§ 2.6. Определение касательных напряжений при плоском поперечном изгибе

Наличие поперечной силы всегда приводит к появлению касательных напряжений в поперечных и (по закону парности) продольных сечениях бруса. В курсе сопротивления материалов определение таких напряжений проводится на основе приближенной теории Д.И. Журавского: касательное напряжение, подобно нормальному, считается равномерно распределенным по ширине сечения. В рамках теории упругости показывается, что это не так, но для сечений, у которых ширина значительно меньше высоты позволяет получить достаточно точные для практических целей и при этом сравнительно простые расчетные формулы.

Определим касательное напряжение в консольной балке, произвольного сечения, симметричного относительно плоскости изгиба, и загруженной сосредоточенной силой на свободном конце (рис. 2.6.1, *а*).

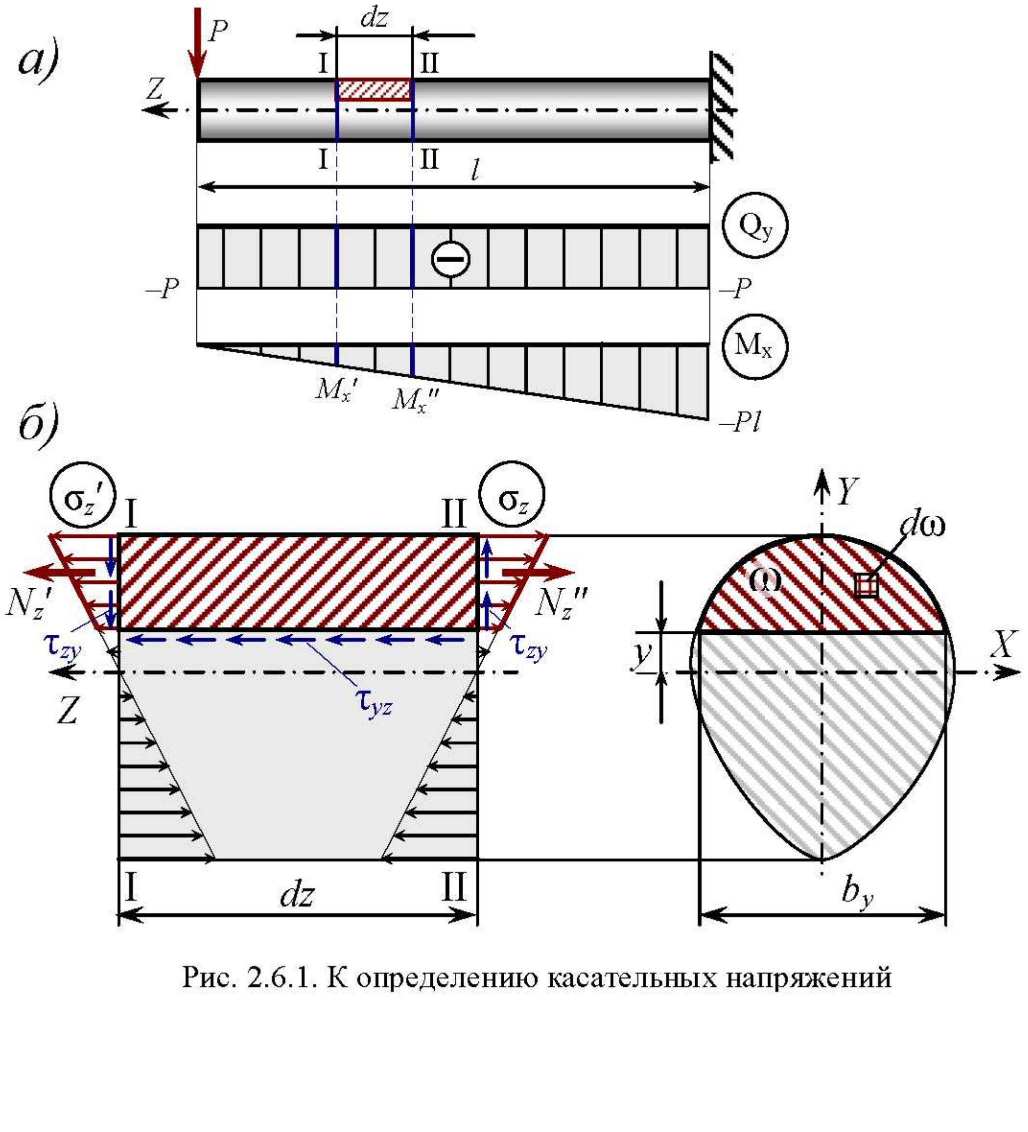

Рис. 2.6.1. К определению касательных напряжений

Рассмотрим равновесие элемента бруса dz, вырезанного двумя поперечными и одним продольным сечением, находящимся на произвольном расстоянии y от нейтрального слоя (рис. 2.6.1, *б*). Соответствующую ширину сечения обозначим by, а площадь поперечного сечения выделенного элемента — через ω. На элемент действуют нормальные напряжения в сечениях I–I и II–II и касательные напряжения, распределенные по продольному сечению.

Величина изгибающего момента в сечении I–I. равна M_x', соответственно, функция распределения напряжений по высоте сечения будет

$$\sigma'_z = \frac{M'_x}{I_x} y .$$

Равнодействующая этих напряжений:

$$N'_z = \int_\omega \sigma'_z d\omega = \int_\omega \frac{M'_x}{I_x} y\, d\omega$$

Величина изгибающего момента в сечении II–II. равна $M_x'' = M_x' + dM_x$, тогда функция напряжений по высоте сечения

$$\sigma''_z = \frac{M''_x}{I_x} y = \frac{M'_x + dM_x}{I_x} y .$$

Равнодействующая напряжений в сечении II–II:

$$N''_z = \int_\omega \sigma''_z d\omega = \int_\omega \frac{M'_x + dM_x}{I_x} y\, d\omega .$$

Тогда условие равновесия элемента под действием сил, направленных вдоль оси $0Z$, запишется:

$$Nz'' = Nz' + \tau_{yz}(by \cdot dz)$$

или, с учетом выражений для равнодействующих,

$$\int_\omega \frac{M'_x + dM_x}{I_x} y\, d\omega = \int_\omega \frac{M'_x}{I_x} y\, d\omega + \tau_{yz} b_y dz .$$

Таким образом

$$\int_\omega \frac{dM_x}{I_x} y\, d\omega = \tau_{yz} b_y dz .$$

Вынесем из-под знака интеграла величины, не зависящие от ω:

$$\frac{dM_x}{I_x} \int_\omega y\, d\omega = \tau_{yz} b_y dz .$$

Интеграл представляет собой статический момент площади ω относительно оси $0X$:

$$S_x^\omega = \int_\omega y\, d\omega .$$

Таким образом,

$$\frac{dM_x}{I_x} S_x^{\omega} = \tau_{yz} b_y dz$$

Выразим из получившегося уравнения τyz:

$$\tau_{yz} = \frac{dM_x S_x^{\omega}}{I_x b_y dz}.$$

Так как $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$, окончательно получаем *формулу Д.И. Журавского* для определения касательных напряжений при плоском поперечном изгибе:

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y S_x^{\omega}}{I_x b_y},$$

где Q_y — значение поперечной силы в сечении;

S_x^{ω} — статический момент отсеченной площади сечения ω относительно оси $0X$;

I_x — центральный момент инерции всего сечения;

b_y — ширина сечения, соответствующая координате y.