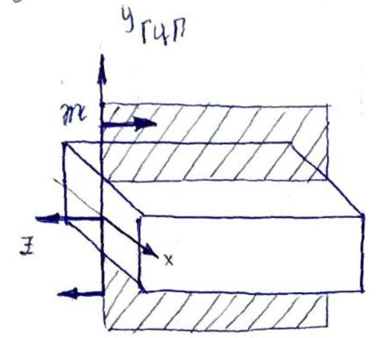
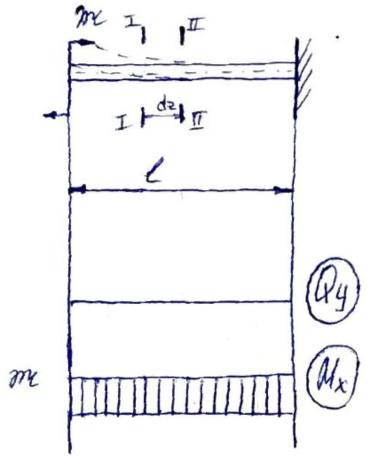
§5. Определение нормальных напряжений при прямом чистом изгибе

Изгиб называется прямым, если изгибающие моменты лежат в одной из главных центр. плоскостей сечения бруса.

Изгиб называется чистым, если он происходит при отсутствии поперечной силы.



ГЦП – проходит через центр тяжести (цент. ось)



1) П.С. сечение I-I и II-II повернутся друг отн-но друга на некоторый угол $d\varphi$ при этом верхние волокна сожмутся, а нижние растянутся.

Также будут иметь место волокна длина котор. не изменится. Совокупность последних т.м. образует нейтральный слой

Найдем деформацию волокон, находящихся на расстоянии y от нейтрального слоя.

$$\varepsilon_z = \frac{C'D'-CD}{CD} = \frac{(\rho+y)\,d\varphi - \rho\, d\varphi}{\rho\, d\varphi} = \frac{y}{\rho}$$

$$CD = dz = \rho\, d\varphi$$
$$C'D' = (\rho+y)\,d\varphi$$

2) Ф.С.

$$\sigma_z = E\cdot\varepsilon = E\frac{y}{\rho} \quad (*)$$

3) С.С. из (5) $\rightarrow$ $M_z = \int_A \sigma_z dA = \int_A E\frac{y}{\rho}\,dA = E\cdot\frac{1}{\rho}\underbrace{\int_A y\,dA}_{S_x} = 0$

т.к. $\frac{E}{\rho} \neq 0$, $\rightarrow$ $S_x = 0$ $\rightarrow$ т.е. ось x является главной центральной осью (Г.Ц.О.)

из (6) $M_y = \int_A \sigma_z x\,dA = \int_A E\frac{y}{\rho}x\,dA = \frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A xy\,dA}_{=J_{xy}} = 0$

$\frac{E}{\rho} \neq 0 \Rightarrow \int_A xy\,dA = 0 \Rightarrow J_{xy} = 0 \rightarrow x$ является г.о.

т.о. изгиб происходит вокруг Г.Ц.О. Ox

из (6) $M_x = \int_A \sigma_z y\,dA = \int_A E\frac{y}{\rho}y\,dA = \frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A y^2 dA}_{=J_x} = \frac{EJ_x}{\rho}$ $(**)$

Из $(*)$ и $(**)$ $\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{J_x}y}$ – ф. определения напряжения при прямом чистом изгибе

$* \rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{\rho} = M_x : (EJ_x)}$ – кривизна бруса при прямом чистом изгибе.

EJ_x – жесткость бруса при изгибе.

Эпюра нормальных напряжений

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y}$$

при $y = 0 \rightarrow \sigma_z = 0$ — на нейтр. оси X

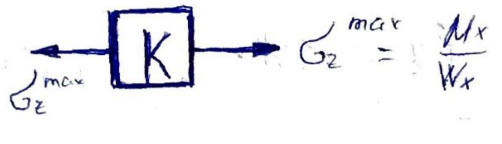
$y = y_{max} \rightarrow \sigma_z^{max} = \frac{M_x}{J_x} y_{max} = \frac{M_x}{W_x}$

$$\boxed{W_x = \frac{J_x}{y_{max}}}$$ — осевой момент сопротивления [$см^3$]

О.Т. (опасная точка) — т. K

ОТОС (определение т. опасного сечения)

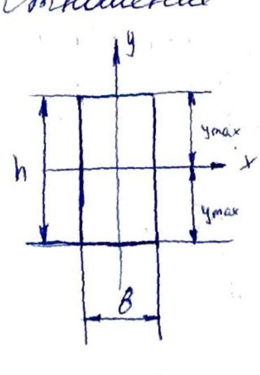
точка наиболее удаленная от нейтр. оси.



Напряженное состояние в О.Т. хар-ся наличием только нормального напряжения и наз-ся линейное напряженное состояние (ЛНС)

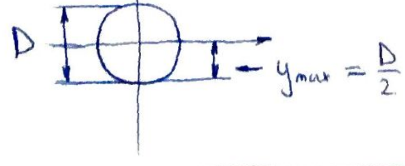
Осевой момент сопротивления

Отношение момента инерции

1) 

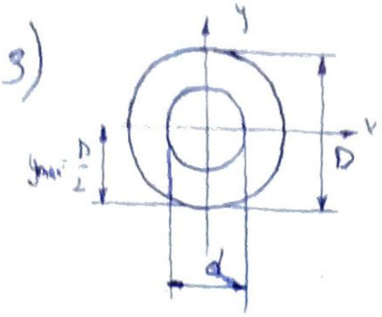
$$\left[W_x = \frac{J}{y_{max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}\right]$$ Для прямоугол.

$y_{max} = \frac{h}{2}$.

2) 

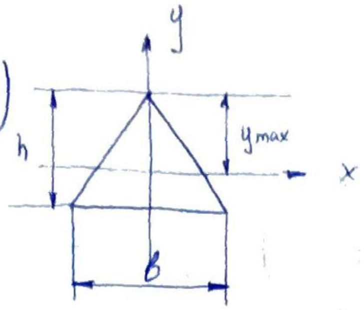
$$W_x = \frac{J}{y_{max}} = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32}$$

3)



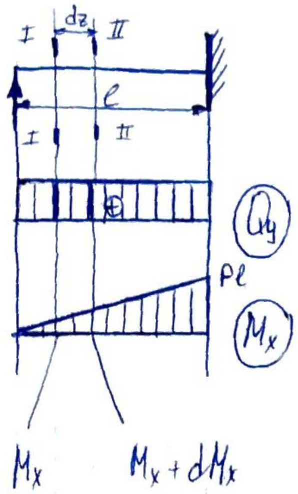
$$W_x = \frac{y_x}{y_{max}} = \frac{\frac{\pi D^4(1-\alpha^4)}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$$

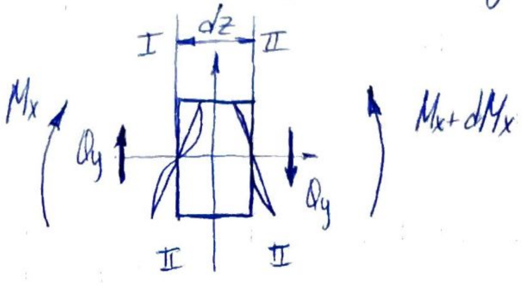
4)



$$W_x = \frac{y}{y_{max}} = \text{сами!}$$

§6. Определение нормальных сечений при плоском поперечном изгибе.





Наличие поперечной силы приводит к тому, что плоские сечения искажаются.

Эти искажения не велики $< 0,25\,\%$

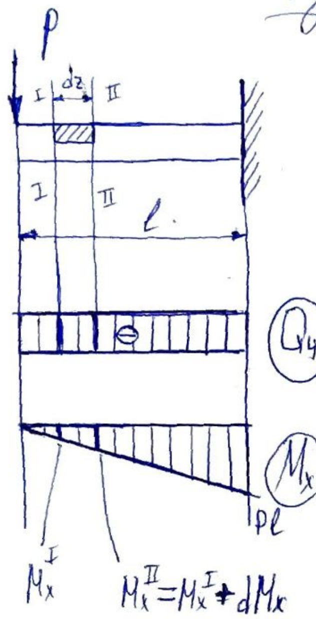
Поэтому с опр. допущениями при опр. норм. напряжений мы будем пользоваться формулой, полученной для прямого чистого изгиба.

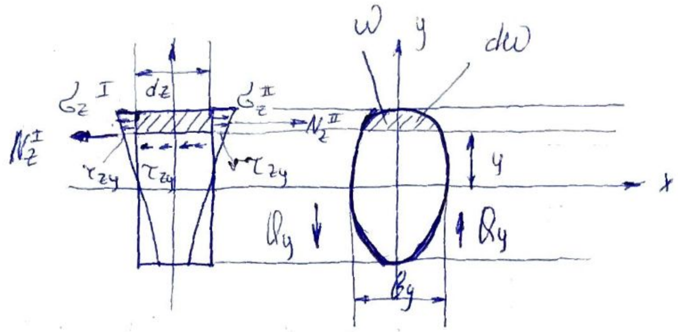
$$\sigma_z = \frac{M_x}{W_x} = \frac{M_x}{J_x} y_{max}$$ – max напряжение

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$$ – закон распределения напряжения по высоте сечения

$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$ – произвольной т. по высоте сечения

§7 Определение касательных напряжений при плоском поперечном изгибе





Рассмотрим часть сечения

Рассмотрим сечение I-I

$M_x^I \to \sigma_z^I = \frac{M_x^I}{J_x} y$

$$N_z^I = \int_\omega \sigma_z^I d\omega = \int_\omega \frac{M_x^I}{J_x} y\, d\omega$$

II-II $\quad M_x^{II} \Rightarrow \sigma_z^{II} = \frac{M_x^{II}}{J_x} y$

$$N_z^{II} = \int_\omega \sigma_z^{II} d\omega = \int_\omega \frac{M_x^{II}}{J_x} y\, d\omega$$

$M_x^{II} > M_x^I \to N_z^{II} > N_z^I$

$M_x^{II} = M_x^I + dM_x$

Запишем условие равновесия:

$$N_z^{II} = N_z^I + \tau_{yz} (\underbrace{b_y \cdot dz}_{\text{площадка}})$$

$$\int_\omega \frac{M_x^{II}}{J_x} y\, d\omega = \int_\omega \frac{M_x^I}{J_x} y\, d\omega + \tau_{yz} (b_y \cdot dz)$$

$$\int_\omega \frac{M_x^I + dM_x}{J_x} y\,d\omega - \int \frac{M_x^I}{J_x} y\,d\omega = \tau_{yz}(b_y \cdot dz)$$

$$\int_\omega \frac{dM_x}{J_x} y\,d\omega = \tau_{yz}(b_y \cdot dz)$$

$$\frac{dM_x}{J_x} \int_\omega \underbrace{y\,d\omega}_{S_x^\omega} = \tau_{yz}(b_y dz)$$

$\int_\omega y\,d\omega = S_x^\omega$ – статический момент площади ω относит-но оси X

$$\frac{dM_x}{J_x} S_x^\omega = \tau_{yz}(b_y - dz)$$

$$\tau_{yz} = \frac{dM_x S_x^\omega}{J_x b_y dz} = \frac{Q_y \cdot S_x^\omega}{J_x b_y}$$

$$\boxed{\tau_{yz} = \frac{Q_y S_x^\omega}{J_x b_y}}$$

формула для опред-я касат. напряжений при плоском поперечном изгибе.

↓

Ф-ла Журавского

Q_y – поперечная сила

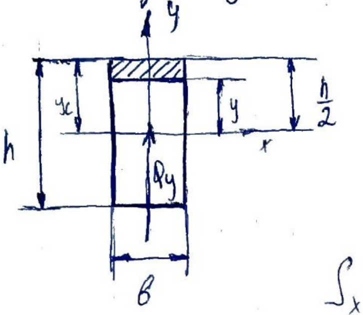
S_x^ω – статический момент отсеченной части бруса относит-но оси X

J_x – момент инерции всего сечения

b_y – ширина сечения в месте, где определяются касат. напряжения

Распределение касат. напряжений по высоте поперечного сечения бруса при изгибе

а) Прямоугольное сечение:



$$\underline{\tau_{yz}} = \frac{Q_y S_x^{\omega}}{J_x b_y} = \frac{Q_y\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\frac{b}{2}}{\frac{bh^3}{12}\cdot b} =$$

$$= \frac{Q_y}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-y\right) =$$

$$S_x^{\omega} = \omega y_c =$$

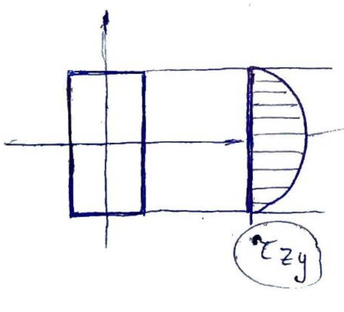
$$\omega = \left(\frac{h}{2}-y\right)b$$

$$y_c = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+y\right)$$

$$= \frac{Q_y S_x^{\omega}}{J_x b_y} = \ldots = \underline{\frac{6Q_y}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)}$$

$$y_c = y + \left(\frac{h}{2}-y\right)\frac{1}{2}$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12}$$

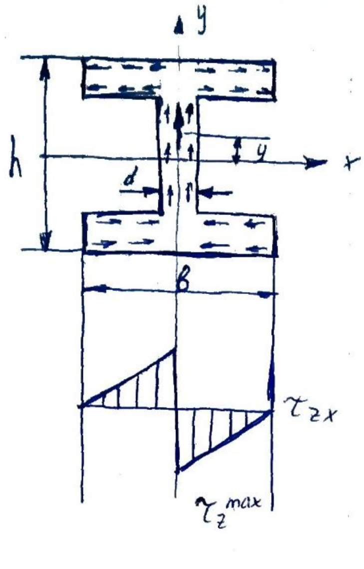


$$y=0 \rightarrow \tau_{zy}^{max} = \frac{6Q_y h^2}{\underbrace{bh}_{A}{}^{2}\,4} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{A}$$

$$y = \pm\frac{h}{2} \rightarrow \tau_{zy} = 0$$

Направление и знак касат. напряжение определяется поперечной силой Q_y

б) Двутавровое сечение



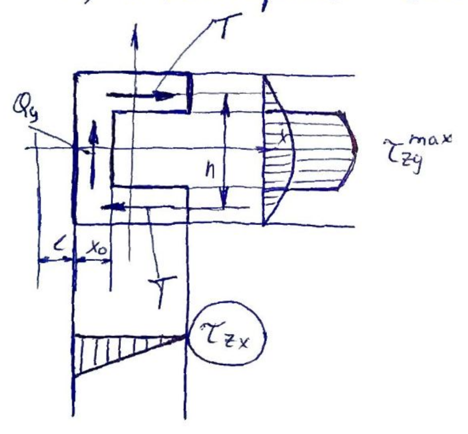
$$\tau_{zy}^{max} = \frac{Q_y S_x^{\omega max}}{J_x d} = \frac{Q_y}{K d}$$

$$K = \frac{J_x}{S_x^{\omega max}}$$

$$\tau_{zx} = \frac{Q_y x}{2 J_x}(h - t)$$

Значение τ_{zx}^{max} сильно зависит от радиуса скругления и остаточных напряжений от прокатки.

в) Швеллерное сечение



Если сила проходит через центр тяжести возникает закручивающий момент

1) P - через ц.т.

$M_0 = T \cdot h + Q_y \cdot x_0$

Существует т. C приложив к которой силу, Швеллерное сечение не будет испытывать кручение. Эта точка называется "центр кручения"

$Th + Q_y x_0 = P(l + x_0)$

$\boxed{l = \frac{hT}{P}}$ $\quad Q_y = P$ (т.к. $\Sigma F_y = 0$)

h - плечо пары сил T.