

Суммирование распространяется на все участки постоянной толщины  $t_i$ . В случае непрерывного изменения толщины стенки по длине контура суммирование надо заменить интегрированием. Вследствие постоянства циркулирующего силового потока касательные напряжения достигают наибольшей величины в самых узких местах сечения ( $t=t_{\min}$ ) и будут равны:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2F_0 t_{\min}}. \quad (2.34)$$

## § 2.6. НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ ПРЯМОГО БРУСА ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

**Общие соображения.** Изгибная деформация брусьев — одна из самых распространенных. Изгиб испытывают многие элементы машин, конструкций и сооружений, поскольку он может возникнуть при самом произвольном расположении внешних нагрузок. Если при изгибе в поперечных сечениях бруса, кроме изгибающих моментов, будут действовать еще и поперечные силы, то такой изгиб называется поперечным.

Если же в сечениях бруса возникают только изгибающие моменты, то брус будет испытывать деформацию чистого изгиба. Такая деформация бруса произойдет, например, при нагружении

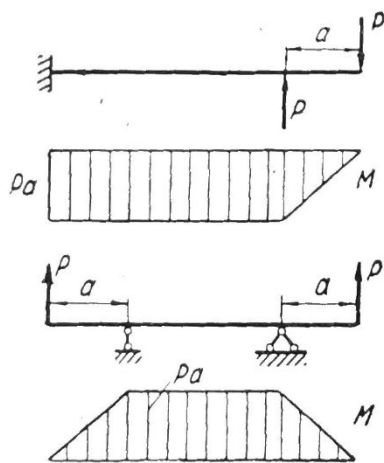


Рис. 2.12

его по торцам парами сил, плоскости действия которых расположены в главной центральной плоскости бруса (о главных осях и плоскостях см. приложение, стр. 229). На отдельных участках бруса чистый изгиб может иметь место и при сосредоточенных нагрузках (рис. 2.12).

Выведем формулы для напряжений при чистом изгибе бруса в плоскости  $ZOY$ .

**Геометрическое уравнение.** Под действием моментов  $M_x$  произойдет искривление бруса. Вследствие этого сетка из продольных и поперечных линий (рис. 2.13а), нанесенная на боковой поверхности, сохраняя прямые углы, приобретает клинообразную форму (рис. 2.13б). В соответствии с допущением о плоских сечениях (плоскости поперечных сечений остаются плоскими и перпендикулярными к изогнутой оси бруса) будем считать, что и те элементарные частицы, которые расположены внутри бруса, также деформируются без искажения прямых углов. Следовательно, сдвиг  $\gamma$  в плоскости чистого изгиба равен нулю.

При искривлении бруса длина продольных линий сетки изменяется: линии, расположенные ближе к центру кривизны, укорачиваются, а линии на противоположной стороне бруса удлиняются. Эти изменения и укорочения будут тем больше, чем боль-

шую кривизну получит брус при деформации. Условимся искривление бруса характеризовать радиусом кривизны  $\rho$ , так называемого нейтрального слоя. Нейтральным назовем слой волокон, длина которых при изгибе бруса не изменяется, и, следовательно, относительное удлинение  $\epsilon$  для элементарных частиц здесь равно нулю.

Расположим координатную плоскость  $ZX$  касательно к нейтральному слою, совместив ось  $X$  с нейтральной осью — линией пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением бруса (рис. 2.13г).

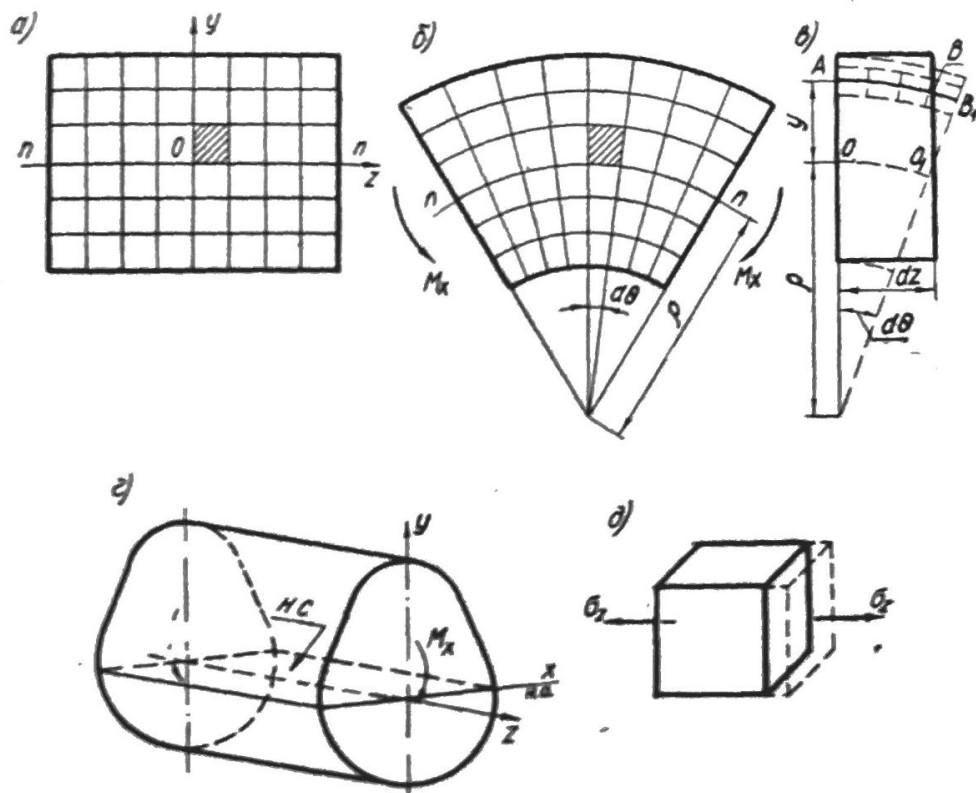


Рис. 2.13

Для установления закона распределения деформаций  $\epsilon$  по высоте сечения выделим элемент бруса длиной  $dz$ . На рис. 2.13в дан чертеж этого элемента до и после деформации.

Нетрудно установить, что абсолютное удлинение произвольного волокна  $AB$ , отстоящего от нейтрального слоя на расстоянии  $y$ , измеряется длиной отрезка  $BB_1$ .

$$\Delta(AB) = BB_1 = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta = yd\theta.$$

Разделив абсолютное удлинение на начальную длину волокна  $AB$ , равную \*  $dz = \rho d\theta$ , получим аналитическое выражение для относительного удлинения произвольного волокна:

$$\epsilon_z = \frac{\Delta(AB)}{AB} = \frac{y}{\rho}. \quad (a)$$

\* Искривленные волокна бруса представляют собой весьма пологие кривые, радиус  $\rho$  кривизны которых выражается в десятках и даже сотнях метров.

Это и есть геометрическое уравнение чистого изгиба прямого бруса, устанавливающее линейный закон изменения относительного удлинения  $\varepsilon_z$  по высоте сечения.

Таким образом, частицы бруса при чистом изгибе испытывают простую линейную деформацию в осевом направлении.

**Физическое уравнение.** Линейная деформация  $\varepsilon_z$  элементарных частиц (рис. 2.13д) сопровождается возникновением нормальных напряжений  $\sigma_z$  и связана с ними законом Гука  $\sigma_z = E\varepsilon_z$ .

Используя соотношение (а), получим:

$$\sigma_z = \frac{E}{\rho} y. \quad (б)$$

Отсутствие деформаций сдвига в элементарных частицах указывает на то, что касательных напряжений  $\tau_z$  в поперечных сечениях бруса при чистом изгибе не имеется.

**Статические уравнения.** При чистом изгибе бруса в плоскости  $YOZ$  изгибающий момент  $M_x$ , согласно уравнению статики (2.6), связан с нормальными напряжениями интегральной зависимостью

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF. \quad (2.6)$$

Поскольку нормальная сила  $N_z$  и изгибающий момент  $M_y$  в данном случае отсутствуют, то уравнения (2.3) и (2.7) принимают вид:

$$\int_F \sigma_z dF = 0, \quad \int_F \sigma_z x dF = 0.$$

Подставляя сюда значение напряжения  $\sigma_z$  согласно (б) и вынося из-под знака интеграла величину  $\frac{E}{\rho}$ , которая при интегрировании по площади сечения остается постоянной, будем иметь:

$$\frac{E}{\rho} \int_F y dF = \frac{E}{\rho} S_x = 0, \quad (в)$$

$$\frac{E}{\rho} \int_F xy dF = \frac{E}{\rho} I_{xy} = 0. \quad (г)$$

Первый интеграл представляет собой статический момент  $S_x$  площади сечения бруса. Второй интеграл  $\int_F xy dF = I_{xy}$  также является геометрической характеристикой сечения бруса и называется центробежным моментом инерции сечения (см. приложение).

Так как множитель  $\frac{E}{\rho}$  отличен от нуля, то для соблюдения уравнений статики (в) и (г) в ноль должны обращаться  $S_x$  и  $I_{xy}$ . Это позволяет нам сделать следующие выводы:

1) при изгибе *нейтральная ось* проходит через центр тяжести сечения, ибо только для центральной оси  $X$   $S_x = 0$ ;

2) *координатные оси*  $X$  и  $Y$  должны совпадать с *главными центральными осями сечения бруса*, так как только относительно этих осей центробежный момент равен нулю (см. приложение).

Иными словами уравнения статики (2.3) и (2.7) удовлетворяются только в том случае, когда *плоскость действия изгибающих моментов* проходит через ось бруса и *главную центральную ось инерции поперечного сечения*. Такой изгиб называется *прямым* или *плоским*, поскольку изменение кривизны бруса происходит в плоскости действия изгибающего момента\*. Отметим, что ось симметрии сечения является одной из главных центральных осей инерции.

Остальные уравнения статики (2.4, 2.5, 2.8) обращаются в тождества, так как ни поперечных сил, ни крутящего момента, ни касательных напряжений в поперечных сечениях при чистом изгибе бруса не имеется. Следовательно, уравнение (2.6) будет единственным из всех уравнений статики, не обращающихся в ноль, его и необходимо поэтому рассмотреть при решении задачи.

**Синтезирующее уравнение.** Подставляя в (2.6) значение  $\sigma_z$  из (б) и вынося за знак интеграла величину  $\frac{E}{\rho}$ , получим:

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = \frac{EI_x}{\rho}. \quad (2.35)$$

Интегральное выражение  $\int_F y^2 dF = I_x$  представляет геометрическую характеристику сечения, называемую *осевым моментом инерции*. Ее вычисление для некоторых простейших сечений дано в приложении. Для прокатных профилей величина  $I_x$  приводится в справочных таблицах ГОСТа.

Уравнение (2.35), являющееся синтезом статического, геометрического и физического обследований задачи плоского изгиба бруса, обычно приводится к виду

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (2.36)$$

Объединенная физико-геометрическая характеристика  $EI_x$  называется *жесткостью сечения бруса* при упругом изгибе в плоскости  $YOZ$ .

Значение уравнения (2.36) в решении задач об изгибе огромно, оно используется для определения перемещений брусьев, а также при выводе формул для напряжений.

\* Общий случай изгиба, при котором плоскость изгибающего момента не совпадает с главной осью сечения бруса, называется *косым изгибом*.

**Формула для напряжений.** Сравнительная оценка напряженности сечений изогнутых брусьев производится по величине изгибающих моментов. Значит, надо формулу для напряжений выразить через  $M_x$ . Заменяя с этой целью в (б)  $\frac{E}{\rho}$  величиной  $\frac{M_x}{I_x}$ , взятой из синтезирующего уравнения (2.35), будем иметь:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y. \quad (2.37)$$

Из формулы следует, что при прямом чистом изгибе бруса в его поперечных сечениях возникают распределенные по линейному закону нормальные напряжения. Наибольшего значения напряжения достигают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси (рис. 2.14). Знак напряжения определяется в соответствии с фактическим направлением момента  $M_x$  в данном сечении.

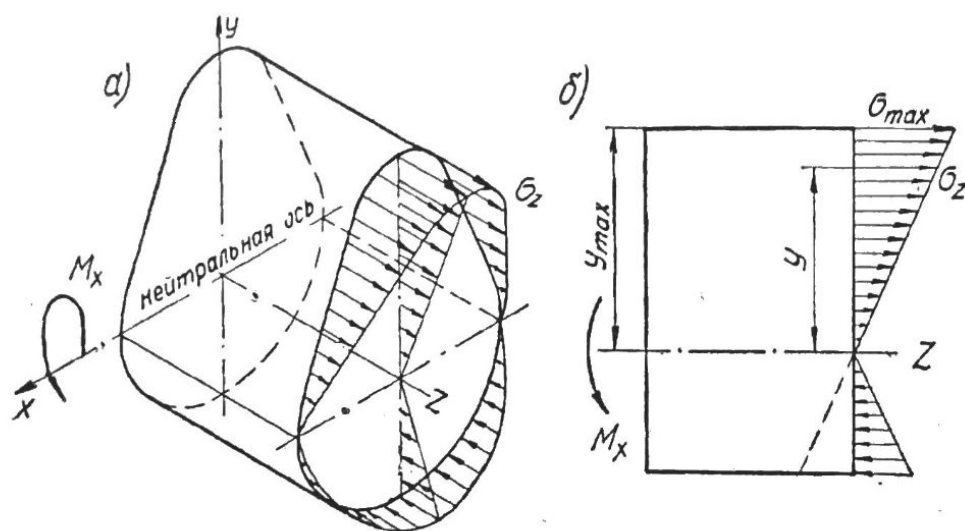


Рис. 2.14

Формулу для вычисления наибольших напряжений (при  $y_{\max} = \frac{h}{2}$ ) в сечениях, симметричных относительно нейтральной оси, обычно записывают в таком виде:

$$\max \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \frac{h}{2} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (2.38)$$

вводя еще одну геометрическую характеристику

$$W_x = \frac{I_x}{\frac{h}{2}}. \quad (2.39)$$

Эту характеристику сечения бруса называют осевым моментом сопротивления. Она вычисляется как отношение осевого момента

инерции всего сечения к расстоянию от нейтральной оси до крайних волокон. Для прокатных профилей величина  $W_x$  приводится в справочных таблицах ГОСТа.

## § 2.7. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЛОСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ПРЯМОГО БРУСА

**Основные понятия.** В предыдущем параграфе был рассмотрен случай плоского изгиба, при котором внутренние усилия, действующие в поперечном сечении бруса, дают лишь одну равнодействующую — изгибающий момент  $M$ . В машинах и конструкциях, однако, чаще встречаются брусья, испытывающие *поперечный изгиб*, при котором в поперечных сечениях, помимо нормальных, возникают еще и касательные напряжения, равнодействующей которых является поперечная сила  $Q$ .

Чтобы установить, как распределены по сечению эти напряжения, прежде изучим характер деформации элементарных частиц бруса при поперечном изгибе.

**Вид деформаций.** Подвергнем поперечному изгибу (например, по схеме рис. 2.15а) резиновый брус с прямоугольной формой сечения, на боковых поверхностях которого нанесена прямоугольная сетка. Изучение сетки в деформированном состоянии бруса (рис. 2.15б) позволяет установить, что при поперечном изгибе происходит:

- 1) удлинение и укорочение продольных линий, такое же, что и при чистом изгибе;
- 2) искажение углов сетки;
- 3) искривление поперечных линий.

Полагая, что характер деформации внутри бруса соответствует картине на поверхности (при малой толщине бруса такое заключение допустимо), приходим к выводу: элементарные частицы материала испытывают как линейную деформацию растяжения или сжатия, так и угловую деформацию сдвига (рис 2.15в). Следовательно, в частице по тем ее граням, которые совпадают с поперечными сечениями, будут действовать нормальные напряжения  $\sigma_z$  и касательные напряжения  $\tau_{zy}$ . А так как последние обладают свойством парности (см. § 1.9), то и на гранях, совпа-

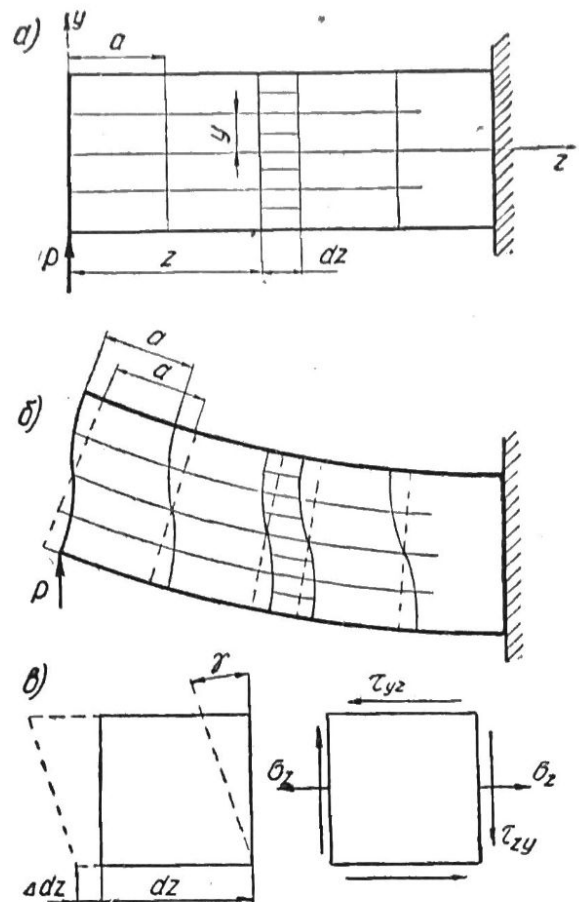


Рис. 2.15

дающих с продольными сечениями, будут иметь место касательные напряжения  $\tau_{yz}$ , равные по величине  $\tau_{zy}$  (рис. 2.15в).

Искривление поперечных линий свидетельствует о том, что при поперечном изгибе, в отличие от чистого изгиба, сечения не остаются плоскими.

Перейдем к выяснению законов распределения напряжений.

**Напряжения  $\sigma_z$ .** Как уже говорилось, при поперечном изгибе в поперечных сечениях бруса имеются и нормальные и касательные усилия. Возникает вопрос, нельзя ли нормальные напряжения определить по той же формуле (2.37), что и при чистом изгибе, поскольку и в том и другом случаях нормальные усилия своим статическим эквивалентом (равнодействующей) имеют  $M$ . Чтобы правильно ответить на этот вопрос, вспомним, что при выводе формулы (2.37) мы удовлетворяли не только статическому уравнению (2.6), но еще получили и использовали и геометрическое и физическое уравнения. Конечно, и при поперечном изгибе надо изучить эти же три стороны задачи.

При рассмотрении геометрической стороны задачи надо различать два случая: 1) поперечная сила  $Q$  постоянна, 2) поперечная сила  $Q$  изменяется вдоль бруса.

В первом случае (рис. 2.15б) плоскости всех поперечных сечений искривляются одинаково. При этом длина продольных линий, заключенных между двумя смежными поперечными линиями, будет после поперечного изгиба такой же, как и при чистом изгибе, при котором поперечные линии остаются прямыми (на рис. 2.15б они изображены пунктиром). Отсюда следует, что закон изменения линейных деформаций (а следовательно, и напряжений  $\sigma_z$ ) по высоте сечения при изгибе с  $Q = \text{const}$ , сохраняется таким же, что и при чистом изгибе бруса.

Во втором случае искривление плоскостей любых двух смежных сечений будет различным и, следовательно, распределение линейных деформаций по сечению уже не останется линейным.

Физическая сторона задачи поперечного изгиба будет также иной, чем при чистом изгибе. Дело в том, что за счет давления в местах приложения внешней нагрузки возникнут нормальные напряжения и в продольных сечениях бруса. При этом физическая зависимость между линейными деформациями и нормальными напряжениями оказывается уже более сложной. Поэтому при точном решении задачи поперечного изгиба указанные обстоятельства необходимо учитывать.

Однако опытные и теоретические\* исследования показывают, что практически отклонение от установленных при чистом изгибе зависимостей для напряжений (2.37) и кривизны (2.36) ничтожно и им можно пренебречь. Поэтому нормальные напря-

---

\* См., например, В. А. Гастев. Краткий курс сопротивления материалов, Физматгиз, 1959, стр. 189—196.

жения и в случае поперечного изгиба вычисляются по формуле:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y. \quad (2.37)$$

Заметим, что распределение напряжений вблизи точек приложения сосредоточенных нагрузок следует более сложному закону. Однако это отклонение от линейной зависимости (2.37) распространяется на малую область, размеры которой одинакового порядка с размерами поперечного сечения бруса. Иными словами, вблизи сосредоточенных сил брус испытывает местную деформацию.

#### Касательные напряжения в брусѣ прямоугольного сечения.

При выводе формулы для касательных напряжений опять-таки используем уже неоднократно применявшийся нами геометро-физико-статический метод и рассмотрим соответствующие уравнения.

*Геометрическое уравнение*, определяющее зависимость деформации сдвига от координат точек сечения, в сопротивлении материалов устанавливается экспериментально, для чего используются образцы из материала, способного под нагрузкой давать большие упругие деформации. На рис. 2.15б представлена типичная картина деформации при поперечном изгибе бруса прямоугольного сечения. Ее анализ позволяет установить, что наибольшее искривление поперечных сечений имеет место в точках нейтральной оси, а, следовательно, частицы материала здесь получают и наибольшую деформацию сдвига  $\gamma$ . Совсем не испытывают сдвига частицы у самой верхней и нижней граней бруса, так как поперечные линии на поверхности у ребер не искривляются и остаются перпендикулярными к ним. В остальных точках сечения деформация сдвига будет иметь промежуточное значение и выражается криволинейной зависимостью. Удовлетворяя условиям на верхней и нижней гранях бруса, примем, что деформации сдвига по ширине сечения постоянны, а по высоте сечения изменяются по параболическому закону:

$$\gamma_{zy} = C \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (a)$$

Здесь  $C$  — постоянная величина, подлежащая определению.

*Физическое уравнение* устанавливает зависимость между деформацией сдвига и обусловленными ею касательными напряжениями. Согласно закону Гука при сдвиге имеем

$$\tau_{zy} = G \gamma_{zy}.$$

Заменяя здесь  $\gamma_{zy}$  ее значением (a), получим:

$$\tau_{zy} = CG \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (б)$$

*Статические уравнения* (2.3) + (2.8), как и прежде, используем для определения постоянной  $C$ . В данном случае пять из них тождественно удовлетворяются и нам остается рассмотреть лишь уравнение (2.5), связывающее касательные напряжения с поперечной силой,

$$Q_y = \int_F \tau_{zy} dF. \quad (2.5)$$



Подставляя сюда значение  $\tau_{zy}$  из физического уравнения и учитывая, что для прямоугольного сечения шириной  $b$  элементарная площадка  $dF$  равна  $dF = bdy$ , после выполнения интегрирования найдем:

$$Q_y = CGb \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) dy = CGb \frac{h^3}{6}.$$

Определив теперь отсюда постоянную  $C$  и подставив ее значение в физическое уравнение (б), получим окончательную формулу для касательных напряжений в бруске прямоугольного сечения:

$$\tau_{zy} = \frac{6Q_y}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{Q_y}{2I_x} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (2.40)$$

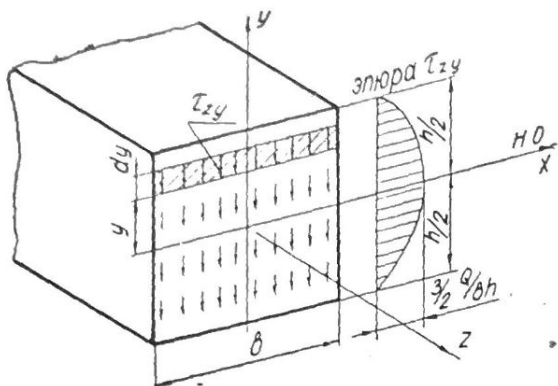


Рис. 2.16

Построенный по этому уравнению график распределения напряжений по сечению изображен на рис. 2.16. Как и следовало ожидать, в точках при  $y = \pm \frac{h}{2}$  касательные напряжения равны нулю, а при  $y = 0$  они достигают наибольшего значения

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{bh}. \quad (2.41)$$

**Касательные напряжения в бруске с произвольной формой сечения.** Геометро-физико-статический метод определения напряжений связан с необходимостью предварительного установления закона распределения деформаций по сечению. Для брусков, сечение которых отличается от прямоугольного, этот метод решения становится довольно сложным и потому излагается в курсе теории упругости. В сопротивлении же материалов для определения касательных напряжений применяют приближенный, но простой способ, основанный на использовании только уравнения равновесия выделенной из бруса небольшой его части. Так как у контура сечения напряжения  $\tau_z$  всегда направлены вдоль этого контура (см. стр. 32), то при произвольной форме сечения направление  $\tau_z$  в разных точках сечения будет различное. Указанным способом определяется не полное напряжение  $\tau_z$ , а лишь та из его составляющих  $\tau_{zx}$  (или  $\tau_{zy}$ ), которая параллельна поперечной силе.

Для определенности примем, что поперечный изгиб бруса, симметричного относительно оси  $Y$  поперечного сечения, происходит в плоскости  $YOZ$  (рис. 2.17), и, значит, поперечная сила  $Q_y$  в сечении совпадает с осью  $Y$ . Определению подлежат касательные напряжения  $\tau_{zy}^*$ , направленные параллельно оси  $Y$ . При

\* При симметричной относительно оси  $Y$  форме сечения  $\tau_{zy}$  будет равно полному касательному напряжению только в точках этой оси (рис. 2.17). В остальных же точках сечения имеются и напряжения  $\tau_{zx}$ , представляющие самоуравновешенную систему.

выводе формулы сделаем допущение о том, что эти напряжения во всех точках, равноудаленных от нейтральной оси, имеют одинаковую величину. Такое допущение справедливо при сравнительно малой ширине сечения.

Для определения  $\tau_{zy}$  на произвольном уровне  $y$  от нейтральной оси выделим из бруса малую его часть 1—3—3—2—1 (рис 2.17), для чего рас-сечем брус двумя плоски-ми поперечными сечени-ями 1—1 и 2—2 и горизон-тальным сечением 3—3, параллельным нейтраль-ному слою и расположен-ным на данном уровне  $Y$ .

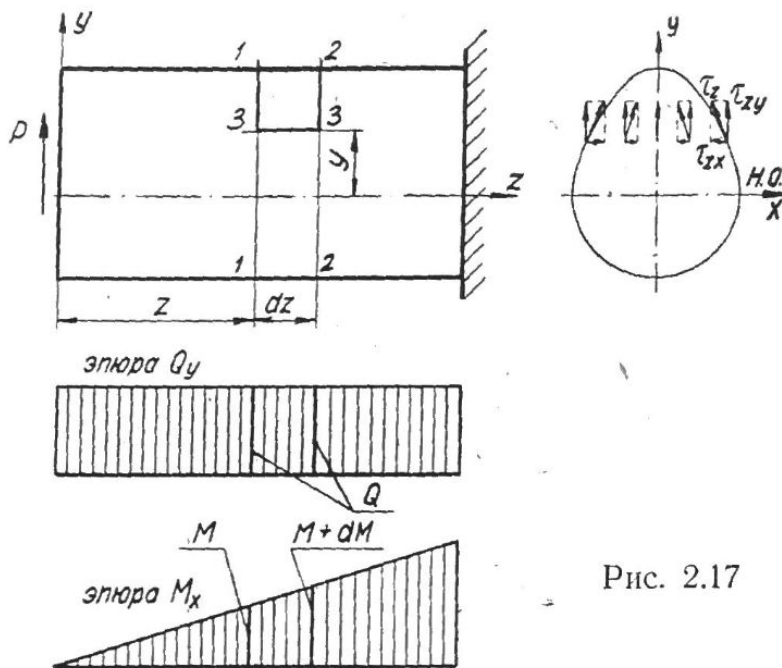


Рис. 2.17

На рис. 2.18 изображены фронтальная проекция и вид в торец слева выделенного из бруса элемента. Часть бруса, расположенная ниже исследуемого уровня, показана на рисунке пунктиром. Действие отброшенных частей бруса на рассмат-риваемый элемент заменено нормальными и касательными усили-ями. Во избежание затемнения чертежа в торцевых гранях эле-мента показаны только те вектора  $\tau_{zy}$ , которые подлежат опреде-лению.

Закон распределения нормальных усилий по сечениям нам известен и определяется формулой (2.37). Вследствие того, что изгибающий момент в сечении 2—2 больше изгибающего мо-мента в сечении 1—1 на величину  $dM_x$  (рис. 2.17), интенсив-ности нормальных усилий в этих сечениях будут также различ-ные, а именно:

в сечении 1—1

$$\sigma_{л} = \frac{M_x}{I_x} y_1, \quad (a)$$

в сечении 2—2

$$\sigma_{п} = \frac{M_x + dM_x}{I_x} y_1. \quad (б)$$

В соответствии с этим и равнодействующие нормальных уси-лий на левой и правой торцевых гранях элемента будут также не равны между собой. Эту разность нормальных усилий и уравно-вешивают касательные напряжения  $\tau_{yz}$  в горизонтальном сечении 3—3.

Для того чтобы написать уравнение равновесия рассматри-ваемого элемента бруса, вычислим равнодействующие усилий по его граням.

Равнодействующая нормальных усилий  $\sigma dF$  на левой торцевой грани согласно формуле (а) будет равна:

$$N_{л} = \int_{F_1} \sigma dF = \frac{M_x}{I_x} \int_{F_1} y_1 dF.$$

Так как  $\int_{F_1} y_1 dF = S_x$  есть статический момент относительно нормальной оси  $X$  части площади сечения, расположенной выше уровня ( $y$ ) определения касательных напряжений, то

$$N_{л} = \frac{M_x}{I_x} S_x.$$

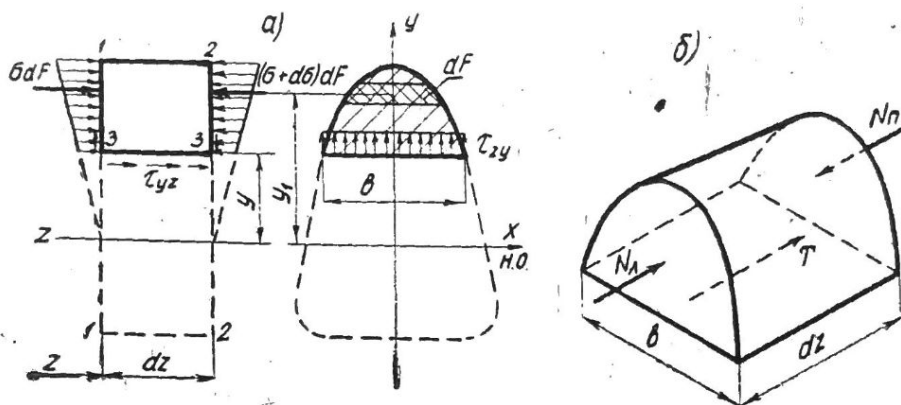


Рис. 2.18

Для нормальной силы на правом торце элемента в соответствии с (б) получим

$$N_{п} = \frac{M_x + dM_x}{I_x} S_x.$$

При равномерном распределении касательных усилий по нижней грани элемента, имеющей ширину  $b$  и длину  $dz$ , их равнодействующая будет равна:

$$T = \tau_{yz} b dz.$$

Тогда из уравнения равновесия элемента (рис. 2.18б)

$$\sum Z = N_{л} - N_{п} + T = 0$$

найдем

$$-\frac{dM_x}{I_x} S_x + \tau_{yz} b dz = 0.$$

Поделив обе части уравнения на  $b dz$  и приняв во внимание, что  $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$ , получим формулу для определения касательных напряжений в продольном сечении, расположенном на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя:

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y S_x}{I_x b}.$$

В силу закона парности по торцевым граням элемента (т. е. в поперечных сечениях бруса) в точках, удаленных от нейтральной оси на расстояние  $y$ , возникнут касательные напряжения  $\tau_{zy}$  такой же величины

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^*}{I_x b} \quad (2.42)$$

Формула (2.42) называется формулой Д. И. Журавского, по имени русского ученого прошлого века, впервые определившего касательные напряжения в балках.

Из четырех величин, входящих в формулу (2.42), поперечная сила  $Q_y$  и главный момент инерции  $I_x$  всей площади сечения бруса относительно нейтральной оси являются для рассматриваемого сечения постоянными. Ширина сечения  $b$  на уровне, в котором вычисляются  $\tau_{zy}$ , зависит от формы сечения. Статический момент  $S_x$  для разных слоев бруса имеет переменное значение, зависящее от ординаты  $y$ .

Так как для бруса прямоугольного сечения со сторонами  $b$  и  $h$  (рис. 2.16) статический момент верхней части сечения, расположенной выше уровня  $y$ , будет равен:

$$S_x = F_1 y_c = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right),$$

то, подставляя это значение в формулу (2.42), получим для касательных напряжений  $\tau_{zy}$  прежнее значение (2.40).

### Касательные напряжения в брус круглого сечения.

При поперечном изгибе, например, в плоскости  $YOZ$ , бруса круглого сечения возникнут обе составляющие касательного напряжения (рис. 2.19). Формулой (2.42) определяются только составляющие  $\tau_{zy}$ , параллельные поперечной силе  $Q_y$ . При этом статический момент части сечения, расположенной выше уровня  $y$ , будет равен:

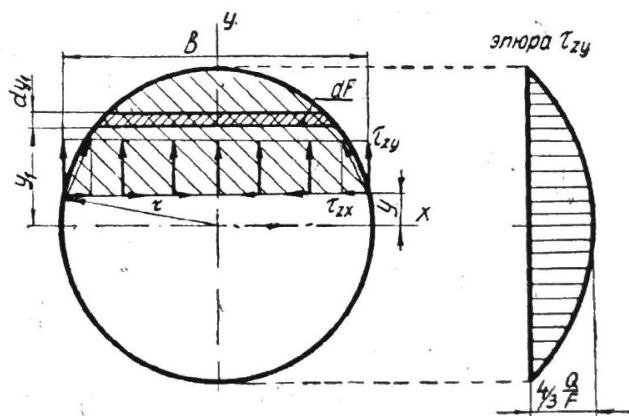


Рис. 2.19

$$S_x = \int_{F_1} y_1 dF = \int_y^r 2 \sqrt{r^2 - y_1^2} y_1 dy_1 = \frac{2}{3} \sqrt{(r^2 - y^2)^3}.$$

\* В соединениях, работающих на чистый сдвиг (заклепочные, сварные соединения) часто в целях упрощения касательные напряжения условно считают распределенными по сечению равномерно и определяют их по формуле  $\tau = \frac{Q}{F}$ .

После подставки в (2.42) данного значения  $S_x$ , а также значений момента инерции круга и ширины сечения на уровне  $y$ , соответственно равных

$$I_x = \frac{\pi r^4}{4}, \quad b = 2\sqrt{r^2 - y^2}.$$

получим

$$\tau_{zy} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{\pi r^4} (r^2 - y^2). \quad (2.43)$$

Наибольшего значения эти напряжения достигают в точках нейтральной оси

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{\pi r^2}. \quad (2.44)$$

Касательные напряжения  $\tau_{zx}$ , параллельные нейтральной оси, представляют самоуравновешенную систему. Их роль в оценке прочности бруса существенно меньше, нежели напряжений  $\tau_{zy}$ .

**Касательные напряжения в брусѣ двутаврового сечения.** Двутавровое, швеллерное, уголковое и другие поперечные сечения брусѣв, полученные прокаткой, можно упрощенно рассматривать состоящими из нескольких прямоугольников.

При поперечном изгибе двутавра силами, лежащими в главной плоскости  $YOZ$ , поперечная сила  $Q_y$  в сечении будет совпадать с осью симметрии  $Y$ . Поэтому в стенке двутавра, представляющей собой прямоугольник, длинные стороны которого параллельны  $Q_y$ , возникнут только касательные напряжения  $\tau_{zy}$ . Величина их на произвольном уровне  $y$  (рис. 2.20) определяется формулой (2.42)

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x}{I_x d},$$

где  $d$  — толщина стенки;

$S_x$  — статический момент относительно оси  $X$  всей полки и части стенки, лежащей выше уровня  $y$ .

В пределах стенки  $\tau_{zy}$  изменяется, как и в прямоугольнике, по закону квадратной параболы. Для облегчения вычисления максимальных касательных напряжений в таблицах ГОСТа на прокатные профили приведено отношение осевого момента инерции всего сечения к статическому моменту площади половины сечения двутавра  $\left(k = \frac{I_x}{S_{\max}}\right)$ .

Тогда

$$\max \tau_{zy} = \frac{Q_y}{kd}. \quad (2.45)$$

Эпюра напряжений  $\tau_{zy}$  в стенке показана на рис. 2.20.

Для больших номеров двутавров, имеющих мощные полки, разница между величинами напряжений на нейтральной оси и в месте присоединения стенки с полками незначительна, для малых же номеров — она существенна.

Расчеты показывают, что величина поперечной силы  $Q_y$  в сечении не равна равнодействующей  $\int_{F_{ст}} \tau_{zy} dF$  касательных усилий в стенке, однако отличается от нее весьма незначительно. Эта малая разница происходит за счет доли  $\tau_{zy}$ , действующих в полках. Напряжения эти методами сопротивления материалов не могут быть определены, но ввиду их малой величины они и не представляют для нас интереса.

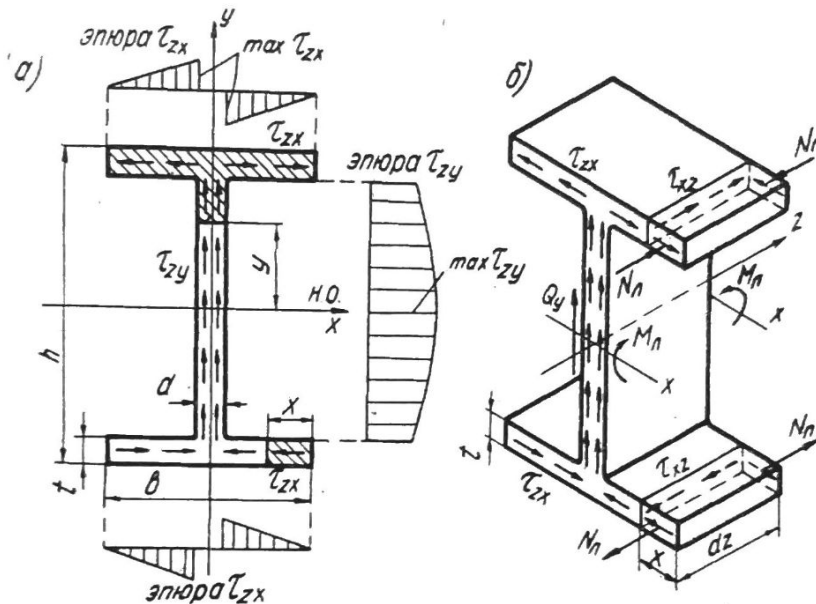


Рис. 2.20

В полках имеются также и касательные напряжения  $\tau_{zx}$ , направленные вдоль контура. Их существование объясняется необходимостью соблюдения равновесия отсеченной части полки (рис. 2.20б). В самом деле, при положительной поперечной силе  $Q$  из дифференциальной зависимости  $\frac{dM}{dz} = Q$  следует, что изгибающий момент с увеличением координаты  $z$  возрастает, т. е.  $M_n > M_d$ . Тогда и интенсивность  $\sigma_z$  нормальных усилий в правом сечении будет больше, чем в левом, а значит и равнодействующая этих усилий  $N_n$  на правой торцевой грани отсеченной части полки будет также больше, нежели  $N_d$ . Эта разница в нормальных усилиях и уравнивается касательными усилиями  $\tau_{xz}$  в продольных сечениях полок. В силу закона парности такие же по величине касательные напряжения  $\tau_{zx}$  возникнут и в поперечных сечениях полок. В результате решения уравнения равновесия отсеченной части полки получим формулу, аналогичную (2.42), в которой за  $b$  следует принимать толщину  $t$  полки, а за  $S_x$  — статический момент (относительно оси  $X$ ) той части площади полки, которая на рис. 2.20а внизу отмечена штриховкой, т. е.

$$\frac{h-t}{2} tx.$$

Тогда

$$\tau_{zx} = \frac{Q_{yx}}{2I_x} (h-t). \quad (2.46)$$

Следовательно, касательные напряжения в полках изменяются по линейному закону (см. эпюры  $\tau_{zx}$  на рис. 2.20а), достигая в сечении при  $x = \frac{b-d}{2}$ , примыкающем к стенке двутавра, наибольшего значения:

$$\max \tau_{zx} = \frac{Q_y}{4I_x} (b-d) (h-t). \quad (2.47)$$

Величина эта, однако, не может считаться достоверной, так как в действительности в районе присоединения полки со стенкой распределение напряжений зависит также от радиуса закругления входящих углов стыка, и от остаточных напряжений, обусловленных прокаткой.

Направление касательных напряжений в стенке совпадает с направлением поперечной силы  $Q_y$ , в полках же устанавливается из условия соблюдения равновесия отсеченной части. Например, в случае, изображенном на рис. 2.20, для нижней полки  $\tau_{zx}$  направлены к оси  $Y$ , а в верхней полке — от нее. Для выполнения условий равновесия необходимо, чтобы касательные напряжения в сечении образовывали поток, руслом для которого служит контур сечения. Две ветви этого потока берут начало в крайних, наиболее удаленных от оси  $Y$  точках обеих половин одной из полок (на рис. 2.20 — в нижней полке). Постепенно возрастая, эти ветви сливаются в стенке на стыке с полкой в один общий поток, достигающий наибольшей величины в точках нейтральной оси. После этого поток начинает уменьшаться, затем на стыке со второй полкой разделяется снова на две ветви, расходящиеся по каждой из половин полки и убывающие до нуля в крайних ее точках.

**Касательные напряжения в бруске швеллерного сечения.** При поперечном изгибе такого бруса силами, расположенными в главной плоскости  $YOZ$ , касательные напряжения распределяются по сечению так же, как и в половине двутавра, разрезанного по оси  $Y$  (рис. 2.21). Однако поперечная сила  $Q_y$  в швеллере уже не будет совпадать с осью  $Y$ . Вследствии несимметрии корытного сечения относительно силовой плоскости  $YOZ$  касательные усилия в его полках, в отличие от двутавра, уже не будут полностью взаимноуравновешены. А именно равнодействующие  $T$  этих усилий создадут пару сил  $Th_1$ , которая совместно с поперечной силой  $Q_y$  вызовет вращающий вокруг оси  $Z$  момент

$$M_z = Th_1 + Q_y x_0,$$

обуславливающий дополнительную (вторичную) деформацию закручивания бруса. Внешние нагрузки, приложенные к рассматриваемой части бруса, и их равнодействующая  $R$ , численно равная

поперечной силе  $Q_y$  в данном сечении, пересекают ось  $Z$  и потому момента не создадут.

Таким образом, если плоскость действия внешних сил не является плоскостью симметрии бруса, то поперечный изгиб сопровождается еще и закручиванием. Во избежание явления скручивания необходимо, чтобы плоскость действия внешних сил располагалась левее центральной плоскости бруса на таком удалении  $e + x_0$  (рис. 2.21), при котором момент внешних сил (или их равнодействующей  $R$ ) был бы равен по величине и противоположен по направлению  $M_2$ . Тогда из условия

$$Th_1 + Q_y x_0 = R(e + x_0),$$

учитывая, что  $R = Q_y$ , найдем

$$e = \frac{Th_1}{Q_y}.$$

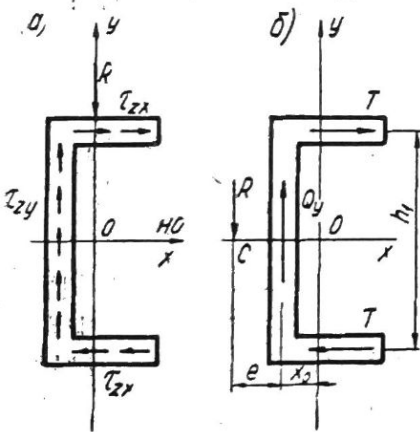


Рис. 2.21

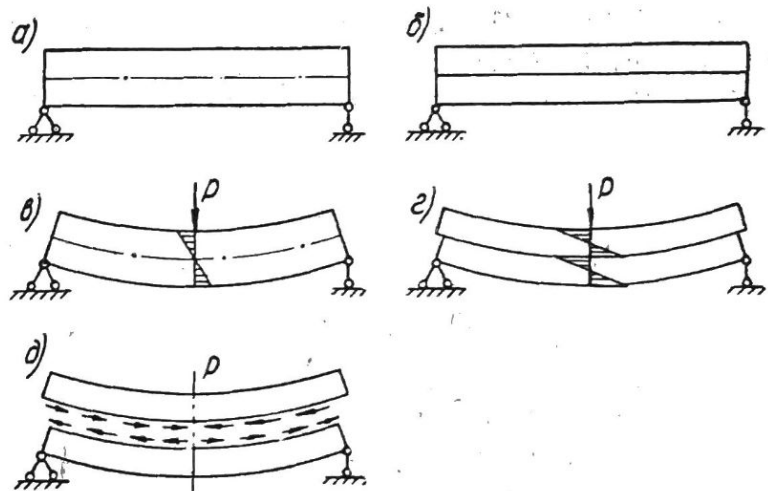


Рис. 2.22

Точка  $C$ , через которую должна проходить силовая линия сечения, называется центром кручения при изгибе.

**О работе балок, составленных из отдельных слоев.** Касательные напряжения  $\tau_{yz}$ , возникающие в балке, являются результатом взаимодействия ее смежных продольных слоев. На рис. 2.22 показаны балки, состоящие из двух одинаковых брусков прямоугольного сечения, причем на рис. 2.22б бруски просто наложены друг на друга, а на рис. 2.22а — прочно скреплены между собой.

Под нагрузкой обе балки деформируются, как показано на рис. 2.22 в, г\*. Из сравнения деформации обеих балок нетрудно убедиться в наличии касательных напряжений в продольных слоях сплошной балки (рис. 2.22д).

Следует заметить, что отсутствие связи между слоями сказыва-

\* Силами трения между слоями в балке, изображенной на рис. 2.22 г, пренебрегаем, полагая их малыми.



вается и на величине нормальных напряжений. Если для сплошной балки

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{6M_x}{bh^2},$$

то для балки, составленной из двух брусков, положенных друг на друга, напряжения будут значительно больше. В этом случае, очевидно, каждый брусок будет работать как отдельная балка, воспринимая половину момента от всей внешней нагрузки. Для такой балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{6 \frac{M_x}{2}}{b \left(\frac{h}{2}\right)^2} = 12 \frac{M_x}{bh^2}.$$

Эпюры нормальных напряжений, возникающих в поперечном сечении, в обоих случаях показаны на рис. 2.22 в, г. Поэтому, если балку приходится конструировать из нескольких слоев, надо обеспечить их совместную работу путем соединения их болтами, заклепками, шпонками или сваркой.

## § 2.8. НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ ПЛОСКОГО БРУСА БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ

**Общие соображения и допущения.** В машинах и конструкциях довольно часто встречаются элементы в виде кривых брусьев. Таковы, например, крюки подъемников, звенья цепей, кольца, ободы маховиков и шкивов, криволинейные участки многих станин и конструкций. Мы ограничимся рассмотрением таких брусьев, у которых:

- 1) геометрическая ось есть произвольная плоская кривая;
- 2) поперечные сечения симметричны относительно оси, лежащей в плоскости кривизны;

- 3) внешняя нагрузка расположена в этой же плоскости.

Тогда, вследствие геометрической и силовой симметрии относительно плоскости кривизны, деформированная ось бруса останется лежать в этой же плоскости.

При нагружении кривого бруса даже одной силой в его поперечных сечениях возникают три силовых фактора  $N$ ,  $Q$  и  $M_x$ . Пренебрегая взаимным влиянием этих факторов друг на друга, определим напряжения в брусике от каждого из них в отдельности.

Нормальной силе  $N$ , приложенной в центре тяжести сечения и обусловленной растяжением (сжатием) бруса, соответствуют равномерно распределенные по сечению нормальные напряжения. Вычисляются они, как и в прямом брусике, по формуле

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F}.$$