

ГЛАВА 9. РАСЧЕТЫ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ

9.1. ПОНЯТИЕ О МЕТОДАХ РАСЧЕТА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ

Динамическими называются нагрузки, которые сопровождаются ускорениями.

Ускорения возникают при вращательном или неравномерном поступательном движении элемента конструкции. В этом случае ускорения определяются из кинематики.

Ускорение (замедление) движущегося тела возникает в момент контакта его с неподвижным элементом конструкции при резком изменении скорости тела за очень короткий промежуток времени. В этих условиях вычислить ускорение невозможно. Данный случай динамической нагрузки называют *ударом*.

При известном ускорении к действующим силам добавляются силы инерции, определяемые по второму закону Ньютона:

$$\vec{F}_u = -\vec{m}\vec{a}, \quad (9.1)$$

где m и a – масса и ускорение элемента (материальной точки). В соответствии с *принципом Даламбера*, если на механическую систему, кроме внешних нагрузок, приложить силы инерции, определенные по формуле (9.1), то система становится статически уравновешенной. При создании расчетной схемы элемент (стержень) мысленно останавливается, а затем внутренние силовые факторы, напряжения и перемещения определяют, как и при статическом нагружении.

При ударной нагрузке, которая происходит за малые доли секунды, определить ускорение нельзя. Следовательно, в данном случае принцип Даламбера неприменим. Для инженерных расчетов на удар используется приближенный *энергетический метод*, основанный на принятии ряда гипотез.

9.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ СТЕРЖНЯ

Пусть стержень длиной l , площадью перечного сечения A и удельным весом материала γ с присоединенным грузом Q движется с ускорением a (рис. 9.1,*a*). Требуется определить значения нормальных сил, напряжений и перемещений в сечениях стержня и записать для него условия прочности и жесткости.

Расчет проводим в два этапа.

Статический расчет (рис. 9.1, б)

Стержень растягивается грузом Q и распределенной нагрузкой от собственного веса, интенсивность которой $q = \gamma A$. Ось стержня z направим вниз и вычислим реакцию опоры из уравнения равновесия:

$$\sum z = -R + \gamma Al + Q = 0 \rightarrow R = Q + \gamma Al. \quad (9.2)$$

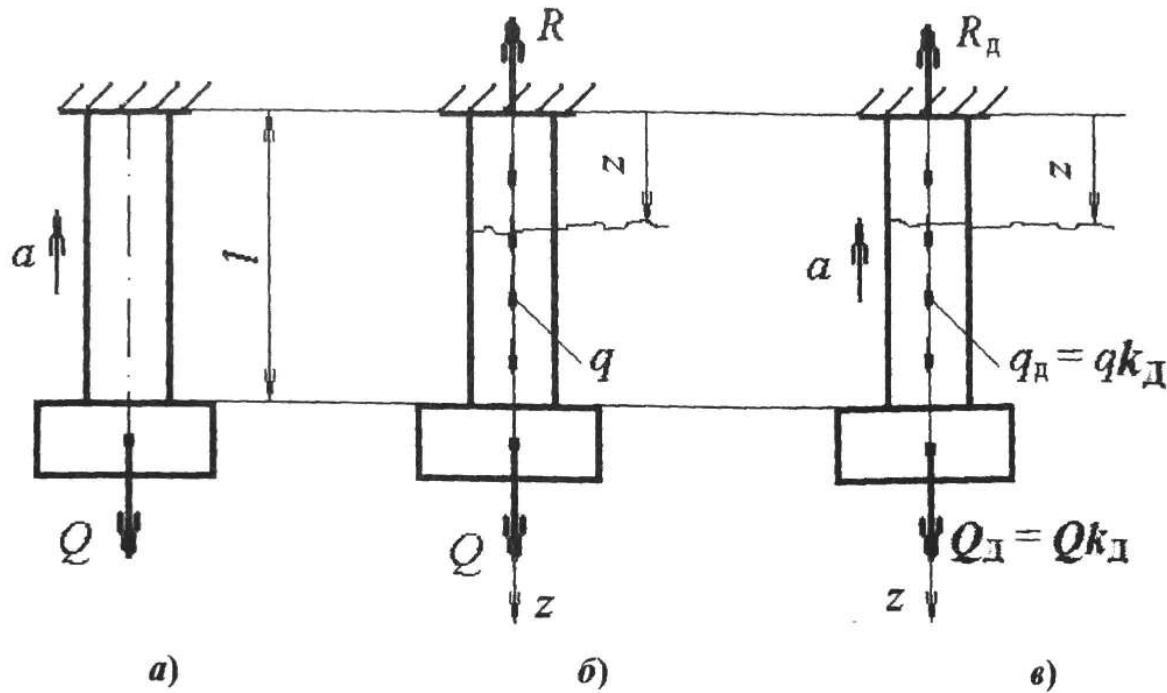


Рис. 9.1

Нормальную силу, напряжение и перемещение в произвольном сечении вычислим по формулам:

$$N_z = R - (qz) = Q + \gamma A(l - z),$$

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A_z} = \frac{Q}{A} + \gamma(l - z), \quad (9.3)$$

$$\Delta_z = \int_0^z \frac{N_z dz}{EA} = \frac{Qz}{EA} + \frac{\gamma}{E} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right).$$

Вычислим значения всех величин в характерных сечениях стержня.

При $z = 0$ $N_{z\max} = Q + \gamma Al$, $\sigma_{z\max} = \frac{Q}{A} + \gamma l$, $\Delta_z = 0$ (опорное сечение);

при $z = l$ $N_z = Q$, $\sigma_z = \frac{Q}{A}$, $\Delta_{z\max} = \frac{Ql}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2E}$.

Динамический расчет (рис. 9.1, в)

К стержневой системе (стержень-груз) дополнительно к внешним статическим нагрузкам прикладываем силу инерции $Q_u = \frac{Q}{g}a$ и распределенную инерционную нагрузку $q_u = q\frac{a}{g} = \frac{\gamma A}{g}a$ (последние направлены противоположно ускорению a (9.1), т.е. вниз). По принципу Даламбера система остановлена.

С учетом инерционных нагрузок (Q_u и q_u) представим динамические значения сосредоточенной силы и распределенной нагрузки:

$$Q_d = Q \pm Q_u = Q \pm \frac{Q}{g}a = Q \left(1 \pm \frac{a}{g}\right) = Qk_d,$$

$$q_d = q \pm q_u = q \pm \frac{q}{g}a = q \left(1 \pm \frac{a}{g}\right) = qk_d,$$
(9.4)

где $k_d = 1 \pm \frac{a}{g}$ - коэффициент динамичности при неравномерном движении.

Знак «плюс» в (9.4) ставят, когда направления внешних нагрузок и сил инерции совпадают, а знак «минус» - если направления противоположны.

Из соотношений (9.4) видно, что действующие на стержень динамические нагрузки равны статическим, умноженным на коэффициент динамичности. Покажем эти нагрузки на рис. 9.1, в.

Сравнивая рис. 9.1, б и рис. 9.1, в, запишем, учитывая зависимости (9.4) и выражения (9.2), (9.3), динамические значения реакции, нормальной силы, напряжений и перемещений в стержне:

$$R_d = Rk_d = (Q + \gamma Al) \left(1 \pm \frac{a}{g}\right),$$

$$N_{zd} = N_z k_d = [Q + \gamma A(l-z)] \left(1 \pm \frac{a}{g}\right),$$

$$\sigma_{zd} = \sigma k_d = \left[\frac{Q}{A} + \gamma(l-z) \right] \left(1 \pm \frac{a}{g}\right),$$

$$\Delta_{zd} = \Delta_z k_d = \left[\frac{Qz}{EA} + \frac{\gamma}{E} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right) \right] \left(1 \pm \frac{a}{g}\right).$$
(9.5)

Условия прочности и жесткости при неравномерном поступательном движении имеют следующий вид:

$$(\sigma_z)_{\max} = \left(\frac{Q}{A} + \gamma l \right) \left(1 + \frac{a}{g} \right) \leq [\sigma],$$

$$(\Delta_z)_{\max} = \left(\frac{Ql}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2E} \right) \left(1 + \frac{a}{g} \right) \leq [\Delta] \quad (9.6)$$

9.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ВРАЩЕНИИ СТЕРЖНЯ

Допустим, элемент конструкции в виде стержня длиной l , площадью поперечного сечения A , удельным весом материала γ шарнирно присоединен к опоре и вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис. 9.2, a). Требуется определить динамические значения нормальной силы, напряжений и перемещений в сечениях стержня.

В данном примере внешнюю распределенную нагрузку от веса стержня не учитываем ввиду ее малости по сравнению с силами инерции. Выделим элемент стержня с координатой z и длиной dz (рис. 9.2, a), имеющий массу $dm = \frac{\gamma A}{g} dz$, и вычислим элементарную центробежную силу инерции, действующую на этот элемент:

$$dF_u = dm a_u,$$

где a_u - центростремительное ускорение, равное $a_u = \omega^2 z$. Тогда

$$dF_u = \frac{\gamma A}{g} dz \omega^2 z = \frac{\gamma A \omega^2}{g} z dz \quad (\text{рис. 9.2, } a). \quad (9.7)$$

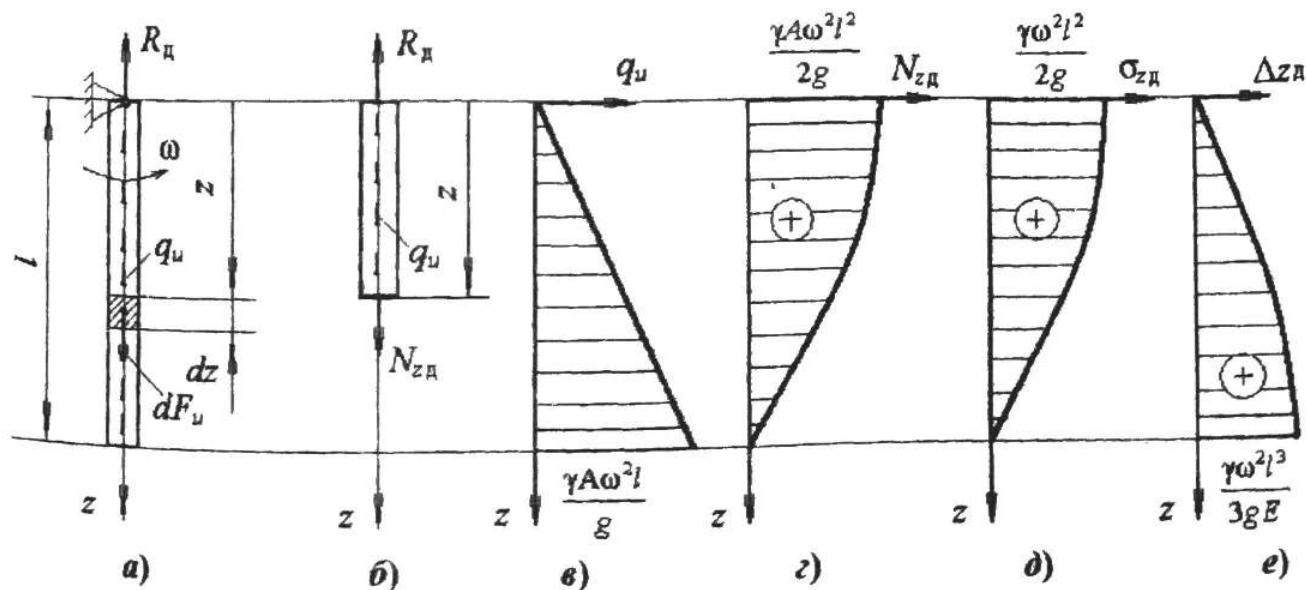


Рис. 9.2

Интенсивность распределенной погонной нагрузки

$$q_u = \frac{dF_u}{dz} = \frac{\gamma A \omega^2 z}{g}. \quad (9.8)$$

Ясно, что закон изменения распределенной нагрузки - линейный. При $z=0 \rightarrow q_u = 0$, при $z=l \rightarrow q_u = \frac{\gamma A \omega^2 l}{g}$. Покажем график изменения q_u по длине стержня (рис. 9.2, в).

Из уравнения равновесия вычислим реакцию опоры:

$$\sum z = -R_d + \int_0^l q_u dz = 0 \rightarrow R_d = \int_0^l \frac{\gamma A \omega^2 z}{g} dz = \frac{\gamma A \omega^2 l^2}{2g}. \quad (9.9)$$

Запишем условие равновесия для отсеченной части стержня (рис. 9.2, б):

$$\sum z = N_{zd} - R_d + \int_0^z q_u dz = 0,$$

из которого получим выражение для нормальной силы, а затем определим напряжения и перемещения в сечениях стержня:

$$\begin{aligned} N_{zd} &= R_d - \int_0^z q_u dz = \frac{\gamma A \omega^2}{2g} (l^2 - z^2), \\ \sigma_{zd} &= \frac{N_{zd}}{A} = \frac{\gamma \omega^2}{2g} (l^2 - z^2), \\ \Delta_{zd} &= \int_0^z \frac{N_{zd} dz}{EA} = \frac{\gamma \omega^2}{2gE} \left(l^2 z - \frac{z^3}{3} \right). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Вычисляем значения полученных величин в характерных сечениях стержня:

$$\text{при } z=0 \quad (N_{zd})_{\max} = \frac{\gamma A \omega^2 l^2}{2g}, \quad (\sigma_{zd})_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 l^2}{2g}, \quad \Delta_{zd} = 0;$$

$$\text{при } z=l \quad N_{zd} = 0, \quad \sigma_{zd} = 0, \quad (\Delta_{zd})_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 l^3}{3gE}.$$

Строим эпюры N_{zd} , σ_{zd} , Δ_{zd} (рис. 9.2, г, д, е).

Записываем условия прочности и жесткости при вращении стержня:

$$(\sigma_{zd})_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 l^2}{2g} \leq [\sigma], \quad (\Delta_{zd})_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 l^3}{3gE} \leq [\Delta] \quad (9.11)$$

По условиям (9.11) можно определить допускаемую угловую скорость вращения $[\omega]$ или длину $[l]$ стержня.

Заметим, что и в условие прочности, и в условие жесткости при равномерном вращении стержня не входит площадь его поперечного сечения A .

9.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ВРАЩЕНИИ ТОНКОСТЕННОГО КОЛЬЦА

Элемент конструкции в виде тонкостенного кольца средним радиусом R , площадью радиального сечения A , удельным весом материала γ вращается с равномерной угловой скоростью ω (рис. 9.3, а). Требуется определить динамические напряжения и перемещения в кольце и записать для него условия прочности и жесткости.

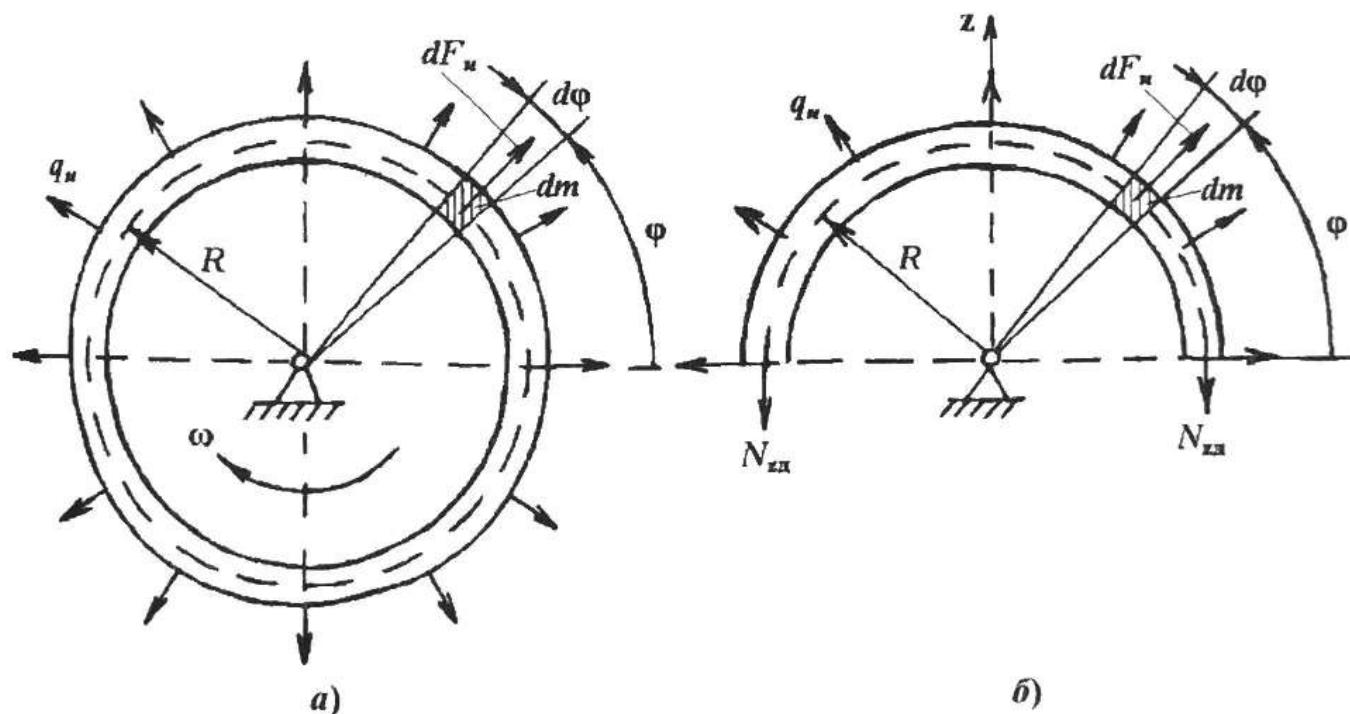


Рис. 9.3

При вращении кольца в нем возникают центробежные силы инерции. Радиальным сечением, положение которого определяется углом Φ , выделим элемент кольца $ds = R d\phi$ массой

$$dm = \frac{\gamma A ds}{g}, \quad (9.12)$$

на который действует элементарная центробежная сила инерции (рис. 9.3, а)

$$dF_u = dm a_u,$$

где $a_u = \omega^2 R$ - центростремительное ускорение.

Итак,

$$dF_u = \frac{\gamma A ds}{g} \omega^2 R = \frac{\gamma A \omega^2 R^2}{g} d\phi. \quad (9.13)$$

Интенсивность распределенных сил инерции равна

$$q_u = \frac{dF_u}{ds} = \frac{\gamma A \omega^2 R}{g}. \quad (9.14)$$

По принципу Даламбера под действием инерционной распределенной нагрузки кольцо находится в статическом равновесии.

Рассмотрим расчетную схему в виде полукольца (рис. 9.3, б). Ввиду симметрии формы и нагружения во всех поперечных сечениях кольца возникают равные динамические нормальные силы N_{zd} (рис. 9.3, б). Для их определения запишем условие равновесия:

$$\sum z = -2N_{zd} + \int_0^\pi dF_u \sin \phi = 0,$$

откуда

$$N_{zd} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\gamma A \omega^2 R^2}{g} \sin \phi d\phi = \frac{\gamma A \omega^2 R^2}{g}. \quad (9.15)$$

Динамическое напряжение в сечении кольца

$$\sigma_{zd} = \frac{N_{zd}}{A} = \frac{\gamma A \omega^2 R^2}{gA} = \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g}. \quad (9.16)$$

В качестве динамических перемещений можно рассматривать увеличение длины кольца или его радиуса:

$$\begin{aligned} \Delta S_d &= \frac{N_{zd} S}{EA} = \frac{\gamma A \omega^2 R^2 2\pi R}{gEA} = \frac{2\pi \gamma \omega^2 R^3}{gE}, \\ \Delta R_d &= \frac{\Delta S_d}{2\pi} = \frac{\gamma \omega^2 R^3}{gE}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Отметим, что в формулы для напряжений и перемещений не входит площадь поперечного сечения кольца.

Условия прочности и жесткости записываются так:

$$\sigma_{zd} = \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g} \leq [\sigma], \quad \Delta R_d = \frac{\gamma \omega^2 R^3}{gE} \leq [\Delta] \quad (9.18)$$

9.5. ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Ударом называется процесс взаимодействия двух тел, протекающий в течение очень короткого промежутка времени. В зависимости от направления удара по отношению к оси стержня и характера возникающих деформаций удар может быть продольным (растягивающим и сжимающим), поперечным (изгибающим) и кручущим.

Кратковременность процесса удара практически исключает возможность определения скорости тел после соударения, ускорений, сил взаимодействия между телами и др.

Для инженерных расчетов на удар используется приближенный энергетический метод, основанный на принятии следующих гипотез:

1. Деформации ударяемого тела (элемента конструкции) являются упругими; для вычисления внутренних усилий, напряжений и перемещений при этом справедлив закон Гука.

2. Удар происходит без отскока; ударяющее тело (груз) как бы «прилипает» к ударяемому и движется с ним вплоть до остановки.

3. Механическая энергия ударяющего тела целиком переходит в потенциальную энергию деформации ударяемого элемента конструкции.

4. Массу ударяемого тела не учитывают.

Основная идея при построении технической теории удара заключается в замене реальной ударной нагрузки эквивалентной статической нагрузкой, создающей в элементе конструкции такие же внутренние силовые факторы, напряжения и перемещения, что и при ударе. К элементу конструкции в месте удара прикладывается статическая сила P_s , которая в k_d раз больше ударяющего тела Q и вызывает статическое перемещение в точке приложения Δ_s , равное динамическому перемещению Δ_d , т.е.

$$\begin{aligned} P_s &= Qk_d, \\ \Delta_s &= \Delta_d, \end{aligned} \tag{9.19}$$

где Q – вес ударяющего груза, Δ_d - динамическое перемещение сечения, на которое падает груз, k_d - коэффициент динамичности, подлежащий определению.

Вывод формулы для коэффициента динамичности приведем на примере продольного сжимающего удара (рис. 9.4). На рис. 9.4, а показана расчетная схема удара. На рис. 9.4, б, в даны расчетные схемы статического нагружения стержня силой P и грузом Q . Так как по принятому в рас-

чтобы допущению деформации стержня – упругие, перемещения сечений при статической нагрузке определяем по закону Гука:

$$\Delta_s = \frac{P_s l}{EA}, \Delta_c = \frac{Ql}{EA}. \quad (9.20)$$

Поделив одну на другую левую и правую части обоих перемещений (9.20), получим

$$\frac{\Delta_s}{\Delta_c} = \frac{P_s}{Q}. \quad (9.21)$$

Подставляя в (9.21) зависимости (9.19), найдем

$$\frac{\Delta_d}{\Delta_c} = k_d. \quad (9.22)$$

Таким образом, коэффициент динамичности определяется как отношение динамического перемещения сечения, на которое падает груз Q , к статическому перемещению этого сечения от статического приложения в нем груза Q .

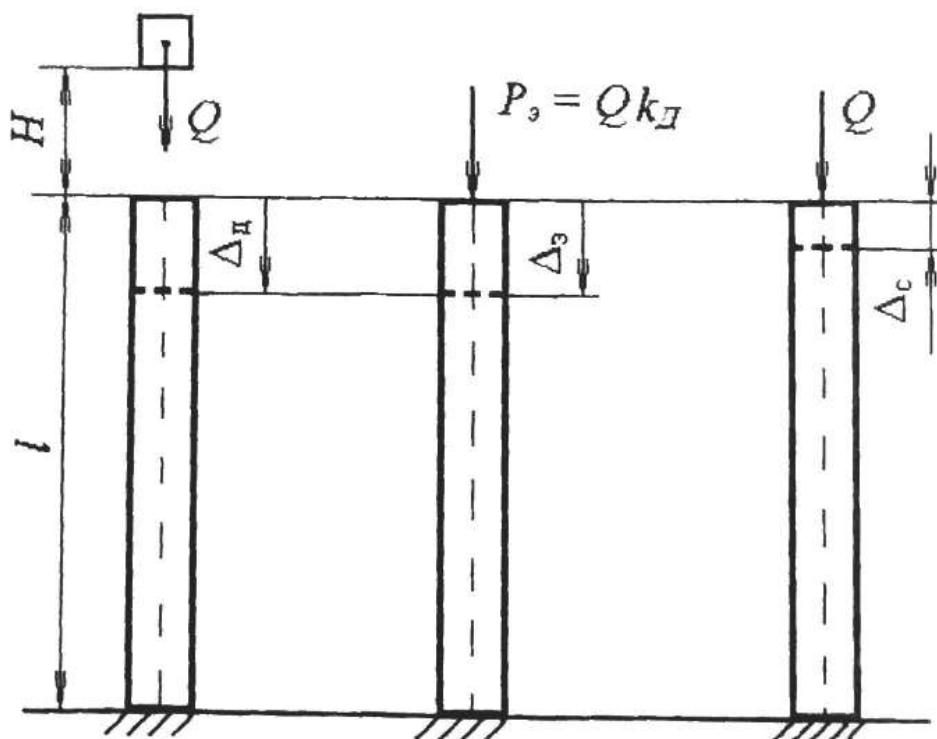


Рис. 9.4

Потенциальная энергия груза $\Pi_{\text{тр}}$ численно равна работе $W_{\text{тр}}$, совершаемой грузом при его падении с высоты H и при прохождении пути $H + \Delta_d$:

$$\Pi_{\text{тр}} = W_{\text{тр}} = Q(H + \Delta_d). \quad (9.23)$$

Потенциальная энергия упругой деформации U_d численно равна работе силы P_s на перемещении Δ_s - W_s , т.е.

$$U_d = W_s. \quad (a)$$

Эту работу найдем из графика зависимости $P - \Delta$, приведенного на рис. 9.5:

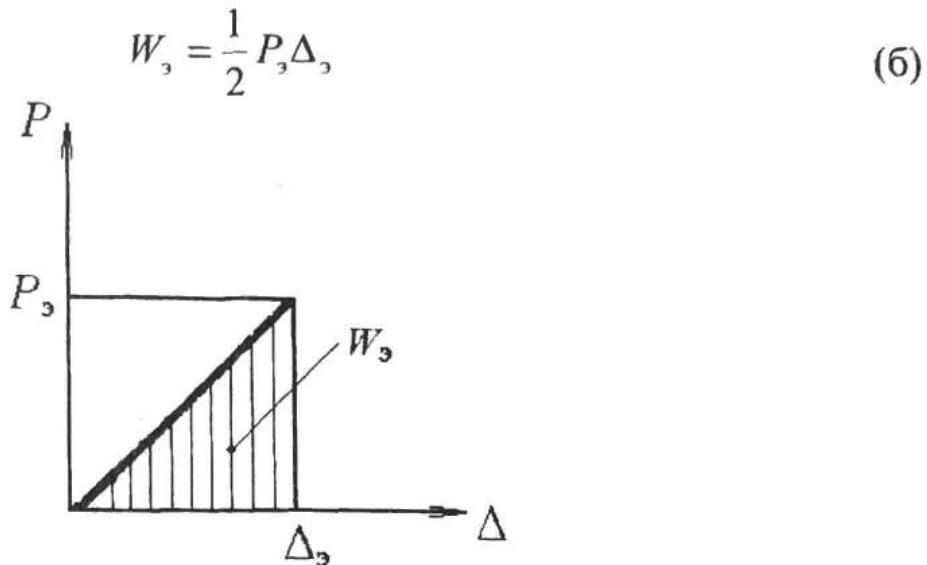


Рис. 9.5

Подставляя формулу (б) в равенство (а) и учитывая в ней зависимость (9.19), получим выражение для потенциальной энергии упругой деформации стержня:

$$U_d = \frac{1}{2} Q k_d \Delta_d. \quad (9.24)$$

В соответствии с гипотезой 3 потенциальная энергия груза Π_{tp} в момент удара полностью превращается в потенциальную энергию упругой деформации системы U_d , т.е.

$$\Pi_{tp} = U_d. \quad (9.25)$$

Подставляя в условие (9.25) выражения (9.23), (9.24) и учитывая зависимость (9.22), получим:

$$Q(H + k_d \Delta_c) = \frac{1}{2} Q k_d k_d \Delta_c.$$

Умножая обе части последнего равенства на $\frac{2}{Q \Delta_c}$, найдем

$$k_d^2 - 2k_d - \frac{2H}{\Delta_c} = 0,$$

откуда

$$k_d = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_c}}, \quad (b)$$

И, сохраняя в формуле (b) знак «плюс», окончательно запишем:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_c}}. \quad (9.26)$$

Это выражение является *коэффициентом динамичности при вертикальном ударе груза*, падающего на упругую систему с высоты H .

В частном случае, если высота H равна нулю (при внезапном приложении груза), коэффициент динамичности равен 2. Если высота H значительно больше статического перемещения в месте удара Δ_c , т.е. $\frac{2H}{\Delta_c} \gg 1$,

то единицами перед корнем и внутри корня в формуле (9.26) можно пренебречь – в этом случае формула для коэффициента динамичности имеет вид

$$k_d = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_c}}. \quad (9.26a)$$

При горизонтальном ударе груза, скорость которого V , потенциальная энергия P_{tp} равна нулю, а кинетическая энергия определяется выражением

$$K_{tp} = \frac{mV^2}{2} = \frac{QV^2}{2g}. \quad (9.27)$$

Используя закон сохранения энергии, приравниваем K_{tp} к потенциальной энергии динамического деформирования системы U_d (9.24). И, учитывая зависимость (9.22), находим:

$$\frac{QV^2}{2g} = \frac{1}{2} Q k_d k_d \Delta_c,$$

откуда

$$k_d = \frac{V}{\sqrt{g\Delta_c}}. \quad (9.28)$$

Это выражение является *коэффициентом динамичности при горизонтальном ударе груза, движущегося со скоростью V* .

Из формул (9.26) и (9.28) очевидно, что коэффициент динамичности уменьшается при возрастании величины статического перемещения Δ_c в

месте удара груза Q . Отсюда понятна роль всякого рода рессор, амортизаторов, гибких связей, увеличивающих значение Δ_c .

В заключение отметим, что принимая во внимание допущения (9.19) и формулы для k_d , можно расчет на ударную нагрузку свести к статическому расчету всех искомых величин с последующим умножением последних на коэффициент динамичности. Например, $\sigma_d = \sigma_c k_d$, $\Delta_d = \Delta_c k_d$ и т.д.

9.6. ПРИМЕР РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ УДАРНОЙ НАГРУЗКИ

Допустим, на свободный конец стальной балки длиной $3l$, имеющей постоянное поперечное сечение в форме прямоугольника ($h/b = 2$), падает с высоты H груз Q (рис. 9.6, *a*). Требуется проверить выполнение условий прочности и жесткости (по условию жесткости прогиб сечения C при ударе не должен превышать $[\Delta] = \frac{3l}{200}$).

Дано: материал – сталь Ст.3; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_s = 240$ МПа, $n_s = 3$; $Q = 8$ кН; $b = 0,1$ м; $H = 0,1$ м.

Предварительно заметим, что при решении предложенного примера придется воспользоваться не только выводами данной главы, но и в какой-то степени и результатами, полученными в предыдущих главах учебного пособия.

Решение

Рассмотрим два этапа:

I – статический расчет;

II – динамический расчет.

Статический расчет выполняем в следующем порядке.

1. Прикладываем груз Q статически в сечении C , где происходит удар (рис. 9.6, *б*). Балочная система один раз внешне статически неопределенна (четыре реакции опор минус три уравнения равновесия).

2. Выбираем основную систему (ОС), отбрасывая «лишнюю» связь в опоре I и удаляя нагрузку Q (рис. 9.6, *б*); ОС покажем на рис. 9.6, *в*.

3. Превращаем основную систему в эквивалентную (ЭС), прикладывая к ОС нагрузку Q , неизвестную силу X_1 по месту и по направлению отброшенной связи и записывая дополнительное уравнение перемещений (условие эквивалентности), запрещающее перемещение сечения I по направлению силы X_1 от совместного действия этой силы и груза Q :

$$\Delta_1 = 0. \quad (1)$$

Эквивалентную систему изобразим на рис. 9.6, *г*.

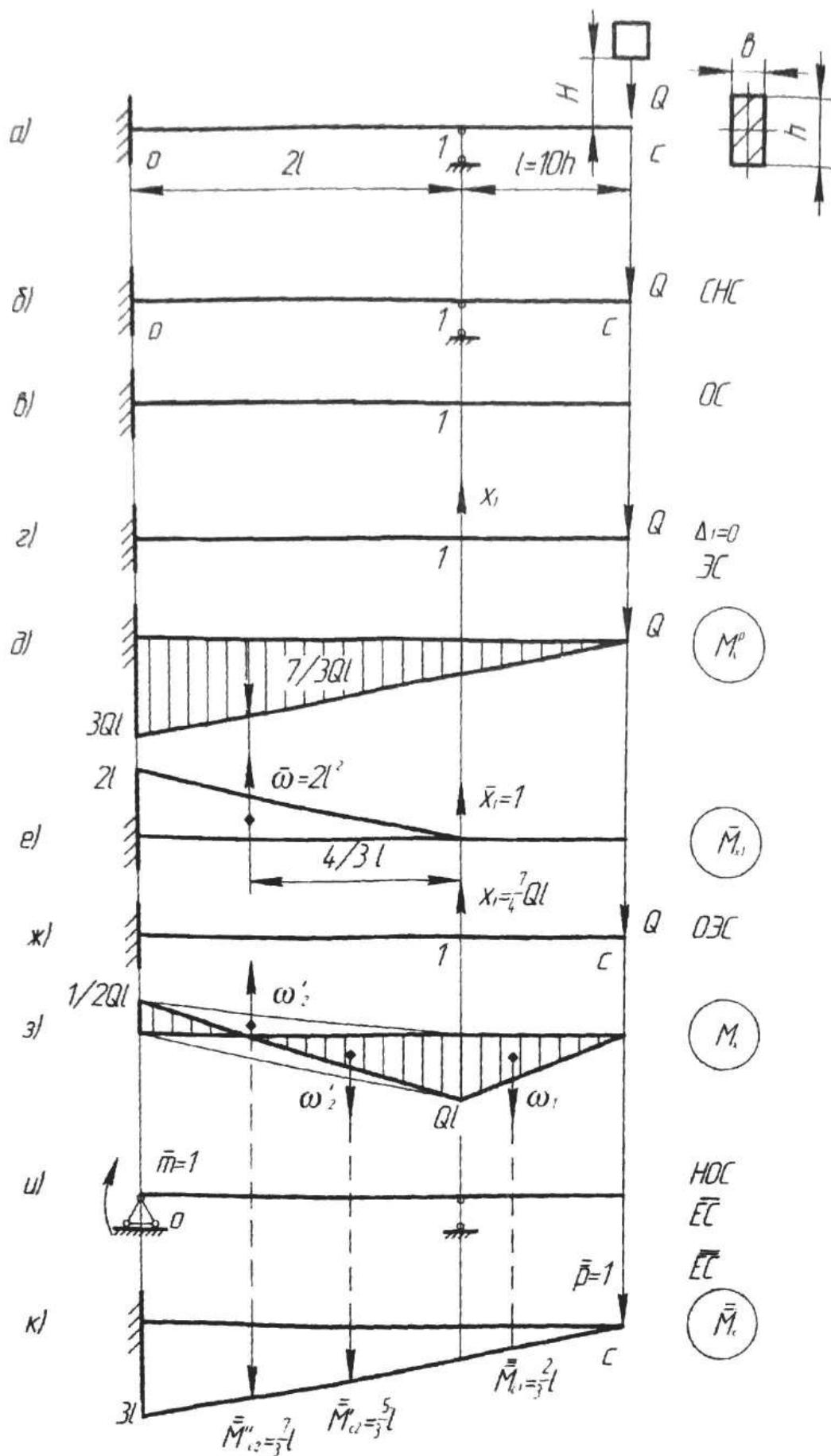


Рис. 9.6

1. Запишем условие эквивалентности (1) в каноническом виде
 (7.6):

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0. \quad (2)$$

5. Находим коэффициенты – перемещения Δ_{1p} , δ_{11} и неизвестное усилие X_1 .

Для вычисления коэффициентов способом Верещагина (7.10, 7.11) в основной системе построим эпюры изгибающих моментов: от заданной нагрузки $Q - M_x^P$ и от единичной неизвестной силы $\bar{X}_1 = 1 - \bar{M}_{x1}$.

При сосредоточенной силе Q и любой единичной нагрузке эпюры изгибающих моментов линейны ввиду отсутствия распределенной нагрузки q (2.1 ÷ 2.3). Эти эпюры можно построить по выражениям (1.8), записанным для всех силовых участков балки, или по ординатам эпюр, вычисленным в характерных сечениях на границах участков. В данном случае воспользуемся вторым вариантом.

Для эпюры M_x^P имеем (рис. 9.6, δ): в сечении C - $M_{xc}^P = 0$; в опоре O - $M_{xO}^P = Q \cdot 3l \downarrow = 3Ql \downarrow$.

Для эпюры \bar{M}_{x1} имеем (рис. 9.6, e): в сечении I - $(\bar{M}_{x1})_I = 0$; в опоре O - $(\bar{M}_{x1})_o = \bar{X}_1 \cdot 2l \uparrow = 2l \uparrow$.

Найдем величину перемещений Δ_{1p} и δ_{11} по выражениям (7.10, 7.11). При вычислении обоих коэффициентов на эпюрах M_x^P и \bar{M}_{x1} необходимо рассматривать два силовых участка. Однако, поскольку на правом участке единичная эпюра равна нулю, расчет проводим лишь для левого участка балки. Так как на этом участке обе эпюры изгибающих моментов линейны, то, используя способ Верещагина при определении Δ_{1p} , безразлично, на какой из эпюр подсчитывать площадь, а на какой ординату под центром тяжести этой площади. В примере площадь берем с единичной эпюры $\bar{M}_{x1} - \bar{\omega} = \frac{1}{2} 2l \cdot 2l = 2l^2 \uparrow$, а ординату по ее центрам тяжести – с грузовой эпюры M_x^P - $M_{xc}^P = Q \cdot \left(l + \frac{4}{3}l\right) = \frac{7}{3}Ql \downarrow$ (рис. 9.6, e , δ).

В результате получим

$$\Delta_{1p} = \frac{(\bar{\omega})M_{xc}^P}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} (2l^2) \uparrow \downarrow \left(-\frac{7}{3}Ql\right) = -\frac{14}{3} \frac{Ql^3}{EI_x}. \quad (3)$$

Знак «минус» в выражении (3) потому, что эпюры M_x^P и \bar{M}_{x1} отложены на разных волокнах.

Предлагаем читателю найти Δ_{1p} , взяв площадь с эпюры M_x^P , а ординату под ее центром тяжести с эпюры \bar{M}_{x1} .

По эпюре \bar{M}_{x1} вычислим перемещение δ_{11} :

$$\delta_{11} = \frac{2l^2 \cdot \frac{4}{3}l}{EI_x} = \frac{8}{3} \frac{l^3}{EI_x}.$$

Определим неизвестную силу X_1 .

Подставляя выражения (3) и (4) в уравнение (2), найдем

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{\left(-\frac{14}{3} \frac{Ql^3}{EI_x}\right)}{\frac{8}{3} \frac{l^3}{EI_x}} = \frac{7}{4} Q.$$

Итак, статическая неопределенность раскрыта.

6. Далее решаем эквивалентную систему в окончательном виде – ОЭС (рис. 9.6, ж).

Эпюру изгибающих моментов для ОЭС можно построить, вычислив ее ординаты на границах участков по формуле

$$M_{xi} = M_{xi}^p + X_1 (\bar{M}_{x1})_i. \quad (4)$$

По формуле (4) находим:

$$M_{xC} = 0; \quad M_{x1} = -Ql \downarrow; \quad M_{xO} = -3Ql \downarrow + \frac{7}{4}Q \cdot 2l \uparrow = \frac{1}{2}Ql \uparrow.$$

Покажем эпюру M_x на рис. 9.6, з.

7. Деформационная проверка решения. Выбираем новую основную систему – НОС, отбрасывая в исходной СНС (рис. 9.6, б) у опоры O связь, препятствующую повороту сечения, то есть заменяя заделку на шарнирно - неподвижную опору (рис. 9.6, и).

Находим в новой основной системе угол поворота сечения O , заранее равный нулю:

$$\theta_0 = 0.$$

Для вычисления θ_0 выбираем единичное состояние, прикладывая в сечении O момент $\bar{m} = 1$ (рис. 9.6, и).

Предлагаем читателю построить эпюру \bar{M}_x и вычислить θ_0 способом Верещагина, «перемножив» эпюры M_x и \bar{M}_x .

8. Определим максимальное нормальное напряжение в балке при статическом нагружении.

По формуле (5.49)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x},$$

где $M_{x \max} = Ql$ (рис. 9.6, з).

$$W_x = \frac{bh^3}{6} = \frac{b(2b)^3}{6} = \frac{2}{3} b^3.$$

Следовательно,

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Ql}{b^3} = \frac{3}{2} \frac{Q(20b)}{b^3} = \frac{60Q}{b^2} = \frac{30 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{(0,1)^2} = 24 \text{ МПа.}$$

9. Вычислим статическое перемещение сечения C в ОЭС (рис. 9.6, ж) способом Верещагина.

Для этого выбираем единичное состояние $\bar{\bar{E}}_c$ (рис. 9.6, к) и строим эпюру изгибающих моментов \bar{M}_x на том же рисунке.

По формуле (5.60) имеем

$$\Delta_c = \sum_1^2 \frac{(\omega_{M_x})_i \bar{M}_{ci}}{EI_x}, \quad (5)$$

где площади ω_i показаны на рис. 9.6, з, ординаты эпюр \bar{M}_x под центрами тяжести этих площадей (\bar{M}_{ci}) даны на рис. 9.6, к; момент инерции I_x определяется по формуле (3.13):

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{b(2b)^3}{12} = \frac{2}{3} b^4.$$

Подставляя расчетные величины в (5), получим:

$$\begin{aligned} \Delta_c &= \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{2} Ql \cdot l \right) \downarrow \cdot \frac{2}{3} l \downarrow + \left(\frac{1}{2} Ql \cdot 2l \right) \downarrow \cdot \frac{5}{3} l \downarrow + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} Ql \cdot 2l \right) \uparrow \cdot \left(-\frac{7}{3} l \right) \downarrow \right] = \\ &= \frac{5}{6} \frac{Ql^3}{E \frac{2}{3} b^4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot (20 \cdot 0,1)^3}{2 \cdot 10^5 \cdot (0,1)^4} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \end{aligned}$$

На этом первый этап расчета (статический) завершен. Переходим ко второму этапу расчета, в котором вычислим максимальное динамическое напряжение в балке, динамическое перемещение сечения C и проверим выполнение условий прочности и жесткости при ударной нагрузке.

Динамический расчет выполняем в такой последовательности.

10. Определим коэффициент динамичности при вертикальном ударе. По формуле (5.24)

$$k_a = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1b}{\Delta_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 0,1}{4 \cdot 10^{-3}}} = 3,45. \quad (7)$$

11. Максимальное динамическое напряжение

$$(\sigma_a)_{\max} = \sigma_{\max} k_a = 24,0 \cdot 3,45 = 82,8 \text{ МПа.} \quad (8)$$

12. Динамическое перемещение сечения C , с учетом (6), равно

$$(\Delta_c)_a = \Delta_c k_a = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 3,45 = 13,8 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \quad (9)$$

13. Проверим выполнение условия прочности

$$(\sigma_a)_{\max} \leq [\sigma], \quad (10)$$

$$\text{где } [\sigma] = \frac{\sigma_i}{n_r} = \frac{240}{3} = 80 \text{ МПа.}$$

Подставляя расчетные величины в условие (10), находим, что

$$(\sigma_a)_{\max} = 82,8 > [\sigma] = 80 \text{ МПа.}$$

Вычислим перенапряжение (превышение) расчетного напряжения по отношению к допускаемому:

$$\Delta\sigma\% = \frac{(\sigma_a)_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{82,8 - 80}{80} \cdot 100 = 3,5\% < 5\%,$$

что допускается.

Таким образом, условие прочности выполняется.

14. Проверим выполнение условия жесткости

$$(\Delta_c)_a \leq [\Delta], \quad (11)$$

$$\text{где допускаемое перемещение } [\Delta] = \frac{3l}{200} = \frac{60b}{200} = \frac{60 \cdot 0,1}{200} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Подставляя $(\Delta_c)_a$ и $[\Delta]$ в условие (11), получим

$$(\Delta_c)_a = 1,38 \cdot 10^{-2} < [\Delta] = 3 \cdot 10^{-3},$$

то есть условие жесткости выполняется.

В заключение предлагаем читателю определить максимальное динамическое касательное напряжение в балке (не в поперечном сечении!) $(\tau_a)_{\max}$, используя формулы (4.12). Сообщаем ответ: 41,4 МПа.

Ильичев Н.А., Кулепов В.Ф., Шурашов А.Д.

И46 **Основы расчетов стержневых систем на прочность, жесткость и устойчивость: учеб. пособие/ Н.А. Ильичев, В.Ф. Кулепов, А.Д. Шурашов; под ред. Н.А. Ильичева; Нижегород. гос. техн. ун - т им Р.Е. Алексеева. – Н. Новгород, 2015.– 280 с.**