) &= -\frac{1}{2 \left( 1 + \mu \frac{P}{|Imp|} \right) r^3} \times \\ &\times \left\{ \frac{\operatorname{sh} r \xi_1 \operatorname{sh} (1 - \xi_1)}{\operatorname{sh} r} - \frac{\sin r \xi_1 \sin r (1 - \xi_1)}{\sin r} \right\}. \end{aligned} \quad (19.11)$$

В частности, когда удар происходит в среднем сечении,

$$G_1(\xi_1, \xi_1, p) = \frac{\operatorname{th} \frac{r}{2} - \operatorname{th} \frac{r}{2}}{4r^3 \left( 1 + \mu \frac{P}{Imp} \right)}. \quad (19.12)$$

Полюсы функции (19.12) являются корнями знаменателя, в частности для  $\xi = \frac{1}{2}$  имеем уравнение

$$1 + \frac{Q}{g} p^2 G(\xi_1, \xi_1, p) = 1 + \frac{\alpha r}{4} \left( \operatorname{th} \frac{r}{2} - \operatorname{tg} \frac{r}{2} \right) = 0. \quad (19.13)$$

Разыскивая из уравнения (19.13)  $r_2, \dots, r_n, \dots$ , получим, что  $p_{1n}, p_{2n}, \dots, p_{nn}, \dots$  равны

$$p_{1n} = \left( -\frac{\mu}{2} + i \right) k_n; \quad p_{2n} = \left( -\frac{\mu}{2} - i \right) k_n, \quad (19.14)$$

где  $k_n = \frac{r_n^2}{\delta} \left( 1 - \frac{\mu^2}{8} \right)$ .

Применяя вторую теорему разложения и проводя вычисления, аналогичные приведенным выше, получим, например, для прогиба в середине стержня значения

$$y \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t \right) = f_{cm} + \frac{2P}{\rho F l g} \sum e^{-\frac{\mu k n t}{2}} \frac{[(2k_n Z - P\mu) \sin k_n t - 2P \cos k_n t]}{k_n^2 \left[ 2 + \alpha + \frac{\alpha^2 r_n^2}{4} \operatorname{th} \frac{r_n}{2} \operatorname{tg} \frac{r_n}{2} \right]}, \quad (19.15)$$

где  $Z = \frac{1}{g} P v$ ;

$f_{cm}$  — статический прогиб балки в точке  $\xi = \frac{1}{2}$ .

Аналогично решается задача для других условий опирания. Для балки, лежащей на упругом основании, вместо уравнения (19.2) необходимо взять уравнение

$$\frac{\partial^5 y}{\partial \xi^4} + \delta^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial \xi^4} + c y = \frac{l^4}{EJ} f(\xi, t), \quad (19.16)$$

где  $c = \frac{k l^4}{EJ}$ ;  $k$  — коэффициент упругости основания.

Уравнение (19.4) принимает вид

$$\left( 1 + \mu \frac{p}{|I m p|} \right) \frac{d^4 Y}{d \xi^4} + (\delta^2 p^2 + c) Y = 0, \quad (19.17)$$

при этом  $r^4 = -\frac{\delta^2 p^2 + c}{1 + \mu \frac{p}{|I m p|}}$ .

Дальнейшие расчеты проводятся аналогично изложенному выше. Если концы стержня свободны, то необходимо учесть условия статического равновесия.

На этом примере останавливаться не будем, а перейдем к более сложным случаям плиты, лежащей на упругом основании.

## Удар по прямоугольной пластинке, лежащей на упругом основании

Рассмотрим вопрос об изгибе и колебании прямоугольной пластинки (тонкой плиты), лежащей на упругом основании и подверженной удару тяжелого тела весом  $P$ , имеющего в начальный момент заданную скорость  $v$ .

Задачу решаем при обычных предположениях, т. е. что после удара падающее тело остается в соприкосновении с пластинкой по крайней мере в течение полупериода основного тона для колеблющейся пластинки.

1. Пластинка ограничена контуром  $x = 0$ ;  $x = a$ ;  $y = 0$ ;  $y = b$ ; края пластинки предполагаются опертыми; пластинка подвергается удару сосредоточенного груза в точке  $x = x_1$ ,  $y = y_1$ .

Перемещение  $w(x, y, t)$  должно удовлетворять в безразмерных координатах  $\xi, \eta$  дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \frac{ka^4}{D} w + \frac{qa^4}{gD} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (19.18)$$

для всех точек пластинки, за исключением точки  $\xi = \xi_1$ ,  $\eta = \eta_1$ , где имеется особенность ввиду приложения в ней сосредоточенного груза.

Здесь

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)};$$

$E$  — модуль упругости материала пластинки;

$h$  — толщина пластинки;

$\sigma$  — коэффициент Пуассона;

$k$  — сопротивление грунта оседанию, когда оседание равно единице, отнесенное к единице поверхности;

$q$  — вес пластинки, отнесенный к единице поверхности;

$Q = qab$  — вес всей пластинки;

$P$  — вес груза.

Решение уравнения (19.18) необходимо найти при следующих условиях:

а) для опертой пластинки

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{для } x = 0 \text{ и } x = a;$$

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{для } y = 0 \text{ и } y = b;$$

б) для любого положительного  $t$  давление на пластинку

$$F = P - \frac{P}{g} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

В начальный момент  $t = 0$ ,  $\omega = 0$  и пластинка находится под действием импульса, приложенного в точке  $\xi_1, \eta_1$ , величина которого  $Z$ .

При применении символического метода уравнение (19.18) принимает вид

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial \eta^4} + \frac{k a^4}{D} \omega + \frac{q a^4}{q D} p^2 \omega = 0 \quad (19.19)$$

для всех точек, за исключением точки  $\xi_1, \eta_1$ , в которой имеется особенность ввиду приложения сосредоточенной нагрузки, выраженной в символическом виде

$$F = P - \frac{P}{g} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + Z p. \quad (19.20)$$

Функция Грина уравнения (19.19) при условиях (а) будет

$$K(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, p) = \frac{4 a^2 \mu}{\pi^4 D} G(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, p), \quad (19.21)$$

где

$$G(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin m \pi \xi_1 \sin n \pi \eta_1 \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta}{(m^2 + \mu^2 n^2)^2 + \gamma^2 + \beta^2};$$

$$\gamma^2 = \frac{k a^4}{\pi^4 D}; \quad \beta = \frac{p}{v}; \quad v^2 = \frac{\pi^4 D g}{a^2 \mu Q}; \quad \mu = \frac{a}{b}.$$

От нагрузки  $F$  (19.20) получим в любой точке значение

$$K(\xi, \eta, p) = \left[ P + Z p - \frac{P}{g} p^2 K(\xi_1, \eta_1, p) \right] K(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, p). \quad (19.22)$$

Полагая в этом выражении  $\xi = \xi_1, \eta = \eta_1$ , найдем  $K(\xi_1, \eta_1, p)$ , а следовательно, после подстановки этого значения  $K(\xi_1, \eta_1, p)$  в правую часть (19.22) найдем

$$K(\xi, \eta, p) = \frac{4 a^2 \mu}{\pi^4 D} \cdot \frac{(P + Z p) G(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, p)}{1 + \frac{4 a^2 \mu P}{\pi^4 g D} p^2 G(\xi_1, \eta_1, \xi_1, \eta_1, p)}. \quad (19.23)$$

Полюсы функции  $K(\xi, \eta, p)$

$$p_k = \pm i r_k \quad (\beta = \pm i \lambda_k)$$

являются корнями уравнения

$$\lambda^2 G(\xi_1, \eta_1, \xi_1, \eta_1, \lambda) = \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 m \pi \xi_1 \sin^2 n \pi \eta_1}{(m^2 + \mu^2 n^2)^2 + \gamma^2 - \lambda^2} = -\frac{Q}{4P}. \quad (19.24)$$

С помощью теории вычетов получим

$$\omega(\xi, \eta, t) = \frac{4a^2\mu P}{\pi^4 D} G(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, 0) - \frac{4a^2\mu}{\pi^4 D} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, \lambda_i)}{1 + \frac{4P}{Q} f(\lambda_i)} [P \cos \nu \lambda_i t - Z \nu \lambda_i \sin \nu \lambda_i t]; \quad (19.25)$$

здесь первый член соответствует статическому прогибу, а

$$f(\lambda_i) = \lambda_i^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 m \pi \xi_1 \sin^2 n \pi \eta_1}{[(m^2 + \mu^2 n^2)^2 + \gamma^2 - \lambda_i^2]^2}. \quad (19.26)$$

Прогиб под грузом ( $\xi = \xi_1, \eta = \eta_1$ ) может быть записан в виде

$$\omega(\xi_1, \eta_1, t) = \omega_{cm} - \frac{4a^2\mu P}{\pi^4 D} \times \sum_{i=1}^{\infty} H_i \left( \cos r_i t - \lambda_i \sqrt{\frac{v^2}{g} \cdot \frac{4P}{Q} \cdot \frac{G_0}{\omega_{cm}}} \sin r_i t \right), \quad (19.27)$$

$$\text{или } \omega(\xi_1, \eta_1, t) = \omega_{cm} + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(r_i t - \xi_i),$$

где для  $Z$  взято значение  $\frac{P}{g} v$  и введены обозначения

$$G_0 = G(\xi_1, \eta_1, \xi_1, \eta_1, 0); \quad \omega_{cm} = \frac{4a^2\mu P}{\pi^4 D} G_0;$$

$$H_i = \frac{Q}{4P} \frac{1}{\lambda_i^2 \left[ 1 + \frac{4P}{Q} f(\lambda_i) \right]};$$

$$A_i = \frac{H_i}{G_0} \sqrt{\omega_{cm}^2 + \frac{v^2}{g} \cdot \frac{4P}{Q} \lambda_i^2 C_0 \omega_{cm}};$$

$$\text{tg } \varepsilon_i = \frac{1}{\lambda_i} \sqrt{\frac{g}{v^2} \cdot \frac{Q}{4P} \cdot \frac{\omega_{cm}}{G_0}}.$$

В случае внезапного приложения груза без начальной скорости ( $v = 0$  и  $Z = 0$ ) получим из выражения (19.25) для прогиба в точке  $\xi = \xi_1, \eta = \eta_1$  выражение

$$\omega(\xi_1, \eta_1, t) = \frac{4a^2\mu P}{\pi^4 D} \left\{ G(\xi_1, \eta_1, \xi_1, \eta_1, 0) - \frac{Q}{4P} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos \nu \lambda_i t}{\lambda_i^2 \left| 1 + \frac{4P}{Q} f(\lambda_i) \right|} \right\}. \quad (10.27')$$

2. При определении корней уравнения (19.24) удобнее вместо двойных рядов, входящих в это уравнение, иметь простые ряды, т. е.

$$G(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, \beta) = \sum_m \varphi_m(\eta, \beta) \sin m\pi\xi.$$

Функция влияния в таком виде может быть найдена или по методу, применяемому акад. Б. Г. Галеркиным, с помощью составления условий сопряжения или без составления условий сопряжения (9.5).

В зависимости от знака  $\gamma^2 - \lambda^2$ ,  $\varphi(\eta, \beta)$  будет иметь различный вид. В частности, если груз  $P$  приложен по середине пластинки, то полюсы  $\lambda_i$  будут служить корнями следующих уравнений:

для  $\lambda^2 < \gamma^2$  ( $\lambda^2 = \gamma^2 - \delta^2$ )

$$\psi_1(\delta) \equiv \delta \sum_{m \text{ 1, 3, 5, ...}} \frac{\beta_m \operatorname{sh} \frac{\pi}{\mu} \bar{\alpha}_m - \alpha_m \sin \frac{\pi}{\mu} \beta_m}{(\alpha_m^2 + \beta_m^2) \left( \operatorname{ch} \frac{\pi}{\mu} \alpha_m + \cos \frac{\pi}{\mu} \beta_m \right)} = \frac{Q\mu}{\pi P \left( \frac{\gamma^2}{\delta^2} - 1 \right)}, \quad (19.28)$$

$$\text{где } \alpha_m = \sqrt{\frac{m^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{m^4 + \delta^2}},$$

$$\beta_m = \sqrt{-\frac{m^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{m^4 + \delta^2}};$$

для  $\lambda^2 > \gamma^2$  ( $\lambda^2 = \gamma^2 + \delta^2$ )

$$\psi_2(\delta) \equiv \delta \sum_{m \text{ 1, 3, 5, ...}} \left[ \frac{\operatorname{th} \frac{\pi}{2\mu} \sqrt{m^2 - \delta}}{\sqrt{m^2 - \delta}} - \frac{\operatorname{th} \frac{\pi}{2\mu} \sqrt{m^2 + \delta}}{\sqrt{m^2 + \delta}} \right] =$$

$$= \frac{2Q\mu}{\pi P \left( \frac{\gamma^2}{\delta^2} + 1 \right)}.$$

Двойной ряд для  $f(\lambda_i)$  в виде простого ряда будет

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda_i) &= \frac{\pi}{8\mu} \lambda_i^3 \left[ \frac{\psi_1(\delta_i)}{\delta_i^2} \right]_{\lambda_i} \quad \text{для } \lambda_i^2 < \gamma^2; \\ f(\lambda_i) &= \frac{\pi}{16\mu} \lambda_i^3 \left[ \frac{\psi_2(\delta_i)}{\delta_i^2} \right]_{\lambda_i} \quad \text{для } \lambda_i^2 > \gamma^2. \end{aligned} \right\} \quad (19.29)$$



Значение  $\psi_1(\delta)$  для квадратной пластинки ( $\mu = 1$ ) приведены ниже:

$\delta$	$\psi_1(\delta)$	$\delta$	$\psi_1(\delta)$
1	0,3393	6	2,3728
2	0,7980	7	2,7492
3	1,2327	8	3,1361
4	1,6085	9	3,5264
5	1,9830	10	3,9189

Значения  $\psi_2(\delta)$  могут быть вычислены для квадратной пластинки с помощью таблицы С. Гершгорина [18].

Пример. Рассмотрим квадратную пластинку на упругом основании, для которой

$$\gamma^2 = \frac{ka^4}{\pi^4 D} = 100.$$

Для случая пластинки, к которой груз приложен внезапно без начальной скорости, согласно формуле (19.27) можно определить  $\omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t\right)$  для различных отношений  $\frac{Q}{P}$ .

В частности, для  $\frac{Q}{P} = 10$  получается следующее выражение:

$$\omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t\right) \frac{a^2 P}{\pi^4 D} = \{0,1231 - 0,1139 [\cos 7,392vt + 0,0547 \cos 11,77vt + 0,0173 \cos 18,59vt + 0,0086 \cos 24,29vt + \dots]\}. \quad (19.30)$$

Проведя вычисления для разных значений  $\frac{Q}{P}$  и  $t$ , можно определить коэффициент динамичности, т. е. отношение максимального прогиба  $\omega_d$  к статическому  $\omega_{cm}$ :

$\frac{Q}{P}$	$\frac{\omega_d}{\omega_{cm}}$	$\frac{Q}{P}$	$\frac{\omega_d}{\omega_{cm}}$
$\frac{1}{2}$	2,000	10	1,915
1	1,999	20	1,86
3	1,994	$\infty$	1,57

Здесь последнее отношение ( $\infty$ ) соответствует случаю мгновенного приложения к пластинке силы.

Как видно, для взятого примера даже для сравнительно больших  $\frac{Q}{P}$  значение коэффициента динамичности мало отличается от двойного.

Рассмотрим теперь для той же пластинки случай, когда скорость  $v \neq 0$ , и сравним точные результаты, вычисленные по формуле (19.27), с результатами, которые можно получить по приближенной формуле

$$\omega'_d = \omega_{cm} + \sqrt{\omega_{cm}^2 + \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{\omega_{cm}}{1 + k \frac{Q}{P}}}, \quad (19.31)$$

где коэффициент  $k$ , определенный по методу Рейля, получается равным  $\frac{1}{4}$ ,

Вычисления проделаны для некоторых значений  $\frac{Q}{P}$  в предположении, что скорость  $v$  такова, что  $w_{cm}$  мало по сравнению с

$$\lambda_i \sqrt{\frac{v^2}{g} \cdot \frac{4P}{Q}} G_0 \left( \xi_1 = \frac{1}{2}, \eta_1 = \frac{1}{2} \right).$$

Т а б л и ц а 19.1  
Значения  $w_\delta$  и  $w'_\delta$

$\frac{Q}{P}$	$w_\delta$	$w'_\delta$
$\frac{1}{4}$	1,99A	1,94A
$\frac{1}{2}$	1,41A	1,33A
1	0,98A	0,89A
3	0,54A	0,43A
10	0,24A	—
20	0,17A	—

В частности, для  $\frac{Q}{P} = 10$  согласно уравнению (19.27) получим

$$w \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t \right) = A(0,2398 \sin 7,392vt + 0,02088 \sin 11,77vt + 0,01043 \sin 18,59vt + 0,0038 \sin 24,29vt + \dots). \quad (19.32)$$

Вычисляя значение максимального прогиба

$$w_{\max} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t_1 \right) = w_\delta$$

и определяя  $w'_\delta$  по формуле (19.31), получим для некоторых  $\frac{Q}{P}$  значения их

$$\left( A = \sqrt{\frac{v^2}{g} \cdot \frac{w_{cm}}{P}} Q \right) \text{ приведены в табл. 19.1.}$$

Как видно из табл. 19.1, с возрастанием отношения  $\frac{Q}{P}$  для взятого примера расхождение между точным значением  $w_\delta$  и приближенным  $w'_\delta$  возрастает.

### Удар по круглой пластинке, лежащей на упругом основании

В предыдущем разделе дано решение задачи об ударе тяжелого тела по прямоугольной пластинке, лежащей на упругом основании.

В настоящем разделе рассматривается вопрос об ударе тяжелого тела весом  $P$  по круглой пластинке, лежащей на упругом основании.

Упругость основания учитывается согласно общепринятой гипотезе, что прогиб для каждой точки пластинки пропорционален давлению упругого основания (гипотеза Винклера).

В начальный момент  $t = 0$  (момент удара) тело имеет заданную скорость  $v$ . Сосредоточенная ударная нагрузка прикладывается в центре пластинки, ограниченной контуром.

1. Задачу решаем при обычных предположениях, т. е. предполагая, что после удара падающее тело остается в соприкосновении

с пластинкой, по крайней мере, в течение полупериода основного тона для колеблющейся пластинки.

Решение будем искать для случая центральной симметрии, т. е. в предположении, что узловыми линиями могут быть лишь концентрические окружности  $r = \text{const}$ .

Перемещение  $\omega(r, t)$  для этого случая должно удовлетворять дифференциальному уравнению изогнутой поверхности пластинки

$$\Delta \Delta \omega + \frac{k}{D} \omega + \frac{\gamma h}{\partial D} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0 \quad (19.33)$$

для всех точек пластинки, за исключением начала координат, где имеется особенность, ввиду приложения сосредоточенного груза.

Здесь и в дальнейшем обозначено:

$\Delta = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}$  — оператор Лапласа;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$  — жесткость пластинки;

$E$  — модуль упругости материала пластинки;

$h$  — толщина пластинки;

$\sigma$  — коэффициент Пуассона;

$k$  — сопротивление грунта оседанию, когда оседание, отнесенное к единице поверхности, равно единице;

$\gamma h$  — вес пластинки на единицу поверхности;

$Q = \gamma h a^2$  — вес пластинки;

$P$  — вес падающего груза.

Решение задачи необходимо найти при определенных граничных и начальных условиях.

Граничные условия могут быть следующие:

для заделанной по контуру пластинки

$$\omega = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0 \quad \text{для } r = a; \quad (I)$$

для пластинки со свободным краем

$$\Delta \omega + (\sigma - 1) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial \Delta \omega}{\partial r} = 0 \quad \text{для } r = a; \quad (II)$$

для опертой пластинки

$$\omega = 0; \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0 \quad \text{для } r = a. \quad (III)$$

За начальные условия должны быть приняты следующие:  
в начальный момент  $t = 0$

$$\omega(r, 0) = 0 \quad (IV)$$

и, кроме того, для всех точек пластинки, за исключением  $r = 0$ , должно быть

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \quad \text{для } t = 0 \quad (r \neq 0). \quad (IV')$$

В точке  $r = 0$  пластинка в начальный момент находится под действием импульса силы, величина которого  $Z$ .

Для любого положительного  $t$  давление на пластинку в этой точке

$$F = P - \frac{P}{g} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ для } r = 0. \quad (19.34)$$

2. Для разыскания решения применяем по-прежнему операционное исчисление. Если ввести безразмерную координату

$$\rho = \frac{r}{a},$$

то при указанных начальных условиях (IV) и (IV') для всех точек пластинки, за исключением  $r \neq 0$ , уравнение (19.34) принимает вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) + \left( L^4 + \frac{P^2}{v^2} \right) w = 0, \quad (19.35)$$

где  $L^4 = \frac{a^4 k}{D}$ ;  $v^2 = \frac{gD}{\gamma h a^4}$ .

В точке  $r = 0$  по-прежнему имеется особенность, ввиду приложения сосредоточенной нагрузки, которая в нашем случае, при наличии для  $t = 0$  импульса силы  $Z$ , запишется так:

$$\frac{a^4}{D} F = \frac{a^4}{D} \left( P - \frac{P}{g} p^2 w + Zp \right). \quad (19.36)$$

Обозначая через  $\frac{a^4}{D} G_1(r, 0, p)$  функцию влияния уравнения (19.35) для какого-либо из выбранных граничных условий, получим в любой точке от нагрузки  $F$  согласно уравнению (19.36)

$$G(\rho, p) = \frac{a^4}{D} \left[ P + Zp \frac{P}{g} p^2 G_1(0, \rho) \right] G_1(\rho, 0, p). \quad (19.37)$$

Полагая здесь  $\rho = 0$ , найдем

$$G(0, p) = \frac{a^4}{D} \frac{(P + Zp) G_1(0, 0, p)}{1 + \frac{a^4 P}{gD} p^2 G_1(0, 0, p)}.$$

После подстановки этого значения  $G(0, p)$  в правую часть уравнения (19.37) найдем

$$G(\rho, p) = \frac{a^4}{D} \cdot \frac{(P + Zp) G_1(\rho, 0, p)}{1 + \frac{P}{g} \cdot \frac{a^4}{D} p^2 G_1(0, 0, p)}. \quad (19.38)$$

Полюсы мероморфной функции  $G(\rho, p)$ , которые, как следует ожидать, будут иметь чисто мнимые значения  $p_k = \pm i v \lambda_k$ , являются корнями трансцендентного уравнения

$$1 + \frac{P a^4}{gD} p^2 G_1(0, 0, p) = 0$$

или

$$1 - \frac{P\pi a^2}{Q} \mu^2 G(0, 0, \lambda) = 0; \quad (19.39)$$

при этом  $G_1(0, 0 \pm i\lambda\nu) = G(0, 0, \lambda)$ .

На основании второй теоремы разложения получим из формулы (19.38) следующее выражение для прогиба:

$$\omega(\rho, t) = \omega_{cm} + \frac{a^4}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(P + Z\rho) G_1(\rho, 0, p_k) e^{p_k t}}{\left[ p_k + \frac{P}{g} \cdot \frac{a^4}{D} p_k^3 G_1(0, 0, p_k) \right]_{p_k}},$$

где статический прогиб пластинки под действием силы  $P$

$$\omega_{cm} = \frac{Pa^4}{D} G(\rho, 0, L).$$

После замены  $p_k$  через  $\pm i\lambda_k\nu$  получим

$$\omega(\rho, t) = \omega_{cm} - \frac{a^4}{D} \sum_i \frac{G(\rho, 0, \lambda_i) [P \cos \nu\lambda_i t - Z\nu\lambda_i \sin \nu\lambda_i t]}{-\frac{1}{2} \left[ \lambda_i - \frac{P\pi a^2}{Q} \lambda_i^3 G(0, 0, \lambda_i) \right]_{\lambda_i}}. \quad (19.40)$$

В частности, прогиб в центре пластинки будет

$$\omega(0, t) = \omega_{cm} - \frac{a^2}{D} \cdot \frac{Q}{\pi P} \sum_i \frac{P \cos \nu\lambda_i t - Z\nu\lambda_i \sin \nu\lambda_i t}{-\frac{1}{2} \lambda_i^2 \left[ \lambda_i - \frac{P\pi a^2}{Q} \lambda_i^3 G(0, 0, \lambda_i) \right]_{\lambda_i}}. \quad (19.41)$$

3. Решение уравнения (19.35) необходимо записать в различной форме, в зависимости от знака величины  $L^4 - \lambda^2$ .

Когда  $L^4 > \lambda^2$ , имеем

$$\omega(\rho, \lambda) = A_1 \operatorname{Re} J_0(u\rho\sqrt{i}) + A_2 \operatorname{Im} J_0(u\rho\sqrt{i}) + A_3 \operatorname{Re} H_0^{(1)}(u\rho\sqrt{i}) + A_4 \operatorname{Im} H_0^{(1)}(u\rho\sqrt{i}), \quad (19.42)$$

где через  $\operatorname{Re}$  обозначена действительная часть,  $\operatorname{Im}$  — множитель при  $i$  соответствующей функции;

$$u = \sqrt[4]{L^4 - \lambda^2}.$$

Вводя для функции Бесселя  $J_0(u\rho\sqrt{\pm i})$  и Ганкеля  $H_0^{(1)}(u\rho\sqrt{\pm i})$  нулевого порядка первого рода обозначения

$$J_0(u\rho\sqrt{\pm i}) = \operatorname{ber}(u\rho) \pm i \operatorname{bei}(u\rho);$$

$$H_0^{(1)}(u\rho\sqrt{\pm i}) = \operatorname{heg}(u\rho) \pm i \operatorname{hei}(u\rho),$$

решение уравнения (19.35) запишем в виде

$$\omega(\rho, \lambda) = A_1 \operatorname{ber}(u\rho) + A_2 \operatorname{bei}(u\rho) + A_3 \operatorname{heg}(u\rho) + A_4 \operatorname{hei}(u\rho). \quad (19.42')$$

Когда  $\lambda^2 > L^4$  решение уравнения (19.35) будет

$$\omega(\rho, \lambda) = A_1 J_0(u'\rho) + A_2 I_0(u'\rho) + A_3 N_0(u'\rho) + A_4 K_0(u'\rho), \quad (19.43)$$

где  $u' = \sqrt[4]{\lambda^2 - L^4}$ .

В выражении (19.43)  $I_0(u'\rho)$  — функция Бесселя чисто мнимого аргумента, т. е.

$$I_n(u'\rho) = i^{-n} J_n(iu'\rho);$$

$N_0(u'\rho)$  — функция Неймана,

$K_n(u'\rho)$  — функция Макдональда, связанная с функцией Ганкеля  $H_n^{(1)}$  соотношением

$$K_n(u'\rho) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2} \pi n i} H_n^{(1)}(iu'\rho).$$

В точке приложения единичной нагрузки в центре пластинки должна быть особенность вида

$$\frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r.$$

Так как

$$\begin{aligned} \operatorname{ber}(u\rho) = & \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}u\rho\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}u\rho\right)^8}{(4!)^2} - \dots \right] + \\ & + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\left(\frac{1}{2}u\rho\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}u\rho\right)^6}{(3!)^2} + \dots \right] \ln \frac{\gamma u\rho}{2} - \frac{2}{\pi} R_1, \quad (19.44) \end{aligned}$$

то  $\operatorname{ber}(u\rho) \rightarrow \frac{1}{2\pi} (u\rho)^2 \ln r$ , когда  $r \rightarrow 0$ .

Функция  $\operatorname{bei}(u'\rho)$  имеет в начале координат особенность  $\frac{2}{\pi} \ln r$ .

Поэтому, чтобы для выражения (19.42) получить в начале координат особенность (19.44), необходимо положить

$$A_3 = \frac{a^3}{4u^2 D}; \quad A_4 = 0.$$

Следовательно,

$$\omega(\rho, \lambda) = A_1 \operatorname{ber}(u\rho) + A_2 \operatorname{bei}(u\rho) + \frac{a^3}{4u^2 D} \operatorname{her}(u\rho). \quad (19.45)$$

Для случая  $\lambda^2 > L^4$  для получения особенности (19.44) необходимо взять решение (19.43) в виде

$$\begin{aligned} \omega(\rho, \lambda) = & A_1 J_0(u'\rho) + A_2 I_0(u'\rho) - \\ & - \frac{A_3}{2} \left[ N_0(u'\rho) + \frac{2}{\pi} K_0(u'\rho) \right], \quad (19.46) \end{aligned}$$

так как

$$N_0(u' \rho) + \frac{2}{\pi} K_0(u' \rho) = \frac{2}{\pi} J_0(u' \rho) \ln \frac{\gamma u' \rho}{2} + \\ + \frac{8}{\pi} \left[ \frac{1}{2} J_0(u' \rho) - \frac{1}{4} J_4(u' \rho) + \dots \right] - \frac{2}{\pi} J_0(u' \rho) \ln \frac{\gamma u' \rho}{2} + \\ + \frac{8}{\pi} \left[ \frac{1}{2} I_2(u' \rho) + \frac{1}{4} I_4(u' \rho) + \dots \right] \rightarrow - \frac{(u' \rho)^2}{\pi} \ln r,$$

когда  $r \rightarrow 0$ .

Определяя произвольные постоянные, входящие в формулы (19.45) и (19.46), в зависимости от граничных условий получим функцию влияния.

4. Рассмотрим случай закрепленного и свободного краев.

А. Для закрепленного края, подчиняя формулу (19.45) условиям (1), получим

$$A_1 \operatorname{ber}(u) + A_2 \operatorname{bei}(u) = -A_3 \operatorname{her}(u); \\ A_1 \operatorname{ber}'(u) + A_2 \operatorname{bei}'(u) = -A_3 \operatorname{her}'(u).$$

Определяя отсюда  $A_1$  и  $A_2$  после подстановки их значений в формулу (19.45) вычислим функцию влияния

$$G(\rho, 0, \lambda) = \frac{1}{4a^2 u^2} K(\rho, 0, u), \quad (19.47)$$

где

$$K(\rho, 0, u) = \frac{\operatorname{her}(u\rho) - [\operatorname{ber}(u) \operatorname{bei}'(u) - \operatorname{ber}'(u) \operatorname{bei}(u)] \operatorname{ber}(u\rho) + [\operatorname{ber}(u) \operatorname{her}'(u) - \operatorname{ber}'(u) \operatorname{her}(u)] \operatorname{bei}(u\rho)}{\operatorname{ber}(u) \operatorname{bei}'(u) - \operatorname{ber}'(u) \operatorname{bei}(u)}.$$

Значение  $K(0, 0, u)$  будет

$$K(0, 0, u) = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{bei}'(u) \operatorname{her}(u) - \operatorname{bei}(u) \operatorname{her}'(u)}{\operatorname{ber}(u) \operatorname{bei}'(u) - \operatorname{ber}'(u) \operatorname{bei}(u)}. \quad (19.48)$$

Аналогичным образом для случая  $\lambda^2 > L^4$  из формулы (19.46) с помощью дифференциальных соотношений

$$J_0'(x) = -J_1(x); \quad I_0'(x) = I_1(x); \quad N_0'(x) = -N_1(x); \quad K_0'(x) = -K_1(x)$$

получим

$$A_1 J_0(u') + A_2 J_0(u') = \frac{A_3}{2} \left[ N_0(u') + \frac{2}{\pi} K_0(u') \right]; \\ A_1 J_1(u') - A_2 J_1(u') = - \frac{A_3}{2} \left[ N_1(u') + \frac{2}{\pi} K_1(u') \right].$$

После подстановки  $A_1, A_2, A_3 = \frac{a^2}{4(u')^2 D}$  в формулу (19.46), принимая во внимание известные соотношения

$$\left. \begin{aligned} N_0(u') J_1(u') - N_1(u') J_0(u') &= \frac{2}{\pi u'}; \\ I_0(u') K_1(u') + I_1(u') K_0(u') &= \frac{1}{u'}, \end{aligned} \right\} \quad (19.49)$$

получим значение

$$G(\rho, 0, \lambda) = \frac{a^2}{4(u')^2 D} K(\rho, 0, u'), \quad (19.47')$$

где

$$\begin{aligned} K(\rho, 0, u') &= -\frac{1}{2} \left[ N_0(u') + \frac{2}{\pi} K_0(u'\rho) \right] + \\ &+ \frac{\left[ \frac{2}{\pi u'} + I_1(u') N_0(u') + I_0(u') N_1(u') \right] J_0(u'\rho)}{2 [J_0(u') I_1(u') + J_1(u') J_0(u')]} + \\ &+ \frac{\frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{u'} + K_0(u') J_1(u') - K_1(u') J_0(u') \right] I_1(u'\rho)}{2 [J_0(u') I_1(u') + J_1(u') I_0(u')]} . \end{aligned}$$

В частности, для  $\rho = 0$  получим

$$\begin{aligned} K(0, 0, u') &= \\ &= \frac{\frac{4}{\pi u'} + I_1(u') N_0(u') + I_0(u') N_1(u') + \frac{2}{\pi} [K_0(u') J_1(u') - K_1(u') J_0(u')]}{2 [J_0(u') I_1(u') + J_1(u') I_0(u')]} . \end{aligned}$$

Если введем вместо функции  $G(0, 0, \lambda)$  функцию  $K(0, 0, u)$  (19.47), то уравнение (19.39) для определения значения корней  $\lambda_i$  запишем в виде

$$1 - \frac{P\pi}{4Q} \cdot \frac{\lambda^2}{u^2} K(0, 0, u) = 0. \quad (19.39')$$

Значение прогиба  $w(\rho, t)$  (19.40) можно записать

$$\begin{aligned} w(\rho, t) &= \frac{Pa^2 K(0, 0, L)}{4L^2 D} - \\ &- \frac{a^2}{4D} \sum_k \frac{K(\rho, 0, u_k)}{D(u_k)} [P \cos \nu \lambda_k t - Z \nu \lambda_k \sin \nu \lambda_k], \end{aligned} \quad (19.50)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D(u) &= u^2 + \frac{\lambda_1^2}{2u^2} - \frac{\pi P \lambda_1^4}{16Q u^3} K'_u(0, 0, u) \text{ для } L^4 > \lambda_1^2; \\ D(u') &= (u'_k)^2 - \frac{\lambda_k^2}{2(u'_k)^2} + \frac{\pi P \lambda_k^4}{16Q (u'_k)^3} K'_u(0, 0, u') \\ &\text{для } \lambda_k^2 > L^4. \end{aligned} \right\} \quad (19.51)$$



В частности, прогиб в центре плиты

$$\omega(0, t) = \frac{Pa^2}{4L^2D} K(0, 0, L) - \\ - \frac{a^2}{4D} \cdot \frac{4Q}{\pi P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k^2}{\lambda_k^2 D(u_k)} [P \cos v\lambda_k t - Zv\lambda_k \sin v\lambda_k t]. \quad (19.50')$$

Прогиб под грузом может быть записан также в виде

$$\omega(0, t) = \omega_{cm} + \sum_k A_k \sin(v\lambda_k t - \epsilon_k), \quad (19.52)$$

где для  $Z$  взято значение  $\frac{P}{g} v$  и введены обозначения

$$A_k = \frac{H_k}{K_0} \sqrt{\omega_{cm}^2 + \frac{v^2}{g} \cdot \frac{\pi P}{4Q} \lambda_k^2 K_0 \omega_{cm}}; \\ \operatorname{tg} \epsilon_k = \frac{1}{\lambda_k} \sqrt{\frac{g}{v^2} \cdot \frac{4Q}{\pi P} \cdot \frac{\omega_{cm}}{K_0}};$$

причем

$$K_0 = \frac{1}{L^2} K(0, 0, L); \quad H_k = \frac{4Q}{\pi P} \cdot \frac{u_k^2}{\lambda_k^2 D(u_k)}; \quad \omega_{cm} = \frac{Pa^2}{4D} K_0.$$

Производные  $K'(0, 0, u)$ , входящие в выражение для  $D(u)$ , вычисляются из формул (19.48) и (19.48').

Значения производных можно упростить, если воспользоваться формулами дифференцирования и функциональными соотношениями для функций Бесселя.

Из соотношений

$$\frac{d^2 J_0(x)}{dx^2} = -J_0(x) + \frac{1}{x} J_1(x); \\ J_0(x) H_1'(x) - J_1(x) H_0'(x) = \frac{2}{\pi i x};$$

беря для аргумента  $x$  значение  $u\sqrt{i}$ , можно получить следующие зависимости (штрихами обозначены производные по  $u$ ):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ber}''(u) &= \operatorname{bei}(u) - \frac{1}{u} \operatorname{ber}'(u); \\ \operatorname{bei}''(u) &= -\operatorname{ber}(u) - \frac{1}{u} \operatorname{bei}'(u); \\ \operatorname{her}''(u) &= \operatorname{hei}(u) - \frac{1}{u} \operatorname{her}'(u); \\ \operatorname{hei}''(u) &= -\operatorname{her}(u) - \frac{1}{u} \operatorname{hei}'(u); \end{aligned} \right\} \quad (19.53)$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{ber}(u) \text{her}'(u) + \text{bei}'(u) \text{hei}(u) - \\ & - \text{ber}'(u) \text{her}(u) - \text{bei}(u) \text{hei}'(u) = 0; \\ & \text{ber}(u) \text{hei}'(u) + \text{bei}(u) \text{her}'(u) - \\ & - \text{ber}'(u) \text{hei}(u) - \text{bei}'(u) \text{her}(u) = \frac{2}{\pi u}. \end{aligned} \right\} \quad (19.53)$$

С помощью этих соотношений получим для

$$K'(0, 0, u) = \frac{2}{\pi u} \cdot \frac{\text{bei}^2(u)}{[\text{ber}(u) \text{bei}(u) - \text{ber}'(u) \text{bei}(u)]^2}. \quad (19.54)$$

Аналогично, принимая во внимание соотношения (19.49), а также зависимости

$$J_1'(u) = J_0(u) - \frac{1}{u} J_1(u); \quad I_1'(u) = I_0(u) - \frac{1}{u} I_1(u);$$

$$N_1'(u) = N_0(u) - \frac{1}{u} N_1(u); \quad K_0'(u) = -K_0(u) - \frac{1}{u} K_1(u),$$

получим для  $L^4 < \lambda^2$

$$K'(0, 0, u) = \frac{2}{\pi u} \frac{[I_0(u) - J_0(u)]^2}{[J_0(u) I_1(u) + I_0(u) J_1(u)]^2}. \quad (19.54')$$

Для больших значений  $u$  удобно перейти к асимптотическим выражениям в приведенных выше формулах для подсчета значений корней (19.39') и прогибов (19.52).

Для этого следует воспользоваться следующими асимптотическими значениями для функций  $\text{ber}$ ,  $\text{bei}$ ,  $\text{her}$ ,  $\text{hei}$ ,  $J_p$ ,  $N_p$ ,  $I_p$ ,  $H_p^{(1)}$ :

$$\text{ber}(u) = \frac{e^{\alpha(u)}}{\sqrt{2\pi u}} \cos \beta(u); \quad \text{bei}(u) = -\frac{e^{\alpha(u)}}{\sqrt{2\pi u}} \sin \beta(u);$$

$$\text{her}(u) = -\sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{\alpha(-u)} \sin \beta(-u);$$

$$\text{hei}(u) = -\sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{\alpha(-u)} \cos \beta(-u);$$

$$J_p(u) = \left[ P_p(u) \cos \left( u - \frac{2p+1}{4} \pi \right) - \right. \\ \left. - Q_p(u) \sin \left( u - \frac{2p+1}{4} \pi \right) \right] \sqrt{\frac{2}{\pi u}};$$

$$I_p(u) = \frac{e^4}{\sqrt{2\pi u}} S_p(-2u); \quad i^{p+1} H_p^{(1)}(iu) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{-u} S_p(2u);$$

$$N_p(u) = \left[ P_p(u) \sin \left( u - \frac{2p+1}{4} \pi \right) + \right. \\ \left. + Q_p(u) \cos \left( u - \frac{2p+1}{4} \pi \right) \right] \sqrt{\frac{2}{\pi u}},$$

где

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8u\sqrt{2}} - \frac{25}{384u^3\sqrt{2}} + \dots; \\ \beta(u) &= \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8u\sqrt{2}} - \frac{1}{16u^2} - \frac{25}{384u^3\sqrt{2}} + \dots; \\ P_p(u) &= 1 - \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!(8u)^2} + \dots; \\ Q_p(u) &= \frac{4p^2-1}{8u} - \frac{(4q^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)}{3!(8u)^3} + \dots; \\ S_p(u) &= 1 + \frac{4p^2-1}{1!4u} + \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!(4u)^2} + \dots\end{aligned}$$

С помощью этих выражений уравнение для определения значений  $\lambda$  (19.39') примет вид:  
для  $L^4 > \lambda^2$

$$\begin{aligned}1 - \frac{\pi P \lambda^2}{8 Q u^2} \left\{ 1 + 4e^{\alpha(-u)} - \alpha(u) \left[ \left( 2 - \frac{1}{2u^2} - \frac{\sqrt{2}}{4u^3} + \frac{1}{16u^4} + \dots \right) \times \right. \right. \\ \left. \times \sin \beta(u) \sin \beta(-u) + \left( \frac{\sqrt{2}}{4u^3} + \dots \right) \sin \beta(-u) \cos \beta(u) - \right. \\ \left. \left. - \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 + \frac{1}{8u^2} - \frac{\sqrt{2}}{4u^3} + \dots \right) \right] \right\} = 0; \quad (19.55)\end{aligned}$$

для  $L^4 < \lambda^2$

$$1 + \frac{\pi P \lambda^2}{8 Q u'^2} \cdot \frac{\cos u' + U_1 \sin \left( u' - \frac{\pi}{4} \right) + U_2 \cos \left( u' - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin u' + U_2 \sin \left( u' - \frac{\pi}{4} \right) - U_1 \cos \left( u' - \frac{\pi}{4} \right)} = 0, \quad (19.55')$$

где

$$\begin{aligned}U_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{9}{64(u')^2} + \frac{39}{256(u')^3} + \frac{300}{32768(u')^4} + \dots \right]; \\ U_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{4u'} + \frac{9}{64(u')^2} - \frac{300}{32768(u')^4} + \dots \right].\end{aligned}$$

Значение производных, входящих в выражение  $D(u)$  (19.51) будет:  
для  $L^4 > \lambda^2$

$$K'(0, 0, u) = 8e^{-2\alpha(u)} \left( 1 - \frac{1}{4u^2} - \frac{\sqrt{2}}{4u^3} - \frac{11}{32u^4} - \dots \right) \sin^2 \beta(u); \quad (19.56)$$

для  $L^4 < \lambda^2$

$$K'(0, 0, u') = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{4u'} + \frac{5}{32(u')^2} + \frac{21}{128(u')^3} + \frac{507}{2048(u')^4} + \dots}{\left[ \sin u' + U_2 \sin \left( u' - \frac{\pi}{4} \right) - U_1 \cos \left( u' - \frac{\pi}{4} \right) \right]^2}. \quad (19.56')$$

Б. Для пластинки со свободным краем  $r = a$  необходимо удовлетворить на контуре условиям (II):

$$\Delta \omega + (\sigma - 1) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial r} (\Delta \omega) = 0 \text{ для } r = a (\rho = 1).$$

Решение уравнения (19.35) имеет прежний вид (19.45) для  $\lambda^2 > L^4$  и (19.46) для  $L^4 < \lambda^2$ .

Для первого случая  $L^4 > \lambda^2$ , подчиняя формулу (19.45) условиям (II) и принимая во внимание соотношения

$$\begin{aligned} \Delta \operatorname{ber}(u\rho) &= u^2 \operatorname{bei}(u\rho); \quad \Delta \operatorname{bei}(u\rho) = -u^2 \operatorname{ber}(u\rho); \\ \Delta \operatorname{her}(u\rho) &= u^2 \operatorname{hei}(u\rho); \quad \Delta \operatorname{hei}(u\rho) = -u^2 \operatorname{her}(u\rho), \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} K(\rho, 0, u) &= \operatorname{her}(u\rho) + \frac{1}{\omega(u)} \left\{ \left[ \operatorname{hei}(u) \operatorname{ber}'(u) - \operatorname{hei}'(u) \operatorname{ber}(u) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1-\sigma}{u} (\operatorname{her}'(u) \operatorname{ber}'(u) + \operatorname{hei}'(u) \operatorname{bei}'(u)) \right] \operatorname{ber}(u\rho) - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \operatorname{bei}(u) \operatorname{hei}'(u) - \operatorname{hei}(u) \operatorname{bei}'(u) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1-\sigma}{u} (\operatorname{her}'(u) \operatorname{bei}'(u) - \operatorname{ber}'(u) \operatorname{hei}'(u)) \right] \operatorname{bei}(u\rho) \right\}, \quad (19.57) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega(u) &= \operatorname{bei}'(u) \operatorname{ber}(u) + \operatorname{bei}(u) \operatorname{ber}'(u) + \\ &\quad + \frac{1-\sigma}{u} [\operatorname{ber}'^2(u) + \operatorname{bei}'^2(u)]. \end{aligned}$$

В частности, для  $K(0, 0, u)$  получим

$$\begin{aligned} K(0, 0, u) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\omega(u)} \left\{ \operatorname{hei}'(u) \operatorname{ber}(u) - \operatorname{hei}(u) \operatorname{ber}'(u) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\sigma}{u} [\operatorname{her}'(u) \operatorname{ber}'(u) + \operatorname{hei}'(u) \operatorname{bei}(u)] \right\}. \quad (19.58) \end{aligned}$$

Для  $L^4 < \lambda^2$

$$\begin{aligned} K(\rho, 0, u') &= \frac{1}{2\omega_1(u')} \left\{ \left[ -\frac{2}{\pi u'} + N_0(u') I_1(u') + N_1(u') I_0(u') + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\sigma-1}{u'} N_1(u') I_1(u') \right] J_0(u'\rho) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ -\frac{2}{\pi u'} + \frac{2}{\pi} (K_0(u') J_1(u') - J_0(u') K_1(u')) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sigma-1}{u'} J_1(u') K_1(u') \right] I_0(u'\rho) - \frac{1}{2} \left[ N_0(u'\rho) + \frac{2}{\pi} K_0(u'\rho) \right] \right\}, \quad (19.57') \end{aligned}$$

где

$$\omega_1(u') = J_0(u') I_1(u') + J_1(u') I_0(u') + \frac{2(\sigma-1)}{u'} J_1(u') I_1(u').$$

Для  $\rho = 0$  получим

$$\begin{aligned} K(0, 0, u') = & \frac{1}{2\omega_1(u')} \left\{ -\frac{4}{\pi u'} + N_0(u') I_1(u') + N_1(u') I_0(u') + \right. \\ & + \frac{2}{\pi} [K_0(u') J_1(u') - J_0(u') K_1(u')] + \\ & \left. + \frac{2(\sigma-1)}{u'} [N_1(u') I_1(u') - \frac{2}{\pi} J_1(u') K_1(u')] \right\}. \quad (19.58') \end{aligned}$$

Прогиб пластинки определяется согласно прежним выражениям, только вместо  $K(\rho, 0, u)$  должны быть взяты выражения (19.57) и (19.58).

Значения производных  $K'(0, 0, u)$ , входящих в  $D(u)$ , с помощью соотношений (19.53) можно записать в таком виде:

для  $L^4 > \lambda^2$

$$\begin{aligned} K'(0, 0, u) = & -\left\{ \frac{2}{\pi u} \operatorname{ber}^2(u) + \frac{1-\sigma}{u} [\operatorname{her}'(u) \operatorname{ber}'(u) + \right. \\ & + \operatorname{hei}'(u) \operatorname{bei}'(u)] [\operatorname{ber}^2(u) + \operatorname{bei}^2(u)] - \frac{1-\sigma}{u} [\operatorname{ber}'^2(u) + \\ & + \operatorname{bei}'^2(u)] [\operatorname{her}(u) \operatorname{ber}(u) + \operatorname{hei}(u) \operatorname{bei}(u)] + \\ & \left. + \frac{2(1-\sigma)}{\pi u} \left[ \omega(u) + \frac{2\sigma}{u} \operatorname{ber}'^2(u) \right] \right\} \frac{1}{\omega^2(u)}; \quad (19.59) \end{aligned}$$

для  $L^4 < \lambda^2$

$$\begin{aligned} K'(0, 0, u') = & \frac{2}{\pi u' \omega_1^2(u')} \left\{ [J_0(u') + I_0(u')]^2 + \frac{2(\sigma-1)}{u'} \left[ \frac{\sigma}{u'} (I_1^2(u') + \right. \right. \\ & \left. \left. + J_1^2(u') + I_0(u') I_1(u') + J_0(u') J_1(u') \right] \right\}. \quad (19.59'') \end{aligned}$$

Асимптотические выражения для уравнения (19.39) и значения производных  $K'(0, 0, u)$  для случая свободного края будут:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\pi P \lambda^2}{8u^2 Q} \left\{ 1 + \frac{4e^{\alpha(-u) - \alpha(u)}}{\omega_2(u)} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 + \frac{1}{8u^2} + \dots \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( 2 - \frac{1}{2u^2} - \frac{\sqrt{2}}{4u^3} - \dots \right) \cos \beta(u) \cos \beta(-u) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{\sqrt{2}}{4u^3} + \dots \right) \sin \beta(-u) \cos \beta(u) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1-\sigma}{u} \sqrt{2} \left( 1 - \frac{3}{8u^2} - \dots \right) \sin [\beta(-u) - \beta(u)] - \right. \\ \left. - \frac{1-\sigma}{u^2} \left( 1 + \frac{1}{4u^2} + \dots \right) \cos [\beta(-u) - \beta(u)] \right\} = 0, \quad (19.60) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_2(u) &= 1 - \frac{1-\sigma}{u} \sqrt{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2u}} + \frac{1}{8u^2} - \dots \right); \\ K'(0, 0, u) &= -\frac{4e^{-2\alpha(u)}}{\omega_2^2(u)} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{4u^2} - \frac{\sqrt{2}}{4u^3} - \dots \right) (1 + \cos 2\beta(u)) - \right. \\ &\quad - \frac{1-\sigma}{u} \left[ \sqrt{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{u} + \frac{7}{8u^2} - \dots \right) - \right. \\ &\quad - \left. \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{2u}} - \frac{1}{2u^2} + \dots \right) \sin(\beta(-u) - \beta(u)) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{2u}} \left( 1 + \frac{1}{8u^2} + \dots \right) \cos(\beta(-u) - \beta(u)) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(1-\sigma)\sigma}{u^2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2u}} + \dots \right) \sin 2\beta(u) + \frac{1}{\sqrt{2u}} \cos 2\beta(u) \right] \right\}; \end{aligned}$$

для  $L^4 < \lambda^2$  получим

$$1 + \frac{\pi P \lambda^2}{8Q(u')^2} \cdot \frac{\cos u' + U \sin\left(u' - \frac{\pi}{4}\right) + V \cos\left(u' - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin u' + V \sin\left(u' - \frac{\pi}{4}\right) - U \cos\left(u' - \frac{\pi}{4}\right)} = 0, \quad (19.60')$$

где

$$U = U_1 - \frac{2(\sigma-1)}{u'} V_1; \quad V = U_2 + \frac{2(\sigma-1)}{u'} V_1,$$

причем

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{3}{8u'} - \frac{9}{64(u')^2} - \frac{150}{1024(u')^3} - \dots \right); \\ V_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{3}{8u'} - \frac{150}{1024(u')^3} - \frac{9900}{32768(u')^4} - \dots \right); \end{aligned} \right\} \quad (19.61)$$

$U_1$  и  $U_2$  имеют прежние значения,

$$\begin{aligned} K'(0, 0, u') &= \frac{1}{4(\omega_2')^2} \left\{ 2 - \frac{7-8\sigma}{2u'} + \frac{21-16\sigma(5-4\sigma)}{16(u')^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{45+8\sigma(21-24\sigma)}{64(u')^3} + \frac{759+32\sigma(3-12\sigma)}{1024(u')^4} + \dots \right\}, \quad (19.61') \end{aligned}$$

где

$$\omega_2' = \sin u' + V \sin\left(u' - \frac{\pi}{4}\right) - U \cos\left(u' - \frac{\pi}{4}\right).$$

Пример Рассмотрим круглую пластинку, для которой

$$L^4 \equiv \frac{a^4 K}{D} = 1000, \quad \sigma = 0,25. \quad (19.62)$$

Для этой пластинки с помощью таблиц функций Весселя определяем значения корней уравнения (19.39) для случаев заделанного и свободного краев.

Вычисления проделаны для некоторых значений  $\frac{Q}{P}$ . При этом пришлось задаться рядом значений аргумента  $u$  и определить для них из формулы (19.39) соответствующие отношения  $\frac{Q}{P}$ . Значения  $u$  для заданных  $\frac{Q}{P}$  определялись с помощью интерполирования.

При этом  $\lambda_1^2 = 1000 - u^4$ ;  $\lambda_k^2 = (u')^4 + 1000$ .

Для  $u > 8$  все подсчеты для  $\lambda_k$  ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ) проводились по асимптотическим формулам (19.55), (19.56') и (19.60'), (19.61'). Значения корней  $\lambda_k$  приведены в табл. 19.2.

Т а б л и ц а 19.2

Значения корней  $\lambda_k$  в зависимости от  $\frac{Q}{P}$

$\frac{Q}{P}$	Заданная пластинка					Свободная пластинка				
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
18	27,24	42,84	76,79	132,20	208,44	26,98	41,70	75,44	130,73	207,00
15	25,79	42,24	75,86	131,11	207,57	25,91	41,09	74,24	129,64	206,36
10	23,36	41,17	73,86	129,24	206,07	23,21	40,17	72,51	127,64	204,37
6	19,52	40,26	72,22	127,68	204,65	19,44	39,10	70,80	126,12	202,98
4	16,58	39,80	72,14	126,77	203,80	16,50	38,67	69,92	125,40	—
2	12,20	39,37	70,54	126,09	—	12,17	38,25	60,01	124,44	—
1	8,81	38,16	70,05	—	—	8,79	38,10	68,48	—	—

Рассмотрим теперь отдельно два случая: 1) груз приложен внезапно без начальной скорости; 2) груз в начальный момент (момент удара) имеет заданную скорость  $v$ .

Прогиб под грузом для первого случая определяется выражением (19.52) в предположении, что  $v = 0$ :

$$w(0, t) = w_{cm} \left\{ 1 - [H'_1 \cos \lambda_1 vt + H'_2 \cos \lambda_2 vt + \dots + H'_k \cos \lambda_k vt + \dots] \right\}, \quad (19.52')$$

где

$$w_{cm} = \frac{a^2}{4D} K_0; \quad H'_i = \frac{H_i}{K_0}.$$

Значение  $K_0 = K(0, 0, L)$  определяется для закрепленного края согласно формуле (19.48), для свободного — согласно (19.58).

Для нашего примера  $L = \sqrt[4]{\frac{Ka^4}{D}} = 5,6234$ . Произведя вычисления, получим для этих случаев значения  $K(0, 0, L) = 0,015781$  для закрепленной пластинки;  $K(0, 0, L) = 0,015839$  для свободной пластинки.

Значения величин  $H'_1$  для взятых выше отношений  $\frac{Q}{P}$  приводим в табл. 19.3.

Вычисляя из формулы (19.52') значение максимального прогиба, получим значения коэффициента динамичности  $\delta = \frac{w_{\partial}}{w_{cm}}$ , приведенные в табл. 19.4.

Таблица 19.3

Значения величин  $H$  в зависимости от  $\frac{Q}{P}$ 

$\frac{Q}{P}$	Закрепленная пластинка					Свободная пластинка				
	$H'_1$	$H'_2$	$H'_3$	$H'_4$	$H'_5$	$H'_1$	$H'_2$	$H'_3$	$H'_4$	$H'_5$
18	0,8253	0,1257	0,0380	0,0081	0,0020	0,8067	0,1398	0,0402	0,0082	0,0028
15	0,8630	0,0998	0,0296	0,0060	0,0015	0,8503	0,1090	0,0320	0,0061	0,0012
10	0,9277	0,0523	0,0160	0,0030	0,0007	0,9212	0,0577	0,0170	0,0030	0,0006
6	0,9715	0,0202	0,0066	0,0011	0,0002	0,9696	0,0219	0,0071	0,0012	0,0002
4	0,9868	0,0094	0,0031	0,0005	0,0001	0,9862	0,0099	0,0034	0,0005	0,0001
2	0,9962	0,0022	0,0008	0,0001	—	0,9965	0,0024	0,0009	0,0001	—
1	0,9992	0,0006	0,0002	—	—	0,9992	0,0006	0,0002	—	—

Таблица 19.4

Значения коэффициента динамичности  $\delta$  в зависимости от  $\frac{Q}{P}$ 

$\frac{Q}{P}$	Заделанная пластинка	Свободная пластинка	$\frac{Q}{P}$	Заделанная пластинка	Свободная пластинка
1	1,999	1,999	10	1,909	1,905
2	1,998	1,998	15	1,863	1,858
4	1,982	1,979	18	1,844	1,834
6	1,948	1,944			

Как видно из табл. 19.4, для сравнительно больших  $\frac{Q}{P}$  коэффициент  $\delta$  мало отличается от двойного.

Для второго случая, когда груз имеет в начальный момент скорость  $v$ , предположим, что скорость  $v$  такова, что в выражении для  $A_i$  (19.52) можно пренебречь значением  $\omega_{cm}$  по сравнению с  $\frac{v^2}{g} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{P}{Q} \cdot K_0$ . В таком случае значение прогиба под грузом (19.50) можно записать в виде

$$\omega(0, t) = A (H_1^{(2)} \sin v\lambda_1 t + H_2^{(2)} \sin v\lambda_2 t + \dots + H_i^{(2)} \sin v\lambda_i t + \dots), \quad (19.50')$$

где

$$H_i^{(2)} = \frac{P}{Q} \sqrt{\frac{\pi}{4} K_0 \lambda_i H_i^{(1)}};$$

$A$  — постоянная, не зависящая от  $P$ , имеет для заделанной и свободной пластинок значение

$$A = \sqrt{\frac{v^2}{g} \cdot \frac{\omega_{cm}}{P} Q}.$$

Таким образом, для постоянных  $H_i^{(2)}$  получим значения, приведенные в табл. 19.5. Вычисляя максимальное значение  $\omega_\partial$  из (19.50'), получим величины, приведенные в табл. 19.6.



Т а б л и ц а 19.5

Значения  $\dot{H}$  в зависимости от  $\frac{Q}{P}$  для  $\nu \neq 0$ 

$\frac{Q}{P}$	Заделанная пластинка					Свободная пластинка				
	$H_1^{(2)}$	$H_2^{(2)}$	$H_3^{(2)}$	$H_4^{(2)}$	$H_5^{(2)}$	$H_1^{(2)}$	$H_2^{(2)}$	$H_3^{(2)}$	$H_4^{(2)}$	$H_5^{(2)}$
18	0,1390	0,0333	0,0181	0,0066	0,0026	0,1348	0,0366	0,0188	0,0066	0,0035
15	0,1655	0,0313	0,0166	0,0058	0,0023	0,1638	0,0333	0,0177	0,0059	0,0019
10	0,2412	0,0240	0,0132	0,0043	0,0016	0,2386	0,0259	0,0138	0,0043	0,0013
6	0,3518	0,0151	0,0088	0,0026	0,0009	0,3500	0,0159	0,0094	0,0027	0,0008
4	0,4558	0,0104	0,0063	0,0018	0,0006	0,4538	0,0107	0,0066	0,0019	0,0006
2	0,6775	0,0049	0,0033	0,0008	—	0,6770	0,0051	0,0034	0,0009	—
1	0,9806	0,0026	0,0017	—	—	0,9799	0,0025	0,0017	—	—

Т а б л и ц а 19.6

Значение прогиба  $\omega_0$  в зависимости от  $\frac{Q}{P}$ 

$\frac{Q}{P}$	Заделанная пластинка	Свободная пластинка	$\frac{Q}{P}$	Заделанная пластинка	Свободная пластинка
1	0,981A	0,981A <sub>1</sub>	10	0,2444A	0,243A <sub>1</sub>
2	0,667A	0,667A <sub>1</sub>	15	0,1764A	0,175A <sub>1</sub>
4	0,452A	0,451A <sub>1</sub>	18	0,150A	0,148A <sub>1</sub>
6	0,344A	0,343A <sub>1</sub>			

## УПРУГИЙ УДАР И КОЛЕБАНИЯ

## Общие сведения

Для того чтобы дать полную картину протекания процесса удара, определить перемещения и напряжения, необходимо учесть упругие деформации в месте удара и найти их влияние на упруго-деформируемое тело (балку или плиту).

Герцом была создана статическая теория удара упругих тел, основанная на предположении, что состояние тел во время удара, вблизи контакта, соответствует состоянию равновесия, которое возникло бы в них при сжатии. По этой теории упругие колебания, возникающие при ударе, не рассматриваются, т. е. предполагается, что вся кинетическая энергия относительного движения превращается в потенциальную, а энергия упругих волн, распространяющаяся при соударении тел, мала. Количество энергии, идущей на волновой процесс, зависит от отношения начальной скорости  $v_0$  к скорости распространения волн  $c_0$ , в частности, при соударении со сферой, ею поглощается часть энергии порядка  $0,02 \frac{v_0}{c_0}$ . При

ударе о толстую плиту около 5% энергии идет на распространение волн.

По теории сжатия соприкасающихся тел, данной Герцом, при вдавливании одного упругого тела в другое силой  $P$  сближение этих тел будет [31]

$$\varepsilon = kP^{2/3}. \quad (19.63)$$

При сжатии двух упругих тел, ограниченных поверхностями вращения (рис. 19.1)  $z = z_1(r)$ ;  $z = -z_2(r)$ ,

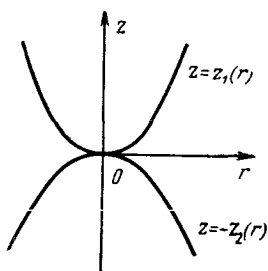


Рис. 19.1

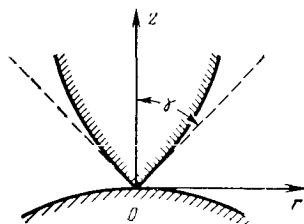


Рис. 19.2

для которых ось симметрии совпадает с равнодействующей сжимающих сил, коэффициент  $k$  имеет значение

$$k = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{16} A (\vartheta_1 + \vartheta_2)^2}, \quad (19.64)$$

где

$$A = \frac{1}{2} [z_1''(0) + z_2''(0)]; \quad \vartheta_1 = \frac{4(1 - \sigma_1^2)}{E_1}, \quad \vartheta_2 = \frac{4(1 - \sigma_2^2)}{E_2}.$$

Для случая вдавливания шара радиусом  $R$  в плоскость (полупространство)

$$k = \sqrt[3]{\frac{9(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2}{256R}}. \quad (19.65)$$

Если материалы одинаковы,

$$k = \sqrt[3]{\frac{9(1 - \sigma^2)^2}{4RE^2}}. \quad (19.66)$$

При выводе формулы (19.64) предполагалось, что  $A \neq 0$ . Более общий случай контактной задачи, когда

$$\frac{z_1^{(2k)}(0) + z_2^{(2k)}(0)}{(2n)!} = 0; \quad \frac{z_1^{(2n)}(0) + z_2^{(2n)}(0)}{(2n)!} \neq 0;$$

$$k = 1, 2, \dots, (n-1),$$

был рассмотрен И. Штаерманом.

В этом случае сближение тел

$$\varepsilon = kP^{\frac{2n}{2n+1}} \quad (19.67)$$

и постоянная  $k$  имеет значение

$$k = \left[ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)} A \right]^{\frac{1}{2n+1}} \left[ \frac{2n+1}{n} (\vartheta_1 + \vartheta_2) \right]^{\frac{2n}{2n+1}},$$

где

$$A = \frac{z_1^{(2n)}(0) + z_2^{(2n)}(0)}{(2n)!}.$$

Когда точка первоначального контакта является угловой точкой осевого сечения одного из тел, подвергающихся сжатию (рис. 19.2),

$$\varepsilon = kP^{1/2}, \quad (19.67')$$

где  $k = [2\pi (\vartheta_1 + \vartheta_2) \operatorname{ctg} \gamma]^{1/2}$ .

Используя зависимости Герца (19.63) и И. Штаермана (19.64), можно решить задачу об ударе по упругим системам с учетом контактных деформаций при тех же предположениях, какие положены в основу теории удара по Герцу.

Приведенные данные относятся к идеальным случаям вдавливания тел с заданной поверхностью контакта в предположении, что размер площадки мал по сравнению с другими размерами тела. Однако распространение задачи Герца на другие реальные случаи показывает, что закон Герца неприменим в случае, если диаметр зоны контакта соизмерим с размерами тела.

Проведенные теоретические и экспериментальные исследования [76] по вдавливанию шара в плиту [103], конечных размеров или бесконечную, лежащую на подстилающем слое, обнаруживают, что показатель  $n$  зависит от размеров плиты и ее толщины. С достаточной точностью можно принять зависимость [76]

$$\alpha = k_1 P^{2/3} - k_2 P, \quad (19.68)$$

где  $k_1, k_2$  зависят от размеров плиты. Можно также исходить для стержней и плит из уравнения

$$\alpha = k_1 P^\lambda, \quad (19.68')$$

где  $k_1$  и  $k_2$  зависят от размеров плиты и величины  $P$ .

В. Гольдшмит [23] предлагает исходить из зависимости в виде (19.68) и коэффициенты  $k, \lambda$  определять эмпирическим путем. В. Гольдшмит считает, что такая зависимость может быть использована для сравнительно большого диапазона скоростей, при условии, что пластическое течение захватывает небольшую область контакта.

Изучение процесса удара осложняется еще тем обстоятельством, что до настоящего времени нет достаточных данных для предела упругости и текучести при динамическом нагружении, а также затрате энергии, расходуемой на волновой процесс. Расчет процесса удара пригоден для сравнительно небольших скоростей до тех пор, пока не возникают значительные пластические деформации в зоне контакта. При больших скоростях удара возникает разрушение материала. При некоторой начальной скорости возможно пробивание пластин. Ниже приводится решение задач об ударе по балкам и плитам для сравнительно малых скоростей в пределах пригодности зависимостей вида (19.68).

### Упругий удар по балке без учета волновых процессов

Впервые задача об ударе падающего груза по стержню, с учетом деформаций в месте контакта от соударения тел, была решена С. Тимошенко. Он изучил удар шарика по стержню с учетом сближения их при сжатии в месте контакта по теории Герца [147].

Воспользуемся обычным уравнением изгибных колебаний балки.

Перемещение балки под действием силы  $P(t)$ , приложенной в сечении  $\xi = \xi_1$  ( $\xi = \frac{x}{l}$ ), задаем в виде

$$y(\xi, t) = \sum_i S_i(t) X_i(\xi). \quad (19.69)$$

Здесь  $X_i(\xi)$  фундаментальная функция, ортонормированная в интервале длины стержня,

$$z_1 < \xi < z \quad (z_2 - z_1 = 1), \quad \text{т. е.} \quad \int_{z_1}^{z_2} X_k^2(\xi) d\xi.$$

Функция  $s(t)$  удовлетворяет уравнению

$$S_i''(t) + \omega_i^2 S_i(t) = \frac{1}{\rho_1 F} H_i(t), \quad (19.70)$$

здесь  $\rho_1$  — масса объема балки;

$$\omega_i^2 = \frac{r_i^4 \delta^2}{l^3} \left( \delta^2 = \frac{EJ}{F\rho_1} \right);$$

$$H_k(t) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi, t) X_k(\xi) d\xi.$$

Для сосредоточенной силы  $P(t)$ , приложенной в точке  $\xi = \xi_1$ ,

$$H_k(t) = \frac{P(t)}{l} X_k(\xi_1)$$

и прогиб балки

$$y(\xi_1, t) = \frac{l^2}{\delta^2} \cdot \frac{1}{F\rho l} \sum_k \frac{1}{r_k^2} X_k(\xi) X_k(\xi_1) \int_0^t P(t) \sin \frac{r_k^2 \delta}{l^2} (t - t_1) dt. \quad (19.71)$$

Перемещение  $y_1$  тела массой  $M$ , имеющего в момент соприкосновения с балкой скорость  $v_0$ , будет

$$y_1(t) = v_0 t - \frac{1}{M} \int_0^t dt \int_0^t P(t) dt, \quad (19.72)$$

так как  $\alpha(P)$  — сближение соударяющихся тел, то

$$y_1 = \varepsilon(P) + y(\xi_1, t). \quad (19.73)$$

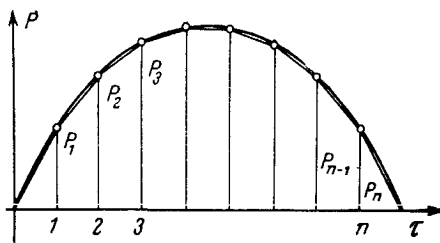


Рис 19.3

Таким образом, уравнение С. Тимошенко (19.73) без учета

сдвигов и инерции поворота для определения  $P(t)$  имеет вид

$$\delta^2 t - \frac{1}{M} \int_0^t dt \int_0^t P(t) dt = \varepsilon(P) + \frac{l^2}{\delta^2 F \rho l} \sum_k \frac{1}{r_k^2} X_k^2(\xi_0) \int_0^t P(t) \sin \frac{r_k^2 \delta}{l^2} (t - t_1) dt. \quad (19.73')$$

В общем случае коэффициент  $k$  и показатель  $n$  в формуле (19.68') могут быть переменными в процессе удара.

Для решения уравнения (19.73) при помощи электронной цифровой машины применим метод численного интегрирования, который в отличие от метода С. П. Тимошенко, используемого и другими авторами [40], значительно повышает сходимость процесса, что позволяет найти без затруднений и напряжения.

Для интегрирования уравнения делим период колебаний на  $2s$  интервалов

$$\tau = \frac{T_1}{2s} = \frac{\pi l^2}{r_1^2 s \delta}.$$

Предположим, что в каждом интервале времени  $(q-1)\tau < t < q\tau$  сила  $P(t)$  меняется по линейному закону (рис. 19.3)

$$P(t) = P_q - (P_q - P_{q-1}) \left( q - \frac{t}{\tau} \right), \quad P(0) = 0. \quad (19.74)$$

Следовательно,

$$P'(t) = \text{const}, \quad P'(\tau) = \frac{P_1}{\tau}, \quad P'(2\tau) = \frac{P_2 - P_1}{\tau} \dots,$$

$$P'(q\tau) = \frac{P_q - P_{q-1}}{\tau}, \quad P''(t) = 0.$$

Интегрируя по частям разложение для  $y(\xi, t)$  (19.71), при условии, что  $P$  меняется по закону (19.74), после небольших преобразований получаем для вычисления прогибов  $y(\xi, q\tau)$  и напряжений  $\sigma(\xi, q\tau)$  в балке в момент  $t = q\tau$  следующие выражения:

$$y(\xi, q\tau) = \frac{l^3}{EJ} \sum_k X_k(\xi) X_k(\xi_1) \left\{ \frac{1}{r_k^4} P(q\tau) + \frac{r_1^2 s}{\pi r_k^6} \times \right. \\ \left. \times [P_1 S_{q-1, q} + (P_2 - P_1) S_{q-2, q-1} + \right. \\ \left. + (P_3 - P_2) S_{q-3, q-2} + \dots + (P_q - P_{q-1}) S_{0, 1}] \right\}; \quad (19.75)$$

$$\sigma_{us} = -\frac{l}{W} \sum_k X_k(\xi_1) X_k''(\xi) \left\{ \frac{P(q\tau)}{r_k^4} + \frac{r_1^2 s}{\pi r_k^6} [P_1 S_{q-1, q} + \right. \\ \left. + (P_2 - P_1) S_{q-2, q-1} + \dots + (P_q - P_{q-1}) S_{0, 1}] \right\}.$$

В формулах (19.75) обозначено

$$S_{q-j, q-(j-1)} = \sin \frac{\pi r_k^2 (q-j)}{sr_1^2} - \sin \frac{\pi r_k^2 (q-j+1)}{sr_1^2} \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

Вычисляя значение  $y$  (19.72) левой части уравнения (19.73'), предположим, что давление меняется по закону (19.74), получим для перемещения падающего тела  $y_{ш}$  в момент времени  $t = q\tau$  значение

$$y_{ш}(q\tau) = v_0 q\tau - \frac{r^2}{M} \left\{ -\frac{P_1}{6} [(q-1)^3 - q^3] - \right. \\ \left. - \frac{P_2 - P_1}{6} [(q-2)^3 - (q-1)^3] - \dots - \right. \\ \left. - \frac{P_{q-2} - P_{q-1}}{6} [(q-(q-1))^3 - (q-(q-2))^3] - \frac{P_{q-1} - P}{6} (-1) \right\}. \quad (19.76)$$

Значение  $P(q\tau)$  определяется из уравнения

$$y_{ш}(q\tau) = \varepsilon(q\tau) + y(\xi_1, q\tau)$$

шаг за шагом, начиная с первого интервала времени  $\tau$ , для которого  $P_0 = 0$ ,  $P(\tau) = P_1$ .

Значения величин  $P$ ,  $y_{ш}$ ,  $y$ ,  $\varepsilon$ ,  $\sigma_{us}$  находятся без затруднений по выше приведенным формулам. Расчет проводится следующим

образом. Задаемся в первый момент соударения значением  $\varepsilon$  (например,  $\varepsilon \approx v_0\tau$ ) вычисляем из уравнения (19.73')  $P'_1$ , затем уточняем расчет, принимая  $\varepsilon = k(P'_1)^{2/3}$ . Расчет повторяем до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность. Затем шаг за шагом находим  $P_2$ ,  $P_3$  и остальные искомые величины. Расчет ведем до такого значения  $t = j\tau$ , пока  $P(j\tau)$  не обратится в нуль, т. е. до момента отделения падающего тела от балки. Прогибы балки для  $t > j\tau$  вычисляем по формуле (19.76) в предположении, что с этого момента  $P(t) = 0$  и тело движется под действием  $P_1 = -mg$  до момента следующего контакта.

Расчет по этой схеме является весьма трудоемким, тем более, что для получения надежных результатов необходимо период колебаний разбить на большое количество интервалов. Приведенные расчеты были выполнены на ЭЦВМ для  $2s = 900$  и для различных значений

$$\alpha = \frac{G}{F\gamma l}, \quad A = \frac{l^3}{EJ}.$$

Радиус зоны контакта принят равным

$$R = \sqrt[3]{\frac{3G}{4\pi\gamma}}.$$

В табл. 19.7 приведены результаты расчета контактных давлений, деформаций и напряжений для нескольких балок. Как видно из таблицы, приближенная формула для определения коэффициента динамичности  $\mu_d$  (19.1) дает для величины деформации балки достаточно хорошее приближение, однако для напряжений коэффициент  $\lambda_d$  отличается значительно от  $\mu_d$ , так что расчет напряжений в балках по значению  $\lambda_d$  вести нельзя.

Для примера на рис. 19.4—19.7 приведены данные расчета для стержня сечением  $2,54 \times 2,54$ ;  $l = 80$  см; вес падающего груза  $G = 1,78$  кг; высота падения 16 см. На рис. 19.4 графически представлены давления  $P$  и прогибы  $y\left(\frac{1}{2}, t\right)$ , а на рис. 19.5 — напряжения для опертого стержня. На рис. 19.6, 19.7 приведены те же величины для этого же стержня с заделанными концами.

Из формул (19.75), (19.76) и (19.73) следует, что результаты расчетов, приведенные в таблице, могут быть использованы и для значений величин, отличных от табличных, при условии, что число интервалов  $s$ , на которое разделен период колебаний, оставлено прежним, т. е.  $s_1 = s$ ,  $\tau_1 = \frac{T_1}{2s}$  и, кроме того, должны быть соблюдены условия

$$\frac{v_0\tau}{A} = \frac{v_1\tau_1}{A_1}, \quad \frac{\tau^2}{MA} = \frac{\tau_1^2}{M_1A}, \quad \frac{k}{A} = \frac{k_1}{A_1}.$$

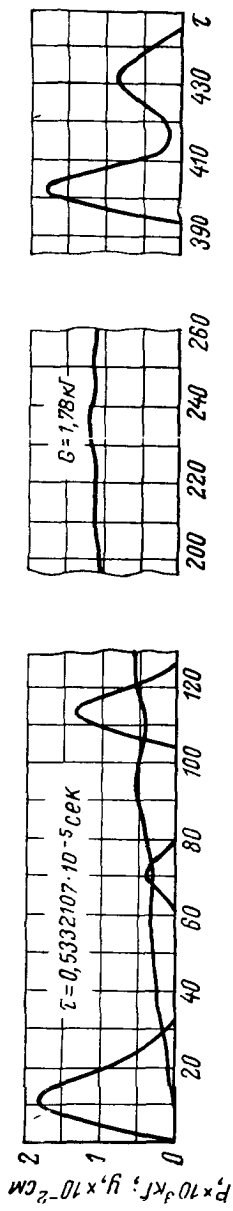


Рис. 19.4

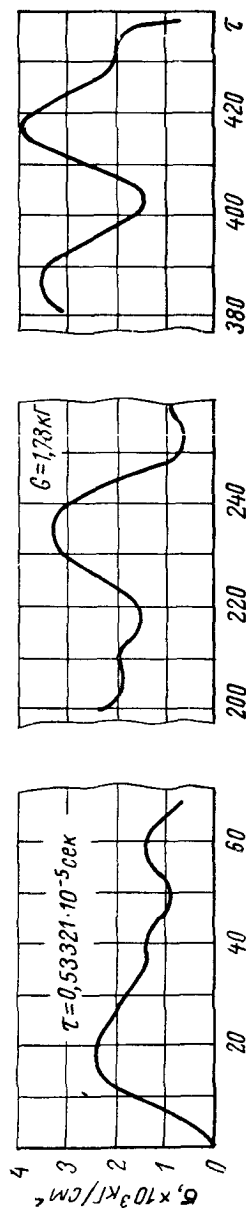


Рис. 19.5



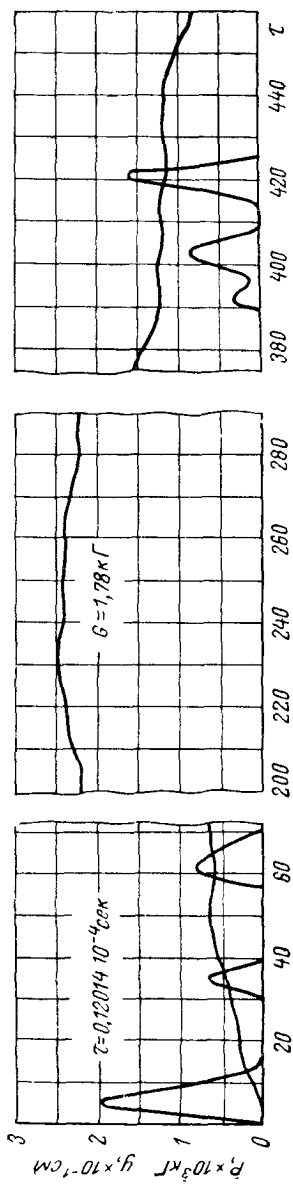


Рис. 19.6

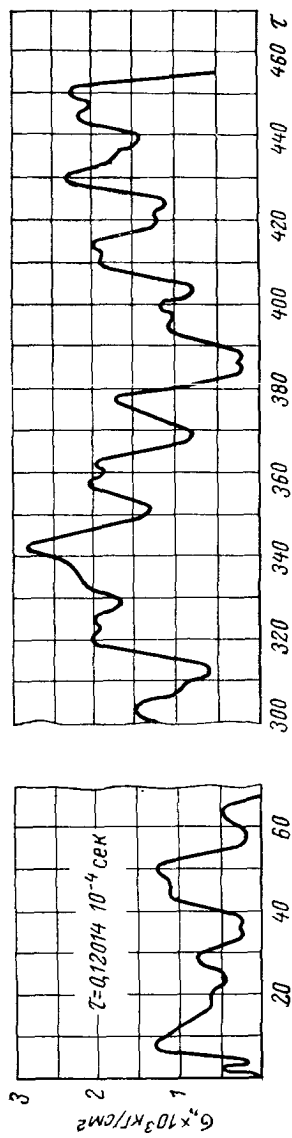


Рис. 19.7

Значения основных величин, вычисленных при ударе по балкам

$\alpha$	$10^4 A = \frac{I^2}{EJ}$	$G_{ep}$ в кг	$P_{max}$ в кг	$\gamma_{max}$ в см	$\sigma_{max}$ в кг/см <sup>2</sup>	$10^2 t_{max}$ в сек	$T_{ск} \cdot 10^2$ в сек	$\mu_{дин}$	$\lambda_{дин}$	$h_{сбр}$ в см	Размеры
3/5	0,326	14,7	6040	0,0310	590	0,0586	0,182	313	256,5	5	Рельс $P = 4a$ $l = 80$ см
			9170	0,0450	841	0,0578		455	365,6		
2 3/10	0,638		3663	0,3520	2300 4494 *	3,96	0,520	54,6	—	10	Консоль $l = 50$ см $b \times h = 2,75 \times 5,82$
1/2	4,87	50	12 313	0,1839	854,9	0,4020	1,410	36,7	61	5	Двутавр № 24а $l = 300$ см
			19 583	0,3274	1360	0,3760		65,4	100		
1/4			13 336	0,1696	780,3	0,5300	2,006	34	79	5	Швеллер № 40 $l = 200$ см
			25 182	0,2867	1124	0,5280		58	114		
1 3/4	11,05	21,5	3968	0,1786	—	0,393	0,748	36,6	—	5	Швеллер № 14 $l = 100$ см
			6900	0,2535	3982	0,389		51,9	81,2		
			9200	0,3105	4486			63,6	91,8	15	
1 1/10	50,7	16,5	2754	0,358	3298	0,9148	1,79	20,8	59,7	5	Швеллер № 12 $l = 149$ см
			4839	0,506	4410	0,9146		29,4	79,7		
			6290	0,692	6100	0,9145		40,2	110,9		
1/2	185	12,2	6656	0,814	2682	0,167	6,09	17,5	41,0	16	Швеллер № 16а $l = 300$ см
1/4		24	3909	0,843	1623			9,2	14,8	5	
1 1/25	70,29	1,78	2006,9	0,245	1297	0,276	1,089	82,27	—	16	Свободно опертая балка $l = 80$ см, $b \times h = 2,54 \times 2,54$
			1901,13	0,1219	1234	0,125		187,14	—		

\* Значения напряжений для  $t > t_{max}$

Отсюда следует, что ( $q$  — вес балки)

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad v_1 = v_0 \sqrt{\frac{A_1 q}{A q_1}}.$$

Перемещение  $y_{ш}$  и напряжение  $\sigma_{из}$  в балке будут

$$y_1 = y \frac{A_1}{A}, \quad \sigma_1 = \sigma \frac{W}{W_1} \cdot \frac{l_1}{l}.$$

**Пример** Удар производится по двутавровой балке № 20;

$$J_x = 1840 \text{ см}^4; \quad W = 184 \text{ см}^3; \quad \gamma F = 21,0 \text{ кг пог. м};$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}; \quad l_1 = 270 \text{ см}.$$

Значение

$$A_1 = \frac{I_1^3}{E J_1} = 0,515 \cdot 10^{-2}.$$

Берем данные таблицы для  $A = 0,487 \cdot 10^{-2}$ ,  $h = 15 \text{ см}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Вес падающего груза для нашего примера

$$G = \alpha_1 F_1 \gamma_1 l_1 = 28,4 \text{ кг}.$$

Высота падения груза

$$h = h_0 \sqrt[4]{\frac{A_1 q}{A q_1}} = 32 \text{ см}.$$

Перемещение

$$y_{\max} = y \frac{A_1}{A} = 0,37 \text{ см}.$$

Напряжение

$$\sigma_{из} = 1360 \frac{l_1}{W_1} = 2000 \text{ кг/см}^2.$$

Радиус зоны контакта ( $R = 11,5 \text{ см}$ )

$$R_1 = R \left( \frac{A}{A_1} \right)^3.$$

### Удар по балке при учете инерции поворота и сил перерезывания

В предыдущем было изучено явление упругого удара, исходя из неволнового уравнения колеблющегося стержня. Однако для сравнительно коротких стержней может существенное влияние на процесс удара оказать учет инерции поворота сечений и сил перерезывания. Учет этих факторов приводит к изучению процесса удара, исходя из волнового уравнения С. Тимошенко.

В ряде работ показано, что при приложении импульса стержня вдоль стержня распространяются две волны со скоростями

$$c_1 = 5,1 \cdot 10^3 \text{ м/сек}, \quad c_2 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ м/сек}.$$

При учете влияния волновых процессов в балке необходимо исходить из дифференциальных уравнений движения стержня с учетом инерции поворота и сил перерезывания (стр. 114):

$$\left. \begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k' \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) FG &= q(t, x); \\ EJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k' \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) FG - J\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (19.77)$$

здесь  $F$  — площадь поперечного сечения стержня;  $E$  — модуль упругости;  $\psi$  — угол поворота элемента стержня от действия только изгибающего момента  $M = -EJ \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ;  $y(x, t)$  — перемещение стержня от изгибающих моментов и сдвига;  $k'$  — коэффициент, зависящий от формы сечения (стр. 45);  $q(x, t)$  — интенсивность внешней нагрузки.

Для опертого стержня ищем решение уравнения (19.77) в виде

$$y = \sum_n^{1, 2, 3, \dots} A_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \psi = \sum_n^{1, 2, \dots} B_n(t) \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (B_0 = 0). \quad (19.78)$$

После подстановки уравнения (19.78) в уравнения (19.77) записываем их в операторной форме

$$\left. \begin{aligned} \left( \rho F p^2 + k' \frac{n^2 \pi^2}{l^2} FG \right) A_n - \frac{n\pi}{l} k' FGB_n &= Q_{1n}(p, x); \\ \frac{n\pi}{l} k' FGA_n - \left[ \frac{n^2 \pi^2}{l^2} EJ + k' FG + p^2 J\rho^2 \right] B_n &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (19.79)$$

здесь

$$Q_{1n}(p, x) = \frac{2}{l} \int_0^l Q(p, x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (19.80)$$

Предполагая, что контактная сила распределена равномерно в интервале  $x_1 - c \leq x \leq x_1 + c$  и в пределе  $\underset{c \rightarrow 0}{q2c} \rightarrow \underset{x=x_1}{p(t)}$ , найдем

$$Q(p, x) = \frac{2}{l} P \sin \frac{n\pi x_1}{l},$$

где  $P$  — изображение  $p(t)$ .

Из уравнения (19.79) получим

$$\left. \begin{aligned} A_n(p) &= -\frac{2}{l} \cdot \frac{\left[ \frac{n^2 \pi^2}{l^2} EJ + k' FG + J\rho p^2 \right]}{J\rho^2 \Delta_n(p)} \sin \frac{n\pi x_1}{l} P; \\ B_n(p) &= \frac{n\pi}{l} \cdot \frac{k' FG}{JF\rho^2 \Delta_n(p)} \cdot \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi x_1}{l} P. \end{aligned} \right\} \quad (19.81)$$

Для определения оригиналов выражений (19.81) необходимо найти корни  $p_{kn}$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) знаменателя  $\Delta_n(p)$ . Если обозначим

$$p_{kn} = i\omega_{kn} = i \frac{\delta}{r^2} r_{kn} \quad \left( \delta^2 = \frac{EJ}{\rho F}, \quad r^2 = \frac{J}{F} \right), \quad (19.82)$$

то корни  $r_{1n}, r_{2n}, r_{3n} = -r_{1n}, r_{4n} = -r_{2n}$  находятся из уравнения

$$r_n^4 + \frac{k'G}{E} \left[ 1 + \frac{n^2\pi^2}{l^2} r^2 \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \right] r_n^2 + \frac{k'G}{E} \cdot \frac{r^4 n^4 \pi^4}{l^4} = 0;$$

отсюда ( $k = 1, 2$ )

$$r_{kn} = \sqrt{\frac{k'G}{2E} \left[ 1 + \frac{n^2\pi^2 r^2}{l^2} \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \right]^2 \pm \dots} + (-1)^k \sqrt{\left( \frac{k'G}{2E} \right)^2 \left[ 1 + \frac{n^2\pi^2 r^2}{l^2} \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \right]^2 - \frac{k'G}{E} \cdot \frac{r^4 n^4 \pi^4}{l^4}}. \quad (19.83)$$

После вычислений получим для прогиба стержня значение

$$y(x, t) = \frac{2k'G}{\rho^2 J l} \left\{ \sum_n^{1, 2, \dots} \frac{1}{\omega_{2n}^2 - \omega_{1n}^2} \left[ \frac{1}{\omega_{1n}} - \frac{\rho J \omega_{1n}}{k'FG} + \frac{\rho \delta^2 n^2 \pi^2}{\omega_{1n} k'G l^2} \right] \times \right. \\ \times \int_0^t P(t_1) \sin \omega_{1n}(t - t_1) dt_1 - \left( \frac{1}{\omega_{2n}} - \frac{\rho J \omega_{2n}}{FGk'} + \frac{\rho \delta^2 n^2 \pi^2}{\omega_{2n} k'G l^2} \right) \times \\ \left. \times \int_0^t P(t_1) \sin \omega_{2n}(t - t_1) dt_1 \right\} \sin \frac{n\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (19.84)$$

Для изгибающего момента

$$M_{из}(x, t) = \frac{2}{l^3} \cdot \frac{Ek'G}{\rho^2} \left\{ \frac{n^2\pi^2}{\omega_{2n}^2 - \omega_{1n}^2} \left[ \frac{1}{\omega_{1n}} \int_0^t P(t_1) \sin \omega_{1n}(t - t_1) dt_1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\omega_{2n}} \int_0^t P(t_1) \sin \omega_{2n}(t - t_1) dt_1 \right] \right\} \sin \frac{n\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (19.85)$$

Зависимость между вдавливанием тела в балку и силой  $P(t)$  принимаем по-прежнему в виде выражения (19.68)

$$\epsilon = k_1 P^n.$$

Для нахождения величины силы взаимодействия между падающим телом и стержнем имеем уравнение (19.73):

$$v_0 t - \frac{1}{M_1} \int_0^t dt \int_0^t P dt = \epsilon P^n + y(x_1, t), \quad (19.86)$$

где  $M_1$  — масса падающего тела;  $v_0$  — начальная скорость в момент удара;  $x_1$  — расстояние до сечения в месте удара.

Решение уравнения (19.86) находим аналогично предыдущему численно с помощью ЭЦВМ, разбивая период  $T = \frac{2\pi}{\omega_{1n}}$  на  $2s$  интервалов  $\tau = \frac{\pi}{s\omega_{1n}}$  и находя шаг за шагом значения  $P(\tau) = P_1$ ,  $P(2\tau) = P_2, \dots, P(m\tau) = P_m$ .

Для улучшения сходимости рядов (1.8) и (1.9), определяющих  $y(x, t)$ ,  $M(x, t)$ , произведя интегрирование по частям в предположении, что  $P(t)$  меняется по закону (19.74), найдем значение интегралов в интервале  $(q-1)\tau \leq t_1 \leq q\tau$  в виде

$$\begin{aligned} \int_{(q-1)\tau}^{q\tau} P \sin \omega_n(t-t_1) dt_1 &= \frac{1}{\omega_n} [P_q \cos \omega_n(t-q\tau) - \\ &- P_{q-1} \cos \omega_n(t-(q-1)\tau)] + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{P_q - P_{q-1}}{\tau} [\sin \omega_n(t-q\tau) \times \\ &\times \sin \omega_n(t-(q-1)\tau)]. \end{aligned} \quad (19.87)$$

После вычислений получим для перемещений  $y(x, q\tau)$  в момент времени  $q\tau$  следующее значение:

$$\begin{aligned} y(x, q\tau) &= \frac{2l^3}{EJ} \sum_n^{1,2,\dots} \sin \frac{n\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \frac{1}{n^2\pi^2} \left( \frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{E}{k'G} \cdot \frac{r^2}{l^2} \right) \times \\ &\times P(q\tau) - \frac{2l^3}{EJ} \cdot \frac{r^4}{l^4} \sum_n^{1,2,\dots} \left\{ \frac{sr_{1n}}{\pi r_{2n}} \left( \frac{k'G}{Er_{2n}^2} + \frac{n^2\pi^2 r^2}{l_{2n}^2} - 1 \right) \times \right. \\ &\times [(P_1 - P_0) S_{q-1, q}^{(2)} + (P_2 - P_1) S_{q-2, q-1}^{(2)} + \dots + (P_0 - P_{01}) S_{01}^{(2)}] - \\ &- \frac{1}{r_{1n}} \cdot \frac{sr_{1n}}{\pi} \left( \frac{k'G}{Er_{1n}^2} + \frac{n^2\pi^2 r^2}{l_{1n}^2} - 1 \right) [(P_1 - P_0) S_{q-1, q}^{(1)} + \\ &\left. + (P_2 - P_1) S_{q-2, q-1}^{(1)} + \dots + (P_q - P_{q-1}) S_{01}^{(1)}] \right\} \times \\ &\times \frac{1}{r_{2n}^2 - r_{1n}^2} \sin \frac{n\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}; \end{aligned} \quad (19.88)$$

здесь обозначено

$$S_{q-j, q-j+1}^{(k)} = \sin \frac{r_{nk\pi}(q-j)}{r_{11}^k s} - \sin \frac{r_{nk\pi}(q-j+1)}{r_{11}^k s}$$

$$(j = 1, 2, \dots, q; \quad k = 1, 2).$$

Аналогичным образом для напряжения  $\sigma_{uz}$  ( $q\tau, x$ ) получим

$$\sigma_{uz} = \frac{2l}{W} \sum_n^{1, 2, \dots} \sin \frac{n\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \left\{ \frac{P(q\tau)}{n^2 \pi^2} + \frac{k'G}{E} \cdot \frac{r^4}{l^4} \cdot \frac{s r_{11}}{\pi} \times \right.$$

$$\times \frac{n^2 \pi^2}{r_{2n}^2 - r_{1n}^2} \left[ (P_1 - P_0) \left( \frac{S_{q-1, q}^{(1)}}{r_{1n}^3} - \frac{S_{q-1, q}^{(2)}}{r_{2n}^3} \right) + (P_2 - P_1) \times \right.$$

$$\left. \left. \times \left( \frac{S_{q-2, q-1}^{(1)}}{r_{1n}^3} - \frac{S_{q-2, q-1}^{(2)}}{r_{2n}^3} \right) + \dots + (P_q - P_{q-1}) \left( \frac{S_{0,1}^{(1)}}{r_{1n}^3} - \frac{S_{0,2}^{(2)}}{r_{2n}^3} \right) \right] \right\}. \quad (19.89)$$

Изложенный алгоритм решения реализован на ЭЦВМ таким же образом, как описано выше для неволнового уравнения.

Составленная программа позволяет рассчитывать значение  $P$  — силы взаимодействия в месте контакта, скорость движения груза и путь его, величину вдавливания  $\epsilon$ , перемещения и напряжения в любом сечении балки.

Для того чтобы показать влияние инерции поворота и сил перерезывания на процесс удара, были произведены расчеты для двух случаев:

а) Рельс — 4а,  $l = 80$  см,  $F = 39,45$  см<sup>2</sup>,  $\rho F = 0,3083$  кг/см·сек<sup>-2</sup>;  $J_x = 751$  см<sup>4</sup>,  $W_1 = 126,77$  см<sup>3</sup>,  $r_x = 4,363$  см,  $\frac{r_x}{l} = \frac{1}{18,3}$ .

Вес груза  $G = 14,7$  кг, радиус стального шара  $R = 7,141$  см, высота падения взята  $h = 10$  см и 25 см. Коэффициент  $k'$ , найденный по известной формуле (3.5), оказался равным 0,35. Период собственных колебаний рельса  $T_1 = 0,1823 \cdot 10^{-2}$  сек; при учете перерезывающих сил и инерции поворота сечения  $T_1 = 0,2079 \cdot 10^{-2}$  сек,  $\Delta\tau = \frac{T_1}{2s} = 0,2022 \cdot 10^{-5}$  сек ( $2s = 900$ ).

б) Двутавр № 33,  $l = 200$  см,  $F = 23,8$  см<sup>2</sup>,  $\rho F = 0,4220$  кг/см·сек<sup>-1</sup>,  $J_x = 9840$  см<sup>4</sup>,  $W_x = 597$  см<sup>3</sup>,  $r_x = 13,5$  см,  $\frac{r_x}{l} = \frac{1}{14,8}$ ,  $k' = 0,425$ ,  $T_1 = 0,3679 \cdot 10^{-2}$  сек,  $T_1 = 0,4342 \cdot 10^{-2}$  сек,  $\Delta\tau = 0,4088 \cdot 10^{-5}$  сек. Вес груза 50 кг, радиус шара 11,48 см,  $h = 10$  см и 25 см.

Расчеты были проведены также исходя из обычного неволнового уравнения.

Перемещения и напряжения из волнового уравнения определялись для сечения в месте удара  $x_1 = \frac{l}{2}$  и в сечении  $x_1 = \frac{3}{4}l$ . Результаты вычислений приведены на графиках.

На рис. 19.8 приведены графики сил взаимодействия груза с балкой и прогиба рельса Р-4а для  $h=25$  см. Сплошной линией изображены  $\bar{P}$  и  $\bar{y}$ , полученные из волнового уравнения. Пунктирной линией отмечены те же величины, полученные из неволнового уравнения. На рис. 19.9 приведено то же для дву-

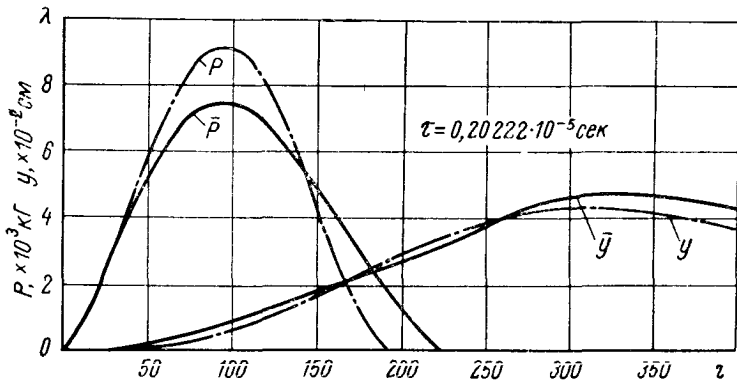


Рис. 19.8

тавра 33, при сбросе груза с высоты 10 и 25 см. Значение напряжений в балке Р-4а в зависимости от  $t$  приведены на рис. 19.10 для  $h=10$  и 25 см. Значения напряжений для сечения  $x = \frac{l}{4}$  или  $\frac{3l}{4}$  для Р-4а показаны на рис. 19.11 и 19.12.

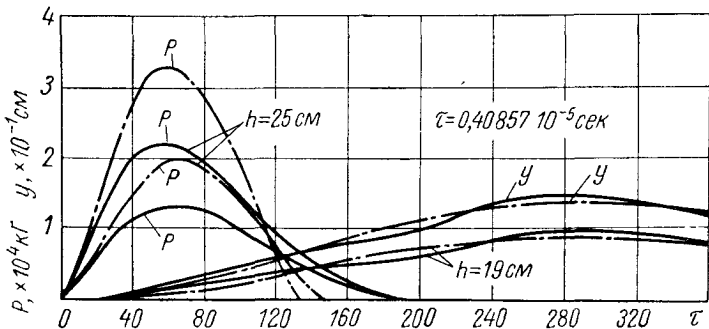


Рис. 19.9

Как видно из этих рисунков, перемещения и напряжения в сечении  $x = \frac{3}{4} l$  возникают в момент времени, который соответствует времени распространения волны со скоростью  $c_1 = 5 \cdot 13 \cdot 10^6$  см/сек.

Основные результаты расчета приведены также в табл. 19.8. Значение  $\tau_{xy}$  определялось по формуле  $\tau_{xy} = \frac{P}{k'F}$ , интенсивность напряжений  $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{из}^2 + 3\tau_{xy}^2}$ , где  $\sigma_{из}$  взято для волокна, находящегося на расстоянии  $h_1$ , от нейтральной оси в месте перехода от вертикальной стенки к полке. В верхней строке табл. 19.8 для каждого случая приведены значения величин, полученных



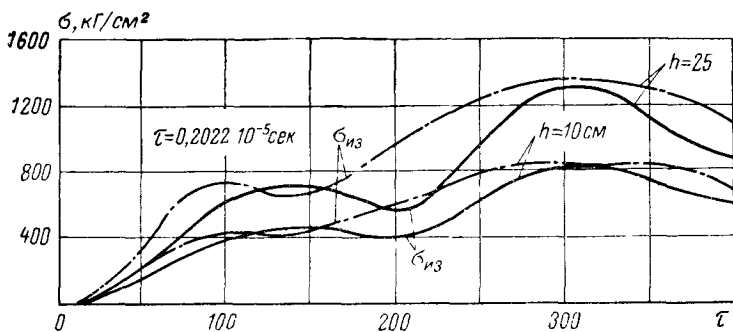


Рис. 19.10

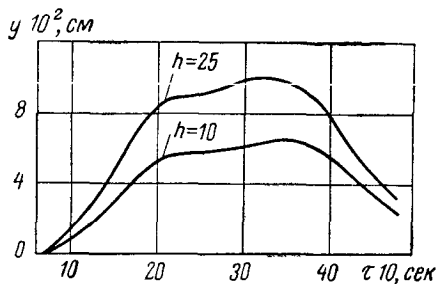


Рис. 19.11

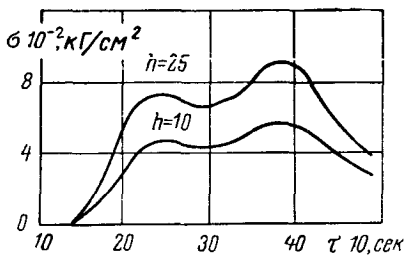


Рис. 19.12

Таблица 198

Основные параметры при ударе по балкам  
без учета и с учетом волновых процессов

Размеры балок	Высота сброса груза $h$ в см	Сила удара $P$ макс $10^{-3}$ в кг	Время достижения $10^2 t$ в сек	Продолжительность соударения $10^2 t_0$ в сек	Максимальные		Напряжения при $t = t_{\text{max}}$ в кг/см <sup>2</sup>		
					перемещения $10^2 y$ в см	напряжения $\sigma_{\text{изг}}$ в кг/см <sup>2</sup>	$\sigma_{\text{изг}}$	$\tau_{xy}$	$\sigma_{\text{д}}$
Рельс Р-4а $l = 80$ см	10	9,170 7,543	0,1927 0,1883	0,3962 0,4614	0,6073 0,8221	847,2 827,7	330,3 284,4	664,1 546,3	1196 986,4
	25	15,56 12,59	0,1744 0,1729	0,3603 0,4415	0,8963 1,237	1342 1320	542,1 418,5	1127 911,7	2025 1631
Двугавр № 33 $l = 200$ см	10	19,41 13,41	0,2742 0,2624	0,6054 0,7978	0,9534 1,452	837 754	432,7 293,5	849,0 586,4	1530 1058
	25	32,89 22,09	0,2413 0,2372	0,5682 0,7687	1,322 2,184	1380 1189	669,6 495,8	1438 966,1	2580 1746

из неволнового уравнения, в нижней — из волнового. Из таблицы видно, что при учете волнового процесса в балке сила взаимодействия уменьшается по сравнению с данными расчета из неволнового уравнения на 20—30%, а интенсивность напряжений достигает максимума в момент достижения  $\tilde{P}_{\max}$  и превышает максимальное значение  $\sigma_{uz}$ , достигаемое позже. Значение  $\tilde{\sigma}_i$  (волнового уравнения) меньше  $\sigma_i$  (неволнового уравнения) на 30%. Таким образом, для сравнительно коротких балок учет инерции поворота сечений и сил перерезывания снижает величину  $P_{\max}$  и  $\sigma_i$ .

Приведенные выше результаты расчетов показывают, что уже для  $\frac{r}{l} > \frac{1}{20}$  инерция поворота сечений и силы перерезывания существенно влияют на процесс удара и снижают интенсивность напряжений  $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{uz}^2 + 3\tau_{xy}^2}$ . Максимум  $\sigma_i$  получается в момент времени, когда сила взаимодействия  $P$  достигает максимального значения. Величина  $\sigma_i$  превышает  $\sigma_{uz \max}$ .

С целью проверки результатов теоретических исследований была проведена серия испытаний для балок, в частности для рельса Р-4а, с данными, указанными выше, на специально созданной установке\*. Применялись вертикальные и горизонтальные копры, оборудованные широкополосной измерительной аппаратурой и автоматическими устройствами.

При ударе груза по образцам исследовались перемещения (прогибы) деформации, силы взаимодействия, длительность контакта. Для измерения деформаций были применены высокоомные фольговые тензодатчики. Датчики в зоне контакта помещались в паз на глубину 0,1 мм.

Исследование сил, возникающих в месте контакта, выполнялось с помощью элементов титаната бария и специальных силоизмерительных устройств — копров, причем тарировка датчиков проводилась из сопоставления удара по полупространству с расчетными данными по Герцу—Диннику.

## УПРУГИЙ УДАР ПО ТОНКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЕ

### Удар без учета волновых процессов

Метод, изложенный выше, может быть применен к изучению удара по плите.

Дифференциальное уравнение колебаний плиты

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, y, t). \quad (19.90)$$

\* Опыты проведены В. Ф. Порошиным.

Вычисляя значения левой части уравнения (19.90) в предположении, что давление меняется по закону (19.71), получим для перемещения падающего тела в момент времени  $t = m\tau$  значение

$$y_1 = v_0 m\tau - \frac{\tau^2}{M} \left\{ -\frac{P_1}{6} [(n-1)^3 - n^3] - \frac{P_2 - P_1}{6} \times \right. \\ \times [(n-2)^3 - (n-1)^3] - \dots - \frac{(P_{n-2} - P_{n-1})}{6} \times \\ \left. \times [(n - (n-1))^3 - (n - (n-2))^3] - \frac{P_n - P_{n-1}}{6} (-1) \right\}.$$

Рассматриваем для простоты плиту, опертую по контуру. Предполагаем, что нагрузка  $P$  равномерно распределена по площадке круга контакта радиуса  $c$ .

В этом случае перемещение точек плиты

$$W(x, y, t) = \sum_m \sum_n s_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (19.91)$$

Функции  $s_{mn}(t)$  определяются из уравнения

$$s''_{mn} + \omega_{mn}^2 s_{mn} = \frac{4}{\rho h a b} \sum_m \sum_n P(t) \gamma'_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b}, \quad (19.92)$$

где

$$\gamma'_{mn} = \frac{2J_1(\gamma_{mn}c)}{c\gamma_{mn}}, \quad \gamma = \frac{\pi}{a} \sqrt{m^2 + n^2 \mu_1^2};$$

$x_1, y_1$  — координаты центра круга контакта.

Аналогично предыдущему находим перемещение пластинки под действием груза, прикладываемого по площади круга контакта:

$$W(x, y, x_1, y_1, q\tau) = W_1(x, y, x_1, y_1, t) + \\ + \frac{4a^4 s(1 + \mu_1^2)}{\pi^5 a b D} \sum_m \sum_n \frac{\gamma'_{mn}}{(m^2 + n^2 \mu_1^2)^3} [P_1 S_{q-1, q} + \\ + (P_2 - P_1) S_{q-2, q} + (P_q - P_{q-1}) \left( -\sin \frac{\omega_{mn}\pi}{s\omega_{11}} \right)]; \quad (19.93)$$

здесь и в дальнейшем обозначено

$$S_{q-j, q-j+1} = \sin \frac{\omega_{mn}\pi(q-j)}{s\omega_{11}} - \sin \frac{\omega_{mn}\pi(q-j+1)}{s\omega_{11}}.$$

Значение  $W_1(x, y, x_1, y_1, q\tau)$  находится по формуле

$$W_1 = \frac{4a^4}{D\pi^4 ab} \sum_m \sum_n \frac{P(q\tau) \gamma'_{mn}}{(m^2 + n^2 \mu_1^2)^2} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b} \times \\ \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (19.94)$$

т. е.  $W_1$  — статический прогиб плиты от силы  $P(q\tau)$ , представляющей собой равнодействующую равномерно распределенной нагрузки  $\frac{P(q\tau)}{\pi c^2}$  по площади круга контакта радиуса  $c$ .

Беря производные от  $w$  и вычисляя  $w''_{xx}$ ,  $w''_{yy}$ , находим значения изгибающих моментов ( $t = q\tau$ )

$$M_x = M'_x + \frac{4as(1 + \mu_1^2)}{\pi^3 b} \sum_m \sum_n \frac{(m^2 + \sigma \mu_1^2 n^2) \gamma'_{mn}}{(m^2 + \mu_1^2 n^2)^3} \times \\ \times \left\{ \left[ P_1 S_{q-1, q} + (P_2 - P_1) S_{q-2, q-1} + \dots + (P_{q-1, q-2}) S_{1, 2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (P_q - P_{q-1}) \left( -\sin \frac{\omega mn \pi}{s\omega_{11}} \right) \right] \right\} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b} \times \\ \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (19.95)$$

Аналогичным образом определяем

$$M_y = M'_y + \frac{4as(1 + \mu_1^2)}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{(\sigma m^2 + \mu_1^2 n^2) \gamma'_{mn}}{(m^2 + n^2 \mu_1^2)^3} \times \\ \times \left[ P_1 S_{q-1, q} + \dots + (P_q - P_{q-1}) \left( \sin \frac{\omega mn \pi}{s\omega_{11}} \right) \right] \times \\ \times \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (19.95')$$

НЖК  
:67

Значения  $M'_x$ ,  $M'_y$  находятся по формулам, приведенным в книге С. Тимошенко пластинки и оболочки

$$\left. \begin{aligned} M'_x &= \frac{P(q\tau)}{8\pi} (1 + \nu) \left[ 2 \ln \frac{2a \sin \frac{\pi x_1}{a}}{\pi c_q} + (\lambda - 2) \right] + \\ &\quad + \frac{P_q}{8\pi} (1 - \nu) \mu; \\ M'_y &= \frac{P_q}{8\pi} (1 + \nu) \left[ 2 \ln \frac{2a \sin \frac{\pi x_1}{a}}{\pi c_q} + (\lambda - 2) \right] - \\ &\quad - \frac{P_q}{8\pi} (1 - \nu) \mu; \end{aligned} \right\} \quad (19.96)$$

здесь  $c_q$  — радиус зоны контакта для  $t = q\tau \left( x_1 = \frac{a}{2} \right)$ .

По схеме, подобной схеме расчета для балки, можно определить прогибы пластинки, давления при ударе, напряжения в ней. Данные расчета для нескольких пластин приведены ниже, при изучении удара на основе волнового уравнения.

Значения  $M'_x$  и  $M'_y$  определяются по формулам, приведенным в книге С. Тимошенко «Пластинки и оболочки».

Повторяя схему расчета, ту же, что для балки, можно рассчитывать прогибы пластинки, давления при ударе и пр.

По данной методике составлены программы расчета деформаций и напряжений для ЭЦМ.

Проведены расчеты ряда пластин с различными граничными условиями.

### Удар по прямоугольной плите с учетом инерции поворота и сил перерезывания

Предыдущие выводы относятся к неволновому уравнению поперечных колебаний плиты. Для учета влияния волновых процессов необходимо, так же как и для стержня, принять во внимание влияние перерезывающей силы и инерцию вращения.

Введем обозначения:

$w(x, y, t)$  — перемещение срединной поверхности плиты;

$h$  — толщина плиты;  $J = \frac{h^3}{12}$ ;

$\psi_x, \psi_y$  — углы наклона касательной к упругой поверхности вдоль оси  $x$ -ов и  $y$ -ов, от действия только изгибающих моментов

$$\psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad (19.97)$$

$q(x, y, t)$  — интенсивность внешней нагрузки;

$k'$  — коэффициент влияния формы сечения (стр. 47).

Перерезывающие силы

$$N_1 = k'Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right), \quad N_2 = k'Gh \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right). \quad (19.98)$$

Изгибающий и крутящий моменты

$$M_1 = -D \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right); \quad M_2 = -D \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right);$$

$$H = -\frac{1-\nu}{2} D \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right). \quad (19.99)$$

Используя уравнения равновесия пластинки с учетом инерционных членов от поступательного и вращательного движений элемента плиты, т. е. заменив в формуле (9.5) —  $\rho$  и  $N_1, N_2$  на величины

$$\rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - q, \quad N_1 - \rho J \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \quad N_2 - \rho J \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2},$$

получим после подстановки значений (19.98) и (19.99) в уравнение равновесия (9.5) следующие уравнения движения для пластинки с учетом инерции поворота и сил перерезывания:

$$k'G \left( \Delta \omega - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) = \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \frac{q}{h}; \quad (19.100)$$

$$k'Gh \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - \psi_x \right) = -D \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} \right) - \\ - D \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) + \rho J \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}; \quad (19.101)$$

$$k'Gh \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} - \psi_y \right) = -D \left( \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) - \\ - D \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \right) + \rho J \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}.$$

Если от второго уравнения возьмем производную по  $x$ , а от третьего по  $y$  и сложим их, то получим уравнение

$$\Delta \omega - \psi_{xy} = -\frac{D}{k'Gh} \Delta \psi_{xy} + \frac{\rho J}{k'Gh} \cdot \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}. \quad (19.102)$$

Исключая из уравнений (19.100) и (19.102)  $\psi_{xy}$ , приходим к волновому уравнению колеблющейся плиты

$$\Delta \Delta \omega - \left( \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{\partial^2 \Delta \omega}{\partial t^2} + \frac{1}{c_1^2 c_2^2} \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial t^4} + \frac{\rho h}{D} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \\ = \frac{q}{D} + \frac{1}{k'Gh} \left( \frac{\rho J}{D} \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \Delta q \right), \quad (19.103)$$

$$\text{где } c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}; \quad c_2 = \sqrt{\frac{2G}{3\rho}};$$

здесь  $c_1$  и  $c_2$  — скорости распространения волн в плите, эти скорости (для бесконечной плиты) имеют значения  $c_1 = 5,4 \cdot 10^3$  м/сек,  $c_2 = 2,6 \cdot 10^3$  м/сек.

Применим численный метод решения, изложенный выше для стержней и пластин, к волновым уравнениям движения пластины (19.100) и (19.102), которые более удобны для получения решений, чем уравнение (19.103).

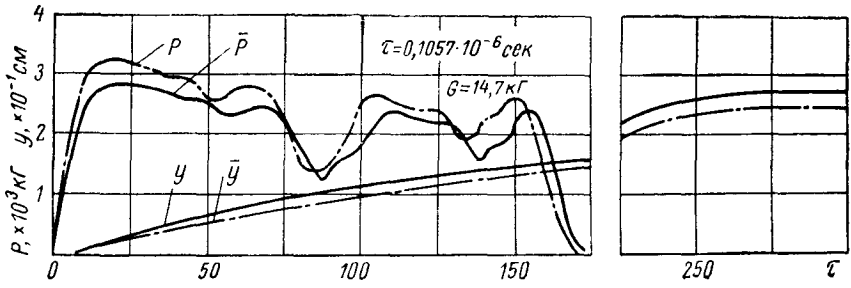


Рис. 19.13

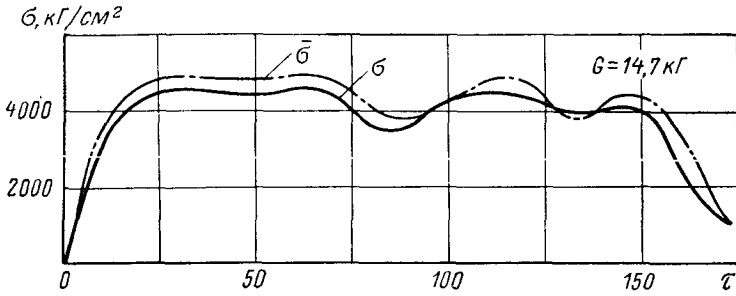


Рис. 19.14

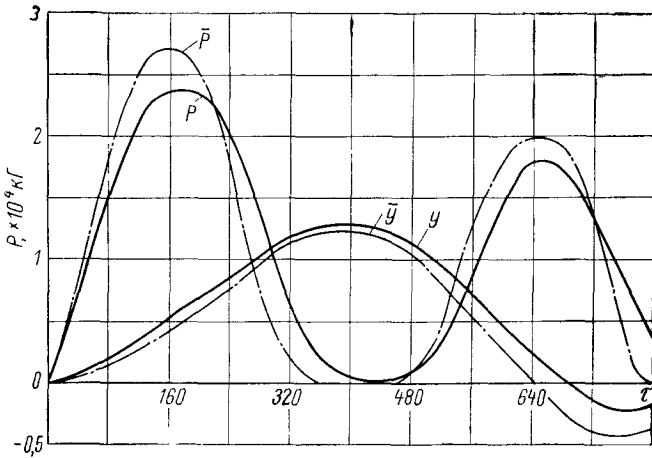


Рис. 19.15

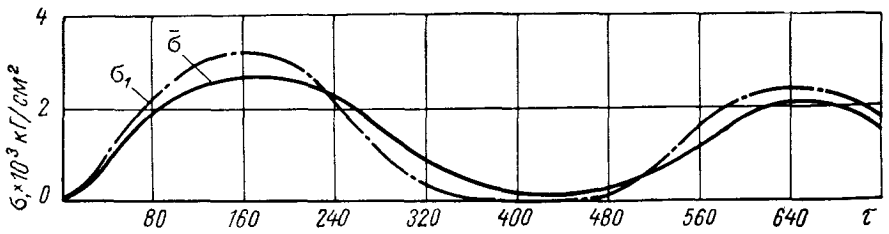


Рис. 19.16

Переходя к операторам по времени, можно решение этих уравнений искать в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega(x, y, p) &= \sum_n \sum_m A_{mn}(p) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \Psi_{xy} &= \sum_n \sum_m B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} (19.104)$$

После подстановки значений (19.104) в уравнения (19.100) и (19.102) получим для определения  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} - \left[ \frac{\pi^2}{a^2} C_{mn} + \frac{\rho}{k'G} p^2 \right] A_{mn} - B_{mn} &= - \frac{4}{ab} \cdot \frac{1}{k'Gh} \bar{q}_{mn}; \\ - \frac{\pi^2}{a^2} C_{mn} A_{mn} - \left[ 1 + \frac{D}{k'Gh} \frac{\pi^2}{a^2} C_{mn} + \frac{\rho J}{k'Gh} p^2 \right] B_{mn} &= 0; \end{aligned} \right\} (19.105)$$

здесь  $C_{mn} = m^2 + n^2 \mu^2$   
и обозначено

$$\bar{q}_{mn} = \int_F \bar{P}(p) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad (19.106)$$

причем интеграл берется по площадке контакта радиуса  $C$ , на которую действует равномерно распределенная нагрузка  $q(x, y, t)$ , равнодействующая которой равна контактной силе  $P = q(x, y) \pi c^2$ .

Для  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  из уравнений (19.105) и (19.106) получаем значения

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4}{ab} \cdot \frac{k'G}{\rho^2 J} \left[ 1 + \frac{D}{k'Gh} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} C_{mn} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho J p^2}{k'Gh} \right] \frac{\bar{P}}{\Delta_1(p)} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b}; \\ B_{mn} &= \frac{4}{ab} \cdot \frac{k'G}{\rho^2 J} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} C_{mn} \frac{\bar{P}}{\Delta_1(p)} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b}; \end{aligned} \quad (19.107)$$

здесь

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= p^4 + \frac{k'Gh}{\rho J} p^2 \left[ 1 + \frac{\pi^2 h^2}{12a^2} C_{mn} \left( 1 + 2 \frac{1}{k'(1-\nu)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^4}{a^4} C_{mn}^2 \frac{k'GD}{\rho^2 J} \right]. \end{aligned} \quad (19.108)$$

Алгоритм расчета на ЭЦВМ аналогичен изложенному выше для случая балок и пластин.

Приводим результаты расчетов для квадратной пластины  $a = b = 60$  см без учета и с учетом волновых процессов. На рис. 19.13



и 19.14 приведены данные расчета для плиты толщиной  $h = 1,2$  см;  $h_{сбр} = 26$  см,  $G = 14,7$  кг. Как видно из рис. 19.13, максимальная сила контакта  $P_{\max}$  с учетом волновых процессов приблизительно на 20% меньше, величина  $\bar{\sigma}_{из}$  несколько выше (рис. 19.14). Интенсивность напряжений  $\sigma_i$  при учете волновых процессов снижается. Однако с увеличением толщины плиты  $q$  сила контакта  $P$  с учетом волновых процессов увеличивается. Напряжения  $\sigma$  отличаются незначительно. Это ясно видно из рис. 19.15 и 19.16, составленных для толщины плиты  $b = 5$  см,  $a = h = 60$  см.

---

## ЛИТЕРАТУРА

1. А н а н ь е в И. В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. М., Гостехиздат, 1946.
2. А н д р о н о в А. А., В и т т А. А. и Х а й к и н С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
3. Б а б а к о в И. М. Теория колебания. М., «Наука», 1965.
4. Б е л я е в Н. М. Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил. Сб. «Инженерные сооружения и строительная механика». Изд-во «Путь», 1924.
5. Б и ц е н к о К. и Г р а м м е л ь Р. Техническая динамика, т. II. М.—Л., Гостехиздат, 1953.
6. Б о г о л ю б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
7. Б о г о м о л о в С. И., С л и в а О. К. и Ж у р а в л е в а А. М. Динамика роторов турбомашин. Сб. «Динамика и прочность машин». Изд-во Харьковского университета. Вып. 6, 1967.
8. Б о л о т и н В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
9. Б о н д а р ь Н. Г. и др. Динамика железнодорожных мостов. М., изд-во «Транспорт», 1965.
10. Б у л г а к о в Б. В. Колебания, М., Гостехиздат, 1954.
11. В а т с о н Т. Н. Теория бесселевых функций, ч. I и II. М., ИЛ, 1949.
12. В л а с о в В. З. Тонкостенные упругие стержни. М., Физматгиз, 1959.
13. В о л ь м и р А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., изд-во «Наука», 1967.
14. В о р о б ь е в Ю. С. Колебания турбинных лопаток с учетом различных факторов. Применение электронных вычислительных машин в строительной механике (труды конференции). Киев, «Наукова думка», 1968.
15. В о р о б ь е в Ю. С. Уточнение уравнений свободных колебаний вращающихся стержней. Сб. «Рабочие процессы в турбомашинах и прочность их элементов». Киев, «Наукова думка», 1965.
16. Г а л е р к и н Б. Г. Собрание сочинений, т. II. М., изд-во АН СССР, 1953.
17. Г а р т о г Дж. П. Механические колебания, Перевод с английского. М., Физматгиз, 1959.
18. Г е р ш г о р и н С. Колебания пластинок, нагруженных сосредоточенными массами. «Прикладная механика и математика», т. I. Вып. 1, 1933.
19. Г о г е н е м з е р К., П р а г е р В. Динамика сооружений. М.—Л., ОНТИ, 1936.
20. Г о л о с к о к о в Е. Г. и Ф и л и п п о в А. П. К вопросу об определении критических скоростей валов, имеющих нелинейные опоры. Сб. «Динамика и прочность машин». Вып. I. Изд-во Харьковского университета, 1965.

21. Голоскоков Е. Г. и Филиппов А. П. Нестационарные колебания механических систем. Киев, изд-во «Наукова думка», 1966.
22. Гольденвейзер А. Л. Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки. Киев, «Прикладная математика и механика» т. 30. Вып. 1, 1966.
23. Гольдшмит В. Удар, М., «Стройиздат», 1965.
24. Голубенцев А. Н. Интегральные методы в динамике. Киев, изд-во «Техника», 1967.
25. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластин и оболочек. Киев, изд-во «Наукова думка», 1964.
26. Гонткевич В. С. Собственные колебания оболочек в жидкости. К., изд-во «Наукова думка», 1964.
27. Григолюк Э. И., Присекин В. Д. Динамическое взаимодействие ортотропной цилиндрической оболочки с акустической ударной волной. М., «Известия АН СССР. Механика и машиностроение», № 6, 1963.
28. Гробов В. А. Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин. М., изд-во АН СССР, 1961.
29. Гроссман Е. П. Флаттер. Труды ЦАГИ. Вып. 284. М., 1937.
30. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов. М., изд-во АН СССР, 1959.
31. Динник А. Н. Избранные труды, т. I. Киев, изд-во АН УССР, 1962.
32. Диткин В. А. и Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
33. Дондошевский В. К. Расчеты колебаний упругих систем на электронных вычислительных машинах. М., «Машиностроение», 1965.
34. Иорish Ю. А. Измерение вибраций. М., Машгиз, 1956.
35. Кантор Б. Я., Филиппов А. П. Расчет изгиба секторной пластины переменной толщины, защемленной по части дугового края на быстродействующей счетной машине. «Известия АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение», № 1, 1962.
36. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1962.
37. Карпов К. А. Таблицы функции  $W(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$  в комплексной области. М., изд-во АН УССР, 1954.
38. Каудерер Г. Нелинейная механика. Перевод с немецкого. М., ИЛ, 1961.
39. Кац А. М. Вынужденные колебания при прохождении через резонанс. Инженерный сборник, т. III. Вып. 2. М., изд-во АН СССР, 1947.
40. Кильчевский Н. А. Теория соударения твердых тел. Современные проблемы механики. Л.—М., Гостехиздат, 1949 (2-е изд., К. 1969, «Наукова думка»).
41. Кильчевский Н. А. Аналитическая механика оболочек. Киев, изд-во АН УССР, 1963.
42. Колодяжный А. В. Действие ударной волны на круговую цилиндрическую оболочку. Сб. «Гидроаэромеханика и теория упругости». Вып. 9, 1968.
43. Колодяжный А. В., Филиппов А. П. Действие ударной волны на цилиндрическую оболочку. Городская научно-техническая конференция «Эстафета поколений». Харьков, НТО машиностроение, 1968.
44. Колоушек В. Динамика стропильных конструкций. М., «Стройиздат», 1965.
45. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М., ИЛ, 1955.

46. К о н о н е н к о В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М., «Наука», 1964.
47. К р ы л о в А. Н. Вибрация судов. М.—Л., ОНТИ, 1936.
48. К р ы л о в А. Н. Об определении критических скоростей вращающегося вала. Л., изд-во АН СССР, 1932.
49. К р ы л о в А. Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. М., изд-во АН СССР, 1931.
50. К р ы л о в Н. М. и Б о г о л ю б о в Н. Н. Исследование явления резонанса при поперечных колебаниях стержней, находящихся под воздействием периодических нормальных сил, приложенных к одному из концов стержня. Сб. «Исследования колебаний конструкций». Киев—Харьков, Гостехиздат УССР, 1935.
51. К р ы л о в Н. М. Избранные труды, т. II. Киев, изд-во АН УССР, 1961.
52. К у ш у л ь М. Я. Автоколебания роторов. М., изд-во АН СССР, 1963.
53. Л а н д а у Л. и Л и ф ш и ц Е. Механика сплошных сред, изд. 2. М., Физматгиз, 1953.
54. Л а н с Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. Перевод с английского. М., ИЛ, 1962.
55. Л а н ц о ш К. Практические методы прикладного анализа. Перевод с английского. М., Физматгиз, 1961.
56. Л е в и н А. В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин. М.—Л., Госэнергоиздат, 1953.
57. Л е й б е н з о н А. С. Собрание трудов, т. I. М., изд-во АН СССР, 1951.
58. Л у р ь е А. И. Операционное исчисление. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
59. Л я в А. Е. Математическая теория упругости. Перевод с английского. М., ОНТИ, 1935.
60. М а к - Л а х л а н Н. В. Теория и приложения функций Матье. Перевод с английского. М., ИЛ, 1953.
61. М а л к и н И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
62. М а р ч е н к о Г. А. и Ф и л и п п о в А. П. О колебаниях пластин в потоке газа. «Прикладная механика», т. II. Вып. 2. Киев, 1966.
63. М а р ч е н к о Г. А. Метод Ритца в неконсервативных задачах теории устойчивости. Известия вузов, авиационная техника, 3, 62—88.
64. М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных системах. Киев, изд-во АН УССР, 1955.
65. М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М., «Наука», 1964.
66. М и х л и н С. Г. Вариационные методы математической физики. М., ГИТТЛ, 1957.
67. М и х л и н С. Г. Численная реализация вариационных методов. М., «Наука», 1966.
68. М о в ч а н А. А. Об устойчивости панели, движущейся в газе. «Прикладная математика и механика», т. 21. № 2, М., 1957.
69. Н и к о л а е н к о Н. А. Колебания неограниченной плиты, лежащей на упругом полупространстве и упругом слое. Сб. «Вопросы расчета плит на упругом основании». М., Изд-во по строительству и архитектуре, 1958.
70. О н и а ш в и л л и О. Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек. М., изд-во АН СССР, 1957.
71. П а н о в к о Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., Физматгиз, 1960.

72. П а н о в к о Я. Г., Г у б а н о в а И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., «Наука», 1964.
73. П е н ц о в В. М. и Ф и л и п п о в А. П. Переход через резонанс стержня с нелинейными опорами. «Прикладная механика», т. II. Вып. 12, Киев, 1966.
74. П е й т о н Р. Дж. Динамические мембранные напряжения в круговой цилиндрической оболочке. «Прикладная механика», серия Е, (Труды американского общества инженеров-механиков), № 3, 1961.
75. П и с а р е н к о Г. С. Рассеяние энергии при механических колебаниях. Киев, изд-во АН УССР, 1962.
76. П о т е л е ж к о В. П. и Ф и л и п п о в А. П. Контактная задача для плиты, лежащей на упругом основании. «Прикладная механика», т. III, вып. 1, Киев, 1967.
77. Р а б и н о в и ч И. М. Курс строительной механики, т. I, II. М., Изд-во по строительству и архитектуре, 1954.
78. Р а б и н о в и ч И. М. Основы динамического расчета сооружений на действительные мгновенные сил кратковременных нагрузок. М., Госстройиздат, 1945.
79. Р а с с т р и г и н Л. А. Некоторые особенности нестационарного движения гибкого вала с двигателем как автономной системы вблизи критической скорости. «Известия АН СССР, ОНТ», № 5, 1959.
80. Расчеты по прочности в машиностроении под редакцией С. Д. Пономарева. М., Машгиз, т. I, 1956; т. III, 1959.
81. Р а х м а т у л л и н Х. А., Д е м ь я н о в Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1962.
82. Р в а ч е в В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. Киев, изд-во «Техника», 1967.
83. Р в а ч е в В. М. и др. Решение задачи Неймана для областей сложной формы. «Теоретическая электротехника», № 5, Львов, 1968.
84. С е р е н с е н С. В., Т е т е л ь б а у м М. И., П р и г о р о в с к и й К. И. Динамическая прочность в машиностроении. М., Машгиз, 1945.
85. С м и р н о в А. Ф. и др. Расчет сооружений с применением вычислительных машин. М., «Стройиздат», 1964.
86. С н е д д о н И. Преобразования Фурье. Перевод с английского. М. ИЛ, 1955.
87. С о р о к и н Е. С. К вопросу неупругого сопротивления строительных материалов при колебаниях. Научные сообщения ЦНИПС. Вып. 15. М., Госстройиздат, 1954.
88. С т о к е р Дж. Нелинейные колебания в математических системах. М., ИЛ, 1952.
89. С т р э т т М. Д. Функции Матье, Ляме и родственные им в физике и технике. Перевод с немецкого. Киев—Харьков, Гостехиздат УССР, 1935.
90. С т р э т т Дж. В. (Лорд Рэйлей). Теория звука, т. I, II. Гостехиздат, 1955.
91. Т е о д о р ч и к К. Ф. Автоколебательные системы. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
92. Т е р е н ь е в В. Н. и Ф и л и п п о в А. П. Вынужденные установившиеся колебания без конечных балок, лежащих на упругом полупространстве. «Прикладная механика», т. I, вып. 9, Киев, 1965.
93. Т е р е н ь е в В. Н. Динамическое действие подвижной нагрузки на балки, лежащие на упругом трехмерном полупространстве. Сб. «Динамика и прочность машин», вып. 6. Изд-во ХГУ, 1967.

94. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., Физматгиз, 1959.
95. Терских В. П. Метод цепных дробей в применении к исследованию механических систем, в 3 томах, т. I, «Простые линейные и нелинейные системы». Л., Судпромгиз, 1955.
96. Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Киев, изд-во АН УССР, 1962.
97. Ульянички Д. Д. Экспериментальное определение частот и форм собственных колебаний лопастей поворотнлопастных гидротурбин. Сб. «Колебания в турбомашинах», вып. 14. М., изд-во АН СССР, 1956.
98. Фадеев А. К. и Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.
99. Фадеева В. Н. и Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. М., Гостехиздат, 1954.
100. Филиппов А. П. Колебания упругих систем. Киев, изд-во АН УССР, 1955.
101. Филиппов А. П. Колебания механических систем. Киев «Наукова Думка», 1965.
102. Филиппов А. П. и Кохманюк С. С. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. Киев, «Наукова Думка», 1967.
103. Филиппов А. П. и др. Численные методы в прикладной теории упругости. Киев, «Наукова Думка», 1968.
104. Филиппов А. П., Воробьев Ю. С. Свободные изгибно-крутильные колебания естественно закрученных лопаток турбомашин. Труды Лаборатории гидравлических машин АН УССР. Вып. 10. Киев, изд-во АН УССР, 1962.
105. Филиппов А. П. Вынужденные колебания линейной системы при прохождении через резонанс с нелинейно изменяющейся частотой. «Известия АН СССР, ОТН», 1958, № 12.
106. Филиппов А. П., Голоскоков Е. Г. К вопросу о переходе через резонанс упругих систем. Труды Харьковского политехнического института, серия инженерно-физическая, т. XIV, 1958.
107. Филиппов А. П. Установившиеся колебания бесконечно длинной балки, лежащей на упругом полупространстве, под действием движущейся силы. «Известия АН СССР. Механика и машиностроение», 1961, № 6.
108. Филиппов А. П., Пенцов В. М. К вопросу о прохождении через резонанс нелинейной системы с одной степенью свободы. Труды Лаборатории гидравлических машин АН УССР, вып. II, Киев, 1964.
109. Филиппов А. П. Динамическое действие на балку с шарнирно опертыми концами груза и гармонической силы, движущейся с постоянной скоростью. «Изв. АН СССР. Механика и машиностроение», № 4, 1964.
110. Фрезер Р., Дункан, Коллар А. Теория матриц и ее приложения. Перевод с английского. М., ИЛ, 1950.
111. Шиманский Ю. А. Динамический расчет судовых конструкций. Л., Изд-во судостроительной литературы, 1948.
112. Штейнвольф Л. И. Динамические расчеты машины и механизмов. М., Машгиз, 1961.
113. Челомей В. Н. О колебаниях стержней, подверженных действию периодически изменяющихся продольных сил. Труды Киевского авиационного института. Вып. 8, Киев, 1937.
114. Чудновский В. Г. Методы расчета колебаний стержневых систем. Киев, изд-во АН УССР, 1952.
115. Arnold R. N., Warburton G. B. The Flexural Vibrations of Thin Cylinders, Inst. Mech. Eng., Proceedings (A), vol. 167, N 1, 1953.

116. Baker W. E. Axisymmetrical Modes of Vibration of the Spherical Shell, *JASA*, vol. 33, n 12, 1961.
117. Barton C. W. Vibration of Rectangular and Screw Cantilever Plates, *J. Appl. Mech.*, vol. 18, N 2, 1951.
118. Bicer a, *A Handbook of Torsional Vibrations*, Cambridge University Press, 1958.
119. Bleich H. H., Baron M. L. Vibrations of Shells in an Acoustic Medium, *J. Appl. Mech.*, vol. 21, N 2, 1954.
120. Cowper G. R. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theorie, *J. Appl. Mech.*, vol. 33, N 2, 1966.
121. Federhofer K. Eigenschwingungen der Kegelshalle, *Ing. — Archiv*, S. 288, 1938.
122. Calletly, On the Vacuum Vibrations of Simply Supported Ring Stiffened Cylindrical Shells, *Proc. of the 2nd U. S. Nat. Cong. Appl. Mech.*, p. 225—231, 1955.
123. Goldenberg Í., Bogdanoff J., Marcus L. On the Calculation of the Axisymmetrical Modes and Frequencies of Conical Shells, *JASA*, 32, N 6, 1960.
124. Gonda Jan, *Kmutanie Pružnych Teiies*, Slovenska Akademia Vied, Bratislava, 1961.
125. Grassman. Uber Querschwingung eines Stabes mit Einzelmasse, *Ing. — Archiv*, H. 2, 1931.
126. Herrmann G., Mirsky Í. On Vibrations of Conical Shells, *Preprint Inst. Aeron. Sci.*, N 7, 8, 1958.
127. Iguchi S. Die Biegungsschwingungen der vierseitig eingespannten rechteckigen Platten, *Ing. — Archiv*, H. 1, 1937.
128. Iguchi S. Die Eigenschwingungen und Eigenfiguren der vierseitig freien rechteckigen Platten, *Ing. — Arch.*, XXI, 5—6, 1953.
129. Jünger M. C. Vibrations of Reinforced Shells in a Vacuum and in a Fluid, *J. Appl. Mech.*, vol. 21, N 1, 1954.
130. Jerrett L. G., Werner P. C. The Vibration of Rotating Tapered Twisted Beams, *J. Appl. Mech.*, vol. 20, N 3, 1953.
131. Johnson M. W., Reissner E. On Transverse Vibrations of Spherical Shallow Shells, *Quart. Appl. Math.*, vol. XV, N 4, 1958.
132. Johnson D. C., Bishop R. E. The Modes of Vibration of a Certain System Having a Number of Equal Frequencies, *J. Appl. Mech.*, 23, N 3, 379—384, 1956.
133. Jüger, Die Eigenfrequenzen verwandener Schaufeln, *Ing. — Arch. B. XXIV*, H. 4, 1960.
134. Klotter K. *Technische Schwingunglehre*, Springer Verlag, B. 1, 1951; B. 2, 1960.
135. Kenney Í. T. Steady—State Vibrations of Beams on Elastic Foundation for Moving Load, *J. Appl. Mech.*, vol. 21, N 4, 1954.
136. Lamb H. On the Propagations of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, (A) 203, 1904.
137. Lewis F. M. Vibrations during Acceleration through a Critical Speed, *Trans. ASME*, vol. 54, N 23, 1932.
138. Marquerre K. Matrices of Transmission in beam problems, *Progress in Solid Mechanics*, vol. 1. p. 61—85. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.

139. Marin  $\dot{\text{I}}$ , Stulen. F. B. A New Fatigue Strength Damping Criterion for the Design of Resonant Members, *J. Appl. Mech.*, September, 1947.
140. Miller P. R. Free Vibrations of Stiffened Cylindrical Shell, Aeronautic Research Council, Rep. and Mem., N 3154, London, 1960.
141. Mirsky J., Herrman G. Nonaxially symmetric motions of cylindrical shells. *J. Acoust. Soc. America*, vol. 29, N 10, pp. 1116—1123 (1957).
142. Myklestad N. O. A New Method of Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibration of Aeroplane Wings and Other Types of Beams, *J. Aeronaut. Sciences*, vol. 11., N 2, 1944.
143. Naghdi P., Couper R. Propagation of elastic waves in cylindrical Shells including the effects of transverse shear and rotatory inertia, *J. Acoustical Soc. Am.*, 1960, vol. 32, N 6.
144. Prohl M. A. A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors, *J. Appl. Mech.*, September, 1936.
145. Reissner E. Stationare axialsymmetrische durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraums, *Ing. — Archiv*, Dezember, 1936.
146. Reissner E. On Axisymmetrical Vibrations of Shallow Spherical Shells, *Quart. Appl. Math.*, 13, 1955.
147. Timoshenko S. *Collected Papers*, McGraw Hill, 1953.
148. Wagner K. W. *Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen*, Dieterich'sche Verlagbuchhandlung.
149. Washizu Kyichiru., *Variational Methods in Elasticity und Plasticity*, Pergamon Press, 1966.
150. Zoller, Über die Koppelung der Dehnungs — und Torsions — schwingungen von umlaufenden Scheiben, *Ing. — Archiv*, B. 23, Berlin, 1955.
151. *Proceedings of the Second U. S. National of Applied Mechanics*, 1954.
-



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
-----------------------	---

### Глава 1

#### Колебания линейной системы с одной степенью свободы

Простейшие случаи колебания . . . . .	5
Крутильные колебания . . . . .	8
Свободные колебания при затухании . . . . .	10
Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы . . . . .	14
Биеения . . . . .	16
Вынужденные колебания при затухании . . . . .	18
Вынужденные колебания при упругом подвесе . . . . .	22

### Глава 2

#### Колебания системы с несколькими степенями свободы

Основные уравнения динамики . . . . .	24
Связи системы и обобщенные координаты . . . . .	24
Уравнения движения Лагранжа второго рода . . . . .	26
Канонические уравнения движения Гамильтона . . . . .	30
Колебания системы в случае связей, не зависящих от времени . . . . .	31
Колебания невесомых балок . . . . .	32
Составление уравнения частоты для невесомой балки с помощью коэффициентов влияния . . . . .	32
Дифференциальное уравнение поперечных колебаний . . . . .	34
Поперечные колебания невесомых балок постоянного сечения при наличии сосредоточенных масс . . . . .	35
Изменение жесткости балки по ступенчатому закону . . . . .	38
Невесомая балка, опертая по концам, с тремя сосредоточенными массами . . . . .	38
Балка с $n$ равными массами $m$ , расположенными на одинаковых расстояниях . . . . .	40
Вынужденные колебания . . . . .	44

### Глава 3

#### Изгибно-крутильные колебания стержней

Общие представления о деформации стержней . . . . .	45
Влияние касательных напряжений на деформацию . . . . .	45
Депланация при кручении . . . . .	50
Центр изгиба . . . . .	52

Основные зависимости для колеблющегося стержня . . . . .	56
Компоненты перемещений . . . . .	56
Энергия деформации стержня . . . . .	58
Общие дифференциальные уравнения движения стержня . . . . .	60
Уравнения изгибно-крутильных колебаний . . . . .	62
Общие уравнения . . . . .	62
Колебания свободно опертого стержня, имеющего плоскость симметрии . . . . .	63
Колебания консольного стержня, имеющего плоскость симметрии . . . . .	65
Понятие о флаттере . . . . .	68

#### Глава 4

##### Поперечные колебания весомых стержней постоянного сечения

Свободные колебания незагруженного стержня . . . . .	73
Частотные уравнения . . . . .	73
Фундаментальные функции . . . . .	78
Свободные колебания балки с сосредоточенными массами и упругими опорами . . . . .	83
Колебания балки с сосредоточенными массами . . . . .	83
Стержень, упруго опертый в точках . . . . .	86
Частотные уравнения для частных случаев . . . . .	87
Колебания балки, с концом которой связано твердое тело . . . . .	95
Колебания стержня с $n - 1$ сосредоточенными массами и упругими опорами на одинаковых расстояниях . . . . .	97
Колебания неразрезных балок . . . . .	100
Метод решения . . . . .	100
Неразрезная опертая балка с $n$ пролетами при распределенной нагрузке . . . . .	101
Колебания неразрезной балки с различными сечениями в пролетах и с сосредоточенными массами . . . . .	105
Балка на сплошном упругом основании . . . . .	114
Влияние инерции поворота и перерезывающих сил . . . . .	114
Дифференциальное уравнение . . . . .	114
Свободные колебания . . . . .	116
Условия закрепления для общего случая . . . . .	117
Колебания балки при наличии сосредоточенных масс . . . . .	118

#### Глава 5

##### Приближенные методы определения частот колебаний

Вариационные методы . . . . .	125
Вариационные уравнения Лагранжа и формула Кастильяно . . . . .	125
Принцип Остроградского — Гамильтона . . . . .	126
Метод Ритца . . . . .	127
Метод Б. Г. Галеркина . . . . .	130
Применение начала Лагранжа . . . . .	132
Построение координатных последовательностей . . . . .	133
Примеры . . . . .	141
Заключительные замечания . . . . .	146

## Глава 6

### Колебания балок с учетом затухания

Причины, вызывающие рассеяние энергии . . . . .	147
Основные гипотезы, учитывающие рассеяние энергии при затухании . . . . .	149
Методы определения декремента затухания и данные для ряда материалов . . . . .	151
Методы непосредственного интегрирования уравнения поперечных колебаний стержней . . . . .	155
Уравнение поперечных колебаний с учетом затухания . . . . .	155
Вынужденные колебания при наличии сосредоточенных масс . . . . .	156
Поперечные колебания с учетом затухания для любого закона изменения возмущающей силы . . . . .	166
Вынужденные колебания стержня с сосредоточенным грузом . . . . .	171
Применение метода разложения по фундаментальным функциям . . . . .	173
Свободные колебания с учетом затухания . . . . .	173
Вынужденные колебания балок под действием периодических сил . . . . .	174
Консольный стержень с сосредоточенной массой . . . . .	177

## Глава 7

### Колебания плоских рам

Точный метод . . . . .	180
Общий метод составления уравнений частот . . . . .	180
Колебания прямоугольной рамы . . . . .	184
Колебания многоярусных рам . . . . .	188
Приближенные методы подсчета частот колебаний плоских рам . . . . .	190
Вычисление основной частоты для прямоугольных рам по методу Релея . . . . .	190
Вычисление основной частоты для многоярусной рамы по методу Релея . . . . .	196
Вычисление частот колебаний обертонов для рам с абсолютно жесткими ригелями . . . . .	201
Вычисление частот колебаний обертонов для плоских рам как систем с ограниченным числом степеней свободы . . . . .	205
Влияние перерезывающих сил и инерции поворота сечений на частоты колебаний рам . . . . .	209
Колебания пространственных рам с абсолютно жесткими ригелями, связывающими плоские рамы . . . . .	212
Составление уравнения частоты . . . . .	213
Колебания рамных каркасов при упругих поперечных ригелях . . . . .	222
Составление уравнения частоты для распределенных масс ригелей . . . . .	222
Уравнение частоты для сосредоточенных масс . . . . .	223

## Глава 8

### Колебания решетчатых конструкций

Составная стойка с параллельными поясами . . . . .	226
Частотные уравнения с учетом решетки . . . . .	226
Колебания стержневой фермы . . . . .	230
Дифференциальные уравнения движения . . . . .	230
Подсчет основной частоты по энергетическому методу . . . . .	233
	727

## Глава 9

### Колебание плит

Основные зависимости . . . . .	241
Дифференциальное уравнение колеблющейся плиты . . . . .	241
Потенциальная и кинетическая энергия плиты . . . . .	244
Граничные условия . . . . .	246
Свободные колебания ненагруженных плит . . . . .	248
Плита, опертая по контуру . . . . .	248
Плита с двумя опертыми краями . . . . .	250
Плита, заделанная по контуру . . . . .	251
Плита со свободными краями . . . . .	253
Колебания круглых плит . . . . .	254
Дифференциальное уравнение . . . . .	254
Свободные колебания круглой плиты . . . . .	255
Круглая пластинка под действием равномерно растягивающих или сжимающих сил . . . . .	257
Кольцевые круглые плиты . . . . .	259
Колебание эллиптической пластинки . . . . .	259
Свободные колебания нагруженных прямоугольных плит . . . . .	260
Изложение метода . . . . .	260
Прямоугольная плита, нагруженная сосредоточенными грузами . . . . .	264
Составление уравнения частот для случая нескольких грузов . . . . .	265
Прямоугольная плита, опертая по контуру, с сосредоточенным грузом . . . . .	266
Квадратная плита с четырьмя симметрично расположенными равными грузами . . . . .	268
Колебания прямоугольных плит, подкрепленных ребрами одного направления и нагруженных сосредоточенными грузами . . . . .	270
Изложение метода . . . . .	270
Плита, подкрепленная одним ребром и подпертая в двух точках . . . . .	272
Квадратная плита, подкрепленная двумя ребрами . . . . .	274
Прямоугольная плита, подкрепленная двумя ребрами с грузом посредине . . . . .	274
Прямоугольная плита, опертая по контуру и подкрепленная ребрами одинаковой жесткости на равных расстояниях . . . . .	278
Вынужденные колебания . . . . .	286
Применение приближенных методов к определению собственных частот плит, подкрепленных ребрами . . . . .	287
Плиты, подкрепленные перекрестными ребрами . . . . .	287
Плиты, подкрепленные ребрами одного направления . . . . .	291
Колебания плит переменной и постоянной жесткости со сложными граничными условиями . . . . .	299
Изложение метода . . . . .	300
Прямоугольная консольная пластина постоянной толщины . . . . .	302
Косоугольная консольная пластинка . . . . .	305
Секториальная плита в виде неполного сектора (кругового прямоугольника) . . . . .	307
Определение частот и форм колебаний пластин типа лопастей осевых поворотнлопастных гидравлических турбин . . . . .	307

Метод решения . . . . .	307
Колебания пластины типа лопасти низконапорной турбины . . . . .	309
Определение частот и форм собственных колебаний пластин типа лопастей высоконапорных осевых поворотнолопастных гидротурбин . . . . .	310
Результаты расчета модели . . . . .	313
Колебания плит сложной формы . . . . .	314
Устойчивость пластин в потоке газа . . . . .	316
Обтекание пластин сверхзвуковым потоком . . . . .	316
Пластина постоянной толщины в сверхзвуковом потоке газа . . . . .	317
Сущность метода определения критических параметров . . . . .	319
Прямоугольные пластины в потоке газа . . . . .	321
Устойчивость консольных пластин . . . . .	323

## Г л а в а 10

### Колебания турбинных лопаток

Колебания отдельной лопатки . . . . .	326
Работа центробежных сил . . . . .	326
Кориолисовы силы, действующие на лопатку . . . . .	328
Уравнения колебаний вращающейся лопатки . . . . .	329
Колебания лопаток, связанных бандажом . . . . .	332
Моменты, вызываемые упругими связями . . . . .	332
Определение собственных частот лопаток по методу начальных параметров . . . . .	334
Энергетический метод расчета на колебания турбинных и компрессорных лопаток . . . . .	345
Колебания лопаток с учетом затухания . . . . .	351
Уравнение поперечных колебаний . . . . .	351
Свободные колебания стержня с учетом затухания, зависящего от удлинения . . . . .	354
Влияние заделки на частоту колебаний . . . . .	355

## Г л а в а 11

### Колебания дисков

Тангенциальные колебания дисков . . . . .	357
Основные типы колебаний . . . . .	357
Дифференциальное уравнение колебаний кручения и удлинения диска . . . . .	357
Тангенциальные колебания невращающегося диска с лопатками . . . . .	359
Возможные формы колебаний . . . . .	359
Уравнения колебаний кручения облопаченных дисков гиперболического профиля . . . . .	360
Граничные условия и условия сопряжения . . . . .	361
Значение функций $K(a)$ для дисков гиперболического профиля . . . . .	364
Влияние продольной растягивающей силы . . . . .	365
Приложение полученных результатов к частным случаям . . . . .	366
Тангенциальные колебания вращающегося диска совместно с лопатками . . . . .	371
Дифференциальное уравнение для диска постоянной толщины и его решение . . . . .	371
Частотное уравнение для вращающегося облопаченного диска . . . . .	374

Колебания дисков с учетом напряженного состояния в срединной плоскости	376
Напряжения в срединной плоскости . . . . .	376
Применение метода Ритца к определению частот и форм колебаний системы диск — лопатки . . . . .	378
Применение дискретных методов для определения частоты и форм колебаний системы диск—лопатки . . . . .	381

## Г л а в а 12

### Колебания оболочек

Уравнения движения оболочек . . . . .	386
Общие уравнения в ортогональных координатах . . . . .	386
Основные уравнения теории оболочек . . . . .	388
Колебания цилиндрических оболочек . . . . .	391
Формы колебаний оболочек . . . . .	391
Дифференциальные уравнения колеблющейся оболочки и метод интегрирования . . . . .	393
Применение тригонометрических рядов . . . . .	395
Колебания оболочки, опертой и заделанной по торцам . . . . .	398
Применение энергетических методов к определению частот . . . . .	403
Контактные задачи гидроупругости для цилиндрической оболочки	405
Колебания цилиндрических оболочек в жидкости . . . . .	406
Цилиндрическая оболочка в жидкости при воздействии нагрузки взрывного типа . . . . .	409
Колебания оболочек других форм . . . . .	416

## Г л а в а 13

### Продольные и крутильные колебания стержней

Свободные колебания . . . . .	418
Дифференциальное уравнение продольных колебаний с учетом затухания . . . . .	418
Свободные колебания стержня с грузом на конце при отсутствии затухания . . . . .	420
Продольные колебания стойки с равными массами на одинаковых расстояниях . . . . .	421
Свободные колебания нагруженной стойки с учетом затухания . . . . .	426
Вынужденные колебания кручения валов при учете затухания . . . . .	430
Дифференциальное уравнение колебаний кручения . . . . .	430
Крутильные колебания вала с дисками . . . . .	430
Частные случаи . . . . .	436
Крутильные колебания многомассовых систем . . . . .	438
Дифференциальные уравнения свободных колебаний многомассовой системы . . . . .	438
Определение собственных частот и форм крутильных колебаний приведенных систем . . . . .	440
Прямой метод расчета . . . . .	440
Метод остатка (метод Толле) . . . . .	441
Метод непрерывных дробей (метод проф. В. Терских) . . . . .	441

Расчет собственных частот и форм крутильных колебаний на электронно-вычислительной машине . . . . .	446
Расчеты вынужденных крутильных колебаний . . . . .	448

## Г л а в а 14

### Колебания с нелинейными и переменными характеристиками

<b>Нелинейные колебания</b> . . . . .	452
Предварительные замечания . . . . .	452
Метод Ляпунова—Крылова . . . . .	453
Метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова . . . . .	457
Метод Ван дер Поля . . . . .	459
Точное решение для колебаний системы с нелинейной восстанавливающей силой . . . . .	462
Одновременное действие двух гармонических возмущающих сил на нелинейную систему . . . . .	464
Вынужденные колебания нелинейной системы с двумя степенями свободы . . . . .	465
<b>Квазигармонические колебания</b> . . . . .	469
Сущность явления . . . . .	469
Нахождение решений уравнения Хилла . . . . .	470
Определитель Хилла . . . . .	473
Колебание груза на пружине с периодически изменяющейся жесткостью . . . . .	476
Поперечные колебания балки под действием периодической продольной силы [4] . . . . .	479
Поперечные колебания стержней при действии продольной периодической силы при учете затухания . . . . .	481
Внутреннее трение, зависящее от амплитуды колебаний . . . . .	483
Поперечные колебания стоек с грузом на конце при учете сжатия стоек . . . . .	486
Поперечные колебания стоек с грузом при учете сжатия и затухания . . . . .	489
<b>Самовозбуждающиеся колебания (автоколебания)</b> . . . . .	493
Сущность явления . . . . .	493
Колебания маятника, насаженного на вращающийся вал . . . . .	494
Автоколебания ротора при наличии гироскопических моментов . . . . .	496

## Г л а в а 15

### Вынужденные колебания при прохождении через резонанс

<b>Прохождение через резонанс линейной системы с одной степенью свободы</b>	508
Уравнение движения и его интеграл при линейной скорости прохождения . . . . .	508
Возрастание частоты $p$ . . . . .	509
Изменение амплитуды силы по закону $P(t) = qe^{2t^2}$ . . . . .	511
Убывание частоты $p$ . . . . .	514
Пропорциональность амплитуды возмущающей силы квадрату убывающей частоты . . . . .	515
Решение задачи при учете сил трения в комплексной форме . . . . .	517
Максимальные динамические коэффициенты при переходе через резонанс . . . . .	518

Прохождение через резонанс системы с несколькими степенями свободы	522
Уравнения движения и их интегрирование	522
Крутильные колебания трехмассовой системы	524
Прохождение через резонанс линейной системы с нелинейно изменяющейся частотой возмущающей силы	527
Прохождение через резонанс при изменении частоты по параболическому закону	527
Пропорциональность возмущающей силы квадрату мгновенной частоты	532
Изменение частот колебаний по степенной функции третьего порядка	534
Применение моделирующей машины	536
Поперечные колебания стержней постоянного сечения при переходе через резонансные состояния	538
Колебания стержня с сосредоточенной массой	538
Нестационарные колебания стержня, вызываемые заданным движением опоры	541
Колебания прямоугольных пластин при переходе через резонанс	544
Изменение частоты по линейному закону	544
Изменение возмущающей силы по закону $P_0 e^{2t^2}$	546
Нестационарные колебания дисков турбомашин	548
Диск постоянной толщины	548
Действие сосредоточенной постоянной силы $P$	549
Построение асимптотических решений нелинейного уравнения с переменными коэффициентами	551
Сущность метода	551
Построение приближенного решения уравнения	553
Переход через резонанс нелинейной системы с одной степенью свободы	557
Методы численного интегрирования нелинейного уравнения (15.231)	562
Нестационарные колебания в линейной системе с периодически изменяющимися параметрами	567
Уравнение движения	567
Интегрирование уравнения для переходного процесса	568

## Г л а в а 16

### Колебания вращающихся валов

Критические числа оборотов многоопорных валов	572
Колебания вала на жестких опорах	572
Колебания вала на упругих опорах	576
Метод «матриц переноса» для расчета собственных форм и частот колебаний многопролетного стержня	580
Матричное уравнение для однородного участка весомого вала	580
Краевые условия $\Delta$ — матрицы	584
$\Delta$ -матрица матрицы $R$	588
Упругая и жесткая опоры	589
Нестационарные колебания вала с неодинаковыми главными моментами инерции поперечного сечения	596
Дифференциальные уравнения движения	596
Интегрирование уравнений движения и результаты исследования	598



Переход гибкого вала через критическую скорость . . . . .	600
Уравнения движения для гибкого вала . . . . .	600
Вал на упруго-податливых опорах . . . . .	601
Колебания гибкого ротора на нелинейно-упругих опорах с учетом гироскопического эффекта . . . . .	603
Уравнения движения . . . . .	603
Применение асимптотического метода . . . . .	607
Нестационарные изгибно-крутильные колебания системы двигатель—ротор . . . . .	609
Уравнения движения и их интегрирование . . . . .	609
Численные результаты . . . . .	612

## Г л а в а 17

### Колебание балки под действием движущейся нагрузки

Динамическое воздействие груза на весомые балки конечной длины. Движение с постоянной скоростью . . . . .	616
Движение груза по многопролетной балке . . . . .	620
Динамическое воздействие груза, движущегося равномерно, на весомые балки конечной длины . . . . .	621
Движение груза по невесомой балке . . . . .	622
Результаты расчетов при движении груза с постоянной и переменной скоростью . . . . .	625
Постоянная скорость движения . . . . .	625
Переменная скорость движения . . . . .	627
Установившиеся колебания балки на упругом основании при движении груза и воздействии периодической силы . . . . .	629
Сущность задачи . . . . .	629
Колебания балки при действии периодической силы на движущийся груз . . . . .	630
Движение груза при действии периодической силы на подрессоренную массу . . . . .	633
Расчеты для частных случаев . . . . .	635
Установившиеся колебания бесконечно длинной балки, лежащей на упругом полупространстве, под действием движущейся силы . . . . .	636
Дифференциальные уравнения движения упругой среды и их решение . . . . .	636
Условия сопряжения балки и полупространства и перемещения балки . . . . .	639
Вычисление интегралов $S(u)$ для различных $u$ . . . . .	643
Расчеты для частных случаев . . . . .	646

## Г л а в а 18

### Колебания плит, лежащих на упругом основании

Определение перемещений и напряжений основания и плиты . . . . .	649
Сущность задачи . . . . .	649
Дифференциальные уравнения колебаний . . . . .	650
Определение перемещений упругого основания . . . . .	652
Исследование полученных решений . . . . .	658
Изучение интегралов в комплексной области . . . . .	658
Разложение подынтегрального выражения по степеням $s_0$ . . . . .	663
	733

Приложение к частным случаям . . . . .	664
Амплитуды вынужденных колебаний плиты под действием силы . . .	664
Амплитуды вынужденных колебаний плиты при сосредоточенной массе	665

## Г л а в а 19

### Удар и колебания упругих тел

Состояние вопроса . . . . .	668
Неупругий удар по стержням и плитам . . . . .	669
Поперечный удар по балке при учете затухания в ней . . . . .	669
Удар по прямоугольной пластинке, лежащей на упругом основании	673
Удар по круглой пластинке, лежащей на упругом основании . . . . .	678
Упругий удар и колебания . . . . .	693
Общие сведения . . . . .	693
Упругий удар по балке без учета волновых процессов . . . . .	696
Удар по балке при учете инерции поворота и сил перерезывания . .	703
Упругий удар по тонкой прямоугольной плите . . . . .	710
Удар без учета волновых процессов . . . . .	710
Удар по прямоугольной плите с учетом инерции поворота и сил пере- резывания . . . . .	713
<i>Литература</i> . . . . .	718

Анатолий Петрович Ф и л и п п о в  
Колебания деформируемых систем

Редактор издательства *М. С. Хухлин*  
Технический редактор *Н. Ф. Демкина*  
Корректор *А. П. Озерова*  
Переплет художника *Е. В. Бекетова*

---

Сдано в производство 2/X 1969 г. Подписано  
к печати 6/VII 1970 г. Т-06988 Тираж 8000 экз.

Печ. л. 46 Бум. л. 23 Уч.-изд. л. 45,5  
Формат 60×90<sup>1/16</sup> Цена 3 р. 24 к.  
Зак. № 350

---

Издательство «МАШИНОСТРОЕНИЕ»,  
Москва, Б-66, 1-й Басманный пер., 3

---

Ленинградская типография № 6 Главполиграф-  
прома Комитета по печати при Совете  
Министров СССР  
Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10.

**НОВЫЕ КНИГИ 1970 г.  
ПО ОБЩЕТЕХНИЧЕСКИМ ВОПРОСАМ  
В МАШИНОСТРОЕНИИ**

**Издательства «МАШИНОСТРОЕНИЕ»**

**Аэротермодинамика.** 10 л. Цена 1 р.

**БАТУРИН А. П. и др. Детали машин.** Учебник для техникумов. Изд. 6-е, стереотипн. 32 л. Цена 1 р. 95 к.

**КЕСТЕЛЬМАН Н. Я. и КЕСТЕЛЬМАН В. Н. Номограммы по расчету и конструированию пластмассовых деталей машин.** 15 л. Цена 1 р. 10 к.

**КОЧАНОВ Н. С. Компактные шестизначные математические таблицы.** Справочное пособие. 8 л. Цена 60 к.

**Курсовое проектирование деталей машин.** Учебное пособие для техникумов. Изд. 6-е, переработ. 33 л. Цена 1 р. 30 к.

**НЕМЕЦ Я. Жесткость и прочность стальных деталей.** Пер. с чешск. 528 стр. Цена 2 р. 60 к.

**НЕМЕЦ Я. и СЕРЕНСЕН С. В. Прочность пластмасс.** 25 л. Цена 2 р. 25 к.

**Опоры осей и валов машин и приборов.** 518 стр. Цена 1 р. 89 к.

**Основы конструирования изделий из пластмасс.** Под ред. Э. Бера. Пер. с англ. 272 стр. Цена 1 р. 78 к.

**СЕРЕНСЕН В. С. и др. Валы и осн.** 329 стр. Цена 1 р. 30 к.

**Теория машин - автоматов и пневмо-гидропривода.** Сборник статей. Под ред. Л. В. Петрокаса. 334 стр. Цена 2 р. 38 к.

**Теория передач в машинах.** Сборник статей. Под ред. Ф. Л. Литвина. 13 л. Цена 1 р. 40 к.

**ФАВОРИН М. В. Моменты инерции тел.** Справочник. 28 л. Цена 1 р. 80 к.

## ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть								
41	2-я сверху	(2.74)	(2.50)								
49	Табл. 3.1, графа 2-я, 4-я снизу	$M_3 = 11 +$	$M_3 = 12 +$								
100	4-я сверху	на стр.	на стр. 85.								
111	14-я снизу	$k$ -й по отношению	$k$ -й, чтобы $C_k$ было наибольшим по отношению								
176	1-я и 2-я снизу (в знаменателе)	$\left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right)$	$\left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right)^2$								
178	1-я и 5-я снизу (в знаменателе)	$\left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right)$	$\left(1 - \frac{k^2}{\omega_n^2}\right)^2$								
252	Табл. 9.1, графы 1, 2-я	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px;">Заделан</td> </tr> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center; padding: 5px;">Свободен</td> <td style="width: 50%; text-align: center; padding: 5px;">Оперт</td> </tr> </table>	Заделан		Свободен	Оперт	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center; padding: 5px;">Свободен</td> <td style="width: 50%; text-align: center; padding: 5px;">Заделан</td> </tr> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center; padding: 5px;">Свободен</td> <td style="width: 50%; text-align: center; padding: 5px;">Оперт</td> </tr> </table>	Свободен	Заделан	Свободен	Оперт
Заделан											
Свободен	Оперт										
Свободен	Заделан										
Свободен	Оперт										
294	Формула (9.124)	$\omega^2 = \frac{4,730^4 B}{\sigma F b^4}$	$\omega^2 = \frac{4,730^2 B}{\rho_l F b^4}$								
319	Формула (9.169)	$\Delta s (s_1^2 -$	$4s (s_1^2 -$								
330	10-я сверху	$\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)$	$\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right)$								
343	3-я сверху	$\frac{M_{кр. n}}{G J \rho n} \cdot$	$+$ $\frac{M_{кр. n}}{G J \rho n} z.$								
390	3-я снизу	] P;	] R;								
404	9-я и 10-я сверху	$= \frac{1}{\lambda_m^2}$	$= \frac{l}{\lambda_m^2}$								
667	9-я и 13-я снизу	табл. 60	табл. 18.1								