1 Задание (вариант xx)

Для заданной схемы балки раскрыть статическую неопределимость двумя методами (методом трех моментов и методом деформаций). Построить эпюры срезывающих сил и изгибающих моментов. Выполнить сравнение результатов полученных двумя методами. Построить ориентировочную упругую линию балки. Выполнить проверку прочности балки.

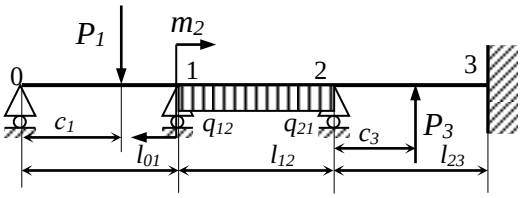

Рис. 1

Задано:

$E = 2 \cdot 10^5\ МПа$

$J = 3460\ см^4 = 3460 \cdot 10^{-8}\ м^4$

$W = 289\ см^3$

$P_1 = 40\ кН$

$P_3 = -70\ кН$

$m_2 = -80 кНм$

$q_{12} = -30\ \frac{кН}{м}$

$q_{21} = -30\ \frac{кН}{м}$

$l_{01} = 2{,}0\ м \qquad b_2 = 0\ м$

$l_{12} = 2{,}8\ м \qquad d_{12} = 0\ м$

$l_{23} = 2{,}4\ м \qquad b_{12} = 0\ м$

$c_1 = 1{,}3\ м \qquad a_0 = \infty$

$c_3 = 1{,}2\ м \qquad a_3 = 0$

2 Раскрытие статической неопределимости балки методом трех моментов.

2.1 Вспомогательные вычисления

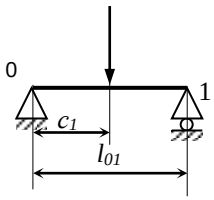

Рис. 2
По табл. 3.5 (случай 1, стр.129) при *a/l=0,65*
a=c₁

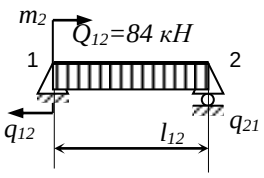

Рис. 3
По табл. 3.1 (случай 2, стр.100) и табл. 3.5 (случай 2 стр 129) при *a/l=0*

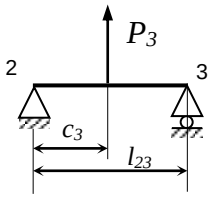

Рис. 4
По таблице 3.5 (случай 1, стр.129) при *a/l=0,5*
(a= c₃)

Пролетная нагрузка $Q_{01} = q_{01} \cdot l_{01} = 30 \cdot 2{,}8 = 84\ кН$

$$\alpha_1(Q_{01}) = -\alpha \frac{P_1 l_{01}^2}{6EJ} = -3754 \cdot 10^{-4} \frac{40 \cdot 2{,}0^2}{6EJ} = -\frac{60{,}06}{6EJ}$$

$$\alpha_0(Q_{01}) = \alpha \frac{P_1 l_{01}^2}{6EJ} = 3071 \cdot 10^{-4} \frac{40 \cdot 2{,}0^2}{6EJ} = \frac{49{,}14}{6EJ}$$

$$\alpha_2(Q_{23}) = -3750 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{P_3 \cdot l_{23}^2}{6EJ} = -3750 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{70 \cdot 2{,}4^2}{6EJ} = -\frac{151{,}2}{6EJ}$$

$$\alpha_3(Q_{23}) = 3750 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{P_3 \cdot l_{23}^2}{6EJ} = 3750 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{70 \cdot 2{,}4^2}{6EJ} = \frac{151{,}2}{6EJ}$$

$$\alpha_1(Q_{12}) = \frac{2 \cdot m_2 \cdot l_{12}}{6EJ} - \alpha \frac{Q_{12} \cdot l_{12}^2}{6EJ} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 2{,}8}{6EJ} - 2500 \cdot 10^{-4} \frac{84 \cdot 2{,}8^2}{6EJ} = \frac{283{,}36}{6EJ}$$

$$\alpha_2(Q_{12}) = -\frac{m_2 \cdot l_{12}}{6EJ} + \alpha \frac{Q_{12} \cdot l_{12}^2}{6EJ} = -\frac{80 \cdot 2{,}8}{6EJ} + 2500 \cdot 10^{-4} \frac{84 \cdot 2{,}8^2}{6EJ} = -\frac{59{,}36}{6EJ}$$

2.2 Составление уравнений системы

$M_0 = 0$, т.е. для <u>опоры *0*</u> уравнение не составляется.

<u>Опора 1:</u> $l_{01} \cdot M_0 + 2 \cdot (l_{01} + l_{12}) \cdot M_1 + l_{12} \cdot M_2 = 6EJ \cdot [-\alpha_1(Q_{01}) + \alpha_1(Q_{12})]$

<u>Опора 2:</u> $l_{12} \cdot M_1 + 2 \cdot (l_{12} + l_{23}) \cdot M_2 + l_{23} \cdot M_3 = 6EJ \cdot [-\alpha_2(Q_{12}) + \alpha_2(Q_{23})]$

<u>Опора 3:</u> $l_{23} \cdot M_2 + 2 \cdot (l_{23} + 3 \cdot a_3 \cdot EJ) \cdot M_3 = 6EJ \cdot [-\alpha_3(Q_{23})]$

$$\begin{cases} 2{,}0 \cdot 0 + 2 \cdot (2{,}0 + 2{,}8) \cdot M_1 + 2{,}8 \cdot M_2 = 6EJ \cdot \left[-\left(-\frac{60{,}06}{6EJ} \right) + \frac{283{,}36}{6EJ} \right] \\ 2{,}8 \cdot M_1 + 2 \cdot (2{,}8 + 2{,}4) \cdot M_2 + 2{,}4 \cdot M_3 = 6EJ \cdot \left[-\left(-\frac{59{,}36}{6EJ} \right) - \frac{151{,}2}{6EJ} \right] \\ 2{,}4 \cdot M_2 + 2 \cdot (2{,}4 + 3 \cdot 0 \cdot EJ) \cdot M_3 = 6EJ \cdot \left[-\frac{151{,}2}{6EJ} \right] \end{cases}$$

№ п/п	Коэффициенты при M_i			Правая часть
	M_1	M_2	M_3	
0	9,6	2,8	0,0	343,42
1	2,8	10,4	2,4	-91,84
2	0,0	2,4	4,8	-151,2

2.3 Решение системы и проверка

$$\left. \begin{array}{l} M_1 = 39{,}82\ кНм \\ M_2 = -13{,}89\ кНм \\ M_3 = -24{,}56\ кНм \end{array} \right| \rightarrow \begin{cases} 9{,}6 \cdot 39{,}82 + 2{,}8 \cdot (-13{,}89) = 343{,}42 \rightarrow 343{,}42 \equiv 343{,}42 \\ 2{,}8 \cdot 39{,}82 + 10{,}4 \cdot (-13{,}89) + 2{,}4 \cdot (-24{,}56) = -91{,}84 \rightarrow \\ \rightarrow \quad -91{,}84 \equiv -91{,}84 \\ 2{,}4 \cdot (-13{,}89) + 4{,}8 \cdot (-24{,}56) = -151{,}2 \rightarrow -151{,}2 \equiv -151{,}2 \end{cases}$$

3 Раскрытие статической неопределимости балки методом деформаций

3.1 Выбор J_0 *и* l_0

$J_0 = J_{\min} = J, \qquad l_0 = l_{\max} = 2{,}8 м.$

3.2 Вычисление k_{ij} *:*

$$k_{01} = \frac{J_{01}}{J_0} \cdot \frac{l_0}{l_{01}} = 1 \cdot \frac{2{,}8}{2{,}0} = 1{,}4; \quad k_{12} = \frac{J_{12}}{J_0} \cdot \frac{l_0}{l_{12}} = 1 \cdot \frac{2{,}8}{2{,}8} = 1{,}0; \quad k_{23} = \frac{J_{23}}{J_0} \cdot \frac{l_0}{l_{23}} = 1 \cdot \frac{2{,}8}{2{,}4} = 1{,}17.$$

3.3 Вычисление m_{ij} *.*

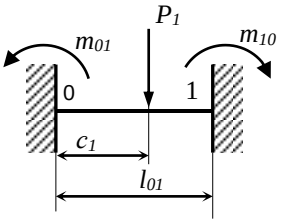

Рис. 5

Таблица 3.1, схема 25, стр. 114

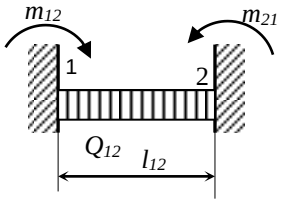

Рис. 6

Таблица 3.1, схема 28, стр. 116

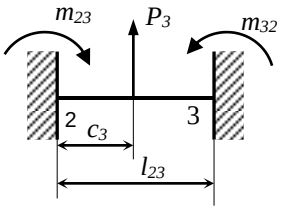

Рис. 7

Таблица 3.1, схема 26, стр. 114

$$m_{01} = \frac{P_1 \cdot a \cdot b^2}{l_{01}^2} = \frac{40 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}7^2}{2{,}0^2} = 6{,}37\ кНм$$

$$m_{10} = -\frac{P_1 \cdot a^2 \cdot b}{l_{01}^2} = -\frac{40 \cdot 1{,}3^2 \cdot 0{,}7}{2{,}0^2} = -11{,}83\ кНм$$

$$m_{12} = -\frac{Q_{12} \cdot l_{12}}{12} = -\frac{84 \cdot 2{,}8}{12} = -19{,}60\ кНм$$

$$m_{21} = \frac{Q_{12} \cdot l_{12}}{12} = \frac{84 \cdot 2{,}8}{12} = 19{,}60\ кНм$$

$$m_{32} = \frac{P_3 \cdot l_{23}}{8} = \frac{70 \cdot 2{,}4}{8} = 21{,}00\ кНм$$

$$m_{23} = -\frac{P_3 \cdot l_{23}}{8} = -\frac{70 \cdot 2{,}4}{8} = -21{,}00\ кНм$$

3.4 Составление уравнений системы

Для <u>опоры 3</u> уравнение не составляем, т.к. в этой опоре невозможен угол поворота.

<u>Опора 0:</u>

$$2 \cdot k_{01} \cdot \omega_0 + k_{01} \cdot \omega_1 = m_{01}$$

$$2 \cdot 1{,}4 \cdot \omega_0 + 1{,}4\omega_1 = 6{,}37$$

$$2{,}8\omega_0 + 1{,}4\omega_1 = 6{,}37$$

<u>Опора 1:</u>

$$k_{01} \cdot \omega_0 + 2 \cdot (k_{01} + k_{12}) \cdot \omega_1 + k_{12} \cdot \omega_2 = m_{10} + m_{12} - M_1$$

$$1{,}4\omega_0 + 2 \cdot (1{,}4 + 1{,}0)\omega_1 + 1{,}0 \cdot \omega_2 = -11{,}83 - 19{,}60 - (-80)$$

$$1{,}4\omega_0 + 4{,}8\omega_1 + 1{,}0 \cdot \omega_2 = 48{,}57$$

Опора 2:

$$k_{12}\cdot\omega_1+2\cdot(k_{12}+k_{23})\cdot\omega_2+k_{23}\cdot\omega_3=m_{21}+m_{23}\qquad \omega_3=0$$

$$1{,}0\cdot\omega_1+2{,}0\cdot(1{,}0+1{,}17)\cdot\omega_2=19{,}60-21{,}00$$

$$1{,}0\cdot\omega_1+4{,}33\cdot\omega_2=-1{,}40$$

№ п/п	Коэффициенты при ω_i			Правая часть
	ω_0	ω_1	ω_2	
1	2,80	1,40	0	6,37
2	1,40	4,80	1,00	48,57
3	0	1,00	4,33	-1,40

3.5 Решение системы и проверка

$$\left.\begin{array}{l}\omega_0=-3{,}63\,кНм\\ \omega_1=11{,}81\,кНм\\ \omega_2=-3{,}05\,кНм\end{array}\right|\rightarrow\left\{\begin{array}{l}2{,}8\cdot(-3{,}63)+1{,}4\cdot11{,}81+0=6{,}37\rightarrow6{,}37\equiv6{,}37\\ 1{,}4\cdot(-3{,}63)+4{,}8\cdot11{,}81+1{,}0\cdot(-3{,}05)=48{,}556\rightarrow48{,}56\cong48{,}57\\ 0+1{,}0\cdot11{,}81+4{,}33\cdot(-3{,}05)=-1{,}40\rightarrow-1{,}40\equiv-1{,}40\end{array}\right.$$

3.6 Определение моментов M_{ij} и M_{ji}

$$M_{01}=m_{01}-k_{01}\cdot(2\cdot\omega_0+\omega_1)=6{,}37-1{,}4\cdot[2\cdot(-3{,}63)+11{,}81]=0{,}00\,кНм$$

$$M_{10}=m_{10}-k_{01}\cdot(2\cdot\omega_1+\omega_0)=-11{,}83-1{,}4\cdot[2\cdot11{,}81-3{,}63]=-39{,}82\,кНм$$

$$M_{12}=m_{12}-k_{12}\cdot(2\cdot\omega_1+\omega_2)=-19{,}60-1{,}0\cdot[2\cdot11{,}81-3{,}05]=-40{,}18\,кНм$$

$$M_{21}=m_{21}-k_{21}\cdot(2\cdot\omega_2+\omega_1)=19{,}6-1{,}0\cdot[2\cdot(-3{,}05)+11{,}81]=13{,}89\,кНм$$

$$M_{23}=m_{23}-k_{23}\cdot(2\cdot\omega_2+\omega_3)=-21{,}00-1{,}17\cdot[2\cdot(-3{,}05)+0]=-13{,}89\,кНм$$

$$M_{32}=m_{32}-k_{23}\cdot(2\cdot\omega_3+\omega_2)=21{,}00-1{,}17\cdot[2\cdot0-3{,}05]=24{,}56\,кНм$$

3.7 Проверка равновесия узлов

Узел 0: $M_{01}=0\rightarrow0{,}0\equiv0{,}0$

Узел 1: $M_{10}+M_{12}=m_2\rightarrow(-39{,}82-40{,}18)=80\rightarrow80\equiv80$

Узел 2: $M_{21}+M_{23}=0\rightarrow(13{,}89-13{,}89)=0{,}00\rightarrow0{,}0\equiv0{,}0$

4 Сравнение результатов полученных двумя методами

	M_0, кНм	M_1, кНм	M_2, кНм	M_3, кНм
Метод трех моментов	0,00	39,82	-13,89	-24,56
Метод деформаций	0,00	-39,82/-40,18	13,89/-13,89	24,56
Погрешность, %	0,00	0,00	0,00	0,00

5 Построение эпюр

5.1 Определение реакций опор

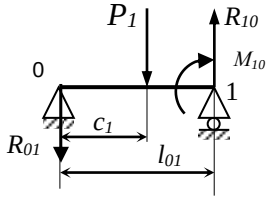

Рис. 8

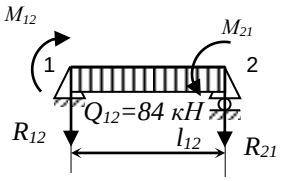

Рис. 9

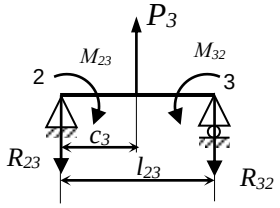

Рис. 10

$$R_{01}=\rho_{01}(Q_{01})-\frac{M_{01}+M_{10}}{l_{01}}=-\frac{P_1\cdot b}{l_{01}}-\frac{M_{01}+M_{10}}{l_{01}}=-\frac{40\cdot 0{,}7}{2{,}0}-\frac{0-39{,}82}{2{,}0}=5{,}91\,кН$$

$$R_{10}=\rho_{10}(Q_{10})+\frac{M_{01}+M_{10}}{l_{01}}=-\frac{P_1\cdot a}{l_{01}}+\frac{M_{01}+M_{10}}{l_{01}}=-\frac{40\cdot 1{,}3}{2{,}0}+\frac{0-39{,}82}{2{,}0}=-45{,}91\,кН$$

$$R_{12}=\frac{Q_{12}}{2}-\frac{M_{12}+M_{21}}{l_{12}}=\frac{84}{2}-\frac{-40{,}18+13{,}89}{2{,}8}=51{,}39\,кН$$

$$R_{21}=\frac{Q_{12}}{2}+\frac{M_{12}+M_{21}}{l_{12}}=\frac{84}{2}+\frac{-40{,}18+13{,}89}{2{,}8}=32{,}61\,кН$$

$$R_{23}=\rho_{23}(Q_{23})-\frac{M_{23}+M_{32}}{l_{23}}=\frac{P_3}{2}-\frac{M_{23}+M_{32}}{l_{23}}=\frac{70}{2}-\frac{-13{,}89+24{,}56}{2{,}4}=30{,}55\,кН$$

$$R_{32}=\rho_{32}(Q_{23})+\frac{M_{23}+M_{32}}{l_{23}}=\frac{P_3}{2}+\frac{M_{23}+M_{32}}{l_{23}}=\frac{70}{2}+\frac{-13{,}89+24{,}56}{2{,}4}=39{,}45\,кН$$

5.2 Определение экстремумов и построение эпюр

Строим эпюры срезывающих сил (рис.11б), изгибающих моментов (рис.11в), используя расчетную схему балки после раскрытия статической неопределимости (рис.11а).

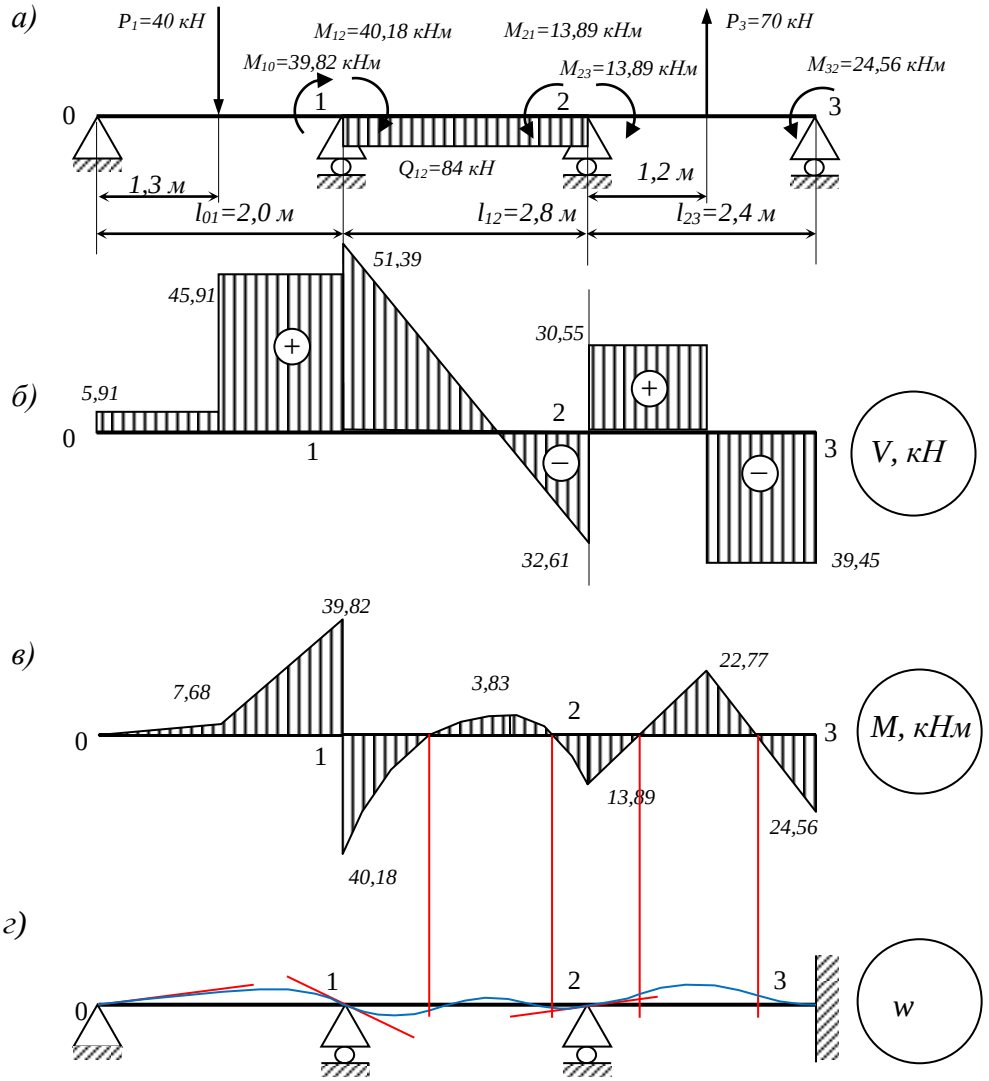

Рис.11

Определим экстремумы на эпюре изгибающих моментов, для этого сначала определим координату *x*, при которой срезывающая сила обращается в *0* в пролете 1-2. Аналитическое выражение для срезывающей силы на этом участке $V_{12} = -R_{21} + q_{12} \cdot x = -32{,}61 + 30 \cdot x$

Приравниваем срезывающую силу нулю и определяем координату x_0

$V_{01} = 0 = -32{,}61 + 30 \cdot x_0 \quad x_0 = \dfrac{32{,}61}{30} = 1{,}09\ м$ Выражение для изгибающего момента на этом участке и экстремальное значение

$$M_{01}(x) = R_{21} \cdot x - \frac{q_{12} \cdot x^2}{2} - M_{21} \quad при\ \ x = x_0 = 1{,}09\ м$$

$$M_{01}(1{,}09) = 32{,}61 \cdot 1{,}09 - \frac{30 \cdot 1{,}09^2}{2} - 13{,}89 = 3{,}83\ кНм$$

6 Проверка прочности балки

<u>Задано:</u>

$$[\sigma] = k \cdot \sigma_T, \quad \sigma_T = 235 МПа, \quad \begin{cases} k = 0{,}85 - на \quad опоре \quad [\sigma]_{оп} = 200\ МПа \\ k = 0{,}75 - в \quad пролете \quad [\sigma]_{пр} = 176\ МПа \end{cases}.$$

$$W_x = 289 \cdot 10^{-6}\ м^3$$

6.1 Находим в пролете $\sigma_{\max}^{пр}$.

$$\sigma_{\max}^{пр} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} = \frac{22{,}77 \cdot 10^{-3}}{289 \cdot 10^{-6}} = 78{,}8\ МПа \le [\sigma] = 176 МПа$$

$$\sigma_{\max}^{пр} = 78{,}8\ МПа \le [\sigma] = 176 МПа$$

6.2 Находим на опоре $\sigma_{\max}^{оп}$.

$$\sigma_{\max}^{оп} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} = \frac{40{,}18 \cdot 10^{-3}}{289 \cdot 10^{-6}} = 139\ МПа \le [\sigma] = 200\ МПа$$

$$\sigma_{\max}^{оп} = 139\ МПа \le [\sigma] = 200\ МПа$$

7 Заключение

Прочность балки достаточна