

Пример 5.4. Для тонкостенных стержней замкнутого профиля (рис. 5.20, а) и открытого профиля (рис. 5.20, б), имеющих одинаковый периметр и толщину стенки, определить максимальные касательные напряжения и углы закручивания и вычислить отношение расчетных величин. Принять $S = h$, $b = \delta$.

Решение

1. Вычислим моменты инерции и моменты сопротивления для заданных тонкостенных стержней:

$$I_k^{з.п} = \frac{4A_{cp}^2}{\sum S_i/\delta_i} = \frac{4[(10\delta)^2]^2}{4 \cdot 10} = 1000\delta^4; \quad W_k^{з.п} = 2A_{cp}\delta = 200\delta^3;$$

$$I_k^{о.п} = \frac{1}{3} \sum h_i b_i^3 = \frac{4}{3} \cdot 10b \cdot b^3 = \frac{40}{3} b^4; \quad W_k^{о.п} = \frac{1}{3} \sum h_i b_i^2 = \frac{40}{3} b^3.$$

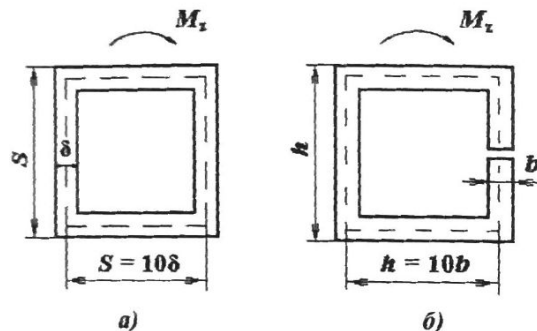


Рис. 5.20

2. Определим величину максимальных касательных напряжений в обоих стержнях:

$$\tau_{max}^{з.п} = \frac{M_z}{2A_{cp}\delta} = \frac{M_z}{200\delta^3};$$

$$\tau_{max}^{о.п} = \frac{M_z}{I_k^{о.п}} b = \frac{M_z}{\frac{40}{3} b^4} b = \frac{3}{40} \frac{M_z}{b^3}.$$

3. Найдем углы закручивания тонкостенных стержней:

$$\varphi^{з.п} = \frac{M_z l}{GI_n^{з.п}} = \frac{M_z l}{G \cdot 1000\delta^4} = \frac{M_z l}{G\delta^4} \cdot 10^{-3};$$

$$\varphi^{о.п} = \frac{M_z l}{GI_n^{о.п}} = \frac{M_z l}{G \cdot \frac{40}{3} b^4} = \frac{3}{40} \frac{M_z l}{Gb^4}.$$

4. Вычислим отношение расчетных величин для обоих тонкостенных стержней, учитывая, что $\delta = b$:

$$\frac{\tau_{max}^{о.п}}{\tau_{max}^{з.п}} = \frac{\frac{3}{40} \frac{M_z}{b^3}}{\frac{M_z}{200\delta^3}} = 15; \quad \frac{\varphi_{max}^{о.п}}{\varphi_{max}^{з.п}} = \frac{\frac{3}{40} \frac{M_z l}{Gb^4}}{\frac{M_z l}{G\delta^4} \cdot 10^{-3}} = 75.$$

Вывод: при одинаковых размерах тонкостенный стержень открытого профиля обладает значительно меньшей прочностью и жесткостью, чем тонкостенный стержень замкнутого профиля.

5.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ ПЛОСКОГО ИЗГИБА

5.4.1. Формула для нормальных напряжений по известному M_x . Условие прочности при изгибе

На рис. 5.21, а показана балка, нагруженная по концам сосредоточенными моментами m . Во всех сечениях поперечная сила $Q_y = 0$, а изгибающий момент $M_x = -m$, и балка испытывает чистый изгиб. Требуется определить напряжения в поперечном сечении 1-1.

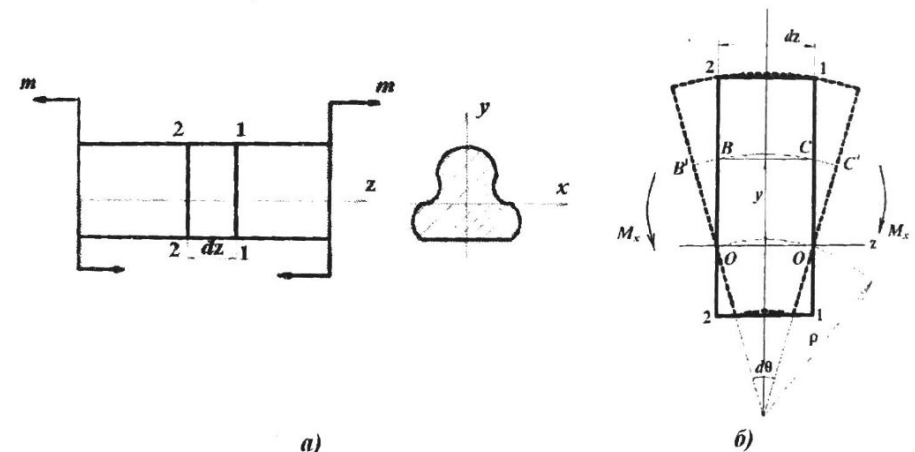


Рис. 5.21

Рассмотрим три стороны задачи.

1. Геометрическая сторона

Вырежем из балки сечениям 1-1 и 2-2 элемент dz (рис. 5.21,а) и покажем его на рис. 5.21,б. В обоих сечениях действуют изгибающие мо-

менты M_x . При деформации изгиба сечения 1-1 и 2-2, оставаясь плоскими, повернутся относительно друг друга на малый угол $d\theta$. Из рис. 5.21, б видно, что верхние волокна удлиняются, а нижние укорачиваются. Значит, где-то в сечении есть волокно 0-0, которое не изменяет длины при изгибе. Это *нейтральное волокно*. Оно совпадает с осью балки z , положение которой пока неизвестно. Обозначим радиус кривизны волокна OO через ρ . Так как длина волокна не изменилась, то

$$\rho d\theta = dz. \quad (*)$$

Найдем относительную линейную деформацию в направлении оси z произвольного волокна BC , удаленного от оси z на расстояние y .

$$\varepsilon_z = \frac{B'C' - BC}{BC} = \frac{(\rho + y)d\theta - dz}{dz},$$

или, с учетом равенства (*),

$$\varepsilon_z = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} \rightarrow \varepsilon_z = \frac{y}{\rho}. \quad (a)$$

Эта формула представляет собой закон изменения относительных линейных деформаций в сечении.

Так как сечения при изгибе остались перпендикулярны изогнутой оси z , то прямые углы B и C не исказились ($\angle B' = \angle C' = 90^\circ$) – рис. 5.21, б. Следовательно, угловая деформация равна нулю:

$$\gamma = 0. \quad (б)$$

2. Физическая сторона

Записывая закон Гука для ЛНС и НСЧС, получим

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E \frac{y}{\rho}, \quad (в)$$

т.е. нормальные напряжения в сечении изменяются по линейному закону;

$$\tau = G\gamma = G \cdot 0 = 0, \quad (г)$$

т.е. касательные напряжения в сечении при *чистом изгибе* балки равны нулю.

3. Статическая сторона

При чистом изгибе $Q_y = Q_x = M_z = 0$, и интегральные зависимости, связывающие эти ВСФ с касательными напряжениями, тождественно удовлетворяются, поскольку $\tau = 0$.

Рассмотрим другие интегральные зависимости, связывающие N_z , M_y , M_x с нормальными напряжениями σ_z , и учтем, что $N_z = M_y = 0$.

$$1) N_z = \int_A \sigma_z dA = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

$\int_A y dA = S_x$ – статический момент относительно оси x , положение которой пока неизвестно.

Имеем $\frac{E}{\rho} S_x = 0$, и так как $\frac{E}{\rho} \neq 0$, то $S_x = 0$. Следовательно, ось x – *центральная* ось сечения, а ось балки z проходит через центры тяжести всех сечений.

$$2) M_y = \int_A x(\sigma_z dA) = \int_A x E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A xy dA = 0.$$

$\int_A xy dA = I_{xy}$ – центробежный момент инерции сечения относительно осей x, y (гл. 3, стр. 65).

Имеем $\frac{E}{\rho} I_{xy} = 0$, и так как $\frac{E}{\rho} \neq 0$, то $I_{xy} = 0$, т.е. x и y – *главные оси*.

Рассмотрение пунктов 1) и 2) показывает, что x, y – *главные центральные оси*.

Таким образом, при чистом изгибе нейтральная ось совпадает с главной центральной осью x . Все волокна в плоскости xz образуют нейтральный слой. Отметим также, что вся внешняя нагрузка должна быть приложена в плоскости yz , только при этом условии изгибающий момент M_y равен нулю.

$$в) M_x = \int_A y(\sigma_z dA) = \int_A y E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_x, \text{ откуда}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (5.47)$$

Это выражение является синтезирующим уравнением задачи о чистом изгибе балки.

В выражении (5.47) произведение EI_x называется *жесткостью балки* при изгибе, размерность этой величины – $\text{МН} \cdot \text{м}^2, \text{кН} \cdot \text{м}^2$.

Подставляя (5.47) в зависимость (в), получим

$$\sigma_z(M_x) = \frac{M_x}{I_x} y. \quad (5.48)$$

Из формулы (5.48) ясно, что напряжения изменяются в сечении по линейному закону:

- при $y = 0$ $\sigma_z = 0$ (на нейтральной оси);

- при $y = |y_{\max}|$ (на поверхности сечения)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (5.49)$$

где W_x – геометрическая характеристика сечения при изгибе, называемая *осевым моментом сопротивления сечения*:

$$W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|} \quad [\text{м}^3; \text{см}^3]. \quad (5.50)$$

Следует вывести и запомнить формулы для определения W_x у сечений в форме прямоугольника, равнобедренного треугольника, круга (рис. 5.22).

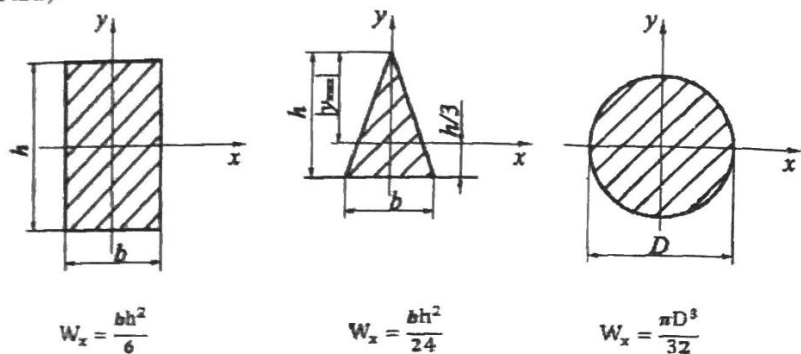


Рис. 5.22

Покажем эпюру $\sigma_z(M_x)$ в сечении 1-1 (рис. 5.23).

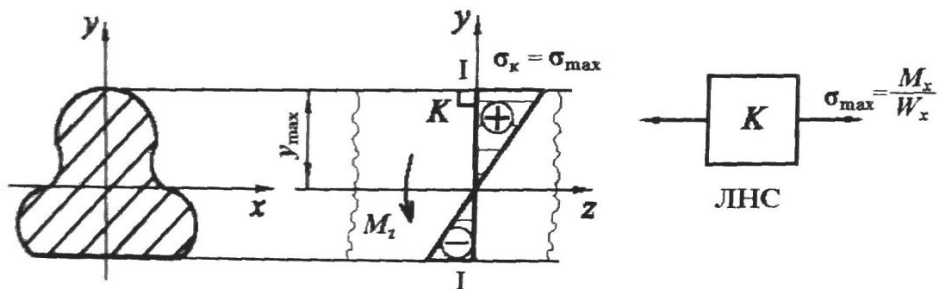


Рис. 5.23

Знаки нормальных напряжений на эпюре определяются по знаку момента M_x . Если $M_x > 0$, то балка выпукла вниз и сжаты верхние волокна; если $M_x < 0$, балка выпукла вверх и сжаты нижние волокна (рис. 5.23).

По эпюре σ_z устанавливается положение опасной точки в сечении – это точка K , наиболее удаленная от нейтральной оси x (от оси z).

Покажем напряженное состояние элемента в точке K . Так как при чистом изгибе $\tau = 0$, напряжения σ_k в опасной точке являются главными и она находится в ЛНС (рис. 5.23).

Подставляя в условие прочности для частицы материала, находящейся в ЛНС (5.13), величину σ_{\max} , вычисленную по формуле (5.49) в опасном сечении балки (где $M_{x \max}$), получим

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (5.51)$$

Выражение (5.51) называется условием прочности при изгибе.

Для пластичных материалов условие прочности (5.51) записывают для одной опасной точки.

Для материалов, по-разному работающих на растяжение и сжатие, условия прочности записывают для двух точек, самых удаленных от нейтральной оси x в зоне растяжения и в зоне сжатия, и максимальные напряжения в обеих точках определяют по формуле (5.48):

$$\begin{aligned} \sigma_{p \max} &= \frac{M_{x \max}}{I_x} |y_{\max}|_p \leq [\sigma_p]; \\ \sigma_{c \max} &= \frac{M_{x \max}}{I_x} |y_{\max}|_c \leq [\sigma_c] \end{aligned} \quad (5.52)$$

С точки зрения прочности при изгибе более рациональными будут такие формы сечения, при которых большая часть материала расположена в зоне максимальных напряжений. Для симметричных сечений более рациональным будет двутавровое сечение и менее – круглое. Для несимметричных сечений из хрупкого материала большую часть материала необходимо располагать в зоне растягивающих напряжений.

Для оценки экономичности балок с различной формой сечения определяют коэффициент экономичности формы сечения при изгибе:

$$K = \frac{W_x}{\sqrt{A^3}}. \quad (5.53)$$

Примечание. Если балка испытывает чистый изгиб в плоскости xz (ось x является главной центральной осью), в сечении возникает изгибающий момент M_y , и нормальные напряжения от него определяются по формуле, аналогичной (5.48); эпюра $\sigma_z(M_y)$ показана на рис. 5.24.

$$\sigma_z(M_y) = \frac{M_y}{I_y} x. \quad (5.54)$$

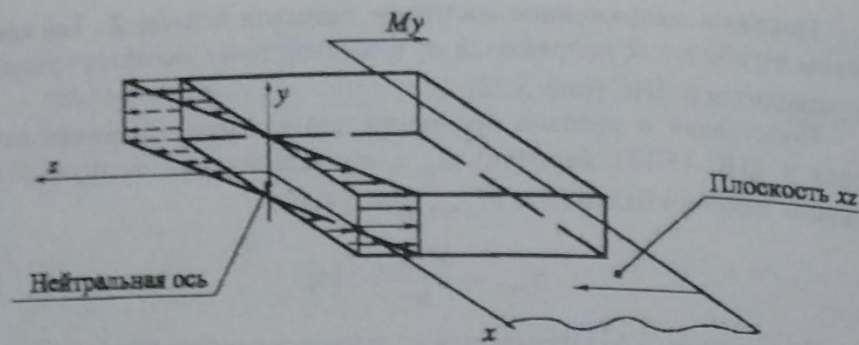


Рис. 5.24

5.4.2. Определение напряжений от M_x и Q_y при их одновременном действии (поперечный изгиб)

Поперечным называется изгиб, при котором в сечении балки возникают одновременно изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y .

Формула для напряжений $\sigma_z(M_x)$

Как показывают исследования, при наличии поперечной силы плоские сечения при изгибе искажаются. Поэтому гипотеза плоских сечений в данном случае неверна. Тем не менее, точное решение показывает, что влияние искажения сечений на величину продольных деформаций ϵ_z и нормальных напряжений σ_z невелико. По этой причине и при поперечном изгибе нормальные напряжения определяются по формуле (5.48):

$$\sigma_z(M_x) = \frac{M_x}{I_x} y.$$

Определение касательных напряжений по известной силе Q_y (формула Д.И. Журавского)

На рис. 5.25, а показана балка, нагруженная силой P ; построены эпюры Q_y и M_x (рис. 5.25, б, в).

Требуется определить напряжения τ_{xy} в сечении 1-1.

Двумя поперечными сечениями 1-1 и 2-2 и продольным сечением BD , отстоящим от оси z на расстоянии y , вырежем из балки элементарную призму 12DB длиной dz (рис. 5.25, а). Покажем призму на рис. 5.26, а.

В левой и правой гранях призмы действуют нормальные напряжения, определяемые по формуле (5.48):

$$\sigma_{z_1}(M_x) = \frac{M_x}{I_x} y; \sigma_{z_2}(M_x) = \frac{M_x + dM_x}{I_x} y. \quad (a)$$

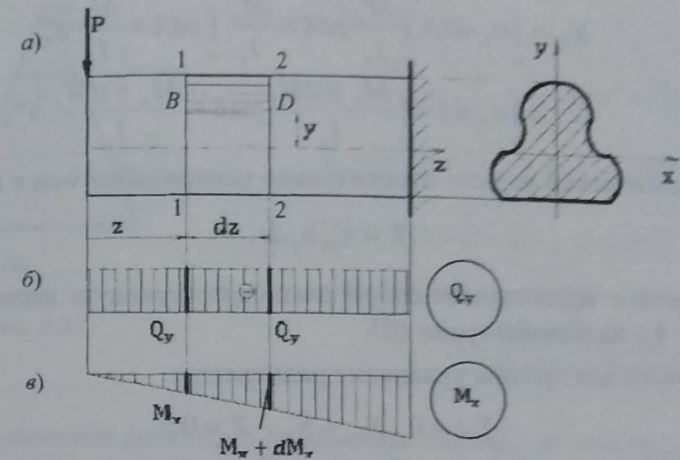


Рис. 5.25

Эпюры этих напряжений показаны на рис. 5.26, а. Кроме того, на обеих гранях показаны касательные напряжения τ_{xy} , величина которых пока неизвестна, а направление определяется поперечными силами в сечениях 1-1 и 2-2 (рис. 5.25, б).

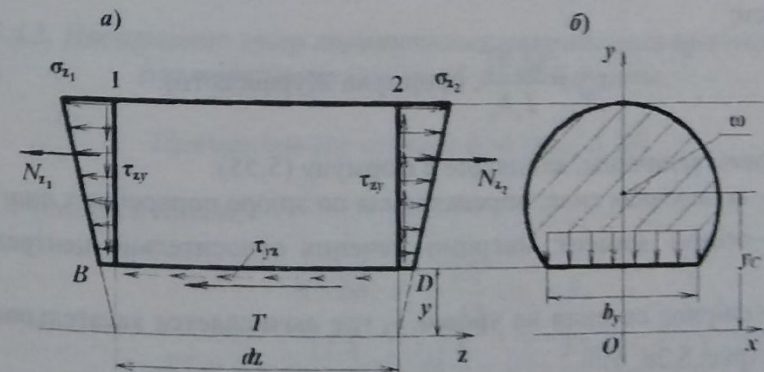


Рис. 5.26

В нижней грани BD действуют касательные напряжения τ_{yz} , равные напряжениям τ_{zy} по закону парности касательных напряжений:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (6)$$

Найдем равнодействующие внутренние усилия на всех гранях призмы:

$$N_{z_1} = \int_{\omega} \sigma_{z_1} dA = \int_{\omega} \frac{M_x}{I_x} y dA = \frac{M_x}{I_x} \int_{\omega} y dA = \frac{M_x}{I_x} S_x^{\omega}; \quad (в)$$

$$N_{z_2} = \int_{\omega} \sigma_{z_2} dA = \int_{\omega} \frac{M_x + dM_x}{I_x} y dA = \frac{M_x + dM_x}{I_x} S_x^{\omega}, \quad (г)$$

где S_x^{ω} - статический момент относительно центральной оси x площади ω ;

$$T = \tau_{yz} b_y dz. \quad (д)$$

Это выражение представляет собой равнодействующую касательных напряжений τ_{yz} на нижней грани BD .

Запишем для призмы уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \sum z = 0 \quad N_{z_2} - N_{z_1} - T &= 0; \\ T &= N_{z_2} - N_{z_1}. \end{aligned} \quad (е)$$

Подставляя в уравнение (е) значения усилий из выражений (в), (г), (д), найдем

$$\tau_{yz} = \frac{dM_x/dz \cdot S_x^{\omega}}{I_x \cdot b_y} = \frac{Q_y S_x^{\omega}}{I_x b_y}.$$

Учитывая закон парности касательных напряжений (6), окончательно запишем:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^{\omega}}{I_x b_y} \quad (\text{формула Журавского}). \quad (5.55)$$

Назовем величины, входящие в формулу (5.55):

Q_y - поперечная сила, определяемая по эпюре поперечных сил;

I_x - осевой момент инерции сечения относительно центральной оси x ;

b_y - ширина сечения на уровне y , где вычисляется касательное напряжение (рис. 5.26, б);

S_x^{ω} - статический момент относительно оси x той части площади сечения (ω), что расположена выше (или ниже) уровня y (рис. 5.26, б):

$$S_x^{\omega} = y_c \cdot \omega.$$

В качестве примера вычислим τ_{zy} в точке K треугольного сечения (рис. 5.27), приняв $Q_y = 12,15$ кН:

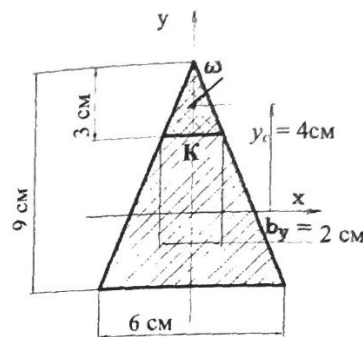


Рис. 5.27

$$\begin{aligned} \tau_{zy} &= \frac{Q_y S_x^{\omega}}{I_x b_y}, \\ I_x &= \frac{bh^3}{36} = \frac{6 \cdot 9^3}{36} = 121,5 \text{ см}^4 = 121,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \\ b_y &= b \cdot \frac{3}{9} = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 \text{ см} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \\ S_x^{\omega} &= y_c \omega = (6 - 2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 12 \text{ см}^3 = \\ &= 12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \\ \tau_{zy}^{(K)} &= \frac{12,15 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-6}}{121,5 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 6 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Если в сечении действует поперечная сила Q_x , то она распределяется по сечению в виде касательных напряжений τ_{zx} , которые определяются по формуле Журавского:

$$\tau_{zx} = \frac{Q_x S_y^{\omega}}{I_y b_x}, \quad (5.55a)$$

где все величины аналогичны тем, что записаны после формулы (5.55).

5.4.3. Построение эпюр касательных напряжений при изгибе для поперечных сечений разной формы

Прямоугольное сечение $b \times h$ (рис. 5.28)

По рис. 5.28 имеем:

$$\begin{aligned} A &= bh; \quad I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad b_y = b. \\ S_x^{\omega} &= y_c \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) b \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{aligned}$$

Формула для τ_{zy}^K имеет вид

$$\tau_{zy}^K = \frac{Q_y \frac{b}{2} (h^2/4 - y^2)}{bh^3 \cdot b} = \frac{6Q_y (h^2/4 - y^2)}{bh^3}$$

Ясно, что τ_{zy} изменяются в сечении параболически. Они равны нулю у поверхности сечения (при $y = \pm h/2$) и максимальны в точках на центральной оси x :

$$\tau_{max} = \frac{6Q_y h^2/4}{bh^3} = \frac{3Q_y}{2bh} = \frac{3Q_y}{2A}$$

Отметим, что эпюра касательных напряжений τ_{zy} условна – она показывает лишь величину τ_{zy} , но не их направление – реально касательные напряжения действуют в плоскости сечения и направлены вдоль оси y (рис. 5.28, справа).

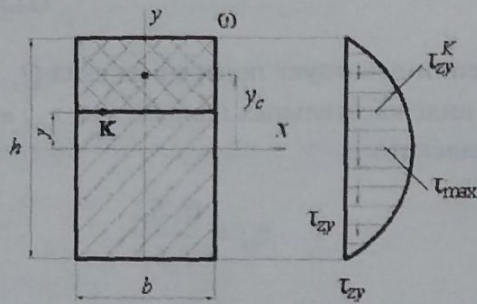


Рис. 5.28

Направление и знак касательных напряжений определяются поперечной силой Q_y .

Двутавровое сечение (рис. 5.29)

При построении эпюры касательных напряжений τ_{zy} двутавр условно представляем в виде двух прямоугольников ($b \cdot h$ и $d \cdot h$). В полках эпюра строится для прямоугольника ($b \cdot h$), а в стенке – для узкого прямоугольника ($d \cdot h$). В местах перехода полков в стенку на эпюре образуется скачок. В полках возникают напряжения τ_{zx} , изменяющиеся линейно, что ясно из рис. 5.29, в.

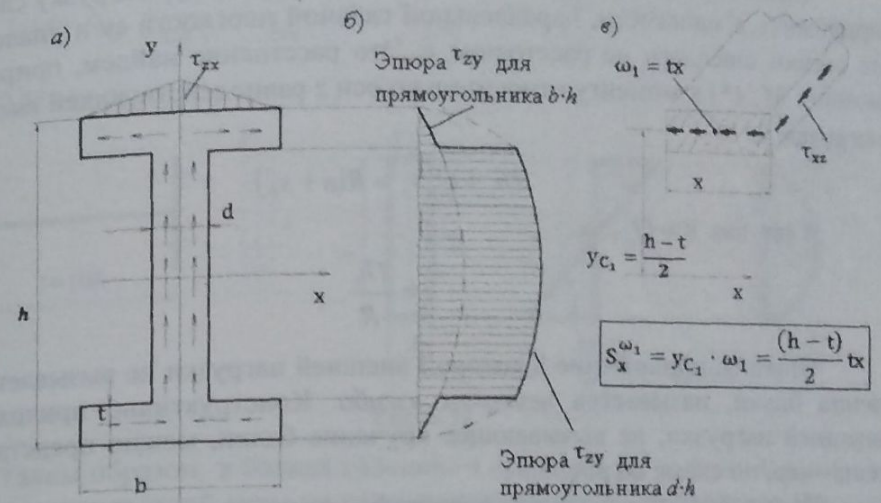


Рис. 5.29

Сечение – швеллер (рис. 5.30). Понятие о центре изгиба

Напряжения τ распределяются в сечении так, как в половине двутавра. При этом в полках возникают горизонтальные равнодействующие силы T от касательных напряжений τ_{zx} . В стенке действует поперечная сила Q_y – равнодействующая касательных напряжений τ_{zy} . Если внешняя нагрузка (R) приложена в главной плоскости zy , то, кроме поперечного изгиба, швеллер будет работать на кручение от дополнительного момента M_z , равного

$$M_z = Th_1 + Q_y x_0. \quad (*)$$

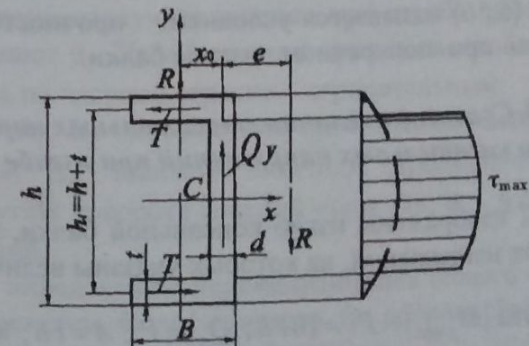


Рис. 5.30

Чтобы избежать закручивания швеллера, внешнюю нагрузку следует приложить в плоскости, параллельной главной плоскости zy и удаленной от стенки швеллера на расстояние e . Это расстояние найдем, приравняв момент M_z (*) к моменту относительно оси z равнодействующей внешней нагрузки R :

$$Th_1 + Q_y x_0 = R(e + x_0).$$

Итак как $R = Q_y$, то

$$e = \frac{Th_1}{R}.$$

Точка O , приложение в которой внешней нагрузки не вызывает кручения балки, называется *центром изгиба*. Конструктивно приложение внешней нагрузки, не вызывающее кручение балки, можно представить, например, по схеме на рис. 5.31.

Из разобранных в данном параграфе примеров ясно, что максимальные касательные напряжения в сечении возникают на нейтральной оси x . Здесь нормальные напряжения равны нулю, и, следовательно, любая элементарная частица находится в условиях напряженного состояния чистого сдвига.

Но для частицы материала, испытывающей НСЧС, экспериментально (п. 5.3.2), было получено условие прочности (5.23). Заменяя в этом условии τ_{\max} величиной τ_{\max} по формуле Журавского (5.55), запишем:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y \max} (S_x^{\omega})_{\max}}{I_x b_y} \leq [\tau]. \quad (5.56)$$

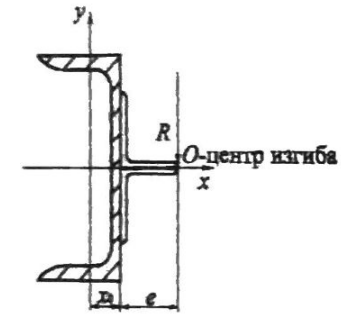


Рис. 5.31

Выражение (5.56) называется условием прочности по касательным напряжениям при поперечном изгибе балки.

5.4.4. Сравнение величин максимальных нормальных и касательных напряжений при изгибе

На рис. 5.32 изображены изгиб консольной балки, эпюры нормальных и касательных напряжений, на которых указаны величины σ_{\max} и τ_{\max} .

Очевидно, что $|M_{x \max}| = Pl = 10Ph$; $|Q_y| = P$; $A = bh$; $W_x = \frac{bh^2}{6}$.

$$\text{Тогда } \sigma_{\max} = \frac{10Ph}{bh^2/6} = \frac{60P}{bh}; \quad \tau_{\max} = \frac{3P}{2bh}, \quad \text{т.е. } \frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 40 \text{ или } \tau_{\max} \text{ составляет}$$

лишь 2,5% от σ_{\max} .

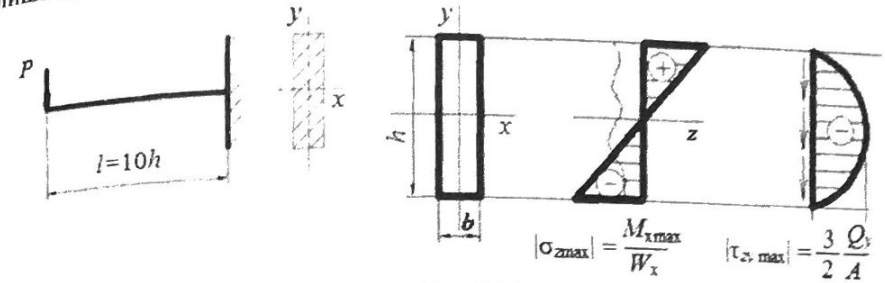


Рис. 5.32

Таким образом, в балках *сплошного* сечения при поперечном изгибе влиянием поперечной силы по сравнению с изгибающим моментом можно при расчете на прочность пренебречь.

Примечание. Если сечение имеет тонкостенный профиль, то τ_{\max} от силы Q_y велико, и в этом случае следует находить τ_{\max} и проводить расчет на прочность по касательным напряжениям.

5.4.5. Определение перемещений при изгибе. Формула О. Мора для определения перемещений в стержневых системах

При деформации изгиба поперечные сечения в балках получают перемещения. Различают линейные и угловые, абсолютные и взаимные перемещения (рис. 5.33). Линейное перемещение центра тяжести сечения называют прогибом и обозначают его Δ_i или по-другому y_i, v_i , где индекс « i » указывает адрес сечения, перемещение которого определяется. Прогиб вверх считается положительным, вниз – отрицательным. Угловое перемещение, которое получает сечение при изгибе, называют *углом поворота* и обозначают θ_i . Угол поворота против часовой стрелки считают положительным, а по часовой стрелке – отрицательным.

На рис. 5.33 Δ_i, Δ_k – абсолютные линейные перемещения (прогибы) сечений « i » и « k »; Δ_{ik} – взаимное линейное перемещение двух сечений: « i » и « k »; θ_i, θ_k – углы поворота сечений « i » и « k »; θ_{ik} – взаимный угол поворота двух сечений.

Решение по определению перемещений для общего случая деформаций стержневых систем было получено О. Мором. Рассмотрим вывод формулы О. Мора на примере изгиба балки.