

Параметрические колебания пластин

Будем рассматривать задачу с прямоугольной пластиной.

Пусть по сторонам b к пластине приложены сжимающие усилия p_x , изменяющиеся во времени по закону:

$$p_x = p_0 + p_t \cos \theta t \quad (1)$$

Под p_0 здесь понимается постоянная часть нагрузки, под p_t – амплитуда переменной части. Таким образом, усилия p самостоятельно раскачивают систему.

Будем считать пластину шарнирно опёртой по краям и примем, что стороны a остаются неподвижными. Что касается стороны b , то предположим, что одна из сторон ($x=a$) свободно перемещается относительно второй ($x=0$), фиксированной в плоскости xu ; обе эти стороны во время движения пластинки продолжают быть прямолинейными.

Будем рассматривать пластинку как систему с одной степенью свободы и аппроксимировать изогнутую поверхность с помощью выражения

$$\omega = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2)$$

Рассматривая собственные колебания прямоугольной пластинки, воспользуемся методом Бубнова-Галёркина и придём к выражению:

$$\frac{\gamma}{g} h^2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{\pi^4 D h}{a^4} \left(+ \lambda^2 \right) \zeta - \frac{\pi^2 h^2}{a^2} \left(p_x + \lambda^2 p_y \right) \zeta + \frac{\pi^4 E h^4}{16 a^2 b^2} \left(\frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2 \right) \zeta^3 = 0 \quad (3)$$

под ζ принимается отношение f/h , $\lambda = a/b$. Если считать, что продольные края остаются неподвижными ($\Delta y = 0$), то для p_y мы получаем выражение:

$$p_y = \mu p_x - E \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{f}{b} \right)^2 \quad (4)$$

Уравнение (3) для рассматриваемого случая примет вид

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{p_x^*}{p_{кр}^*} \right)^2 \zeta + \frac{0.75 \left(-\mu^2 \right) \left(+ 3\lambda^4 \right)}{\left(+ \lambda^2 \right)^2} \omega_0^2 \zeta^3 = 0 \quad (5)$$

Здесь

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^4 \left(+ \lambda^2 \right)^2}{12 \lambda^2 \left(-\mu^2 \right)} \left(\frac{c h}{a b} \right)^2 \quad (6)$$

c – скорость звука в материале пластины. Обозначив множитель при ζ^3 через η

$$\eta = \frac{0.75 \left(-\mu^2 \right) \left(+ 3\lambda^4 \right)}{\left(+ \lambda^2 \right)^2} \omega_0^2 \quad (6a)$$

приходим к уравнению

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{p_x^*}{p_{кр}^*}\right)^2 \zeta + \eta\zeta^3 = 0 \quad (7)$$

Здесь $p_{кр}^*$ в (5) и (7) это безразмерный параметр нагрузки

$$p_x^* = \frac{p_x}{E} \left(\frac{b}{h}\right)^2 \quad (8)$$

Критическое напряжение $p_{кр}$ определяется из (3), опуская инерционный и нелинейные члены, тогда считая $p_y = \mu p_x$, найдём

$$p_{кр} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h \lambda^2} \frac{(\lambda^2)^2}{1 + \mu \lambda^2} \quad (9)$$

Параметр $p_{кр}^*$ будет

$$p_{кр}^* = \frac{\pi^2}{12 \lambda^2} \frac{(\lambda^2)^2}{(-\mu^2) 1 + \mu \lambda^2} \quad (10)$$

Переходя к безразмерным параметрам в (1), получим

$$p_x^* = p_0^* + p_t^* \cos \theta t \quad (11)$$

Таким образом, в уравнении (7) должны фигурировать сжимающие усилия, изменяющиеся во времени по закону (11). Окончательно приходим к уравнению

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{p_0^* + p_t^* \cos \theta t}{p_{кр}^*}\right)^2 \zeta + \eta\zeta^3 = 0 \quad (12)$$

Введём обозначение Ω для частоты собственных колебаний пластинки как системы с одной степенью свободы, испытывающей статическое действие постоянной составляющей p_0^* :

$$\Omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{p_0^*}{p_{кр}^*}\right) \quad (13)$$

Далее назовём коэффициентом возбуждения величину

$$k = \frac{\frac{p_0^*}{p_{кр}^*}}{1 - \frac{p_0^*}{p_{кр}^*}} \quad (14)$$

характеризующую соотношение между переменной составляющей нагрузки и средним значением. Пользуясь обозначениями, представим (12) в виде

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \Omega^2 (-k \cos \theta t) \zeta + \eta\zeta^3 = 0 \quad (15)$$

Мы пришли к классическому уравнению, описывающему параметрические колебания системы с одной степенью свободы при единственной параметре

нелинейности η . Отбрасывая член, содержащий η , получаем обычное уравнение Матье, соответствующее линейной системе. Для линейной системы в области неустойчивости будет иметь место последовательное возрастание амплитуды. Мы будем интересоваться первой зоной неустойчивости вблизи $\theta=2\Omega$. Для такой области, подобно тем, которые заштрихованы на рисунке 1,а, амплитуды колебаний будут неограниченно увеличиваться.

Если же речь идёт о нелинейной системе, то амплитуды оказываются ограниченными. Их можно определить следующим образом. Введём новый параметр времени

$$t_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{P_0^*}{P_{кр}^*}} t = \Omega t \quad (16)$$

и обозначим

$$\delta = \frac{\eta}{\Omega^2} \quad (17)$$

Тогда уравнение (15) примет вид

$$\frac{d^2 \zeta}{dt_1^2} + \left(1 - k \cos \frac{\eta}{\Omega} t_1\right) \zeta + \delta \zeta^3 = 0 \quad (18)$$

Примем функцию ζ для частот, лежащих вблизи $\Omega/\theta=1/2$, в виде

$$\zeta = A_1 \cos \frac{\theta t_1}{2\Omega} + B_1 \sin \frac{\theta t_1}{2\Omega} \quad (19)$$

Воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \frac{1}{4} (\sin x - \sin 3x) & \cos^3 x &= \frac{1}{4} (\cos x + \cos 3x) \\ \sin x \cos^2 x &= \frac{1}{4} (\sin x + \sin 3x) & \sin^2 x \cos x &= \frac{1}{4} (\cos x - \cos 3x) \end{aligned}$$

Тогда, отбрасывая члены с утроенной частотой, получим

$$(A_1 \cos x + B_1 \sin x)^3 = A^2 (A_1 \cos x + B_1 \sin x)$$

где

$$A^2 = A_1^2 + B_1^2$$

Следовательно,

$$\zeta^3 = A^2 \left(A_1 \cos \frac{\theta t_1}{2\Omega} + B_1 \sin \frac{\theta t_1}{2\Omega} \right)$$

С другой стороны, применим соотношения

$$\begin{aligned} \cos 2x \cos x &= \frac{1}{2} (\cos x + \cos 3x) \\ \cos 2x \sin x &= \frac{1}{2} (\sin x + \sin 3x) \end{aligned}$$

И здесь сохраним лишь первые члены. Тогда уравнение (18) можно писать в форме

$$A_1 \left(1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} - \frac{k}{2} + \frac{3}{4} \delta A^2 \right) \cos \frac{\theta t_1}{2\Omega} + B_1 \left(1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} + \frac{k}{2} + \frac{3}{4} \delta A^2 \right) \sin \frac{\theta t_1}{2\Omega} = 0 \quad (20)$$

Принимая $A_1 \neq 0$ и $B_1 \neq 0$, приравняем нулю выражения в скобках; будем иметь

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} - \frac{k}{2} + \frac{3}{4} \delta A^2 &= 0 \\ 1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} + \frac{k}{2} + \frac{3}{4} \delta A^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Если нелинейный член в (18) отсутствует ($\delta=0$), мы получаем по (21) границы первой зоны неустойчивости

$$\frac{\theta}{2\Omega} = \sqrt{1 - \frac{k}{2}}, \quad \frac{\theta}{2\Omega} = \sqrt{1 + \frac{k}{2}} \quad (22)$$

или

$$\frac{\theta}{2\Omega} \approx 1 - \frac{k}{4}, \quad \frac{\theta}{2\Omega} \approx 1 + \frac{k}{4} \quad (22a)$$

Для всех значений $\theta/2\Omega$, лежащих в этих пределах, амплитуда колебаний неограниченно возрастают; соответствующие линии изображены на рисунке 2, сплошные линии отвечают (22), пунктирные – (22a)

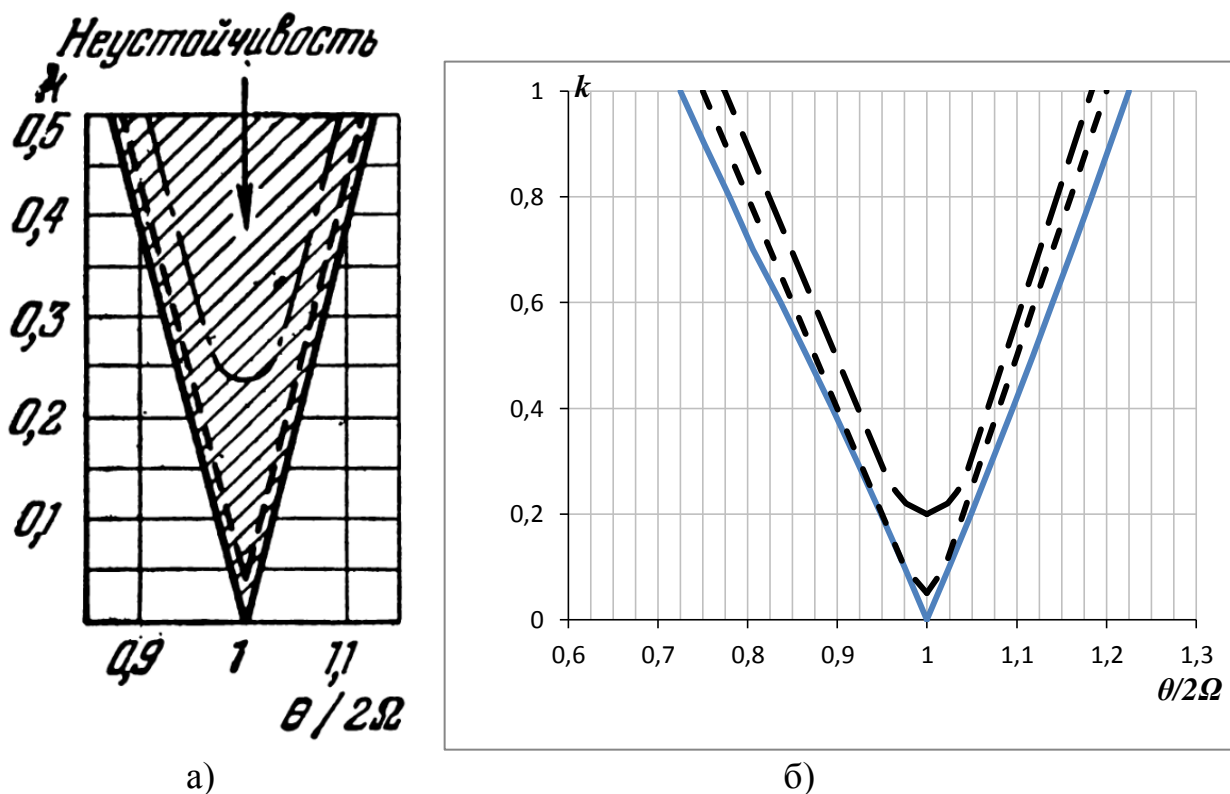


Рисунок 2 – Границы первой зоны неустойчивости при линейных параметрических колебаниях прямоугольной пластины

Но в разбираемом случае $\delta \neq 0$. Следовательно, для A находим определённые значения

$$A = \left[\frac{4}{3\delta} \left(\frac{\theta^2}{4\Omega^2} - 1 \pm \frac{k}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

зависящие от параметра нелинейности δ и коэффициента возбуждения. График $A^2(\theta^2/4\Omega^2)$, соответствующий (23), показан на рисунке 3; мы получаем прямые сплошные линии, наклонённые к оси абсцисс по углом 45° , «коридор» между ними имеет ширину k .

Решая задачу в линейной постановке, получим полосу шириной k , изображённую пунктирными линиями: амплитуды здесь неограниченно возрастают.

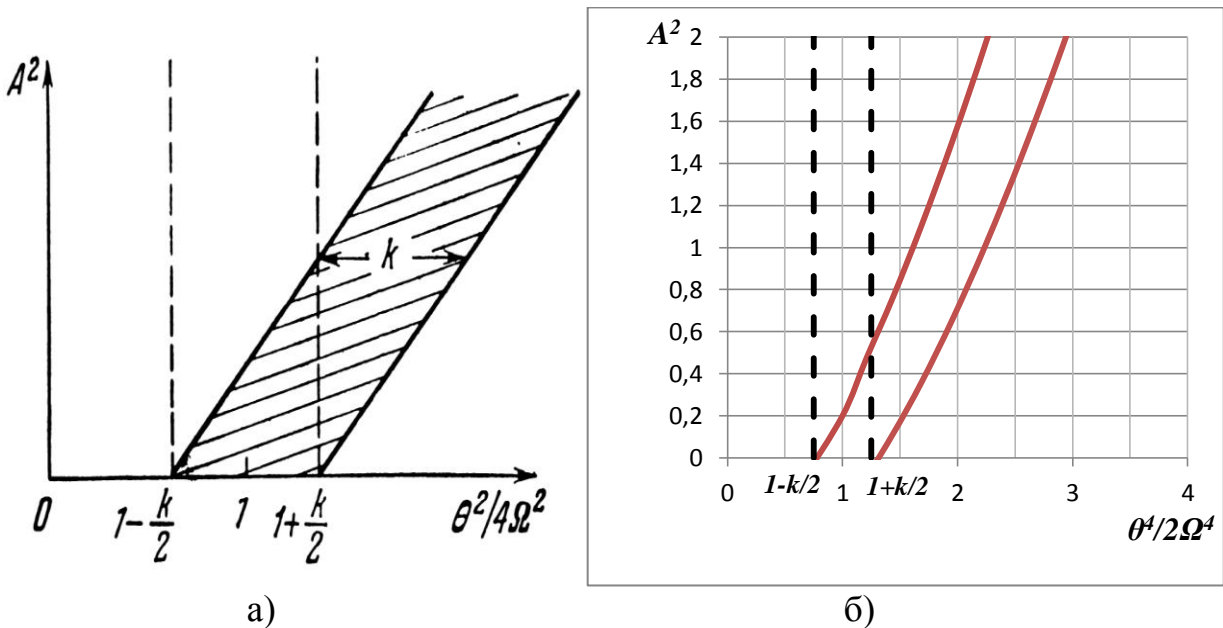


Рисунок 3 – Зависимости «амплитуда-частота» при параметрических колебаниях пластинки

Выясняем далее, какой эффект оказывает линейное демпфирование. Вводя соответствующий член в (15), приходим к уравнению

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\zeta}{dt} + \Omega^2 \left(-k \cos \theta t \right) \zeta + \delta \zeta^3 = 0 \quad (24)$$

Вводя переменную t_1 по (16), получим

$$\frac{d^2\zeta}{dt_1^2} + 2 \frac{\varepsilon}{\Omega} \frac{d\zeta}{dt_1} + \left(1 - k \cos \frac{\varepsilon}{\Omega} t_1 \right) \zeta + \delta \zeta^3 = 0 \quad (25)$$

где δ определяется по (17). Выражая ζ по формуле (19), приходим к уравнениям (при $A^2 = A_1^2 + B_1^2$)

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} - \frac{k}{2} + \frac{3}{4}\delta A^2 & \frac{\theta\epsilon}{\Omega^2} \\ -\frac{\theta\epsilon}{\Omega^2} & 1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} + \frac{k}{2} + \frac{3}{4}\delta A^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

При отсутствии нелинейного члена в (24), когда $\delta=0$, границы первой зоны неустойчивости теперь определялись бы уравнением

$$\frac{\theta^4}{16\Omega^4} - 2\frac{\theta^2}{4\Omega^2}\left(1 - \frac{2\epsilon^2}{\Omega^2}\right) + 1 - \frac{k^2}{4} = 0$$

или приближённо

$$\frac{\theta}{2\Omega} = \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{4\epsilon^2}{\Omega^2}}} \quad (28)$$

Кривая, найденная по (28) для некоторого значения ϵ , изображена на рисунке 2 штрих-пунктирной линией.

Вернёмся к нелинейной задаче. Величина A , исходя из полного уравнения (27), определяется следующим образом:

$$A = \left[\frac{4}{3\delta} \left(\frac{\theta^2}{4\Omega^2} - 1 \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{4\epsilon^2}{\Omega^2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

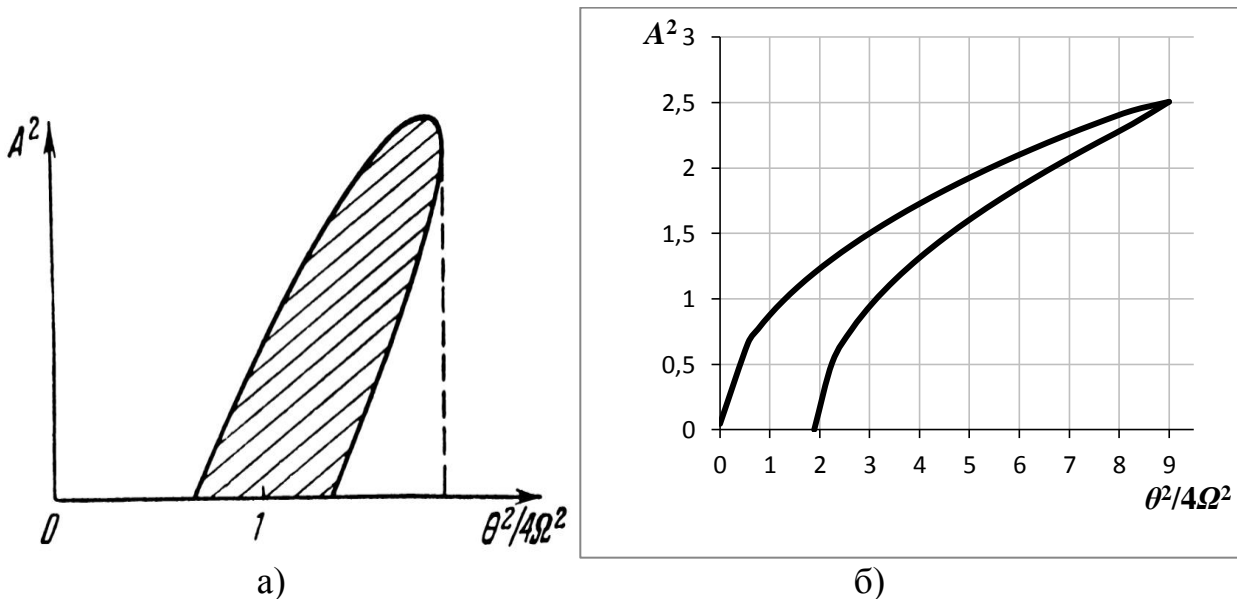


Рисунок 4 – Влияние демпфирования на параметрические колебания пластинки

Новый график для A^2 изображён на рисунке 4. Считая $A=0$, находим ширину полосы вдоль абсцисс; она равна теперь $2\sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{4\varepsilon^2}{\Omega^2}}$. Как видим, границы неустойчивости при наличии затухания сближаются. Вместо границы к зоны устойчивости определяются абсциссой (пунктир):

$$\frac{\theta^2}{4\Omega^2} = \frac{k^2\Omega^2}{16\varepsilon^2}.$$