

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Нижегородский государственный технический университет

Кафедра строительной механики корабля  
и сопротивления материалов

## **Расчет статически неопределенных балок**

Методические указания к выполнению  
*расчетно-графической работы 1*  
*по курсу строительной механики корабля*  
для студентов кораблестроительного факультета  
специальностей «Кораблестроение» (140100) и  
«Динамика и прочность машин» (071100)  
дневной формы обучения

Расчет статически неопределеных балок: Методические указания к выполнению расчетно-графической работы 1 по курсу строительной механики корабля для студентов кораблестроительного факультета специальностей «Кораблестроение» (140100) и «Динамика и прочность машин» (071100) дневной формы обучения /НГТУ; Сост.: В.Д. Вешуткин, Т.В. Моисеева. - Н. Новгород, 2004. - 42 с.

Предлагаемые методические указания предназначены для студентов кораблестроительного факультета при выполнении ими расчетно-графической работы по курсу «Строительная механика корабля» и содержат задания, общие требования и пример выполнения расчета статически неопределенной балки с пояснениями и теоретическими выкладками.

Научный редактор В.М. Волков

Редактор Э.Б. Абросимова

Подписано в печать 31.05.04. Формат 60 × 84 1/16. Бумага газетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,75. Уч.-изд. л. 2,3. Тираж 300 экз. Заказ 556.

Нижегородский государственный технический университет.  
Типография НГТУ. 603600, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

© Нижегородский государственный  
технический университет, 2004

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. Задания и общие пояснения.....	7
2. Пример выполнения расчетно-графической работы 1 Расчет статически неопределенных балок .....	19
2.1. Расчет балки по методу угловых деформаций.....	20
2.2. Расчет балки по методу трех моментов.....	24
2.3. Сравнение результатов, полученных двумя методами .....	27
2.4. Графическая интерпретация полученных результатов .....	28
2.5. Проверка условия прочности .....	31
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	
Методические указания к расчету балки по методу угловых деформаций.....	32
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	
Методические указания к расчету балки по методу трех моментов....	36
ПРИЛОЖЕНИЕ 3	
Методические указания по графическому оформлению полученных результатов.....	39

## В В Е Д Е Н И Е

Предлагаемые методические указания предназначены для студентов кораблестроительного факультета при выполнении ими расчетно-графической работы 1 по курсу «Строительная механика корабля»; **содержат задания, общие требования и пример выполнения расчета** статически неопределенной балки с пояснениями и теоретическими выкладками. Наиболее распространенными в расчетной практике являются метод 3-х моментов и метод угловых деформаций, которые и рассматриваются на примере выполнения расчетно-графической работы.

Особенностью данной методической разработки является то, что пример выполнения расчета предшествует методическим указаниям к его выполнению, что способствует **активизации самостоятельной работы студентов**, так как возникающие в процессе ознакомления с примером проблемные ситуации побуждают учащихся к поиску недостающей информации в **приложениях** по соответствующим ссылкам.

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\bar{\omega}_i$  - прогиб в «*i*»-м сечении балки, м;

$\bar{\omega}'_i$  - угол поворота «*i*»-го сечения балки, рад;

$\omega_i$  - величина, пропорциональная углу поворота «*i*»-го сечения балки, кНм;

$\alpha_i (Q_{ij})$  - угол поворота «*i*»-го сечения балки от нагрузки на участке «*ij*», рад;

$f_i$  - просадка «*i*»-й опоры, м;

$\Phi_{ij}$  - угол перекоса балки на участке «*ij*», рад;

$\Psi_{ij}$  - величина, пропорциональная углу перекоса балки на участке «*ij*», кНм;

$K_{ij}$  - относительная жесткость балки на участке «*ij*»;

$K_0$  - условная абсолютная жесткость участка балки, кНм.

### Внешние нагрузки

$P$  - сосредоточенная сила, кН;

$q$  - интенсивность распределенной нагрузки, кН/м;

$Q$  - равнодействующая распределенной нагрузки, кН;

$R$  - реактивное усилие на опоре, кН;

$M$  - сосредоточенный момент, кНм;

$M_{ij}$  - опорный момент (внешний по отношению к пролету «*ij*»), обусловленный заданной нагрузкой и смещением опор «*i*», «*j*», кНм;

$m_{ij} (m_{ji})$  - моменты от заданной нагрузки в опорных сечениях «*i*», «*j*» при условии их жесткой заделки, кНм.

### Внутренние силовые факторы (ВСФ)

$V$  - срезывающая сила, кН;

$M(x)$  - изгибающий момент, кНм;

$M_i$  - изгибающий момент на «*i*»-й опоре, кНм.

## ПРАВИЛО ЗНАКОВ

### 1. Для внешних нагрузок

- Сосредоточенные силы  $P$ , распределенные нагрузки  $q$  и опорные реакции  $R$  **положительны**, если направлены вниз (рис.1).

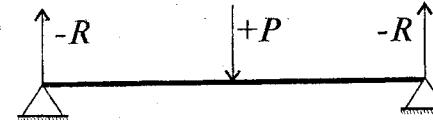
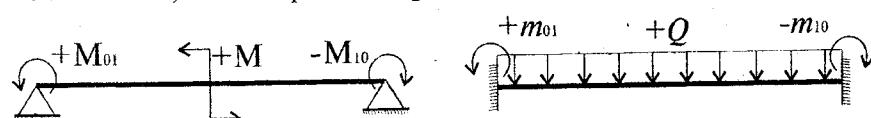


Рис.1

- Сосредоточенные моменты (внешние-  $M$  и опорные -  $M_{ij}, m_{ij}$ ) **положительны**, если направлены против часовой стрелки (рис. 2, а, б).



а)

б)

Рис.2

## 2. Для внутренних силовых факторов (ВСФ)

- Срезывающая сила **положительна**, если она вызвана внешней нагрузкой, поворачивающей рассматриваемую часть балки *против часовой стрелки* (рис. 3).

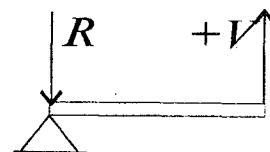


Рис.3

- Изгибающие моменты  $M(x)$ ,  $M_i$  **положительны**, если изгибают балку *выпуклостью вверх*. (рис. 4).



Рис. 4

## 3. Для перемещений

- Прогибы балки **ω положительны**, если направлены *вниз* (рис. 5).

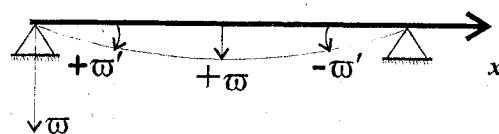


Рис. 5

- Углы поворота сечений балки **θ положительны**, если направлены *по часовой стрелке* (рис. 5).
- Просадка опоры **f положительна** при опускании опоры *вниз* (рис. 6).



Рис.6

# 1. ЗАДАНИЯ И ОБЩИЕ ПОЯСНЕНИЯ

## 1.1. Задание к выполнению расчетно-графической работы 1:

- раскрыть статическую неопределенность многопролетной балки двумя методами: *методом угловых деформаций* и *методом трех моментов*;
- сравнить* полученные результаты;
- построить *эпюры* срезывающих сил и изгибающих моментов;
- построить ориентировочную *упругую линию* балки;
- проверить выполнение *условия прочности*.

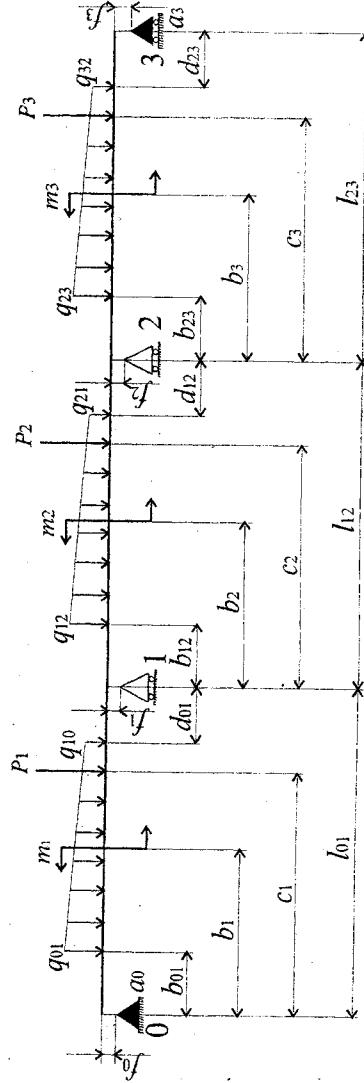
- 1.2. Варианты заданий выдаются преподавателем. Числовые значения расчетных параметров представлены в табл. 1.

*Общая расчетная схема* показана на рис.7.

- 1.3. Расчет следует начинать с вычерчивания *индивидуальной расчетной схемы* (рис.8), которая получается из общей расчетной схемы (рис.7) путем присвоения расчетным параметрам числовых значений, выбранных в соответствии с вариантом по табл. 1.

В процессе преобразования общей расчетной схемы в индивидуальную схему удаляют нагрузки, равные нулю и изменяют направления отрицательных усилий.

- 1.4. В приведенном примере даны *ссылки на приложения*, содержащие методические указания к выполнению расчета.



8

Рис. 7

Числовые значения расчетных параметров

Таблица 1

Вариант	Параметры, м													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$f_0$	0	0	0	0	0	0	0,9	0	0	0	0	0	0	0
$f_1$	0,8	0	-0,8	0	0	0,8	0	0	-1	0	-0,5	-1	0,8	0
$f_2$	0	-1	1	0,6	0	-0,8	1	0	0	0	-0,5	-0,8	0	-0,8
$f_3$	0	0	0	0	0,6	0	-1	0	1,1	0	0,5	0	-0,9	0
$b_1$	-	1	-	-	-	2	-	1,4	-	-	-	2,4	-	-
$b_2$	-	-	-	1,2	-	1	-	-	-	-	0	-	-	-
$b_3$	1	0	-	-	-	-	1,0	-	-	-	-	-	-	-
$c_1$	1,1	-	-	-	1,2	-	1,2	-	-	-	1,1	-	-	-
$c_2$	-	1,1	-	-	1,6	-	1,2	-	1,2	-	-	-	1,1	-
$c_3$	-	1	1,3	-	1,4	-	-	1,4	1,3	1,1	1,2	0,8	-	-
$l_{01}$	2,2	2,2	2,0	2,4	2,6	2,4	2,0	2,4	2,8	2,6	2,2	2,1	2,4	2,2
$l_{12}$	2,2	2,2	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,8	2,2	2,2	2,4	2,2
$l_{23}$	2,4	2,6	2,0	2,6	2,6	2,4	2,4	2,0	2,2	2,6	2,2	2,4	2,0	2,2
$b_{01}$	0	-	-	0	-	-	0	-	0	0	0	-	0	0
$d_{01}$	-	-	-	0	-	-	0	-	0	0	0	-	0	0
$b_{12}$	-	-	0	-	0	-	-	-	0	-	0	-	0	0
$d_{12}$	-	0	-	0	-	-	-	-	1,4	-	-	0	0,8	0,8

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$b_{23}$	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	-	-	-
$d_{23}$	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	-	-	-
$m_1$	-	90	-	-	-	115	60	-70	-	-	-	60	-	-
$m_2$	-	-	60	-	120	-	-	-	-	-	-80	-	-	-
$m_3$	80	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$P_1$	90	-	-	-	70	-	-	-	-	-	-80	-	-	-
$P_2$	-	-90	-	-	80	-	140	-	-100	-	-	-	-	60
$P_3$	-	120	90	-	60	-	70	60	60	-70	-70	50	-	-
$q_{01}$	20	-	-	0	-	-	10	-	-40	30	-	-	-	36
$q_{10}$	0	-	-	20	-	-	10	-	-14	0	-	-	-	14
$q_{12}$	-	-	20	-	20	-	-	-	-14	-	-	-30	14	-
$q_{21}$	-	-	20	-	20	-	-	-	0	-	-	-30	0	-
$q_{23}$	-	0	-	25	-	-	15	-	25	-	-	-	-	-
$q_{32}$	-	30	-	25	-	-	15	-	25	-	-	-	-	-
$a_0$	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$										
$a_3$	$\infty$	0	0	0										
Двутавр №	16	18	18а	20	22	22а	24	24а	16	18	18а	20	22	22а

Продолжение таблицы 1																
Числовые значения расчетных параметров																
Параметр, м	Сечение, мм	Вариант	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$f_0$	0	1	0	0	0	0,8	0	0,9	0	0,7	0	0,8	0	0,9		
$f_1$	0	-	0,7	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0,8	0		
$f_2$	0	-	0	0,8	-1	-0,8	0	-1	0	0	0	-0,9	0	0	0,8	
$f_3$	0,6	0	0	0	1	0	0,9	0	-0,8	0	0,5	0	0,6	0	0	
$b_1$	-	1,2	-	-	1,3	-	1,2	-	1,1	-	-	-	-	-	2,8	
$b_2$	-	1,4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2,0	-	-	
$b_3$	1,0	-	-	1,0	-	1,0	-	-	-	-	1,4	-	-	-	-	
$c_1$	1,0	-	-	-	-	0,8	-	1,0	-	1,3	-	-	1,0	-	-	
$c_2$	-	1,1	-	0,8	1,0	-	0,8	-	-	-	-	-	-	-	-	
$c_3$	-	1,3	-	-	-	-	-	-	1,8	-	-	-	-	-	-	
$l_{01}$	2,4	2,6	2,0	2,6	2,4	2,4	2,0	2,2	2,6	2,2	2,6	2,2	2,4	2,0	2,8	
$l_{12}$	2,2	2,2	2,0	2,4	2,6	2,4	2,0	2,4	2,8	2,6	2,2	2,0	2,4	2,2	2,2	
$l_{23}$	2,0	2,4	2,6	2,0	2,2	2,0	2,4	2,6	2,8	2,2	2,4	2,6	2,0	2,2	2,2	
$b_{01}$	-	-	0	0	-	-	-	-	-	-	-	0	0	-	-	
$d_{01}$	-	-	0	0	-	-	-	-	-	-	-	0	0	-	-	
$b_{12}$	0	-	-	-	-	0	-	1,2	0	0	0	-	0	-	0	
$d_{12}$	0	-	-	-	-	0	-	0	0	0	-	-	0	-	0	

Вариант	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$b_{23}$	-	0	-	0	-	0	0	-	0	1,4	-	0	0	0
$d_{23}$	-	0	-	0	-	0	0	-	0	0	-	0	0	0
$m_1$	-	-60	-	-90	-	110	-	-40	-	-	-	-	-	100
$m_2$	-	-	70	-	-	-	-	-	-	-	-70	-	-	-
$m_3$	-	-	-80	-	-100	-	-	-	-	-60	-	-	-	-
$P_1$	100	-	-	-	50	-	100	-	-80	-	-	-40	-	-
$P_2$	-	-90	-	70	60	-	90	-	-	-	-	-	-	-
$P_3$	-	-	80	-	-	-	-	70	-	-	-	-	-	-
$q_{01}$	-	-	-35	-40	-	-	-	-	-	30	45	-	-	-
$q_{10}$	-	-	0	-40	-	-	-	-	-	8	0	-	-	-
$q_{12}$	0	-	-	-	-15	-	-	0	0	8	-	10	-	-
$q_{21}$	20	-	-	-	-15	-	-12	-25	25	0	-	10	-	-
$q_{23}$	-	20	-	-	0	-	-25	-12	-	25	-	-	10	0
$q_{32}$	-	20	-	-	30	-	-25	-38	-	25	-	-	0	-30
$a_0$	0	$\infty$												
$a_3$	$\infty$	0												
Двутавр №	24	24а	16	18	20	22	22а	24	16	18	20	22	24а	22а

Числовые значения расчетных параметров														
Продолжение таблицы 1														
Вариант	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$f_0$	0	0	0	0	0	1	0	1,3	0	0	0	1,2	0	0
$f_1$	-1	-0,5	0	-0,8	0,8	0	-0,6	0	-0,8	0,8	-1,1	0,9	-1,1	-1,2
$f_2$	0	-1,2	-0,6	-0,7	-0,9	0,6	0	-1,2	0	1	-1	0	0	0,9
$f_3$	1	0	0,7	0	0	0	-1,1	0	-1,1	0	0	0	1,3	0
$b_1$	-	-1,0	-	-	-2,0	-	-	-	-	-	-	-2,2	-	-
$b_2$	-	-	1,3	-	1	-	-	1,4	-	0,8	0	-	-	-
$b_3$	1	0	-	1,4	1,2	-	-	1,1	-	-	-	-	-	-
$c_1$	1,0	-	-	-	1,2	-	1,2	1,4	-	-	1,3	-	-	-
$c_2$	-	1,2	1,0	-	1,2	-	1,0	-	-	-	-	-	-	1,2
$c_3$	-	-1,3	1,2	-	-	-	1,2	-	1,3	1,0	1,2	0,8	-	-
$I_{01}$	2,0	2,2	2,2	2,2	2,0	2,0	2,4	2,8	2,6	2,2	2,0	2,2	2,6	2,6
$I_{12}$	2,4	2,4	-2,6	2,4	2,0	2,0	2,4	2,4	2,0	2,2	2,8	2,4	2,4	2,4
$I_{23}$	2,2	2,0	2,6	2,4	2,8	2,8	2,4	2,0	2,2	2,6	2,2	2,4	2,0	2,4
$b_{01}$	0	-	-	-	1,0	0	-	0	-	0	0	-	0	0
$d_{01}$	0	-	-	-	0	0	-	0	-	0	0	-	0	0
$b_{12}$	-	0	-	0	-	-	-	-	-	0	-	0	0	0
$d_{12}$	-	0	-	0	-	-	-	-	-	0,6	-	0	0	1,4

Вариант	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$b_{23}$	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	-	-	-
$d_{23}$	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	-	-	-
$m_1$	-	-	90	-	-	120	-	0	-	-	-	60	-	-
$m_2$	-	-	70	-	100	-	-	-60	-	50	-80	-	-	-
$m_3$	90	110	-	-	60	80	-	-	-70	-	-	-	-	-
$P_1$	-50	-	-	-	90	-	-60	-110	-	-	40	-	-	-
$P_2$	-	80	90	-	90	-	100	-	-	-	-	-	-	60
$P_3$	-	-	120	60	-	-	70	-	60	-90	-70	50	-	-
$q_{01}$	25	-	-	0	-15	-	10	-	-40	40	-	0	36	-
$q_{10}$	0	-	-	-	20	-15	-	10	-	-14	0	-	-30	10
$q_{12}$	-	-	25	-	20	-	-	-	-14	-	-30	-30	10	-
$q_{21}$	-	-	25	-	20	-	-	-	0	-	-30	-30	0	-
$q_{23}$	-	0	-	20	-	-	30	-	20	-	-	-	-	-
$q_{32}$	-	40	-	20	-	-	30	-	20	-	-	-	-	-
$a_0$	0	$\infty$	$\infty$	-										
$a_3$	$\infty$	0	0	-										
Двутавр №	24	16	18а	18	20	22а	16	24а	22	20	22	24	16	18а

Продолжение таблицы 1

## Числовые значения расчетных параметров

Вариант	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
$f_0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0	0	-1,0	0	0,8
$f_1$	1,0	0	0	0,5	0	-0,5	0	0,7	1,0	0	0	0,5	0	0
$f_2$	0	-1,0	0,8	0,8	0	-1	-1,1	-0,3	0	-0,8	0	0	0,9	-0,6
$f_3$	0	0	0	0	-1,1	0	0	0	0	0	-1	0	1,0	0
$b_1$	-	1,0	1,1	-	-	1,2	-	1,2	-	-	1,2	1,4	-	-
$b_2$	-	-	1,2	-	1,3	-	-	-	-	1,0	-	-	-	0,8
$b_3$	1,0	-	-	1,1	-	-	1,0	-	1,0	-	-	-	-	-
$c_1$	1,1	-	-	-	1,0	-	-	-	-	1,3	-	-	-	1,1
$c_2$	-	1,2	-	-	1,2	-	-	-	-	1,4	-	-	-	-
$c_3$	-	1,2	1,0	-	-	1,0	-	-	-	-	1,2	1,2	-	-
$l_{01}$	2,2	2,0	2,2	2,4	2,8	2,6	2,0	2,4	2,4	2,0	2,2	2,2	2,8	2,6
$l_{12}$	2,4	2,0	2,6	2,2	2,4	2,6	2,6	2,6	2,8	2,2	2,4	2,0	2,0	2,4
$l_{23}$	2,2	2,6	2,4	2,0	2,4	2,4	2,0	2,4	2,2	2,2	2,6	2,4	2,0	2,0
$b_{01}$	0	-	-	0	-	0	-	0,5	-	0	-	-	0	-
$d_{01}$	0	-	-	1,1	-	-	0	-	0	-	0	-	0	-
$b_{12}$	-	-	1,0	-	-	-	0	0	0	-	0	-	0	-
$d_{12}$	-	-	0	-	-	-	0	0	0	-	0	-	0	-

Вариант	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
$b_{23}$	-	0	-	0	-	0,8	-	-	0	-	0	-	-	-1,0
$d_{23}$	-	0	-	0	-	0	-	-	1,0	-	0	-	-	0
$m_1$	-	70	100	-	-	60	-	80	-	-	-80	90	-	-
$m_2$	-	-	70	-	-	-50	-	-	-	-	60	-	-	80
$m_3$	-60	-	-	80	-	-	40	-	95	-	-	-	-	-
$P_1$	70	-	-	-	-	-100	-	-	-	-	-80	-	-	100
$P_2$	-	100	-	-	60	-	-	-	-90	-	-	-	-	-
$P_3$	-	-	60	90	-	-	90	-	-	-	-	70	-70	-
$q_{01}$	20	-	-	-	40	-	0	-	15	-	-	10	-	-
$q_{10}$	20	-	-	-	0	-	30	-	40	-	-	10	-	-
$q_{12}$	-	-	0	-	-	-	25	30	0	-	-	20	-	-
$q_{21}$	-	-	30	-	-	-	25	30	-25	--	-	20	-	-
$q_{23}$	-	0	-	40	-	0	-	-	-25	-	40	-	-	0
$q_{32}$	-	30	-	40	-	25	-	-	0	-	0	-	-	35
$a_0$	0	$\infty$												
$a_3$	$\infty$	0												
Документ №	16	18	18а	20	22а	22	24а	24	20	18	22а	24а	16*	22

Числовые значения расчетных параметров															Окончание таблицы 1	
Вариант	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70		
$f_0$	0	0,7	0	0,9	0	0	0	-1,0	0	-0,8	0	0	0	0		
$f_1$	0,9	0	0	0	-0,9	-1,3	0	1,1	1,2	-0,9	1,1	0	0,9	-1,0		
$f_2$	0	0,8	0	-1,2	1,0	0,7	1,1	0	0	-1,0	0,8	-0,6	0			
$f_3$	1,0	0	-1,0	0	0,8	0	0,9	0	0,6	0	0	0	-1,2	0		
$b_1$	-	-	-	1,3	-	1,0	0,8	-	-	-	1,2	-	1,4	1,1		
$b_2$	-	-	-	-	-	-	1,3	-	-	-	-	-	-	-		
$b_3$	-	-	-	-	1,0	-	-	-	-	-	-	1,3	-	-		
$c_1$	-	-	1,1	-	1,4	-	-	-	-	-	-	0,8	-	-		
$c_2$	1,2	-	1,4	-	1,0	-	-	1,0	-	1,3	-	-	1,1	-		
$c_3$	-	1,3	-	-	-	1,3	1,2	1,2	1,5	-	-	1,2	-	-		
$I_{01}$	2,0	2,4	2,2	2,6	2,8	2,2	2,0	2,8	2,6	2,4	2,4	2,6	2,8	2,2		
$I_{12}$	2,4	2,2	2,6	2,8	2,2	2,0	2,8	2,6	2,4	2,4	2,6	2,8	2,2	2,2		
$I_{23}$	2,2	2,6	2,8	2,2	2,0	2,8	2,6	2,4	2,4	2,6	2,8	2,2	2,6	2,0		
$b_{01}$	0	-	-	0	-	-	0	-	-	1,0	-	-	0	-		
$d_{01}$	0	-	-	0	-	-	0	-	-	0	-	-	0,7	-		
$b_{12}$	-	0	-	-	0	-	-	0	-	-	0	-	-	-		
$d_{12}$	-	0	-	-	0,5	-	-	0	-	-	0	-	-	-		

Вариант	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
$b_{23}$	-	-	0	-	-	0,8	-	-	0	-	-	0	-	0
$d_{23}$	-	-	0	-	-	0	-	-	1,0	-	-	0	-	0
$m_1$	-	-	-	50	-	-90	70	-	-	-	80	-	-90	100
$m_2$	-	-	-	-	-	-	-70	-	60	-	-	-	-	-
$m_3$	-	-	-	-	60	-	-	-	-	-	100	-	-	-
$P_1$	-	-	80	-	-100	-	-	-	-	-	-	-70	-	-
$P_2$	40	-	-	90	-	50	-	-	80	-	90	-	-	-90
$P_3$	-	-60	-	-	-	-100	-90	110	50	-	-	60	-	-
$q_{01}$	30	-	-	25	-	-	15	-	-	0	-	-	20	-
$q_{10}$	10	-	-	25	-	-	15	-	-	30	-	-	0	-
$q_{12}$	-	20	-	-	-	45	-	-	20	-	-	0	-	-
$q_{21}$	-	40	-	-	0	-	-	20	-	-	20	-	-	-
$q_{23}$	-	-	15	-	-	0	-	-	40	-	-	30	-	30
$q_{32}$	-	-	40	-	-	25	-	-	0	-	-	30	-	30
$a_0$	0	$\infty$												
$a_3$	$\infty$	0												
Двутавр №	16	24	18	22a	20	18a	24a	16	18	24a	24	22	22a	18

## 2. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ 1 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

- Вычертим индивидуальную расчетную схему на основании общей расчетной схемы (рис. 7), принимая числовые значения расчетных параметров согласно варианта 70 (см. табл. 1.).

### Исходные данные

$$m = 100 \text{ кНм};$$

$$P = -90 \text{ кН};$$

$$q = 30 \frac{\text{кН}}{\text{м}};$$

$$l_{01} = 2,2 \text{ м};$$

$$l_{02} = 2,2 \text{ м};$$

$$l_{03} = 2,0 \text{ м};$$

$$f_1 = -1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м.}$$

Материал -сталь марки Ст3

$[\sigma] = 0,8 \sigma_T$  - на опоре;

$[\sigma] = 0,7 \sigma_T$  - в пролете балки;

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Мпа};$$

$$J = 1290 \text{ см}^4$$

для двутавра №18 [2];

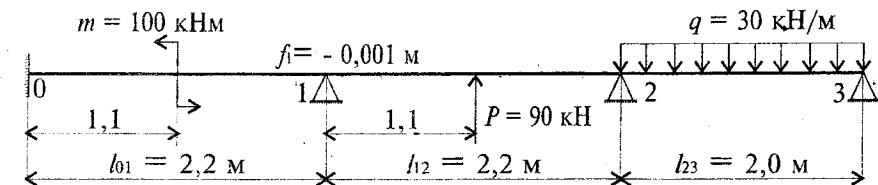


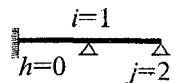
Рис. 8

## 2.1. РАСЧЕТ БАЛКИ ПО МЕТОДУ УГЛОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

**2.1.1. Сформируем систему уравнений** для раскрытия статической неопределенности балки (рис.8) по методу угловых деформаций.

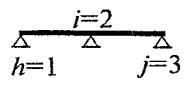
Уравнения метода угловых деформаций *в общем виде* даны в прил. 1 (п.1, с.32-34).

Неизвестными являются величины  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , пропорциональные углам поворота сечений балки на опорах 1,2,3.



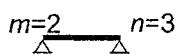
Опора 1

$$2(\kappa_{01} + \kappa_{12})\omega_1 + \kappa_{12}\omega_2 = m_{10} + m_{12} + 3\kappa_{01}\Psi_{01} + 3\kappa_{12}\Psi_{12}$$



Опора 2

$$\kappa_{12}\omega_1 + 2(\kappa_{12} + \kappa_{23})\omega_2 + \kappa_{23}\omega_3 = m_{21} + m_{23} + 3\kappa_{12}\Psi_{12} + 3\kappa_{23}\Psi_{23}$$



Опора 3

$$\kappa_{23}\omega_2 + 2\kappa_{23}\omega_3 = m_{32} + 3\kappa_{23}\Psi_{23}$$

### 2.1.2. Определим коэффициенты при неизвестных $\omega_i$ :

- Определим относительную жесткость по участкам балки (см. прил. 1 п.2, с. 34)

$$\kappa_{ij} = \frac{J_{ij} l_0}{J_0 l_{ij}}, \text{ где принимаем } J_0 = J_{\min} = 1290 \text{ см}^4 - \text{const};$$

$$l_0 = l_{\max} = l_{01} = l_{12} = 2,2 \text{ м.}$$

Так как  $J = \text{const}$ , то  $J_{ij} = J_0$ , тогда  $\kappa_{ij} = \frac{l_0}{l_{ij}}$

$$\kappa_{01} = \frac{l_0}{l_{01}} = \frac{2,2}{2,2} = 1; \quad \kappa_{12} = \frac{l_0}{l_{12}} = \frac{2,2}{2,2} = 1; \quad \kappa_{23} = \frac{l_0}{l_{23}} = \frac{2,2}{2} = 1,1.$$

### 2.1.3. Определим свободные члены уравнений

- Определим абсолютную жесткость произвольного участка балки (см. прил. 1 п.2, с. 34)

$$EJ_0 = EJ = 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^{-8} = 2,709 \text{ МНм}^2 = 2709 \text{ кНм}^2;$$

$$K_0 = \frac{2E J_0}{l_0} = \frac{2 \cdot 2709}{2,2} = 2463 \text{ кНм.}$$

- Определим величины, пропорциональные углам перекоса пролетов балки (см. прил. 1 п.3, с.34):

$$\Psi_{01} = K_0 \frac{f_1 - f_0}{l_{01}} = 2463 \frac{-0,001 - 0}{2,2} = -1,12 \text{ кНм};$$

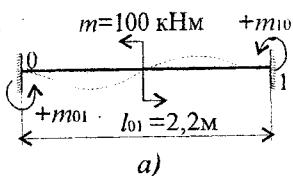
$$\Psi_{12} = K_0 \frac{f_2 - f_1}{l_{12}} = 2463 \frac{0 - (-0,001)}{2,2} = 1,12 \text{ кНм};$$

$$\Psi_{23} = K_0 \frac{f_3 - f_2}{l_{23}} = 0.$$

- Определим моменты от заданной нагрузки в опорных сечениях балки *при условии их жесткой заделки* (см. прил. 1 п.4, с.35).

Рассмотрим каждый участок балки, заменив все опорные закрепления жесткой заделкой, и определим моменты от заданной нагрузки (рис.9). Формулы для расчета моментов  $m_{01}, m_{10}, \dots, m_{23}, m_{32}$  берутся из табл. 3.1 справочника [1].

I  
участок

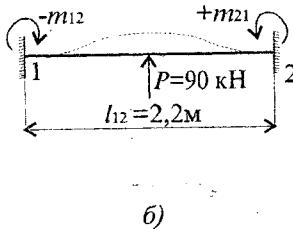


$$m_{01} = m_{10} = \frac{m}{4} = \frac{100}{4} = 25 \text{ кНм}$$

(см. табл. 3.1, п. 24 [1])

a)

II  
участок



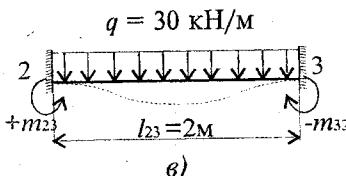
$$m_{12} = -\frac{Pl}{8} = -\frac{90 \cdot 2,2}{8} = -24,75 \text{ кНм}$$

$$m_{21} = \frac{Pl}{8} = 24,75 \text{ кНм}$$

(см. табл. 3.1, п. 26, [1])

b)

III  
участок



$$m_{23} = \frac{Ql}{12} = \frac{60 \cdot 2}{12} = 10 \text{ кНм}$$

$$m_{32} = -\frac{Ql}{12} = -10 \text{ кНм}$$

(см. табл. 3.1, п. 28, [1])

Рис. 9

Полученные значения подставим в систему уравнений и решим ее.

$$\begin{cases} 2(1+1)\omega_1 + 1 \cdot \omega_2 = 25 - 24,75 + 3 \cdot 1(-1,12) + 3 \cdot 1(1,12); \\ 1 \cdot \omega_1 + 2(1+1,1)\omega_2 + 1,1\omega_3 = 24,75 + 10 + 3 \cdot 1(1,12) + 0; \\ 1,1\omega_2 + 2 \cdot 1,1\omega_3 = -10 + 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\omega_1 + \omega_2 = 0,25; \\ \omega_1 + 4,2\omega_2 + 1,1\omega_3 = 38,11; \\ 1,1\omega_2 + 2,2\omega_3 = -10. \end{cases}$$

Решение системы

$$\omega_1 = -3,103 \text{ кНм};$$

$$\omega_2 = 12,661 \text{ кНм};$$

$$\omega_3 = -10,876 \text{ кНм}.$$

Проверка решения системы:

$$1. 4(-3,103) + 12,661 = 0,249;$$

$$\frac{0,249 - 0,25}{0,25} = 0,0004 ;$$

$$2. -3,103 + 4,2 \cdot 12,661 + 1,1(-10,876) = 38,109;$$

допустимая погрешность  $\delta = 1\% = 0,381$ ;

$$\frac{38,109 - 38,11}{38,11} = 0,00003 < 0,381$$

$$3. 1,1 \cdot 12,661 + 2,2(-10,876) = -10,00002 ;$$

допустимая погрешность

$$\delta = 1\% = 0,1; \frac{-10,00002 - (-10)}{10,00002} = 10^{-5} < 0,1.$$

Система решена верно.

### 2.1.5. Определим внешние моменты $M_{ij}$ в узлах

Расчетные формулы внешних моментов  $M_{ij}$  даны в прил. 1 (п.5, с.35).

$$M_{01} = m_{01} - k_{01}(2\omega_0 + \omega_1 - 3\Psi_{01}) = 25 - 1[0 - 3,103 - 3(-1,12)] = 24,743 \text{ кНм}$$

$$M_{10} = m_{10} - k_{01}(2\omega_1 + \omega_0 - 3\Psi_{01}) = 25 - 1[2(-3,103) + 0 - 3(-1,12)] = 27,846 \text{ кНм}$$

$$M_{12} = m_{12} - k_{12}(2\omega_2 + \omega_1 - 3\Psi_{12}) = -24,75 - 1[2(-3,103) + 12,661 - 3 \cdot 1,12] = -27,846 \text{ кНм}$$

$$M_{21} = m_{21} - k_{12}(2\omega_2 + \omega_1 - 3\Psi_{12}) = 24,75 - 1[2 \cdot 12,661 - 3,103 - 3 \cdot 1,12] = 5,891 \text{ кНм}$$

$$M_{23} = m_{23} - k_{23}(2\omega_3 + \omega_2 - 3\Psi_{23}) = 10 - 1,1[2 \cdot 12,661 - 10,876 - 0] = -5,891 \text{ кНм}$$

$$M_{32} = m_{32} - k_{23}(2\omega_3 + \omega_2 - 3\Psi_{23}) = -10 - 1,1[2(-10,876) + 12,661 - 0] = 0,0001 \approx 0.$$

## 2.2. РАСЧЕТ БАЛКИ ПО МЕТОДУ ТРЕХ МОМЕНТОВ

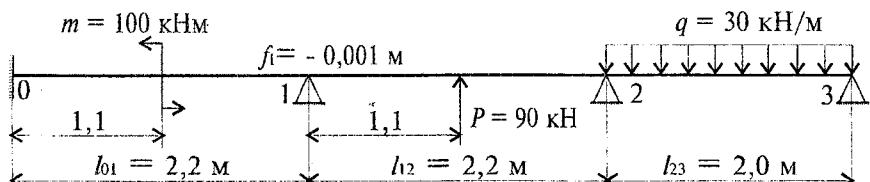


Рис.10

**2.2.1.** Составим систему уравнений для раскрытия статической неопределенности балки по методу трех моментов. Уравнения метода трех моментов в общем виде даны в прил. 2 (п.6, с.36-38)

За неизвестные принимаем изгибающие моменты  $M_0, M_1, M_2$  на опорах 0,1,2.

**Опора 0**  
 $i=0 \quad j=1$

$$2l_{01}M_0 + l_{01}M_1 = 6EJ[a_0(Q_{01})] + 6EJ\left(\frac{f_1 - f_0}{l_{01}}\right).$$

**Опора 1**  
 $i=1 \quad j=2$

$$l_{01}M_0 + 2(l_{01} + l_{12})M_1 + l_{12}M_2 = 6EJ[-a_1(Q_{01}) + a_1(Q_{12})] + 6EJ\left[\frac{f_2 - f_1}{l_{12}} - \frac{f_1 - f_0}{l_{01}}\right].$$

**Опора 2**  
 $i=2 \quad j=3$

$$l_{12}M_1 + 2(l_{12} + l_{23})M_2 + l_{23}M_3 = 6EJ[-a_2(Q_{12}) + a_2(Q_{23})] + 6EJ\left[\frac{f_3 - f_2}{l_{23}} - \frac{f_2 - f_1}{l_{12}}\right].$$

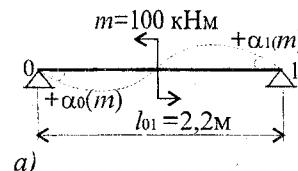
### 2.2.2. Сформируем правую часть системы уравнений:

- Определим углы поворота концевых сечений балки от заданной нагрузки на каждом участке (см. прил. 2 п.7, с.38), заменяя все закрепления на свободные жесткие опоры (см. Рис.11).

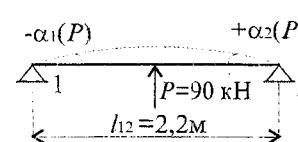
Формулы для расчета  $a_0(m), a_1(m), a_2(P), \dots, a_3(Q)$  берутся из таблицы 3.1 , [1].

$$a_0(m) = a_1(m) = \frac{Ml}{24EJ} = \frac{100 \cdot 2,2}{24EJ} = \frac{9,167}{EJ}$$

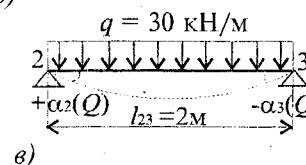
(см. табл. 3.1, п.1 , [1]).



a)



б)



в)

Рис.11

- Определим величины, пропорциональные углам перекоса

Для I-го уравнения  $\frac{f_1 - f_0}{l_{01}} 6EJ = -\frac{0,001}{2,2} 6 \cdot 2709 = -7,388 \text{ кНм}^2$ .

Для II-го уравнения  $\left(\frac{f_2 - f_1}{l_{12}} - \frac{f_1 - f_0}{l_{01}}\right) 6EJ = \left(\frac{0+0,001}{2,2} - \frac{0,001-0}{2,2}\right) \times 6 \cdot 2709 = 14,776 \text{ кНм}^2$ .

Для III го уравнения

$$\left( \frac{f_3 - f_2}{l_{23}} - \frac{f_2 - f_1}{l_{12}} \right) 6EJ = \left( -\frac{0 + 0,001}{2,2} \right) 6 \cdot 2709 = -7,388 \text{ кНм.}$$

### 2.2.3. Подставим полученные значения в систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 2,2 \cdot M_0 + 2,2M_1 = 6EJ \frac{9,167}{EJ} - 7,388; \\ 2,2M_0 + 2(2,2+2,2)M_1 + 2,2M_2 = 6EJ \left( -\frac{9,167}{EJ} - \frac{27,225}{EJ} \right) + 14,776; \\ 2,2M_1 + 2(2,2+2,0)M_2 = 6EJ \left( -\frac{27,225}{EJ} + \frac{10}{EJ} \right) - 7,388. \end{cases}$$

После преобразования получим

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = 21,643; \\ M_0 + 4M_1 + M_2 = -92,535; \\ M_1 + 3,818M_2 = -50,335. \end{cases}$$

Решение системы уравнений

$$M_0 = 24,746 \text{ кНм};$$

$$M_1 = -27,848 \text{ кНм};$$

$$M_2 = -5,890 \text{ кНм.}$$

Проверка решения системы уравнений

$$1. \quad 2 \cdot 24,746 - 27,848 = 21,644;$$

допустимая погрешность  $\delta = 1\% = 0,278$ ;

$$\frac{21,644 - 21,643}{21,664} = 0,00005 < 0,278;$$

$$2. \quad 24,746 + 4(-27,848) - 5,890 = -92,536;$$

допустимая погрешность  $\delta = 1\% = 0,925$ ;

$$\frac{(-92,536) - (-92,535)}{92,536} = 0,00001 < 0,925;$$

$$3. \quad -27,848 + 3,818(-5,890) = -50,336;$$

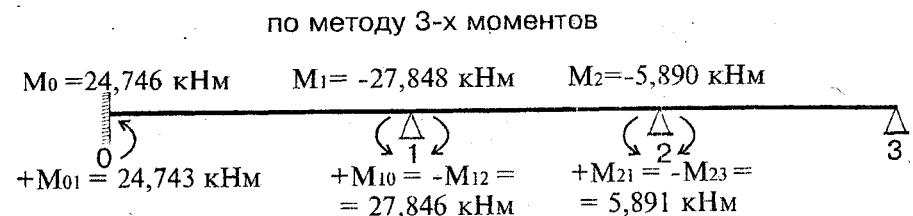
допустимая погрешность  $\delta = 1\% = 0,503$ ;

$$\frac{(-50,336) - (-50,335)}{50,336} = 0,00001 < 0,503.$$

Система решена верно.

### 2.3. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ДВУМЯ МЕТОДАМИ

Покажем на расчетной схеме опорные моменты, полученные двумя методами (см. прил. 3 п.8, с.39).



по методу угловых деформаций

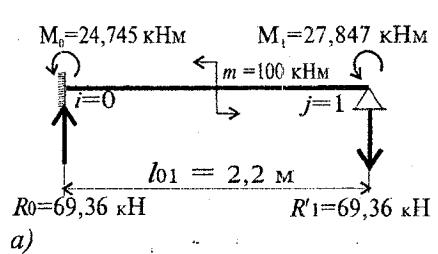
Рис.12  
Результаты раскрытия статической неопределенности балки, полученные двумя методами, практически совпадают (см. табл. 2 ).

Сравнительные характеристики, полученные двумя методами расчета

Моменты, кНм	Метод расчета		Относительная погрешность, %	Среднее значение моментов, кНм
	3-х моментов	Угловых деформаций		
$M_0$	24,746	24,743	0,012	24,745
$M_1$	-27,848	-27,846	0,007	-27,847
$M_2$	-5,890	-5,891	0,017	-5,891

## 2.4. ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

2.4.1. Определим реактивные усилия на опорах балки (см. прил. 3 п.9, с. 40).



a)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 M_i(0) &= 0; \\ +24,745 + 100 + 27,847 - R'_1 \cdot 2,2 &= 0; \\ R'_1 &= \frac{+24,745 + 100 + 27,847}{2,2} = 69,36 \text{ kN}; \\ \sum_{i=1}^4 Y(P_i) &= 0; -69,36 + R_0 = 0 \quad R_0 = 69,36 \text{ kN}; \end{aligned}$$

Проверка  $\sum_{i=1}^4 M_i(1) = 0$ :

$$+24,745 + 100 + 27,847 - 69,36 \cdot 2,2 = 0 \quad 0 \equiv 0;$$

$$\sum_{i=1}^4 M_i(1) = 0; -27,847 + 90 \cdot 1,1 + 5,891 - R'_2 \cdot 2,2 = 0;$$

$$R'_2 = \frac{-27,847 + 90 \cdot 1,1 + 5,891}{2,2} = 35,02 \text{ kN};$$

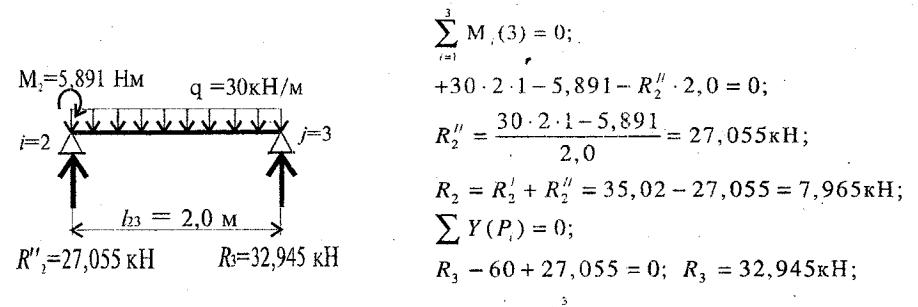
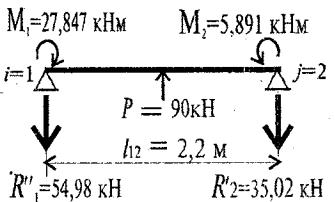
$$\sum_{i=1}^4 Y(P_i) = 0; -R''_1 + 90 - 35,02 = 0; R''_1 = 54,98 \text{ kN}.$$

Проверка  $\sum_{i=1}^4 M_i(2) = 0$ :

$$-27,847 - 90 \cdot 1,1 + 5,891 - 54,98 \cdot 2,2 = 0; 0 = 0;$$

$$R_1 = R'_1 + R''_1 = 69,36 + 54,98 = 124,34 \text{ kN}.$$

b)



e)

Рис.13

2.4.2. Сделаем проверку равновесия балки (см. рис.14)

$$\sum Y(P_i) = 0;$$

$$69,36 - 124,34 + 90 - 7,965 - 60 + 32,945 = 0; 0 \equiv 0;$$

$$\sum_{i=1}^3 M_i(0) = 0;$$

$$24,745 + 100 - 124,34 \cdot 2,2 + 90 \cdot 3,3 - 7,965 \cdot 4,4 - 60 \cdot 5,4 + 32,945 \cdot 6,4 = 10^{-3}; 0.$$

2.4.3. Построим эпюру срезывающих сил (см. рис.14)

2.4.4. Построим эпюру изгибающих моментов (см. рис.14). В нашем примере эпюра изгибающих моментов построена эскизным способом.

2.4.5. Определим углы поворота опорных сечений и углы перекоса

$$\varpi_1 = \frac{\omega_1}{K_0} = -\frac{3,103}{2463} = -0,00126 \text{ рад};$$

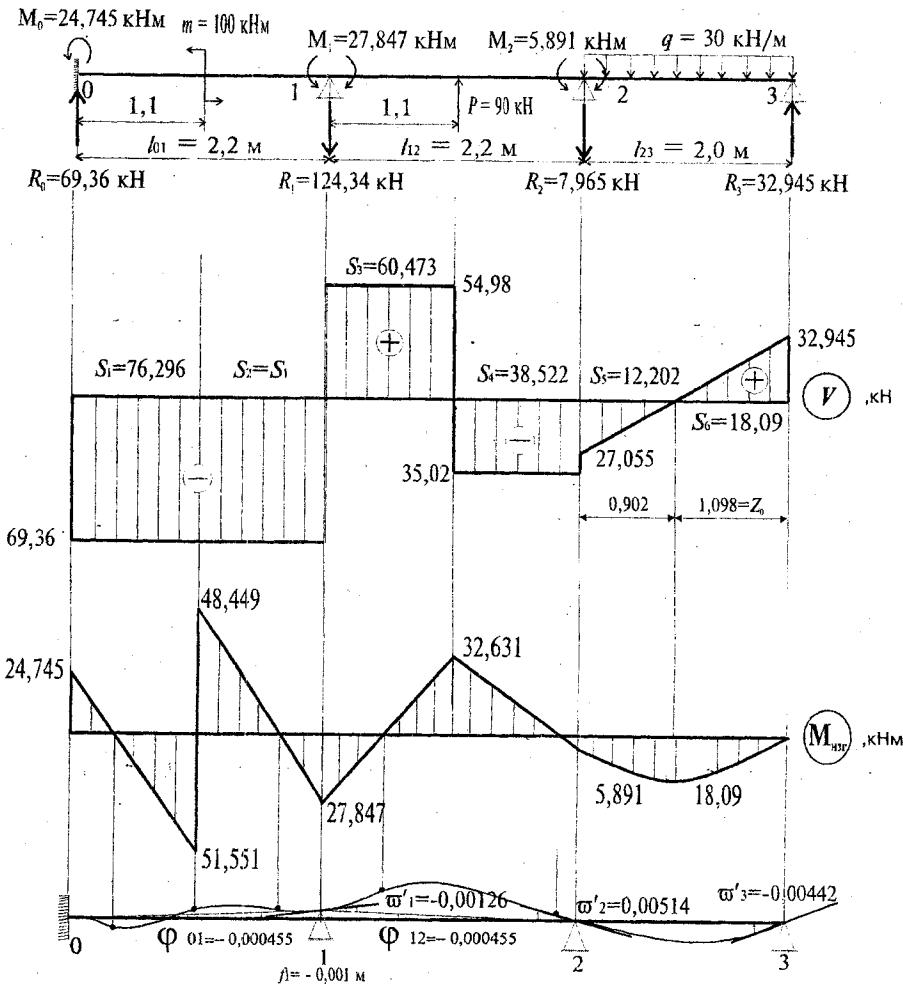
$$\varpi_2 = \frac{\omega_2}{K_0} = \frac{12,661}{2463} = 0,00514 \text{ рад};$$

$$\varpi_3 = \frac{\omega_3}{K_0} = -\frac{10,876}{2463} = -0,00442 \text{ рад};$$

$$\varphi_{12} = -\varphi_{01} = \frac{\Psi_{01}}{K_0} = \frac{1,12}{2463} = 0,000455 \text{ рад}.$$

2.4.6. Построим ориентированную упругую линию балки (см. рис.14).

Последовательность построения ориентированной упругой линии балки показана в прил. 3 (п.10, с. 40-42).



2.5.1. Запишем условие прочности при изгибе

$$\sigma^{\max} = \frac{M_{(x)}^{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ где}$$

$M_{(x)}^{\max} = 51,551$  кНм - максимальный изгибающий момент, определенный по эпюре  $M_{\text{изг}}$ ;

$W_x = 143 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$  (для двутавра №18) - момент сопротивления поперечного сечения балки [2];

$[\sigma] = K_T \cdot \sigma_T$  - допускаемое напряжение в пролете балки;

$$[\sigma] = 0,7 \cdot 240 = 168 \text{ МПа.}$$

2.5.2. Выполним проверку условия прочности

$$\sigma^{\max} = \frac{51,551 \cdot 10^{-3}}{143 \cdot 10^{-6}} = 360,5 \text{ МПа} > 168 \text{ МПа.}$$

-условие прочности не выполняется.

Рис.14

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РАСЧЕТУ БАЛКИ ПО МЕТОДУ УГЛОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

(п.1)

Расчет балки по *методу угловых деформаций* начинается с выбора *основной системы*. За основную систему принимается система отдельных двухопорных балочек (рис.15), полученных за счет мысленных разрезов статически неопределенной балки на промежуточных опорах.

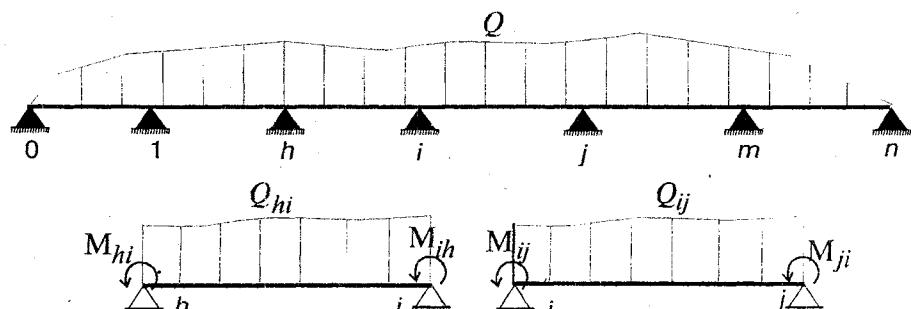


Рис.15

Если статически неопределенную балку, показанную на рис.15, разрезать мысленными сечениями на опорах и приложить в местах сечений опорные моменты, то для каждой балочки основной системы можно найти *углы поворота опорных сечений*  $\omega_i$ , выраженные через опорные моменты  $M_{hi}$ ;  $M_{ij}$  и нагрузку  $Q_{ij}$ .

Опорные моменты  $M_{hi}$ ;  $M_{ij}$  рассматриваются как *внешние моменты* и, в соответствии с правилами знаков, считаются *положительными, если направлены против часовой стрелки*.

*Система уравнений* относительно неизвестных величин, пропорциональных углам поворота опорных сечений, формируется на основании *условия равновесия рассматриваемого узла*.

*Условие равновесия узла «i»*

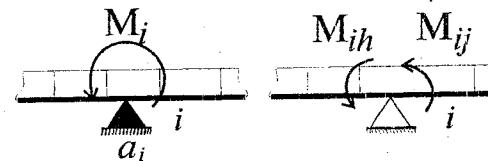


Рис.16

Опорный момент  $M_i = \frac{\omega_i}{a_i}$ , создаваемый опорой «i»(см. Рис.16), можно представить в виде

$$M_i = M_{ih} + M_{ij};$$

$$\text{откуда } M_{ih} + M_{ij} = \frac{\omega_i}{a_i} - \text{условие равновесия узла «i»}$$

Из условия равновесия рассматриваемого узла получены *уравнения* для раскрытия статической неопределенности балки *по методу угловых деформаций*:

$$k_{hi}\omega_h + 2(k_{hi} + k_{ij})\omega_i + k_{ij}\omega_j = m_{ih} + m_{ij} + 3k_{hi}\Psi_{hi} + 3k_{ij}\Psi_{ij} \quad (1);$$

$$2k_{01}\omega_0 + k_{01}\omega_1 = m_{01} + 3k_{01}\Psi_{01} \quad (2);$$

$$k_{nn}\omega_n + 2k_{nn}\omega_n = m_{nn} + 3k_{nn}\Psi_{nn} \quad (3); \text{ где}$$

(1) - уравнение для промежуточной опоры «i»;

(2) - уравнение для крайней левой опоры «0»;

(3) - уравнение для крайней правой опоры «n»;

- Если на свободной жесткой опоре действует *сосредоточенный момент*, то в выражениях (1),(2),(3) в правых частях добавляются соответственно:  $-M_i$ ,  $-M_0$ ,  $-M_n$ .

- Для **жестко защемленного** конца балки уравнения (1) и (3) **не составляются**, так как угол поворота в жесткой заделке равен нулю.

$\omega_h, \omega_i, \omega_j$  - величины, пропорциональные углам поворота опорных сечений. С углами поворота они связаны зависимостью  $\omega_i = K_0 \bar{\omega}_i$

(п.2)

$K_0 = \frac{2EJ_0}{l_0}$  - **условная абсолютная жесткость** участка балки,

$\kappa_{ij} = \frac{J_{ij}}{J_0} \frac{l_0}{l_{ij}}$  - **относительная жесткость** участка балки « $ij$ », где

$J_0 = J_{\min}$  - **момент инерции, наименьший из всех, на рассматриваемых пролетах балки;**

$l_0 = l_{\max}$  - **длина наибольшего пролета балки.**

(п.3)

$\Psi_{ij} = K_0 \frac{f_j - f_i}{l_{ij}}$  - величина, пропорциональная углу **перекоса** участка балки « $ij$ », **обусловленному просадкой опор** (см. рис.17);

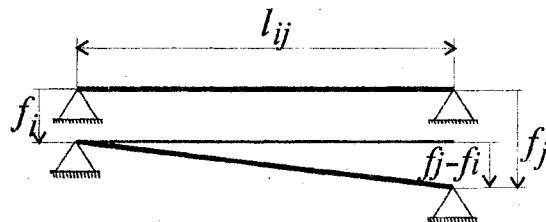


Рис.17

(п.4)

$m_{hi}$  ( $m_{ih}$ ) - моменты от внешней нагрузки в **опорных сечениях "h" ("i")**, при условии их **жесткой заделки** (см. рис.18).  $m_{hi}$  является **внешним моментом**, поэтому он имеет **положительное значение**, если направлен **против часовой стрелки**.

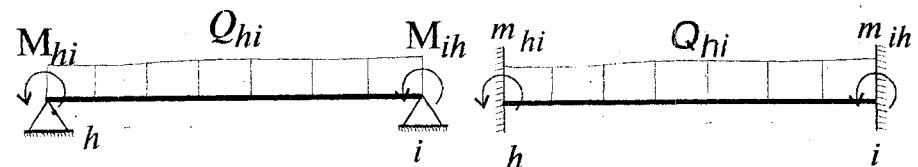


Рис.18

(п.5)

$M_{ij}$  ( $M_{ji}$ ) - опорные моменты (**внешние по отношению к пролету "ij"**), обусловленные заданной нагрузкой, смещением опор « $i$ », « $j$ » и определяются по формулам

$$M_{ij} = m_{ij} - k_{ij} (2\omega_i + \omega_j - 3\Psi_{ij});$$

$$M_{ji} = m_{ji} - k_{ij} (2\omega_j + \omega_i - 3\Psi_{ij}).$$

- Если момент  $M_{ij}$  направлен **против часовой стрелки**, то он считается **положительным** как внешний момент.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РАСЧЕТУ БАЛКИ МЕТОДОМ ТРЕХ МОМЕНТОВ

(п.6)

Расчет балки *методом трех моментов* начинается с выбора *основной системы*. За основную систему принимается система отдельных балочек, полученных за счет мысленных разрезов статически неопределенной балки на промежуточных опорах (рис.19).

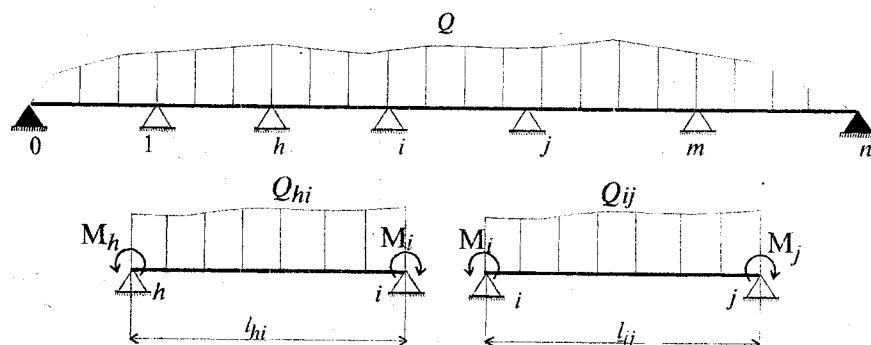


Рис.19

В местах разрезов прикладываются соответствующие *изгибающие моменты* – моменты взаимодействия. Изгибающие моменты заранее выбираются *положительными* в соответствии с *правилами знаков для внутренних силовых факторов* (см. рис.20).

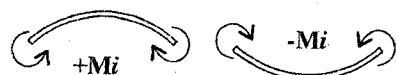


Рис.20

*Система уравнений* относительно неизвестных изгибающих моментов на опорах формируется на основании *условия совместности деформаций*.

### Условие совместности деформаций

*Углы поворота сечений* в каждой балочке на одной и той же опоре слева и справа *равны* (рис.21).

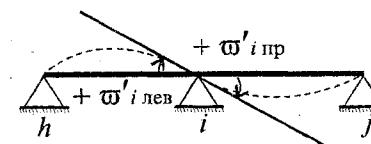


Рис.21

$$\omega'_{i\text{лев}} = \omega'_{i\text{пр}} - \text{уравнение совместности деформаций}$$

На основании условия совместности деформаций получим уравнения метода трех моментов.

Для «*i*-й» опоры уравнение имеет вид

$$l_{hi}M_h + 2(l_{hi} + l_{ij})M_i + l_{ij}M_j = 6EJ[-\alpha_i(Q_{hi}) + \alpha_i(Q_{ij})] + \\ + 6EJ\left[\frac{f_j - f_i}{l_{ij}} - \frac{f_i - f_h}{l_{hi}}\right].$$

Для крайней левой опоры:

$$2l_{01}M_0 + l_{01}M_1 = 6EJ[\alpha_0(Q_{01})] + 6EJ\left(\frac{f_1 - f_0}{l_{01}}\right);$$

Для крайней правой опоры:

$$l_{mn}M_m + 2l_{mn}M_n = 6EJ[-\alpha_n(Q_{mn})] - 6EJ\left(\frac{f_n - f_m}{l_{mn}}\right).$$

(п.7)

$\alpha_i(Q_{hi})$ -угол поворота сечения балки на «*i*»-й опоре, вызванный нагрузкой  $Q$  в пролете «*hi*», при условии установки свободных жестких опор по концам пролета.

$\alpha_i(Q_{ij})$ - угол поворота на той же «*i*»-й опоре, но от нагрузки  $Q$ , действующей в пролете «*ij*»(см. рис.22).

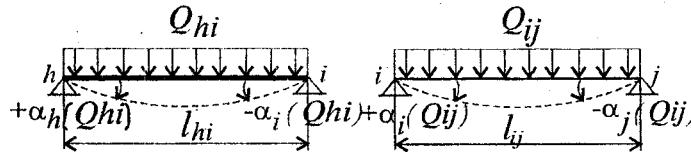


Рис.22

*Правило знаков для углов поворота  $\alpha_i(Q_{hi})$*

- Угол поворота сечения балки от заданной нагрузки  $\alpha_i(Q_{hi})$  считается *положительным*, если он направлен *по часовой стрелке*.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

### МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ГРАФИЧЕСКОМУ ОФОРМЛЕНИЮ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

(п.8)

При сравнении результатов решений, полученных двумя методами, следует иметь в виду:

- по методу *угловых деформаций* мы находим *внешние* опорные моменты;
- по методу *трех моментов – изгибающие* моменты (ВСФ), (см. рис.23).

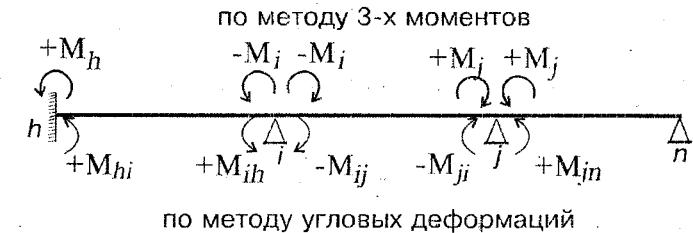


Рис.23

При построении эпюор переходим к обычному правилу знаков для ВСФ: *изгибающие моменты положительны при растяжении верхних волокон.*

(п.9)

Определение реактивных усилий на опорах можно производить по формуле

$$R_i = \frac{M_h - M_i}{l_{hi}} + \frac{M_j - M_i}{l_{ij}} + \rho_i(Q_{hi}) + \rho_i(Q_{ij}), \text{ где}$$

$M_h, M_i, M_j$  - величины изгибающих моментов на опорах, *полученные по методу трех моментов*. Моменты подставляются в формулу с учетом знака.

$\rho_i(Q_{hi}), \rho_i(Q_{ij})$  - величины *реактивных усилий на опорах* от нагрузок в пролетах «hi», «ij» с учетом правила знаков.

п.10

Построение нейтральной линии балки выполняют в указанной последовательности:

- Показывают положения опор с заданными просадками, проводят между ними линии и обозначают полученные углы перекоса  $\varphi_{ij}$  (см. рис.24).

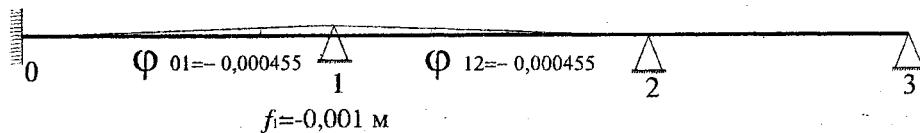


Рис.24

- На каждой опоре проводят наклонные линии под углами, равными углам поворота сечений на опорах, соблюдая пропорциональность при построении (см. рис.25). Обозначают углы поворота сечений.

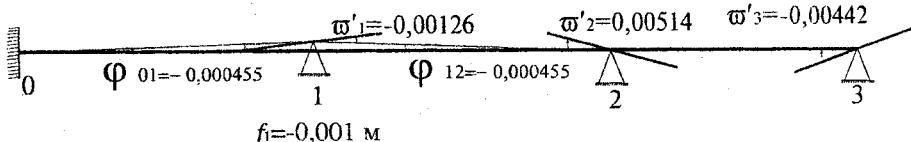


Рис.25

- Проводят линии проекционной связи между эпюрой изгибающих моментов и ориентировочной упругой линией балки, отмечающие точки перегиба упругой линии (см. рис.26).

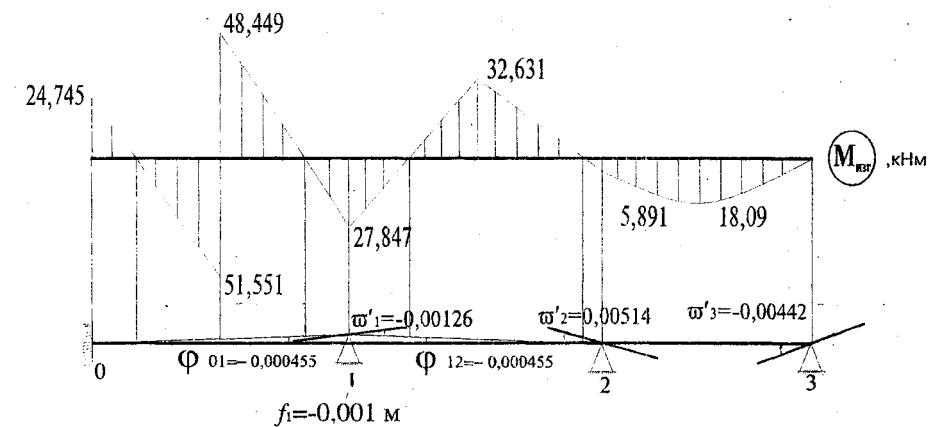


Рис.26

- Проводят упругую линию балки так, чтобы линии, ограничивающие углы поворота сечений балки на опорах, являлись касательными к упругой линии (рис.27).

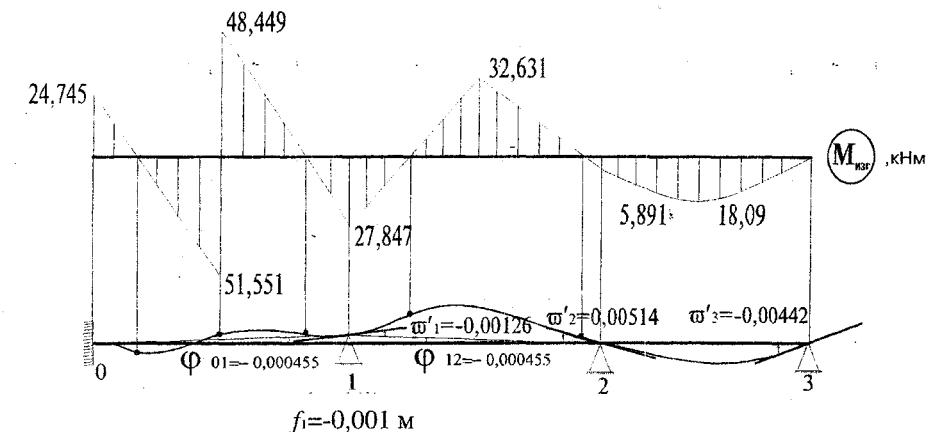


Рис.27

- При построении упругой линии балки выпуклости и вогнутости на ней должны соответствовать эпюре изгибающих моментов, построенной на растянутых волокнах.
- В районе жесткой заделки угол наклона касательной к упругой линии балки равен нулю, так как  $\ddot{\omega} = 0$ .

## С П И С О К Л И Т Е Р А Т У РЫ

1. Давыдов В.В., Маттес Н.В., Сиверцев И.Н., Трянин И.И. Прочность судов внутреннего плавания: Справочник, М.: изд. «Транспорт», -1978,-520 с.
2. ГОСТ 8239-89 . Балки двутавровые.