

$$I_{min} = \frac{hb^3}{12} = \frac{11 \cdot 5,5^3}{12} = 138,6 \text{ см}^4;$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}} = \sqrt{\frac{138,6}{70}} = 1,58 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{200}{1,58} = 126,5,$$

Значение коэффициента φ для гибкости $\lambda = 126,5$:

$$\varphi = 0,45 - \frac{0,45 - 0,40}{10} \cdot 6,5 = 0,417.$$

Допускаемые напряжения и допускаемая сила равны:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_{сж}] = 0,417 \cdot 160 = 66,72 \text{ МПа};$$

$$P_d = [\sigma_y] F = 66,72 \cdot 6000 = 400320 \text{ Н},$$

что незначительно больше заданной нагрузки $P_d > P$, $400320 > > 400000 \text{ Н}$.

Глава 18

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

В предыдущих главах рассматривались задачи, в которых нагрузки, действующие на ту или иную систему, прикладывались к ней статически, т. е. не изменялись во времени. Однако при проектировании машин и даже сооружений необходимо учитывать инерционные нагрузки, возникающие, например, при подъеме груза в подъемных машинах, шатунах двигателей внутреннего сгорания или ветровые нагрузки при проектировании мостов и т. п. К динамическим нагрузкам относятся и ударные приложения сил, например, при работе кузнецкого молота или копровой бабы. Огромные динамические нагрузки возникают в деталях прокатных станов при прокате и кантовке слябов.

Рассмотрим простейшие примеры расчета конструкционных элементов при действии на них динамических нагрузок.

18.1. НАПРЯЖЕНИЕ В ДЕТАЛЯХ КОНСТРУКЦИЙ, ДВИЖУЩИХСЯ ПОСТУПАЛЬНО

На рис. 18.1.1, а показан стержень длиной l с площадью поперечного сечения F , движущийся поступательно с постоянным ускорением w .

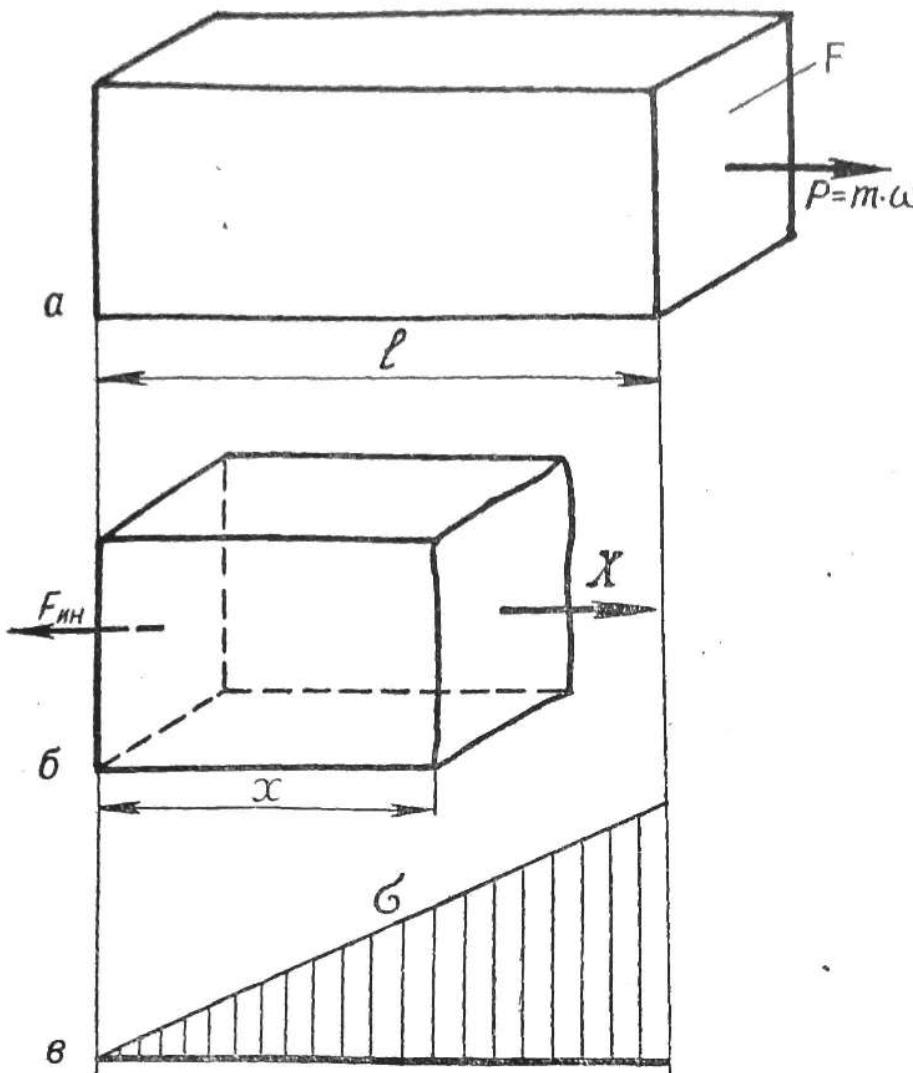


Рис. 18.1.1

равновесия используем метод кинетостатики (принцип Даламбера), т. е. уравновесим отсеченную часть стержня силой инерции:

$$F_{\text{ин}} = m' w = \frac{Fx \gamma}{g} w. \quad (18.1.2)$$

Следовательно, сила X будет равна

$$X = \frac{Fx \gamma}{g} w \frac{l}{l} = P \frac{x}{l}. \quad (18.1.3)$$

Напряжение в рассматриваемом сечении найдется как

$$\sigma_x = \frac{X}{F} = \frac{P}{F} \frac{x}{l}. \quad (18.1.4)$$

Из формулы 18.1.4 видно, что нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня находятся в линейной зависимости от величины x , т. е. от расстояния свободного конца стержня до рас-

Удельный вес материала стержня γ . На основании второго закона динамики сила P , движущая стержень с ускорением w , может быть определена как

$$P = mw = \frac{Fl\gamma}{g} w. \quad (18.1.1)$$

Учитывая, что сила P приложена к торцу стержня, она будет растягивать его и, следовательно, создавать в поперечных сечениях нормальные напряжения.

Рассечем стержень на расстоянии x от свободного конца (рис. 18.1.1, б) и отбросим правую часть. Влияние отброшенной части заменим неизвестной силой X . Для рассмотрения стержня в состоянии

сматриваемого сечения. Следовательно, напряжения в поперечных сечениях стержня, движущегося поступательно с ускорением w , будут распределяться как показано на рис. 18.1.1, в.

18.2. РАСЧЕТ ТРОСА ГРУЗОПОДЪЕМНОГО УСТРОЙСТВА

Наиболее ответственным элементом любого грузоподъемного устройства является трос, на котором подвешивается сосуд с размещающимися в нем грузом или людьми.

Предположим, что груз Q (рис. 18.2.1, а) поднимается вверх с ускорением w . Погонный вес троса обозначим через q , площадь поперечного сечения — через F .

Рассечем трос на расстоянии x от груза Q , отбросим верхнюю часть и рассмотрим равновесие нижней части (рис. 18.2.1, б). В сечении троса на расстоянии x будут действовать следующие силы: Q — вес груза, qx — вес отсеченной части троса, $F_Q = \frac{Q}{g}w$ — сила инерции

груза, $F_q = \frac{qx}{g}w$ — сила инерции отсеченной части троса и уравновешивающая все эти силы искомая растягивающая сила $N_{дин}$. Условие равновесия запишется:

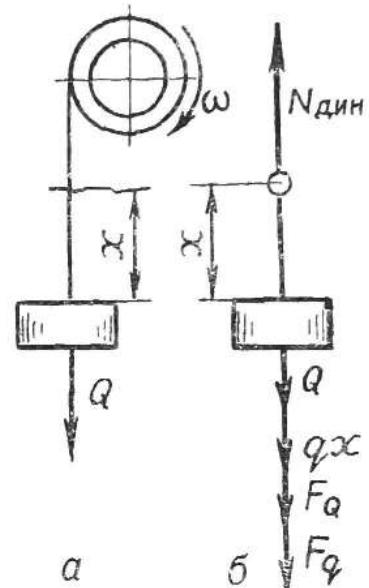


Рис. 18.2.1

$$N_{дин} = Q + qx + \frac{Q + qx}{g} w = (Q + qx) \left(1 + \frac{w}{g}\right). \quad (18.2.1)$$

В состоянии покоя, равномерного подъема или спуска груза, когда $w=0$, растягивающая сила в сечении троса будет равна:

$$N_{ст} = Q + qx. \quad (18.2.2)$$

Тогда выражение (18.2.1) можно записать

$$N_{дин} = N_{ст} \left(1 + \frac{w}{g}\right), \quad (18.2.3)$$

или

$$N_{дин} = N_{ст} k,$$

где $k = 1 + w/g$ — динамический коэффициент. Динамическое напряжение при этом может быть найдено как

$$\sigma_{дин} = \frac{N_{дин}}{F} = \frac{N_{ст}}{F} k = \sigma_{ст} k. \quad (18.2.4)$$

При падении груза вместе с тросом напряжение в тросе равно нулю, так как $w = -g$.

18.3. РАСЧЕТ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОЛЬЦА

Примерами вращающегося кольца могут служить различного рода маховики, автомобильные и железнодорожные колеса и т. п.

Рассмотрим задачу определения напряжений во вращающемся кольце (рис. 18.3.1).

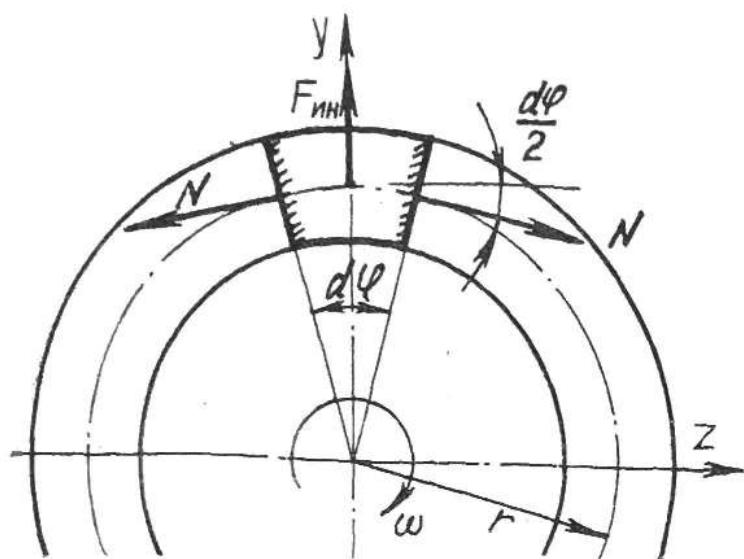


Рис. 18.3.1

Предположим, что кольцо со средним радиусом r и поперечным сечением F равномерно вращается с угловой скоростью ω .

Объемный вес материала кольца — γ . Известно, что при равномерном вращательном движении каждая точка кольца будет испытывать ускорение $\omega^2 r$. На каждую частицу, из которых состоит кольцо, будут действовать центробежные силы, направленные радиально от центра кольца (силы инерции).

Вырежем из кольца элемент, которому соответствует бесконечно малый угол $d\varphi$. Длина элемента по дуге окружности равна $rd\varphi$, его объем — $rFd\varphi$, а вес — $rF\gamma d\varphi$.

Сила инерции, действующая на элемент,

$$F_{\text{ин}} = \frac{r F \gamma d\varphi}{g} \omega^2 r. \quad (18.3.1)$$

Рассматривая элемент в равновесии, к его сечениям необходимо приложить продольные растягивающие силы N и силу инерции $F_{\text{ин}}$, направленную радиально от центра кольца. Проектируя все силы, действующие на элемент, на ось Y получим

$$2N \sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{r F \gamma d\varphi}{g} \omega^2 r. \quad (18.3.2)$$

Учитывая, что $\sin d\varphi/2 \approx d\varphi/2$, найдем

$$N_{\text{дин}} = \frac{F \gamma}{g} r^2 \omega^2. \quad (18.3.3)$$

Напряжение в кольце определится как

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{N_{\text{дин}}}{F} = \frac{\gamma}{g} r^2 \omega^2. \quad (18.3.4)$$

Пример 18.3.1. Определить наибольшее усилие в опасном сечении стального валика АВ, если к нему присоединен ломаный стержень СДЕ того же диаметра. Валик вращается с постоянной угловой скоростью ω . Дано: АВ = 50 см; АС = 20 см; CD = 30 см; DE = 30 см; d = 30 мм; $\omega = 1/20 \text{ 1/c}$; $\gamma = 7,85 \cdot 10^{-2} \text{ Н/см}^3$. Найти также допускаемое число оборотов валика в минуту при $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ (рис. 18.3.2). При расчете собственным весом валика АВ и силами его инерции ввиду их незначительности пренебрегаем.

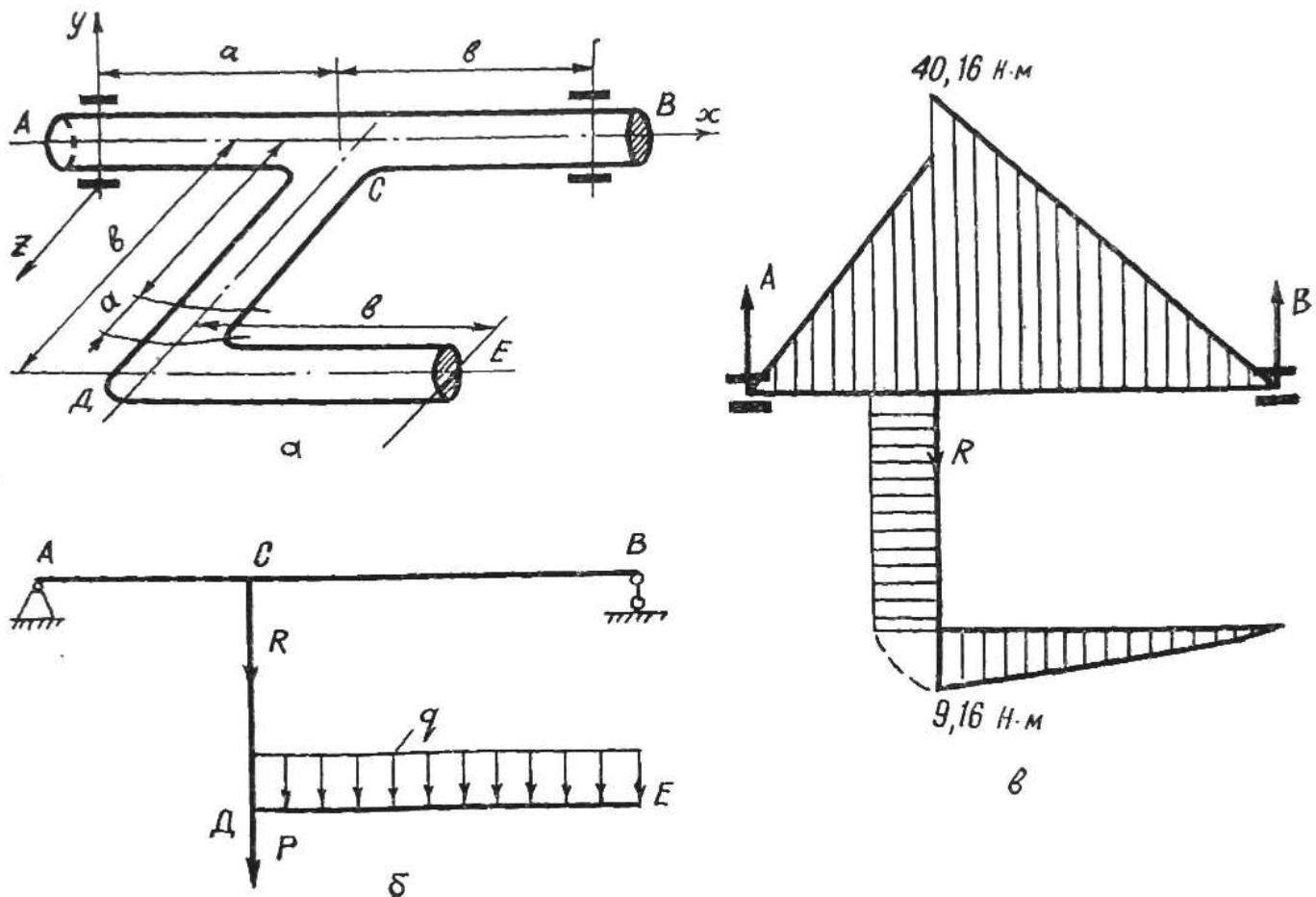


Рис. 18.3.2

1. Находим силу инерции стержня СD. Так как частицы стержня СD отстоят на разном расстоянии от оси вращения x, каждая элементарная центробежная сила находится из выражения

$$dP = dm w_n,$$

но

$$dm = \frac{dP}{g} = \frac{F dz \gamma}{g}; \quad w_n = \omega^2 r.$$

Тогда

$$dP = \frac{F \omega^2 z \gamma}{g} \cdot dz.$$

Для определения равнодействующей центробежной силы стержня просуммируем элементарные силы по длине стержня.

$$P = \int_0^b \frac{F \omega^2 z \gamma dz}{g} = \frac{F \omega^2 b^2 \gamma}{2g} = \frac{3,14 \cdot 3^2 \cdot 20^2 \cdot 30^2 \cdot 7,85 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 2 \cdot 9,81} = 101,76 \text{ Н.}$$

На участке DF все частицы материала находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения, поэтому инерционные силы здесь распределены равномерно. Интенсивность распределенной нагрузки по этому участку определится как

$$q = m w_n = \frac{F \cdot 1 \cdot \gamma}{g} \omega^2 b = \frac{3,14 \cdot 3^2 \cdot 7,85 \cdot 10^{-2} \cdot 20^2 \cdot 30}{4 \cdot 9,81} = 678,4 \text{ Н/м.}$$

Здесь q подсчитана на длину в 1 м, длина же участка DE = 0,3 м. Схема загрузки бруса приведена на рис. 18.3.2, б.

Далее брус рассчитывается как обычная статическая система. Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 18.3.2, в). Для участков DE и DC она построена на сжатых волокнах.

$$M_{\max(DE)} = \frac{qb^2}{2} = \frac{678,4 \cdot 0,3 \cdot 0,3^2}{2} = 9,16 \text{ Н·м.}$$

На валик АВ будет действовать в точке С суммарная центробежная сила

$$R = P + q \cdot 0,3 = 101,76 + 0,3 \cdot 678,4 = 305,28 \text{ Н.}$$

Сила R вызовет в подшипниках реакции A и B, соответственно равные

$$\begin{aligned} \Sigma m_A = 0; B(a+b) - Ra - M_{DE} = 0; B = \frac{R_a + M_{DE}}{(a+b)} = \\ = \frac{(305,28 \cdot 0,2 + 916)}{0,5} = 140,4 \text{ Н}; \end{aligned}$$

$$A = 154,88 \text{ Н.}$$

Зная реакции A и B, строим эпюру моментов для участка АВ.

2. Определяем допускаемое число оборотов валика.

Из эпюры изгибающих моментов (рис. 18.3.2, в) видно, что максимальное значение момента равно $M_{\max} = 40,16 \text{ Н·м.}$

В общем виде его можно представить как

$$\begin{aligned} M_{\max} = B \cdot 0,3 = \left(\frac{R_a + M_{DE}}{a+b} \right) \cdot 0,3 = \left[\frac{(P + q \cdot 0,3) a + qb^2/2}{a+b} \right] 0,3 = \\ = \left[\frac{(F \omega^2 b^2 \gamma / 2g + F \cdot 1 \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot b / g \cdot 0,3) a + F \cdot 1 \cdot \gamma \omega^2 b^3 / 2g}{a+b} \right] 0,3 = \end{aligned}$$

$$= \frac{[F \omega^2 b \gamma/g (b/2 + 0,3) 0,2 + b^2/2] 0,3}{0,5} = F \omega^2 b \gamma/g (0,06b + 0,036 + 0,3b^2).$$

Зная, что угловая скорость равна $\omega = \pi p/30$, можно из условия прочности найти допускаемое число оборотов валика

$$\sigma = M_{\max}/W \leq [\sigma]$$

$$\frac{F \cdot \omega^2 b \gamma/g (0,06b + 0,036 + 0,3b^2)}{0,1 d^3} \leq [\sigma].$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{[\sigma] \cdot 0,1 d^2 g}{F b \gamma (0,06b + 0,036 + 0,3b^2)}};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{10^4 \cdot 0,1 \cdot 3^3 \cdot 91}{3,14 \cdot 3^2 \cdot 7,85 \cdot 10^{-2} \cdot 30 (6 \cdot 30 + 360 + 0,3 \cdot 900)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{10^4 \cdot 0,1 \cdot 3^3 \cdot 981}{3,14 \cdot 3^2 \cdot 7,85 \cdot 10^{-2} \cdot 30 \cdot 810}} = 22,17 \text{ 1/c};$$

$$\pi_d = \frac{30 \omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 22,17}{3,14} = 211,82 \text{ об/мин.}$$

18.4. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ УДАРЕ

Решение задачи о соударяющихся телах достаточно сложно. Для точного решения ее используется теория упругих волн.

Рассмотрим приближенную теорию удара, которая основывается на двух предположениях:

1. Кинетическая энергия ударяющего тела полностью переходит в потенциальную энергию деформации ударяемого тела. При этом пренебрегают энергией, идущей на деформацию ударяющего тела и основания, на котором находится ударяемое тело.

2. Закон распределения напряжений и деформаций по объему ударяемого тела остается таким же, как и при статическом действии сил. При этом не учитывается изменение распределения напряжений и действий в месте соударения тел, а также за счет колебаний высокой частоты, сопровождающих явление удара во всем объеме тела.

На рис. 18.4.1, *a* показан стержень длиной l , на который с высоты h падает груз Q . При ударе груза по стержню последний укорачивается на величину Δl_d .

Энергетический баланс описанного явления можно представить в виде уравнения

$$T + \Pi = U_d, \quad (18.4.1)$$

где T — кинетическая энергия груза в момент соприкосновения со стержнем;
 Π — изменение потенциальной энергии груза на динамическом перемещении Δl_d ;
 U_d — упругая энергия сжатого стержня.

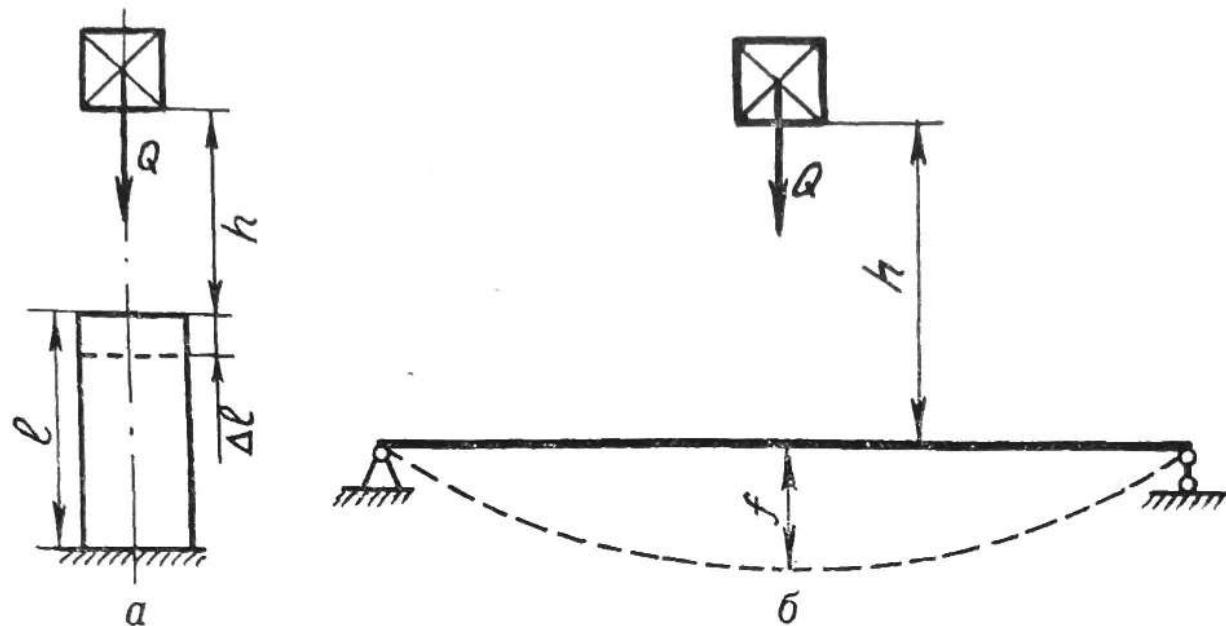


Рис. 18.4.1

Полагая, что кинетическая энергия T ударяющего тела полностью переходит в потенциальную энергию U_d деформации упругой системы, уравнение (18.4.1) можно написать в виде

$$T = U_d. \quad (18.4.2)$$

Так как к моменту окончания деформации ударяющее тело пройдет путь $h + \Delta l_d$, его запас энергии будет измеряться произведенной им работой A_d и равен

$$T = A_d = Q(h + \Delta l_d). \quad (18.4.3)$$

Вычислим U_d . При статической деформации стержня потенциальная энергия U_c , как известно, численно равна половине произведения действующей силы на соответствующую деформацию,

$$U_c = \frac{1}{2} Q \Delta l_{ct}. \quad (18.4.4)$$

При этом $\Delta l_{ct} = Ql/EF$, или $\Delta l_{ct} = Q/c$, где $c = EF/l$ некоторый коэффициент, называемый *жесткостью системы*. При изгибе балки, шарнирно закрепленной по концам, сосредоточенной силой Q посередине пролета

$$\Delta l_{ct} = f_{c \max} = \frac{Q l^3}{48 EI}; \quad c = \frac{48EI}{l^3} \quad \text{и т. п.}$$

Таким образом, формулу 18.4.4 можно представить как

$$U_c = \frac{1}{2} Q \Delta l_{ct} = \frac{C}{2} \Delta l_{ct}^2.$$

Экспериментально установлено, что при динамическом действии нагрузок закон Гука остается в силе, модуль упругости E сохраняет свою величину. Поэтому реакция системы P_d растет параллельно динамической деформации Δl_d и, если напряжение в стержне не выше предела пропорциональности материала, связана с ней законом Гука:

$$\Delta l_d = \frac{P_d}{c}.$$

Поэтому можно считать, что формула для U_d при ударе будет той же, что и при статическом нагружении системы, т. е.

$$U_d = \frac{1}{2} P_d \Delta l_d = \frac{c}{2} \Delta l_d^2 = \frac{Q}{(2\Delta l_{ct})} \Delta l_d. \quad (18.4.5)$$

Подставляя значения T и U_d в уравнение (18.4.1), получаем

$$Q(h + \Delta l_d) = \frac{Q}{2\Delta l_{ct}} \Delta l_d^2$$

или

$$\Delta l_d^2 + 2\Delta l_{ct} \Delta l_d + 2h\Delta l_{ct} = 0.$$

Отсюда

$$\Delta l_d = \Delta l_{ct} \pm \sqrt{\Delta l_{ct}^2 + 2h\Delta l_{ct}}. \quad (18.4.6)$$

Учитывая, что величина Δl_d не может быть меньше Δl_{ct} , окончательно принимаем

$$\Delta l_d = \Delta l_{ct} (1 + \sqrt{1 + 2h/(\Delta l_{ct})}) = k_d \Delta l_{ct}. \quad (18.4.7)$$

Так как напряжения и усилия по закону Гука пропорциональны деформации, то

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ct} \quad (18.4.8)$$

и

$$P_d = k_d Q_{ct}. \quad (18.4.9)$$

Здесь коэффициент $k_d = 1 + \sqrt{1 + Rh/\Delta l_{ct}}$ — динамический коэффициент при ударе.

Если высота h намного превышает Δl_{ct} , то из формулы (18.4.7) получаем:

$$\Delta l_d \approx \sqrt{2\Delta l_{ct} h}. \quad (18.4.10)$$

Напряжение в этом случае будет равно:

$$\sigma_d = \sigma_{st} \sqrt{2\Delta l_{st} h}. \quad (18.4.11)$$

Если груз Q не падает с высоты, а прикладывается внезапно, то $h=0$ и из формулы (18.4.7) получаем:

$$\Delta l_d = 2\Delta l_{st}. \quad (18.4.12)$$

Напряжение в этом случае

$$\sigma_d = 2\sigma_{st}. \quad (18.4.13)$$

Следовательно, при внезапном приложении нагрузки как удлинения, так и напряжения получаются вдвое большими, чем при статическом действии нагрузки.

Формула (18.4.7) для определения величины удлинения стержня при осевом ударе справедлива не только для случая осевого удара, но и для изгибающего удара. Если груз Q статически действует на средину балки длиной l , лежащую на двух опорах, то прогиб выражается формулой

$$f_{st} = \frac{Q l^3}{48 EI}.$$

Если же этот груз Q падает на средину балки с высоты h (рис. 18.4.1, б), то динамический прогиб согласно формуле (18.4.7) будет:

$$f_d = f_{st} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}}} \right). \quad (18.4.14)$$

Максимальное динамическое напряжение будет больше статического во столько раз, во сколько динамический прогиб больше статического, т. е.

$$\sigma_d = \sigma_{st} k_d. \quad (18.4.15)$$

Формула (18.4.14) пригодна и в том случае, если груз Q падает на балку в любом месте, при этом статический прогиб в месте падения равен f_{st} . Это справедливо при любых закреплениях концов балки. При $h=0$ динамический коэффициент принимается равным 2, следовательно, динамическое напряжение будет в два раза больше статического.

Пример 18.4.1. Определить напряжения и деформации при ударе груза Q по брусу переменного сечения (рис. 18.4.2).

Определяем статическую деформацию системы Δl_{st} , для чего приложим в точке удара статическую силу Q . Деформация бруса переменного сечения под действием этой силы может быть найдена по закону Гука:

$$\Delta l_{ct} = \Delta l_{ct_1} + \Delta l_{ct_2} = \frac{Ql}{EF} + \frac{Ql}{2EF} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Ql}{EF}.$$

Динамический коэффициент найдется из выражения (18.4.4)

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ct}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{4hEF}{3Ql}}.$$

Зная величину динамического коэффициента, легко подсчитать напряжение и деформации, возникающие при ударе.

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ct} = k_d Q/F;$$

$$\Delta l_d = k_d \Delta l_{ct} = k_d 3/2 \cdot Ql/EF.$$

Пример 18.4.2. На двутавровую балку № 20 длиной $l=2$ м, свободно лежащую на двух жестких опорах (рис. 18.4.3), с высоты $h=15$ см в центре балки падает груз $Q=2000$ Н.

Требуется: 1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке; 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной с податливостью $\lambda_{pr}=2$ см/кН; 3) сравнить полученные результаты.

1. Динамическое напряжение, возникающее в опасном сечении балки, найдем по выражению (18.4.14):

$$\sigma_d = \sigma_{ct} k_d = \sigma_{ct} \left(1 + \sqrt{1 + 2h/f_{ct}(b)} \right).$$

При этом статическое напряжение определится как (рис. 18.4.3, б)

$$\sigma_{ct} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{Ql/4}{184} = \frac{2000 \cdot 200}{4 \cdot 184 \cdot 10^3} = 5,43 \text{ МПа}; W_z = 184 \text{ см}^3.$$

Статический прогиб балки при Q , приложенной посередине пролета, равен

$$f_{ct(b)} = \frac{Ql^3}{48EI_z} = \frac{2000 \cdot 200^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 1840} = 0,009 \text{ см};$$

$$\sigma_d = 5,43 \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 150}{0,009}} \right) = 320,6 \text{ МПа};$$

$$I_z = 1840 \text{ см}^4 \text{ (ГОСТ 8239-56).}$$

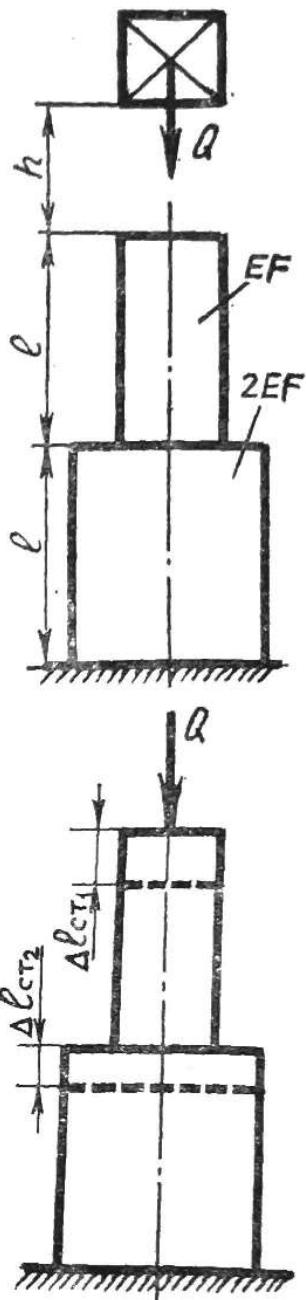


Рис. 18.4.2

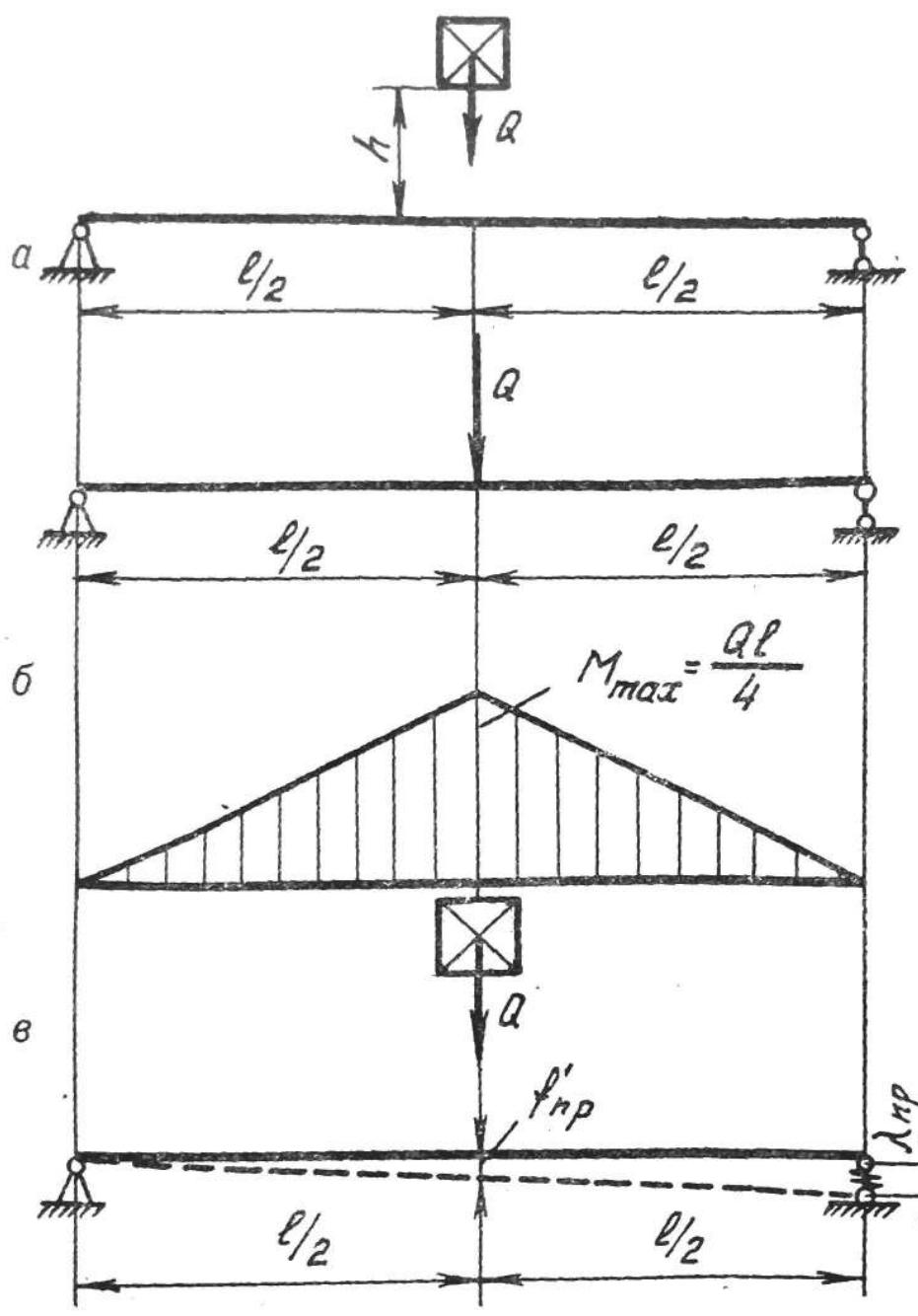


Рис. 18.4.3

2. Находим напряжение в опасном сечении балки при наличии пружины на правой опоре.

При наличии пружины f_{ct} находим из выражения

$$f_{ct} = b_{ct}(b) + \beta \lambda_{pr},$$

где β — коэффициент, устанавливающий зависимость между осадкой пружины и перемещением точки приложения силы Q . β находится из подобия треугольников (рис. 18.4.3, в)

$$\begin{aligned} \beta &= \lambda'_{pr}/\lambda_{pr} = \\ &= 10/20 = 0,5; \\ f_{ct} &= 0,009 + \\ &+ 0,5 \cdot 2,0 = 1,009 \text{ см}; \\ \sigma_d &= \sigma_{ct} k_d = \sigma_{ct} (1 + \\ &+ \sqrt{1 + 2h/f_{ct}}) = \\ &= 5,43 \cdot (1 + \end{aligned}$$

$$+ \sqrt{1 + 2 \cdot 15/10,009}) = 27,15 \text{ МПа.}$$

3. Сравнивая напряжения, возникающие в балке, лежащей на опоре и на подпружинной опоре, при действии ударной нагрузки видим, что в первом случае оно в 12 раз больше, чем во втором: $320,6/27,15 = 12$.

18.5. НАПРЯЖЕНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ УПРУГИМИ КОЛЕБАНИЯМИ СИСТЕМЫ

Всякое твердое тело (или система твердых тел) в общем случае обладает вполне определенным периодом свободных колебаний. Круговая частота колебаний находится как

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0}, \quad (18.5.1)$$

где t_0 — период свободного колебания.

Коэффициент пропорциональности между деформирующим грузом Q и статической деформацией δ_Q от этого груза

$$c = \frac{Q}{\delta_Q}, \quad (18.5.2)$$

где c численно равен усилию, при статическом действии которого в его направлении возникает деформация, равная единице.

Дифференциальное уравнение движения колеблющегося груза для случая свободных колебаний системы с одной степенью свободы перемещения может быть выражено

$$\frac{Q}{g} y'' + cy = 0, \quad (18.5.3)$$

где y — переменная координата полного перемещения груза во время колебаний невесомой системы:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Примером таких систем может служить груз Q , подвешенный к стержню длиной l (рис. 18.5.1), или груз Q , лежащий посередине пролета l шарнирной балки (рис. 18.5.1, б), когда масса стержня или балки в расчет не принимается.

Частота ω_0 или период t_0 свободных колебаний невесомого тела определяются по формулам:

$$\omega_0 = \sqrt{gc/Q} = \sqrt{g/\delta_Q}; \quad (18.5.4)$$

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\delta_Q/g}. \quad (18.5.5)$$

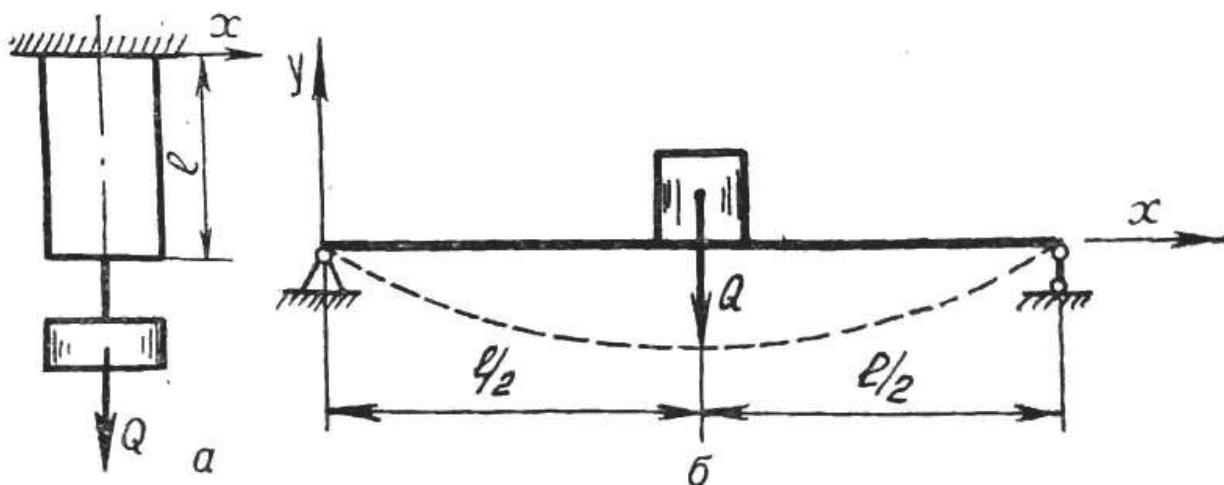


Рис. 18.5.1

Свободные колебания невесомого тела представляют собой простые гармонические колебания с частотой (периодом), равной частоте колебаний математического маятника, длина которого равна статической деформации системы от груза Q .

Для центрального растянутого стержня

$$\omega_0 = \sqrt{g/\Delta l_{ct}} = \sqrt{gEF/Ql}. \quad (18.5.6)$$

Для балки на двух шарнирных опорах при нагружении грузом Q в средине пролета l

$$\omega_0 = \sqrt{g/f_{max}} = \sqrt{48EIg/Ql^3}. \quad (18.5.7)$$

Части машин, движущиеся по определенным циклам, передают путем непосредственного соприкосновения или через упругую окружающую среду механические импульсы другим конструктивным элементам, подвергая их вынужденным колебаниям, частота которых может быть близка к частоте свободных колебаний этих элементов. Совпадение периодов или частот свободных и вынужденных колебаний обусловливает возможность теоретически неограниченного возрастания амплитуды колебаний. Это явление называется *резонансом*. Опасность резонанса заключается в интенсивном возрастании деформаций (амплитуды) и соответствующем нарастании напряжений.

Для практических расчетов внешнюю, периодически меняющуюся возмущающую силу S выражают как

$$S = H \sin \omega t, \quad (18.5.8)$$

где $H = S_{max}$ — максимальное значение внешней, периодически меняющейся силы; ω — частота повторяющихся циклов ее действия.

Затуханию колебаний, кроме упругого сопротивления системы (твердого тела), способствует также сила сопротивления окружающей среды R , приближенно пропорциональная первой степени скорости колебательного движения, т. е. $R = gy'$.

Дифференциальное уравнение движения груза Q с учетом действия сил S и R

$$y'' + 2py' + \omega_0^2x = gH/Q \sin \omega t, \quad (18.5.9)$$

где $p = rg/2Q$ — коэффициент затухания колебаний.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{gH}{Q\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + 4(p/\omega_0)^2(\omega/\omega_0)^2}}. \quad (18.5.10)$$

Первый множитель этого уравнения равен статической деформации системы от наибольшей величины возмущающей силы S ($H = S_{\max}$).

$$\frac{gH}{Q \omega_0^2} = \frac{H}{Q} \delta_Q = \delta_H. \quad (18.5.11)$$

Коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = \frac{A}{\delta_H} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + 4(n/\omega_0)^2(\omega/\omega_0)^2}} \quad (18.5.12)$$

В простейших случаях, когда не учитывается сила сопротивления среды, коэффициент нарастания колебаний β находится по формуле

$$\beta = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2}. \quad (18.5.13)$$

Из формулы (18.5.13) следует:

- а) если $\omega_0 \ll \omega$, то $\beta > -1$, и груз на упругой системе практически будет неподвижным;
- б) если $\omega_0 \gg \omega$, то $\beta > 1$, и колебания груза будут происходить с амплитудой, равной его перемещению от статического действия силы, соответствующей по величине максимальному значению возмущающей силы S ;
- в) если ω_0 приближается к ω , то амплитуда колебаний быстро растет, при $\omega = \omega_0$ возникает резонанс и прогиб балки стремится к бесконечности: $y \rightarrow \infty$.

Обычно считают, что «отключение» от резонанса будет обеспечено, если ω отличается от ω_0 на $\pm 30\%$. Поскольку частота вынужденных колебаний задана, следует рассчитывать систему так, чтобы частота ее собственных колебаний удовлетворяла условию $1,3\omega \leq \omega_0 \leq 0,7\omega$.

Динамический коэффициент при колебательном движении системы в простейших случаях определяется по формуле

$$k_g = 1 + \frac{A}{\delta_H} = 1 + \frac{\delta_H}{\delta_Q} \beta. \quad (18.5.14)$$

Наибольшее нормальное напряжение при колебательном движении системы находится как

$$\sigma_g = k_g \sigma_{\text{ст.}} \quad (18.5.15)$$

Пример 18.5.1. На двух швеллерных балках № 20 (рис. 18.5.2) длиной 1,5 м посередине пролета установлен двигатель весом 2500 Н, который делает 710 об/мин. Центробежная сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся частей дви-

гателя, равна 1300 Н. Собственным весом балок и силой сопротивления среды пренебрегаем. Определить нормальное напряжение, возникающее в опасном сечении балки.

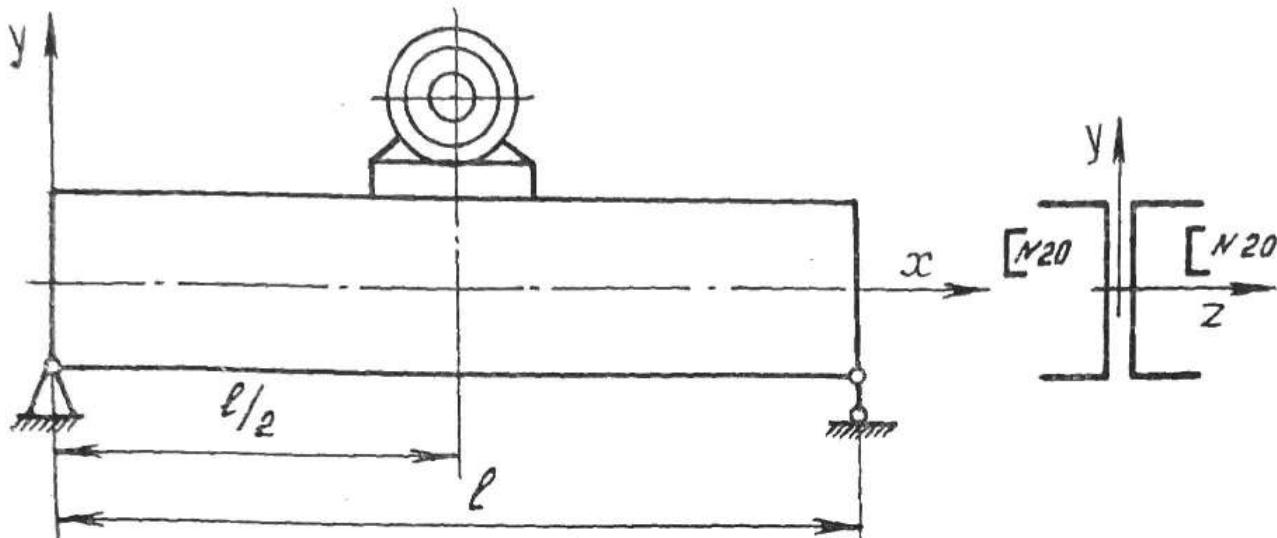


Рис. 18.5.2

Решение. 1. Определяем собственную частоту системы по выражению (18.5.7)

$$\omega_0 = \sqrt{g/f_{\max}}; f_{\max} = Ql^3/(48EI);$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{48EIg}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 3040 \cdot 981}{2500 \cdot 150^3}} = 582,5 \text{ 1/c},$$

где $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $I_z = 3040 \text{ см}^4$ (так как швеллера 2); $g = 981 \text{ см/с}^2$.

2. Находим частоту изменения возмущающей силы

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 710}{30} = 74,3 \text{ 1/c}.$$

3. Определяем коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2} = \frac{1}{1 - (74,3/582,5)^2} = 1,02.$$

4. Находим динамический коэффициент

$$k_d = 1 + \frac{f_H}{f_Q} \beta = 1 + \frac{H}{Q} \beta = 1 + \frac{1300}{2500} \cdot 1,02 = 1,53.$$

5. Наибольшее напряжение, возникающее посередине пролета балки, будет равно

$$\sigma_{\text{дин}} = \sigma_{\text{ст}} k_d = \frac{M_{\max}}{W_z} k_d = \frac{Q l/4}{W_z} \cdot k_d = \frac{2500 \cdot 1500}{4 \cdot 2 \cdot 152 \cdot 10^3} \cdot 1,53 = 4,72 \text{ МПа}.$$