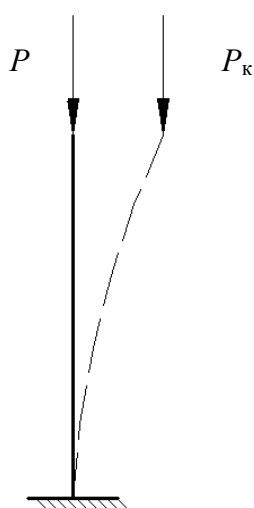


## ГЛАВА 7. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ БРУСЬЕВ

### §1. Понятие критической силы

*Устойчивостью* называют способность системы сохранять свое первоначальное состояние упругого равновесия при внешнем воздействии.



Для сжатого бруса существует *критическая* сила  $P = P_k$  такая, что при  $P < P_k$  брус работает на сжатие и *устойчиво* сохраняет *прямолинейную форму*. При  $P = P_k$  прямолинейная форма становится неустойчивой, и любое незначительное внешнее воздействие приводит к новой, *криволинейной* форме равновесия, т.е. к изгибу бруса, который сопровождается большими перемещениями, возникновением пластических (если материал пластичный) деформаций или разрушением (рис. 7.1).

Минимальное значение сжимающей силы, при котором становятся возможны две смежные формы упругого равновесия бруса – неустойчивая прямолинейная и устойчивая криволинейная, называется *критической силой*  $P_k$ .

Рис. 7.1

Опасность потери устойчивости в том, что она может наступить при напряжениях, меньших не только предела прочности  $\sigma_b$ , но и предела текучести  $\sigma_T$ .

Потеря устойчивости обычно приводит к нарушению нормальной работы конструкции, поэтому силу  $P_k$  считают разрушающей.

Допустимая сжимающая сила

$$P = P_k / n_y .$$

где  $n_y$  – коэффициент запаса устойчивости. Для стали  $n_y = 1,8 \dots 3,0$ ; для дерева  $n_y = 3,0 \dots 4,0$ ; для чугуна  $n_y = 4,0 \dots 5,0$ .

## §2. Формула Эйлера

Величину  $P_k$  для сжатого бруса, шарнирно закрепленного по концам, нашел в 1744 году Леонард Эйлер при напряжениях, меньших предела пропорциональности  $\sigma_{\text{пл}}$  (рис. 7.2).

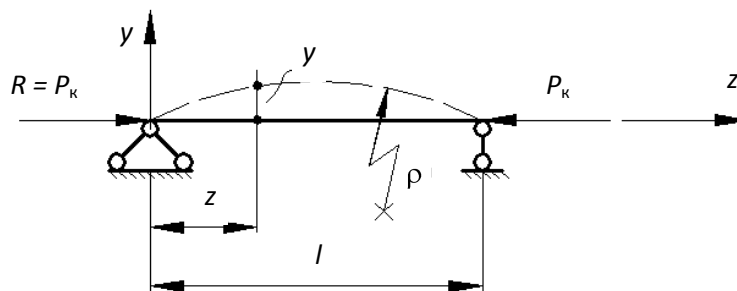


Рис. 7.2

При изучении чистого изгиба балки было получено уравнение

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}, \quad (7.1)$$

где  $\rho$  – радиус кривизны изогнутой оси.

Если брус изогнулся выпуклостью вверх, то  $M_x < 0$ , а  $y > 0$ . При изгибе выпуклостью вниз  $M_x > 0$ , а  $y < 0$ , поэтому всегда  $M_x = -P_k y$ .

Следует принять  $I_x = I_{\min}$ , так как брус всегда изогнется относительно оси с минимальным моментом инерции (оси, вдоль которой сечение наиболее «вытянуто»). Будем рассматривать малые упругие перемещения  $y$ , поэтому по сравнению с единицей величиной  $(dy/dz)^2$  в известной из математики формуле можно пренебречь

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y / dz^2}{1 + (dy/dz)^2} \approx \frac{d^2 y}{dz^2}. \quad (7.2)$$

Учитывая все это, запишем выражение

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{P_k y}{EI_{\min}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + k^2 y = 0. \quad (7.3)$$

Здесь обозначили

$$k^2 = P_k / EI_{\min} \quad \text{или} \quad P_k = k^2 EI_{\min}. \quad (7.4)$$

Решение дифференциального уравнения (111) имеет вид

$$Y = A \sin(kz) + B \cos(kz). \quad (7.5)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  найдем из граничных условий

1) при  $z = 0$ ,  $y = A \sin(k \cdot 0) + B \cos(k \cdot 0) = 0$ , т.е.  $B = 0$ ,

тогда

$$y = A \sin(kz); \quad (7.6)$$

2) при  $z = l, y = A \sin(kl) = 0$ , т.е. либо  $A = 0$  (тогда при всех значениях  $z$  из (105) следует, что  $y = 0$ , т.е. нет изгиба; этот случай нас не интересует), либо  $\sin(kl) = 0$ , т.е.  $kl = n\pi$ , где  $n$  – любое целое число ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Таким образом,  $k = n\pi/l$  и из (7.4) и (7.6) следует, что

$$P_k = \frac{n^2 \pi^2 EI_{\min}}{l^2}; \quad (7.7)$$

$$y = A \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right) \quad (7.8)$$

это выражение представляет собой форму упругой линии балки (форму потери устойчивости). То есть,

при  $n = 1$ :  $P_{k1} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}; \quad y_1 = A \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right);$

при  $n = 2$ :  $P_{k2} = \frac{4\pi^2 EI_{\min}}{l^2}; \quad y_2 = A \sin\left(\frac{2\pi}{l} z\right);$

при  $n = 3$ :  $P_{k3} = \frac{9\pi^2 EI_{\min}}{l^2}; \quad y_3 = A \sin\left(\frac{3\pi}{l} z\right).$

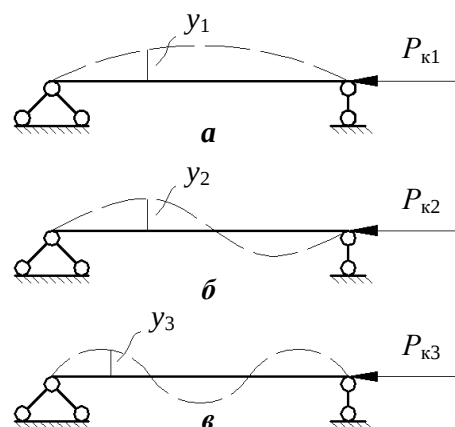


Рис. 7.3

Таким образом,  $n$  – количество полувольт синусоиды изогнутой оси бруса при соответствующем значении критической силы (рис. 7.3, а, б и в).

Опасно уже наименьшее значение критической силы отличное от нуля, т.е. при  $n = 1$

$$P_k = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}, \quad (7.9)$$

при этом брус изогнется по одной полуволне синусоиды.

Критическую силу, полученную в постановке Л. Эйлера, называют также *эйлеровой критической силой* и обозначают  $P_э$ .

### §3. Влияние типа опорных закреплений на критическую силу.

Характер упругой линии стержня позволяет распространить (7.9) на другие случаи закрепления бруса, если ввести понятие *приведенной длины* бруса  $l_{пр} = \mu l$ , на которой укладывается одна полуволна синусоиды изогнутой оси. Величина приведенной длины определяется из рассмотрения характера изгиба бруса при потере устойчивости (рис. 7.4).

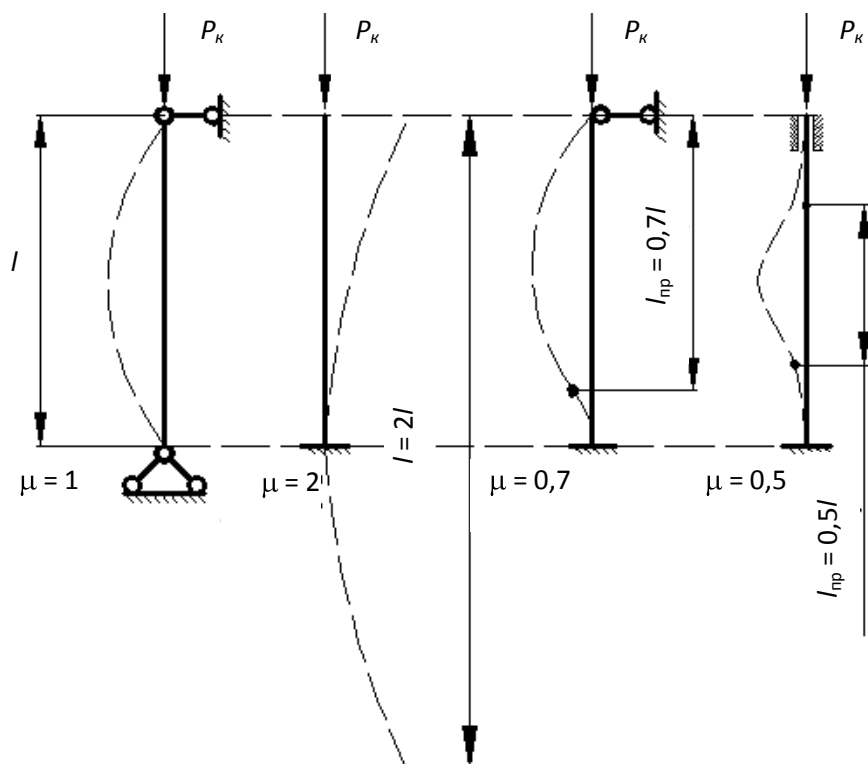


Рис. 7.4

Таким образом, при определении критической силы для сжатого бруса с различными типами опорных закреплений можно использовать формулу Эйлера в следующем виде:

$$P_{\text{э}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{\text{пр}}^2} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\mu l^2}, \quad (7.10)$$

где  $\mu$  – коэффициент приведения длины (см. рис 7.4).

#### §4. Пределы применимости формулы Эйлера.

Зависимость (7.3) и полученная на ее основе формула Эйлера (7.9, 7.10) справедливы только при упругих деформациях, когда напряжения в сжатом бруссе не превышают предела пропорциональности  $\sigma_{\text{п}}$ , т.е. условие применимости формулы Эйлера имеет вид

$$\sigma_{\text{к}} = P_{\text{к}} / A \leq \sigma_{\text{п}};$$

$$\sigma_{\text{к}} = \frac{P_{\text{к}}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\mu l^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{п}},$$

откуда  $\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{п}}}}.$

Величину  $\lambda$  называют *гибкостью* бруса

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}; \quad (7.11)$$

$i_{\min}$  – минимальный радиус инерции сечения,

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}. \quad (7.12)$$

Обозначим  $\lambda_{\text{пред}}$  – предельная гибкость.

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{п}}}}. \quad (7.13)$$

Таким образом, формула (7.10) применима *только для брусьев большой гибкости* (для которых  $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$ ).

Для стали Ст.3  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\sigma_{\text{п}} = 2 \cdot 10^2$  МПа и  $\lambda_{\text{пред}}^{\text{стали}} = 100$ .

Аналогично найдем  $\lambda_{\text{пред}}^{\text{дерева}} = 110$ ,  $\lambda_{\text{пред}}^{\text{чугуна}} = 80$ .

При малых гибкостях (для стали  $0 < \lambda < 40$ ) потери устойчивости не происходит (короткие брусья большого сечения). Критическими напряжениями для таких брусьев является предел текучести  $\sigma_{\text{Т}}$  для пластичных материалов и предел прочности  $\sigma_{\text{в}}$  для хрупких материалов. При средних гибкостях (для стали  $40 < \lambda < 100$ ) критические напряжения  $\sigma_{\text{к}}$  и критическая сила  $P_{\text{к}}$  определяются по эмпирическим формулам.

Так Ф.С. Ясинским предложена формула для критического напряжения:

$$\sigma_{\text{к}} = a - b \lambda + c \lambda^2 \quad (7.14)$$

где эмпирические коэффициенты (МПа)

- для стали  $a = 310$ ;  $b = 1,14$ ;  $c = 0$ ;
- для чугуна  $a = 761,0$ ;  $b = 11,77$ ;  $c = 0,0520$ ;
- для дерева  $a = 29,3$ ;  $b = 0,194$ ;  $c = 0$ .

Полный график критического напряжения для стали Ст.3 (рис. 77).

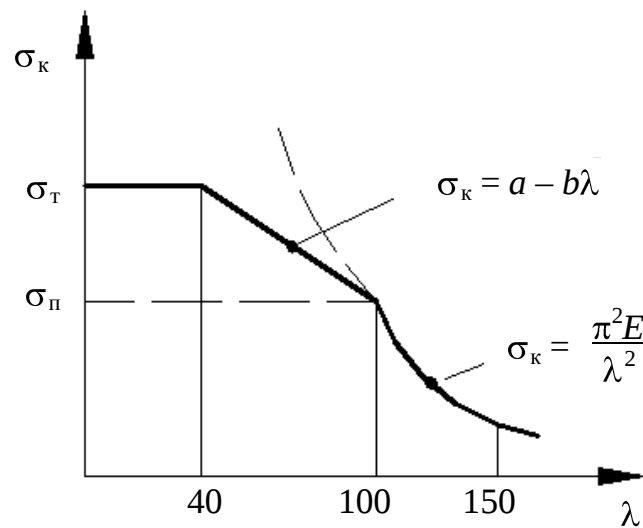


Рис. 7.5

## §5. Практические расчеты стержней на устойчивость.

Формулы Л. Эйлера (7.10) и Ф. Ясинского (7.14) применимы только в своих диапазонах гибкости. С практической точки зрения удобнее иметь одну общую формулу для расчетов устойчивости стержней.

Введем обозначение:  $\varphi = \sigma_k / \sigma_{тс}$ . Тогда  $\sigma_k = \varphi \sigma_{тс}$ , где  $\sigma_{тс}$  – предел текучести материала при сжатии. Соответственно допустимое критическое напряжение на устойчивость можно записать:

$$\sigma_y = \varphi \sigma_c. \quad (7.15)$$

Тогда расчет бруса на устойчивость может быть заменен обычным расчетом на сжатие, но со сниженным допустимым напряжением. При этом условие устойчивости будет иметь вид:

$$\sigma = \frac{N_z}{A} \leq \varphi \sigma_c. \quad (7.16)$$

Величина  $\varphi$  подсчитана для различных материалов в зависимости от гибкости  $\lambda$  и приводится в справочниках. Так как  $0 \leq \varphi \leq 1$ , коэффициент  $\varphi$  называется *коэффициентом снижения допустимого напряжения на сжатие*.

С помощью коэффициента  $\varphi$  можно решать три основные задачи на устойчивость:

### 1. Проверочный расчет.

Порядок проверочного расчета на устойчивость выглядит так:

1) исходя из известных размеров, формы поперечного сечения и условий закрепления стержня вычисляем гибкость  $\lambda$ ;

2) по справочной таблице по известному  $\lambda$  находим коэффициент понижения допускаемого напряжения  $\varphi$ , затем определяем допускаемое напряжение на устойчивость  $[\sigma]_y$ ;

3) сравниваем максимальное напряжение с допускаемым напряжением на устойчивость по условию (7.15).

### 2. Определение безопасной нагрузки. Из (7.15) получаем:

$$P \leq \varphi [\sigma] A.$$

### 3. Проектировочный расчет.

При проектировочном расчете (подобрать сечение под заданную нагрузку) в расчетной формуле (7.16) имеются две неизвестные величины – искомая площадь поперечного сечения  $A$  и неизвестный коэффициент  $\varphi$  (так как  $\varphi$  зависит от гибкости стержня, а значит и от неизвестной площади  $A$ ). Поэтому при подборе сечения обычно приходится пользоваться методом последовательных приближений.

1) Обычно в первом приближении принимают  $\varphi_1 = 0,5$  и определяют площадь.

2) По найденной площади  $A_1$  подбирают сечение, вычисляют  $I_{\min 1}$  и  $i_{\min 1}$ , а затем гибкость стержня в первом приближении  $\lambda_1$  и по ней новое значение  $\varphi_1'$ .

3) По  $\varphi_1'$  проверяют условие устойчивости (7.16), и если  $\sigma$  и  $[\sigma]_y$  (7.15) отличаются друг от друга более чем на 5 %, следует повторить расчет, приняв  $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}$ .

#### §6. Рациональные формы поперечных сечений с точки зрения устойчивости.

Из формулы Эйлера следует, что чем больше  $I_{\min}$ , тем больше и  $P_k$ . Кроме того, при потере устойчивости брус изгибается относительно оси с минимальным моментом инерции, поэтому для обеспечения одинакового сопротивления потере устойчивости в любом направлении желательно, чтобы  $I_{\min} = I_{\max}$ , а радиус инерции  $i$  был максимален. Этим требованиям удовлетворяют симметричные сечения, у которых материал расположен как можно дальше от центра тяжести. Такие сечения наиболее рациональны для сжатых брусков (рис. 7.6).

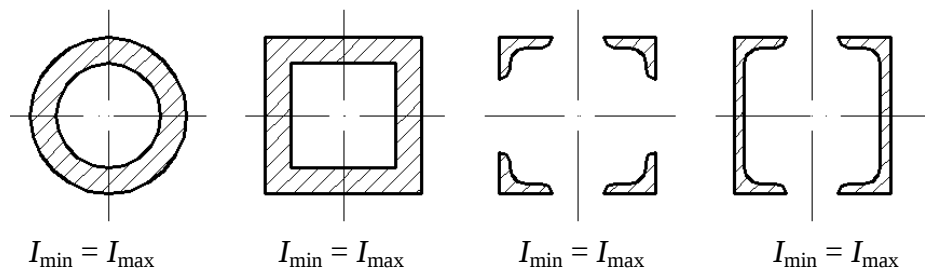


Рис. 7.6

Длинные стержни сплошного сечения при сжатии нерациональны.