

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА»

**ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД:
МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО
ТВЕРДОГО ТЕЛА**

*Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного
технического университета им. Р.Е. Алексеева в качестве учебного
пособия для студентов, обучающихся по направлению
«Прикладная механика»*

Нижний Новгород 2016

УДК 531 (075)

ББК 22.19

О 75

**Авторы: В.М. Волков, А.Е. Жуков, С.А. Пименов,
Е.Н. Гибулин, А.А. Болотин**

Рецензент

начальник отдела ОАО «ЦКБ «Лазурит» А. И. Ладынин

О 75 Основы механики сплошных сред: Механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие / В.М. Волков [и др.]; Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева. – Н. Новгород, 2016. – 105 с.

ISBN 978-5-502-00835-8

Излагаются основы теории деформаций, напряжений и широко распространенные модели механики сплошных сред (МСС) и механики деформируемого твердого тела (МДТТ), классические и неклассические, в тензорной форме, а также энергетические соотношения МДТТ. Пособие предполагает знание основ векторного анализа, тензорного исчисления, теоретической механики и сопротивления материалов.

Предназначено для студентов бакалавриата, обучающихся по направлению подготовки «Прикладная механика».

Рис. 53. Библиогр.: 17 назв.

УДК 531 (075)

ББК 22.19

ISBN 978-5-502-00835-8

© **Нижегородский государственный
технический университет
им. Р.Е. Алексеева, 2016**

© **Волков В.М., Жуков А.Е.,
Пименов С.А., Гибулин Е.Н.,
Болотин А.А., 2016**

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список сокращений и обозначений	5
Введение	6
1. Основные гипотезы и понятия МДТТ	7
2. Представление движения сплошной среды	9
2.1. Закон движения сплошной среды.....	9
2.2. Метод Лагранжа.....	10
2.3. Метод Эйлера.....	10
2.4. Переход от одного метода описания движения сплошной среды к другому	11
3. Теория конечных деформаций.....	12
3.1. Анализ локальной деформации	12
3.1.1. Деформация твердого тела в лагранжевых координатах	12
3.1.2. Тензор деформаций в эйлеровых координатах.....	15
3.2. Тензор дисторсии (искривления).....	17
3.3. Геометрический смысл компонентов тензора Коши и вектора поворота.....	21
3.4. Геометрический смысл компонентов тензора Грина.....	23
3.5. Геометрический смысл компонентов тензора Альманси	26
3.6. Условия упрощения выражений для компонент тензора Грина.....	29
3.7. Изменение объема твердого тела	29
4. Тензор деформаций Коши и его свойства	32
4.1. Свойства тензора Коши.....	32
4.2. Определение перемещений по заданному тензору деформаций Коши.....	47
4.3. Дополнительные условия сплошности (однозначности перемещений) для многосвязных областей	50
4.4. Круговая диаграмма деформаций Мора	51
5. Теория напряжений	55
5.1. Внешние силы, действующие на твердое тело.....	55
5.2. Тензор напряжений Эйлера	56
5.3. Условия равновесия тетраэдра	61

5.4. Уравнения равновесия внутренних элементов твердого тела.....	62
5.5. Уравнения равновесия для поверхностных элементов.....	63
5.6. Свойства тензора напряжений Эйлера.....	64
5.7. Круговая диаграмма напряжений Мора. Эллипсоид напряжений .	71
6. Модели сплошных сред	74
6.1. Виды нагружения и деформирования твердого тела	74
6.2. Уравнения связи тензоров напряжений и деформаций	76
6.2. Классические модели механики сплошной среды	78
6.3.1. Модель Гука.....	78
6.3.2. Модель Ньютона	81
6.3.3. Модель Сен-Венана.....	83
6.4. Неклассические модели.....	84
6.4.1. Неклассические линейные модели.....	84
6.4.2. Неклассические нелинейные модели.....	87
6.4.3. Модели упругопластических твердых тел	89
6.4.4. Модель несжимаемой сыпучей среды	91
7. Энергия деформируемого твердого тела	92
7.1. Работа внешних сил.....	92
7.2. Потенциальная энергия упругого тела.....	94
7.2.1. Потенциальная энергия линейно-упругого тела.....	94
7.2.2. Потенциальная энергия нелинейно упругого тела	95
7.2.3. Потенциал напряжений $e(\varepsilon_{ij})$	95
7.2.4. Потенциал деформаций $e'(\sigma_{ij})$	96
Вопросы и задания	99
Библиографический список.....	104

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

МДТТ – механика деформируемого твердого тела	\mathbf{W}, \bar{W} – вектор ускорения
МСС – механика сплошных сред	$\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3), \bar{X}(x_1, x_2, x_3)$ – радиус-вектор в лагранжевых координатах
A – работа внешних сил	α_i – углы радиуса-вектора \mathbf{X}
E – модуль Юнга	γ_{ij} – тензор чистой деформации
E_{ij} – тензор линейных и угловых деформаций	δ_{ij} – символ Кронекера
$\mathbf{e}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ – трехмерный ортонормированный базис	ε_{ij} – тензор деформаций Грина, Коши
e_{ij} – девиатор деформаций	$\dot{\varepsilon}_{ij}$ – тензор скорости деформации
e^H_{ij} – направляющий тензор вектора деформаций \mathbf{e}_ε	ε_{ij}^p – тензор пластической деформации
$\mathbf{e}_\varepsilon, \bar{e}_\varepsilon$ – вектор деформаций	ε_{ij}^e – тензор упругой деформации
e – упругий потенциал	ε_c – средняя деформация
G – модуль сдвига	$\varepsilon_m, \varepsilon_n$ – модуль и интенсивность тензора деформаций
H_i – инварианты тензора деформаций	θ – объемная относительная деформация
I_i – инварианты тензора напряжений	$\mathbf{v}(n_1, n_2, n_3), \bar{\mathbf{v}}(n_1, n_2, n_3)$ – единичный направляющий вектор
K – модуль объемной упругости	ν – коэффициент Пуассона
m – масса	π – потенциальная энергия единицы объема
\mathbf{P}_0, \bar{P}_0 – вектор единичной объемной силы	ρ – плотность материала
\mathbf{p}_v, \bar{p}_v – вектор полных напряжений	σ_{ij} – тензор напряжений Эйлера
\mathbf{q}_v, \bar{q}_v – вектор интенсивности поверхностных сил	σ_c – среднее напряжение
S – площадь поверхности тела	σ_m, σ_n – модуль и интенсивность напряжений
S_{ij} – девиатор напряжений	σ_v, τ_v – нормальное и касательное напряжения
\mathbf{S}_σ – вектор напряжений	$\boldsymbol{\chi}(\chi_1, \chi_2, \chi_3), \bar{\boldsymbol{\chi}}(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ – радиус-вектор в эйлеровых координатах
t – время	ω_{ij} – кососимметричный тензор поворота
$\mathbf{U}(U_1, U_2, U_3), \bar{\mathbf{U}}(U_1, U_2, U_3)$ – вектор перемещения	$\dot{\omega}$ – вектор скорости поворота
V – объем тела	
\mathbf{V}, \bar{V} – вектор скорости	

ВВЕДЕНИЕ

Механика – наука, представляющая обширную и очень разветвленную часть области знаний человека об окружающем его мире. В ней физический мир математически моделируется на основе определенных постулатов, отражающих с тем или иным приближением поведение реальных физических тел. Так, модель абсолютно твердого тела изучается дисциплиной «Теоретическая механика», когда деформации не играют существенной роли в поведении реального тела.

Предмет изучения механики сплошных сред (МСС) – деформируемые физические тела. В этой науке с единых позиций рассматривается механическое состояние и движение газообразных, жидких и твердых тел. Общее свойство этих тел с позиции МСС – способность их под действием внешних нагрузок испытывать деформации (изменение расстояния между частицами тела). Механика деформируемого твердого тела (МДТТ) – раздел МСС, изучающий общие законы деформирования и механического состояния твердых тел, а также различные математические модели реальных твердых тел в разных физико-механических состояниях.

Механика сплошных сред является базовой дисциплиной для освоения впоследствии таких предметов как теория упругости, теория пластичности и ползучести, механика разрушения и др.

В данном учебном пособии введены основные гипотезы и понятия МДТТ (гл. 1); рассмотрены различные представления движения сплошной среды (гл. 2); теория деформаций и свойства тензора малых деформаций Коши (гл. 3–4); теория напряжений и свойства тензора напряжений Эйлера (гл. 5); даны классические и неклассические модели сплошных сред (гл. 6) и энергетические соотношения деформируемого твердого тела (гл. 7). В конце пособия приведены вопросы и задания по материалам всех глав.

мент времени $t_0 - V_0$ и S_0 ; элементарный вектор поверхности $d\mathbf{S}=dS\cdot\mathbf{v}$; \mathbf{x} и $\boldsymbol{\chi}$ – радиус-векторы точки M в момент времени t_0 и t . Тогда вектор перемещения физической точки M массой dm можно записать как $\mathbf{U}=\boldsymbol{\chi}-\mathbf{x}$.

Свойство инертности тела

Свойство инертности тела обусловлено наличием у него массы. Мерой инертности тела является плотность вещества (рис. 1)

$$\rho = dm/dV; \rho = \rho(\boldsymbol{\chi}, t), \quad (1.1)$$

где $\boldsymbol{\chi}$ – радиус-вектор массы dm в объеме dV .

Для массы имеет место закон сохранения

$$\frac{dm}{dt} = 0 \text{ или } \frac{d}{dt} \int_V \rho(\boldsymbol{\chi}, t) dV = 0. \quad (1.2)$$

Математические объекты МДТТ

Движение сплошной среды рассматривается в евклидовом пространстве – единая для всех точек среды декартова система однородных координат x_1, x_2, x_3 (рис. 1) с абсолютным временем (не зависящим от системы отсчета), а следовательно, в рамках ньютоновской механики.

В МДТТ используются три вида величин:

- тензоры нулевого ранга – величины, определяемые одним ($3^0=1$) числом или одной функцией (скаляры: время, плотность, температура...);
- тензоры первого ранга – величины, определяемые тремя ($3^1=3$) числами или функциями (векторы: перемещение, скорость, ускорение...);
- тензоры второго ранга – величины, определяемые девятью ($3^2=9$) числами или функциями (деформации, напряжения...).

Все величины в МДТТ полагаются непрерывными и дифференцируемыми достаточное число раз по времени и координатам.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

2.1. Закон движения сплошной среды

Рассмотрим неподвижный трехмерный ортогональный нормированный базис в пространстве наблюдателя:

$$\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3), \quad |\mathbf{e}_i| = 1, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

тогда

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}_i;$$
$$\boldsymbol{\chi} = \chi_1 \mathbf{e}_1 + \chi_2 \mathbf{e}_2 + \chi_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \chi_i \mathbf{e}_i = \chi_i \mathbf{e}_i.$$

Если индекс употреблен один раз в выражении, то он принимает три значения 1, 2, 3; а если дважды ($\chi_i e_i$), то применяют правило суммирования, предложенное А. Эйнштейном (см. приведенные ранее записи).

Движение сплошной среды считается заданным, если для любого момента времени t известна связь между $\boldsymbol{\chi}$ и \mathbf{x} , то есть известна вектор-функция

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t)$$

для физической точки M , или в скалярном виде

$$\chi_i = \chi_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.1)$$

Соотношения (2.1) называются *законом движения физической точки M* .

Считаем функции (2.1) непрерывными и дифференцируемыми достаточное число раз. Полагаем, что имеется взаимно однозначное соотношение между векторами $\boldsymbol{\chi}$ и \mathbf{x} для любого момента времени t (свойство системы (2.1)). Это позволяет данную систему решить относительно x_1, x_2, x_3 , т. е. ее можно обратить.

Используя (2.1), для фиксированной точки $M(x_1, x_2, x_3, t)$ можно определить перемещение, скорость и ускорение этой точки

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\chi} - \mathbf{x}, \quad \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}, \quad \mathbf{W} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{x}, t). \quad (2.3)$$

Используя свойство об однозначности соотношений между векторами $\boldsymbol{\chi}$ и \mathbf{x} , систему (2.1) можно выразить в векторном $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}, t)$ или в скалярном виде:

$$x_1 = x_1(\chi_1, \chi_2, \chi_3, t), x_2 = x_2(\chi_1, \chi_2, \chi_3, t), x_3 = x_3(\chi_1, \chi_2, \chi_3, t). \quad (2.4)$$

Подставив векторное выражение (2.4) в выражения скоростей и ускорений (2.3), получим

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}, t), t) = \mathbf{V}(\boldsymbol{\chi}, t), \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\chi}, t) \quad (2.5)$$

Так как \mathbf{V} есть функция $\boldsymbol{\chi}$, которая, в свою очередь, является функцией t , то ускорение определится выражением

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \chi_i} \cdot V_i + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}. \quad (2.6)$$

Таким образом, параметры движения сплошной среды (перемещение, скорость, ускорение, плотность...) можно выразить как через x_1, x_2, x_3 и t (см. (2.1)–(2.3)), так и через χ_1, χ_2, χ_3 и t (см. (2.4)–(2.6)).

Здесь даны два представления движения сплошной среды (2.1)–(2.3) и (2.4)–(2.6). Этим представлениям соответствуют два метода изучения движения сплошной среды: метод Лагранжа (2.1)–(2.3) и метод Эйлера (2.4)–(2.6).

2.2. Метод Лагранжа

Координаты (x_1, x_2, x_3) называются *лагранжевыми координатами физических точек тела*. Метод Лагранжа состоит в изучении движения физических частиц сплошных сред и всех их параметров в виде функций (2.3). В методе Лагранжа часто вместо функций $\chi_i = \chi_i(x_1, x_2, x_3, t)$ используют функции проекций перемещения частиц $U_i = U_i(x_1, x_2, x_3, t)$. Этот метод приводит к сложному выражению для тензоров деформаций второго ранга, но дает исчерпывающую информацию о поведении физических частиц и их параметров $U_i, V_i, W_i, \rho, i=1,2,3$.

В случае малых перемещений этот метод приводит к простым выражениям.

2.3. Метод Эйлера

Пусть χ_1, χ_2, χ_3 – проекции радиус-вектора точки пространства, заполненного сплошной средой. Вместо того, чтобы следить за параметрами движения фиксированной физической частицы, в методе Эйлера следят за тем, с какими параметрами различные частицы в различные моменты времени проходят через точку пространства с проекциями χ_1, χ_2, χ_3 . Таким образом, в этом методе можно построить поле векторов скорости и ускорения и функцию плотности в неподвижном пространстве $0\chi_1\chi_2\chi_3$. Пространство $0\chi_1\chi_2\chi_3$ называется *эйлеровым пространством*, а χ_i – *эйлеровыми координатами*. Если в момент времени t частица находится в точке $\boldsymbol{\chi}$ и скорость ее $\mathbf{V}(\boldsymbol{\chi}, t)$, то в момент времени $t+dt$ частица изменит свое

положение в пространстве и будет находиться в точке, определяемой вектором $\chi + \mathbf{V}(\chi, t)dt$.

Тогда перемещение и скорость за время dt определяются

$$d\mathbf{U} = \mathbf{V}(\chi, t) \cdot dt \text{ и } \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{U}}{dt}. \quad (2.7)$$

В механике жидкости и газа было построено выражение для закона сохранения массы в эйлеровом пространстве:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_i)}{\partial \chi_i} = 0 \text{ или } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (2.8)$$

Методы Лагранжа и Эйлера являются вполне строгими и адекватными в изучении движения сплошной среды.

2.4. Переход от одного метода описания движения сплошной среды к другому

Переход от лагранжева метода описания к эйлерову

В этом случае необходимо обратить систему (2.1), т. е. решить ее относительно x_1, x_2, x_3 . В результате получим выражения (2.4) и параметры движения (2.5) и (2.6), выраженные через координаты χ_i ($i=1,2,3$).

Переход от эйлерова метода описания к лагранжеву

Пусть задано движение среды в Эйлеровых координатах

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\chi, t)$$

или

$$\frac{d\chi_i}{dt} = V_i(\chi, t), \quad (i=1,2,3) \quad (2.9)$$

и заданы начальные условия при $t = t_0$:

$$\chi_i = x_i \quad (i=1,2,3). \quad (2.10)$$

Интегрируя (2.9) при начальных условиях (2.10), получим

$$\chi_i = \chi_i(t, c_1, c_2, c_3) \quad (i=1,2,3), \quad (2.11)$$

где c_i – постоянные интегрирования системы (2.9). В (2.11) подставим начальные условия (2.10). Получим следующие выражения:

$$x_i = \chi_i(t_0, c_1, c_2, c_3) \quad (i=1,2,3). \quad (2.12)$$

Решая систему (2.12) относительно неизвестных c_i ($i=1,2,3$), определим $c_i = c_i(t_0, x_1, x_2, x_3)$, которые подставим в (2.11). В результате получим зависимости $\chi_i = \chi_i(x_1, x_2, x_3, t)$, ($i=1,2,3$), определяющие движение среды (2.1) в лагранжевых координатах.

3. ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

3.1. Анализ локальной деформации

3.1.1. Деформация твердого тела в лагранжевых координатах

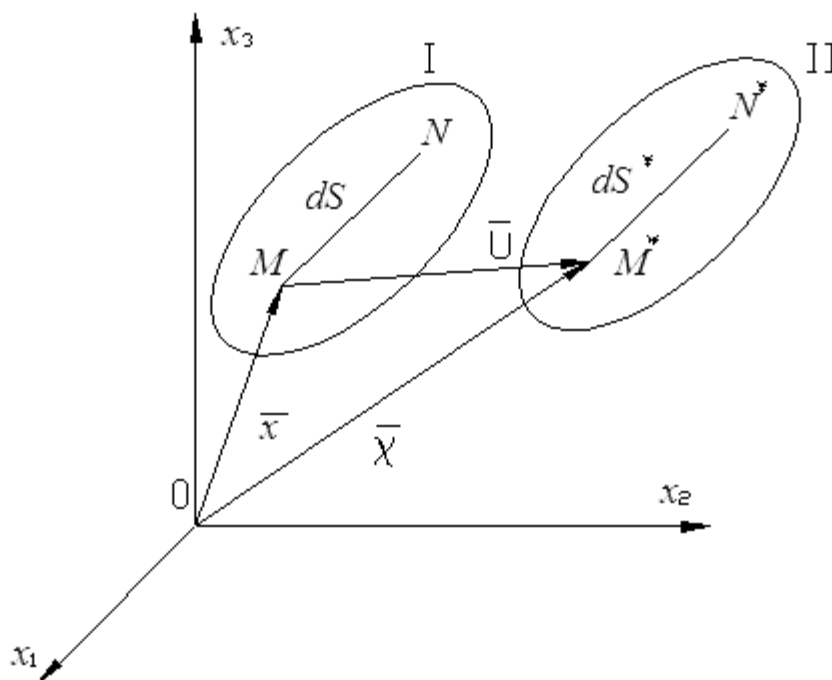


Рис. 2

Пусть до деформации тело в момент времени t_0 находится в состоянии I. Выделим в нем бесконечно малый отрезок MN длиной dS . Точка M имеет координаты (x_1, x_2, x_3) , а $N - (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ (рис. 2). В момент времени t (после деформации) тело будет находиться в состоянии II и точки M и N изменят свои координаты, которые соответственно будут $M^*(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ и $N^*(\chi_1 + d\chi_1, \chi_2 + d\chi_2, \chi_3 + d\chi_3)$. Вектор перемещения точки M : $\mathbf{U}(U_1, U_2, U_3)$ будет равен $\mathbf{U} = \boldsymbol{\chi} - \mathbf{x}$, где $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(x_1, x_2, x_3)$, а следовательно,

$$U_i = U_i(x_1, x_2, x_3), \text{ и } \chi_i = x_i + U_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.1)$$

Отрезки dS и dS^* , определяющие длины MN и M^*N^* , до деформации и после деформации соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} dS^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\ dS^{*2} &= d\chi_1^2 + d\chi_2^2 + d\chi_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где

$$d\chi_i = dx_i + dU_i, \quad dU_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial U_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_i}{\partial x_3} dx_3,$$

следовательно,

$$d\chi_i = dx_i + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx_j = dx_i + \frac{\partial U_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_i}{\partial x_3} dx_3. \quad (3.3)$$

Определим $dS^{*2} - dS^2$. Эта величина равна

$$dS^{*2} - dS^2 = d\chi_1^2 + d\chi_2^2 + d\chi_3^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2, \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} (d\chi_1)^2 &= \left(dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_j} dx_j \right)^2 = \left(dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} dx_3 \right)^2 = \\ &= \left(1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right)^2 (dx_1)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 (dx_2)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 (dx_3)^2 + \\ &+ 2 \left(1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + 2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} dx_3 dx_2 + 2 \left(1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_3} dx_1 dx_3; \\ (d\chi_2)^2 &= \left(dx_2 + \frac{\partial U_2}{\partial x_j} dx_j \right)^2 = \left(dx_2 + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} dx_3 \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right)^2 (dx_1)^2 + \left(1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right)^2 (dx_2)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right)^2 (dx_3)^2 + \\ &+ 2 \left(1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + 2 \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \left(1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) dx_2 dx_3 + 2 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_3} dx_1 dx_3; \\ (d\chi_3)^2 &= \left(dx_3 + \frac{\partial U_3}{\partial x_j} dx_j \right)^2 = \left(dx_3 + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} dx_3 \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right)^2 (dx_1)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right)^2 (dx_2)^2 + \left(1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right)^2 (dx_3)^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + 2 \left(1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial U_3}{\partial x_2} dx_2 dx_3 + 2 \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \left(1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_3. \end{aligned}$$

Построим величину (3.4), используя выражения для $d\chi_i^2$, сгруппировав коэффициенты при $dx_i dx_j$ ($i, j=1,2,3$),

$$\begin{aligned}
dS^{*2} - dS^2 = & 2 \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \right] (dx_1)^2 + \\
& + 2 \left[\frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right] (dx_2)^2 + \\
& + 2 \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \right] (dx_3)^2 + \\
& + 2 \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \right] dx_1 dx_2 + \\
& + 2 \left[\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) \right] dx_2 dx_3 + \\
& + 2 \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) \right] dx_1 dx_3.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Обозначим величины в прямоугольных скобках соответственно ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} , ε_{12} , ε_{21} , ε_{13} , ε_{31} , ε_{23} , ε_{32} и из последних трех слагаемых каждое разделим на два равных слагаемых $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ($i \neq j$).

Тогда выражение (3.5) запишется

$$\begin{aligned}
dS^{*2} - dS^2 = & 2 \left[\varepsilon_{11} (dx_1)^2 + \varepsilon_{22} (dx_2)^2 + \varepsilon_{33} (dx_3)^2 + \right. \\
& + \frac{1}{2} \varepsilon_{12} dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{21} dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{23} dx_2 dx_3 + \\
& \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_{32} dx_2 dx_3 + \frac{1}{2} \varepsilon_{13} dx_1 dx_3 + \frac{1}{2} \varepsilon_{31} dx_1 dx_3 \right].
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Введем понятие *тензора деформаций Грина* второго ранга:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2} \varepsilon_{12} & \frac{1}{2} \varepsilon_{13} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2} \varepsilon_{23} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{31} & \frac{1}{2} \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_i} \right)^2 \right], & (i=1,2,3) \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_i} \frac{\partial U_1}{\partial x_j} + \frac{\partial U_2}{\partial x_i} \frac{\partial U_2}{\partial x_j} + \frac{\partial U_3}{\partial x_i} \frac{\partial U_3}{\partial x_j} \right) & (i \neq j=1,2,3) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

– компоненты тензора Грина.

Тензор Грина симметричен относительно главной диагонали по построению:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}; \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}; \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (i \neq j).$$

В свернутом тензорном виде выражения (3.7) запишутся:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} & (i, k=1,2,3), \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} & (i \neq j=1,2,3), (k=1,2,3). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Тензор Грина можно записать в другом виде:

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) \quad (i, j, k=1,2,3), \quad (3.9)$$

где

$$\gamma_{ii} = \varepsilon_{ii}; \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}.$$

3.1.2. Тензор деформаций в эйлеровых координатах

Рассмотрим деформации отрезка MN твердого тела, учитывая, что проекции вектора перемещений

$$U_i = U_i(\chi_1, \chi_2, \chi_3) \quad \text{и} \quad dx_i = d\chi_i - dU_i. \quad (i=1,2,3).$$

В этом случае

$$dx_i = d\chi_i - \frac{\partial U_i}{\partial \chi_1} d\chi_1 - \frac{\partial U_i}{\partial \chi_2} d\chi_2 - \frac{\partial U_i}{\partial \chi_3} d\chi_3 \quad (i=1,2,3). \quad (3.10)$$

Определим $dS^{*2} - dS^2$, используя соотношения (3.10) и (3.2).

Тогда по аналогии с п. 3.1.1 получим симметричный тензор второго ранга, называемый *тензором Альманси*,

$$\varepsilon_{\chi_i \chi_j} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\chi_1 \chi_1} & \frac{1}{2} \varepsilon_{\chi_1 \chi_2} & \frac{1}{2} \varepsilon_{\chi_1 \chi_3} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{\chi_2 \chi_1} & \varepsilon_{\chi_2 \chi_2} & \frac{1}{2} \varepsilon_{\chi_2 \chi_3} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{\chi_3 \chi_1} & \frac{1}{2} \varepsilon_{\chi_3 \chi_2} & \varepsilon_{\chi_3 \chi_3} \end{pmatrix},$$

где компоненты будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\chi_i \chi_i} &= \frac{\partial U_i}{\partial \chi_i} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial \chi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial \chi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial \chi_i} \right)^2 \right] & (i=1,2,3) \\ \varepsilon_{\chi_i \chi_j} &= \frac{\partial U_i}{\partial \chi_j} + \frac{\partial U_j}{\partial \chi_i} - \left(\frac{\partial U_1}{\partial \chi_i} \frac{\partial U_1}{\partial \chi_j} + \frac{\partial U_2}{\partial \chi_i} \frac{\partial U_2}{\partial \chi_j} + \frac{\partial U_3}{\partial \chi_i} \frac{\partial U_3}{\partial \chi_j} \right) & (i \neq j=1,2,3) \end{aligned} \right\}. \quad (3.11)$$

Полагая в тензоре Альманси

$$\varepsilon_{\chi_i \chi_i} = \gamma_{\chi_i \chi_i}; \quad \frac{1}{2} \varepsilon_{\chi_i \chi_{ji}} = \gamma_{\chi_i \chi_j},$$

получим данный тензор в виде

$$\gamma_{\chi_i \chi_j} = \begin{pmatrix} \gamma_{\chi_1 \chi_1} & \gamma_{\chi_1 \chi_2} & \gamma_{\chi_1 \chi_3} \\ \gamma_{\chi_2 \chi_1} & \gamma_{\chi_2 \chi_2} & \gamma_{\chi_2 \chi_3} \\ \gamma_{\chi_3 \chi_1} & \gamma_{\chi_3 \chi_2} & \gamma_{\chi_3 \chi_3} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\text{где } \gamma_{\chi_i \chi_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial \chi_j} + \frac{\partial U_j}{\partial \chi_i} - \frac{\partial U_k}{\partial \chi_i} \frac{\partial U_k}{\partial \chi_j} \right) \quad (i, j, k=1,2,3).$$

В случае достаточно жесткого твердого тела тензоры Грина и Альманси будут определяться компонентами, имеющими одинаковый линейный вид (когда нелинейные компоненты в выражениях (3.7) и (3.11) можно отбросить из-за их малости по сравнению с линейными):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_{ii} &= \frac{\partial U_i}{\partial x_i} & (i = 1, 2, 3) \\ \varepsilon'_{ij} &= \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} & (i \neq j = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\}. \quad (3.13)$$

Эти компоненты определяют тензор второго ранга, называемый *тензором малых деформаций* или *тензором Коши*:

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} & \frac{1}{2}\varepsilon'_{12} & \frac{1}{2}\varepsilon'_{13} \\ \frac{1}{2}\varepsilon'_{21} & \varepsilon'_{22} & \frac{1}{2}\varepsilon'_{23} \\ \frac{1}{2}\varepsilon'_{31} & \frac{1}{2}\varepsilon'_{32} & \varepsilon'_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Обозначим

$$\varepsilon'_{ii} = \gamma'_{ii}; \quad \frac{1}{2}\varepsilon'_{ij} = \gamma'_{ij},$$

тогда тензор Коши запишется

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma'_{11} & \gamma'_{12} & \gamma'_{13} \\ \gamma'_{21} & \gamma'_{22} & \gamma'_{23} \\ \gamma'_{31} & \gamma'_{32} & \gamma'_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

где $\gamma'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3).$

3.2. Тензор дисторсии (искривления)

Данный тензор определяет градиенты перемещения точек твердого тела.

Рассмотрим изменение вектора перемещения $U(x_1, x_2, x_3)$ в окрестности точки M тела. Это изменение представляется выражениями:

$$\left. \begin{aligned} dU_1 &= \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} dx_3, \\ dU_2 &= \frac{\partial U_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} dx_3, \\ dU_3 &= \frac{\partial U_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} dx_3, \end{aligned} \right\}. \quad (3.16)$$

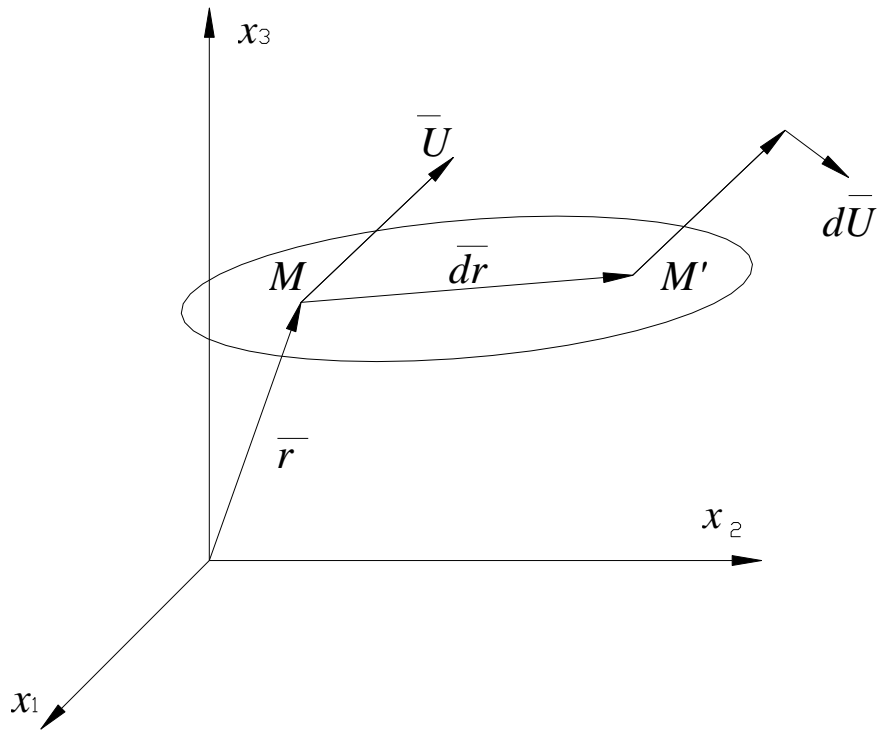


Рис. 3

Для проекций вектора $d\bar{U}$ при переходе к смежной точке M' (она находится на расстоянии $d\bar{r}$ от точки M (рис. 3)) получаем линейные зависимости dU_i от dx_i (3.16). Коэффициенты при dx_i в системе (3.16) представим в виде несимметричного тензора второго ранга dU_i/dx_j :

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} & \frac{1}{2}\varepsilon'_{12} & \frac{1}{2}\varepsilon'_{13} \\ \frac{1}{2}\varepsilon'_{21} & \varepsilon'_{22} & \frac{1}{2}\varepsilon'_{23} \\ \frac{1}{2}\varepsilon'_{31} & \frac{1}{2}\varepsilon'_{32} & \varepsilon'_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Этот тензор называют *тензором дисторсии* (или *тензором градиентов перемещения* в точке M). Разложим тензор дисторсии на симметричный и кососимметричный тензоры:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = \varepsilon'_{ij}; \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = \omega_{ij}; \quad i \neq j, \quad \text{а} \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \varepsilon'_{ii}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Тогда получим

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} & \frac{1}{2} \varepsilon'_{12} & \frac{1}{2} \varepsilon'_{13} \\ \frac{1}{2} \varepsilon'_{21} & \varepsilon'_{22} & \frac{1}{2} \varepsilon'_{23} \\ \frac{1}{2} \varepsilon'_{31} & \frac{1}{2} \varepsilon'_{32} & \varepsilon'_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

или

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \varepsilon'_{ij} + \omega_{ij}, \quad (3.19)$$

где ε'_{ij} – симметричный тензор малых деформаций (тензор Коши):

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'_{ji} \quad (i \neq j);$$

ω'_{ij} – кососимметричный тензор поворота (вращения):

$$\omega_{ii} = 0; \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad (i \neq j).$$

Запись (3.19) можно представить в виде

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \gamma'_{ij} + \omega_{ij}, \quad (3.20)$$

где

$$\gamma'_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon'_{ij} \quad (i \neq j).$$

Тензор поворота можно представить в виде вектора поворота $\boldsymbol{\omega}$, так как он содержит лишь три различные компоненты:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3, \quad (3.21)$$

где

$$\omega_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), k = 1, 2, 3; i \neq j. \quad (3.21)$$

Тогда тензор поворота определится компонентами

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Скорости деформации и поворота в сплошной среде

При изучении движения сплошной среды в переменных Эйлера используется тензор бесконечно малых деформаций среды за время dt , когда рассматриваются проекции вектора перемещений за dt (2.7):

$$dU_i = V_i(\chi_1, \chi_2, \chi_3) \cdot dt, i = 1, 2, 3. \quad (3.22)$$

Из соотношения (3.22) следует уравнение для тензора дисторсии

$$d \frac{\partial U_i}{\partial \chi_j} = \frac{\partial V_i}{\partial \chi_j} dt,$$

где $\partial V_j / \partial \chi_j$ называется *тензором скорости дисторсии* (искривления среды в точке тела).

Раскладывая $\partial V_j / \partial \chi_j$ подобно (3.18) на два тензора, получим

$$d \frac{\partial U_i}{\partial \chi_j} = \dot{\epsilon}_{ij}(\chi_1, \chi_2, \chi_3) dt + \dot{\omega}_{ij}(\chi_1, \chi_2, \chi_3) dt = \dot{\epsilon}_{ij} dt + \dot{\omega}_{ij} dt,$$

где тензор $\dot{\epsilon}_{ij}$ называется *тензором скоростей деформации*:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{12} & \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{13} \\ \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{21} & \dot{\epsilon}_{22} & \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{23} \\ \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{31} & \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{32} & \dot{\epsilon}_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

в котором формулы для компонент данного тензора

$$\dot{\epsilon}_{ii} = \frac{\partial V_i}{\partial \chi_i}; \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \left(\frac{\partial V_i}{\partial \chi_j} + \frac{\partial V_j}{\partial \chi_i} \right)$$

называются *формулами Стокса*. Этот тензор является симметричным.

Соотношения для вектора скорости поворота имеют вид

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\omega}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{\omega}_3 \mathbf{e}_3, \quad (3.24)$$

где $\dot{\omega}_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_j}{\partial \chi_i} - \frac{\partial V_i}{\partial \chi_j} \right)$ – проекции вектора скорости поворота.

3.3. Геометрический смысл компонентов тензора Коши и вектора поворота

Рассмотрим геометрический смысл компонентов ε'_{ii} ($i=1,2,3$) тензора Коши. Пусть $U_i=U_i(x_1,x_2,x_3)$. Определим деформацию растяжения элемента dx_i .

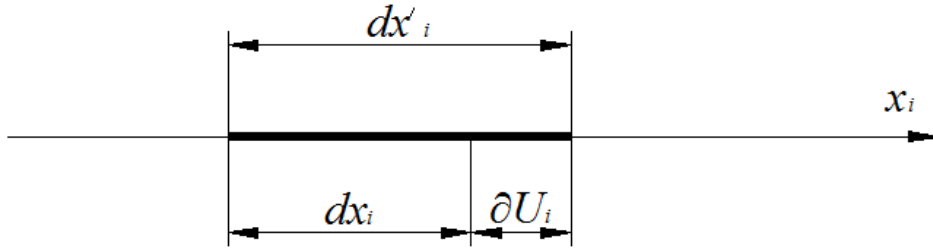


Рис. 4

После растяжения dx_i принимает значение

$$dx'_i = dx_i + \frac{\partial U_i}{\partial x_i} dx_i,$$

тогда относительная деформация растяжения будет

$$\varepsilon_{ii} = \frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}.$$

Таким образом, ε_{ii} представляют собой относительные деформации растяжения-сжатия.

Рассмотрим геометрический смысл компонентов ε'_{ij} ($i \neq j$; $i, j=1,2,3$) тензора Коши. На рис. 5 показана деформация сдвига элементарного прямоугольного параллелепипеда (dx_1, dx_3). Тангенс угла β (рис. 5, а)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\partial U_1}{\partial x_3} dx_3 \frac{1}{dx_3} \approx \beta. \text{ Для малых сдвигов } \beta \text{ имеем } \beta = \frac{\partial U_1}{\partial x_3}.$$

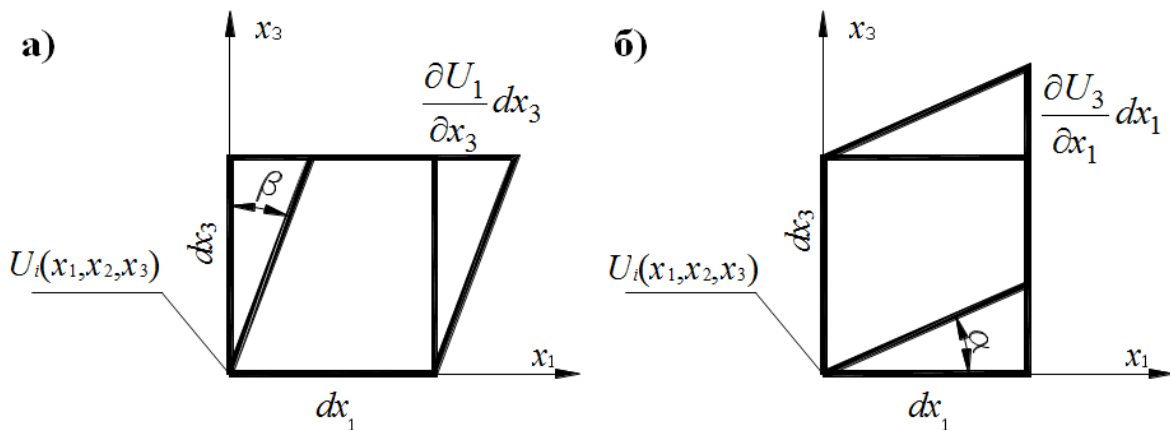


Рис. 5

Аналогично для малых сдвигов α (рис. 5, б) получим

$$\alpha = \frac{\partial U_3}{\partial x_1}.$$

Сумма малых простых сдвигов определяет общий малый сдвиг (рис. 6):

$$\alpha + \beta = \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = \varepsilon'_{31},$$

то есть, ε'_{ij} определяют малые общие сдвиги в плоскостях $x_i x_j$, $i \neq j$.

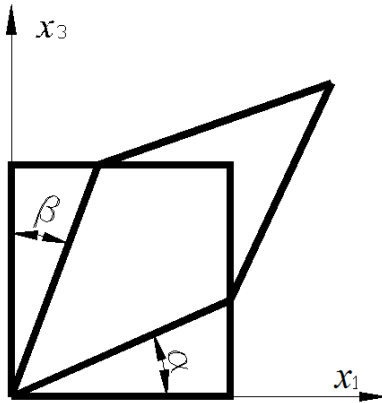


Рис. 6

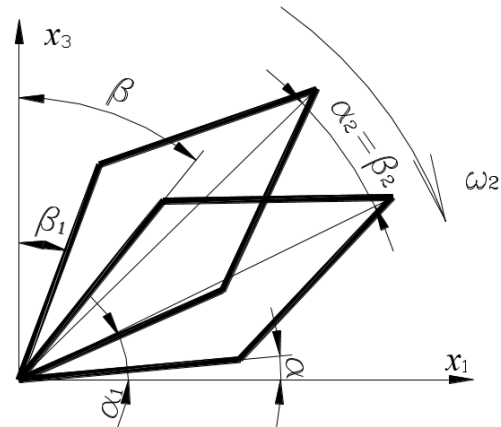


Рис. 7

Представим общий сдвиг элементарного прямоугольного параллелепипеда в плоскости $x_1 x_3$ как сумму чистого сдвига и поворота (рис. 7).

Чистый сдвиг (без вращения параллелепипеда)

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right) = \gamma'_{31}.$$

Деформация поворота

$$\alpha_2 = \beta_2 = \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) = \omega_2,$$

где ω_2 – проекция на ось x_2 вектора поворота элемента твердого тела.

Простые сдвиги:

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\partial U_3}{\partial x_1}; \beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\partial U_1}{\partial x_3}.$$

Примем следующие правила знаков для компонентов тензора Коши: при линейных деформациях растяжения $\varepsilon'_{ii} > 0$; при линейных деформациях сжатия $\varepsilon'_{ii} < 0$; общая деформация сдвига $\varepsilon'_{ij} > 0$, если происходит уменьшение первоначального прямого угла и $\varepsilon'_{ij} < 0$, если имеет место увеличение первоначально прямого угла.

Таким образом, тензор Коши (3.14) определяет общие, а (3.15) – чистые сдвиги.

3.4. Геометрический смысл компонентов тензора Грина

Рассмотрим линейную деформацию растяжения-сжатия в случае конечных деформаций тела и геометрический смысл ε_{ij} .

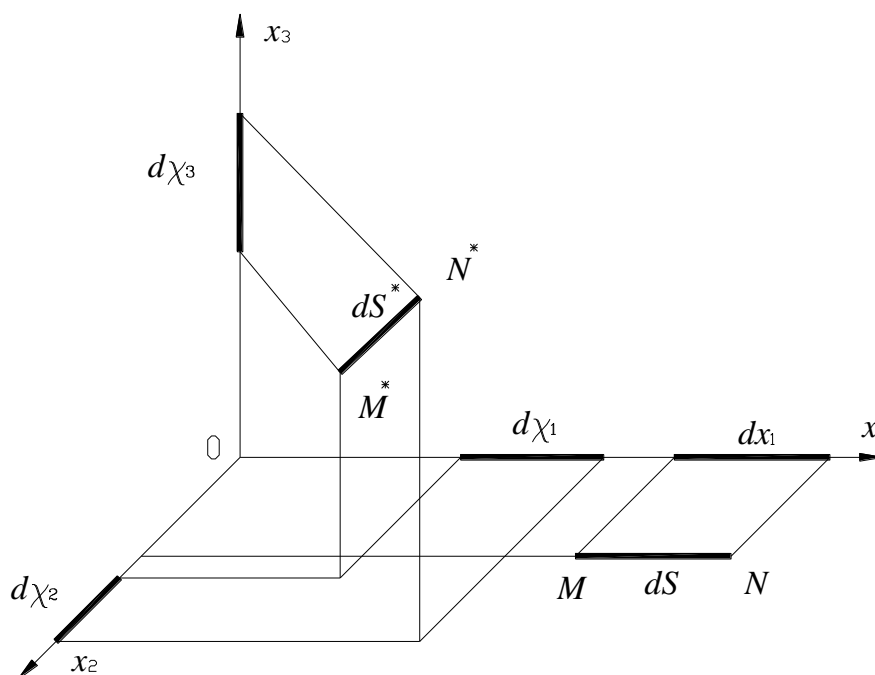


Рис. 8

Обозначим E_{MN} – линейную деформацию растяжения-сжатия элемента MN тела (рис. 8), которая по определению равна $E_{11}=(dS^*-dS)/dS$. В общем случае MN и M^*N^* находятся соотношениями:

$$dS^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2; \quad dS^{*2} = d\chi_1^2 + d\chi_2^2 + d\chi_3^2,$$

где

$$d\chi_i = dx_i + dU_i = dx_i + \frac{\partial U_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_i}{\partial x_3} dx_3, \quad (3.25)$$

причем $dS=dx_1$, так как $dx_2=0$ и $dx_3=0$ (MN параллелен $0x_1$), а следовательно,

$$d\chi_1 = dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1; \quad d\chi_2 = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} dx_1; \quad d\chi_3 = \frac{\partial U_3}{\partial x_1} dx_1.$$

Тогда

$$dS^{*2} = \left[\left(1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \cdot (dx_1)^2 =$$

$$= \left[1 + 2 \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \right] \cdot (dx_1)^2 = (1 + 2\varepsilon_{11}) \cdot (dx_1)^2.$$

Следовательно, $dS^* = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \cdot dx_1$, тогда

$$E_{11} = \frac{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \cdot dx_1 - dx_1}{dx_1} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} - 1.$$

После преобразований получим

$$(1 + E_{11})^2 = 1 + 2\varepsilon_{11}; \quad \varepsilon_{11} = \frac{(1 + E_{11})^2 - 1}{2}.$$

В общем случае

$$\varepsilon_{ii} = \frac{(1 + E_{ii})^2 - 1}{2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.26)$$

Выражение (3.26) – уравнение связи компонентов ε_{ii} тензора Грина с линейными деформациями растяжения-сжатия E_{ii} . В частном случае, если E_{ii} много меньше единицы, то

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2} [1 + 2E_{ii} + E_{ii}^2 - 1] \approx E_{ii}.$$

Определим сдвиг при конечных деформациях MN и MP (рис. 9) и геометрический смысл компонентов тензора Грина ε_{ij} ($i \neq j$).

На рис. 9 до деформации MN параллельно Ox_1 , MP параллельно Ox_2 и так же $dS_1 = dx_1$; $dS_2 = dx_2$.

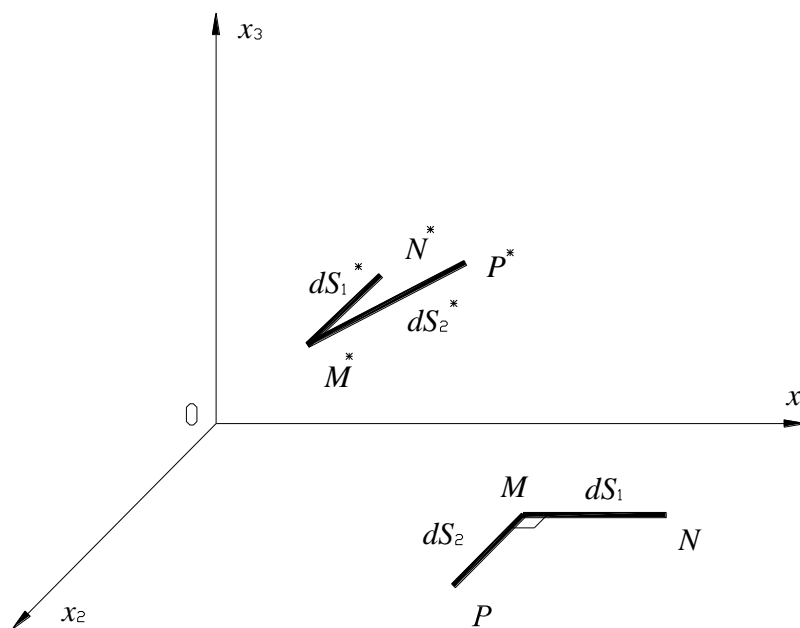


Рис. 9

Проекции $\overline{M^*N^*}$ и $\overline{M^*P^*}$ (после деформации) будут равны соответственно с учетом указанных предпосылок и (3.25):

$$\left[\left(1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) dx_1; \frac{\partial U_2}{\partial x_1} dx_1; \frac{\partial U_3}{\partial x_1} dx_1 \right]; \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_2} dx_2; \left(1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) dx_2; \frac{\partial U_3}{\partial x_2} dx_2 \right].$$

Из векторной алгебры известно

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = |\overline{A}| |\overline{B}| \cos(\overline{A} \wedge \overline{B}) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \text{ и } \cos(\overline{A} \wedge \overline{B}) = \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3}{|\overline{A}| |\overline{B}|}.$$

Обозначим деформацию сдвига (изменение угла между \overline{MN} и \overline{MP})

$$\varphi_{12} = \frac{\pi}{2} - \angle N^* M^* P^*.$$

Тогда косинус угла между $\overline{M^*N^*}$ и $\overline{M^*P^*}$ определяется выражением с учетом (3.26)

$$\cos(\angle N^* M^* P^*) = \frac{\left[\left(1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \left(1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}} dx_1 dx_2}, \quad (3.27)$$

где

$$|\overline{M^*N^*}| = dS^*_1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} dx_1; \quad |\overline{M^*P^*}| = dS^*_2 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}} dx_2.$$

Из выражения (3.27) следует

$$\begin{aligned} \cos(\angle N^* M^* P^*) &= \frac{\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right)}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}}} = \\ &= \frac{\varepsilon_{12}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}}}. \end{aligned}$$

Так как

$$\angle N^* M^* P^* = \frac{\pi}{2} - \varphi_{12}, \text{ то } \cos(\angle N^* M^* P^*) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{12}\right) = \sin(\varphi_{12}),$$

следовательно,

$$\sin(\varphi_{12}) = \frac{\varepsilon_{12}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}}} = \frac{\varepsilon_{12}}{(1 + E_{11}) \cdot (1 + E_{22})}.$$

В общем случае

$$\sin(\varphi_{ij}) = \frac{\varepsilon_{ij}}{(1 + E_{ii}) \cdot (1 + E_{jj})} \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3). \quad (3.28)$$

Выражение (3.28) представляет собой уравнение связи компонентов ε_{ij} тензора Грина с линейными деформациями растяжения-сжатия E_{ii} и угловыми деформациями φ_{ij} . В частном случае, если E_{ii} и φ_{ij} много меньше единицы, то из (3.28) следует, что $\varphi_{ij} \approx \varepsilon_{ij}$ (геометрический смысл компонентов ε_{ij}).

3.5. Геометрический смысл компонентов тензора Альманси

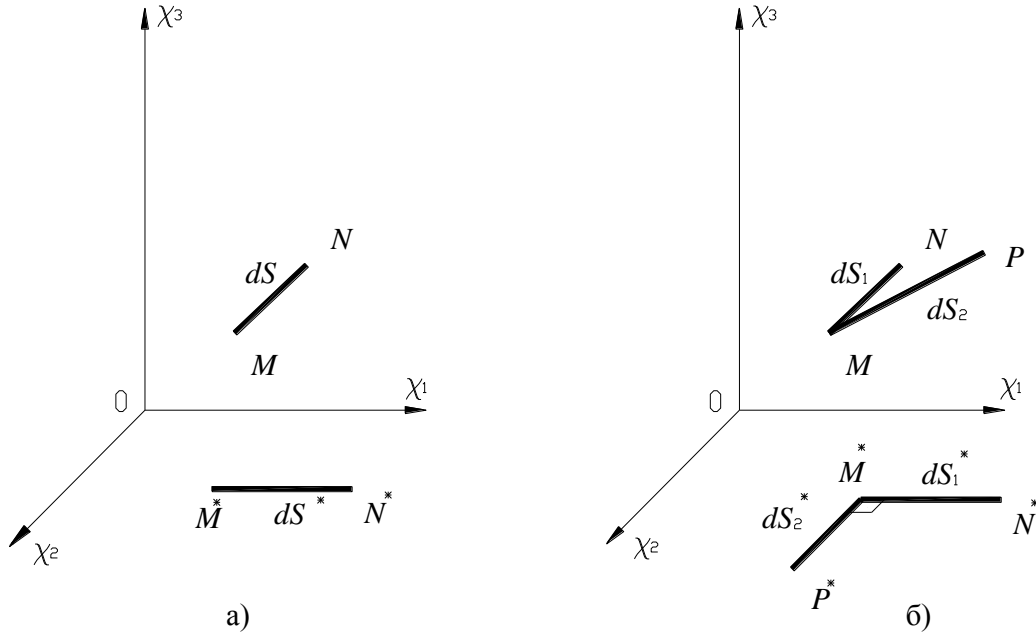


Рис. 10

Определим геометрический смысл компоненты тензора Альманси $\varepsilon_{\chi_1 \chi_1}$ и уравнение связи его с линейной деформацией растяжения-сжатия $E_{\chi_1 \chi_1}$ (рис.10, a):

$$E_{\chi_1 \chi_1} = \frac{dS^* - dS}{dS}.$$

Пусть проекции перемещений $U_i = U_i(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$, эйлеровы координаты определяются соотношением $\chi_j = x_j + U_j$, вектор $\overline{M^*N^*}$ после деформации имеет проекции $(d\chi_1, 0, 0)$, $(\overline{M^*N^*} \parallel 0\chi_1)$, и вектор \overline{MN} до деформации имеет проекции (dx_1, dx_2, dx_3) . Тогда $dx_i = d\chi_i - dU_i$ или

$$dx_i = d\chi_i - \frac{\partial U_i}{\partial \chi_1} d\chi_1 - \frac{\partial U_i}{\partial \chi_2} d\chi_2 - \frac{\partial U_i}{\partial \chi_3} d\chi_3 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.29)$$

Тогда квадрат длины вектора \overline{MN} $dS^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ с учетом (3.29) и указанных предпосылок будет

$$dS^2 = \left[\left(1 - \frac{\partial U_1}{\partial \chi_1} \right)^2 + \left(-\frac{\partial U_2}{\partial \chi_1} \right)^2 + \left(-\frac{\partial U_3}{\partial \chi_1} \right)^2 \right] (d\chi_1)^2 =$$

$$= \left[1 - 2 \left[\frac{\partial U_1}{\partial \chi_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \chi_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \chi_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial \chi_1} \right)^2 \right] \right] (d\chi_1)^2,$$

где

$$\frac{\partial U_1}{\partial \chi_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \chi_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \chi_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial \chi_1} \right)^2 = \varepsilon_{\chi_1 \chi_1} \quad (\text{см. 3.11}).$$

Линейная деформация растяжения-сжатия элементарного отрезка MN

$$E_{\chi_i \chi_1} = \frac{|\overline{M^* N^*}| - |\overline{MN}|}{|\overline{MN}|} = \frac{dS^* - dS}{dS} = \frac{d\chi_1}{dS} - 1. \quad (3.30)$$

Учитывая, что $dS^2 = (1 - 2\varepsilon_{\chi_1 \chi_1}) d\chi_1^2$, из (3.30) получим

$$E_{\chi_i \chi_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\varepsilon_{\chi_1 \chi_1}}} - 1 \quad \text{или} \quad \varepsilon_{\chi_i \chi_1} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + E_{\chi_i \chi_1} \right)^2} \right].$$

В общем случае

$$\varepsilon_{\chi_i \chi_i} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + E_{\chi_i \chi_i} \right)^2} \right], \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.31)$$

Выражение (3.31) – уравнение связи компонент тензора Альманси $\varepsilon_{\chi_i \chi_i}$ с линейными компонентами деформации растяжения-сжатия $E_{\chi_i \chi_i}$.

В частном случае, при $E_{\chi_i \chi_i}$ много меньше единицы, из (3.31) следует

$$E_{\chi_i \chi_i} \approx \varepsilon_{\chi_i \chi_i} \quad (\text{геометрический смысл}).$$

Определим геометрический смысл компонент тензора Альманси $\varepsilon_{\chi_i \chi_j}$ и уравнение связи его с изменением угла φ_{12} между MN и MP и с линейными компонентами деформации растяжения-сжатия $E_{\chi_1 \chi_1}$, $E_{\chi_2 \chi_2}$ (рис. 10, б).

Пусть векторы $\overline{M^* N^*}$ и $\overline{M^* P^*}$ после деформации имеют проекции соответственно $\overline{M^* N^*} d\chi_1, 0, 0$ и $\overline{M^* P^*} 0, d\chi_2, 0$ ($\overline{M^* N^*} \parallel 0\chi_1$ и $\overline{M^* P^*} \parallel 0\chi_2$). С учетом выражений (3.29) проекции векторов \overline{MN} и \overline{MP} до деформации будут равны:

$$\overline{MN} \left[\left(1 - \frac{\partial U_1}{\partial \chi_1} \right) d\chi_1; \left(-\frac{\partial U_2}{\partial \chi_1} \right) d\chi_1; \left(-\frac{\partial U_3}{\partial \chi_1} \right) d\chi_1 \right];$$

$$\overline{MP} \left[\left(-\frac{\partial U_1}{\partial \chi_2} \right) d\chi_2; \left(1 - \frac{\partial U_2}{\partial \chi_2} \right) d\chi_2; \left(-\frac{\partial U_3}{\partial \chi_2} \right) d\chi_2 \right].$$

Квадраты модулей этих векторов:

$$|\overline{MN}|^2 = \left[\left(1 - \frac{\partial U_1}{\partial \chi_1} \right)^2 + \left(-\frac{\partial U_2}{\partial \chi_1} \right)^2 + \left(-\frac{\partial U_3}{\partial \chi_1} \right)^2 \right] d\chi_1^2 = \left(1 - 2\varepsilon_{\chi_1 \chi_1} \right) d\chi_1^2,$$

$$|\overline{MP}|^2 = \left[\left(-\frac{\partial U_1}{\partial \chi_2} \right)^2 + \left(1 - \frac{\partial U_2}{\partial \chi_2} \right)^2 + \left(-\frac{\partial U_3}{\partial \chi_2} \right)^2 \right] d\chi_2^2 = \left(1 - 2\varepsilon_{\chi_2 \chi_2} \right) d\chi_2^2.$$

Тогда, по аналогии с п. 3.4, имеем

$$\begin{aligned} \cos(NMP) &= \frac{-\frac{\partial U_1}{\partial \chi_2} - \frac{\partial U_2}{\partial \chi_1} + \frac{\partial U_1}{\partial \chi_1} \frac{\partial U_1}{\partial \chi_2} + \frac{\partial U_2}{\partial \chi_1} \frac{\partial U_2}{\partial \chi_2} + \frac{\partial U_3}{\partial \chi_1} \frac{\partial U_3}{\partial \chi_2}}{\sqrt{1 - 2\varepsilon_{\chi_1 \chi_1}} \sqrt{1 - 2\varepsilon_{\chi_2 \chi_2}}} = \\ &= \frac{-\varepsilon_{\chi_1 \chi_2}}{\sqrt{1 - 2\varepsilon_{\chi_1 \chi_1}} \sqrt{1 - 2\varepsilon_{\chi_2 \chi_2}}}. \end{aligned}$$

Угол сдвига после деформации равен $\varphi_{12} = \angle NMP - \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\cos\left(\varphi_{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\varepsilon_{\chi_1 \chi_2}}{\sqrt{1 - 2\varepsilon_{\chi_1 \chi_1}} \sqrt{1 - 2\varepsilon_{\chi_2 \chi_2}}} = -\sin(\varphi_{12}).$$

Тогда

$$\sin(\varphi_{12}) = \frac{\varepsilon_{\chi_1 \chi_2}}{\sqrt{1 - 2\varepsilon_{\chi_1 \chi_1}} \sqrt{1 - 2\varepsilon_{\chi_2 \chi_2}}} = \varepsilon_{\chi_1 \chi_2} \begin{pmatrix} 1 + E_{\chi_1 \chi_1} \\ \chi_1 \chi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + E_{\chi_2 \chi_2} \\ \chi_2 \chi_2 \end{pmatrix}.$$

В общем случае

$$\sin(\varphi_{ij}) = \varepsilon_{\chi_i \chi_j} \cdot \begin{pmatrix} 1 + E_{\chi_i \chi_i} \\ \chi_i \chi_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + E_{\chi_j \chi_j} \\ \chi_j \chi_j \end{pmatrix}, \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3). \quad (3.32)$$

Уравнение (3.32) выражает связь между линейной деформацией $E_{\chi_i \chi_i}$, угловой деформацией $\varphi_{\chi_i \chi_j}$ и компонентами тензора Альманси $\varepsilon_{\chi_i \chi_j}$ ($i \neq j$).

В частном случае при $\varphi_{\chi_i \chi_j}$ и $E_{\chi_i \chi_i}$ много меньше единицы $\varphi_{\chi_i \chi_j} \approx \varepsilon_{\chi_i \chi_j}$ (геометрический смысл).

5.6. Условия упрощения выражений для компонент тензора Грина

Определим условия, при которых компоненты тензора Грина

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_i}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

будут определяться тензором Коши, т.е. можно пренебречь нелинейными слагаемыми в (3.33):

$$\varepsilon'_{ii} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}; \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}. \quad (3.34)$$

Условия $\partial U_i / \partial x_j \ll 1$ недостаточно, так как компоненты ε_{ij} могут содержать при малых деформациях чистого сдвига элементов еще и большие повороты.

Покажем, что в (3.33), кроме деформаций, входят углы поворота. Так, ε_{11} и ε_{12} с учетом (3.20) запишутся:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right] = \\ &= \varepsilon'_{11} + \frac{1}{2} (\varepsilon'_{11})^2 + \frac{1}{2} (\gamma'_{12} + \omega_3)^2 + \frac{1}{2} (\gamma'_{13} + \omega_2)^2 \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} = \\ &= \varepsilon'_{12} + \varepsilon'_{11} (\gamma'_{12} - \omega_3) + \varepsilon'_{22} (\gamma'_{12} + \omega_3) + (\gamma'_{13} - \omega_2) (\gamma'_{23} + \omega_1) \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Из (3.35) следует, что (3.33) можно заменить (3.34) при условиях: $\varepsilon'_{ij} \ll 1$, $\omega_i \ll 1$, ε'_{ij} и ω_i одного порядка малости ($i, j=1,2,3$).

Аналогично можно показать, что компоненты тензора Альманси можно заменить выражениями (3.34) при выполнении указанных ранее трех условий.

3.7. Изменение объема твердого тела

Рассмотрим данную задачу в системе лагранжевых координат. Тогда объем элементарного параллелепипеда до деформации будет

$$dV = dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3. \quad (3.36)$$

После деформации размеры параллелепипеда

$$d\chi_i = dx_i + dU_i,$$

где $U_i=U_i(x_1,x_2,x_3)$ $i=1,2,3$. Тогда объем после деформации $dV^* = d\chi_1 d\chi_2 d\chi_3$, где

$$\begin{aligned}d\chi_1 &= dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} dx_3; \\d\chi_2 &= dx_2 + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} dx_3; \\d\chi_3 &= dx_3 + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} dx_3.\end{aligned}$$

Представим выражения для dV^* в матричной форме

$$dV^* = \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \left(1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_3} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} & \left(1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) \end{vmatrix} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3.37)$$

Обозначим через dV^*/dV коэффициент объемной деформации, а через $\theta=(dV^* - dV)/dV$ – относительную объемную деформацию. Тогда получим

$$1 + \theta = \frac{dV^*}{dV}. \quad (3.38)$$

Разделим dV^* (3.37) на dV (3.36):

$$\frac{dV^*}{dV} = \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \left(1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_3} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} & \left(1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|, \quad (3.39)$$

где $|\mathbf{A}|$ – определитель матрицы \mathbf{A} (3.39).

Выразим $|\mathbf{A}|$ через компоненты тензора Грина. Для этого (3.39) возведем в квадрат с учетом соотношения (3.38):

$$(1 + \theta)^2 = |\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T| = |\mathbf{B}|,$$

где $|\mathbf{B}|$ – определитель матрицы \mathbf{B} , который с учетом соотношений (3.8) будет

$$(1+\theta)^2 = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \left(1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_3} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} & \left(1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \left(1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} & \left(1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 1+2\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 1+2\varepsilon_{33} \end{pmatrix} = |\mathbf{B}|.$$

Раскрывая определитель по правилу Саррюса, получим

$$(1+\theta)^2 = |\mathbf{B}| = (1+2\varepsilon_{11})(1+2\varepsilon_{22})(1+2\varepsilon_{33}) + 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{13} -$$

$$-(1+2\varepsilon_{11})(\varepsilon_{23})^2 - (1+2\varepsilon_{22})(\varepsilon_{13})^2 - (1+2\varepsilon_{33})(\varepsilon_{12})^2. \quad (3.40)$$

Тогда относительная объемная деформация

$$\theta = \sqrt{|\mathbf{B}|} - 1. \quad (3.41)$$

Так как угловые деформации изменяют форму не меняя объема, то (3.41) можно записать

$$\theta = \sqrt{(1+2\varepsilon_{11})(1+2\varepsilon_{22})(1+2\varepsilon_{33})} - 1. \quad (3.42)$$

Это относительная объемная деформация при конечных (больших) деформациях тела.

В случае малых деформаций, учитывая, что вращение не влияет на изменение объема, получим

$$\theta = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} + \varepsilon'_{33}, \quad (3.43)$$

Для записи (3.43) удобно использовать символ Кронекера (дельта-символ)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

тогда (3.43) запишется в виде

$$\theta = \varepsilon'_{ij} \cdot \delta_{ij}. \quad (3.44)$$

С учетом соотношений для ε'_{ii}

$$\theta = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \text{div}(\mathbf{U}).$$

4. ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИЙ КОШИ И ЕГО СВОЙСТВА

Тензор Коши будем далее записывать без знака «штрих», т.е.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\varepsilon_{12} & \frac{1}{2}\varepsilon_{13} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\varepsilon_{23} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{31} & \frac{1}{2}\varepsilon_{32} & \frac{1}{2}\varepsilon_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3), \text{ и } \varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (i \neq j; \quad i, j=1,2,3) \quad (4.1)$$

4.1. Свойства тензора Коши

Свойство 1

Тензор Коши симметричен по определению:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad (i \neq j; i, j=1,2,3).$$

Свойство 2

Тензор ε_{ij} позволяет определить линейную деформацию ε_r в любом направлении \bar{r} (рис. 11) в окрестности точки, где он задан, а также деформации сдвига между двумя первоначально перпендикулярными направлениями \bar{r}_1 и \bar{r}_2 (рис. 12). Определим сначала $\varepsilon_r = dU_r/dr$. Учтем, что вектор U_r имеет проекции $U_1, U_2, U_3, U_i = U_i(x_1, x_2, x_3)$, а также, что вектор \bar{r} имеет направляющие косинусы

$$n_i = \cos(\mathbf{r}, x_i) = \frac{dx_i}{dr}.$$

Так как

$$\left. \begin{array}{l} U_1 = U_r n_1 \\ U_2 = U_r n_2 \\ U_3 = U_r n_3 \end{array} \right\} \text{, то } U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3 = U_r [n_1^2 + n_2^2 + n_3^2] \text{ или}$$

$$U_r = U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3. \quad (4.2)$$

Перемещение $U_r = U_r(x_1, x_2, x_3)$ и $x_i = x_i(r), (i=1,2,3)$. Тогда

$$\varepsilon_r = \frac{dU_r}{dr} = \frac{\partial U_r}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dr} + \frac{\partial U_r}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dr} + \frac{\partial U_r}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dr} = \frac{\partial U_r}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial U_r}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial U_r}{\partial x_3} n_3.$$

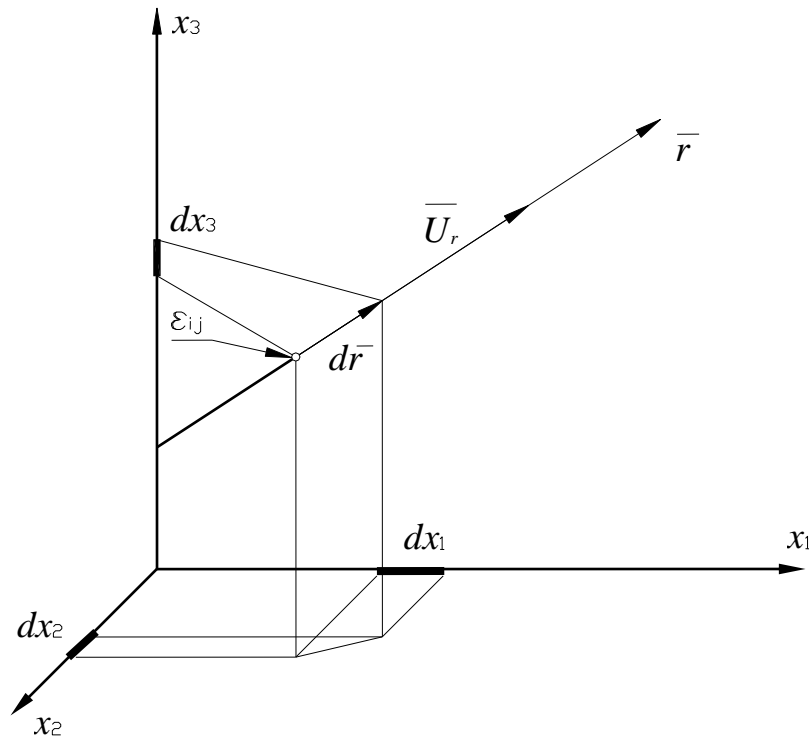


Рис. 11

С учетом выражения (4.2) получим

$$\varepsilon_r = \frac{\partial(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}{\partial x_3} n_3$$

ИЛИ

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} n_1^2 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} n_2^2 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} n_3^2 + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} n_3 n_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} n_3 n_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} n_2 n_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} n_2 n_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} n_3 n_2 + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} n_3 n_2.$$

С учетом (4.1) ε_r определится выражением

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{11} n_1^2 + \varepsilon_{22} n_2^2 + \varepsilon_{33} n_3^2 + \varepsilon_{12} n_1 n_2 + \varepsilon_{23} n_2 n_3 + \varepsilon_{13} n_1 n_3. \quad (4.3)$$

Это линейная деформация в направлении $\mathbf{r}(n_1, n_2, n_3)$.

Деформация сдвига $\varepsilon_{r_1 r_2}$ (рис. 12) равна

$$\varepsilon_{r_1 r_2} = \frac{\partial U_{r_1}}{\partial r_2} + \frac{\partial U_{r_2}}{\partial r_1}$$

где по аналогии с (4.2) \mathbf{r}_1 имеет направляющие косинусы n_1, n_2, n_3 , а $\mathbf{r}_2 - m_1, m_2, m_3$

$$U_{r_1} = U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3; U_{r_2} = U_1 m_1 + U_2 m_2 + U_3 m_3. \quad (4.4)$$

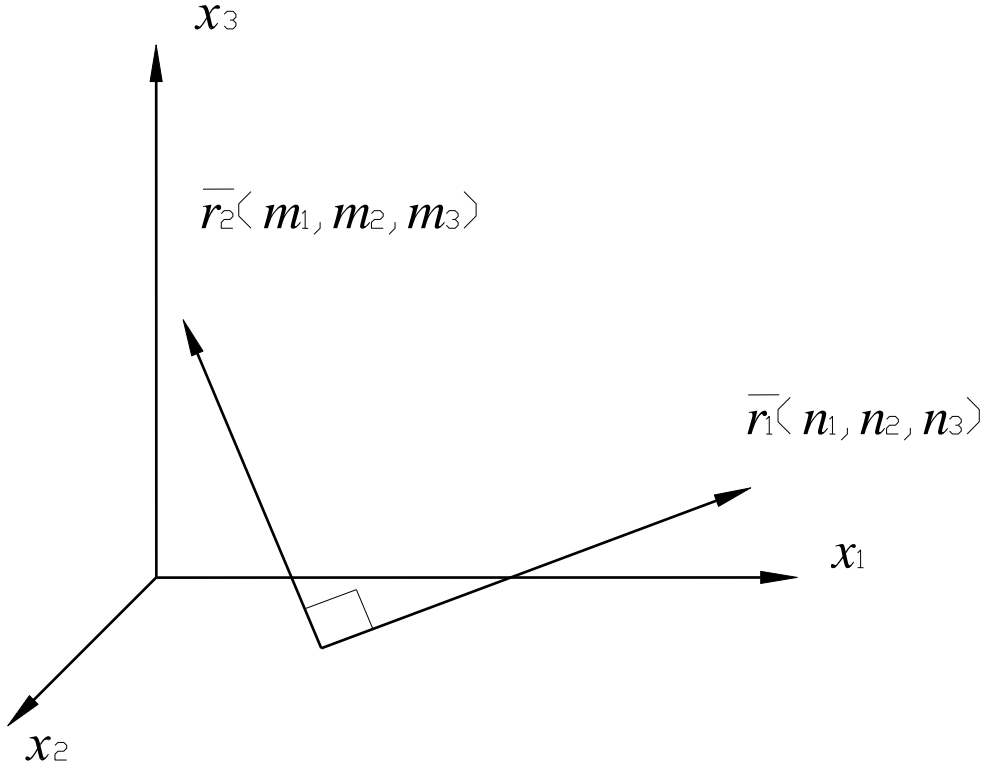


Рис. 12

Учитывая, что $U_{r_1} = U_{r_1}(x_1, x_2, x_3)$; $U_{r_2} = U_{r_2}(x_1, x_2, x_3)$, где $x_i = x_i(r_1)$ или $x_i = x_i(r_2)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{r_1}}{\partial r_2} &= \frac{\partial U_{r_1}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dr_2} + \frac{\partial U_{r_1}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dr_2} + \frac{\partial U_{r_1}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dr_2}; \\ \frac{\partial U_{r_2}}{\partial r_1} &= \frac{\partial U_{r_2}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dr_1} + \frac{\partial U_{r_2}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dr_1} + \frac{\partial U_{r_2}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dr_1}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Используя зависимости (4.4), выражения (4.5) приведем к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{r_1}}{\partial r_2} &= \frac{\partial(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}{\partial x_1} m_1 + \\ &+ \frac{\partial(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}{\partial x_2} m_2 + \frac{\partial(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}{\partial x_3} m_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r_1} r_2 &= \frac{\partial(U_1 m_1 + U_2 m_2 + U_3 m_3)}{\partial x_1} n_1 + \\ &+ \frac{\partial(U_1 m_1 + U_2 m_2 + U_3 m_3)}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial(U_1 m_1 + U_2 m_2 + U_3 m_3)}{\partial x_3} n_3. \end{aligned}$$

Складывая $\partial U_{r_1}/\partial r_2$ и $\partial U_{r_2}/\partial r_1$, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r_1 r_2} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_1} n_1 m_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} n_2 m_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} n_3 m_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} n_1 m_2 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} n_2 m_2 + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} n_3 m_2 + \\ &+ \frac{\partial U_1}{\partial x_3} n_1 m_3 + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} n_2 m_3 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} n_3 m_3 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} m_1 n_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} m_2 n_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} m_3 n_1 + \\ &+ \frac{\partial U_1}{\partial x_2} m_1 n_2 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} m_2 n_2 + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} m_3 n_2 + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} m_1 n_3 + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} m_2 n_3 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} m_3 n_3. \end{aligned}$$

С учетом выражений (4.1) деформация сдвига запишется

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r_1 r_2} &= 2(\varepsilon_{11} n_1 m_1 + \varepsilon_{22} n_2 m_2 + \varepsilon_{33} n_3 m_3) + \varepsilon_{12} (n_2 m_1 + m_2 n_1) + \\ &+ \varepsilon_{23} (n_2 m_3 + m_2 n_3) + \varepsilon_{13} (n_3 m_1 + m_3 n_1). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Выражения (4.3) и (4.6) позволяют по тензору ε_{ij} , заданному в осях $Ox_1x_2x_3$, определить тензор ε'_{ij} в осях $Ox'_1x'_2x'_3$, если заданы направляющие косинусы новых осей относительно $Ox_1x_2x_3$:

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & l_1 & l_2 & l_3 \\ x'_2 & m_1 & m_2 & m_3 \\ x'_3 & n_1 & n_2 & n_3 \end{array}$$

Компоненты тензора ε'_{ij} в осях $Ox'_1x'_2x'_3$ будут вычисляться по выражениям:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11} l_1^2 + \varepsilon_{22} l_2^2 + \varepsilon_{33} l_3^2 + \varepsilon_{12} l_1 l_2 + \varepsilon_{23} l_2 l_3 + \varepsilon_{13} l_1 l_3; \\ \varepsilon'_{22} &= \varepsilon_{11} m_1^2 + \varepsilon_{22} m_2^2 + \varepsilon_{33} m_3^2 + \varepsilon_{12} m_1 m_2 + \varepsilon_{23} m_2 m_3 + \varepsilon_{13} m_1 m_3; \\ \varepsilon'_{33} &= \varepsilon_{11} n_1^2 + \varepsilon_{22} n_2^2 + \varepsilon_{33} n_3^2 + \varepsilon_{12} n_1 n_2 + \varepsilon_{23} n_2 n_3 + \varepsilon_{13} n_1 n_3; \\ \varepsilon'_{12} &= 2(\varepsilon_{11} l_1 m_1 + \varepsilon_{22} l_2 m_2 + \varepsilon_{33} l_3 m_3) + \varepsilon_{12} (l_2 m_1 + m_2 l_1) + \\ &+ \varepsilon_{23} (l_2 m_3 + m_2 l_3) + \varepsilon_{13} (l_3 m_1 + m_3 l_1); \\ \varepsilon'_{23} &= 2(\varepsilon_{11} n_1 m_1 + \varepsilon_{22} n_2 m_2 + \varepsilon_{33} n_3 m_3) + \varepsilon_{12} (n_2 m_1 + m_2 n_1) + \\ &+ \varepsilon_{23} (n_2 m_3 + m_2 n_3) + \varepsilon_{13} (n_3 m_1 + m_3 n_1); \\ \varepsilon'_{13} &= 2(\varepsilon_{11} l_1 n_1 + \varepsilon_{22} l_2 n_2 + \varepsilon_{33} l_3 n_3) + \varepsilon_{12} (l_2 n_1 + n_2 l_1) + \\ &+ \varepsilon_{23} (l_2 n_3 + n_2 l_3) + \varepsilon_{13} (l_3 n_1 + n_3 l_1). \end{aligned}$$

Свойство 3

Тензор ε_{ij} можно всегда привести к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ – главные деформации растяжения-сжатия, действующие в трех взаимно перпендикулярных направлениях, называемых главными осями деформаций: $x'_1(n_{11}, n_{12}, n_{13})$; $x'_2(n_{21}, n_{22}, n_{23})$; $x'_3(n_{31}, n_{32}, n_{33})$, т. е. выполняются условия

$$n_{i1}n_{j1} + n_{i2}n_{j2} + n_{i3}n_{j3} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j).$$

Найдем ε_i ($i=1, 2, 3$) и $x'_i(n_{i1}, n_{i2}, n_{i3})$ – направляющие косинусы для x'_i ($i=1, 2, 3$).

Для определения ε_i возьмем выражение для ε_r (4.3):

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{11}n_1^2 + \varepsilon_{22}n_2^2 + \varepsilon_{33}n_3^2 + \varepsilon_{13}n_1n_3 + \varepsilon_{12}n_1n_2 + \varepsilon_{23}n_2n_3. \quad (4.7)$$

Воспользуемся методом множителей Лагранжа для определения ε_i и n_{i1}, n_{i2}, n_{i3} , ($i=1, 2, 3$). Умножим $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ на ε и вычтем полученное выражение из (4.7). В результате получим

$$\varepsilon_r - \varepsilon = (\varepsilon_{11} - \varepsilon)n_1^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon)n_2^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon)n_3^2 + \varepsilon_{13}n_1n_3 + \varepsilon_{12}n_1n_2 + \varepsilon_{23}n_2n_3. \quad (4.8)$$

Из условий экстремума функции ($\varepsilon_r - \varepsilon$)

$$\frac{\partial(\varepsilon_r - \varepsilon)}{\partial n_1} = 0; \quad \frac{\partial(\varepsilon_r - \varepsilon)}{\partial n_2} = 0; \quad \frac{\partial(\varepsilon_r - \varepsilon)}{\partial n_3} = 0$$

получается система линейных однородных уравнений относительно n_i ($i=1, 2, 3$):

$$\left. \begin{aligned} 2(\varepsilon_{11} - \varepsilon)n_1 + \varepsilon_{12}n_2 + \varepsilon_{13}n_3 &= 0 \\ \varepsilon_{21}n_1 + 2(\varepsilon_{22} - \varepsilon)n_2 + \varepsilon_{23}n_3 &= 0 \\ \varepsilon_{31}n_1 + \varepsilon_{32}n_2 + 2(\varepsilon_{33} - \varepsilon)n_3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.9)$$

Нетривиальное решение ($n_i \neq 0$) система (4.9) имеет тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_{11} - \varepsilon) & \varepsilon_{12} / 2 & \varepsilon_{13} / 2 \\ \varepsilon_{21} / 2 & (\varepsilon_{22} - \varepsilon) & \varepsilon_{23} / 2 \\ \varepsilon_{31} / 2 & \varepsilon_{32} / 2 & (\varepsilon_{33} - \varepsilon) \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя и группировки коэффициентов при $\varepsilon^3, \varepsilon^2, \varepsilon^1, \varepsilon^0$ получим кубическое уравнение

$$-\varepsilon^3 + H_1\varepsilon^2 + H_2\varepsilon + H_3 = 0, \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned}
H_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}; \\
H_2 &= -\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}\varepsilon_{22} + \frac{1}{4}(\varepsilon_{12})^2 + \frac{1}{4}(\varepsilon_{23})^2 + \frac{1}{4}(\varepsilon_{31})^2; \\
H_3 &= \text{Det}(\varepsilon_{ij}) = |\varepsilon_{ij}| = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \frac{1}{4}\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31} - \frac{1}{4}\varepsilon_{11}(\varepsilon_{23})^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_{22}(\varepsilon_{13})^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_{33}(\varepsilon_{12})^2.
\end{aligned}$$

В силу симметрии тензора ε_{ij} уравнение (4.10) будет иметь вещественные корни. Определив из (4.10) корни ε_i , ($i=1,2,3$), можно вычислить направляющие косинусы n_{i1} , n_{i2} , n_{i3} деформаций ε_i , подставив ε_i в (4.9).

$$\left. \begin{aligned}
(\varepsilon_{11} - \varepsilon_i)n_{i1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{12}n_{i2} + \frac{1}{2}\varepsilon_{13}n_{i3} &= 0 \\
\frac{1}{2}\varepsilon_{21}n_{i1} + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_i)n_{i2} + \frac{1}{2}\varepsilon_{23}n_{i3} &= 0 \\
\frac{1}{2}\varepsilon_{31}n_{i1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{32}n_{i2} + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_i)n_{i3} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Для этого разделим систему (4.11) на $n_{i3} \neq 0$ и обозначим

$$\frac{n_{i1}}{n_{i3}} = a_i; \quad \frac{n_{i2}}{n_{i3}} = b_i.$$

Возьмем первое и третье уравнения (4.11), выраженные через a_i , b_i ($i=1,2,3$):

$$\left. \begin{aligned}
(\varepsilon_{11} - \varepsilon_i)a_i + \frac{1}{2}\varepsilon_{12}b_i &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{13} \\
\frac{1}{2}\varepsilon_{31}a_i + \frac{1}{2}\varepsilon_{32}b_i &= -(\varepsilon_{33} - \varepsilon_i)
\end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

и присоединим к ним тождество $n_{i1}^2 + n_{i2}^2 + n_{i3}^2 = 1$, из которого следует

$$a_i^2 + b_i^2 = \frac{1}{n_{i3}^2}. \quad (4.13)$$

Из (4.13) получим $n_{i3} = \frac{1}{\sqrt{1 + a_i^2 + b_i^2}}$, где a_i и b_i определяются из системы (4.12). Тогда $n_{i1} = a_i n_{i3}$, $n_{i2} = b_i n_{i3}$.

Эти направляющие косинусы обращают $(\varepsilon_r - \varepsilon_i)$ в относительные экстремумы, а так как ε_i не зависят от n_i , то одновременно с $\varepsilon_r - \varepsilon_i$ в свои экстремумы обращаются и величины ε_r .

Корни уравнения (4.10) совпадают с главными деформациями. Действительно, умножим каждое уравнение (4.11) соответственно на n_{i1} , n_{i2} , n_{i3} и сложим затем все три вместе. В результате получим

$$\varepsilon_{11}n_{i1}^2 + \varepsilon_{22}n_{i2}^2 + \varepsilon_{33}n_{i3}^2 + \varepsilon_{12}n_{i1}n_{i2} + \varepsilon_{23}n_{i2}n_{i3} + \varepsilon_{13}n_{i1}n_{i3} = \varepsilon_i(n_{i1}^2 + n_{i2}^2 + n_{i3}^2).$$

Сопоставляя это уравнение с (4.7), видим, что ε_i – есть линейная деформация, соответствующая n_{i1} , n_{i2} , n_{i3} , а n_{ij} ($i,j=1,2,3$), как показано, определяют направления одной из главных деформаций в данной точке.

Поверхность деформаций Коши

В лагранжевых координатах введем вектор \mathbf{r} , модуль которого $|\bar{\mathbf{r}}| = k/\sqrt{\varepsilon_r}$, $k = \text{const.}$ и имеет направляющие косинусы (рис. 13):

$$n_1 = \frac{x_1}{r}; \quad n_2 = \frac{x_2}{r}; \quad n_3 = \frac{x_3}{r}.$$

Заменим в (4.7) n_i через x_i/r :

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{11}\left(\frac{x_1}{r}\right)^2 + \varepsilon_{22}\left(\frac{x_2}{r}\right)^2 + \varepsilon_{33}\left(\frac{x_3}{r}\right)^2 + \varepsilon_{12}\frac{x_1}{r}\frac{x_2}{r} + \varepsilon_{23}\frac{x_2}{r}\frac{x_3}{r} + \varepsilon_{31}\frac{x_3}{r}\frac{x_1}{r}.$$

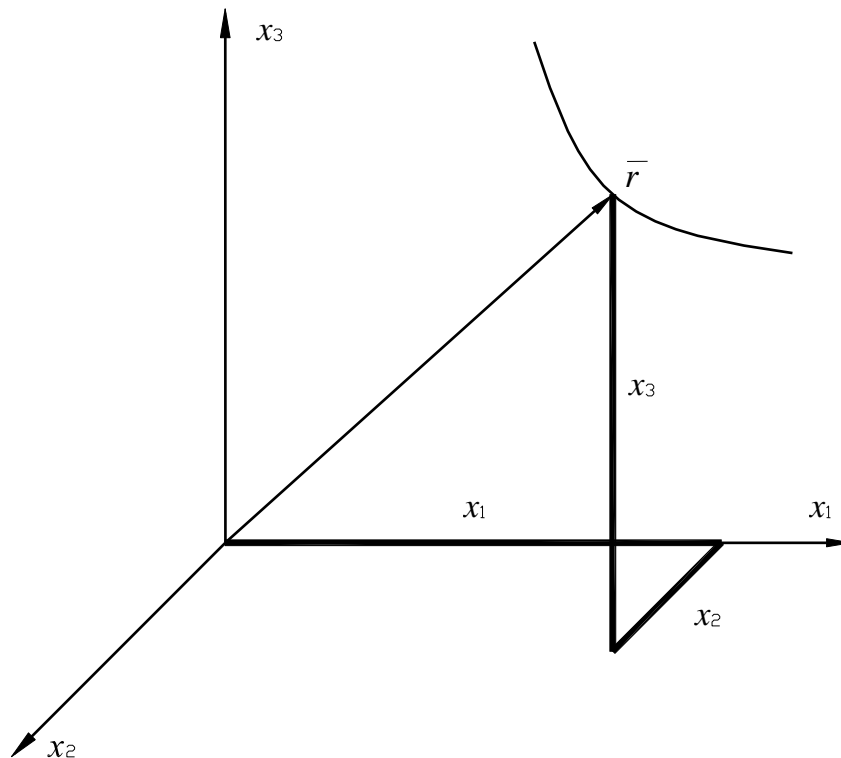


Рис. 13

Умножим это выражение на r^2 . В результате получим

$$\varepsilon_{11}x_1^2 + \varepsilon_{22}x_2^2 + \varepsilon_{33}x_3^2 + \varepsilon_{12}x_1x_2 + \varepsilon_{23}x_2x_3 + \varepsilon_{31}x_3x_1 = \varepsilon_r r^2 = \pm k^2 \quad (4.14)$$

Уравнение (4.14) определяет поверхность деформаций Коши в координатах $0x_1x_2x_3$. Из теории квадратичных форм следует, что выражение (4.14) всегда можно привести к каноническому виду в системе координат $0x'_1x'_2x'_3$:

$$\varepsilon_1 (x'_1)^2 + \varepsilon_2 (x'_2)^2 + \varepsilon_3 (x'_3)^2 = \pm k_1^2, \quad (4.15)$$

где ε_i являются *главными деформациями*, которые инвариантны по отношению к системе координат. Знак при k и k_1 зависит от знака ε_r .

Если $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 > 0$, то (4.15) представляет собой уравнение эллипсоида

$$\frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{x_2'^2}{b^2} + \frac{x_3'^2}{c^2} = 1.$$

Если $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 > 0; \varepsilon_3 < 0$, то (4.15) является уравнением однополостного гиперболоида

$$\frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{x_2'^2}{b^2} - \frac{x_3'^2}{c^2} = 1.$$

Свойство 4

Тензор ε_{ij} имеет три инварианта, (величины, не зависящие от системы координат, в которой он рассматривается. Эти инварианты – коэффициенты кубического уравнения (4.10):

– линейный инвариант

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22} + \varepsilon''_{33} = H_1$$

в системах координат соответственно $0x_1x_2x_3$; $0x'_1x'_2x'_3$; $0x''_1x''_2x''_3$. Геометрический смысл: $H_1 = 0$;

– квадратичный инвариант

$$-\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} + \frac{1}{4}\varepsilon_{12}^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_{23}^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_{31}^2 = -\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3\varepsilon_1 = H_2;$$

– кубический инвариант

$$\text{Det } \varepsilon_{ij} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = H_3.$$

Это свойство можно показать на основе кубического уравнения $(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3) = 0$ и зависимостей из свойств 1, 2.

Свойство 5

Тензор ε_{ij} всегда можно представить в виде суммы двух тензоров:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_c \delta_{ij} + e_{ij},$$

где

$$\varepsilon_c \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_c & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_c & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_c \end{pmatrix} -$$

шаровый тензор деформации. В нем ε_c – средняя деформация (инвариантная величина)

$$\varepsilon_c = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{H_1}{3} = \frac{\theta}{3}.$$

Тензор e_{ij} имеет вид

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & \frac{1}{2}e_{12} & \frac{1}{2}e_{13} \\ \frac{1}{2}e_{21} & e_{22} & \frac{1}{2}e_{23} \\ \frac{1}{2}e_{31} & \frac{1}{2}e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

где $e_{ii} = \varepsilon_{ii} - \varepsilon_c$, $i=1,2,3$; $e_{ij} = \varepsilon_{ij}$, $i \neq j$ и называется *девиатором деформации*, который характеризует изменение формы тела в области точки, где задан тензор ε_{ij} . Также тензор e_{ij} можно записать в виде $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_c \delta_{ij}$.

Инварианты шарового тензора деформаций и девиатора деформаций:

$$\begin{aligned} H_{1ш} &= \varepsilon_c + \varepsilon_c + \varepsilon_c = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = H_1 = 0; \\ H_{1д} &= e_{11} + e_{22} + e_{33} = \varepsilon_{11} - \varepsilon_c + \varepsilon_{22} - \varepsilon_c + \varepsilon_{33} - \varepsilon_c = H_1 - H_1 = 0; \\ H_{2д} &= -e_{11}e_{22} - e_{11}e_{33} - e_{33}e_{22} + \frac{1}{4}e_{12}^2 + \frac{1}{4}e_{23}^2 + \frac{1}{4}e_{31}^2; \\ H_{3д} &= e_{11}e_{22}e_{33} + \frac{1}{4}e_{12}e_{23}e_{31} - \frac{1}{4}e_{11}e_{23}^2 - \frac{1}{4}e_{22}e_{13}^2 - \frac{1}{4}e_{33}e_{12}^2. \end{aligned}$$

По аналогии с главными деформациями можно ввести главные девиаторные деформации $e_1 \geq e_2 \geq e_3$, которые определяются из уравнения $-e^3 + H_{2д}e + H_{3д} = 0$ ($H_{1д} = 0$). Тогда (4.16) преобразуется к диагональному виду

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}.$$

Используя выражение $e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0$, преобразуем $H_{2д}$ к квадратичной положительно определенной форме

$$H_{2д} = \frac{1}{2} \left[e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + \frac{1}{2} (e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2) \right]. \quad (4.17)$$

В тензорном виде (4.17) можно записать как *свертку* тензора e_{ij} с самим собой:

$$H_{2д} = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij}$$

Положительная величина $\varepsilon_m = \sqrt{e_{ij} e_{ij} / 2}$ называется *модулем тензора деформации*.

Выразим $H_{2д}$ через ε_{ij} , используя выражения $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_c \delta_{ij}$ и $\varepsilon_c = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} / 3$. В результате получим

$$H_{2д} = \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + \frac{1}{4} (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2) \right].$$

Положительная величина

$$\varepsilon_{\text{и}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)} \quad (4.18)$$

называется *интенсивностью деформаций*. Величины $\varepsilon_{\text{и}}$ и $\varepsilon_{\text{м}}$ инварианты и связаны соотношением

$$\varepsilon_{\text{и}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{\text{м}}.$$

Определим $\varepsilon_{\text{и}}$ для линейного растяжения. Простое растяжение характеризуется тензором

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon; \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon; \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0.$$

Подставим эти величины в (4.18). В результате получим

$$\varepsilon_{\text{и}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{\text{м}}.$$

при $\nu = 0,5$ имеем $\varepsilon_{\text{и}} = \varepsilon$.

В механике твердого тела широко используется понятие вектора деформации в девятимерном пространстве:

$$\mathbf{e}_{\varepsilon} \left(e_{11}; e_{22}; e_{33}; \frac{1}{2}e_{12}; \frac{1}{2}e_{21}; \frac{1}{2}e_{23}; \frac{1}{2}e_{32}; \frac{1}{2}e_{31}; \frac{1}{2}e_{13} \right).$$

Тензор второго ранга, который определяет направляющие косинусы вектора \mathbf{e}_{ε} , называется *направляющим тензором* вектора деформации:

$$\left(e_{ij} \right)^{\text{H}} = \frac{e_{ij}}{\varepsilon_{\text{м}}}.$$

Модуль вектора деформации $|\bar{\mathbf{e}}_{\varepsilon}| = \varepsilon_{\text{м}}$.

Свойство 6

Тензор деформаций ε_{ij} определяет две инвариантные величины деформаций $\varepsilon_{\text{с}}$ и $\gamma_{\text{окт}}$ на октаэдрических площадках в главных осях деформации.

Пусть дано: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (рис. 14) и оси главных деформаций x'_1, x'_2, x'_3 . В этих осях задано направление $d\mathbf{r}$ с направляющими косинусами:

$$\varepsilon_1 = \frac{dU_1}{dr_1}; \varepsilon_2 = \frac{dU_2}{dr_2}; \varepsilon_3 = \frac{dU_3}{dr_3}.$$

Определим $\varepsilon_{\nu} = dU_{\nu} / dr$; $\gamma_{\tau} = dU_{\tau} / dr$. Из рис. 14 следует, что

$$|d\mathbf{U}|^2 = dU_1^2 + dU_2^2 + dU_3^2; \quad dU_{\nu} = dU_1 n_1 + dU_2 n_2 + dU_3 n_3, \quad (4.19)$$

тогда $dU_{\tau}^2 = |d\mathbf{U}|^2 - dU_{\nu}^2$, причем $\varepsilon_1 = \frac{dU_1}{dr_1}$, $\varepsilon_2 = \frac{dU_2}{dr_2}$, $\varepsilon_3 = \frac{dU_3}{dr_3}$.

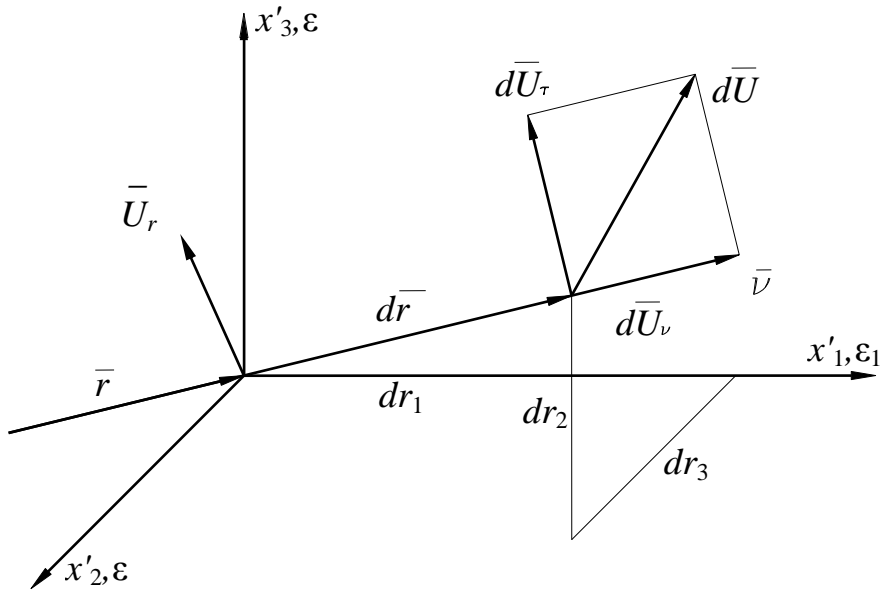


Рис. 14

Отсюда: $dU_1 = \varepsilon_1 dr_1$; $dU_2 = \varepsilon_2 dr_2$; $dU_3 = \varepsilon_3 dr_3$. Учитывая равенства $dr_1 = n_1 dr$; $dr_2 = n_2 dr$; $dr_3 = n_3 dr$, получим

$$dU_1 = \varepsilon_1 n_1 dr; dU_2 = \varepsilon_2 n_2 dr; dU_3 = \varepsilon_3 n_3 dr. \quad (4.20)$$

Подставим (4.20) в (4.19):

$$|d\mathbf{U}|^2 = dr^2 (\varepsilon_1^2 n_1^2 + \varepsilon_2^2 n_2^2 + \varepsilon_3^2 n_3^2); \quad dU_v = dr (\varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2).$$

Следовательно, dU_τ будет определяться выражением

$$dU_\tau = dr \sqrt{(\varepsilon_1^2 n_1^2 + \varepsilon_2^2 n_2^2 + \varepsilon_3^2 n_3^2) - (\varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2)^2}.$$

Деформации ε_v и γ_τ в соответствии с их определениями:

$$\gamma_\tau = \sqrt{(\varepsilon_1^2 n_1^2 + \varepsilon_2^2 n_2^2 + \varepsilon_3^2 n_3^2) - (\varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2)^2}; \quad (4.21)$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2.$$

Первое выражение определяет угловую, а второе – линейную деформацию в главных осях для произвольного направления \bar{v} .

Пусть abc – октаэдрическая площадка: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ (рис. 15); для такой площадки $n_1 = n_2 = n_3$. Из $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ получаем $n_i^2 = 1/3$. Тогда для октаэдрической площадки

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \varepsilon_c = \frac{H_1}{3};$$

$$\gamma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Эти величины являются инвариантами тензора ε_{ij} .

Интенсивность деформации в главных осях

$$\varepsilon_{и} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2},$$

Следовательно, $\gamma_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon_{и}$.

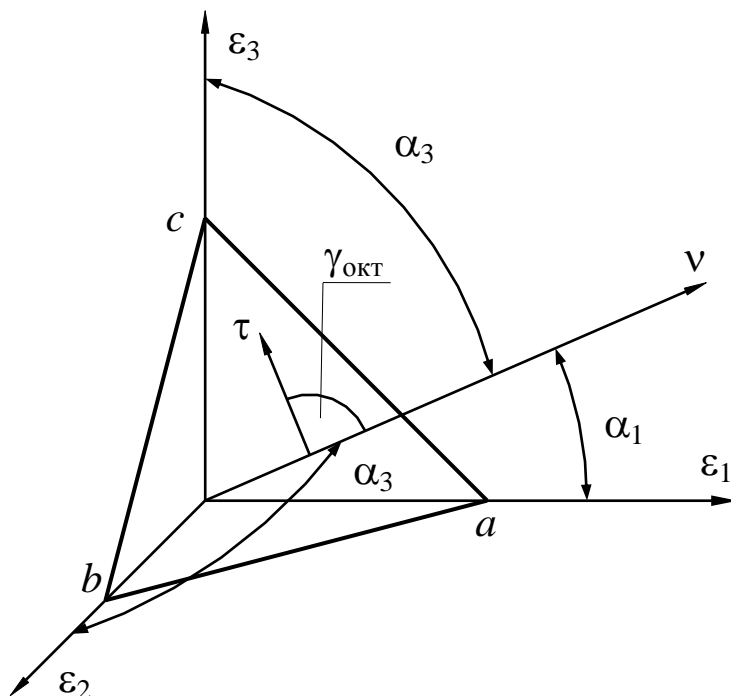


Рис. 15

Свойство 7

Тензор деформаций ε_{ij} определяет экстремальные угловые деформации $\gamma_{\tau}^{\text{extr}}$ в главных осях и площадки, между которыми они действуют.

Пусть заданы главные линейные деформации ε_i ($i=1,2,3$) и нужно найти $\gamma_{\tau}^{\text{extr}}$ (рис. 16).

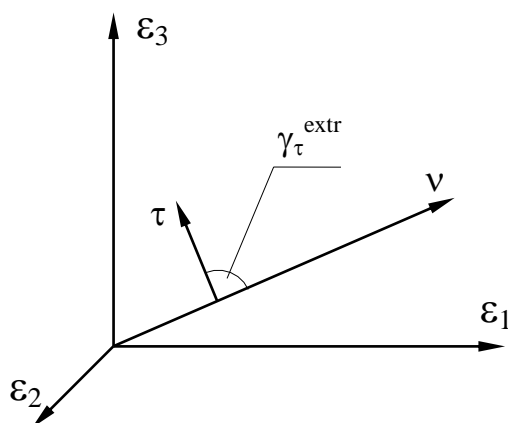


Рис. 16

Согласно выражению (4.21), $\gamma_\tau = \gamma_\tau(n_1, n_2, n_3)$. Определим направляющие косинусы вектора \bar{v} (n_1, n_2, n_3), для которых $\gamma_\tau = \gamma_\tau^{extr}$. Условия экстремума γ_τ запишутся:

$$\frac{\partial}{\partial n_1}(\gamma_\tau^2) = 0; \frac{\partial}{\partial n_2}(\gamma_\tau^2) = 0; \frac{\partial}{\partial n_3}(\gamma_\tau^2) = 0 \quad (4.22)$$

где $\gamma_\tau^2 = (\varepsilon_1^2 n_1^2 + \varepsilon_2^2 n_2^2 + \varepsilon_3^2 n_3^2) - (\varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2)^2$.

С помощью тождества $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ три уравнения заменим двумя:

$$\frac{\partial}{\partial n_1}(\gamma_\tau^2) = 0; \frac{\partial}{\partial n_2}(\gamma_\tau^2) = 0; n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2, \quad (4.23)$$

где

$$\gamma_\tau^2 = (\varepsilon_1^2 n_1^2 + \varepsilon_2^2 n_2^2 + \varepsilon_3^2 (1 - n_1^2 - n_2^2)) - (\varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 (1 - n_1^2 - n_2^2))^2 \quad (4.24)$$

Уравнения (4.23) приводятся к системе

$$\left. \begin{aligned} 2n_1 \left(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2 - 2(\varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 (1 - n_1^2 - n_2^2))(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right) &= 0 \\ 2n_2 \left(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 - 2(\varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 (1 - n_1^2 - n_2^2))(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \right) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.25)$$

которая имеет три решения.

1) $n_1 = n_2 = 0$; $\gamma_\tau = 0$; направление совпадает с $0\varepsilon_3$.

2) $n_1 = 0, n_2 \neq 0$. Отсюда $\varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 - 2(\varepsilon_2 n_2^2 - \varepsilon_3 n_2^2 + \varepsilon_3)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = 0$

или $(\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - 2n_2^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3))(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = 0$.

При $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \neq 0$: $(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) - 2n_2^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = 0$, тогда $n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Из тождества

$n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ следует $n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Таким образом, $\gamma_\tau = \gamma_\tau^{extr}$ при $\bar{v} \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ (рис. 17, а). При подстановке значений \bar{v} в (4.24) получим

$$\gamma_\tau^{extr} = \gamma_{23}^{extr} = \pm \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2}.$$

3) $n_2 = 0, n_1 \neq 0$. Для этого случая из системы (4.25) и выражения (4.24) по-

лучим $\bar{v} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, $\gamma_\tau^{extr} = \gamma_{13}^{extr} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}$ (рис. 17, б).

Третий экстремальный сдвиг получим из решения системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial n_1}(\gamma_\tau^2) = 0; \frac{\partial}{\partial n_3}(\gamma_\tau^2) = 0, n_2^2 = 1 - n_1^2 - n_3^2.$$

Аналогично первому сдвигу, получим (рис. 17, в)

$$\bar{v}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \gamma_\tau^{\text{extr}} = \gamma_{12}^{\text{extr}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$$

Таким образом, экстремальные чистые сдвиги

$$\gamma_\tau^{\text{extr}} = \gamma_{ij}^{\text{extr}} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{2} \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3),$$

а общие экстремальные чистые сдвиги

$$\varepsilon_{\tau ij}^{\text{extr}} = \varepsilon_i - \varepsilon_j \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3).$$

На площадке с экстремальными сдвигами, кроме $\gamma_\tau^{\text{extr}}$, действуют также линейные деформации растяжения-сжатия, которые можно определить с помощью зависимости $\varepsilon_v = \varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2$.

Подставляя соответствующие направляющие косинусы, получим

$$\varepsilon_{vij} = \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_j}{2} \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3).$$

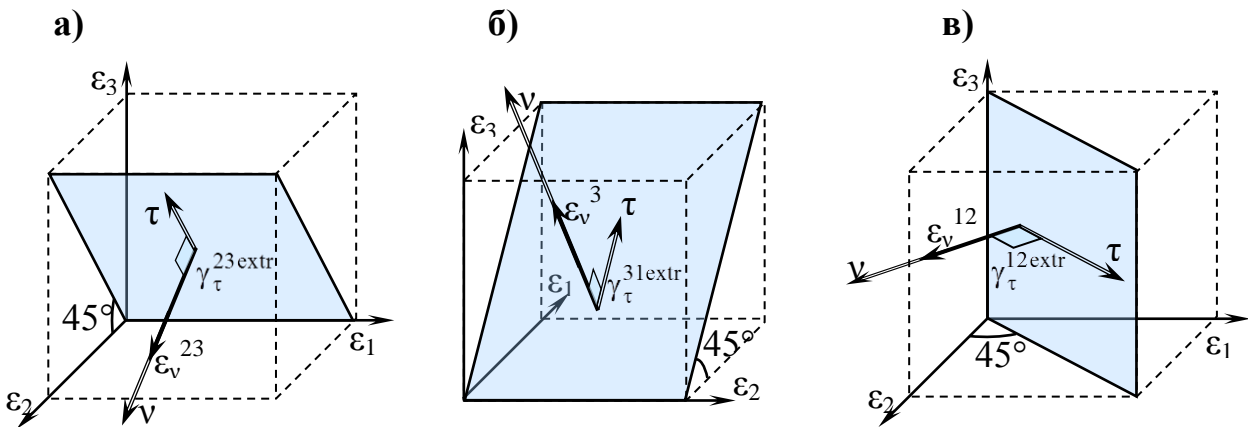


Рис. 17

Свойство 8

Тензор деформаций ε_{ij} в случае сплошной среды удовлетворяет условиям Сен-Венана (условиям сплошности).

Если заданы функции перемещения $U_1(x_1, x_2, x_3)$; $U_2(x_1, x_2, x_3)$; $U_3(x_1, x_2, x_3)$, по ним можно определить ε_{ij} (4.1). Если известны функции деформации $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, то перемещения $U_i = U_i(x_1, x_2, x_3)$ можно найти с помо-

стью интегрирования, но для определения U_i по ε_{ij} необходимо, чтобы функции ε_{ij} удовлетворяли конкретным условиям.

Выясним эти условия. Запишем зависимости для ε_{11} , ε_{22} :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2}.$$

Возьмем производные $\partial^2 \varepsilon_{11} / \partial x_2^2$ и $\partial^2 \varepsilon_{22} / \partial x_1^2$ и сложим их:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 U_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 U_2}{\partial x_2 \partial x_1^2}.$$

В результате, учитывая зависимость $\partial U_1 / \partial x_2 + \partial U_2 / \partial x_1 = \varepsilon_{12}$, получим соотношение

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Аналогично можно найти

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}.$$

Эти три соотношения связывают ε_{ii} и ε_{ij} в одной плоскости $Ox_i x_j$ ($i \neq j = 1, 2, 3$) и могут быть записаны в виде одного

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3). \quad (4.26)$$

От трех деформаций сдвига ε_{12} , ε_{23} , ε_{31} (4.1) возьмем производные:

$$\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_3}; \quad \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2 \partial x_1}; \quad \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3 \partial x_2}.$$

Первые два полученных соотношения сложим, а третье вычтем:

$$\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} = 2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_3}.$$

От этого соотношения возьмем производную по x_2 . В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3}.$$

Аналогично можно построить остальные два дифференциальных соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Эти три выражения связывают ε_{ij} в различных плоскостях x_1, x_2, x_3 . Их можно записать в виде одного соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ji}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} \quad (i \neq j \neq k; i, j, k = 1, 2, 3). \quad (4.27)$$

Шесть уравнений связи (4.26) и (4.27) называются *уравнениями Сен-Венана*, или *условиями сплошности* твердого тела. Их геометрический смысл состоит в том, что если задать произвольный тензор деформаций, не учитывая условия Сен-Венана, то в каждой точке твердого тела получим деформированные элементарные параллелепипеды, которые уже не будут образовывать сплошное тело, т.е. между плоскостями соседних параллелепипедов образуются пустоты. Физический смысл (4.26) и (4.27) состоит в том, что при выполнении условий Сен-Венана в теле накапливается минимальная потенциальная энергия.

4.2. Определение перемещений по заданному тензору деформаций Коши

Пусть задан тензор Коши $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$. Требуется определить $U_i = U_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$.

Если бы нам был задан тензор дисторсии, то легко было бы найти проекции перемещения:

$$U_i = U_{0i} + \int_{M_0}^M \frac{\partial U_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_i}{\partial x_3} dx_3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

где подынтегральное выражение является полным дифференциалом dU_i . U_{0i} – проекции перемещения в точке M_0 твердого тела (рис. 18).

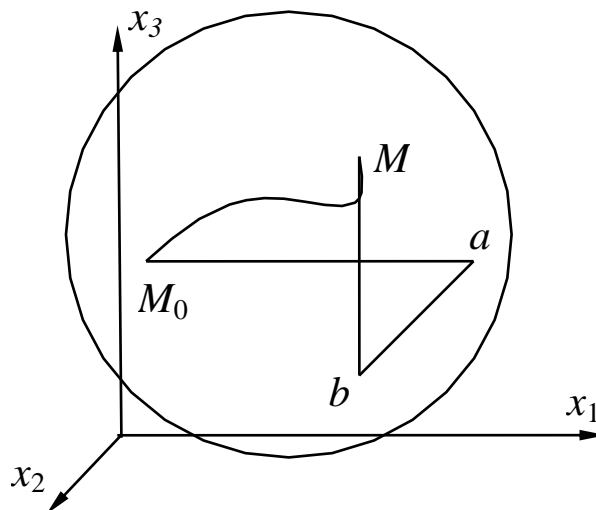


Рис. 18

Однако нам известны только:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}(x_1, x_2, x_3); \quad \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22}(x_1, x_2, x_3); \quad \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \varepsilon_{33}(x_1, x_2, x_3).$$

Рассмотрим, например, алгоритм определения U_1 :

$$U_1 = U_{0i} + \int_{M_0}^M \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} dx_3 \quad (i=1,2,3). \quad (4.28)$$

Здесь известна лишь первая производная. Будем искать остальные неизвестные функции. Производные $\partial U_1/\partial x_2$ и $\partial U_1/\partial x_3$ определяются аналогично тому, как вычисляются (4.28). Так, производная $\partial U_1/\partial x_2$ определяется соотношением

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \Big|_{M_0} + \int_{M_0}^M \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) dx_3. \quad (4.29)$$

Обозначим:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) = a; \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) = b; \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) = c.$$

Выразим функции a, b, c через производные от ε_{ij} . Так, имеем

$$a = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2}. \quad (4.30)$$

Определим $b = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)$. Для этого возьмем производную $\partial/\partial x_2$ от

выражения Коши ε_{12} :

$$\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} = b + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1}.$$

Тогда получим

$$b = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} \quad (4.31)$$

Определим $c = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)$. Возьмем производную от выражения

Коши ε_{12} по $\partial/\partial x_3$:

$$\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) = c + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right).$$

Отсюда

$$c = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \quad (4.32)$$

Возьмем производную от выражения Коши ε_{23} по $\partial/\partial x_1$

$$\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right).$$

Отсюда получим

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right).$$

Подставим это выражение в (4.32), в результате функция c запишется:

$$c = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right). \quad (4.33)$$

Возьмем производную от выражения Коши ε_{13} по $\partial/\partial x_2$

$$\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right).$$

В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - c.$$

Эту производную подставим в (4.33) и найдем

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right).$$

Покажем, что подынтегральное выражение (4.33) является полным дифференциалом. Для этого должны выполняться условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial a}{\partial x_2} = \frac{\partial b}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial b}{\partial x_3} = \frac{\partial c}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial c}{\partial x_1} = \frac{\partial a}{\partial x_3}. \quad (4.34)$$

Первое равенство имеет вид условия Сен-Венана, которое соблюдается для сплошной среды,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Второе условие является также одним из соотношений Сен-Венана:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}.$$

Легко проверить, что и третье условие (4.34) является соотношением Сен-Венана.

Следовательно, подынтегральное выражение (4.29) является полным дифференциалом, и величина интеграла не зависит от пути интегрирования.

Выводы:

- по заданному тензору Коши всегда можно определить вектор перемещения, если этот тензор удовлетворяет условиям Сен-Венана;
- условия Сен-Венана являются необходимыми и достаточными для интегрирования шести заданных функций тензора Коши в случае односвязных областей;
- проекции перемещения не зависят от пути интегрирования для односвязной области, они определяются с точностью до U_{0i} , которые определяют собой перемещение тела как абсолютно твердого.

4.3. Дополнительные условия сплошности (однозначности перемещений) для многосвязных областей

Область интегрирования G называется *односвязной*, если любой замкнутый контур, проведенный внутри области G , можно непрерывным образом стянуть в точку, не покидая этой области (рис. 19, а).

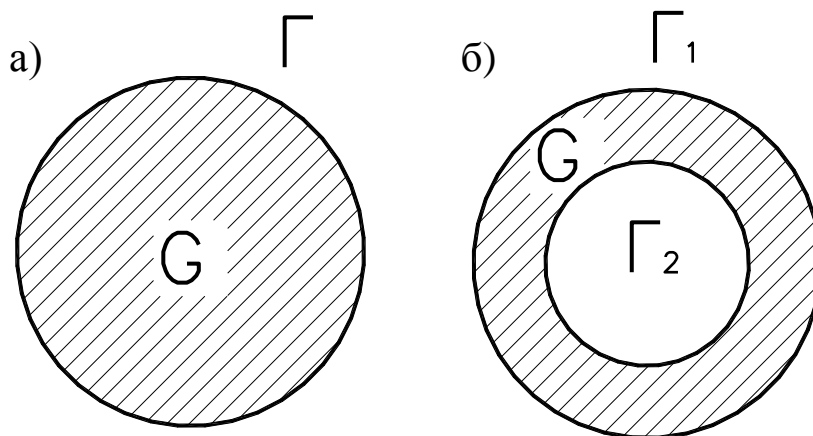


Рис. 19

Связность определяется числом внутренних и внешних границ Γ_i (рис. 19, б). Для многосвязной области G условия Сен-Венана являются необходимыми, но недостаточными для сплошности (однозначности перемещений) твердого тела. Для двухсвязной области (рис. 20) проекции перемещения $U_i(M)$ находятся по выражениям

$$U_i(M) = U_{0i} + \int_{M_0}^M \frac{\partial U_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_i}{\partial x_3} dx_3 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.35)$$

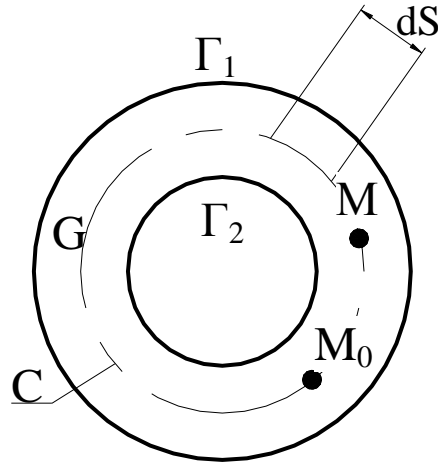


Рис. 20

В выражении (4.35) возьмем интеграл по замкнутому контуру C (точка M совпадает с M_0). В случае сплошности области G должно быть $U_i=U_{i0}$, а следовательно, интегралы по замкнутому контуру C должны быть равны нулю:

$$\oint_C \frac{\partial U_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_i}{\partial x_3} dx_3 = 0 \quad (i=1,2,3).$$

Это дополнительное условие можно записать в виде

$$\oint_C \frac{\partial U_i}{\partial S} dS = 0 \quad (i=1,2,3).$$

В случае n -связной области G дополнительные условия сплошности определяются выражениями

$$\oint_{C_j} \frac{\partial U_i}{\partial S} dS = 0 \quad (i=1,2,3; j=1,2,\dots,n-1).$$

Число таких дополнительных уравнений будет равно $3(n-1)$.

4.4. Круговая диаграмма деформаций Мора

Деформированное состояние отрезка MN (рис. 21) в окрестности точки M , имеющего направляющие косинусы n_i в главных осях деформаций, определяется зависимостями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2, \\ \gamma_\tau^2 &= \varepsilon_1^2 n_1^2 + \varepsilon_2^2 n_2^2 + \varepsilon_3^2 n_3^2 - \varepsilon_v^2. \end{aligned}$$

Деформированное состояние этого отрезка можно изобразить в виде точки на плоскости $\varepsilon_v, \gamma_\tau$ (рис. 22). Множество всех точек деформаций $(\varepsilon_v, \gamma_\tau)$ образуют диаграмму деформаций Мора.

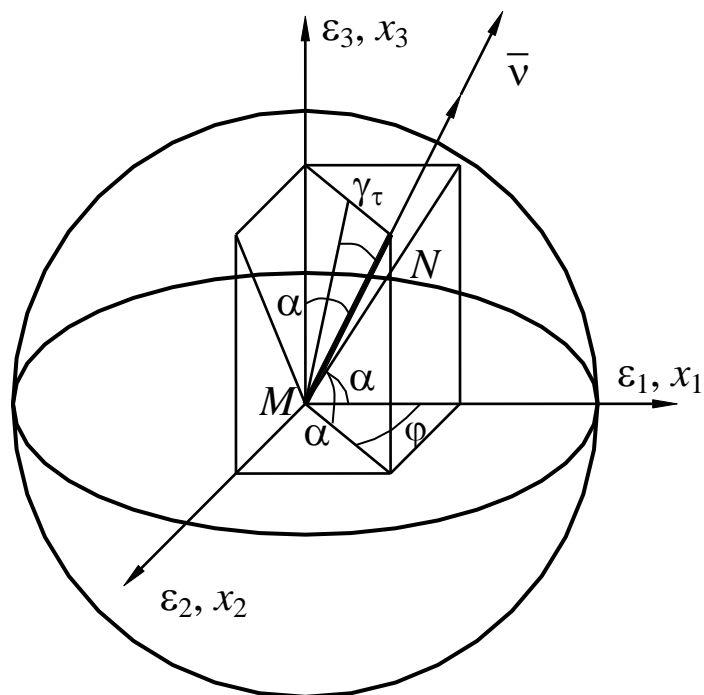


Рис. 21

Деформированное состояние этого отрезка можно изобразить в виде точки на плоскости $\varepsilon_v, \gamma_\tau$ (рис. 22). Множество всех точек деформаций $(\varepsilon_v, \gamma_\tau)$ образуют диаграмму деформаций Мора.

К приведенным зависимостям добавим условие $n_i n_i = 1$. В результате получим систему трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^2 n_1^2 + \varepsilon_2^2 n_2^2 + \varepsilon_3^2 n_3^2 &= \varepsilon_v^2 + \gamma_\tau^2 \\ \varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2 &= \varepsilon_v \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

Система линейна относительно n_i^2 и определитель ее является определителем Вандермонда. Решая систему по правилу Крамера, получим

$$\left. \begin{aligned} n_1^2 &= \frac{(\varepsilon_v - \varepsilon_2)(\varepsilon_v - \varepsilon_3) + \gamma_\tau^2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)} \\ n_2^2 &= \frac{(\varepsilon_v - \varepsilon_1)(\varepsilon_v - \varepsilon_3) + \gamma_\tau^2}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)} \\ n_3^2 &= \frac{(\varepsilon_v - \varepsilon_1)(\varepsilon_v - \varepsilon_2) + \gamma_\tau^2}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)} \end{aligned} \right\}.$$

Главным направлениям деформаций на плоскости $\varepsilon_v, \gamma_\tau$ соответствуют точки деформации $A_1(\varepsilon_1, 0), A_2(\varepsilon_2, 0), A_3(\varepsilon_3, 0)$, которые называются *главными точками диаграммы деформаций Мора*.

Рассмотрим точки деформаций в верхней полуплоскости, что соответствует $\gamma_\tau > 0$. Найдем границы области, в которой лежат все точки на диаграмме Мора. Для этого перепишем первое уравнение для n_1^2 в виде

$$\varepsilon_v^2 + \gamma_\tau^2 - \varepsilon_v(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varepsilon_2\varepsilon_3 = n_1^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$$

или

$$\gamma_\tau^2 + \left[\varepsilon_v - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right]^2 = \frac{1}{4}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + n_1^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3),$$

где $0 \leq n_1^2 \leq 1$.

Таким образом, получим выражение окружности в осях $(\varepsilon_v, \gamma_\tau)$ с центром $C_{23}((\varepsilon_2 + \varepsilon_3)/2; 0)$ и радиусом

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + n_1^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}.$$

При $n_1=0$ $\rho=(\varepsilon_2-\varepsilon_3)/2$ и $n_1=1$ $\rho=[\varepsilon_1-(\varepsilon_2+\varepsilon_3)/2]=C_{23}A_1$ (отрезок MN на оси ε_1 (рис. 21)). Данная окружность с $\rho=(\varepsilon_2-\varepsilon_3)/2$, центром в точке C_{23} и точка A_1 являются частями границы диаграммы Мора.

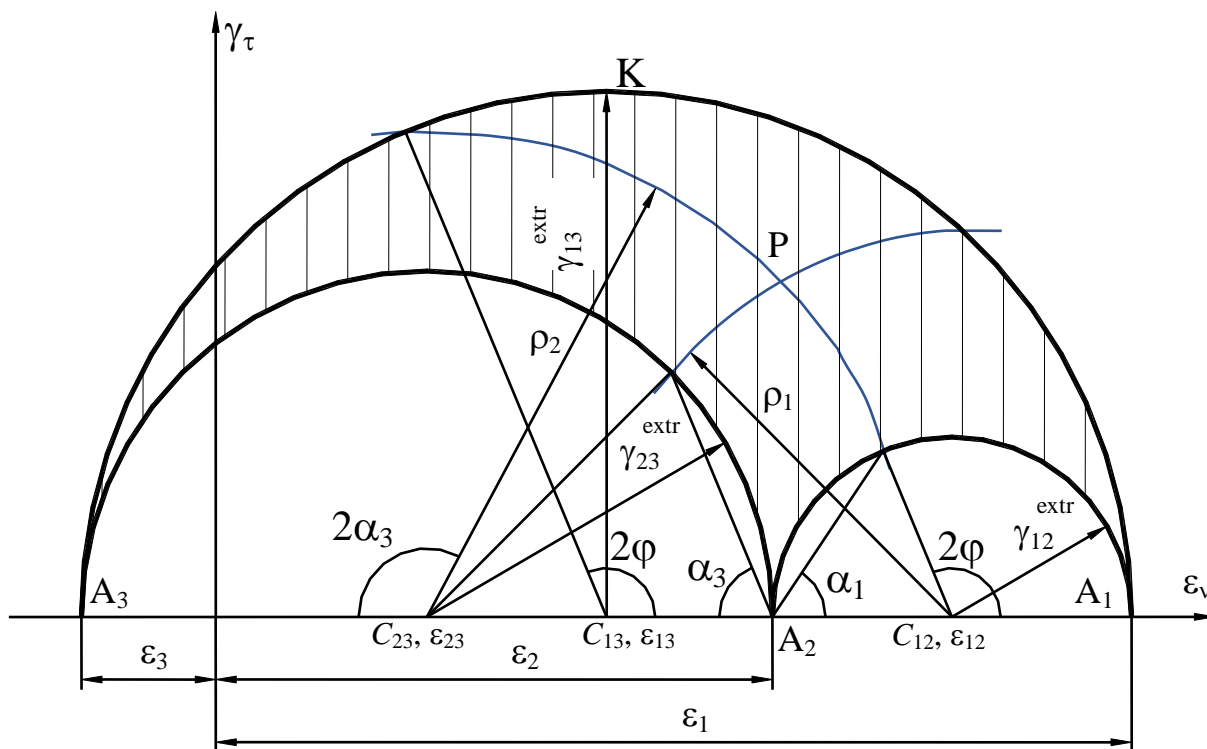


Рис. 22

Третье выражение для n_3^2 запишется в виде окружности

$$\gamma_\tau^2 + \left[\varepsilon_\nu - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right]^2 = \frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + n_3^2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)$$

с центром $C_{12}((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2; 0)$ и радиусом

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + n_3^2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)}.$$

Таким образом, здесь окружность $\rho = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2$ с центром в точке C_{12} и точка A_3 являются составными частями границы диаграммы.

Проделав те же операции со вторым выражением для n_2^2 , в итоге найдем, что граница области, в которой находятся все точки деформаций, состоит из трех полуокружностей с центрами C_{12} , C_{23} и C_{13} , а сама область заштрихована на рис. 22.

Чтобы найти положение точки $(\varepsilon_\nu, \gamma_\tau)$ для любого отрезка MN (n_1, n_3), достаточно найти положение центров C_{12} и C_{23} и соответствующие радиусы ρ_1 и ρ_2 . Координаты пересечения окружностей ρ_1 и ρ_2 , а именно, точка P определяет ε_ν и γ_τ отрезка MN . Максимальная величина сдвига γ_{13}^{ext} соответствует точке $K((\varepsilon_1 + \varepsilon_3)/2; (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2)$.

Для точки M при $|MN| = dr$ имеем проекции: $dr_1 = dr \sin \alpha_3 \cos \varphi$, $dr_2 = dr \sin \alpha_3 \sin \varphi$, $dr_3 = dr \cos \alpha_3$, т.е. $n_1 = \sin \alpha_3 \cos \varphi$, $n_2 = \sin \alpha_3 \sin \varphi$, $n_3 = \cos \alpha_3$.

5. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

При построении теории напряжений будем использовать следующие гипотезы:

- для любой частицы сплошной среды применимы законы механики Ньютона;
- воздействие одной части деформированного тела на другую осуществляется непрерывно по всей области контакта;
- действие всех сил, приложенных к элементарной площадке ΔF , эквивалентно действию главного вектора и главного момента этих сил, приложенных в центре тяжести площадки ΔF ;
- действием главного момента сил, приложенного в центре тяжести площадки ΔF , пренебрегаем;
- полагаем, что в естественном состоянии тело не имеет внутренних напряжений (до приложения внешних сил).

5.1. Внешние силы, действующие на твердое тело

Силы, действующие на деформируемое твердое тело, будем рассматривать в эйлеровых координатах.

1. *Объемные (массовые) силы* – силы, пропорциональные объему (массе).

Мерой объемных сил является единичная объемная сила

$$\mathbf{P}_0 = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta V}, \quad (5.1)$$

где $\Delta \mathbf{P}$ – вектор силы; приложенной к объему ΔV (рис. 23).

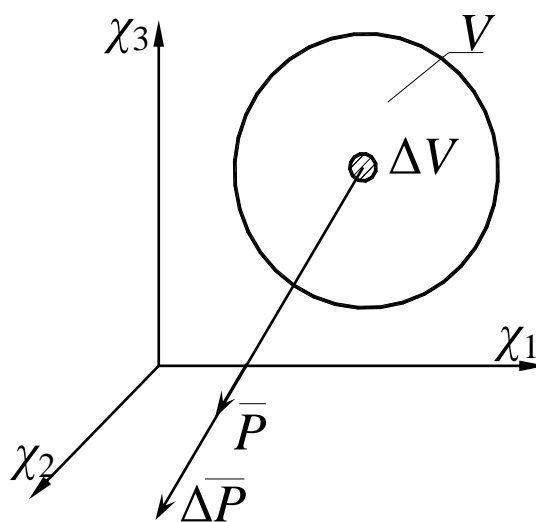


Рис. 23

$\mathbf{P}_0(P_{01}, P_{02}, P_{03})$ определяются проекциями P_{0i} ($i = 1, 2, 3$), которые являются функциями $P_{0i} = P_{0i}(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ эйлеровых координат χ_i ($i = 1, 2, 3$).

2. *Поверхностные силы* – силы, приложенные к поверхности.

Мерой поверхностных сил является интенсивность поверхностных сил (вектор силы, приходящийся на единицу площади):

$$\mathbf{q}_v = \lim_{\Delta F_v \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{Q}}{\Delta F_v} \quad (5.2)$$

где $\Delta \mathbf{Q}$ – вектор поверхностной силы, действующей на площадке ΔF_v ; \mathbf{v} – направляющий вектор, перпендикулярный ΔF_v . Вектор $\mathbf{q}_v(q_{v\chi_1}, q_{v\chi_2}, q_{v\chi_3})$ определяется проекциями $q_{v\chi_i}$ ($i = 1, 2, 3$), которые зависят от ориентации площадки и координат точки M (рис. 24), $q_{v\chi_i} = f(M, \mathbf{v})$.

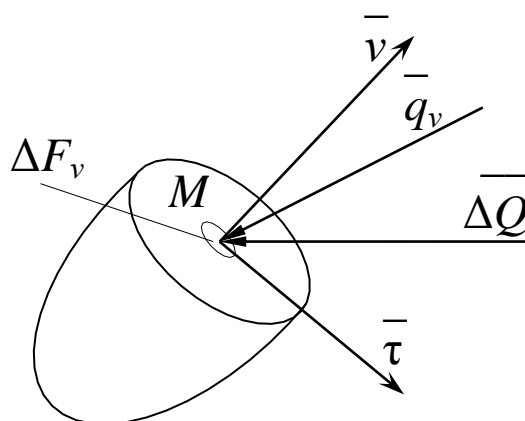


Рис. 24

Квадрат модуля вектора интенсивности поверхностных сил

$$|\mathbf{q}_v|^2 = q_{v\chi_1}^2 + q_{v\chi_2}^2 + q_{v\chi_3}^2$$

или в тензорной форме $|\mathbf{q}_v|^2 = q_{v\chi_i} q_{v\chi_j} \delta_{ij}$.

Вектор интенсивности поверхностных сил можно разложить по осям направляющих векторов \mathbf{v} и $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{v}$:

$$q_{vv} = |\mathbf{q}_v| \cos(\mathbf{v} \wedge \mathbf{q}_v); \quad q_{v\tau} = |\mathbf{q}_v| \cos(\boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{q}_v),$$

причем $|\mathbf{q}_v|^2 = q_{v\tau}^2 + q_{vv}^2$.

5.2. Тензор напряжений Эйлера

Рассмотрим деформированное тело в равновесии под действием объемных и поверхностных сил в момент времени t . Под действием этих сил внутри тела возникают реактивные силы, сопротивляющиеся деформированию тела. Для определения этих реактивных сил воспользуемся

методом сечений (разрезаем мысленно тело, отбрасываем одну часть (рис. 25), заменяем ее действие на другую поверхностными силами $\Delta \mathbf{P}_v$, уравниваем другую часть тела).

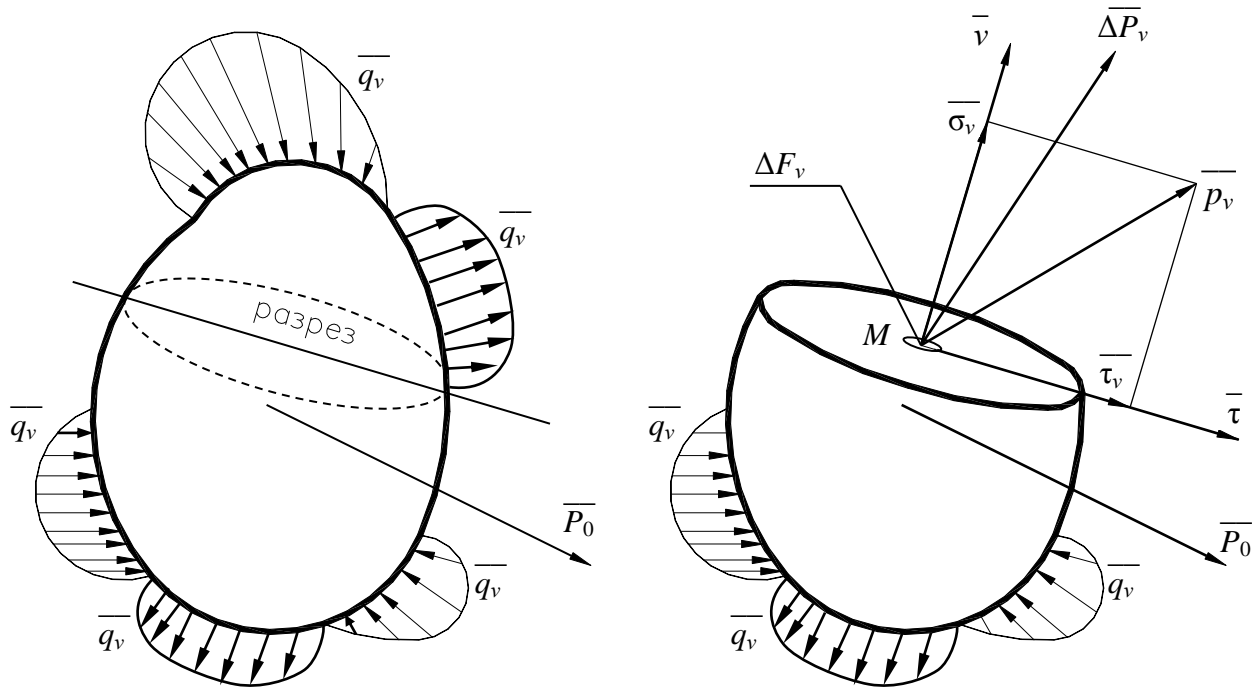


Рис. 25

На рис. 25 показан вектор полных напряжений $\mathbf{p}_v = \lim_{\Delta F_v \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}_v}{\Delta F_v}$, действующий в окрестности точки M на площадке ΔF_v с направляющим вектором \mathbf{v} ; проекции вектора полных напряжений $\mathbf{p}_v (p_{v\chi_1}, p_{v\chi_2}, p_{v\chi_3})$ на оси χ_i в общем случае зависят от ориентации площадки ΔF_v (т. е. от \mathbf{v}) и координат точки M :

$$p_{v\chi_i} = f_i(\mathbf{v}, \chi_1, \chi_2, \chi_3) \quad (i=1, 2, 3).$$

Квадрат модуля вектора полных напряжений определяется выражением

$$|\mathbf{p}_v|^2 = (p_{v\chi_1})^2 + (p_{v\chi_2})^2 + (p_{v\chi_3})^2 = p_{v\chi_i} p_{v\chi_j} \delta_{ij}.$$

Он может быть выражен через проекции σ_v и τ_v в осях \mathbf{v} и $\boldsymbol{\tau}$

$$\sigma_v = |\mathbf{p}_v| \cos(\mathbf{v} \wedge \mathbf{p}_v); \quad \tau_v = |\mathbf{p}_v| \cos(\boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{p}_v),$$

причем $|\mathbf{p}_v|^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2$.

Согласно третьему закону Ньютона,

$$\mathbf{p}_{-\mathbf{v}} = -\mathbf{p}_v. \quad (5.3)$$

Возьмем точку M в эйлеровом пространстве и через нее проведем три взаимно перпендикулярных площадки, перпендикулярные осям $O\chi_1$, $O\chi_2$, $O\chi_3$ (рис. 26).

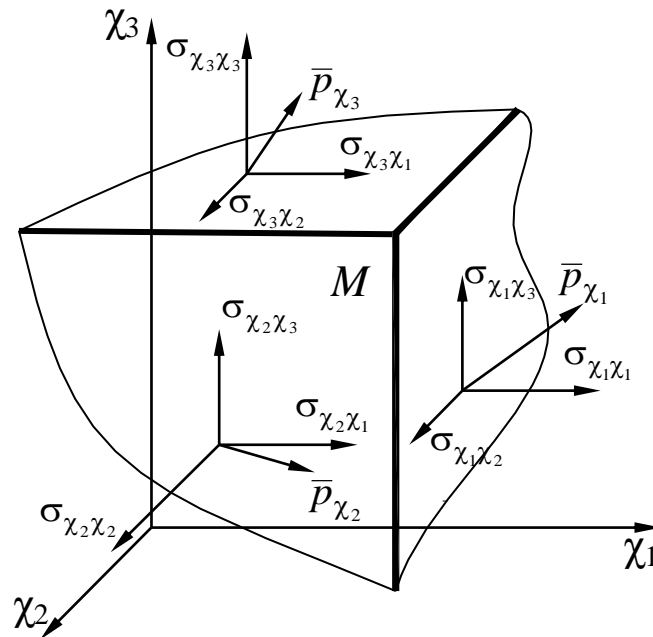


Рис. 26

Разложим вектора полных напряжений \mathbf{p}_{χ_1} , \mathbf{p}_{χ_2} , \mathbf{p}_{χ_3} на три проекции, параллельно осям эйлеровых координат:

$$\mathbf{p}_{\chi_1} (\sigma_{\chi_1\chi_1}, \sigma_{\chi_1\chi_2}, \sigma_{\chi_1\chi_3}); \mathbf{p}_{\chi_2} (\sigma_{\chi_2\chi_1}, \sigma_{\chi_2\chi_2}, \sigma_{\chi_2\chi_3}); \mathbf{p}_{\chi_3} (\sigma_{\chi_3\chi_1}, \sigma_{\chi_3\chi_2}, \sigma_{\chi_3\chi_3}) \quad (5.4)$$

Тензор второго ранга $\sigma_{\chi_i\chi_j}$, определяемый девятью компонентами (5.4), называется *тензором напряжений Эйлера*. Первый индекс (χ_i) обозначает плоскость, в которой действует напряжение, а второй (χ_j) – направление, в котором действует это напряжение.

Проведем через точку M другие три взаимно перпендикулярные площадки (рис. 27), на этих площадках тоже действуют напряжения $\sigma_{\chi_i\chi_j}$. На рис. 26 и рис. 27 показаны положительные направления $\sigma_{\chi_i\chi_j}$, причем напряжения $\sigma_{\chi_i\chi_i}$ называют *нормальными*, а $\sigma_{\chi_i\chi_j}$ ($i \neq j$) – *касательными*.

Таким образом, тензор напряжений Эйлера имеет вид

$$\sigma_{\chi_i\chi_j} = \begin{pmatrix} \sigma_{\chi_1\chi_1} & \sigma_{\chi_1\chi_2} & \sigma_{\chi_1\chi_3} \\ \sigma_{\chi_2\chi_1} & \sigma_{\chi_2\chi_2} & \sigma_{\chi_2\chi_3} \\ \sigma_{\chi_3\chi_1} & \sigma_{\chi_3\chi_2} & \sigma_{\chi_3\chi_3} \end{pmatrix},$$

причем компоненты тензора $\sigma_{\chi_i\chi_j} > 0$, если направление компонента напряжений и направление площадки, в которой он действует, одновременно совпадают с положительным направлением осей координат либо одновременно с отрицательным.

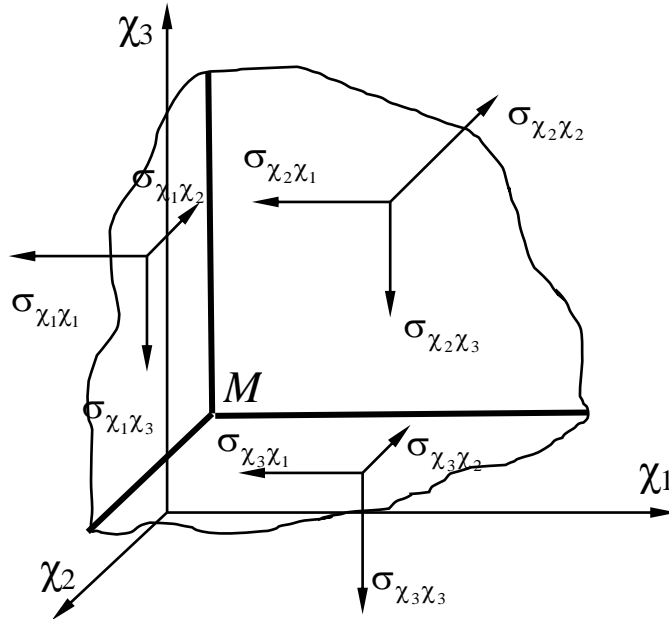


Рис. 27

Компоненты тензора Эйлера, рассматриваемого в эйлеровых координатах, являются функциями χ_i ($i=1,2,3$)

$$\sigma_{\chi_i\chi_j} = \sigma_{\chi_i\chi_j}(\chi_1, \chi_2, \chi_3) \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

При этом тензор Эйлера определяется для деформированного тела.

Другие тензоры напряжений ввел В. Прагер, связывая их с недеформированным состоянием тела (рис. 28).

В результате деформации векторы $\delta\mathbf{r}$ и \mathbf{dr} переходят в векторы $\delta\mathbf{r}^*$ ($\delta\chi_1, \delta\chi_2, \delta\chi_3$) и \mathbf{dr}^* ($d\chi_1, d\chi_2, d\chi_3$). Здесь $|\mathbf{dS}| = |\mathbf{dr} \times \delta\mathbf{r}|$ и $|\mathbf{dS}^*| = |\mathbf{dr}^* \times \delta\mathbf{r}^*|$ – площади соответственно в недеформированном и деформированном состояниях, $\mathbf{dS}(dS_{\chi_1}, dS_{\chi_2}, dS_{\chi_3})$ и $\mathbf{dS}^*(dS_{\chi_1}^*, dS_{\chi_2}^*, dS_{\chi_3}^*)$, \mathbf{Q} – главный вектор сил, действующих на ΔS^* .

Умножим матрицу тензора Эйлера на вектор \mathbf{dS}^* . В результате получим

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\chi_1\chi_1} & \sigma_{\chi_2\chi_1} & \sigma_{\chi_3\chi_1} \\ \sigma_{\chi_1\chi_2} & \sigma_{\chi_2\chi_2} & \sigma_{\chi_3\chi_2} \\ \sigma_{\chi_1\chi_3} & \sigma_{\chi_2\chi_3} & \sigma_{\chi_3\chi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_{\chi_1}^* \\ dS_{\chi_2}^* \\ dS_{\chi_3}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\chi_1\chi_1} dS_{\chi_1}^* + \sigma_{\chi_2\chi_1} dS_{\chi_2}^* + \sigma_{\chi_3\chi_1} dS_{\chi_3}^* \\ \sigma_{\chi_1\chi_2} dS_{\chi_1}^* + \sigma_{\chi_2\chi_2} dS_{\chi_2}^* + \sigma_{\chi_3\chi_2} dS_{\chi_3}^* \\ \sigma_{\chi_1\chi_3} dS_{\chi_1}^* + \sigma_{\chi_2\chi_3} dS_{\chi_2}^* + \sigma_{\chi_3\chi_3} dS_{\chi_3}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{\chi_1} \\ Q_{\chi_2} \\ Q_{\chi_3} \end{pmatrix}.$$

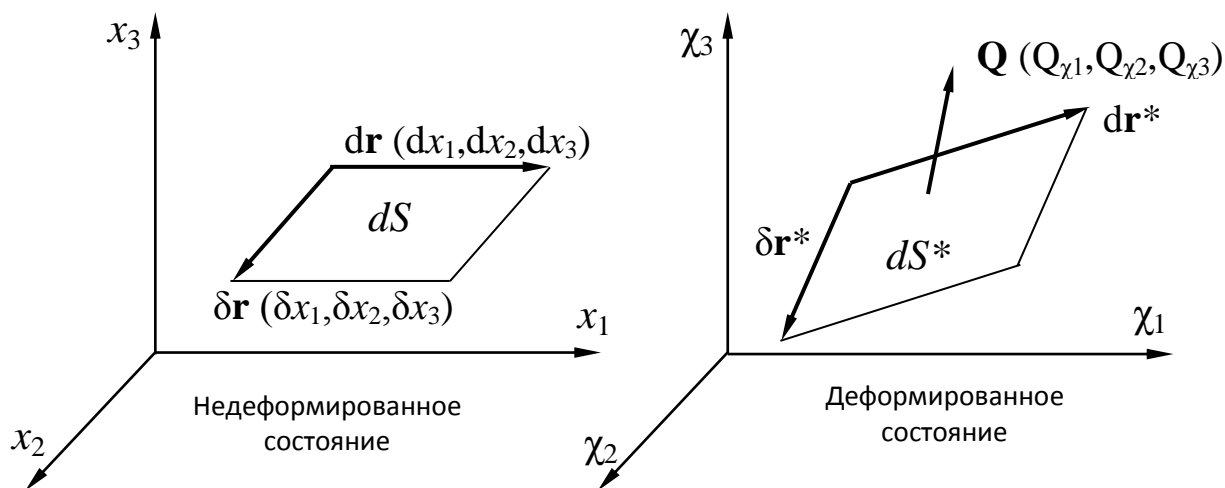


Рис. 28

Несимметричный тензор Лагранжа $\sigma_{x_i x_j}$ для недеформированного твердого тела удовлетворяет условию, из которого его и можно найти, используя зависимости $d\chi_i$ от dx_i и $dS_{\chi_i}^*$ от dS_{x_i} :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x_1 x_1} & \sigma_{x_2 x_1} & \sigma_{x_3 x_1} \\ \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_2 x_2} & \sigma_{x_3 x_2} \\ \sigma_{x_1 x_3} & \sigma_{x_2 x_3} & \sigma_{x_3 x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_{x_1} \\ dS_{x_2} \\ dS_{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{\chi_1} \\ Q_{\chi_2} \\ Q_{\chi_3} \end{pmatrix}.$$

Иной способ введения тензоров напряжений для недеформированного состояния тела предложен В.В. Новожиловым через уравнения равновесия. В частности, он ввел несимметричный тензор Пиола $\sigma_{x_i \chi_j}^*$ и симметричный тензор обобщенных напряжений $\sigma_{x_i x_j}^*$, который делает дифференциальные уравнения равновесия нелинейными.

Дифференциальные уравнения равновесия в напряжениях $\sigma_{x_i x_j}^*$ можно линеаризовать в случае выполнения следующих условий:

- удлинения и сдвиги малы по сравнению с единицей;
- углы поворота имеют порядок малости такой же, как удлинения и сдвиги, или более высокий;
- компоненты тензора напряжений являются величинами одного порядка.

Поскольку в этом случае можно χ_j и x_i соответственно отождествлять, а изменениями формы тела пренебречь, то имеет место полное совпадение результатов как в эйлеровых, так и лагранжевых координатах. Далее рассматриваются только напряжения Эйлера.

5.3. Условия равновесия тетраэдра

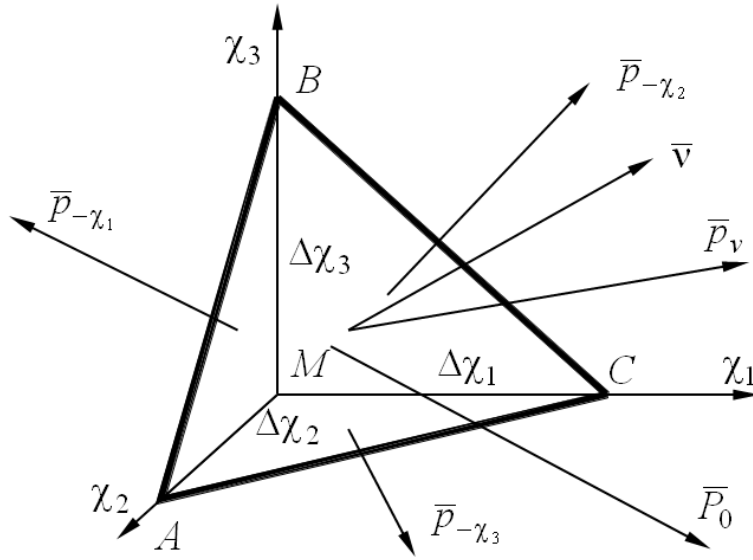


Рис. 29

Пусть задан элементарный тетраэдр, на который действуют объемные и поверхностные силы \mathbf{P}_0 , $\mathbf{p}_{-\chi_i}$, \mathbf{p}_v в объеме ΔV и на площадках (рис. 29); $ABC = \Delta F_v$, $AMB = \Delta F_{\chi_1}$, $BMC = \Delta F_{\chi_2}$, $AMC = \Delta F_{\chi_3}$. Запишем условия равновесия тетраэдра

$$\mathbf{p}_{-\chi_1} \Delta F_{\chi_1} + \mathbf{p}_{-\chi_2} \Delta F_{\chi_2} + \mathbf{p}_{-\chi_3} \Delta F_{\chi_3} + \mathbf{p}_v \Delta F_v + \mathbf{P}_0 \Delta V = 0, \quad (5.5)$$

где $\Delta V = (\Delta \chi_1 \Delta \chi_2 \Delta \chi_3) / 6$, $\Delta \chi_i$ – размеры прямоугольных граней тетраэдра.

Разделим (5.5) на ΔF_v , учитывая соотношение (5.3). В результате получим

$$\mathbf{p}_v = \mathbf{p}_{\chi_1} \frac{\Delta F_{\chi_1}}{\Delta F_v} + \mathbf{p}_{\chi_2} \frac{\Delta F_{\chi_2}}{\Delta F_v} + \mathbf{p}_{\chi_3} \frac{\Delta F_{\chi_3}}{\Delta F_v} - \mathbf{P}_0 \frac{\Delta V}{\Delta F_v}.$$

Учтем, что

$$\cos(\chi_1 \wedge \mathbf{v}) = n_1; \cos(\chi_2 \wedge \mathbf{v}) = n_2; \cos(\chi_3 \wedge \mathbf{v}) = n_3 \text{ и } \frac{\Delta F_{\chi_i}}{\Delta F_v} = n_i, \frac{\Delta V}{\Delta F_v} \xrightarrow{\Delta \chi_i \rightarrow 0} 0.$$

Тогда вместо (5.5) получим условие равновесия элемента твердого тела в области точки M

$$\mathbf{p}_v = \mathbf{p}_{\chi_1} n_1 + \mathbf{p}_{\chi_2} n_2 + \mathbf{p}_{\chi_3} n_3. \quad (5.6)$$

Спроецируем компоненты векторного уравнения на координатные оси:

$$\left. \begin{aligned} p_{v\chi_1} &= \sigma_{\chi_1\chi_1} n_1 + \sigma_{\chi_2\chi_1} n_2 + \sigma_{\chi_3\chi_1} n_3 \\ p_{v\chi_2} &= \sigma_{\chi_1\chi_2} n_1 + \sigma_{\chi_2\chi_2} n_2 + \sigma_{\chi_3\chi_2} n_3 \\ p_{v\chi_3} &= \sigma_{\chi_1\chi_3} n_1 + \sigma_{\chi_2\chi_3} n_2 + \sigma_{\chi_3\chi_3} n_3 \end{aligned} \right\}. \quad (5.7)$$

Система (5.7) определяет условия равновесия тетраэдра в скалярной форме.

5.4. Уравнения равновесия внутренних элементов твёрдого тела

Выделим в деформированном теле, находящимся в состоянии равновесия, элементарный параллелепипед и напишем для него уравнения равновесия. Силы на его гранях приведем к главным векторам, главными моментами пренебрежем. Полагаем, что функции напряжений достаточно гладкие, а объем параллелепипеда элементарный, т.е. квадратами его линейных характеристик можно пренебречь по сравнению с первыми степенями. Тогда картина напряженного состояния соответствует рис. 30.

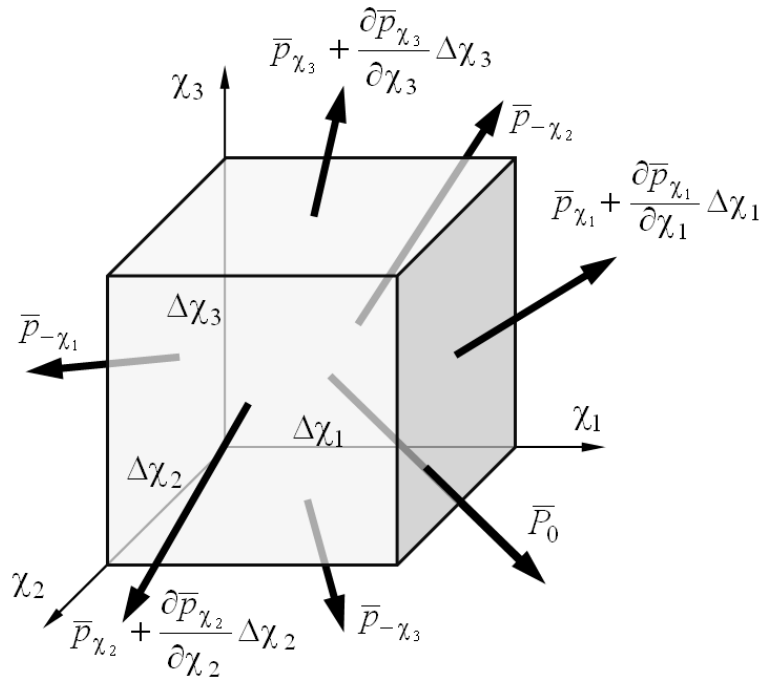


Рис. 30

Приравняем нулю главный вектор сил, действующих на выделенный параллелепипед:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{p}_{-\chi_1} \Delta\chi_2 \Delta\chi_3 + \left(\mathbf{p}_{\chi_1} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\chi_1}}{\partial \chi_1} \Delta\chi_1 \right) \Delta\chi_2 \Delta\chi_3 + \mathbf{p}_{-\chi_2} \Delta\chi_1 \Delta\chi_3 + \\
 & + \left(\mathbf{p}_{\chi_2} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\chi_2}}{\partial \chi_2} \Delta\chi_2 \right) \Delta\chi_1 \Delta\chi_3 + \mathbf{p}_{-\chi_3} \Delta\chi_2 \Delta\chi_1 + \\
 & + \left(\mathbf{p}_{\chi_3} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\chi_3}}{\partial \chi_3} \Delta\chi_3 \right) \Delta\chi_2 \Delta\chi_1 + \mathbf{P}_0 \Delta\chi_1 \Delta\chi_2 \Delta\chi_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Учитывая (5.3), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{\chi_1}}{\partial \chi_1} \Delta\chi_1 \Delta\chi_2 \Delta\chi_3 + \frac{\partial \mathbf{p}_{\chi_2}}{\partial \chi_2} \Delta\chi_2 \Delta\chi_1 \Delta\chi_3 + \frac{\partial \mathbf{p}_{\chi_3}}{\partial \chi_3} \Delta\chi_3 \Delta\chi_2 \Delta\chi_1 + \mathbf{P}_0 \Delta\chi_1 \Delta\chi_2 \Delta\chi_3 = 0.$$

Разделим на $\Delta\chi_1\Delta\chi_2\Delta\chi_3$ и получим

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{\chi_1}}{\partial \chi_1} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\chi_2}}{\partial \chi_2} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\chi_3}}{\partial \chi_3} + \mathbf{P}_0 = 0. \quad (5.9)$$

Это дифференциальное уравнение равновесия элементов внутри тела в векторной форме. Спроектировав на оси координат, получим систему дифференциальных уравнений, выраженных через компоненты тензора Эйлера,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\chi_1\chi_1}}{\partial \chi_1} + \frac{\partial \sigma_{\chi_2\chi_1}}{\partial \chi_2} + \frac{\partial \sigma_{\chi_3\chi_1}}{\partial \chi_3} + P_{0_1} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\chi_1\chi_2}}{\partial \chi_1} + \frac{\partial \sigma_{\chi_2\chi_2}}{\partial \chi_2} + \frac{\partial \sigma_{\chi_3\chi_2}}{\partial \chi_3} + P_{0_2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\chi_1\chi_3}}{\partial \chi_1} + \frac{\partial \sigma_{\chi_2\chi_3}}{\partial \chi_2} + \frac{\partial \sigma_{\chi_3\chi_3}}{\partial \chi_3} + P_{0_3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

В тензорном виде выражения (5.10) записываются

$$\frac{\partial \sigma_{\chi_i\chi_j}}{\partial \chi_i} + P_{0_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

5.5. Уравнения равновесия для поверхностных элементов

По аналогии с выражением (5.6) для поверхностного элемента (рис. 31) получим следующее уравнение равновесия

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{p}_{\chi_1} n_1 + \mathbf{p}_{\chi_2} n_2 + \mathbf{p}_{\chi_3} n_3. \quad (5.11)$$

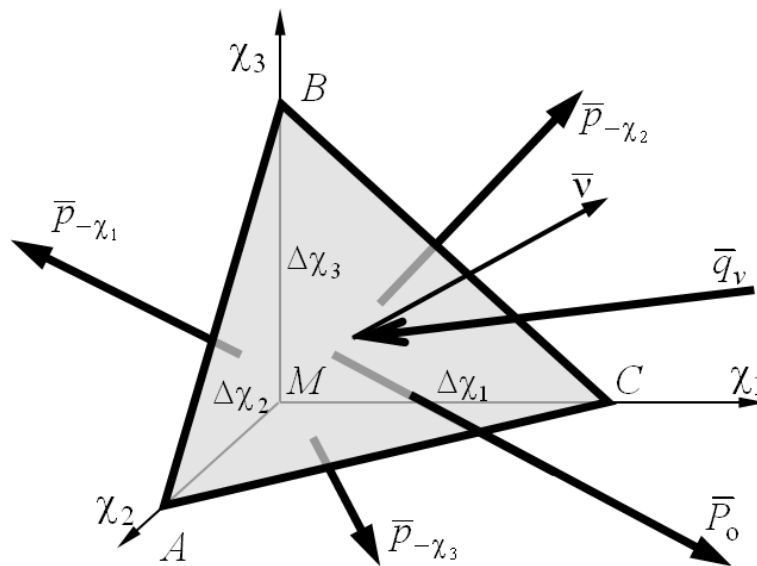


Рис. 31

Спроецируем компоненты векторного уравнения (5.11) на координатные оси:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\chi_1\chi_1} n_1 + \sigma_{\chi_2\chi_1} n_2 + \sigma_{\chi_3\chi_1} n_3 &= q_{v\chi_1} \\ \sigma_{\chi_1\chi_2} n_1 + \sigma_{\chi_2\chi_2} n_2 + \sigma_{\chi_3\chi_2} n_3 &= q_{v\chi_2} \\ \sigma_{\chi_1\chi_3} n_1 + \sigma_{\chi_2\chi_3} n_2 + \sigma_{\chi_3\chi_3} n_3 &= q_{v\chi_3} \end{aligned} \right\}, \quad (5.12)$$

где $q_{vi}=q_{vi}(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ – заданные функции.

В тензорной форме (5.12) имеют вид

$$\sigma_{\chi_i\chi_j} n_i = q_{v\chi_j}, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Выражения (5.12) являются граничными условиями при интегрировании системы дифференциальных уравнений (5.10) для тел конкретной формы.

5.6. Свойства тензора напряжений Эйлера

Упростим запись, приняв $\sigma_{\chi_i\chi_j} = \sigma_{ij}$, ($i, j=1, 2, 3$), и рассмотрим свойства данного тензора.

Свойство 1

Тензор напряжений симметричен: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ($i \neq j$).

Для доказательства свойства симметричности воспользуемся условием равенства нулю моментов сил для элементарного параллелепипеда, находящегося в равновесии. Плечи сил, приложенных к параллелепипеду, берутся от осей координат $0\chi_1\chi_2\chi_3$ (рис. 32), проведенных через его центр.

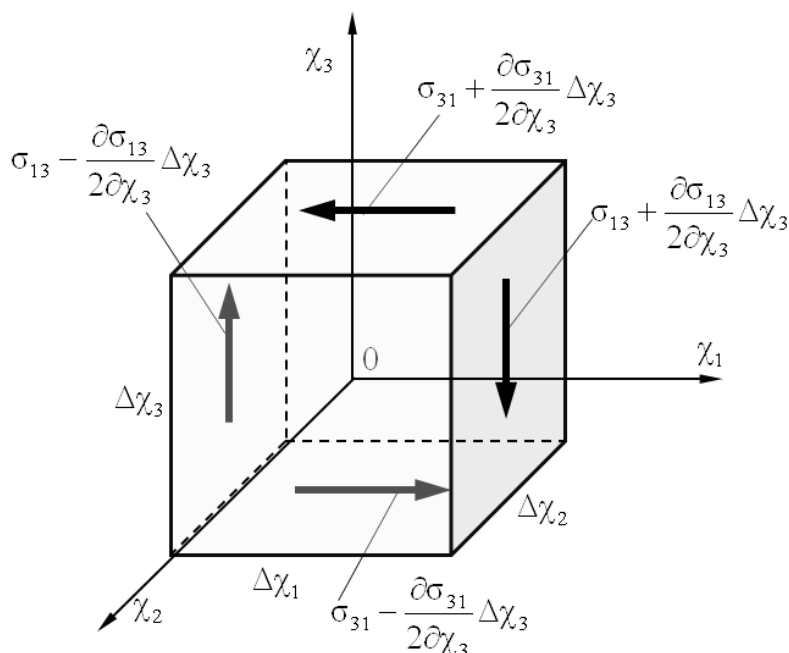


Рис. 32

В точке 0 зададим тензор $\sigma_{ij}(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$, тогда условие равенства моментов сил относительно оси $O\chi_2$ запишется

$$-\left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \chi_3} \frac{\Delta \chi_3}{2}\right) \Delta \chi_1 \Delta \chi_2 \frac{\Delta \chi_3}{2} - \left(\sigma_{31} - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \chi_3} \frac{\Delta \chi_3}{2}\right) \Delta \chi_1 \Delta \chi_2 \frac{\Delta \chi_3}{2} + \\ + \left(\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \chi_1} \frac{\Delta \chi_1}{2}\right) \Delta \chi_2 \Delta \chi_3 \frac{\Delta \chi_1}{2} + \left(\sigma_{13} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \chi_1} \frac{\Delta \chi_1}{2}\right) \Delta \chi_2 \Delta \chi_3 \frac{\Delta \chi_1}{2} = 0.$$

Разделив это выражение на $\Delta \chi_1 \Delta \chi_2 \Delta \chi_3$, получим $\sigma_{13} = \sigma_{31}$. Аналогично можно показать, что $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ и $\sigma_{23} = \sigma_{32}$.

Свойство 2

Тензор напряжений σ_{ij} , заданный в точке $M(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$, позволяет определить напряжения σ_v , p_{vi} , τ_v в любой площадке, проходящей через точку, в которой он задан.

Зная σ_{ij} и направляющие косинусы n_i площадки с направляющим вектором \bar{v} , можно вычислить $\mathbf{p}_v(p_{v1}, p_{v2}, p_{v3})$ по зависимостям (5.7):

$$\left. \begin{aligned} p_{v_1} &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3, \\ p_{v_2} &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3, \\ p_{v_3} &= \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3, \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

$$|\mathbf{p}_v|^2 = p_{v_i} p_{v_j} \delta_{ij} = (p_{v_1})^2 + (p_{v_2})^2 + (p_{v_3})^2.$$

Напряжение σ_v , перпендикулярное площадке (рис. 33), равно

$$\sigma_v = p_{v_1}n_1 + p_{v_2}n_2 + p_{v_3}n_3 \quad (5.14)$$

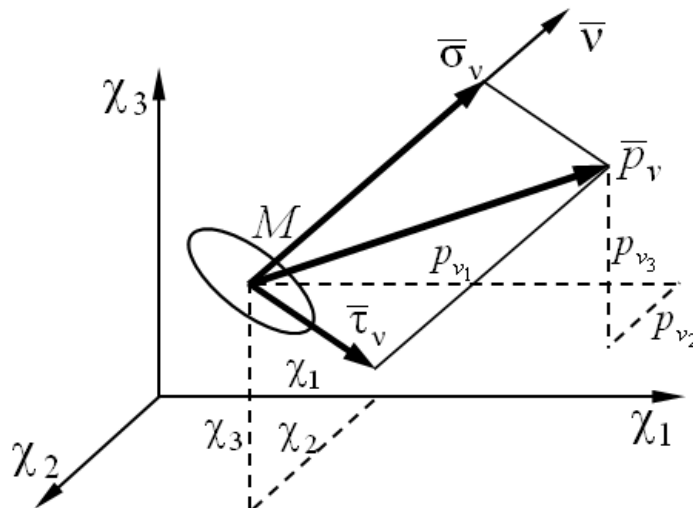


Рис. 33

Подставляя в (5.14) выражения (5.13), получим

$$\begin{aligned} \sigma_v = & (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3)n_1 + \\ & + (\sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3)n_2 + (\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3)n_3, \end{aligned}$$

или

$$\sigma_v = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 + 2\sigma_{23}n_2n_3 + 2\sigma_{31}n_3n_1. \quad (5.15)$$

Сдвиговое (касательное) напряжение τ_v определится из соотношения

$$(\tau_v)^2 = |\mathbf{p}_v|^2 - (\sigma_v)^2.$$

Свойство 3

Тензор σ_{ij} всегда можно привести к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix},$$

где $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ – главные напряжения, действующие в трех взаимно-перпендикулярных направлениях, с направляющими осями v_i и косинусами

$$\mathbf{v}_1(n_{11}, n_{12}, n_{13}); \mathbf{v}_2(n_{21}, n_{22}, n_{23}); \mathbf{v}_3(n_{31}, n_{32}, n_{33}); \sigma_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

В этом случае на площадке $\tau_v = 0$ и $\mathbf{p}_v = \sigma_v = \sigma$, или

$$p_{v_1} = \sigma n_1; p_{v_2} = \sigma n_2; p_{v_3} = \sigma n_3.$$

Данные выражения подставим в зависимости (5.13). В результате получим

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 &= 0, \\ \sigma_{21}n_1 + (\sigma_{22} - \sigma)n_2 + \sigma_{23}n_3 &= 0, \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + (\sigma_{33} - \sigma)n_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Нетривиальное решение система (5.16) ($n_i \neq 0$) имеет тогда, когда ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

После раскрытия определителя и группировки коэффициентов при σ^3 , σ^2 , σ^1 , σ^0 получим кубическое уравнение

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 + I_2\sigma + I_3 = 0,$$

где $I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$;

$$I_2 = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{22} + (\sigma_{12})^2 + (\sigma_{23})^2 + (\sigma_{31})^2;$$

$$I_3 = |\sigma_{ij}| = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}(\sigma_{23})^2 - \sigma_{22}(\sigma_{13})^2 - \sigma_{33}(\sigma_{12})^2.$$

Уравнение (5.17) имеет вещественные корни в силу симметрии тензора σ_{ij} . Определив из (5.17) корни σ_i ($i=1,2,3$), можно вычислить направляющие косинусы n_{i1} , n_{i2} , n_{i3} главных напряжений σ_i , подставив σ_i в (5.16):

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_i)n_{i1} + \sigma_{12}n_{i2} + \sigma_{13}n_{i3} &= 0, \\ \sigma_{21}n_{i1} + (\sigma_{22} - \sigma_i)n_{i2} + \sigma_{23}n_{i3} &= 0, \\ \sigma_{31}n_{i1} + \sigma_{32}n_{i2} + (\sigma_{33} - \sigma_i)n_{i3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Для этого разделим систему (5.18) на $n_{i3} \neq 0$ и обозначим

$$\frac{n_{i1}}{n_{i3}} = a_i; \quad \frac{n_{i2}}{n_{i3}} = b_i.$$

Возьмем первое и третье уравнения из системы (5.18), выраженные через a_i , b_i ($i=1,2,3$),

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_i)a_i + \sigma_{12}b_i &= -\sigma_{13}, \\ \sigma_{31}a_i + \sigma_{32}b_i &= -(\sigma_{33} - \sigma_i) \end{aligned} \right\}$$

и присоединим к ним тождество $n_{i1}^2 + n_{i2}^2 + n_{i3}^2 = 1$, выраженное через a_i , b_i :

$$a_i^2 + b_i^2 = \frac{1}{n_{i3}^2}.$$

Из последнего равенства получим

$$n_{i3} = \frac{1}{\sqrt{1 + a_i^2 + b_i^2}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Тогда n_{i1} и n_{i2} будут равны $n_{i1} = a_i n_{i3}$; $n_{i2} = b_i n_{i3}$.

По аналогии с поверхностью деформаций Коши можно построить поверхность напряжений Коши в эйлеровых координатах:

$$\sigma_{11}\chi_1^2 + \sigma_{22}\chi_2^2 + \sigma_{33}\chi_3^2 + 2\sigma_{12}\chi_1\chi_2 + 2\sigma_{23}\chi_2\chi_3 + 2\sigma_{31}\chi_3\chi_1 = \pm k^2.$$

В главных осях тензора напряжений поверхность напряжений Коши запишется

$$\sigma_1\chi_1'^2 + \sigma_2\chi_2'^2 + \sigma_3\chi_3'^2 = k'^2,$$

где оси $0\chi'_i$ определяются направляющими косинусами главных напряжений.

Свойство 4

Тензор σ_{ij} имеет три инварианта, не зависящих от системы координат, в которой он рассматривается:

– первый инвариант (линейный)

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = I_1;$$

– второй инвариант (квадратичный)

$$-\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 = I_2;$$

– третий инвариант (кубический)

$$|\sigma_{ij}| = |\sigma_i| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = I_3.$$

Свойство 5

Тензор σ_{ij} всегда можно представить в виде суммы двух тензоров:

$$\sigma_{ij} = \sigma_c \delta_{ij} + s_{ij}.$$

Здесь $\sigma_c \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_c & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_c \end{pmatrix}$ – шаровый тензор напряжений, где

$\sigma_c = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ – среднее напряжение – инвариантная величина, так как

$$\sigma_c = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{3}.$$

Тензор s_{ij} называется *девиатором напряжений*. Он равен

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix},$$

где $s_{ii} = \sigma_{ii} - \sigma_c$, $s_{ij} = \sigma_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$).

Также тензор s_{ij} можно записать в виде $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_c \delta_{ij}$. Девиатор напряжений имеет инварианты

$$I_{1д} = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0, \quad (5.19)$$

$$I_{2д} = -s_{11}s_{22} - s_{22}s_{33} - s_{33}s_{11} + s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2. \quad (5.20)$$

Подставив (5.19) в (5.20), получим

$$I_{2д} = \frac{1}{2} [s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2(s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2)] = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij}. \quad (5.21)$$

Положительная величина

$$\sigma_m = \sqrt{I_{2д}} = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}s_{ij}} \quad (5.22)$$

называется *модулем тензора напряжений*.

Выразим $I_{2д}$ через σ_{ij} , используя выражения $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_c \delta_{ij}$ и $\sigma_c = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$,

$$I_{2д} = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2).$$

Положительная величина

$$\sigma_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} \quad (5.23)$$

называется *интенсивностью напряжений*. Величины $\sigma_{\text{и}}$ и $\sigma_{\text{м}}$ инвариантны и связаны соотношением $\sigma_{\text{и}} = \sqrt{3}\sigma_{\text{м}}$.

Определим $\sigma_{\text{и}}$ для линейного растяжения. Простое растяжение характеризуется тензором $\sigma_{11}=\sigma$; $\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$. Подставим эти величины в (5.23). В результате получим $\sigma_{\text{и}}=\sigma$.

В механике твердого тела широко используется понятие вектора напряжения в девятимерном пространстве

$$\mathbf{s}_{\sigma}(s_{11}; s_{22}; s_{33}; s_{12}; s_{21}; s_{23}; s_{32}; s_{31}; s_{13}).$$

Направляющие косинусы вектора \mathbf{s}_{σ} определяет тензор второго ранга, который называется *направляющим тензором* вектора напряжения, причем $|\mathbf{s}_{\sigma}| = \sigma_{\text{м}}$.

Свойство 6

Тензор напряжений σ_{ij} определяет две инвариантные величины напряжений $\sigma_{\text{окт}}$, $\tau_{\text{окт}}$ на октаэдрических площадках в главных осях напряжений (рис. 34).

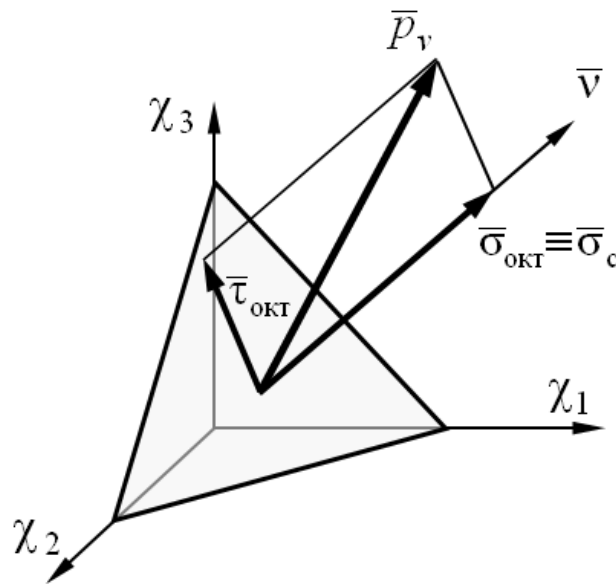


Рис. 34

Используя (5.13), можем записать выражения для p_{v_i} в главных координатах:

$$p_{v_1} = \sigma_1 n_1; p_{v_2} = \sigma_2 n_2; p_{v_3} = \sigma_3 n_3.$$

Тогда из соотношений

$$p_v^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2, \sigma_v = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2, \tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2$$

получим

$$\tau_v^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2. \quad (5.24)$$

Для октаэдрической площадки $n_i^2=1/3$. Тогда σ_v и τ_v в этой площадке будут равны соответственно

$$\sigma_{\text{окт}} = \sigma_c; \quad \tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (5.25)$$

Сопоставляя (5.25) и (5.23), получим $\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_n$.

Свойство 7

Тензор напряжений σ_{ij} определяет экстремальные касательные напряжения и площадки, в которых они действуют.

Выполняя над (5.24) операции, аналогичные описанным в п. 4.1, получим:

$$\tau_{ij}^{\text{extr}} = \frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} \quad (i,j=1,2,3; i \neq j) \quad (5.26)$$

$$\sigma_v^{ij} = \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \quad (i,j=1,2,3; i \neq j) \quad (5.27)$$

где σ_v^{ij} , τ_{ij}^{extr} – нормальные и экстремальные касательные напряжения в соответствующих площадках (рис. 35).

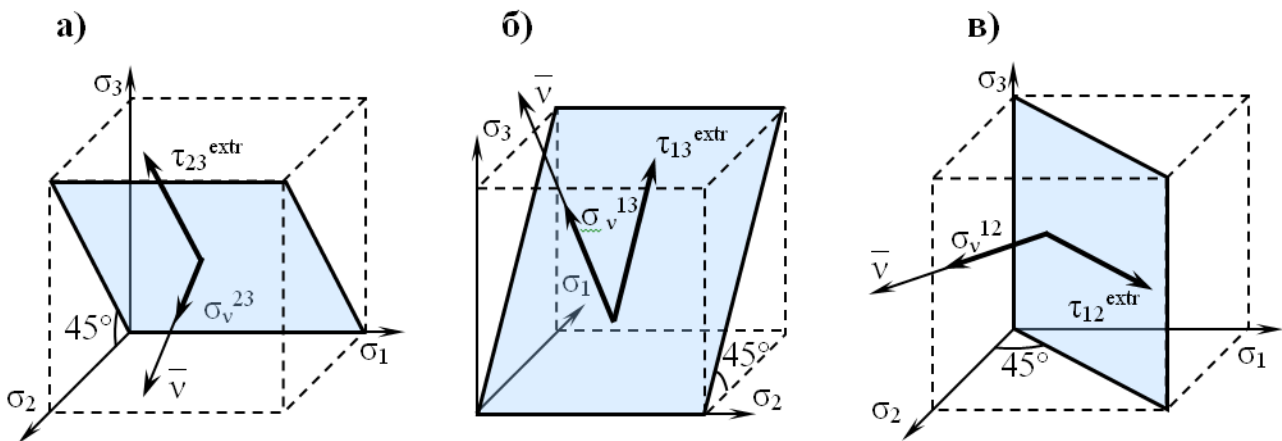


Рис. 35

Свойство 8

Тензор напряжений удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия (5.10) и граничным условиям на поверхности тела (5.12).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_{0i} &= 0, \\ \sigma_{ij} n_j &= q_{vi}. \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Таким образом, в окрестности точки, в которой задан тензор напряжений Эйлера, можно указать 26 площадок, на которых действуют инвариантные величины напряжений, а именно: 6 главных площадок с напряжениями σ_i ($i=1,2,3$), образующих *куб*; 8 площадок, образующих *октаэдр* (октаэдрических), с напряжениями σ_c и $\tau_{\text{окт}}$; 12 площадок, образующих *ромбододекаэдр*, с напряжениями τ_{ij}^{extr} . Все перечисленные площадки в совокупности можно представить в виде более сложного многогранника – *ромбокубооктаэдра* (рис. 36).

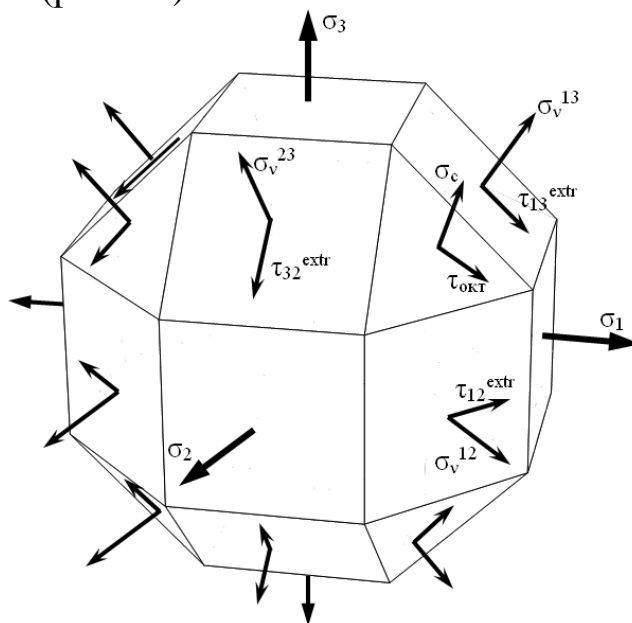


Рис. 36

5.7. Круговая диаграмма напряжений Мора. Эллипсоид напряжений

В осях σ_v, τ_v данная диаграмма дает представление о напряжениях в различных сечениях, проходящих через заданную точку тела. Из уравнений $\sigma_i^2 n_i^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2$, $\sigma_i n_i = \sigma_v$ и $n_i n_i = 1$ получаем:

$$n_1^2 = \frac{\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_2)(\sigma_v - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)},$$

$$n_2^2 = \frac{\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_1)(\sigma_v - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)},$$

$$n_3^2 = \frac{\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_1)(\sigma_v - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

Так как $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, а $n_i^2 > 0$, то должно быть $\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_2)(\sigma_v - \sigma_3) \geq 0$, $\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_1)(\sigma_v - \sigma_3) \leq 0$, $\tau_v^2 + (\sigma_v - \sigma_1)(\sigma_v - \sigma_2) \geq 0$,

т.е. σ_v и τ_v лежат внутри области, ограниченной полуокружностями (заштрихованная область на рис. 37, а).

При наложении на тело дополнительных средних напряжений σ_c радиусы окружностей не меняются, и вся диаграмма смещается вдоль σ_v . В случае равноосного растяжения или сжатия все три окружности стягиваются в точку. Это означает, что во всех площадках тела $\tau_{ij}=0$, т.е. все площадки являются главными.

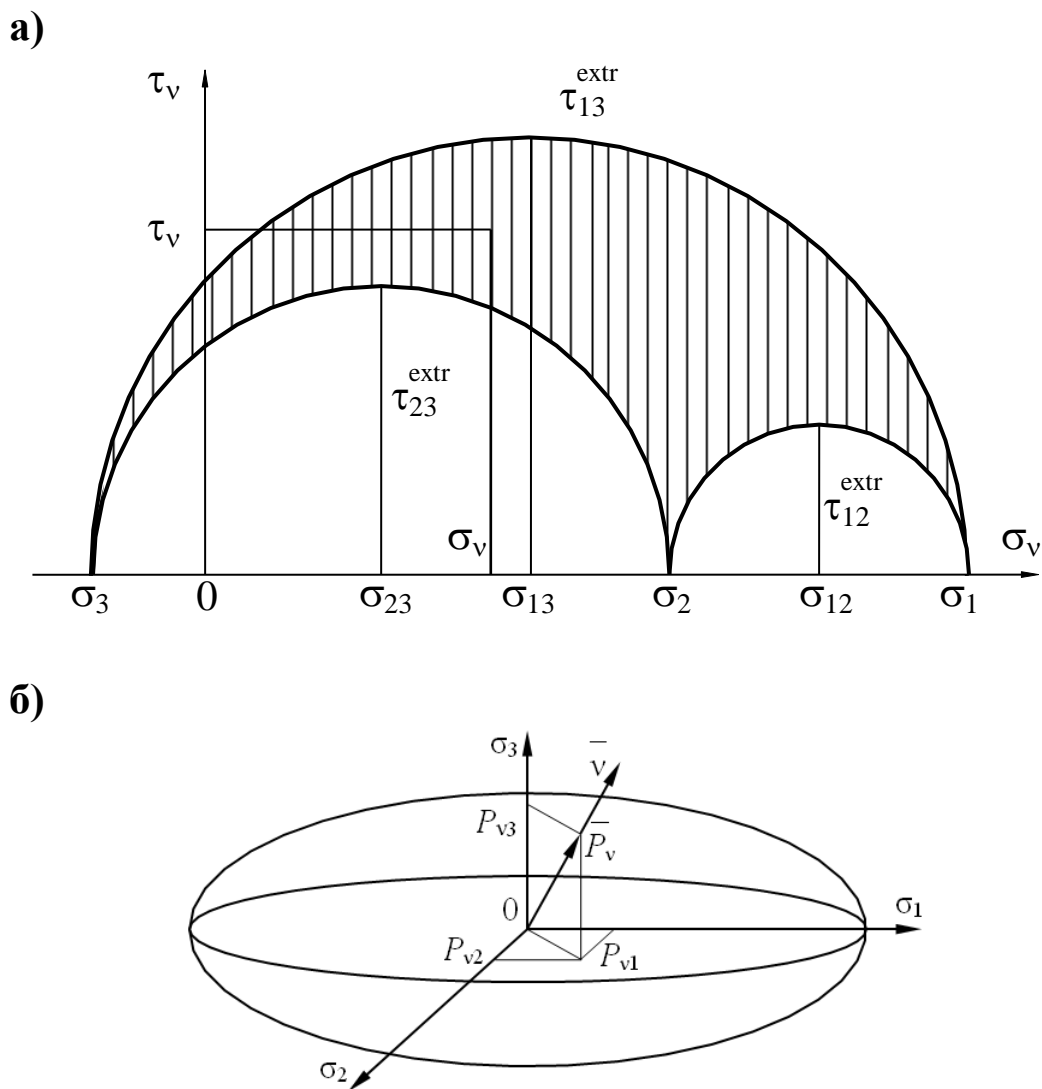


Рис. 37

Для напряженного состояния вводится параметр Надаи-Люде

$$\chi_\sigma = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1, -1 \leq \chi_\sigma \leq 1.$$

Данный параметр характеризует вид напряженного состояния с точностью до σ_c , определяя соотношение σ_i ($i=1,2,3$). Также он характеризует положение σ_2 на диаграмме Мора: при $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ параметр χ_σ теряет смысл, при

одинаковых χ_σ диаграммы Мора подобны. Для одноосного растяжения ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$) $\chi_\sigma = -1$, одноосного сжатия ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 \leq 0$) $\chi_\sigma = 1$, чистого сдвига ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_1$) $\chi_\sigma = 0$. Для простейших напряженно-деформированных состояний $\chi_\sigma = \chi_\varepsilon$, что указывает на подобие напряжений и деформаций Мора.

Эллипсоид напряжений Ламе

Рассмотрим напряженное состояние в главных осях напряжений, в которых компоненты полного напряжения $p_{vi} = \sigma_i n_i$. При вращении вектора \bar{v} конец вектора \bar{p}_v опишет поверхность Ламе – геометрический образ напряженного состояния.

Учитывая, что $n_i = p_{vi} / \sigma_i$ ($i=1,2,3$) и $n_i n_i = 1$, получим уравнение поверхности

$$\frac{p_{v1}^2}{\sigma_1^2} + \frac{p_{v2}^2}{\sigma_2^2} + \frac{p_{v3}^2}{\sigma_3^2} = 1,$$

называемой *эллипсоидом полных напряжений Ламе*, которая представляет собой геометрическое место концов векторов полных напряжений в различных площадках, проходящих через точку 0 (рис. 37, б). Из эллипсоида следует экстремальность главных напряжений.

6. МОДЕЛИ СПЛОШНЫХ СРЕД

6.1. Виды нагружения и деформирования твердого тела

Простое и сложное нагружения

Нагружение в некоторой точке тела называется *простым*, если выполняется условие

$$s_{ij}(t) = \lambda(t)s_{ij}(t_0), \quad (6.1)$$

где $\lambda(t)$ – скалярный множитель; $s_{ij}(t_0)$ – начальное напряженное состояние; $s_{ij}(t)$ – текущее напряженное состояние.

Умножим (6.1) само на себя и разделим на два:

$$\frac{s_{ij}(t) \cdot s_{ij}(t)}{2} = \lambda^2(t) \frac{s_{ij}(t_0) \cdot s_{ij}(t_0)}{2},$$

в результате получим

$$\sigma_m(t) = \lambda(t)\sigma_m(t_0). \quad (6.2)$$

Разделим (6.1) на (6.2):

$$\frac{s_{ij}(t)}{\sigma_m(t)} = \frac{s_{ij}(t_0)}{\sigma_m(t_0)}.$$

Из этого равенства следует, что направляющий тензор напряжений не изменяется во времени:

$$[s_{ij}(t)]^H = [s_{ij}(t_0)]^H.$$

Следовательно, вектор напряжений изменяется вдоль луча ОА при простом нагружении (рис. 38).

При сложном нагружении $s_{ij}(t) \neq \lambda(t)s_{ij}(t_0)$ и $[s_{ij}(t)]^H \neq [s_{ij}(t_0)]^H$, т.е. в этом случае геометрическое место концов векторов $\mathbf{S}_\sigma(t)$ определяется криволинейной траекторией.

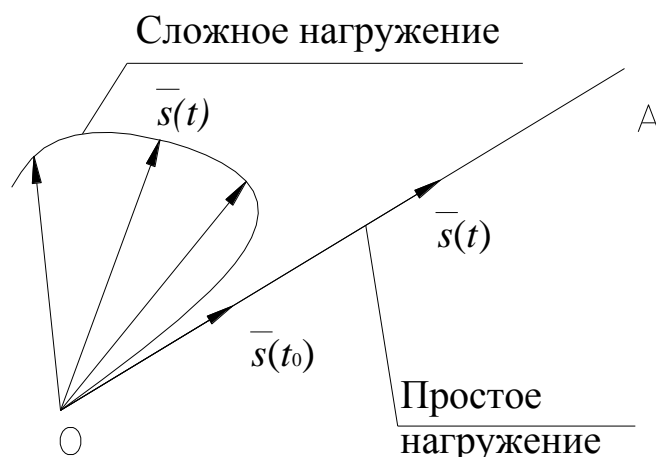


Рис. 38

Простое и сложное деформирования

При простом деформировании тела $e_{ij}(t) = \mu(t) \cdot e_{ij}(t_0)$, где $\mu(t)$ – скалярный множитель; $e_{ij}(t_0)$ – начальное деформированное состояние; $e_{ij}(t)$ – деформированное состояние в текущий момент времени.

Аналогично простому нагружению получим:

$$\frac{e_{ij}(t) \cdot e_{ij}(t)}{2} = \mu^2(t) \frac{e_{ij}(t_0) \cdot e_{ij}(t_0)}{2}; \quad \varepsilon_M(t) = \mu(t) \varepsilon_M(t_0);$$

$$\frac{e_{ij}(t)}{\varepsilon_M(t)} = \frac{e_{ij}(t_0)}{\varepsilon_M(t_0)}; \quad [e_{ij}(t)]^H = [e_{ij}(t_0)]^H.$$

В этом случае вектор деформаций изменяется вдоль луча ОА при простом деформировании (рис. 39), при сложном деформировании геометрическое место концов векторов $e_\varepsilon(t)$ определяется криволинейной траекторией.

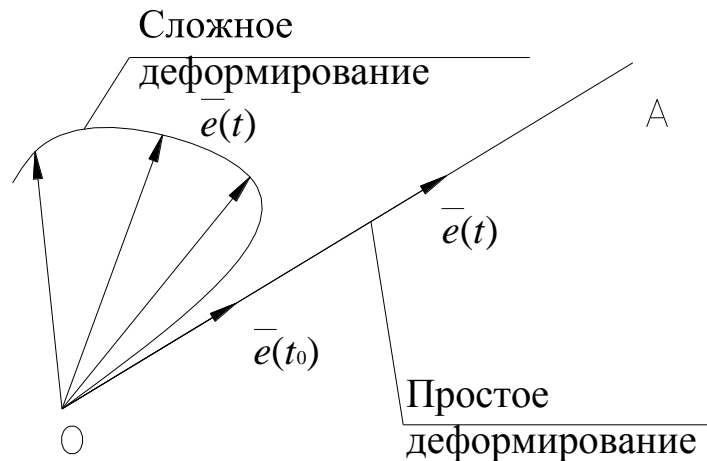


Рис. 39

Для тонкостенного образца, нагруженного силой P и крутящим моментом m (рис 40, а), можно получить различные траектории нагружения в осях s_{11} , s_{12} (рис 40, б).

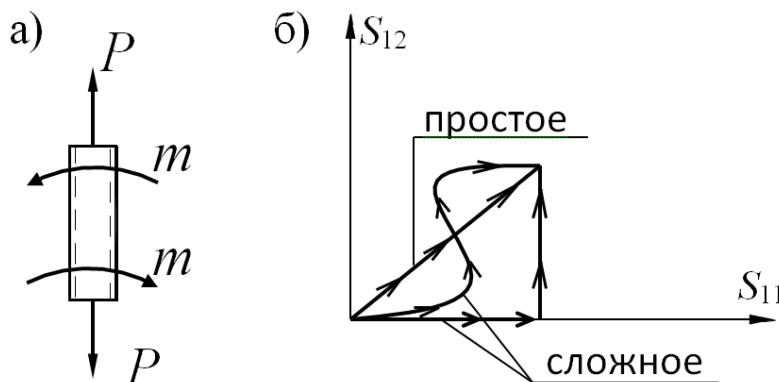


Рис. 40

Активное, пассивное и нейтральное нагружение

Нагружение называется *активным*, если $\sigma_m(t) > \sigma_m(t_0)$ ($\lambda(t) > 1$), *пассивным*, если $\sigma_m(t) < \sigma_m(t_0)$ ($\lambda(t) < 1$) и *нейтральным*, если $\sigma_m(t) = \sigma_m(t_0)$ ($\lambda(t) = 1$).

6.2. Уравнения связи тензоров напряжений и деформаций

Для определенности будем полагать тело достаточно жестким, когда справедливы выражения для тензора деформаций Коши и $\sigma_{\chi i \chi j} = \sigma_{x_i x_j} = \sigma_{ij}$, то есть будем рассматривать НДС в лагранжевых координатах. В этом случае НДС будет определяться пятнадцатью функциями: $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ – шесть функций; $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ – шесть функций; $U_i(x_1, x_2, x_3)$ – три функции.

Для их определения имеются соотношения Коши (шесть уравнений)

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (6.3)$$

и дифференциальные уравнения равновесия при статическом нагружении твердого тела (три уравнения)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_{0i} = 0 \quad (6.4)$$

с граничными условиями $\sigma_{ij} n_j = q_{v_i}$.

Таким образом, для определения пятнадцати функций пока известны девять уравнений (6.3)–(6.4).

В случае динамического деформирования твердого тела дифференциальные уравнения (6.4) записываются

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_{0i} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}. \quad (6.5)$$

Здесь, кроме граничных условий, должны быть заданы начальные условия для $t=t_0$:

$$\begin{aligned} U_i(x_1, x_2, x_3, t_0) &= U_{i0}(x_1, x_2, x_3); \\ \frac{\partial}{\partial t} (U_i(x_1, x_2, x_3, t)) \Big|_{t=t_0} &= \dot{U}_{i0}(x_1, x_2, x_3); \\ \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t_0) &= \sigma_{ij0}(x_1, x_2, x_3); \\ \rho(x_1, x_2, x_3, t_0) &= \rho_0(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

При $\rho \neq \text{const}$ добавляется закон сохранения массы (1.2). В этом случае для определения шестнадцати неизвестных функций (σ_{ij} , ε_{ij} , U_i , ρ) имеется десять уравнений.

Так как тензор деформации связан с перемещениями U_i соотношениями Коши (6.3), то число неизвестных функций можно свести к девяти в

задачах статики ($\rho = \text{const}$): $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ – шесть функций; $U_i(x_1, x_2, x_3)$ – три функции. Для их определения имеется лишь три дифференциальных уравнения (6.3).

Система (6.4) является незамкнутой, так как не позволяет получить однозначное решение для девяти функций при любых граничных и начальных условиях. Это связано с тем, что сплошная среда не определена, то есть:

- не заданы физико-механические свойства твердого тела;
- не задан вид деформирования или нагружения твердого тела.

1. Пусть задан вид деформирования твердого тела, то есть для каждой точки M твердого тела заданы $\mathbf{e} = \mathbf{e}(M, t)$ или $e_{ij} = e_{ij}(M, t)$.

2. Задана совокупность механических характеристик материала ($E, G, \nu, \sigma_T \dots$).

3. Задана совокупность немеханических и негеометрических параметров (температура, плотность, среда, электромагнитное воздействие...): $f(T^\circ, \rho, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots)$.

Для сплошной среды в МСС используется постулат макроскопической определенности: если для макроскопического элемента среды задан процесс деформирования, то возникшие в ней напряжения σ_{ij} однозначно определяются природой вещества, то есть имеет место универсальный закон, справедливый для любого вида напряженно-деформированного состояния (шесть уравнений):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}[\varepsilon_{mn}(M, t'), f(T^\circ, \rho, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t' \dots)]_{t_0}^t \quad (t_0 < t' < t, \quad i, j = 1, 2, 3). \quad (6.6)$$

Силы воздействия окружающих элементов среды на частицу M , т.е. σ_{ij} , будут равны и противоположно направлены силам воздействия частицы M на окружающую среду. При этом σ_{ij} зависят от $\mathbf{e}(M, t)$ и физико-механических свойств среды.

Таким образом, для девяти неизвестных функций будем иметь девять уравнений. Если задан процесс нагружения $s_{ij} = s_{ij}(M, t)$ и характеристики материала, то справедливо и обратное соотношение

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}[\sigma_{mn}(M, t'), f_1(T^\circ, \rho, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t' \dots)]_{t_0}^t \quad (t_0 < t' < t, \quad i, j = 1, 2, 3). \quad (6.7)$$

Если в (6.6) или в (6.7) не известны $T^\circ, \rho, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, то к девяти уравнениям необходимо добавить еще уравнения:

- для неизвестной функции $T(x_1, x_2, x_3, t)$ – законы термодинамики;
- для неизвестной $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ – закон сохранения массы;
- для неизвестных электромагнитных сил $\beta_1(x_1, x_2, x_3, t)$ – законы электродинамики и т. д.

6.2. Классические модели механики сплошной среды

Реальные тела имеют свойства как твердого тела (упругость, пластичность), так и свойства жидкости (текучесть, вязкость).

В механике сплошной среды широко используют классические модели твердых тел, которые учитывают лишь главные, определяющие свойства тела, но дают результаты достаточно точные с инженерной точки зрения. Это линейные модели.

К классическим моделям относятся:

- модель Гука – идеально упругое твердое тело;
- модель Ньютона – ньютоновская жидкость;
- модель Сен-Венана – идеально жесткопластическое твердое тело.

6.3.1. Модель Гука

Твердыми телами в механике сплошной среды называют тела, сопротивление сдвигу которых остается не равным нулю и конечным в течение сколь угодно большого интервала времени.

Если для данной среды имеет место между тензорами σ_{ij} и ε_{ij} взаимно однозначное соответствие, то такая среда называется *упругой*.

Упругое твердое тело называется *изотропным*, если в любой его точке все направления равнозначны в отношении упругих свойств, т.е. характеристики упругих свойств являются скалярными величинами.

Упругое тело называется *однородным*, если его свойства одинаковы во всех точках тела (при одинаковых немеханических параметрах во всех точках тела).

Для линейно упругого изотропного тела (модели Гука) имеют место лишь две независимые характеристики упругости:

- E – модуль 1-го рода (Юнга), модуль продольной упругости;
- G – модуль 2-го рода, модуль сдвига.

Коэффициент Пуассона является производной характеристикой материала и определяется из выражения

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1.$$

Механический аналог модели Гука (рис. 41, а) – пружина, для которой $P=kx$, k – жесткость пружины (постоянная величина); $x=l-l_0$ – удлинение.

Для модели Гука, описывающей деформацию твердого тела, (рис. 41, б) имеем при:

- одноосном растяжении $\sigma = E\varepsilon$;
- сдвиге $\sigma_{12} = G\varepsilon_{12}$, $\sigma_{12} = 2G\gamma_{12}$;
- объемном деформировании

$$\sigma_c = 3K\varepsilon_c, \quad (6.8)$$

где $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ – модуль объемной упругости.

Так как $3\varepsilon_c = \theta$, то можно (6.8) записать в виде $\sigma_c = K\theta$.

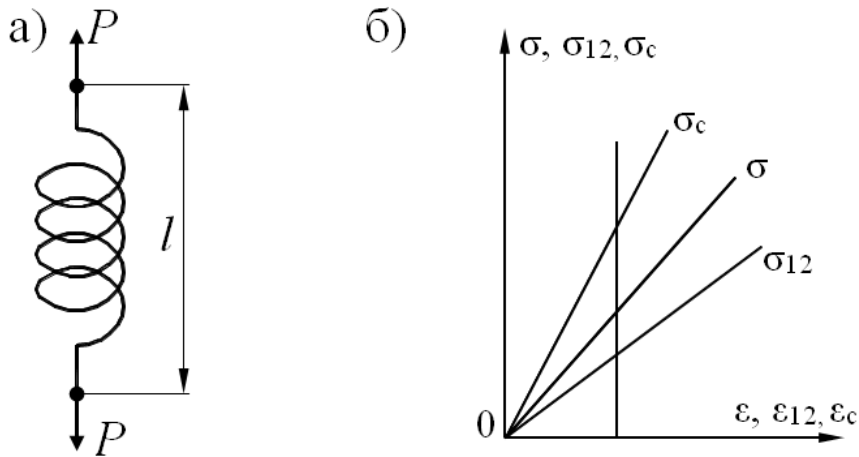


Рис. 41

В общем случае напряженно-деформированного состояния закон Гука записывается

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= 2Ge_{ij}, \\ \sigma_c &= 3K\varepsilon_c. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Так как $s_{ij} + \sigma_c \delta_{ij} = \sigma_{ij}$, то

$$\sigma_{ij} = 3K\varepsilon_c \delta_{ij} + 2Ge_{ij}, \quad (6.10)$$

где σ_{ij} , e_{ij} – тензор напряжений и девиатор деформаций.

Учитывая, что $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_c \delta_{ij}$, получим

$$\sigma_{ij} = 3K\varepsilon_c \delta_{ij} + 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_c \delta_{ij})$$

или

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (6.11)$$

где величина $\lambda = K - \frac{2}{3}G$ называется *модулем упругости Ламе*.

Определим скалярные и векторные свойства упругого тела. Для этого произведем свертку первого тензорного выражения (6.9)

$$\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = (2G)^2 \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij}.$$

Отсюда следует *скалярное свойство* упругого тела

$$\sigma_m = 2G\varepsilon_m. \quad (6.12)$$

Разделим первое тензорное выражение (6.9) на (6.12). Тогда получим

$$\frac{s_{ij}}{\sigma_m} = \frac{e_{ij}}{\varepsilon_m}, [s_{ij}]^H = [e_{ij}]^H. \quad (6.13)$$

В результате получили *векторное свойство* упругого тела (модели Гука). Для модели Гука векторы напряжений и деформаций параллельны и модули их связаны выражением (6.12).

Справедливо соотношение Гука, противоположное (6.9),

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G}; \quad \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{3K}. \quad (6.14)$$

Сложим данные выражения. В результате тензорное выражение для вычисления деформаций имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_c}{3K} \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2G} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6.15)$$

Построим замкнутую систему уравнений для определения вектора перемещений. Для этого подставим в дифференциальные уравнения (6.4) тензорное выражение (6.11):

$$\frac{\partial(\lambda\theta\delta_{ij} + 2G\gamma_{ij})}{\partial x_j} + P_{0i} = 0.$$

В результате получим $\lambda \frac{\partial\theta}{\partial x_i} + 2G \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x_j} + P_{0i} = 0$,

где

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (6.16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2G \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x_j} &= G \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = \\ &= G \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_3^2} \right) + G \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_i} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2 \partial x_i} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_3 \partial x_i} \right) = \\ &= G \Delta U_i + G \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) = G \Delta U_i + G \frac{\partial\theta}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Уравнение примет вид

$$G \Delta U_i + (G + \lambda) \frac{\partial\theta}{\partial x_i} + P_{0i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Это дифференциальные уравнения равновесия твердого тела в перемещениях – *уравнения Ламе*.

Граничные условия в перемещениях после подстановки (6.11) запишутся следующим образом:

$$(\lambda\theta\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij})n_j = q_{v_i} \text{ или } \lambda\theta n_i + 2G\varepsilon_{ij}n_j = q_{v_i}.$$

Подставив (6.16) в полученные выражения, получим

$$\lambda\theta n_i + G\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)n_j = q_{v_i} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Уравнения Ламе являются линейными относительно проекций вектора перемещений U_i ($i=1, 2, 3$). Определив $U_i=U_i(x_1, x_2, x_3)$, с помощью интегрирования уравнений Ламе можно найти напряженно-деформированное состояние упругого тела.

6.3.2. Модель Ньютона

В механике сплошной среды жидкостью называют тело, сопротивление сдвигу которого при любой деформации стремится к нулю, если скорость деформации также стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Ньютоновская жидкость – это изотропная жидкая среда, сдвиговое сопротивление которой не равно нулю и линейно зависит от скорости деформации.

Механическая модель ньютоновской жидкости показана на рис. 42, а, б. При одномерном ламинарном движении жидкости сдвиговые напряжения связаны со скоростью деформаций сдвига следующим выражением (рис. 42, в):

$$\sigma_{12} = \mu \dot{\varepsilon}_{12}, \quad \mu = \text{const}. \quad (6.17)$$

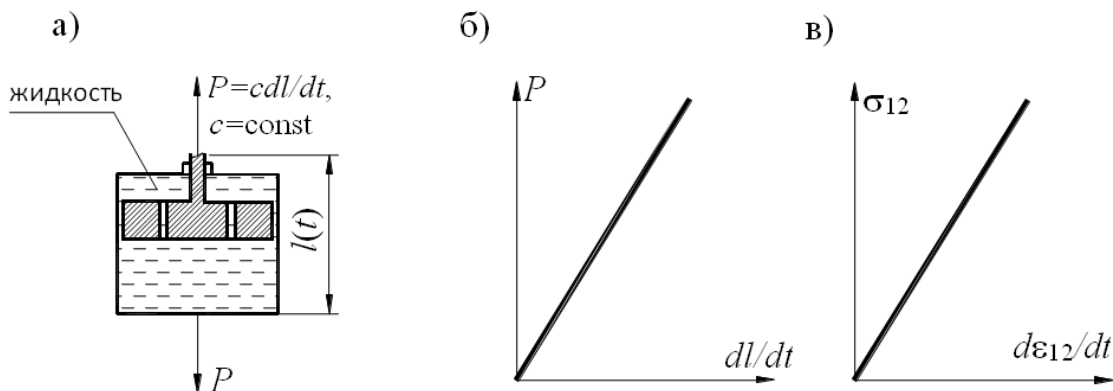


Рис. 42

В общем случае

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} \\ \sigma_c &= 3\eta \dot{\varepsilon}_c - p \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

где μ и η – коэффициенты сдвиговой и объемной молекулярной динамической вязкости жидкости (постоянные, но зависят от температуры). Для одноатомных газов $\eta=0$.

Сложим тензорные выражения (6.18):

$$\sigma_{ij} = (3\eta\dot{\epsilon}_c - p)\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij};$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\epsilon}_c\delta_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij},$$

где

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{12} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{13} \\ \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{21} & \dot{\epsilon}_{22} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{23} \\ \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{31} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{32} & \dot{\epsilon}_{33} \end{pmatrix}, \quad \dot{\epsilon}_c = \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_{ij}\delta_{ij};$$

причем

$$\dot{\epsilon}_{ii} = \frac{\partial V_i}{\partial \chi_i}; \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial \chi_j} + \frac{\partial V_j}{\partial \chi_i};$$

$V_i = V_i(\chi_1, \chi_2, \chi_3, t)$ – проекции вектора скорости движения жидкости ($i=1,2,3$).

Определим векторное и скалярное свойства ньютоновской жидкости, произведя свертку первого выражения (6.18),

$$\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = (2\mu)^2 \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}.$$

Отсюда следует *скалярное свойство* ньютоновской жидкости

$$\sigma_m = 2\mu\dot{\epsilon}_m.$$

Разделим первое тензорное выражение (6.18) на скалярное соотношение:

$$\frac{s_{ij}}{\sigma_m} = \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\dot{\epsilon}_m}, [s_{ij}]^H = [\dot{\epsilon}_{ij}]^H$$

– это *векторное свойство* ньютоновской жидкости.

В случае идеальной жидкости, когда $\eta=\mu=0$ (невязкая жидкость),

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix},$$

где p определяется из интеграла Эйлера движения идеальной жидкости.

6.3.3. Модель Сен-Венана

Механический аналог модели Сен-Венана показан на рис. 43, а.

Из модели следует, что если сила $P < P_{\text{тр}} = f_{\text{тр}}N$, то смещение $\Delta l = 0$, где $f_{\text{тр}}$ – коэффициент трения; если же $P = P_{\text{тр}}$, то $\Delta l \neq 0$ (рис. 43, б).

Для сплошной среды в одномерном случае (рис. 43, в) имеют место следующие закономерности:

- если $\sigma < \sigma_{\text{т}}$, то тело не испытывает пластической деформации, $\varepsilon^{\text{п}} = 0$;
- если $\sigma = \sigma_{\text{т}}$, имеет место пластическое течение материала, $\varepsilon^{\text{п}} \neq 0$.

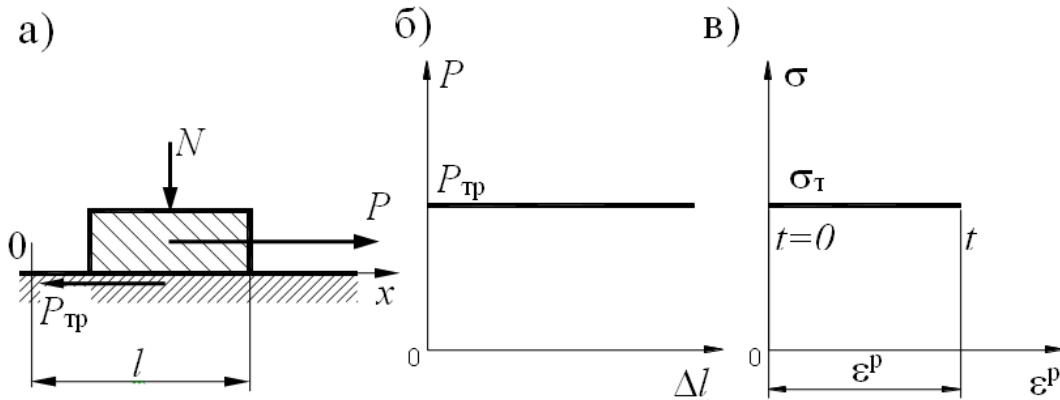


Рис. 43

Так себя ведут пластические массы и металлы при высокой температуре.

В общем случае напряженно-деформированного состояния модель Сен-Венана строится на следующих гипотезах:

- материал полагается несжимаемым $\theta = 0$ и $\varepsilon_{\text{с}}^{\text{п}} = 0$, хотя в материале имеет место $\sigma_{\text{с}} = -p$, которое определяется из дифференциальных уравнений движения жидкости (интеграла Эйлера);
- в твердом теле $\varepsilon_{ij}^{\text{п}} = 0$, если $s_{ij}s_{ij}/2 < c^2 = \text{const}$;
- $\varepsilon_{ij}^{\text{п}} \neq 0$, если $s_{ij}s_{ij}/2 = c^2$, где $\varepsilon_{ij}^{\text{п}}$ – тензор пластической деформации

$$\varepsilon_{ij}^{\text{п}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^{\text{п}} & \frac{1}{2}\varepsilon_{12}^{\text{п}} & \frac{1}{2}\varepsilon_{13}^{\text{п}} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{21}^{\text{п}} & \varepsilon_{22}^{\text{п}} & \frac{1}{2}\varepsilon_{23}^{\text{п}} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{31}^{\text{п}} & \frac{1}{2}\varepsilon_{32}^{\text{п}} & \varepsilon_{33}^{\text{п}} \end{pmatrix},$$

причем $\varepsilon_{ij}^{\text{п}} = \varepsilon_{ji}^{\text{п}} = e_{ji}^{\text{п}}$ – дивiator пластических деформаций;

- уравнения связи напряжений и деформаций аналогичны уравнениям ньютоновской жидкости: $s_{ij} = 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{п}}$, где $d\varepsilon_{ij}^{\text{п}}/dt$ – тензор скорости пластической деформации, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{п}} = \dot{e}_{ij}^{\text{п}}$.

Тензор напряжений в твердом теле, в котором напряженно-деформированное состояние определяется моделью Сен-Венана, равен

$$\sigma_{ij} = \sigma_c \cdot \delta_{ij} + s_{ij}.$$

Скалярное и векторное свойства модели Сен-Венана:

- скалярное $\sigma_M = 2\mu \dot{\epsilon}_M^p$;
- векторное $[s_{ij}]^H = [\dot{\epsilon}_{ij}^p]^H$,

где $[\dot{\epsilon}_{ij}^p]^H$ – направляющий тензор скорости пластической деформации.

6.4. Неклассические модели

6.4.1. Неклассические линейные модели

Все классические модели линейные, но не все линейные модели классические. К последним, в частности, относятся модели Кельвина и Максвелла.

Модель вязкоупругого тела (модель Кельвина)

Механический аналог модели Кельвина – параллельное соединение двух классических моделей Гука и Ньютона (рис. 44, а).

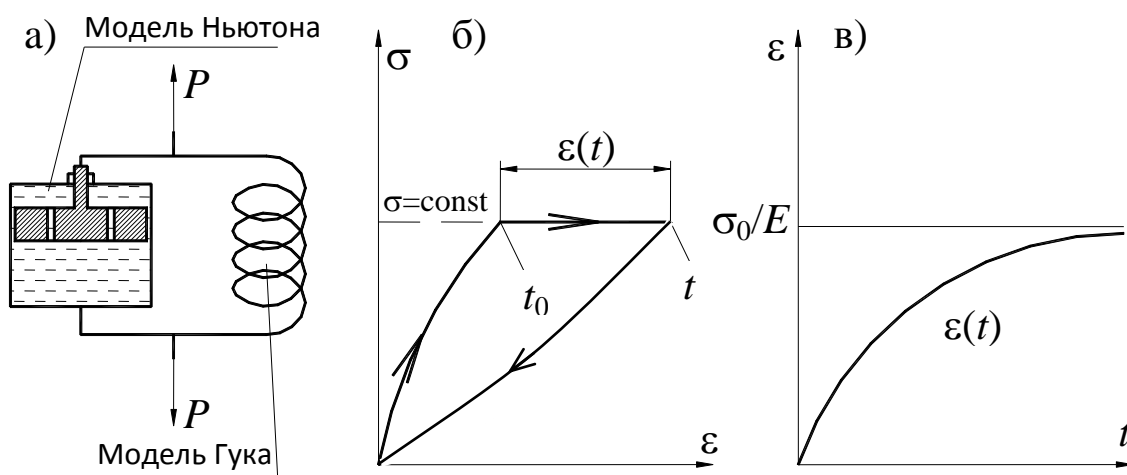


Рис. 44

В механическом аналоге (рис. 44, а) модели Кельвина имеют место следующие соотношения: $P = P_H + P_\Gamma$, $\dot{\epsilon}_H = \dot{\epsilon}_\Gamma$. Для деформируемых твердых тел Кельвина в одномерном случае имеем $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ или

$$\sigma = E\epsilon + \mu \frac{d\epsilon}{dt}, \quad (6.19)$$

где E и μ – постоянные величины.

Здесь (6.19) – уравнение связи напряжений и деформаций для модели Кельвина в одномерном случае. Проинтегрируем (6.19) при $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ (рис. 44, б). После преобразований получим дифференциальное уравнение $\frac{d\varepsilon}{\frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon} = \frac{E}{\mu} dt$, проинтегрировав которое, имеем

$$\ln\left(\frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon\right) = -\frac{E}{\mu}t + \ln(c). \quad (6.20)$$

Пусть при $t=0$, $\varepsilon=0$, тогда из интеграла (6.20) определим постоянную интегрирования: $c = \sigma_0/E$. В результате выражение (6.20) можно привести к виду

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\mu}t}\right). \quad (6.21)$$

Из выражения (6.21) следует, что при $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ модель Кельвина продолжает деформироваться с течением времени (рис. 44, в), при $t \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow \sigma_0/E$.

Это свойство модели Кельвина называют *последствием*. При постоянном напряжении для модели Кельвина деформация в данном теле растет с течением времени. Это явление также называют *обратимой ползучестью*, так как при $\sigma_0 \rightarrow 0$ деформация (6.21), обусловленная временем, стремится к нулю (рис. 44, б).

При общем напряженно-деформированном состоянии модели Кельвина уравнения связи напряжений и деформаций имеют вид

$$s_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\mu\dot{e}_{ij}; \sigma_c = 3K\varepsilon_c + 3\eta\dot{\varepsilon}_c; \sigma_{ij} = \sigma_c\delta_{ij} + s_{ij}.$$

Из этих уравнений как частный случай следуют уравнения для модели Гука (при $\mu = \eta = 0$) и модели Ньютона (при $3K\varepsilon_c = -p$, $G = 0$).

Модель вязкоупругого тела (модель Максвелла)

Механический аналог модели Максвелла (рис. 45, а) приводит к выражениям $P_H + P_\Gamma = P; \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_H + \dot{\varepsilon}_\Gamma$.

Для вязкоупругого тела Максвелла при одноосном нагружении имеет место следующее уравнение:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu}. \quad (6.22)$$

Рассмотрим случай $\sigma = \text{const}$. Тогда из уравнения (6.22) имеем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\mu}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{\mu}t + c,$$

то есть модель Максвелла обладает свойством обратимой ползучести (последствием).

Рассмотрим случай $\varepsilon = \text{const}$ (рис. 45, б). Тогда из уравнения (6.22) следует

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu} = 0.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим

$$\ln(\sigma) = -\frac{E}{\mu}t + \ln(c).$$

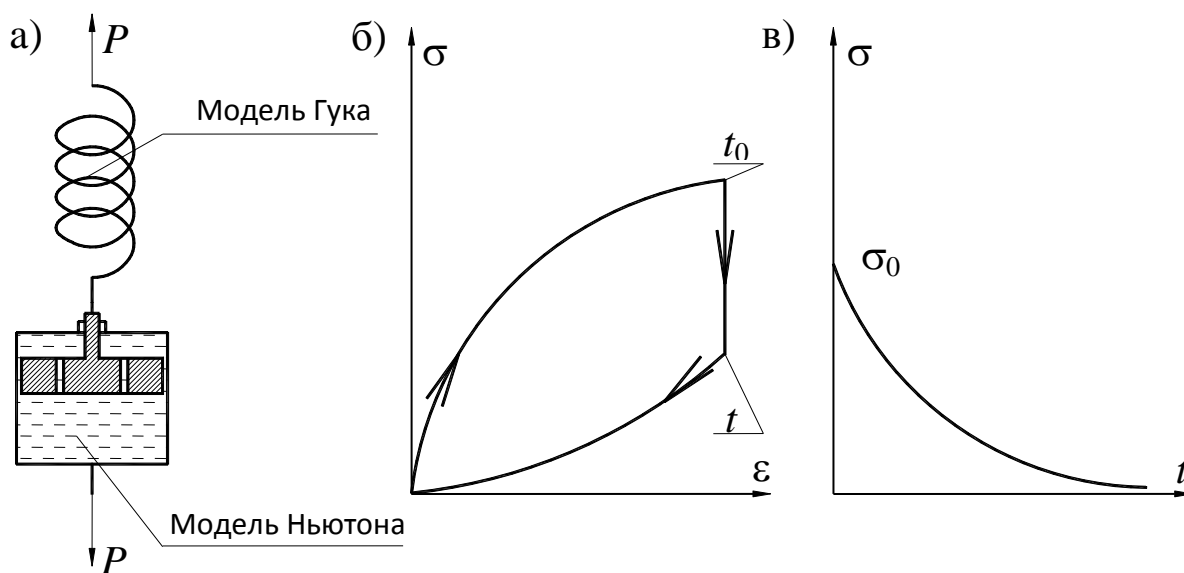


Рис. 45

Пусть при $t=0$ $\sigma = \sigma_0$, тогда уравнение сведется к виду

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\mu}t}. \quad (6.23)$$

Из (6.23) следует, что модель Максвелла обладает *свойством релаксации напряжений*: при постоянной деформации напряжение с течением времени уменьшается (рис. 45, в).

Обнаруженные свойства последствия и релаксации определяют реономные свойства (свойства, зависящие от времени) материалов (полимерных, металлов при высоких температурах).

В общем случае напряженно-деформированное состояние вязкоупругого тела Максвелла определяется выражениями:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2\mu}; \quad \dot{\varepsilon}_c = \frac{\dot{\sigma}_c}{3K} + \frac{\sigma_c}{\eta} \quad (6.24)$$

Рассмотренные модели Кельвина и Максвелла имеют следующие свойства:

- дифференциальные уравнения моделей линейные;
- характеристики материалов G , K , μ , η являются постоянными;
- уравнения связи перемещений и деформаций определяются линейными соотношениями Коши.

6.4.2. Неклассические нелинейные модели

Модели деформируемых твердых тел

Различают три вида нелинейно деформируемых тел:

1. Физически нелинейные твердые тела – это тела, у которых характеристики упругости являются переменными величинами.

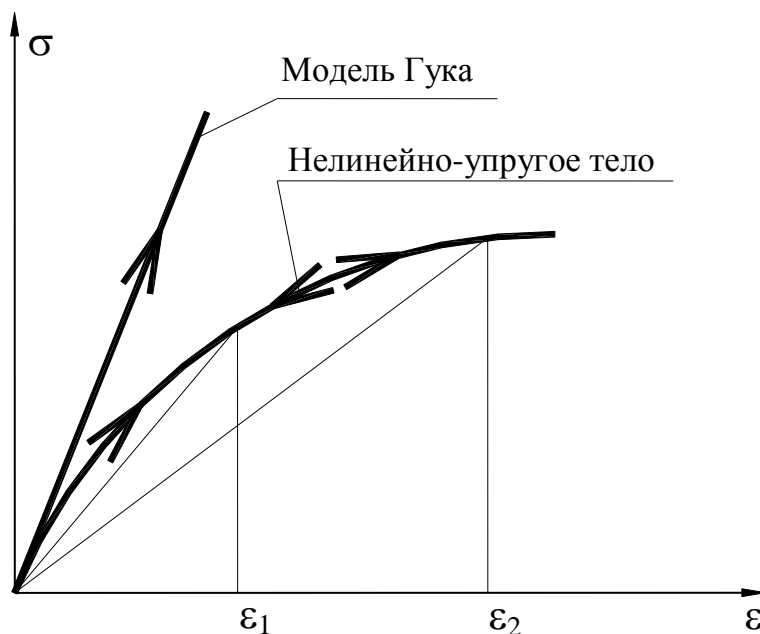


Рис. 46

Для одноосного напряженного состояния физически нелинейного (нелинейно-упругого) тела (рис. 46) зависимость напряжений от деформаций имеет вид $\sigma = E(\varepsilon) \cdot \varepsilon$, тогда как для линейно-упругого $\sigma = E\varepsilon$, где $E = \text{const}$.

В общем случае напряженно-деформированное состояние физически нелинейного упругого тела определяется выражениями:

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= 2G(\varepsilon_1) e_{ij}, \\ \sigma_c &= 3K\varepsilon_c, \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

где $K = \text{const}$.

Тензор напряжений, очевидно, определяется суммой

$$\sigma_{ij} = \sigma_c \delta_{ij} + s_{ij},$$

или

$$\sigma_{ij} = 3K\varepsilon_c \delta_{ij} + 2G(\varepsilon_M) e_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (6.26)$$

Уравнения (6.25) и (6.26) справедливы как для активного, так и пассивного нагружения. Скалярное и векторное свойства физически нелинейного упругого твердого тела подобны свойствам тела Гука:

- – скалярное: $\sigma_M = 2G(\varepsilon_M)\varepsilon_M$;
- – векторное: $[s_{ij}]^H = [e_{ij}]^H$.

2. Геометрически нелинейные упругие тела – это тела у которых физическое соотношение может иметь вид (6.9), (6.10), а соотношения между ε_{ij} и U_i подчиняются не соотношениям Коши, а соотношениям Альманси.

Так, в эйлеровом пространстве

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{\partial U_i}{\partial \chi_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial U_k}{\partial \chi_i} \frac{\partial U_k}{\partial \chi_i} \quad (i, k = 1, 2, 3) \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial U_i}{\partial \chi_j} + \frac{\partial U_j}{\partial \chi_i} - \frac{\partial U_k}{\partial \chi_i} \frac{\partial U_k}{\partial \chi_j} \quad (i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

Это приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям Ламе (для деформации тонких стержней, пластин и оболочек).

3. Физически и геометрически нелинейные упругие тела – тела в которых напряженно-деформированное состояние определяется соотношениями (6.26) и (6.27).

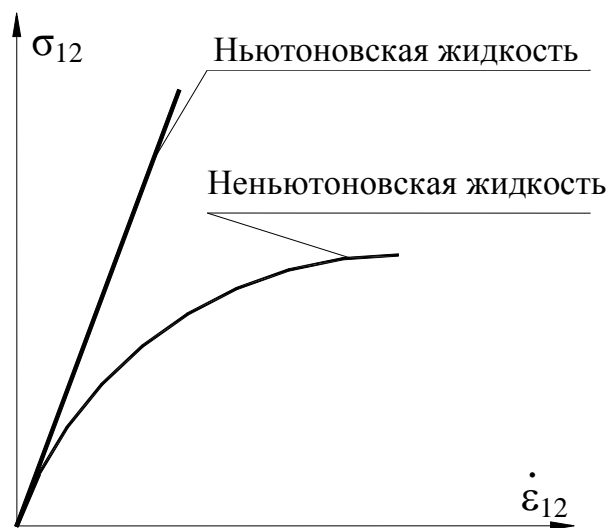


Рис. 47

Физически нелинейные модели жидкости (неньютоновские жидкости)

Для одноосного течения неньютоновской жидкости (рис. 47) в общем случае:

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= 2\mu(\dot{\epsilon}_i) \cdot \dot{\epsilon}_{ij} \\ \sigma_c &= 3\eta \cdot \dot{\epsilon}_c - p \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

векторное и скалярное свойства

$$\sigma_M = 2\mu(\dot{\epsilon}_M)\dot{\epsilon}_M, [s_{ij}]^H = [\dot{\epsilon}_{ij}]^H. \quad (6.29)$$

Нелинейные модели Кельвина и Максвелла

В линейных моделях принималось $G=\text{const}$, $\mu=\text{const}$. В нелинейных моделях принимается $G = G(\epsilon_M)$, $\mu = \mu(\dot{\epsilon}_M)$.

6.4.3. Модели упругопластических твердых тел

Модель Прандля

Последовательное соединение моделей Гука и Сен-Венана называют моделью Прандля. Механический аналог модели Прандля приведен на рис. 48, а. Диаграмма $P(\Delta l)$ этой модели дана на рис. 48, б, где $\Delta l_{\text{упр}}$ – упругое увеличение базы модели l ; $\Delta l_{\text{необр}}$ – необратимое увеличение l за счет сдвига тела.

В случае одноосного деформирования твердого тела Прандля имеем: при $\sigma < \sigma_T$ $\epsilon^e = \sigma/E$, при $\sigma = \sigma_T$ $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$, где ϵ^e и ϵ^p – упругая и пластическая (необратимая) деформации (рис. 48, в). Таким образом, суммарная деформация тела Прандля $\epsilon = \sigma/E + \epsilon^p$.

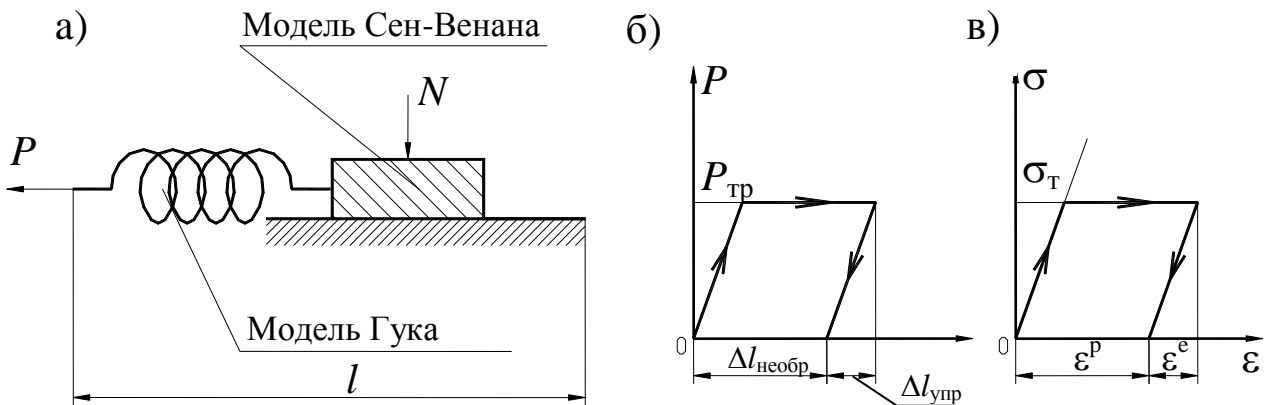


Рис. 48

Модель А.А. Ильюшина

Положим, что сила трения в модели Сен-Венана не постоянна, а зависит от перемещения тела. Тогда $P_{\text{тр}} = P_{\text{тр}}(\Delta l)$ и диаграмма $P(\Delta l)$ будет иметь вид, как на рис. 49, а, где Δl^e и Δl^p – абсолютные упругая и пласти-

ческая (необратимая) деформации модели А.А. Ильюшина с коэффициентом трения, зависящим от Δl или Δl^p ; $\Delta l = \Delta l^e + \Delta l^p$.

Для одноосного деформирования будем иметь зависимость $\sigma(\varepsilon)$, вид которой показан на рис. 49, б, где ε^e и ε^p – относительные упругая и пластическая деформации.

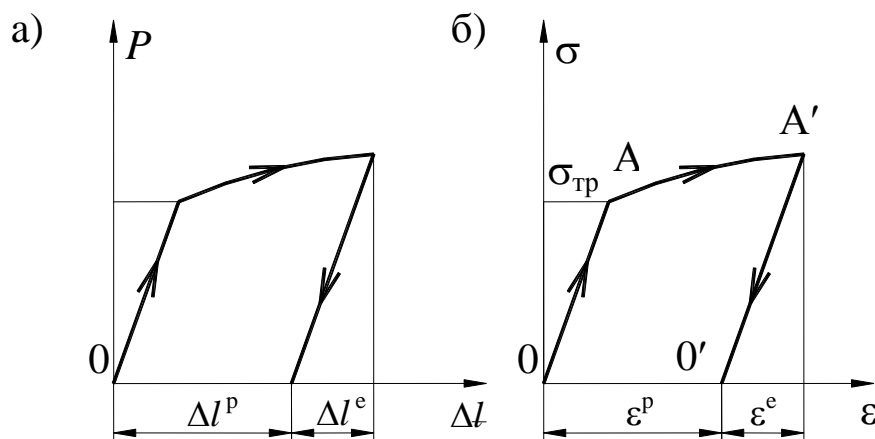


Рис. 49

Для модели А.А. Ильюшина имеем при $\sigma \leq \sigma_T$ $\sigma = E\varepsilon$, а при $\sigma > \sigma_T$ $\sigma = E(\varepsilon)\varepsilon$.

Модель Ильюшина отличается от модели упругого тела следующими особенностями:

- при активном нагружении AA' (рис. 49, б) модель Ильюшина описывается моделью упругого физически нелинейного твердого тела (6.25) в области $\sigma > \sigma_T$;
- при пассивном нагружении (разгрузке) $A'O'$ связь $\sigma(\varepsilon)$ подчиняется закону Гука

$$\Delta\sigma = \Delta\varepsilon \cdot E, \text{ где } \Delta\sigma = \sigma(t+\Delta t) - \sigma(t); \Delta\varepsilon = \varepsilon(t+\Delta t) - \varepsilon(t).$$

- модели Ильюшина $\sigma(\varepsilon)$ является неоднозначной функцией. В точке A' возникает ее разветвление в зависимости от вида нагружения (активного или пассивного).

В случае сложного напряженно-деформированного состояния уравнения связи записываются:

- при активном нагружении $\sigma_m(t+\Delta t) > \sigma_m(t)$ в области $\sigma_m > \sigma_T$ (упругопластическое деформирование)

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= 2G(\varepsilon_i) e_{ij}, \\ \sigma_c &= 3K\varepsilon_c. \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

Эти выражения совпадают с уравнениями для физически нелинейного твердого тела;

- при пассивном нагружении $\sigma_m(t+\Delta t) < \sigma_m(t)$

$$\left. \begin{aligned} \Delta s_{ij} &= 2G\Delta e_{ij}, \\ \Delta \sigma_c &= 3K\Delta \varepsilon_c, \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

а следовательно, $\Delta \sigma_{ij} = \Delta \sigma_c \delta_{ij} + \Delta s_{ij} = 3K\Delta \varepsilon_c \delta_{ij} + 2G\Delta e_{ij}$.

Полная идентичность (6.30) и (6.25) позволяет сделать вывод, что скалярное и векторное свойства модели А.А. Ильюшина совпадают со свойствами физически нелинейного упругого тела при активном нагружении.

Модель А.А. Ильюшина справедлива лишь для простого нагружения, то есть при $s_{ij}^H(t) = s_{ij}^H(t+\Delta t)$.

6.4.4. Модель несжимаемой сыпучей среды

Эта среда описывается моделью условно твердого тела. Представляет собой параллельное соединение модели неньютоновской жидкости и модели Сен-Венана. Модель имеет следующие свойства:

- данная среда находится в равновесии, если в любом ее сечении $\sigma_v < 0$, или $\sigma_v = \sigma_{ij} n_i n_j < 0$, или $0 > \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то есть при этом среда ведет себя как твердое тело;
- для заданной среды имеет место соотношение $\tau_{max} = f(\sigma_v)$ – свойство нелинейной модели Сен-Венана.

В случае движения этой среды связь напряжений и деформаций такая же, как в модели неньютоновской жидкости,

$$s_{ij} = 2\mu(\dot{\varepsilon}_m)\dot{e}_{ij}; \sigma_c = 3\eta\dot{\varepsilon}_c - p.$$

Векторное и скалярное свойства совпадают с аналогичными свойствами неньютоновской жидкости.

7. ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

7.1. Работа внешних сил

Пусть на тело, находящееся в равновесии, действуют поверхностные и объемные силы (рис.50).

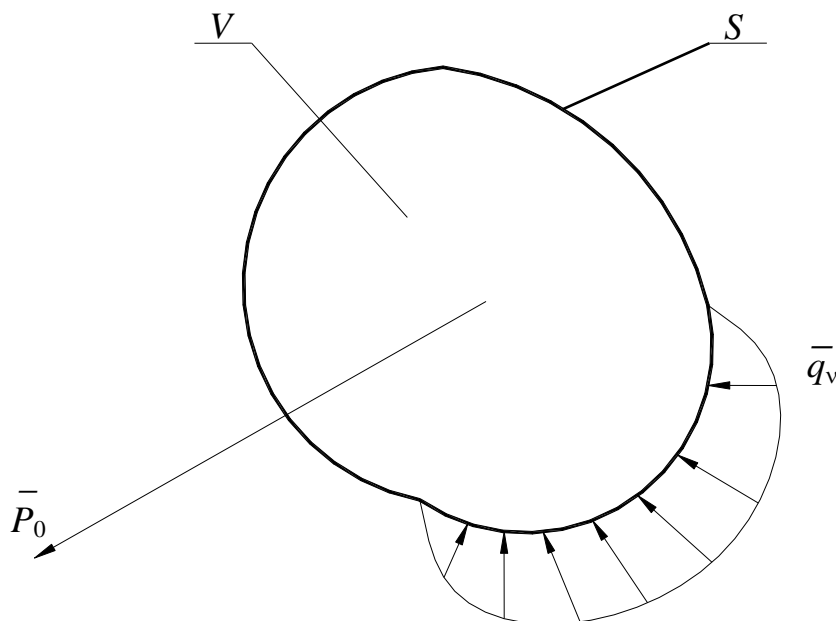


Рис. 50

Дадим приращение силам: $d\mathbf{P}_0(dP_{01},dP_{02},dP_{03})$, $d\mathbf{q}_v(dq_{v1},dq_{v2},dq_{v3})$. Эти силы вызывают в теле приращение перемещений $d\mathbf{U}(dU_1,dU_2,dU_3)$. Приращение работы от сил $\mathbf{P}_0(P_{01},P_{02},P_{03})$, $\mathbf{q}_v(q_{v1},q_{v2},q_{v3})$ на перемещении $d\mathbf{U}$ равно

$$dA = \int_V P_{0i} dU_i dV + \int_S q_{vi} dU_i dS. \quad (7.1)$$

Подставим в выражение (7.1) $q_{vi} = \sigma_{ij} n_j$, в результате получим:

$$dA = \int_V P_{0i} dU_i dV + \int_S \sigma_{ij} n_j dU_i dS. \quad (7.2)$$

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса для перехода от интеграла по поверхности к интегралу по объему:

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dU_i dS = \int_V \frac{\partial}{\partial \chi_j} (\sigma_{ij} dU_i) dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \chi_j} dU_i dV + \int_V \sigma_{ij} d \left(\frac{\partial U_i}{\partial \chi_j} \right) dV. \quad (7.3)$$

Подставим выражение (7.3) в выражение (7.2), в результате получим

$$dA = \int_V \left(P_{0i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \chi_j} \right) dU_i dV + \int_V \sigma_{ij} d \left(\frac{\partial U_i}{\partial \chi_j} \right) dV, \quad (7.4)$$

где
$$P_{0_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \chi_j} = 0,$$

так как тело находится в равновесии (5.28). Тогда приращение работы

$$dA = \int_V \sigma_{ij} d \left(\frac{\partial U_i}{\partial \chi_j} \right) dV, \quad (7.5)$$

где $\partial U_i / \partial \chi_j$ – тензор дисторсии. Распишем подынтегральное выражение (7.5):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} d \left(\frac{\partial U_i}{\partial \chi_j} \right) &= \sigma_{11} d \left(\frac{\partial U_1}{\partial \chi_1} \right) + \sigma_{12} d \left(\frac{\partial U_1}{\partial \chi_2} \right) + \sigma_{13} d \left(\frac{\partial U_1}{\partial \chi_3} \right) + \\ &+ \sigma_{21} d \left(\frac{\partial U_2}{\partial \chi_1} \right) + \sigma_{22} d \left(\frac{\partial U_2}{\partial \chi_2} \right) + \sigma_{23} d \left(\frac{\partial U_2}{\partial \chi_3} \right) + \\ &+ \sigma_{31} d \left(\frac{\partial U_3}{\partial \chi_1} \right) + \sigma_{32} d \left(\frac{\partial U_3}{\partial \chi_2} \right) + \sigma_{33} d \left(\frac{\partial U_3}{\partial \chi_3} \right). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Предположим, что тело достаточно жесткое $\partial U_i / \partial \chi_j \ll 1$ (тензор деформаций ε_{ij} определяется соотношениями Коши). Тогда, учитывая зависимости

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial U_i}{\partial \chi_i}; \varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial \chi_j} + \frac{\partial U_j}{\partial \chi_i},$$

выражение (7.6) можно привести к тензорному виду

$$\sigma_{ij} d \left(\frac{\partial U_i}{\partial \chi_j} \right) = \sigma_{ij} d \varepsilon_{ij},$$

и приращение работы (7.5) определится интегралом по объему тела от свертки тензоров σ_{ij} и $d\varepsilon_{ij}$

$$dA = \int_V \sigma_{ij} d \varepsilon_{ij} dV. \quad (7.7)$$

Таким образом, приращение работы внешних сил равно работе внутренних сил на приращениях тензора деформаций в объеме тела V . Величина $de = \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}$ представляет собой приращение упругого потенциала $e = e(\varepsilon_{ij})$, поэтому интеграл (7.7) можно записать

$$dA = \int_V de dV,$$

где

$$de = \sigma_{11} d\varepsilon_{11} + \sigma_{22} d\varepsilon_{22} + \sigma_{33} d\varepsilon_{33} + \sigma_{12} d\varepsilon_{12} + \sigma_{23} d\varepsilon_{23} + \sigma_{31} d\varepsilon_{31} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (7.8)$$

7.2. Потенциальная энергия упругого тела

7.2.1. Потенциальная энергия линейно-упругого тела

В линейно-упругом теле объема dV (рис. 51, а) потенциальная энергия для одноосного растяжения равна (рис. 51, б)

$$d\Pi = \frac{1}{2}(\sigma_{11}d\chi_2d\chi_3)(\varepsilon_{11}d\chi_1) = \frac{1}{2}\sigma_{11}\varepsilon_{11}dV = \pi dV,$$

где

$$dV = d\chi_1d\chi_2d\chi_3, \quad \pi = \frac{1}{2}\sigma_{11}\varepsilon_{11}.$$

Здесь π – потенциальная энергия для одноосного нагружения, отнесенная к единице объема, а следовательно, $\pi = d\Pi/dV$.

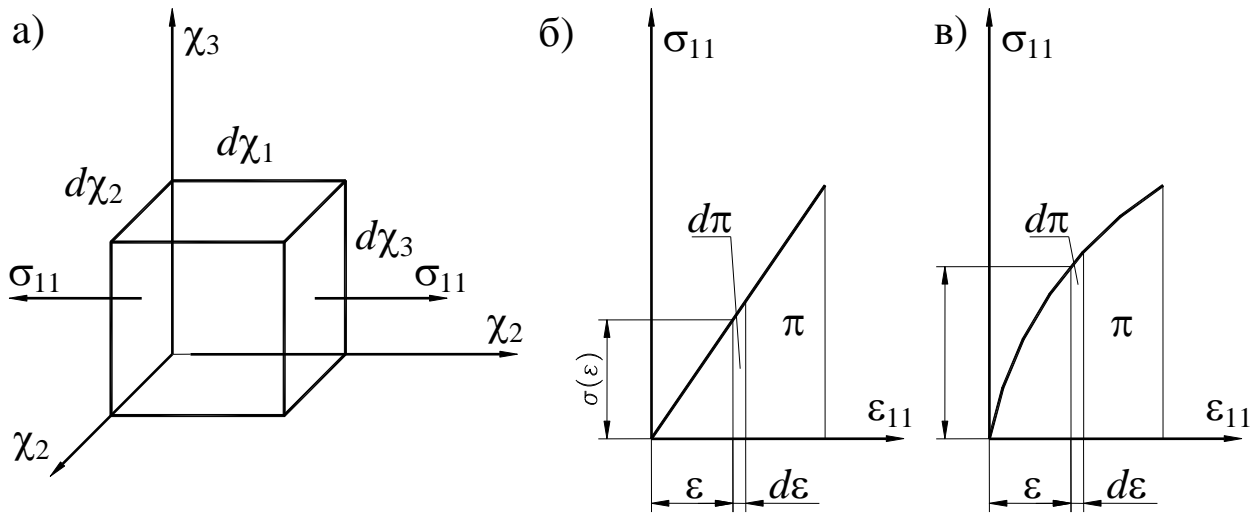


Рис. 51

Из рис. 51, б следует, что $d\pi = \sigma_{11}d\varepsilon_{11}$, а потенциальная энергия в объеме V равна

$$\Pi = \int_V \pi dV.$$

В общем случае напряженно-деформированного состояния имеем

$$d\pi = \sigma_{11}d\varepsilon_{11} + \sigma_{22}d\varepsilon_{22} + \sigma_{33}d\varepsilon_{33} + \sigma_{12}d\varepsilon_{12} + \sigma_{23}d\varepsilon_{23} + \sigma_{31}d\varepsilon_{31} = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}. \quad (7.9)$$

Для линейно-упругого тела потенциальная энергия единицы объема будет

$$\pi = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}.$$

Представим данное выражение в виде

$$\pi = \frac{1}{2} (\sigma_{\bar{n}} \delta_{ij} + s_{ij}) (\varepsilon_{\bar{n}} \delta_{ij} + e_{ij}) = \frac{3}{2} \sigma_{\bar{n}} \varepsilon_c + \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij},$$

где $3\sigma_c \varepsilon_c / 2 = \pi_v$, $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} / 2 = \pi_\phi$ – потенциальные энергии изменения объема и формы соответственно.

Для π_v и π_ϕ можно с помощью соотношений (6.9) и (6.14) получить следующие выражения:

$$\pi_v = \frac{9}{2} K \varepsilon_c^2 = \frac{1}{2} K \theta^2, \quad \pi_\phi = \frac{2}{2} G e_{ij} e_{ij} = 2G e_m^2,$$

или

$$\pi_v = \frac{1}{2} \frac{1}{K} \sigma_c^2, \quad \pi_\phi = \frac{1}{2G} \sigma_m^2.$$

7.2.2. Потенциальная энергия нелинейно упругого тела

В общем случае напряженно-деформированного состояния тела (рис. 51, в) можно записать $d\pi = \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij}) d\varepsilon_{ij}$. Сопоставляя (7.8) и (7.9), получим

$$d\pi = de. \quad (7.10)$$

Равенство (7.10) определяет закон сохранения энергии в дифференциальной форме, где de – работа внешних сил, отнесенная к единице объема, $d\pi$ – работа внутренних сил отнесенная к единице объема. В случае линейно-упругого тела закон сохранения энергии запишется

$$\pi = e. \quad (7.11)$$

7.2.3. Потенциал напряжений $e(\varepsilon_{ij})$

Применим к изучению процесса деформирования тела первый и второй законы термодинамики:

$$de + dQ = dW; \quad (7.12)$$

$$TdS_T = dQ, \quad (7.13)$$

где dQ – энергия, связанная с приращением тепла; dW – приращение внутренней энергии; de – приращение работы внешних сил; T – температура; dS_T – приращение энтропии. После подстановки (7.8) и (7.13) в первый закон термодинамики (7.12) получим

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + TdS_T, \quad (7.14)$$

где $W = W(\varepsilon_{ij}, S_T)$ – термодинамический потенциал. Полный дифференциал W

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial W}{\partial S_T} dS_T. \quad (7.15)$$

Сопоставляя (7.14) и (7.15), получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \\ T &= \frac{\partial W}{\partial S_T}. \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

В случае адиабатического процесса ($dQ=0$) из (7.12) следует, что $dW=de$, тогда выражения (7.16) запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}}, \\ T &= \frac{\partial e}{\partial S_T}. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Здесь функция $e=e(\varepsilon_{ij}, S_T)$ называется *потенциалом напряжений*. Соотношения (7.17) справедливы и для изотермических процессов.

Для линейно-упругого тела справедливы соотношения $\pi=e=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/2$, которые с учетом (7.17) примут вид

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij}, \\ \pi &= \frac{1}{2} \frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Соотношения (7.18) называют *формулами Клапейрона*.

7.2.4. Потенциал деформаций $e'(\sigma_{ij})$

Представим (7.8) в виде

$$de = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = d(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) - \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}. \quad (7.19)$$

Из выражения (7.19) следует

$$\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} = d(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - e), \quad (7.20)$$

где величина $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-e=\pi'=e'$ называется *потенциалом деформации* линейно или нелинейно упругого тела, следовательно,

$$\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} = d\pi' = de', \quad (7.21)$$

На рис. 52 показаны потенциальная энергия и потенциал деформаций для одноосного растяжения физически нелинейного упругого тела. Из рисунка следует, что $\pi' \neq \pi$, а следовательно, $e \neq e'$. Из (7.21) получаем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \pi'}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial e'}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (7.22)$$

Вместо (7.22) можно записать

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - e)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (7.23)$$

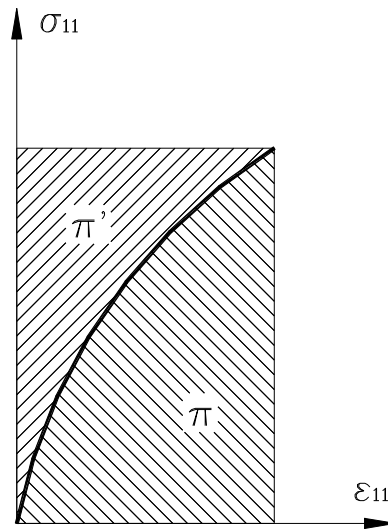


Рис. 52

Для линейно-упругого тела $e=e'$. Тогда $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=2e$, подставляя же это равенство в (7.23), получим математическое выражение теоремы Кастильяно

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial e'}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (7.24)$$

Здесь функция $e'=e'(\sigma_{ij})$ является *потенциалом деформаций* для линейно упругого тела.

Пример использования теоремы Кастильяно

При одноосном деформировании выражение (7.24) запишется $\varepsilon=\partial e/\partial \sigma$, где $e=\sigma\varepsilon/2=\sigma^2/2E$.

В случае изгиба балки $\sigma=Mz/I$, где $M=M(x)$ изгибающий момент в сечениях балки (рис. 53); $I(x)$ – момент инерции сечений; z – расстояние от нейтральной оси сечения до искомой его точки. Тогда

$$e = \frac{1}{2E} \frac{M^2}{I^2} z^2, \quad \Pi = \frac{1}{2E} \iiint_V \frac{M^2(x)}{I^2(x)} z^2 dx dy dz = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M^2(x)}{I(x)} dx.$$

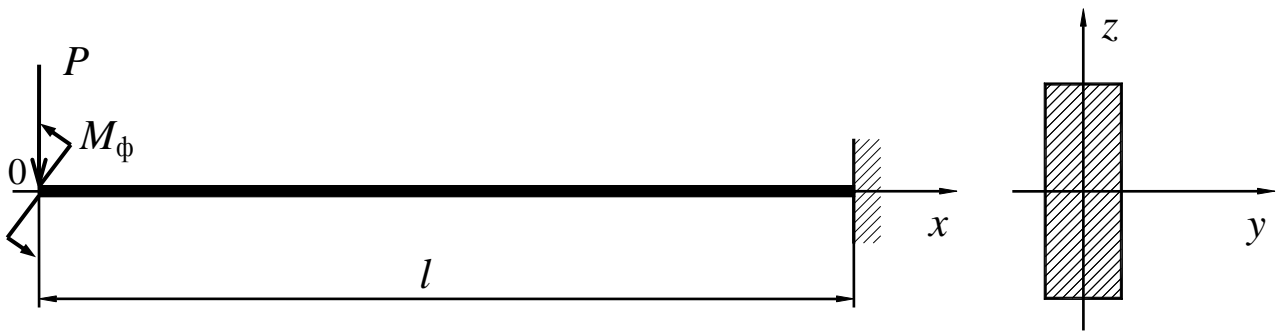


Рис. 53

Прогиб и угол поворота в сечении $x=0$ соответственно равны

$$w_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial P}, \quad \varphi_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial M_\phi}.$$

где M_ϕ – фиктивный момент, если при $x=0$ внешний момент $M=0$, или

$$w_0 = \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx, \quad \varphi_0 = \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_\phi} dx,$$

где $M=Px+M_\phi$. Для $I=\text{const}$ w_0 и φ_0 будут

$$w_0 = \frac{Pl^3}{3EI}, \quad \varphi_0 = \frac{Pl^2}{2EI}.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

К главам 1-3

1. Назовите основные гипотезы МДТТ.
2. Определите параметры движения сплошной среды в лагранжевых координатах.
3. Главная особенность представления движения среды в эйлеровых координатах.
4. Как перейти от описания движения в эйлеровых координатах к описанию в лагранжевых координатах?
5. Адекватны ли описания движения среды в эйлеровых и лагранжевых координатах?
6. Тензоры Грина и Альманси и их отличия.
7. Запишите разложение тензора дисторсии на два тензора.
8. Запишите разложение тензора скорости дисторсии на два тензора.
9. В чем отличие тензоров Коши с деформациями общего и чистого сдвигов?
10. Определите геометрический смысл компонентов тензоров Грина и Альманси и их связи с деформациями растяжения-сжатия и угловыми деформациями.
11. Найдите связь коэффициента объемной деформации с относительной объемной деформацией.
12. Назовите условия, при которых тензор Грина можно заменить тензором Коши.
13. Как связана относительная объемная деформация с компонентами тензора Коши?
14. По заданному закону движения $\chi_i = x_i + x_i(e^{\alpha_{ii}} - 1)$ с начальными условиями $\chi_i = x_i$ при $t=0$ ($i=1,2,3$) определите вектор скорости в эйлеровых координатах.
15. Если вектор перемещения в лагранжевых координатах определяется проекциями $U_1 = x_1(1 - \cos \alpha t) - x_2 \sin \alpha t$; $U_2 = x_1 \sin \alpha t - x_2(1 - \cos \alpha t)$; $U_3 = 0$, то чему будут равны векторы скорости и ускорения в эйлеровом пространстве.
16. Поле скоростей в эйлеровом пространстве определяется функциями $V_1 = a(t)\chi_1$; $V_2 = V_3 = 0$. Найдите тензор скорости деформаций, вектор скорости поворота, изменение плотности в процессе движения среды, закон ее движения; вектор перемещения в лагранжевых координатах и тензор деформаций Коши. Какая деформация имеет место здесь?
17. Докажите, что для движения среды, рассмотренного в задании 16, имеет место соотношение

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{d}{dt} \ln(1 + E_{11}),$$

если E_{11} – деформация растяжения-сжатия.

18. Задано поле скоростей в эйлеровом пространстве $V_1=b(t)\chi_2$; $V_2=V_3=0$. Определите параметры среды, указанные в задании 16. Какая деформация описывается здесь?
19. Задано: $V_1=m\chi_2$; $V_2=m\chi_1$; $V_3=0$, $m=\text{const}$. Каковы параметры движения и вид деформации?
20. Дан вектор перемещения $U_1=10^{-3}(x_1+2x_2)$, $U_2=10^{-3}(x_1-2x_2+x_3)$, $U_3=10^{-3}(3x_1+3x_3)$. Определите θ , γ_{ij} и ω_i .

К главе 4

1. Назовите свойства тензора Коши.
2. Почему главные деформации всегда вещественные числа?
3. Какими свойствами обладают главные девиаторные деформации?
4. В чем смысл инвариантности 26 видов деформаций?
5. Какой вид имеют поверхности Коши при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > 0$ и $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_3 < 0$? Покажите это.
6. Определите ε_n и ε_m при одноосном растяжении, чистом сдвиге.
7. Между какими площадками действуют экстремальные сдвиги?
8. Укажите геометрический и физический смысл условий Сен-Венана.
9. При каких условиях для односвязных областей по тензору Коши можно определить перемещения и с какой точностью?
10. При каких условиях для многосвязных областей по тензору Коши можно найти перемещения и с какой точностью?
11. По заданному тензору деформаций вычислить главные линейные деформации и их направляющие оси.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} b & a/2 & 0 \\ a/2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. По заданному тензору деформаций определите ε_1 , ε_2 , ε_3 и их направляющие косинусы:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} 10^{-3}.$$

13. Покажите, что главные оси деформаций тензоров ε_{ij} , e_{ij} и e_{ij}^H совпадают.

14. Определите экстремальные чистые сдвиги при $\varepsilon_1=2 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_2=4 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_3=-6 \cdot 10^{-3}$.
15. Покажите, что заданный тензор есть девиатор. Вычислите ε_{ij} и γ_{ij} , если $\theta=2 \cdot 10^{-3}$

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

16. Укажите способы определения главных деформаций из кубического уравнения.
17. Найдите величины ε_v и γ_v в направлении v ($\alpha=60^\circ$, $\beta=45^\circ$) по отношению к главным осям деформаций $\varepsilon_1 = 2 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_2 = -2 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_3 = -4 \cdot 10^{-3}$.

К главе 5

1. Назовите гипотезы теории напряжений.
2. Определите методом РОЗУ вектор полных напряжений.
3. Для какого состояния тела строится тензор Эйлера?
4. Назовите отличия тензора Лагранжа от тензора Эйлера.
5. Запишите условия равновесия для внутренних и поверхностных элементов твердого тела.
6. При каких условиях тензор Эйлера симметричен?
7. Перечислите свойства тензора Эйлера.
8. Почему главные напряжения – действительные числа?
9. Укажите условия $\sigma_1 \perp \sigma_2 \perp \sigma_3$.
10. Определите грани ромбокубооктаэдра с инвариантами тензора напряжений Эйлера.
11. Найдите значения σ_n , σ_m и $\tau_{ок}$ при одноосном растяжении.
12. Укажите площадки с экстремальными τ_v .
13. Какой вид должны иметь объемные силы, если тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \chi_3^2 & 0 & 2\chi_1\chi_2 \\ 0 & \chi_2^2 & \chi_1\chi_3 \\ 2\chi_1\chi_2 & \chi_1\chi_3 & 0 \end{pmatrix} \cdot P_0.$$

14. Определите главные напряжения тензора

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -20 & 40 & 0 \\ 40 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{pmatrix}, \text{ МПа.}$$

15. Покажите, что оси главных напряжений σ_{ij} и девиатора тензора σ_{ij} совпадают.
16. Определите экстремальные напряжения сдвига и площадки, в которых они действуют, если $\sigma_1=1000\text{МПа}$; $\sigma_2=600\text{МПа}$; $\sigma_3=-400\text{МПа}$.

К главе 6

1. Дайте определения видов нагружения и деформирования.
2. Определите вид нагружения (простое – сложное, активное – пассивное), если

$$s_{ij}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } s_{ij}(t + \Delta t) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 10 \\ 5 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

3. Что необходимо для получения замкнутой системы уравнений при нахождении напряженно-деформированного состояния тела?
4. Укажите отличия дифференциальных уравнений динамического деформирования и статики, а также необходимые условия однозначности определения напряженно-деформированного состояния.
5. Сформулируйте постулат макроскопической определенности.
6. Какие свойства описывают классические модели МСС?
7. Дайте определение твердого, изотропного, однородного твердого тела и назовите его независимые характеристики упругости.
8. Приведите уравнения связи ε_{ij} и σ_{ij} при объемном деформировании твердого тела.
9. Определите σ_{ij} по заданному тензору деформаций для модели Гука, если $E=2,1 \cdot 10^5\text{МПа}$ и $\nu=0,33$,

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \cdot 2 & \frac{1}{2} \cdot 3 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 & 4 & \frac{1}{2} \cdot 5 \\ \frac{1}{2} \cdot 3 & \frac{1}{2} \cdot 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

10. Вычислите ε_{ij} по заданному тензору напряжений Эйлера для модели Гука, если $E=10^5\text{МПа}$ и $\nu=0,35$,

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 200 & 300 & 400 \\ 300 & -600 & -500 \\ 400 & -500 & -800 \end{pmatrix} \text{ МПа.}$$

11. Запишите уравнения Ламе в проекциях и в векторной форме.
12. Укажите различия идеальной и ньютоновской жидкостей, их скалярные и векторные свойства.
13. Приведите векторные и скалярные свойства модели Гука.

14. Перечислите механические аналоги моделей Гука, ньютоновской жидкости и Сен-Венана.
15. В чем подобие тела Сен-Венана и ньютоновской жидкости
16. Какие свойства твердых тел описывают модели Кельвина и Максвелла?
17. Укажите ограничения моделей Кельвина и Максвелла, к каким моделям они относятся?
18. Что означает геометрическая и физическая нелинейность?
19. Укажите отличие неклассических моделей от классических моделей Гука, Ньютона, Сен-Венана.
20. Приведите отличия модели Прандтля от модели А.А.Ильюшина.
21. Какое состояние (упругое или упругопластическое) в точке тела с напряженно-деформированным состоянием, указанным в п. 10, если $\sigma_T=1000$ МПа?
22. В чем состоит неоднозначность связи ε_{ij} и σ_{ij} в упругопластической области деформирования?
23. Укажите отличие несжимаемой сыпучей среды от модели Ньютона.
24. Для тензора σ_{ij} , указанного в п. 10 на параллелепипеде, укажите компоненты напряжений.

К главе 7

1. Как связана работа внешних сил с σ_{ij} ?
2. Определите потенциальную энергию в модели Гука при одноосном и двухосном напряженно-деформированном состояниях, а также при изгибе, кручении, растяжении.
3. Запишите закон сохранения энергии для физически линейного и нелинейного упругого тела.
4. Дайте связь σ_{ij} с потенциальной энергией.
5. Укажите связь ε_{ij} с потенциалом деформаций для линейно- и нелинейно-упругих тел.
6. Запишите формулы Клапейрона и Кастильяно для изгиба и кручения балки переменного сечения.
7. Определите термодинамический потенциал для адиабатического и изотермического процессов деформирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Александров, А. В.** Соппротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности: учеб для строит. спец. вузов. / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высш. шк., 2002. – 400 с.
2. **Безухов, Н. И.** Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов – М.: Высш. шк., 1961. – 538 с.
3. **Безухов, Н. И.** Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М.: Высш. шк., 1965. – 320 с.
4. **Волков, В. М.** Модели сплошных сред и прикладные задачи теории пластичности: учеб. пособие / В. М. Волков. – Горький: ГПИ, 1972. – 125 с.
5. **Гольденблат, И. И.** Нелинейные проблемы теории упругости / И. И. Гольденблат. – М.: Наука, 1969. – 336 с.
6. **Грин, А.** Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Грин, Дж. Адкинс. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
7. **Ильюшин, А. А.** Задачи и упражнения по механике сплошной среды / А. А. Ильюшин, В. А. Ломакин, А. П. Шмаков – М.: МГУ, 1973. – 162 с.
8. **Ильюшин, А. А.** Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М.: МГУ, 1971. – 245 с.
9. **Колтунов, М. А.** Прикладная механика деформируемого твердого тела / М. А. Колтунов. – М.: Высш. шк., 1983. – 352 с.
10. **Механические испытания материалов:** учеб. пособие / А. Е. Жуков [и др.]. – Нижний Новгород: НГТУ им. Р. Е. Алексеева, 2014. – 86 с.
11. **Морозов, Н. Ф.** Лекции по избранным вопросам механики сплошных сред / Н. Ф. Морозов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. – 91 с.
12. **Новожилов, В. В.** Теория упругости / В. В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
13. **Папкович, П. Ф.** Теория упругости / П. Ф. Папкович. – Л.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
14. **Партон, В. З.** Методы математической теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М.: Наука, 1981. – 685 с.
15. **Работнов, Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
16. **Седов, Л. И.** Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: МГУ, 1970. – 492 с.
17. **Филин, А. П.** Прикладная механика деформируемого твердого тела / А. П. Филин. – М.: Наука, 1975. Т. 1. – 832 с.

Волков Вячеслав Михайлович
Жуков Александр Евгеньевич
Пименов Станислав Александрович
Гибулин Евгений Николаевич
Болотин Александр Алексеевич

**ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД:
МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

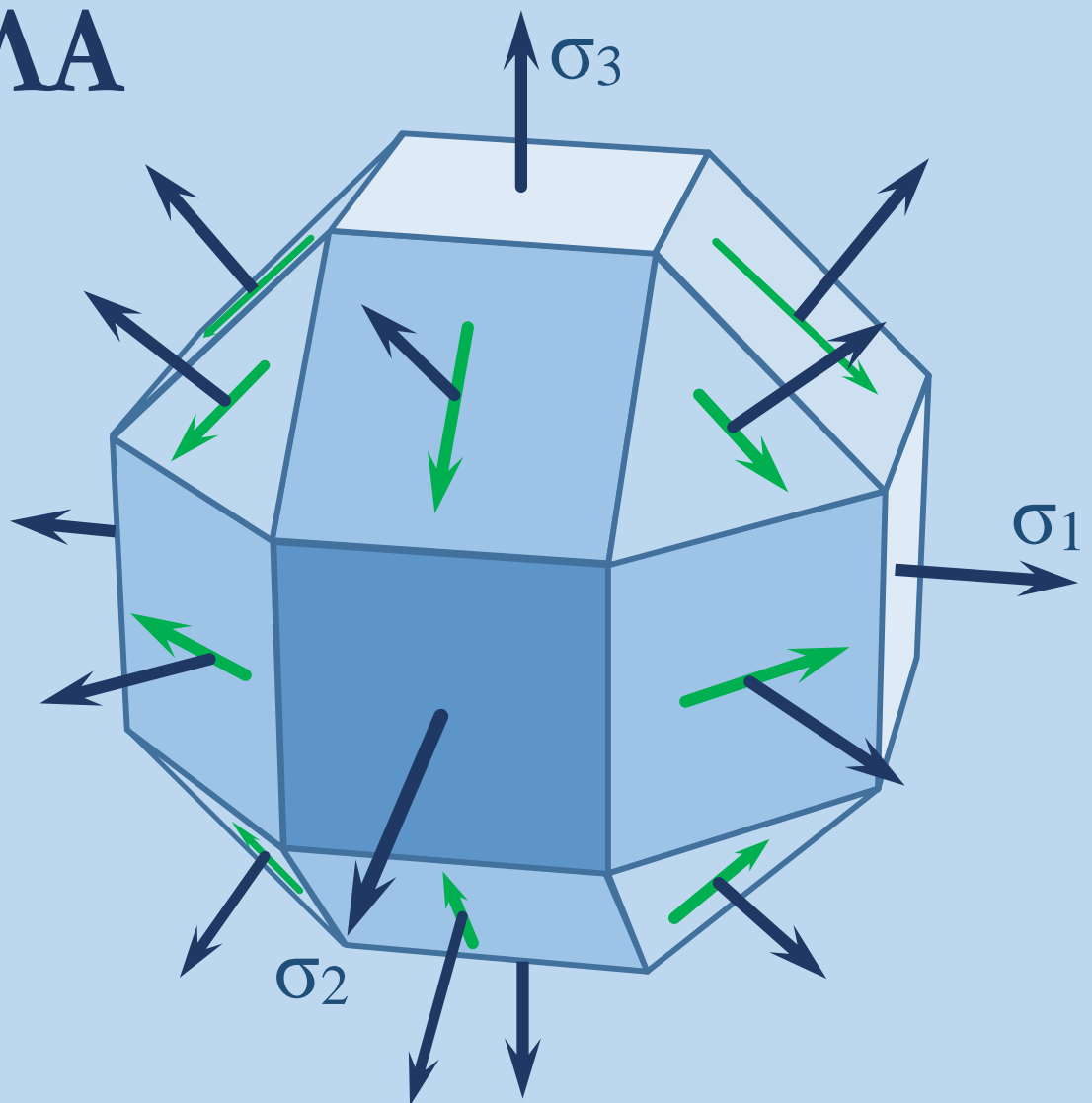
Редактор **Т.В. Третьякова**
Технический редактор **Т.П. Новикова**
Компьютерный набор и верстка: **А.С. Суворов, А.Е. Жуков**

Подписано в печать 19.12.2016. Формат 60 x 84 ¹/₁₆. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,75. Тираж 100 экз. Заказ ____.

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Типография НГТУ
Адрес университета и полиграфического предприятия:
603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

Основы механики сплошных сред

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА



Нижний Новгород 2016