Глава 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛА

3.1. Постановка задачи

В общем случае на каждой площадке (грани) частицы материала может возникнуть одно нормальное (σ) и два касательных (τ) напряжения (см. гл. 1), при этом напряженное состояние (НС) имеет вид (рис. 33)

Если частицу в теле поворачивать, то σ и τ на ее гранях будут меняться.

Площадки, на которых нормальные напряжения экстремальны, а касательные равны нулю, называются *главными площадками*.

Нормальные напряжения на главных площадках называются главными напряжениями и обозначают σ_1; σ_2; σ_3, причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

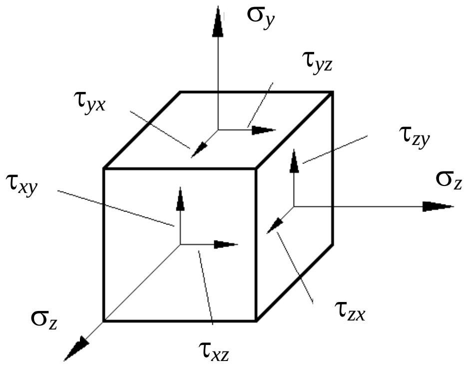

Рис. 33

Вырезая из нагруженного тела частицы главными площадками, можно все многообразие напряженных состояний свести к трем основным видам (рис. 34)

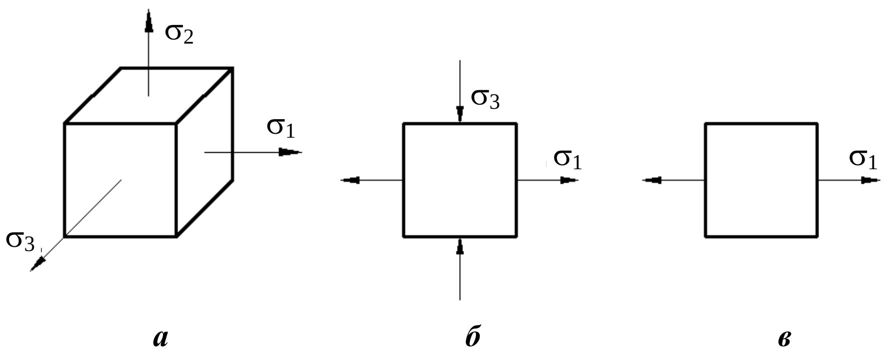

Рис. 34

На рис. 34: *а* – объемное НС (ОНС); *б* – плоское НС (ПНС); *в* – линейное НС (ЛНС)).

Так как в сопротивлении материалов используется гипотеза о ненадавливании соседних волокон, то в брусьях возникает только одно нормальное напряжение σ_z. Касательные напряжения учитывают только от M_z. Поэтому материал брусьев по теории сопротивления материалов может находиться либо в ПНС, либо в ЛНС.

Задача. По известным напряжениям на исходных площадках найти величину и направление главных напряжений.

Рассмотрим общий случай ПНС и найдем σ_α и τ_α в произвольно наклоненной под углом α площадке (рис. 35).

Обозначим площадь площадки *AB* через *dA*, тогда площадь площадки *AC* будет *dA* cosα и площадь площадки *BC* – *dA* sinα.

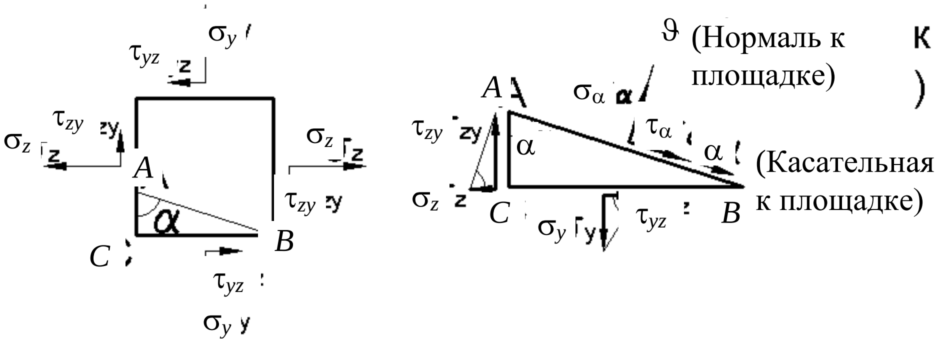

Рис. 35

Рассмотрим равновесие частицы *ABC*:

1) $\sum \vartheta = 0$;

$$\sigma_\alpha dA - (\sigma_z dA\cos\alpha)\cos\alpha - (\sigma_y dA\sin\alpha)\sin\alpha + (\tau_{zy} dA\cos\alpha)\sin\alpha + (\tau_{yz} dA\sin\alpha)\cos\alpha = 0$$

;

так как $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, то получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_{zy}\sin 2\alpha; \qquad (32)$$

2) $\sum \alpha = 0$. Отсюда найдем

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{zy}\cos 2\alpha. \qquad (33)$$

Исследуем (32) на экстремум

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = \sigma_z 2\cos\alpha_0(-\sin\alpha_0) + \sigma_y 2\sin\alpha_0(\cos\alpha_0) - \tau_{zy}\cos 2\alpha_0 \cdot (2) = 0 \,|:(-2);$$

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha_0 + \tau_{zy}\cos 2\alpha_0 = \tau_{\alpha=\alpha_0} = 0. \qquad (34)$$

Таким образом, на площадках, где σ экстремальны, τ = 0; такие площадки назвали главными площадками. Их положение определяется углом α_0, для которого из (34)

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}. \qquad \mathbf{(35)}$$

Положив в (32) $\alpha = \alpha_0$ и учитывая (35), можно найти главные напряжения

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}. \qquad \mathbf{(36)}$$

Правила знаков:

1. Растягивающее нормальное напряжение считаем (+).
2. Касательное напряжение будем считать положительным, если оно стремится повернуть частицу по часовой стрелке относительно любой точки *K* внутри частицы (рис. 36).

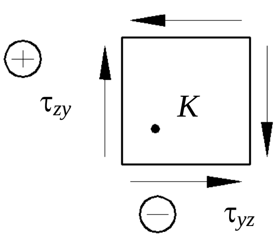

Рис. 36

3. Положительный угол α_0 следует откладывать от большего из двух напряжений σ_z или σ_y до σ_{max} против часовой стрелки.

3.2. Краткие сведения из теории ОНС

Дано: $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3; \alpha; \beta; \gamma$.

Найти: p_α – полное напряжение в площадке;

σ_α – нормальное напряжение;

τ_α – касательное напряжение.

Рассматривая равновесие частицы *АВСД* (рис. 37) (как это делали для ПНС), можно найти

$$p_\alpha^2 = (\sigma_1 \cos\alpha)^2 + (\sigma_2 \cos\beta)^2 + (\sigma_3 \cos\gamma)^2; \quad (37)$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma; \quad (38)$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{p_\alpha^2 - \sigma_\alpha^2}. \quad (39)$$

Здесь σ_α и τ_α – составляющие полного напряжения p_α.

Известно, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \quad (40)$$

Представляют интерес напряжения в площадках, равнонаклоненных к главным площадкам, когда $\alpha = \beta = \gamma$, при этом из (40)

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1/\sqrt{3}. \quad (41)$$

Такие площадки называются *октаэдрическими*.

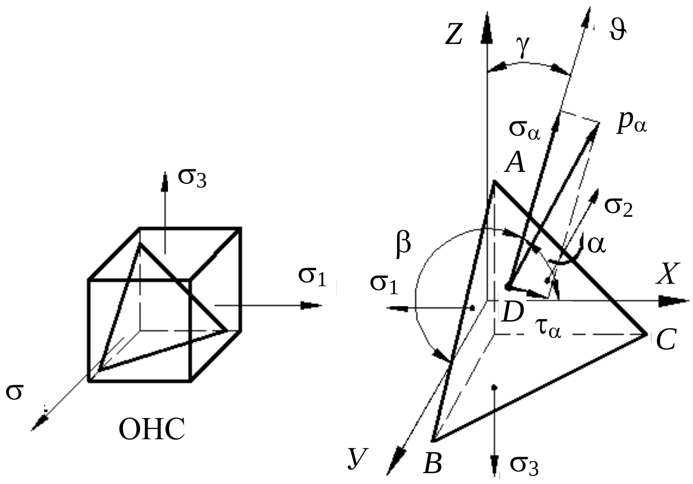

Рис. 37

Подставляем (41) в (37), (38) и (39), найдем октаэдрическое нормальное напряжение

$$\sigma_{окт} = \sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (42)$$

и октаэдрические кассательные напряжения

$$\tau_{окт} = \tau_\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (43)$$

Представляют также интерес максимальные касательные напряжения (которые можно получить, исследовав (39) на экстремум)

$$\tau^{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \qquad (44)$$

$\tau^{\max}$ действует всегда в площадках, равнонаклоненных к σ_1 и σ_3 (т.е. в площадках, параллельных σ_2), и направлено от σ_3 к σ_1 (рис. 38).

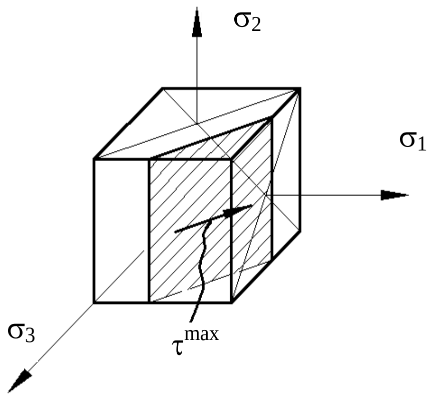

Рис. 38

3.3. Краткие сведения из теории деформированного состояния

На каждой площадке могут возникнуть три напряжения.

Совокупность напряжений на 3-х взаимно перпендикулярных площадках называется тензором напряжений ($T_н$):

– напряжения в площадке с нормалью x:
– напряжения в площадке с нормалью y:
– напряжения в площадке с нормалью z:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = T_н .$$

Как было показано, зная $T_н$, можно найти напряжения на любой наклонной площадке. Согласно закону парности,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx};\ \ \tau_{xz} = \tau_{zx};\ \ \tau_{zy} = \tau_{yz} .$$

Каждому нормальному напряжению соответствует относительная линейная деформация, а каждому касательному – половина угловой деформации:

$$\sigma_x \sim \varepsilon_x; \qquad \tau_{xy} \sim \frac{1}{2}\gamma_{xy};$$

$$\sigma_y \sim \varepsilon_y; \qquad \tau_{xz} \sim \frac{1}{2}\gamma_{xz};$$

$$\sigma_z \sim \varepsilon_z; \qquad \tau_{zy} \sim \frac{1}{2}\gamma_{zy}.$$

Полную угловую деформацию создают два равные по закону парности касательных напряжения. Следовательно, каждое касательное напряжение создает половину угловой деформации.

Таким образом, тензору напряжений можно поставить в соответствии тензор деформаций ($T_д$)

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = T_д .$$

В теории упругости доказано, что напряженное и деформированное состояния описываются одинаковыми по виду уравнениями. Поэтому все формулы теории деформаций можно получить из соответствующих формул теории напряжений, заменив в них компоненты $T_н$ соответствующими компонентами $T_д$. Например, деформация ε_α в произвольном направлении α будет, по ана логии с (32)

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_z \cos^2\alpha + \varepsilon_y \sin^2\alpha - \frac{1}{2}\gamma_{zy} \sin 2\alpha . \tag{45}$$

Главные деформации, по аналогии с (36)

$$\varepsilon_{\substack{\max \\ \min}} = \varepsilon_{1,3} = \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{zy}\right)^2} . \tag{46}$$

В теории упругости доказано, что для изотропных тел (механические свойства одинаковы в разных направлениях) направления главных напряжения и деформаций совпадают, что нельзя отнести к телам анизотропным.

3.4. Обобщенный закон Р. Гука

Каковы зависимости между напряжениями и деформациями в общем случае ОНС (рис. 39)?

Нормальные напряжения вызывают только линейные деформации, а касательные – только угловые. Если действует только σ_z, то (имели)

$$\sigma_z = E\varepsilon'_z \Rightarrow \varepsilon'_z = \frac{\sigma_z}{E}; \varepsilon'_x = \varepsilon'_y = -\mu\varepsilon'_z = -\mu\frac{\sigma_z}{E} .$$

Если действуют только σ_y, то аналогично $\varepsilon''_y = \dfrac{\sigma_y}{E}$; $\quad \varepsilon''_z = \varepsilon''_x = -\mu\dfrac{\sigma_y}{E}$.

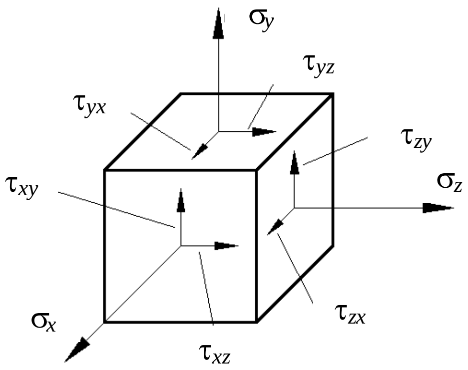

Рис. 39

Если действуют только σ_x, то $\varepsilon'''_x = \dfrac{\sigma_x}{E}$; $\varepsilon'''_y = \varepsilon'''_z = -\mu\dfrac{\sigma_x}{E}$.

Используем *принцип независимости действия сил*: **если на тело действуют одновременно несколько сил, то возникающие в нем внутренние усилия, напряжения, деформации и перемещения равны сумме этих величин от каждой силы в отдельности (закон Р. Гука при ОНС)**

$$\left|\begin{array}{ll} \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]; & \gamma_{zx} = \dfrac{\tau_{zx}}{G}; \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{\mathrm{E}}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right]; & \gamma_{yx} = \dfrac{\tau_{yx}}{G}; \\ \varepsilon_x = \dfrac{1}{\mathrm{E}}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right]; & \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G}. \end{array}\right| \tag{47}$$

Угловую деформацию в каждой из трех плоскостей вызывают только те касательные напряжения, которые расположены в этой плоскости.

В частном случае для ПНС (рис. 40) закон Р. Гука получим, положив в (47) $\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$.

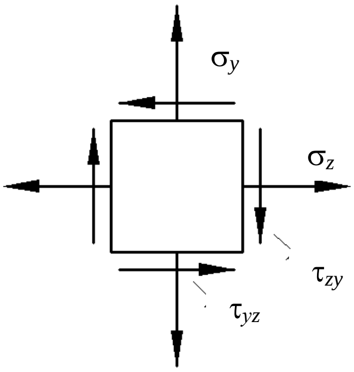

Рис. 40

$$\left|\begin{aligned} &\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\sigma_y\right];\\ &\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\sigma_z\right];\\ &\varepsilon_x = -\frac{\mu}{E}\left[\sigma_y + \sigma_z\right];\\ &\gamma_{zy} = \gamma_{yz} = \frac{\tau_{zy}}{G}. \end{aligned}\right| \qquad \textbf{(48)}$$