

## § 2.4. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ БРУСА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

**Особенности кручения брусьев прямоугольного сечения.** Брусья с прямоугольным сечением, работающие на кручение, входят в состав машиностроительных, судостроительных и других конструкций самого различного назначения.

На рис. 2.6а изображен брус прямоугольного сечения в недеформированном состоянии. На его боковых поверхностях нанесена прямоугольная сетка из продольных и поперечных линий. На рис. 2.6б представлен тот же брус, но уже после деформации закручивания, вызванной парами сил, приложенными в торцах сечения. В этом случае деформация бруса сопровождается искривлением линий и искажением углов сетки. Наибольшее искривление наблюдается в точках посередине боковых граней бруса. У ребер же бруса поперечные линии совсем не искривляются и остаются перпендикулярными к ним. Указанное искривление линий свидетельствует о том, что при кручении прямоугольного бруса его поперечные сечения не остаются плоскими, а коробятся. В связи с этим при составлении геометрических уравнений, связывающих деформации сдвига  $\gamma$  с углом закручивания, уже *нельзя использовать гипотезу плоских сечений*.

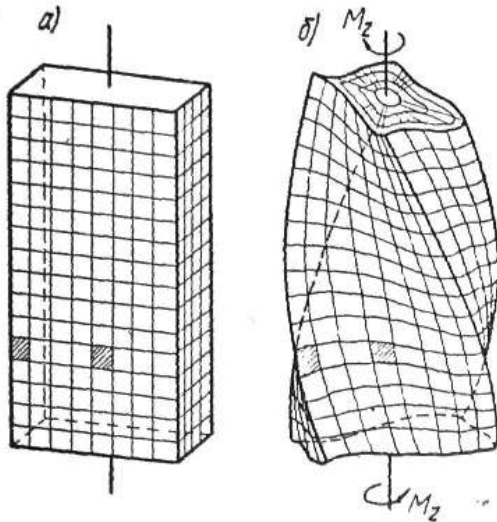


Рис. 2.6

Следовательно, методами сопротивления материалов решение такой задачи оказывается невозможным. Поэтому ограничимся лишь общими соображениями о характере распределения деформаций и напряжений по сечению и приведем расчетные формулы, полученные методами теории упругости.

**Характер распределения напряжений по сечению.** Описанный характер искривлений сетки позволяет считать, что деформация сдвига элементарных частиц (параллелепипедов) непрерывно изменяется вдоль контура сечения от нуля в угловых точках до наибольшего значения в середине сторон.

В соответствии с деформацией сдвига будут изменяться и касательные напряжения, обусловленные ею. Значит, в угловых точках поперечного сечения касательные напряжения равны нулю, что находится в полном согласии с законом парности (рис. 2.7). *Максимумы касательные напряжения достигают в точках посередине длинных сторон контура сечения.*

Чтобы доказать это, вспомним, что при кручении в поперечных сечениях бруса имеется лишь один силовой фактор — крутящий момент  $M_z$ . Этот момент создается элементарными касательными усилиями  $\tau_z dF$ . А так как поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$

равны нулю, то отсюда приходим к заключению о циркуляционном характере  $\tau_z$ : касательные напряжения в сечении бруса образуют замкнутый силовой поток.

На рис. 2.8 показано примерное расположение траекторий  $\tau_z$ , т. е. кривых, касательные к которым совпадают с направлением вектора полного касательного напряжения  $\tau_z$  в данной точке сечения.

Вследствие циркуляционного характера через отрезок  $OA$  оси  $X$  (рис. 2.8) „протекает“ такое же количество касательных уси-

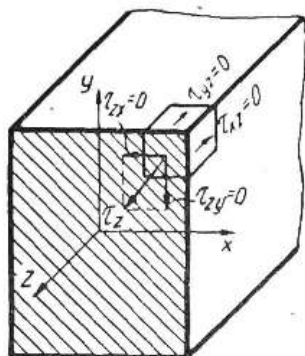


Рис. 2.7

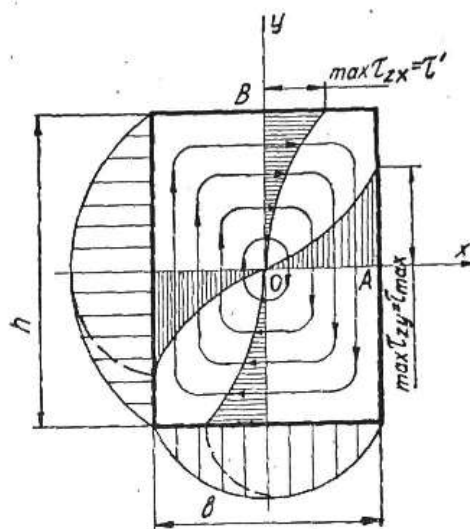


Рис. 2.8

лий, какое и через отрезок  $OB$  оси  $Y$ . Это означает, что площадь эпюры касательных напряжений  $\tau_{zy}$  в точках отрезка  $OA$  должна быть равновелика с площадью эпюры напряжений  $\tau_{zx}$  в точках отрезка  $OB$ . Но при  $h > b$  это возможно только при условии, что  $\tau_{(A)} > \tau_{(B)}$ .

На рис. 2.8 изображены графики распределения напряжений вдоль контура сечения и по осям симметрии, установленные методами теории упругости.

**Формулы для напряжений и угла закручивания.** Для вычисления наибольшего касательного напряжения и угла закручивания бруса прямоугольного сечения формулам придается вид, аналогичный с формулами бруса круглого сечения:

$$\tau_{\max} = \tau_{(A)} = \frac{M_z}{W_K}, \quad (2.21)$$

$$\tau' = \tau_{(B)} = \gamma \tau_{\max}, \quad (2.22)$$

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{M_z dz}{GI_K}. \quad (2.23)$$

Вошедшие в эти выражения геометрические характеристики  $W_K, I_K$  определяются иначе, чем  $W_p$  и  $I_p$  для круглого сечения; выражения для них приводятся к виду:

$$W_K = \alpha^* h b^2, \quad (2.24)$$

$$I_K = \beta h b^3. \quad (2.25)$$

Геометрическую характеристику, обозначенную  $W_k$ , называют моментом сопротивления кручению, а произведение  $GI_k$  — жесткостью сечения бруса при кручении.

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  зависят от отношения  $\frac{h}{b}$  (при этом имеется в виду  $h > b$ ), их значения приведены в таблице 1.

Таблица 1

| $\frac{h}{b}$ | 1     | 1,5   | 2     | 3     | 4     | 6     | 8     | 10    | $\infty$ |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\alpha$      | 0,208 | 0,231 | 0,246 | 0,267 | 0,282 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333    |
| $\beta$       | 0,141 | 0,196 | 0,229 | 0,263 | 0,281 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333    |
| $\gamma$      | 1,000 | 0,859 | 0,795 | 0,753 | 0,745 | 0,743 | 0,742 | 0,742 | 0,742    |

Уже при отношении  $\frac{h}{b} \geq 5$  коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  имеют одинаковое значение и так же, как и коэффициент  $\gamma$ , практически мало изменяются при увеличении  $\frac{h}{b}$ . Для прямоугольников с  $\frac{h}{b} \geq 10$  вполне можно принять

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3}$$

и геометрические характеристики  $I_k$  и  $W_k$  вычислять по формулам:

$$I_k = \frac{hb^3}{3}, \quad (2.26)$$

$$W_k = \frac{hb^2}{3} = \frac{I_k}{b}. \quad (2.27)$$

**О нормальных напряжениях.** При кручении прямоугольного бруса его сечения коробятся — депланируются. При беспрепятственной депланации *всех сечений* (например, когда свободно опертый брус нагружен парами сил в торцевых сечениях) продольные волокна бруса не испытывают линейных деформаций. Такое кручение называется чистым. Если же свободному короблению препятствует, например, жесткая заделка сечения (или другие причины), то в этом сечении и вблизи него волокна бруса получают различные по величине продольные удлинения. В связи с чем в указанных сечениях возникают нормальные напряжения  $\sigma_z$ . Такое кручение брусьев называется стесненным. Однако и в этом случае нормальные напряжения пренебрежимо малы, если только размеры  $h$  и  $b$  одинакового порядка.

## § 2.5. НАПРЯЖЕНИЯ И УГОЛ ЗАКРУЧИВАНИЯ ПРИ ЧИСТОМ КРУЧЕНИИ БРУСЬЕВ ТОНКОСТЕННОГО ПРОФИЛЯ

**Общие соображения.** В машиностроении и, особенно, в судостроении и самолетостроении с целью уменьшения веса конструкций широко применяются тонкостенные брусья (стержни), полученные путем прокатки, гибки или прессования. Поперечные сечения таких брусьев составлены из нескольких узких прямоугольников, соединенных в одно тело, или ограниченных близкими криволинейными контурами. Тонкостенные брусья бывают открытого (рис. 2.9 а, б) и замкнутого (рис. 2.9 в) профилей.

В условиях эксплуатации конструкций брусья испытывают различные деформации, в том числе и деформацию кручения. Распределение напряжений и формулы для их вычисления в открытых и замкнутых сечениях оказываются неодинаковыми. В связи с этим придется рассматривать и те и другие профили раздельно.

**Брусья открытого профиля.** При расчете брусьев открытого профиля делается допущение

*о том, что каждый прямоугольный элемент сечения работает самостоятельно, а угол поворота  $\varphi$  каждого элемента будет таким же, что и для всего сечения.* Поэтому сопротивление кручению всего сечения будет равно сумме сопротивлений всех прямоугольников\* и геометрические характеристики сечения найдутся по формулам 2.26, 2.27 (при  $\frac{h}{b} > 10$ ):

$$I_k = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n h_i b_i^3, \quad (2.28)$$

$$W_k = \frac{I_k}{b_{\max}}. \quad (2.29)$$

Здесь  $b_i$  — есть меньшая сторона  $i$ -го прямоугольника (рис. 2.10). При этом самое большое касательное напряжение возникает в том из прямоугольников (рис. 2.10б), толщина которого является наибольшей, и будет равно

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_k} b_{\max}. \quad (2.30)$$

\* Криволинейные элементы открытых профилей можно распрямить и рассчитывать как узкие прямоугольники.

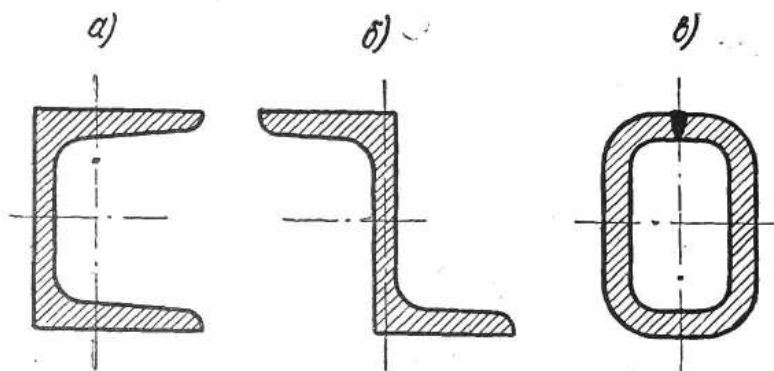


Рис. 2.9

Дело в том, что этот прямоугольник воспринимает на себя большую долю крутящего момента. Подтверждением этому служит то обстоятельство, что часть силового потока касательных напряжений, циркулирующих внутри контура, замыкается только в широком прямоугольнике (рис. 2.10б).

Угол закручивания стержня на длине  $z$  вычисляется по формуле (2.23). Следует лишь иметь в виду, что фактическая крутильная жесткость  $GI_k$  будет для двутаврового сечения на 20%,

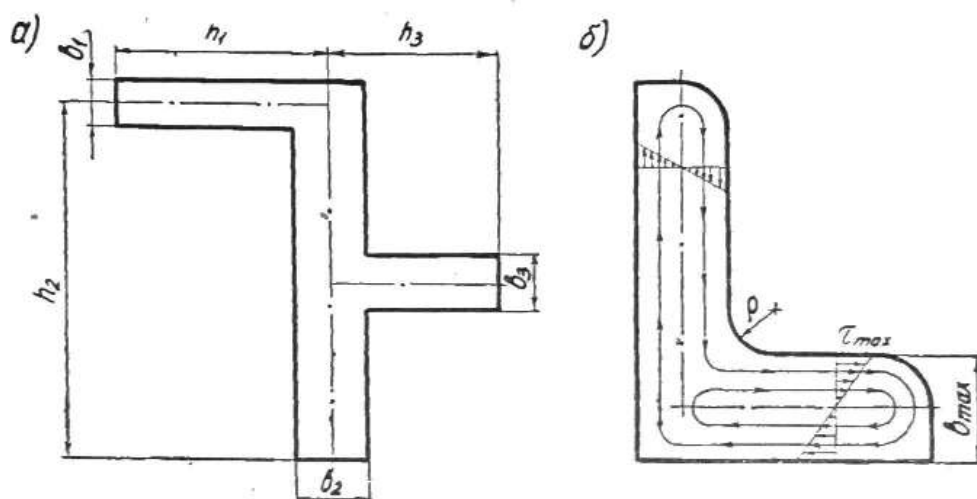


Рис. 2.10

для швеллерного сечения на 12% выше, чем найденная по формуле (2.28), ибо указанные сечения не являются простым набором прямоугольников, а представляют одно целое тело.

**Брусья с замкнутым сечением.** Примером бруса с замкнутым профилем может служить круговая цилиндрическая трубка. Ее сечение представляет тонкостенное кольцо. При ее кручении касательные напряжения образуют замкнутый силовой поток, циркулирующий внутри контура сечения (рис. 2.11а). При малой

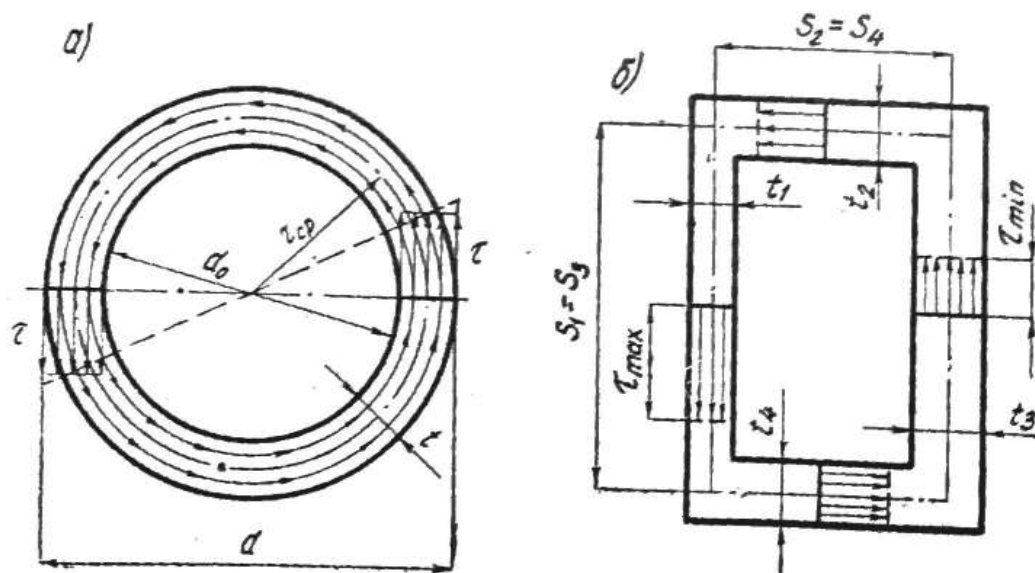


Рис. 2.11

толщине стенки *распределение напряжений* можно принять *равномерным*. Для определения напряжений и угла закручивания используем формулы (2.17) и (2.15), которые в данном случае являются точными.

Выразим полярный момент инерции в функции от толщины стенки  $t$  и радиуса средней окружности  $r_{\text{ср}}$ . При малой величине  $t$  в сравнении с  $r_{\text{ср}}$  полярный момент инерции кольца будет равен

$$I_p = \int_F \rho^2 dF = r_{\text{ср}}^2 \int_F dF = r_{\text{ср}}^2 2\pi r_{\text{ср}} t.$$

Тогда полярный момент сопротивления кольцевого сечения будет равен

$$W_p = \frac{I_p}{r_{\text{ср}}} = 2\pi r_{\text{ср}}^2 t = 2F_0 t. \quad (a)$$

После умножения и деления на  $2\pi r_{\text{ср}}$  представим выражение для  $I_p$  в следующем виде:

$$I_p = 2\pi r_{\text{ср}}^3 t \frac{2\pi r_{\text{ср}}}{2\pi r_{\text{ср}}} = \frac{4(\pi r_{\text{ср}}^2)^2}{\frac{2\pi r_{\text{ср}}}{t}} = \frac{4F_0^2}{\frac{S}{t}}. \quad (б)$$

Здесь через  $F_0$  обозначена площадь поперечного сечения, ограниченная средней окружностью (площадь среднего круга);  $S$ —длина средней окружности.

Подставив (a) и (б) в (2.17) и (2.15), получим:

$$\tau = \frac{M_z}{2F_0 t} = \frac{M_z}{W_k}, \quad (2.31)$$

$$\varphi_{(l)} = \frac{M_z l}{G} \left( \frac{S}{4F_0^2} \right) = \frac{M_z l^*}{GI_k}. \quad (2.32)$$

По этим же формулам производится и расчет брусьев замкнутого профиля любой конфигурации. Однако геометрические характеристики сечения  $I_k$  и  $W_k$  уже не будут представлять ни полярный момент инерции, ни полярный момент сопротивления. Если толщина отдельных участков сечения меняется ступенчато, как, например, для профиля, изображенного на рис. 2.11б, то  $I_k$  следует вычислить по формуле:

$$I_k = \frac{4F_0^2}{\sum_{i=1}^n \frac{S_i}{t_i}}. \quad (2.33)$$

\* Формула для угла закручивания написана для случая, когда на всей длине  $l$  стержня крутящий момент постоянный и размеры сечения не изменяются.

Суммирование распространяется на все участки постоянной толщины  $t_i$ . В случае непрерывного изменения толщины стенки по длине контура суммирование надо заменить интегрированием. Вследствие постоянства циркулирующего силового потока касательные напряжения достигают наибольшей величины в самых узких местах сечения ( $t=t_{\min}$ ) и будут равны:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2F_0 t_{\min}} \quad (2.34)$$

## § 2.6. НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ ПРЯМОГО БРУСА ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

**Общие соображения.** Изгибная деформация брусков — одна из самых распространенных. Изгиб испытывают многие элементы машин, конструкций и сооружений, поскольку он может возникнуть при самом произвольном расположении внешних нагрузок. Если при изгибе в поперечных сечениях бруса, кроме изгибающих моментов, будут действовать еще и поперечные силы, то такой изгиб называется поперечным.

Если же в сечениях бруса возникают только изгибающие моменты, то брус будет испытывать деформацию чистого изгиба. Такая деформация бруса произойдет, например, при нагружении его по торцам парами сил, плоскости действия которых расположены в главной центральной плоскости бруса (о главных осях и плоскостях см. приложение, стр. 229). На отдельных участках бруса чистый изгиб может иметь место и при сосредоточенных нагрузках (рис. 2.12).

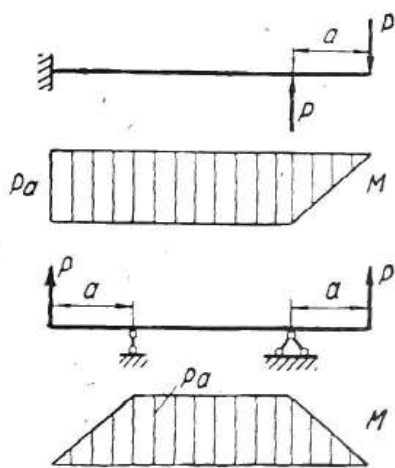


Рис. 2.12

Выведем формулы для напряжений при чистом изгибе бруса в плоскости  $ZOY$ .

**Геометрическое уравнение.** Под действием моментов  $M_x$  произойдет искривление бруса. Вследствие этого сетка из продольных и поперечных линий (рис. 2.13а), нанесенная на боковой поверхности, сохраняя прямые углы, приобретает клинообразную форму (рис. 2.13б). В соответствии с допущением о плоских сечениях (плоскости поперечных сечений остаются плоскими и перпендикулярными к изогнутой оси бруса) будем считать, что и те элементарные частицы, которые расположены внутри бруса, также деформируются без искажения прямых углов. Следовательно, сдвиг  $\gamma$  в плоскости чистого изгиба равен нулю.

При искривлении бруса длина продольных линий сетки изменяется: линии, расположенные ближе к центру кривизны, укорачиваются, а линии на противоположной стороне бруса удлиняются. Эти изменения и укорочения будут тем больше, чем боль-