

ных перерезывающих сил и изгибающих моментов по длине судна. Для такого расчета обычно используется масштаб Бонжана и на ходится равновесное положение оси волны относительно корпуса, а затем площади вышедших из воды и вошедших в воду шпангоутов. Интегрирование производится в табличной форме. Подробную схему этого расчета можно найти в Справочнике [96, т. 3, с. 126].

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для достаточно глубокого усвоения вопросов, связанных с вероятностной оценкой внешних сил, действующих на корпус судна, и оценкой прочности, необходимо знание основ теории вероятностей и теории случайных процессов.

В программе курса математики предусматривается изучение теории вероятностей. Предполагается, что читателю знакомы основы этой науки [24, 31, 92]. Тем не менее авторы сочли необходимым предпослать дальнейшему изложению краткий обзор основных понятий по теории вероятностей и теории случайных процессов, которые используются в современных подходах к оценке прочности.

Приведенное краткое изложение вопросов не претендует на математическую строгость; многие положения приводятся без выводов, лишь с необходимыми пояснениями. Понятие «событие» и основные теоремы теории вероятностей здесь не рассматриваются.

§ 8. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Понятие случайной величины — одно из основных понятий теории вероятностей и является обобщением понятия «событие».

Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, и заранее неизвестно, какое именно.

Случайные величины могут быть дискретными или непрерывными.

Примером дискретной случайной величины является число появлений данного события в серии n испытаний, которое может принимать значения $0, 1, 2, \dots$

Непрерывные случайные величины принимают любое значение в заданном интервале.

В качестве примеров можно указать на такие случайные величины, как абсцисса точки попадания при выстреле, ординаты морских волн, углы качки корабля, величины изгибающих моментов на волнении и т. п.

Мы ограничимся рассмотрением непрерывных случайных величин, наиболее важных для целей излагаемого курса.

Обозначим случайные величины большими буквами X, Y, Z , а их возможные значения соответственно малыми буквами x, y, z .

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется вероятность того, что эта случайная величина примет значения, меньшие x , т. е.

$$F(x) = P(X < x). \quad (2.1)$$

Функция распределения $F(x)$ называется также интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения. Этой функции присущи следующие свойства:

1) она является неубывающей функцией от x , т. е. при

$$x_2 > x_1 \quad F(x_2) \geq F(x_1);$$

2) при $x = -\infty$
 $F(-\infty) = 0;$

3) при $x = +\infty$
 $F(+\infty) = 1.$

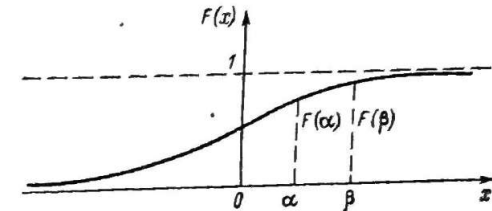


Рис. 2.1. Вид функции распределения $F(x)$.

Вид функции распределения для непрерывной случайной величины X показан на рис. 2.1.

Функция $F(x)$ безразмерна. Вероятность того, что случайная величина заключена в интервале значений от α до β , будет

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \quad (2.2)$$

Если интервал уменьшать и полагать величину β стремящейся к α , то в пределе получим

$$P(X = \alpha) = 0.$$

Это означает: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определенное значение, равна нулю. Здесь мы сталкиваемся со случаем, когда событие, состоящее в равенстве $X = \alpha$, возможно, но вероятность его оказывается равной нулю.

Весьма удобной для рассмотрения является так называемая плотность вероятности непрерывной случайной величины X :

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (2.3)$$

Функцию $p(x)$ называют также дифференциальной функцией распределения (рис. 2.2). Она имеет размерность $1/x$.

Кривая, изображающая плотность вероятности $p(x)$, называется кривой распределения.

Очевидно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx. \quad (2.4)$$

Поскольку $F(x)$ — неубывающая функция от x , то $p(x) \geq 0$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1. \quad (2.5)$$

Вероятность попадания случайной величины на участок значений от α до β

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x) dx. \quad (2.6)$$

Величина $p(x) dx$ называется элементом вероятности и представляет собой вероятность попадания на участок от x до $x + dx$

$$p(x) dx = P(x < X < x + dx).$$

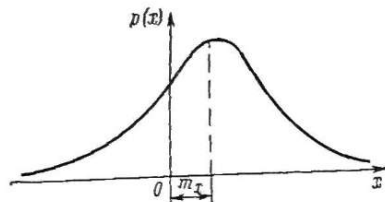


Рис. 2.2. Плотность вероятности $p(x)$.

Функция распределения $F(x)$ или плотность вероятности $p(x)$ полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако в ряде задач функция распределения может быть неизвестна. В таких случаях для описания вероятностных

свойств могут служить некоторые числовые характеристики случайной величины. Среди этих характеристик наибольшее значение имеют математическое ожидание и дисперсия случайной величины, которые связаны с начальными моментами дифференциальной функции распределения.

Начальным моментом s -го порядка называется величина

$$\alpha_s [X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s p(x) dx. \quad (2.7)$$

Математическим ожиданием $M[X]$ называется начальный момент первого порядка

$$M[X] = \alpha_1 [X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx. \quad (2.8)$$

Нетрудно видеть, что математическое ожидание, которое в дальнейшем будем обозначать m_x , равно абсциссе центра тяжести площади под кривой плотности вероятности, поскольку площадь под кривой на основании (2.5) равна единице.

Математическое ожидание случайной величины характеризует ее некоторое среднее значение. Так, изгибающий момент в сечении корпуса судна на волнении может рассматриваться как случайная величина, для которой математическим ожиданием является изгибающий момент на тихой воде.

Пользуясь понятием математического ожидания, можно записать начальный момент s -го порядка как математическое ожидание s -й степени случайной величины:

$$\alpha_s [X] = M[X^s]. \quad (2.9)$$

Центрированной случайной величиной называют величину

$$\overset{0}{X} = X - m_x, \quad (2.10)$$

т. е. отклонение случайной величины от среднего значения.

Моменты центрированной случайной величины называются центральными моментами. Так, центральный момент s -го порядка будет

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s p(x) dx. \quad (2.11)$$

Очевидно, центральный момент первого порядка равен нулю

$$\mu_1 = M[\overset{0}{X}] = M[X - m_x] = 0.$$

Наиболее важное для приложений значение имеет центральный момент 2-го порядка, который называется *дисперсией случайной величины* и обозначается $D[X] = D_x$:

$$D_x = \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx. \quad (2.12)$$

Дисперсия случайной величины есть характеристика рассеивания значений случайной величины около ее математического ожидания.

С геометрической точки зрения дисперсия представляет момент инерции площади под кривой распределения относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести этой площади. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины.

Обычно в качестве характеристики рассеивания рассматривают среднее квадратичное отклонение случайной величины σ_x (эту характеристику называют также стандартом случайной величины), которое определяется квадратным корнем из D_x

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (2.13)$$

Стандарт σ_x имеет размерность случайной величины.

§ 9. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Нормальный закон распределения

Среди многих известных законов распределения случайных величин особое место занимает нормальный закон (закон Гаусса).

Очень многие случайные величины можно считать подчиненными этому закону. Так, этому закону подчинены ординаты морского волнения в данном режиме, ординаты волновых моментов, величины

предела текучести материала при испытаниях большого количества образцов и т. д.

Плотность вероятности при нормальном законе распределения имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.14)$$

где m и σ — математическое ожидание и стандарт случайной величины X .

Вид кривой распределения при нормальном законе показан на рис. 2.3.

Из рисунка видно, что чем больше дисперсия и стандарт случайной величины, тем меньше наибольшая ордината $p(x)$ и тем больше растягивается кривая распределения вдоль оси абсцисс.

Вычислим вероятность попадания случайной величины X , подчиненной нормальному закону, на участок от α до β :

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

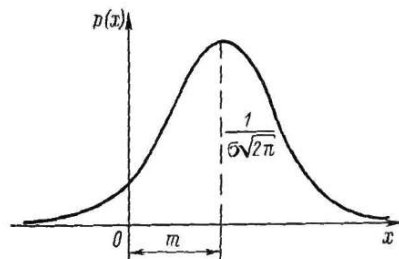


Рис. 2.3. Вид плотности вероятности $p(x)$ при нормальном законе распределения.

Производя замену переменной

$$\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t,$$

получим

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt. \quad (2.15)$$

Интеграл, входящий в (2.15), выражается через функцию Лапласа или интеграл вероятностей

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (2.16)$$

таблицы которой имеются в любой книге по теории вероятностей.

Используя (2.16), можно вместо (2.15) получить

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right], \quad (2.17)$$

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

$$\Phi(0) = 0; \quad \Phi(\infty) = 1; \quad \Phi(-x) = -\Phi(x).$$

В связи с нечетностью функции Лапласа, если нужно определить вероятность попадания случайной величины на участок, симметричный относительно математического ожидания (рис. 2.4), получим

$$P(|X - m| < a) = \Phi\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{2}}\right).$$

Используя таблицы функции Лапласа, можно оценить вероятность отклонения случайной величины от математического ожидания более чем на один, два, три стандарта σ (рис. 2.5):

$$P(|X - m| > n\sigma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right). \quad (2.18)$$

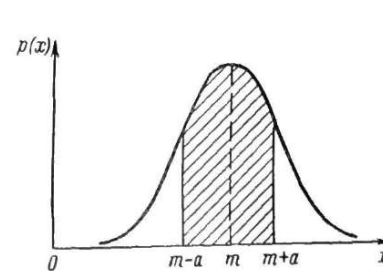


Рис. 2.4. К вычислению вероятности попадания случайной величины на заданный участок.

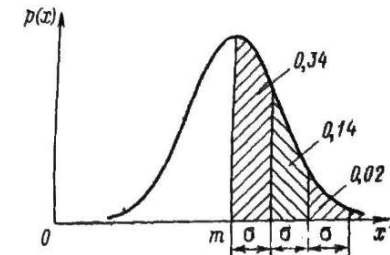


Рис. 2.5. К вычислению вероятности отклонения случайной величины от математического ожидания на один, два и три стандарта.

В частности, вероятность превышения случайной величиной значения $m + 2\sigma$ ($n = 2$) составляет 0,02, а значения $m + 3\sigma$ ($n = 3$) примерно равно 0,0015. Поэтому говорят, что отклонение случайной величины, подчиненной нормальному закону, от ее математического ожидания на величину трех стандартов практически определяет наибольшее значение случайной величины.

Закон Рэлея

Закон Рэлея устанавливает распределение амплитуд случайной величины, изменяющейся по гармоническому закону с данной частотой. Этот закон имеет большое значение в приложениях. Ему практически подчиняются амплитуды и высоты волн в данном режиме нерегулярного волнения, а также амплитуды вызванных процессов — качки, волновых моментов.

Плотность вероятности закона Рэлея имеет вид

$$p(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.19)$$

где σ — стандарт случайной величины.

По смыслу величина a является положительной, т. е. $a > 0$.

Вид кривой распределения Рэлея показан на рис. 2.6. Наибольшая ордината плотности вероятности соответствует стандарту σ .

Функция распределения для закона Рэля, т. е. вероятность того, что амплитуда a будет меньше некоторой величины a_0 , запишется в виде

$$P(a < a_0) = \int_0^{a_0} p(a) da = 1 - e^{-\frac{a_0^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.20)$$

Соответственно вероятность превышения величины a_0 , которая называется обеспеченностью, будет

$$Q(a_0) = P(a > a_0) = 1 - P(a < a_0) = e^{-\frac{a_0^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.21)$$

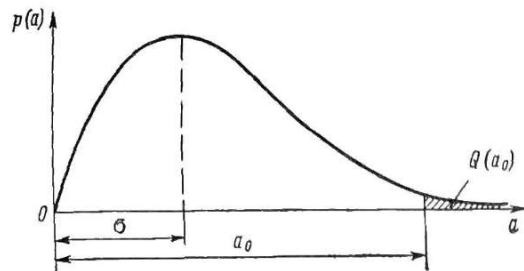


Рис. 2.6. Вид плотности вероятности по закону Рэля.

Логарифмируя (2.21), можно выразить значение a_0 через величину обеспеченности Q :

$$a_0 = \sigma \sqrt{-2 \ln Q(a_0)}. \quad (2.22)$$

§. 10. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Функция распределения системы

В практических приложениях теории вероятностей приходится иметь дело с задачами, в которых результаты опыта характеризуются несколькими случайными величинами, образующими систему.

Ограничимся рассмотрением системы двух случайных величин X и Y , так как обобщение соответствующих закономерностей на систему n случайных величин не представляет принципиальных затруднений.

Исчерпывающей характеристикой системы двух случайных величин будет двумерная функция распределения, определяющая вероятность совместного появления значений $X < x$, $Y < y$, т. е.

$$P(X < x, Y < y) = F(x, y). \quad (2.23)$$

Функция распределения $F(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1. $F(x, y)$ — неубывающая функция своих аргументов,
2. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$,

3. При одном из аргументов, равном $+\infty$, функция распределения системы превращается в функцию распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$\begin{aligned} F(x, +\infty) &= F_1(x), \\ F(+\infty, y) &= F_2(y), \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $F_1(x)$, $F_2(y)$ — соответственно функции распределения случайных величин X и Y .

4. $F(+\infty, +\infty) = 1$.

Плотностью распределения системы называется производная

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (2.25)$$

Естественно, что для системы двух случайных величин $p(x, y)$ представляет собой некоторую поверхность.

Элементом вероятности называется величина

$$p(x, y) dx dy.$$

Законы распределения отдельных величин, входящих в систему. Зависимые и независимые случайные величины

Если известна плотность вероятности отдельных величин, то плотность распределения системы может быть выражена при помощи условных плотностей распределения.

Условной плотностью распределения величины X , входящей в систему (X, Y) , называется плотность вероятности X , вычисленная при условии, что величина Y приняла определенное значение, и обозначается $p(x/y)$. Соответственно условная плотность распределения Y обозначается через $p(y/x)$.

Плотность распределения системы выражается зависимостями:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= p_1(x) p(y/x), \\ p(x, y) &= p_2(y) p(x/y). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Случайные величины X и Y считаются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая величина.

Для независимых случайных величин справедлива формула

$$p(x, y) = p_1(x) p_2(y), \quad (2.27)$$

т. е. плотность распределения системы независимых случайных величин равна произведению плотности вероятности отдельных величин.

Числовые характеристики системы случайных величин

Начальным моментом порядка k, s для системы случайных величин называется математическое ожидание произведения X^k на Y^s

$$\alpha_{k, s} = M[X^k Y^s]. \quad (2.28)$$

Центральным моментом порядка k, s для системы называется математическое ожидание произведения k -й и s -й степени соответствующих центрированных величин

$$\mu_{k,s} = M [X^k Y^s], \quad (2.29)$$

где $\overset{0}{X} = X - m_x$; $\overset{0}{Y} = Y - m_y$; m_x, m_y — математические ожидания случайных величин X и Y .

Формулы, по которым могут быть вычислены соответствующие моменты, имеют вид

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s p(x, y) dx dy, \quad (2.30)$$

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s p(x, y) dx dy, \quad (2.31)$$

где $p(x, y)$ — плотность распределения системы.

Очевидно, математические ожидания m_x и m_y определяются зависимостями:

$$m_x = \alpha_{1,0} = M [X^1 Y^0] = M [X],$$

$$m_y = \alpha_{0,1} = M [X^0 Y^1] = M [Y].$$

Дисперсии случайных величин:

$$D_x = \mu_{2,0} = M [\overset{0}{X}^2 \overset{0}{Y}^0] = M [\overset{0}{X}^2],$$

$$D_y = \mu_{0,2} = M [\overset{0}{X}^0 \overset{0}{Y}^2] = M [\overset{0}{Y}^2].$$

Для системы случайных величин важное значение имеет второй смешанный центральный момент, который называется корреляционным моментом и обозначается K_{xy}

$$K_{xy} = \mu_{11} = M [\overset{0}{X} \overset{0}{Y}].$$

Для непосредственного вычисления K_{xy} служит формула

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) p(x, y) dx dy. \quad (2.32)$$

Геометрический смысл корреляционного момента — центробежный момент инерции объема, ограниченного поверхностью $p(x, y)$ относительно плоскостей, параллельных осям ax и oy и проходящих через центр тяжести этого объема.

Корреляционный момент характеризует кроме рассеивания случайных величин X и Y еще и вероятностную связь между ними.

Можно показать, что для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю; такие величины называются некоррелированными.

Если случайные величины некоррелированные, то они не обязательно будут независимыми, т. е. равенство нулю коэффициента корреляции — необходимое, но недостаточное условие независимости.

Обычно вводится в рассмотрение коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (2.33)$$

где σ_x и σ_y — стандарты случайных величин X и Y .

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости между случайными величинами и может в общем случае изменяться в пределах

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1.$$

Если $r_{xy} > 0$, то между случайными величинами X и Y существует положительная корреляция; при $r_{xy} < 0$ корреляция отрицательная.

При положительной корреляции возрастание одной из случайных величин приводит в среднем и к возрастанию другой.

Если $r_{xy} = \pm 1$, то между случайными величинами существует линейная функциональная зависимость вида $Y = aX + b$, причем знак r_{xy} соответствует знаку коэффициента a .

Обобщая сказанное выше на общий случай системы n случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n , отметим, что такая система будет иметь следующие числовые характеристики:

1) n математических ожиданий

$$m_1, m_2, \dots, m_n;$$

2) n дисперсий

$$D_1, D_2, \dots, D_n;$$

3) $n(n-1)$ корреляционных моментов

$$K_{ij} = M [\overset{0}{X}_i \overset{0}{X}_j], \quad (i \neq j),$$

где

$$\overset{0}{X}_i = X_i - m_i; \quad \overset{0}{X}_j = X_j - m_j.$$

Заметим, что дисперсия каждой из случайных величин X_i есть частный случай корреляционного момента при $i = j$ (т. е. $D_i = K_{ii}$).

Все дисперсии и корреляционные моменты образуют корреляционную матрицу системы случайных величин

$$\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{vmatrix}$$

Из определения корреляционного момента видно, что

$$K_{ij} = K_{ji}.$$

Если случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n некоррелированы, то все элементы корреляционной матрицы, кроме диагональных (которые равны дисперсиям), равны нулю

$$|K_{ij}| = \begin{vmatrix} D_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & D_2 & \dots & \dots & 0 \\ & & D_3 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & D_n \end{vmatrix}$$

Такая матрица называется диагональной.

§ 11. СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ И ПРОЦЕССЫ

Основные положения

Случайной функцией называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной вид и неизвестно заранее, какой именно.

Аргументом случайной функции может быть, в частности, время t или какие-либо другие величины.

Случайные функции времени t обычно называют случайными процессами.

Конкретный вид, который принимает случайная функция в результате опыта, называется реализацией случайной функции.

Примерами случайных функций являются ординаты нерегулярного волнения в данной точке, параметры качки на нерегулярном волнении, волновые давления на днище, волновые моменты в данном сечении корпуса судна и т. д. Сравнивая случайные функции (процессы) со случайными величинами, можно сказать, что последние характеризуют случайные явления как бы «в статике», а первые — «в динамике». Поэтому теория случайных функций (процессов) может быть названа «динамикой случайных явлений».

На рис. 2.7 показано несколько реализаций случайной функции $X(t)$.

Разумеется, каждая реализация $x_i(t)$ представляет обычную, не случайную функцию. Если принять какое-либо определенное значение t , то при этом случайная функция превращается в случайную величину, которая называется сечением случайной функции. Так же, как и для случайных величин, для случайных функций вычисляются математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание может быть вычислено для каждого сечения случайной функции t и в общем случае будет неслучайной функцией от t

$$m_x(t) = M[X(t)].$$

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $D_x(t)$, значение которой для каждого t равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции

$$D_x(t) = D[X(t)].$$

Среднее квадратичное отклонение случайной функции

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

Однако указанных характеристик недостаточно для описания свойств случайной функции.

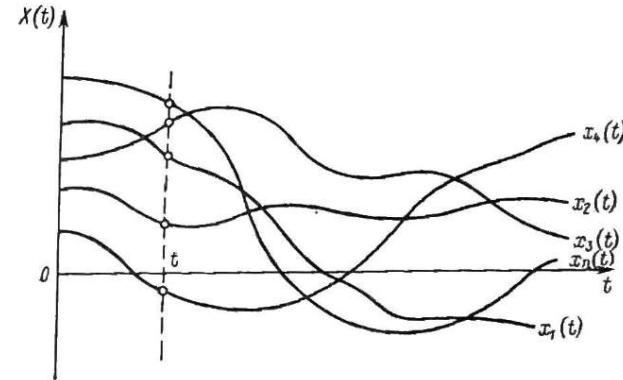


Рис. 2.7. Реализации случайной функции.

Можно представить две случайные функции с одинаковыми $m_x(t)$ и $D_x(t)$, но обладающие весьма различной внутренней структурой. Поэтому для характеристики случайной функции вводится корреляционная функция, которая представляет собой корреляционный момент системы двух случайных величин, образуемых различными сечениями t и t' .

$$K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t')], \quad (2.34)$$

где

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t),$$

$$\overset{\circ}{X}(t') = X(t') - m_x(t')$$

есть центрированные значения сечений случайной функции.

Из (2.34) следует, что корреляционная функция K_x есть неслучайная функция двух аргументов t и t' .

Если положить $t = t'$, то

$$K_x(t, t) = M[(\overset{\circ}{X}(t))^2] = D_x(t), \quad (2.35)$$

т. е. при равенстве аргументов $t' = t$ корреляционная функция обращается в дисперсию случайной функции.

Таким образом, отпадает необходимость в дисперсии как отдельной характеристике случайной функции; последняя может характеризоваться математическим ожиданием и корреляционной функцией.

Особый интерес для практического использования при вероятностной оценке внешних сил, действующих на корпус корабля, представляют так называемые стационарные случайные функции.

Признаки стационарности случайной функции и дисперсии от аргумента t , т. е.

$$\begin{aligned} m_x(t) &= m_x = \text{const}, \\ D_x(t) &= D_x = \text{const}; \end{aligned}$$

2) зависимость корреляционной функции только от одного аргумента, характеризующего разность между величинами t' и t :

$$\begin{aligned} t' - t &= \tau, \\ K_x(t, t') &= K_x(\tau). \end{aligned}$$

Последнее означает, что корреляционная функция не зависит от того, в каком месте по оси t приняты два равноотстоящих сечения.

Примером стационарного случайного процесса является морское волнение в данном установившемся режиме.

Волнение в стадии развития или затухания не может рассматриваться как стационарный процесс.

На основании зависимости (2.35) можно записать

$$D_x = K_x(0). \quad (2.36)$$

Поскольку корреляционная функция обладает свойством симметрии

$$K_x(t, t') = K_x(t', t),$$

то для стационарного процесса при $t' - t = \tau$ получим

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau),$$

т. е. корреляционная функция есть четная функция аргумента τ .

На практике часто пользуются нормированной корреляционной функцией

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{D_x}, \quad (2.37)$$

где $D_x = K_x(0)$ — дисперсия процесса; при $\tau = 0$ $\rho_x = 1$.

Каноническое разложение случайной функции. Спектральная плотность

Метод канонических разложений состоит в том, что случайная функция представляется в виде суммы элементарных случайных функций. Последние выражаются зависимостью

$$X(t) = V\varphi(t), \quad (2.38)$$

где V — случайная величина; $\varphi(t)$ — обычная, неслучайная функция.

Каноническим разложением случайной функции $X(t)$ называется представление ее в виде

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^n V_i \varphi_i(t), \quad (2.39)$$

где $m_x(t)$ — математическое ожидание случайной функции (если функция стационарна, то $m_x = \text{const}$); φ_i — неслучайные функции; V_i — некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями.

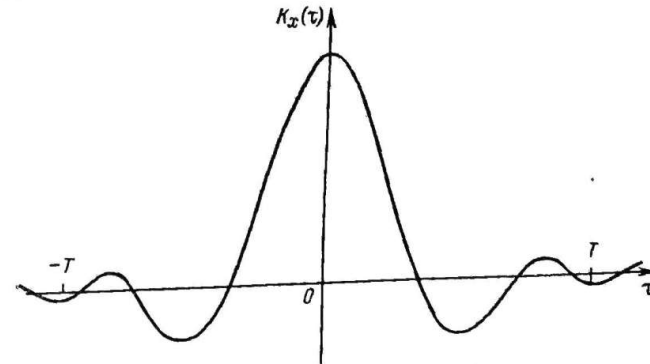


Рис. 2.8. К разложению корреляционной функции в интервале от $-T$ до $+T$.

Корреляционная функция $K_x(t, t')$ с учетом некоррелированности случайных величин V_i ($K_{ij} = 0$) будет

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= M \left[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t') \right] = M \left[\sum_i^n \sum_j^n V_i V_j \varphi_i(t) \varphi_j(t') \right] = \\ &= \sum_i^n \sum_j^n \varphi_i(t) \varphi_j(t') K_{ij} = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \varphi_i(t') D_i, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где D_i — дисперсия случайной величины v_i .

Зависимость (2.40) называется каноническим разложением корреляционной функции.

Можно показать, что если задано каноническое разложение корреляционной функции в виде (2.40), то для случайной функции каноническое разложение имеет вид (2.39), а случайные величины V_i имеют дисперсии D_i .

Весьма важно спектральное разложение стационарной случайной функции.

Поскольку корреляционная функция $K_x(\tau)$ является четной функцией τ , то в интервале от $-T$ до $+T$ (рис. 2.8) ее можно разложить в ряд Фурье по косинусам, а именно:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau, \quad (2.41)$$

где

$$\omega_k = k \frac{\pi}{T}.$$

Коэффициенты D_k , с учетом четности $K_x(\tau)$ и $\cos \omega\tau$, определяются зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T K_x(\tau) d\tau, \\ D_k &= \frac{2}{T} \int_0^T K_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau, \quad k \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Учитывая, что $\tau = t' - t$, можно воспользоваться зависимостью для $\cos \omega_k(t' - t)$ и переписать формулу (2.41) в виде

$$K_x(t, t') = \sum_{k=0}^{\infty} (D_k \cos \omega_k t' \cos \omega_k t + D_k \sin \omega_k t' \sin \omega_k t). \quad (2.43)$$

Формула (2.43) дает каноническое разложение корреляционной функции $K_x(t, t')$ по $\cos \omega_k t$ и $\sin \omega_k t$. На основании предыдущего можно записать каноническое разложение самой случайной функции $X(t)$ по этим же функциям

$$X(t) = m_x + \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t), \quad (2.44)$$

где U_k, V_k — некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями D_k , определяемыми по формулам (2.42).

Выражение (2.44) является спектральным разложением стационарной случайной функции. Если определить дисперсию случайной функции $X(t)$, то на основании формулы (2.43) получим

$$D_x = D[X(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} (\cos^2 \omega_k t + \sin^2 \omega_k t) D_k = \sum_{k=0}^{\infty} D_k. \quad (2.45)$$

Зависимость (2.45) показывает, что дисперсия стационарной случайной функции равна сумме дисперсий всех гармоник ее спектрального разложения.

Если построить распределение дисперсий по частотам ω_k при $k = 0, 1, \dots, \infty$, то определим дискретный спектр стационарной случайной функции.

Переходя в пределе к $T \rightarrow \infty$, получим $\omega_1 \rightarrow 0$, и дискретный спектр станет непрерывным; при этом бесконечно малому отрезку на оси частот $d\omega$ будет соответствовать бесконечно малая дисперсия $dD_x(\omega)$. Для непрерывного спектра целесообразно ввести плотность дисперсий $S_x(\omega)$ так, что

$$dD_x(\omega) = S_x(\omega) d\omega \quad (2.46)$$

(рис. 2.9). Тогда

$$D_x = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (2.47)$$

Ординаты спектра $S_x(\omega)$ характеризуют распределение дисперсий стационарной случайной функции по частотам.

Функция $S_x(\omega)$ называется спектральной плотностью стационарной случайной функции.

Учитывая зависимости (2.41), (2.46) и переходя от суммирования к интегрированию, вместо (2.41) получим

$$K_x(t) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (2.48)$$

Нетрудно показать, что спектральная плотность выражается через корреляционную функцию зависимостью

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (2.49)$$

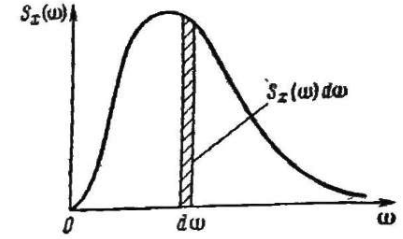


Рис. 2.9. Спектр случайной функции.

Таким образом, корреляционная функция и спектральная плотность связаны между собой так называемыми «косинус-преобразованиями» Фурье.

Во многих практических задачах корреляционная функция может быть найдена из данных эксперимента, а спектральная плотность процесса — по зависимости (2.49).

Эргодическое свойство стационарных случайных функций

Для определения математического ожидания и корреляционной функции случайной функции $X(t)$ по данным эксперимента необходимо располагать достаточно большим числом ее реализаций. Однако в ряде случаев эти характеристики случайной функции могут быть определены не по множеству, а по одной достаточно длительной реализации.

Случайные функции, для которых это положение справедливо, называются эргодичными или удовлетворяющими эргодическому свойству.

Рис. 2.10. Вид корреляционной функции, отвечающей условию эргодичности.

Можно показать, что достаточным условием эргодичности функции (процесса) является стремление к нулю корреляционной функции $K_x(\tau)$ при возрастании τ (рис. 2.10). Таким свойством обладают процессы установившегося волнения и вызванные волнением процессы — качка, волновые моменты и др.

Можно показать, что достаточным условием эргодичности функции (процесса) является стремление к нулю корреляционной функции $K_x(\tau)$ при возрастании τ (рис. 2.10). Таким свойством обладают процессы установившегося волнения и вызванные волнением процессы — качка, волновые моменты и др.

Располагая достаточно длительной (за время T) реализацией случайной функции $x(t)$, можно найти математическое ожидание по формуле

$$m_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (2.50)$$

Корреляционная функция определится зависимостью

$$K_x(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t) x(t+\tau) dt, \quad (2.51)$$

где $\overset{0}{x}(t)$, $\overset{0}{x}(t+\tau)$ — центрированные значения случайной функции в ее реализации.

Сложение случайных процессов

В приложениях часто встречаются случайные процессы, являющиеся результатом сложения нескольких случайных функций. Для определения характеристик суммарного процесса необходимо знание так называемой взаимной корреляционной функции (или корреляционной функции связи).

Пусть

$$Z(t) = aX(t) + bY(t),$$

где a , b — неслучайные множители. Тогда математическое ожидание будет определяться по формуле

$$m_z = am_x + bm_y, \quad (2.52)$$

где m_x и m_y — математические ожидания функций $X(t)$ и $Y(t)$.

Корреляционная функция суммарного процесса $Z(t)$

$$\begin{aligned} K_z(t, t') &= M [\overset{0}{Z}(t) \overset{0}{Z}(t')] = M [(a\overset{0}{X}(t) + b\overset{0}{Y}(t)) \times \\ &\times (a\overset{0}{X}(t') + b\overset{0}{Y}(t'))] = a^2 K_x(t, t') + b^2 K_y(t, t') + \\ &+ ab [R_{xy}(t, t') + R_{yx}(t', t)]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Величина $R_{xy}(t, t')$ называется взаимной корреляционной функцией; она равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$

$$R_{xy}(t, t') = M [\overset{0}{X}(t) \overset{0}{Y}(t')]. \quad (2.54)$$

Отметим, что взаимная корреляционная функция $X(t)$ и $Y(t)$ не равна взаимной корреляционной функции $Y(t)$ и $X(t)$

$$R_{xy}(t, t') \neq R_{yx}(t, t').$$

Если переставить местами аргументы, то взаимные корреляционные функции равны

$$R_{xy}(t, t') = R_{yx}(t', t). \quad (2.55)$$

В ряде случаев вводится нормированная взаимная корреляционная функция

$$r_{xy}(t, t') = \frac{R_{xy}(t, t')}{\sigma_x(t) \sigma_y(t')}, \quad (2.56)$$

где σ_x и σ_y — стандарты функций $X(t)$ и $Y(t)$.

Для стационарных случайных функций вместо (2.53) получим

$$K_z(\tau) = a^2 K_x(\tau) + b^2 K_y(\tau) + ab [R_{xy}(\tau) + R_{xy}(-\tau)]. \quad (2.57)$$

Переходя к дисперсии случайного процесса $Z(t)$, положим в (2.57) $\tau = 0$

$$D_z = a^2 D_x + b^2 D_y + 2ab R_{xy}(0). \quad (2.58)$$

$R_{xy}(0)$ есть не что иное, как корреляционный момент системы случайных величин $X(t)$ и $Y(t)$

$$R_{xy}(0) = M [\overset{0}{X}(t) \overset{0}{Y}(t)] = K_{xy}.$$

Обобщая зависимость (2.58) на случай сложения большого числа случайных функций

$$Z(t) = \sum_{i=1}^n a_i X_i(t),$$

можно получить

$$D_z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j K_{x_i x_j}. \quad (2.59)$$

Если взаимная корреляционная функция равна нулю, то соответствующие случайные функции называются некоррелированными. В этом случае $K_{x_i x_j} = 0$ при $i \neq j$ и вместо (2.59) получим

$$D_z = \sum_{i=1}^n a_i^2 D_{x_i}. \quad (2.60)$$

§ 12. ВЫБРОСЫ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ ЗА ЗАДАННЫЙ УРОВЕНЬ

При рассмотрении задач, связанных с оценкой прочности, большое значение имеет вопрос о выбросах случайной функции за определенный уровень.

Приведем основные результаты соответствующих зависимостей.

Пусть x_0 — уровень, выбросы за который нас интересуют (рис. 2.11).

Для среднего в единицу времени числа выбросов N_0 выше уровня x_0 можно получить

$$N_0 = \int_0^{\infty} \dot{x} p(x_0, \dot{x}) dx,$$

где \dot{x} — скорость процесса

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

$p(x_0, \dot{x})$ — двумерная плотность вероятности для x_0 и \dot{x} .

Наибольшее практическое значение имеет указанная задача для стационарных процессов с нормальным распределением. В этом случае величины $X(t)$ и $\dot{X}(t)$ некоррелированы и независимы. Поэтому

$$p(x_0, \dot{x}) = p_1(x_0) p_2(\dot{x}).$$

Принимая для $p_1(x_0)$ нормальный закон распределения с математическим ожиданием m_x и такой же закон для $p_2(\dot{x})$ (математическое ожидание скорости процесса равно нулю), можно получить

$$N_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \exp \left[-\frac{(x_0 - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (2.61)$$

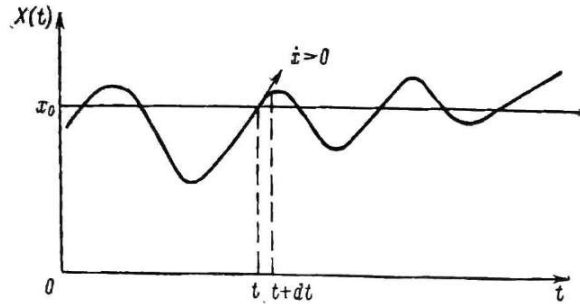


Рис. 2.11. К задаче о выбросах случайной функции за заданный уровень.

Выражение (2.61) известно как формула Райса для среднего числа выбросов в единицу времени за уровень x_0 .

В (2.61) σ_x — стандарт случайной функции $X(t)$; $\sigma_{\dot{x}}$ — стандарт скорости изменения этой функции. Величину

$$T_e = 2\pi \frac{\sigma_x}{\sigma_{\dot{x}}} \quad (2.62)$$

называют эффективным периодом процесса. Это название связано с тем, что если процесс является регулярным с частотой ω , то

$$T_e = T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Если известна спектральная плотность процесса $X(t)$ $S_x(\omega)$, то можно показать, что спектральная плотность процесса $\dot{X}(t)$ будет

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega).$$

Тогда

$$\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} = \sqrt{\frac{D_{\dot{x}}}{D_x}} = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega}}. \quad (2.63)$$

Если спектр процесса достаточно узкий, т. е. спектральная плотность его сосредоточена вблизи некоторой частоты ω_0 , то можно записать

$$\int_0^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega \approx \omega_0^2 D_x.$$

В этом случае на основании (2.63) получим

$$\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \approx \frac{1}{\omega_0}; \quad T_e \approx \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Таким образом, для процессов с узким спектром эффективный период T_e соответствует некоторой средней частоте ω_0 , около которой группируются ординаты спектра.

Подставляя (2.63) в (2.61), получим

$$N_0 = \frac{1}{T_e} \exp \left[-\frac{(x_0 - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right].$$

Если процесс стационарный, то за время T общее число выбросов будет

$$N = N_0 T = \frac{T}{T_e} \exp \left[-\frac{(x_0 - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (2.64)$$

Отношение T/T_e можно считать равным числу циклов N_i процесса за время T .

Вероятность выброса функции за уровень x_0

$$P(x > x_0) = \frac{N}{N_i} = \exp \left[-\frac{(x_0 - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right].$$

Средняя величина временного интервала между выбросами за данный уровень на основании (2.64) запишется в виде

$$T = T_e \exp \left[\frac{(x_0 - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (2.65)$$

Из формулы (2.65) можно получить зависимость уровня однократного выброса x_0 стационарного процесса с нормальным распределением от числа циклов N_i и стандарта σ_x .

Логарифмируя (2.65), получим

$$x_0 - m_x = c \sigma_x, \quad (2.66)$$

где $c = \sqrt{2 \ln N_i}$.

Таким образом, уровень, определяющий однократное в среднем отклонение случайной стационарной нормальной функции от математического ожидания, зависит от числа циклов, т. е. от времени существования данного режима, и увеличивается с ростом числа циклов. Так, для выброса за уровень трех стандартов ($3\sigma_x$) требуется примерно 100 циклов, а выброс за уровень $4\sigma_x$ произойдет примерно за 3000 циклов и т. д.

**§ 13. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ
ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ.
СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ И ДИСПЕРСИЯ «ВХОДНОГО» ПРОЦЕССА**

При использовании вероятностных методов в строительной механике корабля важнейшее значение имеют так называемые «выходные» процессы, которые получаются в результате преобразования «входного» процесса волнения кораблем как динамической системой.

Примерами «выходных» процессов могут служить процессы качки, волнового давления на днище, волновых моментов в сечениях корпуса и т. п.

Если динамическая система линейная, а «входные» процессы стационарны, то и «выходные» процессы будут стационарными.

Признаком линейности системы может быть то, что ее работа описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

В отношении дифференциальных уравнений качки эти условия выполняются лишь приближенно, но с достаточной для практики точностью.

Для стационарных процессов задача преобразования может быть сведена к преобразованию лишь одной неслучайной функции — спектральной плотности.

Поскольку функции, по которым ведется спектральное разложение стационарной «входной» функции $X(t)$ представляют гармонические колебания, линейная система реагирует на них также гармоническим колебанием той же частоты, но с изменением амплитуды и фазы.

Пусть на вход системы поступает гармоническое колебание вида

$$x(t) = e^{i\omega t}.$$

Тогда реакция системы (вынужденные колебания) определится по формуле

$$y(t) = \Phi(i\omega) e^{i\omega t}, \quad (2.67)$$

где $\Phi(i\omega)$ — комплексный множитель, который может быть представлен в виде

$$\Phi(i\omega) = \alpha(\omega) + i\beta(\omega)$$

или

$$\Phi(i\omega) = |\Phi(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)}, \quad (2.68)$$

где

$$|\Phi(i\omega)| = \sqrt{\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)}, \quad (2.69)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\beta(\omega)}{\alpha(\omega)}. \quad (2.70)$$

Функция $\Phi(i\omega)$ называется передаточной функцией системы, а ее модуль $|\Phi(i\omega)|$, определяемый формулой (2.69), — амплитудно-частотной характеристикой системы.

Функция $\varphi(\omega)$ называется фазово-частотной характеристикой системы.

Можно показать, что спектральная плотность выходного процесса для линейной системы равна произведению спектральной плотности входного процесса на квадрат амплитудно-частотной характеристики, т. е.

$$S_y(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (2.71)$$

Обозначая $|\Phi(i\omega)| = a_y(\omega)$, запишем выражение для дисперсии выходного процесса в виде

$$D_y = \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} a_y^2(\omega) S_x(\omega) d\omega. \quad (2.72)$$

Формула (2.72) является весьма важной для дальнейшего.

По смыслу приведенных выше зависимостей $a_y(\omega)$ представляет амплитуду преобразованного процесса при гармоническом воздействии с единичной амплитудой и данной частотой ω . Величина $a_y(\omega)$ может быть найдена в результате решения соответствующего дифференциального уравнения или иным путем. Так, если входным процессом является волнение, а выходным — процесс килевой качки, то $a_y(\omega)$ — амплитуда килевой качки на регулярном волнении с частотой ω при единичной полувысоте волны.

Если в качестве выходного процесса рассматривается процесс волнового изгибающего момента в данном сечении судна, то $a_y(\omega)$ — амплитуда волнового момента на регулярном волнении с частотой ω при единичной полувысоте волны.

Заметим, что в последнем случае величина $a_y(\omega)$ будет определяться интегрированием дополнительной нагрузки, действующей на корпус судна при качке на регулярном волнении.

Глава 3

МОРСКОЕ ВОЛНЕНИЕ КАК СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

§ 14. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Ветровое волнение практически всегда нерегулярное.

Установившееся волнение в определенном интервале времени может рассматриваться как стационарный случайный процесс. Если волнение находится в стадии развития или затухания, то его стационарность нарушается, однако и в этом случае на протяжении ограниченных отрезков времени волнение может приближенно считаться стационарным.

Реальное волнение всегда в некоторой степени является трехмерным и может быть представлено как результат наложения большого числа плоских синусоидальных волн со случайными некоррелированными амплитудами, различными направлениями распро-