# § 2.5. Определение нормальных напряжений при прямом чистом изгибе

Прямой изгиб — когда изгибающий момент лежит в одной из главных центральных плоскостей сечения. Иначе изгиб называется косым. Такой изгиб будет рассмотрен в главе «Сложное сопротивление».

Чистый изгиб — когда изгиб происходит при отсутствии поперечной силы — из ВСФ присутствует только изгибающий момент.

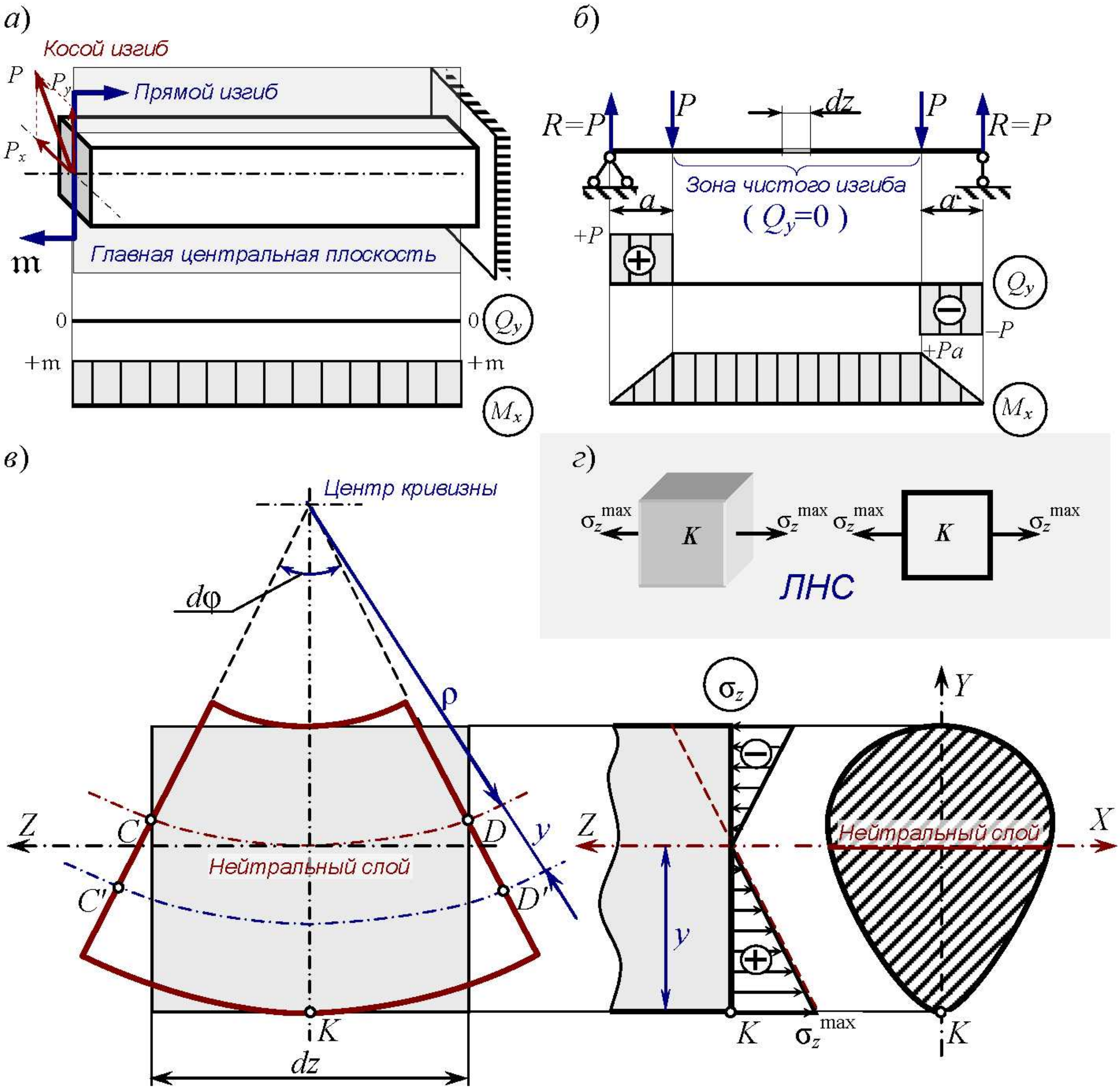


Рис. 2.5.1. Чистый изгиб

## 1. Геометрическая сторона

Сечения, ограничивающие элемент бруса $dz$, оставаясь плоскими и перпендикулярными изогнутой оси, повернулись относительно друг друга на некоторый малый угол $d\varphi$. При этом верхние волокна оказались сжаты, а нижние — растянуты. Очевидно, будут иметь место волокна, длина которых не изменилась (рис. 2.5.1, *в*). Совокупность этих волокон образуют так называемый нейтральный слой. Кривизна балки при изгибе будет характеризоваться величиной $\rho$ — радиусом изгиба.

Найдем относительную линейную деформацию волокон, находящихся на расстоянии $y$ от нейтрального слоя. Она является отношением удлинения к начальной длине:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\mathrm{C'D'} - \mathrm{CD}}{\mathrm{CD}},$$

где $\mathrm{CD} = dz = \rho\, d\varphi$; $\mathrm{C'D'} = (\rho + y)\, d\varphi$.

Тогда

$$\varepsilon_z = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

Последнее отношение представляет собой математическое выражение гипотезы плоских сечений: линейная деформация волокна прямо пропорциональна его отстоянию от нейтральной оси и его кривизне (кривизна обратно пропорциональна радиусу кривизны упругой линии бруса).

Деформация сдвига отсутствует: $\gamma = 0$.

## 2. Физическая сторона

Подставляем найденные деформации в выражения закона Гука для простейших деформаций:

$$\sigma_z = E\,\varepsilon_z = E\frac{y}{\rho}; \qquad (1^*)$$

$$\tau = G\,\gamma = 0.$$

## 3. Статическая сторона

Все внутренние силовые факторы, кроме $M_x$, при чистом изгибе в плоскости $Y0Z$, будут отсутствовать: $N_z = Q_y = Q_x = M_z = M_y = 0$.

Составим условия статического равновесия для $N_z$, $M_y$, $M_x$, используя выражения (5–6).

Нормальная сила (5):

$$N_z = \int_A \sigma_z dA = \int_A E\frac{y}{\rho} dA = E\frac{1}{\rho}\int_A y dA = 0.$$

Интеграл здесь представляет собой выражение $S_x$ — статического момента площади сечения А относительно оси $0X$ и последний будет, очевидно, равен нулю в силу того, что модуль Юнга Е и кривизна изогнутого стержня определенно не равны нулю. Равенство нулю статического момента говорит о том, что нейтральный слой проходит через ось 0X, которая будет являться центральной осью сечения.

На основе (6) запишем выражение для изгибающего момента $M_y$:

$$M_y = \int_A \sigma_z x dA = \int_A E \frac{y}{\rho} x dA = E \frac{1}{\rho} \int_A xy dA = 0$$

Интеграл здесь представляет собой выражение $I_{xy}$ — центробежного момента инерции площади сечения $A$, и последний будет, очевидно, равен нулю в силу того, что модуль Юнга $E$ и кривизна изогнутого стержня определенно не равны нулю. Равенство нулю центробежного момента говорит о том, что оси $0X$ и $0Y$ являются главными осями инерции сечения. Данное равенство и должно удовлетворяться тождественно, так как мы рассматриваем прямой изгиб — изгиб в ГЦП сечения.

Итак, изгиб происходит вокруг главной центральной оси сечения $0X$.

Составим на основе (6) выражение для изгибающего момента $M_x$:

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = \int_A E \frac{y}{\rho} y dA = E \frac{1}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_x, \qquad (2^*)$$

с учетом того, что интеграл здесь представляет собой выражение $I_x$ — момента инерции площади сечения $A$ относительно оси $0X$:

$$I_x = \int_A y^2 dA.$$

Выражение (2*) можно записать в следующей форме:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}. \qquad (3^*)$$

Это *синтезирующее уравнение* задачи о чистом изгибе балки: кривизна балки при изгибе прямо пропорциональна нагрузке и обратно пропорциональна изгибной жесткости балки $EI_x$.

Из выражений (1*) и (2*) следует формула для определения напряжений при прямом чистом изгибе:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y,$$

из которой следует, что нормальные напряжения при чистом изгибе являются линейной функцией координаты $y$. Найдем значения напряжений:

— при $y = 0$, $\sigma_z = 0$ (на нейтральной оси сечения);

— при $y = y^{\max}$, $\sigma_z^{\max} = \dfrac{M_x}{I_x} y^{\max} = \dfrac{M_x}{W_x}$ (в волокне, наиболее удаленном от нейтрального слоя).

Введенная здесь величина

$$W_x = \frac{I_x}{y^{\max}} \qquad (4^*)$$

носит название *осевого момента сопротивления* сечения при изгибе.

Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 2.5.1, *в*. Из эпюры следует, что опасной будет точка сечения K, наиболее удаленная от нейтральной оси $0X$ (рис. 2.5.1, *г*). Так как при чистом изгибе возникают только нормальные напряжения, то в опасной точке опасного сечения, как и при деформации растяжения-сжатия, будет иметь место одноосное (линейное) напряженное состояние (ЛНС).

## Об осевом моменте сопротивления

Осевой момент сопротивления сечения (ОМС), как следует из формулы (4*), представляет собой отношение осевого момента инерции к расстоянию от нейтральной оси до наиболее удаленной точки сечения. ОМС не является интегральной величиной, поэтому момент сопротивления сложного составного сечения не будет равен сумме моментов сопротивления каждой части в отдельности. Найдем, используя формулу (4*), в качестве примера, осевые моменты сопротивления некоторых простейших форм сечения.

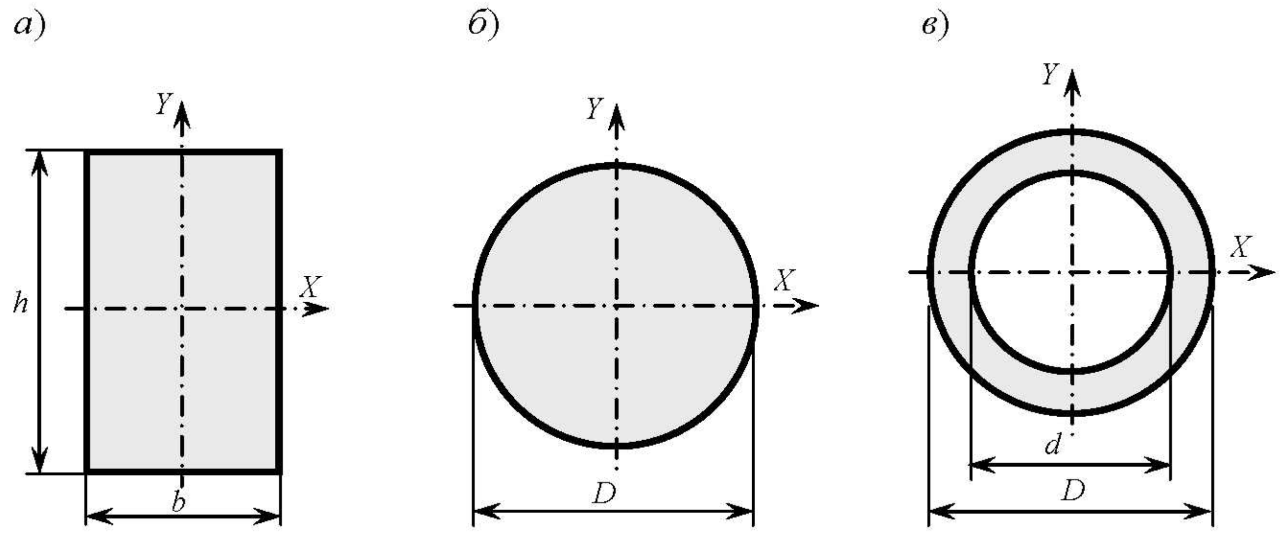


Рис. 2.5.2. К определению осевого момента сопротивления сечения

Прямоугольное сечение (рис. 2.5.2, *а*)

$$W_x = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}.$$

Круглое сечение (рис. 2.5.2, *б*)

$$W_x = \frac{\frac{\pi D^3}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^2}{32}.$$

Кольцеобразное сечение (рис. 2.5.2, *в*)

$$W_x = \frac{\frac{\pi D^3}{64}(1-\alpha^4)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^2}{32}(1-\alpha^4).$$

## Дифференциальное уравнение деформированной оси балки

Записывая выражение кривизны, известное из математики, и пренебрегая, вследствие малости деформации, квадратом первой производной как величиной второго порядка малости:

$$\varkappa = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} \approx y'',$$

уравнение (3*) можно представить в виде

$$EI_x y'' = M_x, \qquad (5^*, a)$$

или, после двухкратного дифференцирования,

$$EI_x y^{\mathrm{IV}} = q. \qquad (5^*, б)$$

Выражения (5*, *а*, *б*) представляют собой две формы основного уравнения балочной теории — дифференциального уравнения изгиба балки.