

Подставляя z_{20} в выражение (5), получим

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{4}{5}a\right)_2 = \varphi_c &= \frac{1}{GI_p} \left[qa^3 - 4qa^2 \cdot \frac{4}{5}a + \frac{5}{2}qa\left(\frac{4}{5}a\right)^2 \right] = -\frac{3}{5} \frac{qa^3}{GI_p} = \\ &= -\frac{3 \cdot 0,022 \cdot 0,5^3}{5 \cdot 0,277} = -0,006 \text{ рад.} \end{aligned}$$

Строим эпюру углов закручивания (рис. 5.14,в).

От оси эпюры, параллельной оси стержня, откладываем в выбранном масштабе ($1 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$) числовые значения углов поворота в характерных сечениях. Положительные ординаты откладываем вверх, а отрицательные – вниз. Соединяем полученные точки линиями, вид которых определяется выражениями (4) и (5). На первом силовом участке эпюра φ линейна, а на втором – парабола. Так как крутящий момент M_{z_2} на участке возрастает по алгебраической величине от $(-4qa^2)$ до $(+qa^2)$, парабола на эпюре углов поворота выпукла в направлении отрицательных угловых перемещений, то есть вниз.

Проверим, выполняется ли условие жесткости $|\varphi|_{\max} \leq [\varphi] = 0,01 \text{ рад}$.

По эпюре углов закручивания находим величину максимального угла поворота. Это угол φ_B , где $|\varphi_{\max}| = 0,0099 \text{ рад}$.

Видим, что $|\varphi_{\max}| < [\varphi]$, то есть условие жесткости выполняется.

5.3.5. Понятие о расчетах при кручении стержней некруглого поперечного сечения

При кручении стержней некруглого сечения плоские до деформации сечения искривляются. Следовательно, гипотеза плоских сечений и полученные с её помощью формулы в п. 5.3.1 неприменимы. Задача в данном случае решается либо методами теории упругости, либо экспериментально.

Кручение стержня прямоугольного сечения

Приведем без вывода некоторые результаты решения задачи. По аналогии с кручением стержня круглого сечения введем понятия момента сопротивления (W_k) и момента инерции (I_k) при кручении бруса прямоугольного сечения (рис. 5.15):

$$W_k = \alpha hb^2, I_k = \beta hb^3, \quad (5.29)$$

где α, β - числовые коэффициенты, зависящие от отношения h/b ($h \geq b$) - см. табл. 5.1.

Таблица 5.1. Числовые коэффициенты при кручении стержня прямоугольного сечения

h/b	1	2	4	8	10	∞
α	0,208	0,246	0,282	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,229	0,281	0,307	0,313	0,333
γ	1,000	0,795	0,745	0,742	0,742	0,742

Далее по аналогии с формулами (5.18) и (5.26) запишем формулы для определения максимального касательного напряжения τ_{\max} и угла поворота:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_k}; \quad (5.30)$$

$$\varphi = \frac{M_z l}{GI_k}. \quad (5.31)$$

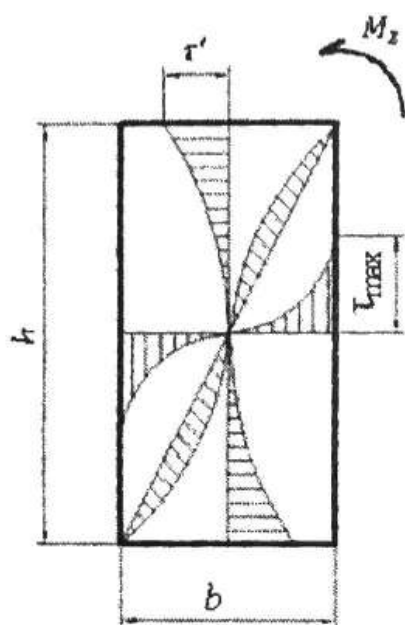


Рис. 5.15

Напряжение τ_{\max} действует посредине длинных сторон контура. Касательные напряжения, изменяясь по сечению, образуют замкнутые потоки, достигают наибольших значений в серединах сторон и равны нулю в углах прямоугольника и в центре сечения.

На рис. 5.15 изображены эпюры касательных напряжений вдоль осей симметрии и диагонали прямоугольного сечения. В середине короткой стороны $\tau' = \gamma \tau_{\max}$.

Из таблицы видно, что для узких прямоугольников ($h/b \geq 10$) можно принять $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$, и формулы (5.29) запишутся так:

$$W_k = \frac{1}{3} hb^2, I_k = \frac{1}{3} hb^3. \quad (5.32)$$

Из эпюры τ видно, что при кручении в прямоугольном сечении имеются две равноопасные точки, напряженное состояние в которых – чистый сдвиг. Условие прочности для обеих точек записывается в таком виде:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_k} \leq [\tau] \quad (5.33)$$

Свободное кручение тонкостенных стержней

Тонкостенным называется стержень, сечение которого состоит из узких криволинейных или прямолинейных элементов ($h/b \geq 10$), и кроме того, $l/h \geq 10$.

Существуют тонкостенные стержни открытого (рис. 5.16, а) и замкнутого (рис. 5.16, б) профиля.

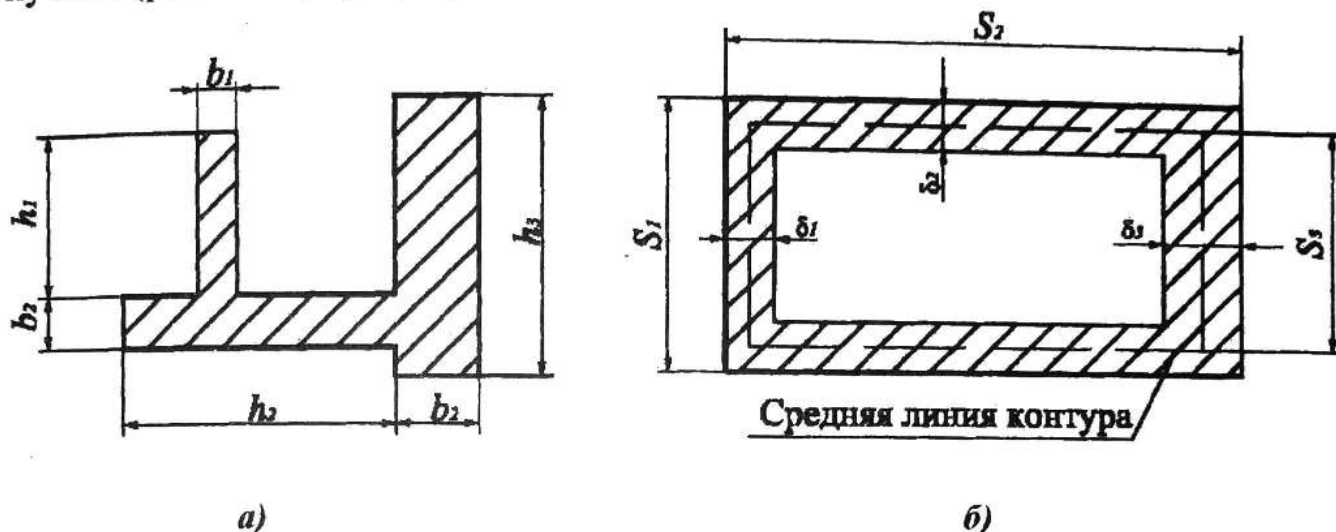


Рис. 5.16

При выводе расчетных формул вводятся допущения:

- о свободном кручении стержней, т.е. искривление сечений ничем не ограничено (не стеснено);
- о неизменности (жесткости) контура сечения при кручении стержня.

Тонкостенные стержни открытого профиля

Для каждого узкого прямоугольника, образующего сечение стержня, геометрические характеристики W_{ki} и I_{ki} определяются по формулам (5.32). Ясно при этом, что

$$W_{ki} = \frac{I_{ki}}{b_i}. \quad (5.34)$$

Для сечения тонкостенного стержня открытого профиля момент инерции при кручении вычисляется по формуле

$$I_k^{o.n} = \sum_1^n I_{ki} = \sum_1^n \frac{h_i b_i^3}{3}. \quad (5.35)$$

Согласно гипотезе о жесткости контура следует, что угол поворота

i -го узкого прямоугольника (элемента) равен углу поворота сечения в целом, то есть

$$\varphi_i = \varphi. \quad (5.36)$$

Определяя эти углы по формуле (5.31), получаем

$$\frac{M_{zi}l}{GI_{ki}} = \frac{M_z l}{GI_{\kappa}^{o.n}} \quad \text{или} \quad M_{zi} = M_z \frac{GI_{ki}}{GI_{\kappa}^{o.n}},$$

то есть крутящий момент в сечении распределяется по отдельным элементам, составляющим сечение, пропорционально их жесткостям. Ясно, что

$$\frac{M_{zi}}{I_{ki}} = \frac{M_z}{I_{\kappa}^{o.n}}. \quad (5.37)$$

Максимальное касательное напряжение в i -м прямоугольнике определяется по формуле (5.30); тогда с учетом выражений (5.34) и (5.37) находим

$$\tau_{i\max} = \frac{M_{zi}}{W_{ki}} = \frac{M_{zi}}{I_{ki}} b_i = \frac{M_z}{I_{\kappa}^{o.n}} b_i. \quad (5.38)$$

Это напряжение действует посредине стороны h_i в каждом прямоугольнике; у концов прямоугольника $\tau_i = 0$, и, линейно изменяясь по ширине b_i (в силу узости прямоугольника), касательные напряжения образуют замкнутый поток в прямоугольнике (рис. 5.17). Понятно, что

$$M_z = M_{z_1} + M_{z_2} + M_{z_3}.$$

Из формулы (5.38) следует, что максимальное касательное напряжение в стержне возникает в том узком прямоугольнике, где $b_i = b_{\max}$:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_{\kappa}^{o.n}} b_{\max}. \quad (5.39)$$

Напряженное состояние в опасной точке – чистый сдвиг, и условие прочности при кручении тонкостенного стержня открытого профиля записывается в виде

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_{\kappa}^{o.n}} b_{\max} \leq [\tau] \quad (5.40)$$

Эксперимент показывает, что для прокатных профилей действительная жесткость при кручении оказывается выше расчетной. Это объясняет-

ся тем, что в формуле (5.35) не учитывается взаимодействие и скрепление прямоугольных элементов, образующих сечения. Поэтому формулу (5.35) для прокатных профилей переписывают в таком виде:

$$I_k^{o.n} = \eta \sum_1^n \frac{h_i b_i^3}{3}, \quad (5.41)$$

где $\eta = 1,2$ – двутавр; $\eta = 1,15$ – тавр; $\eta = 1,12$ – швеллер; $\eta = 1$ – уголок.

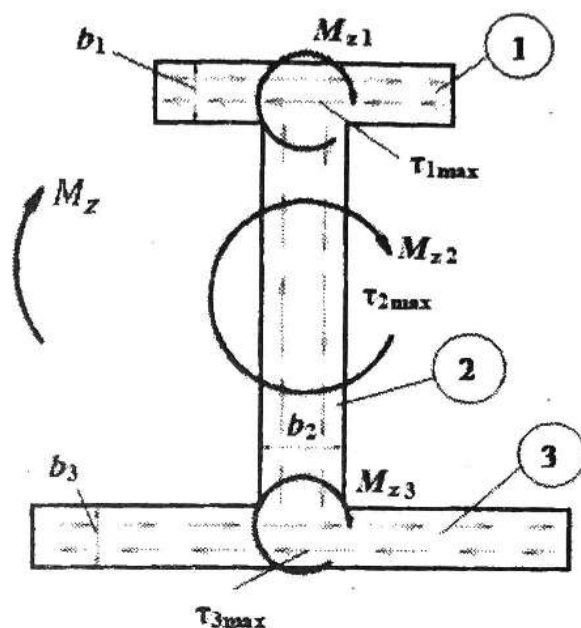


Рис. 5.17

Тонкостенные стержни замкнутого профиля

Принимая во внимание малую толщину контура, при расчете стержней такого типа используют допущение о равномерном распределении касательных напряжений по ширине δ узких прямоугольников или криволинейных элементов, образующих сечение стержня.

Определим расчетные геометрические характеристики при кручении тонкостенных стержней замкнутого профиля на примере тонкостенного кольца, толщина которого δ и радиус средней линии $R_{cp} \geq 10\delta$ (рис. 5.18). Так как толщина кольца мала, радиус ρ до произвольной точки контура можно принять равным R_{cp} ($R_{cp} \approx \rho$).

Для круглого сечения имеем

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A R_{cp}^2 dA = R_{cp}^2 (A) = R_{cp}^2 (2\pi R_{cp} \delta) = 2\pi R_{cp}^3 \delta. \quad (a)$$

Полярный момент сопротивления равен

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}} = \frac{2\pi R_{cp}^3 \delta}{R_{cp}} = 2A_{cp} \delta, \quad (б)$$

где $A_{\text{ср}}$ – площадь сечения, ограниченная средней линией контура кольца.

Выражение (б) считают справедливым для тонкостенного стержня замкнутого профиля при любой форме сечения:

$$W_{\text{к}}^{3.n} = 2A_{\text{ср}}\delta. \quad (5.42)$$

Если размер δ изменяется по периметру контура сечения, то формулу переписывают в виде

$$W_{\text{к}i} = 2A_{\text{ср}}\delta_i. \quad (5.42a)$$

Формулу (а) преобразовывают так:

$$I_p = 2\pi R_{\text{ср}}^3 \delta \frac{2\pi R_{\text{ср}}}{2\pi R_{\text{ср}}} = \frac{4\pi^2 R_{\text{ср}}^4}{2\pi R_{\text{ср}}/\delta} = \frac{4A_{\text{ср}}^2}{S/\delta}, \quad (в)$$

где S – длина средней линии контура.

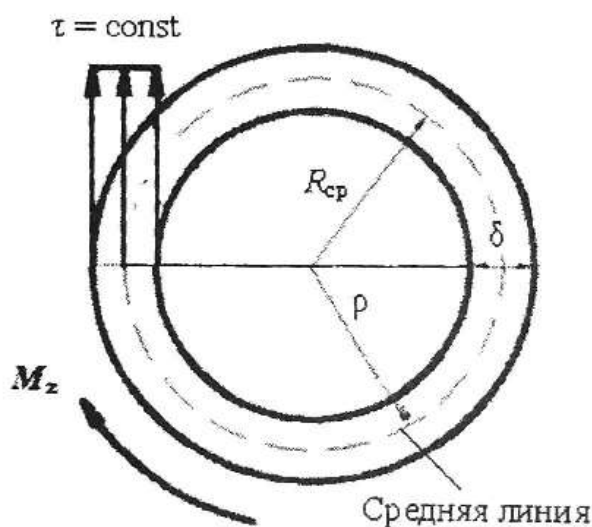


Рис. 5.18

Выражение (в) применяют, рассчитывая тонкостенные стержни замкнутого профиля при любой форме сечения. Однако, если сечение состоит из n узких прямоугольников или криволинейных элементов разной длины S_i и толщины δ_i , формулу $I_{\text{к}}^{3.n}$ записывают в виде

$$I_{\text{к}}^{3.n} = \frac{4A_{\text{ср}}^2}{\sum_1^n S_i/\delta_i}. \quad (5.43)$$

Касательное напряжение в i -м узком элементе сечения определяют по формуле

$$\tau_i = \frac{M_z}{W_{ki}} = \frac{M_z}{2A_{cp}\delta_i} \quad (5.44)$$

Из формулы (5.44) ясно, что максимальное касательное напряжение в стержне возникает в самой узкой части сечения ($\delta_i = \delta_{\min}$), где и будет находиться опасная точка стержня:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2A_{cp}\delta_{\min}} \quad (5.45)$$

Так как напряженное состояние в опасной точке – чистый сдвиг, условие прочности для нее записывается так:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2A_{cp}\delta_{\min}} \leq [\tau] \quad (5.46)$$

На рис. 5.19 показана эпюра касательных напряжений в сечении тонкостенного стержня замкнутого профиля переменной толщины δ_i .

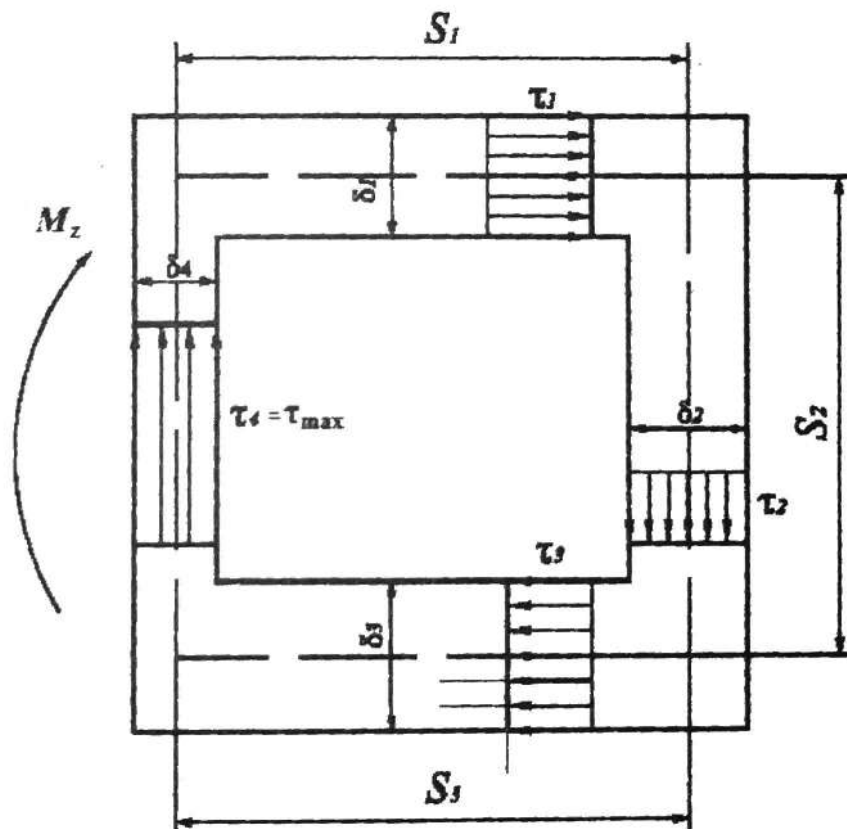


Рис. 5.19

Из эпюры видно, что τ_{\max} действует в 4-м прямоугольнике сечения, где $\delta_4 = \delta_{\min}$.

В заключение отметим, что угол поворота сечения определяется по формуле (5.31), в которую момент инерции $I_x^{3.п}$ подставляется из формулы (5.43).

Пример 5.4. Для тонкостенных стержней замкнутого профиля (рис. 5.20, а) и открытого профиля (рис. 5.20, б), имеющих одинаковый периметр и толщину стенки, определить максимальные касательные напряжения и углы закручивания и вычислить отношение расчетных величин. Принять $S = h$, $b = \delta$.

Решение

1. Вычислим моменты инерции и моменты сопротивления для заданных тонкостенных стержней:

$$I_k^{з.п} = \frac{4A_{cp}^2}{\sum_1^4 S_i/\delta_i} = \frac{4[(10\delta)^2]^2}{4 \cdot 10} = 1000\delta^4; \quad W_k^{з.п} = 2A_{cp}\delta = 200\delta^3;$$

$$I_k^{о.п} = \frac{1}{3} \sum_1^4 h_i b_i^3 = \frac{4}{3} \cdot 10b \cdot b^3 = \frac{40}{3} b^4; \quad W_k^{о.п} = \frac{1}{3} \sum_1^4 h_i b_i^2 = \frac{40}{3} b^3.$$

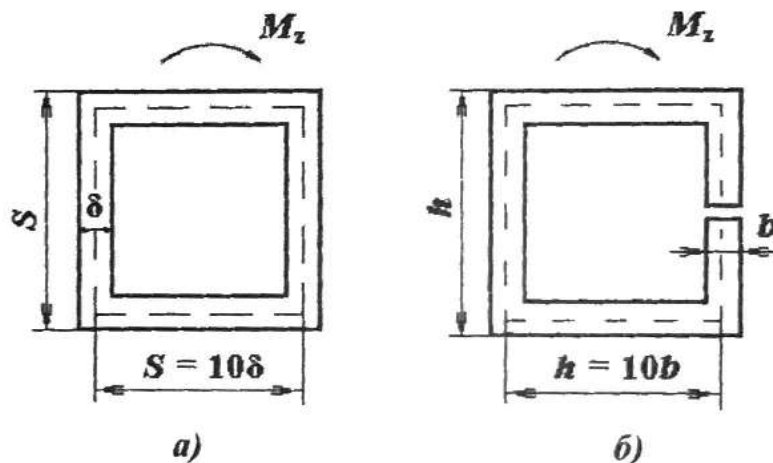


Рис. 5.20

2. Определим величину максимальных касательных напряжений в обоих стержнях:

$$\tau_{max}^{з.п} = \frac{M_z}{2A_{cp}\delta} = \frac{M_z}{200\delta^3};$$

$$\tau_{max}^{о.п} = \frac{M_z}{I_k^{о.п}} b = \frac{M_z}{\frac{40}{3} b^4} b = \frac{3}{40} \frac{M_z}{b^3}.$$

3. Найдем углы закручивания тонкостенных стержней:

$$\varphi^{з.п} = \frac{M_z l}{GI_n^{з.п}} = \frac{M_z l}{G \cdot 1000\delta^4} = \frac{M_z l}{G\delta^4} \cdot 10^{-3};$$

$$\varphi^{о.п} = \frac{M_z l}{GI_n^{о.п}} = \frac{M_z l}{G \cdot \frac{40}{3} b^4} = \frac{3}{40} \frac{M_z l}{Gb^4}.$$

4. Вычислим отношение расчетных величин для обоих тонкостенных стержней, учитывая, что $\delta = b$:

$$\frac{\tau_{\max}^{o.n}}{\tau_{\max}^{z.n}} = \frac{3 M_z}{40 b^3} = 15; \quad \frac{\varphi_{\max}^{o.n}}{\varphi_{\max}^{z.n}} = \frac{3 M_z l}{40 G b^4} = 75.$$

$$\frac{\tau_{\max}^{z.n}}{\tau_{\max}^{o.n}} = \frac{M_z}{200 \delta^3}; \quad \frac{\varphi_{\max}^{z.n}}{\varphi_{\max}^{o.n}} = \frac{M_z l}{G \delta^4} \cdot 10^{-3}$$

Вывод: при одинаковых размерах тонкостенный стержень открытого профиля обладает значительно меньшей прочностью и жесткостью, чем тонкостенный стержень замкнутого профиля.

5.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ ПЛОСКОГО ИЗГИБА

5.4.1. Формула для нормальных напряжений по известному M_x . Условие прочности при изгибе

На рис. 5.21, а показана балка, нагруженная по концам сосредоточенными моментами m . Во всех сечениях поперечная сила $Q_y = 0$, а изгибающий момент $M_x = -m$, и балка испытывает чистый изгиб. Требуется определить напряжения в поперечном сечении 1-1.

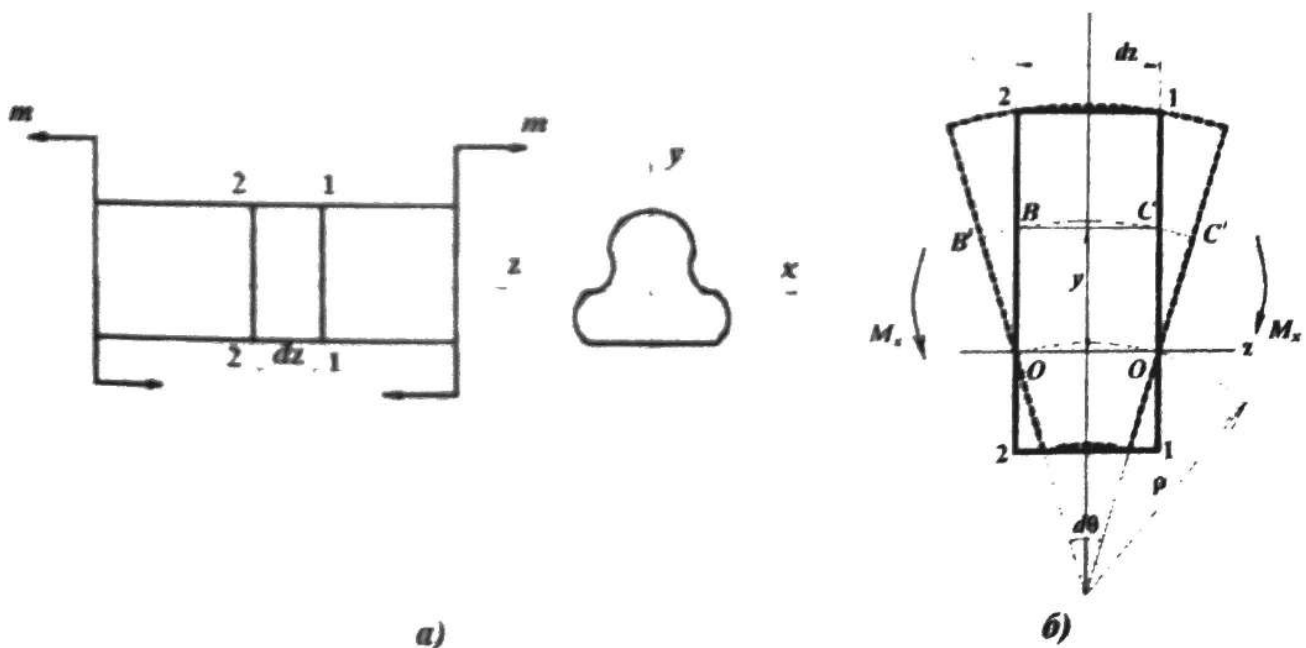


Рис. 5.21

Рассмотрим три стороны задачи.

1. Геометрическая сторона

Вырежем из балки сечением 1-1 и 2-2 элемент dz (рис. 5.21, а) и покажем его на рис. 5.21, б. В обоих сечениях действуют изгибающие мо-