ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВСФ

Задача 1

Для заданных упругих систем (схемы 5, 7, 8, 9, 10, 13) определить значения внутренних силовых факторов и построить их эпюры, выразив ординаты в характерных сечениях через q и a. Показать положение опасного сечения.

Схема 5 (рис. 94, *а*). *Дано*: $P = qa$

Брус имеет три силовых участка.

I участок: $0 \le z_1 \le a$; $N_{z_1} = -3\ qa = \text{const}$;

II участок: $0 \le z_2 \le a$; $N_{z_2} = -3\ qa + qz_2$;

при $z_2 = 0$ $N_{z_2} = -3\ qa$;

при $z_2 = a$ $N_{z_2} = -2\ qa$;

III участок: $0 \le z_3 \le a$; $N_{z_3} = -3\ qa + qa + 4\ qa = 2\ qa = \text{const}$.

Эпюра нормальных сил показана на рис. 94, *б*.

Для сжатой части бруса (I и II участки) опасным будет любое сечение *1-1* на I участке, где $(N_z^{\max})_c = -3\ qa$.

Для растянутой части бруса (III участок) опасным будет любое сечение *2-2*, где $(N_z^{\max})_p = 2\ qa$.

Если материал бруса одинаково работает на растяжение и сжатие, то опасным будет сечение *1-1*, где $N_z = /N_z^{\max}/ = 3\ qa$.

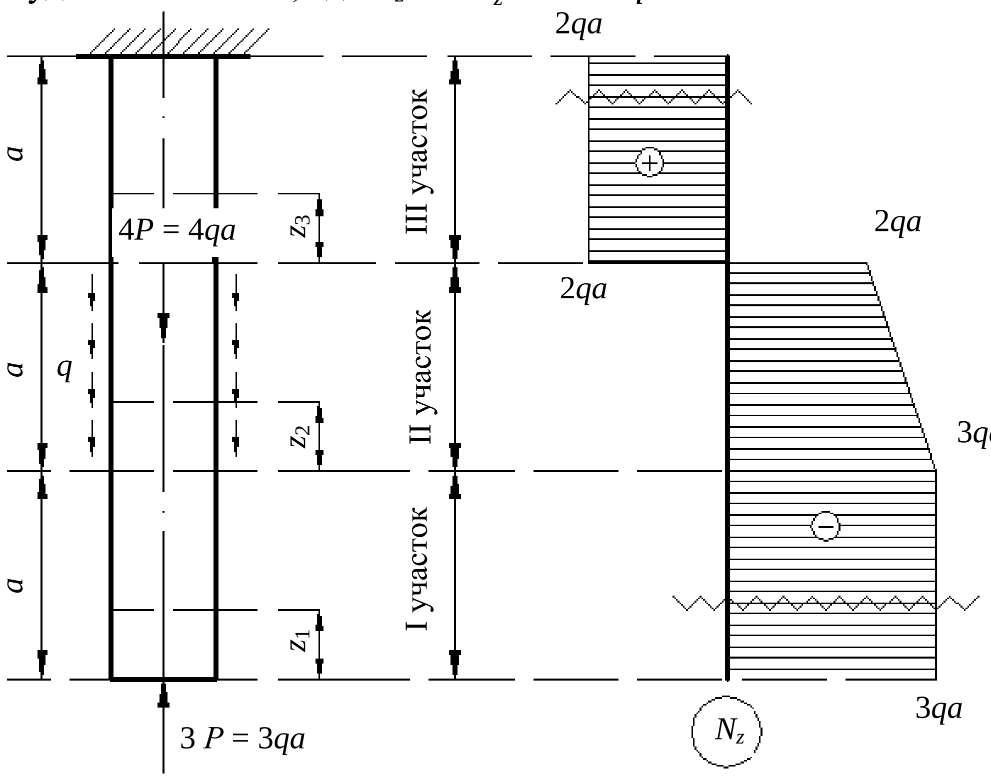


Рис. 94

Схема 7 (рис. 95, *а*). *Дано*: $m_1 = 0{,}1\ qa^2$; $m_z = 0{,}1\ qa$.

Брус имеет два силовых участка.

I участок: $0 \le z_1 \le a$; $M_{z_1} = m_1 = 0{,}1\ qa^2 = \text{const}$

II участок: $0 \le z_2 \le a$; $M_{z_2} = 0{,}1\ qa^2 - 0{,}2\ qa^2 - (0{,}1\ qa)\ z_2$;

при $z_2 = 0$ $M_{z_2} = -3\ qa$;

при $z_2 = a$ $M_{z_2} = -0{,}2\ qa^2$.

Эпюра крутящих моментов показана на рис. 95, *б*.

Так как прочность материала бруса не зависит от направления крутящего момента, то опасным будет сечение *1-1*, где $M_z = |M_z^{\max}| = 0{,}2\ qa^2$.

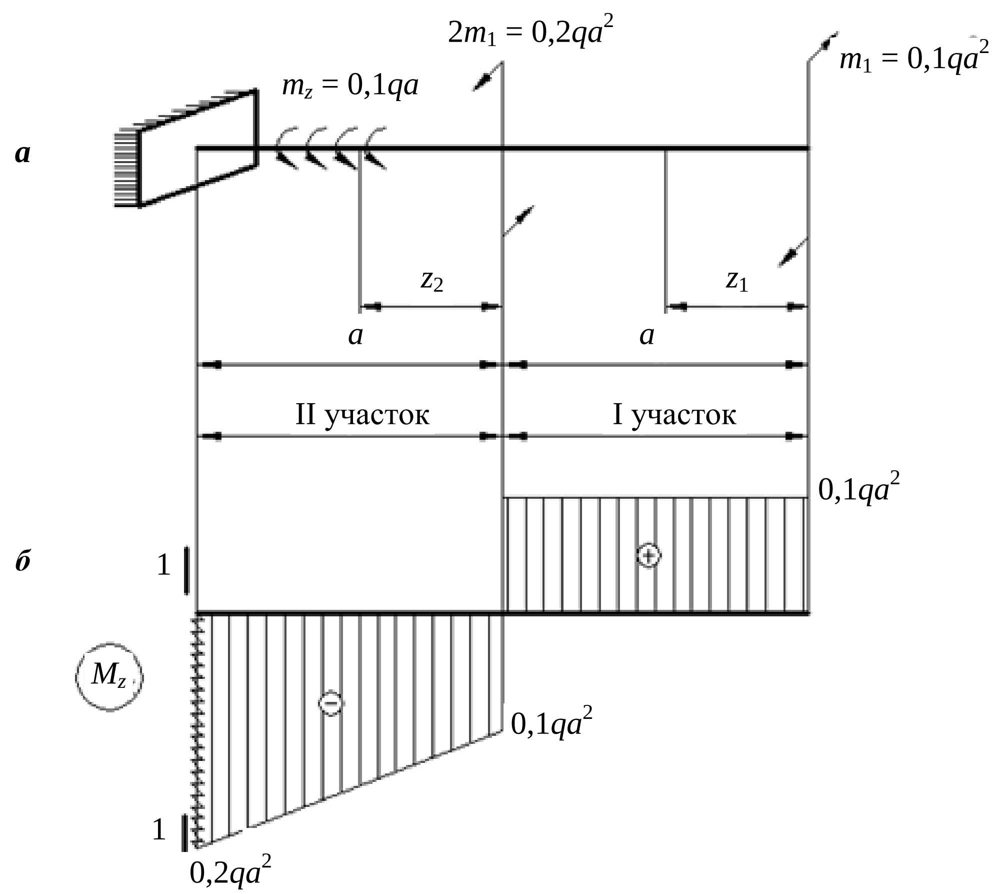


Рис. 95

Схема 8 (рис. 96, *а*). *Дано*: $P = qa$, $m = 2\,qa^2$.

Консольная балка имеет два силовых участка.

Построение эпюры Q_y:

I участок: $0 \le z_1 \le a$; $Q_{y_1} = -2\,qa = \mathrm{const}$;

II участок: $0 \le z_2 \le a$; $Q_{y_2} = -2\,qa + qz_2$;

при $z_2 = 0$ $\quad Q_{y_2} = -2\,qa$;

при $z_2 = a$ $\quad Q_{y_2} = -qa$.

Эпюра Q_y показана на рис. 96, *б*.

Построение эпюры M_x:

I участок: $0 \le z_1 \le a$; $M_x = -(2\,qa)\,z_1$;

при $z_1 = 0$ $\quad M_{x_1} = 0$;

при $z_1 = a$ $\quad M_{x_1} = -2\,qa^2$.

II участок: $0 \le z_2 \le a$; $M_{x_2} = -(2qa)(a + z_2) + 6qa^2 + \dfrac{qz_2^2}{2}$;

при $z_2 = 0$ $\quad M_{x_2} = 4\,qa^2$;

при $z_2 = a$ $\quad M_{x_2} = \dfrac{5}{2}qa^2$.

Парабола выпукла навстречу направлению «q» и экстремальна в сечении, где $Q_{y_2} = 0$ (т.е. за пределами II участка).

Эпюра M_x показана на рис. 96, *в*.

Опасное сечение *1-1*, где $M_x = |M_x^{\max}| = 4\,qa^2$.

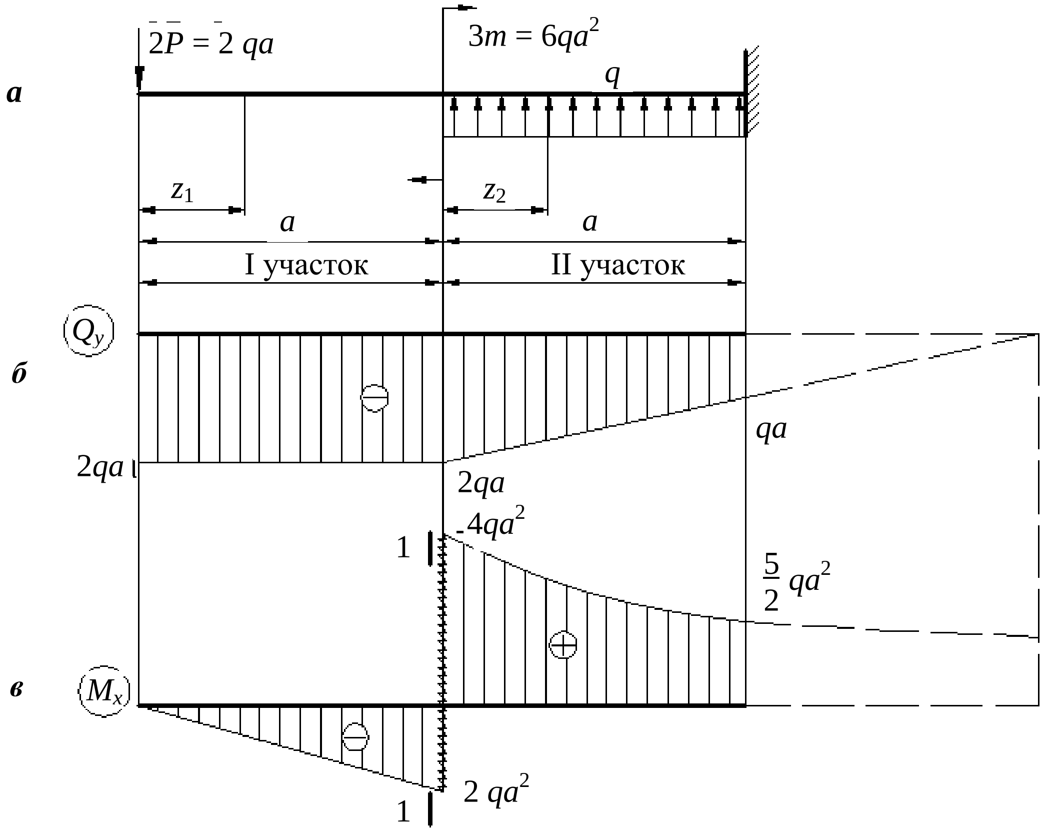


Рис. 96

Схема 9 (рис. 97, *а*) *Дано*: $P = qa$, $m = qa^2$.

Определяем реакции опор

1) $\Sigma M_A = (2qa)a - (qa^2) - (q2a)a + R_B 2a = 0$; $R_B = \dfrac{qa}{2}$;

2) $\Sigma M_B = (2qa)3a - (qa^2) + (q2a)a - R_A 2a = 0$; $R_A = \dfrac{7qa}{2}$.

Проверка:

$$\Sigma Y = -2qa + q2a + \frac{7qa}{2} + \frac{qa}{2} = -4qa + 4qa = 0.$$

Двухопорная балка имеет два силовых участка.

Построение эпюры Q_y:

I участок: $0 \le z_1 \le a$; $Q_{y_1} = -2qa = \text{const}$;

II участок: $0 \le z_2 \le 2a$; $Q_{y_2} = -\dfrac{qa}{2} + qz$;

при $z_2 = 0$ $\quad Q_{y_2} = -\dfrac{qa}{2}$;

при $z_2 = a$ $\quad Q_{y_2} = \dfrac{3qa}{2}$.

Эпюра Q_y показана на рис. 97, *б*.

Построение эпюры M_x:

I участок: $0 \le z_1 \le a$; $M_x = -(2qa)z_1$;

при $z_1 = 0$ $\quad M_{x_1} = 0$;

при $z_1 = a$ $\quad M_{x_1} = -2qa^2$.

II участок: $0 \le z_2 \le 2a$; $M_{x_2} = \left(\dfrac{qa}{2}\right)z_2 - \dfrac{qz_2^2}{2}$;

при $z_2 = 0$ $\quad M_{x_2} = 0$;

при $z_2 = 2a$ $\quad M_{x_2} = -qa^2$.

Так как эпюра Q_y пересекает нулевую линию в пределах II участка, то парабола экстремальна в этом сечении (где $Q_y = 0$).

Исследуем параболу на экстремум

$$\frac{dM_{x_2}}{dz} = \frac{qa}{2} - qz_2^2 = \left|Q_{y_2}\right| = 0 \rightarrow z_2^0 = \frac{a}{2};$$

$$z_2 = z_2^0 = \frac{a}{2} \rightarrow M_{x_2} = \frac{qa^2}{8}.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 97, *в*.

Опасное сечение *1-1*, где $M_x = |M_x^{\max}| = 2qa^2$.

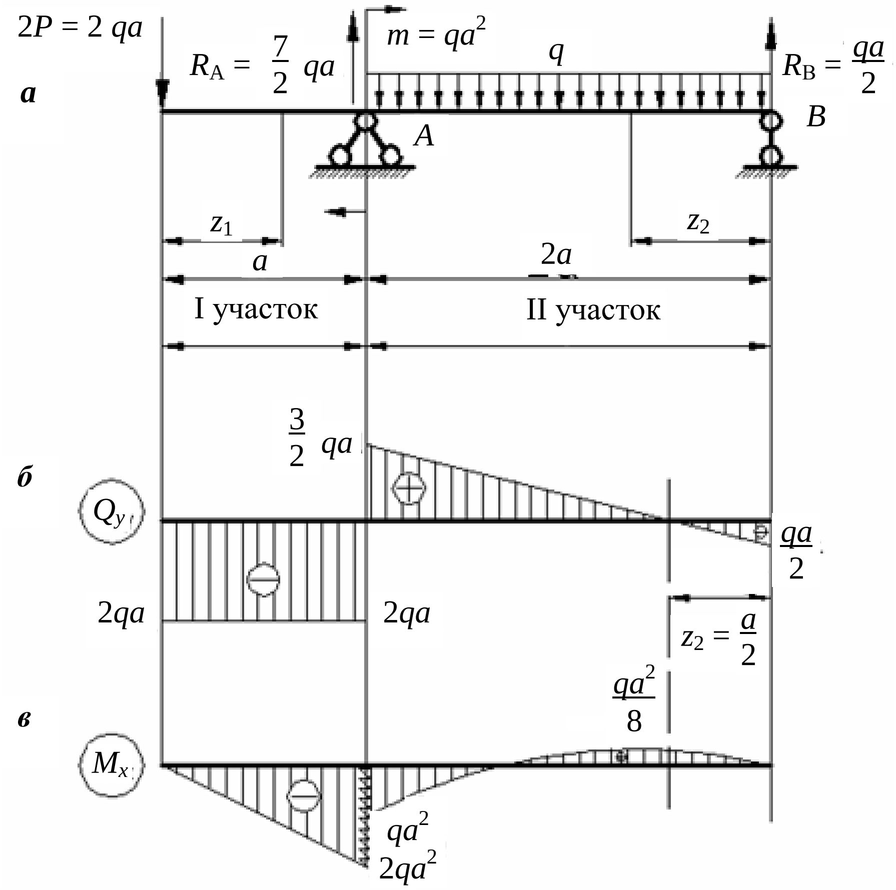

2P = 2 qa
R_A = 7/2 qa
m = qa^2
q
R_B = qa/2
a
A
B
z_1
z_2
a
2a
I участок
II участок
3/2 qa
б
Q_y
qa/2
2qa
2qa
z_2 = a/2
qa^2/8
в
M_x
qa^2
2qa^2

Рис. 97

Схема 10 (рис. 98, *а*).

Дано: $P = qa$, $m = 2qa^2$.

Определяем реакции опор

1) $\Sigma X = -(qa) - q2a + R_{\text{В}}^{\Gamma} = 0$; $R_{\text{В}}^{\Gamma} = 3qa$;

2) $\Sigma M_{\text{В}} = (qa)2a + (q2a)a - (2qa^2) - R_{\text{А}}2a = 0$; $R_{\text{А}} = qa$;

3) $\Sigma Y = R_{\text{А}} - R_{\text{В}}^{\text{В}} = 0$; $R_{\text{В}}^{\text{В}} R_{\text{А}} = qa$.

Плоская рама имеет три силовых участка.

Построение эпюры N_z:

I участок: $0 \le z_1 \le a$; $N_{z_1} = qa = \text{const}$;

II участок: $0 \le z_2 \le a$; $N_{z_2} = R_{\text{А}} = qa = \text{const}$;

III участок: $0 \le z_3 \le a$; $N_{z_3} = R_{\text{В}}^{\Gamma} = 3qa = \text{const}$.

Эпюра нормальных сил показана на рис. 98, *б*.

Построение эпюры Q_y:

I участок: $0 \le z_1 \le a$; $Q_{y_1} = R_A = qa = \text{const}$;

II участок: $0 \le z_2 \le 2a$; $Q_{y_2} = -P - qz_2 = -qa - qz_2$;

при $z_2 = 0$ $\quad Q_{y_2} = -qa$;

при $z_2 = 2a$ $\quad Q_{y_2} = -3qa$.

III участок: $0 \le z_3 \le a$; $Q_{y_3} = R_{\text{В}}^{\text{В}} = qa = \text{const}$.

Эпюра поперечных сил показана на рис. 98, *в*.

Построение эпюры M_x

I участок: $0 \le z_1 \le a$; $M_x = R_{\text{А}}\, z_1 = (qa)\, z_1$ (сжаты верхние волокна)

при $z_1 = 0$ $\quad M_{x_1} = 0$;

при $z_1 = a$ $\quad M_{x_1} = qa^2$.

II участок: $0 \le z_2 \le 2a$; $M_{x_2} = -Pz_2 + R_{\text{А}}a + m - qz_2z_2/2 = -(qa)z_2 + (qa)a +$
$+ 2qa^2 - qz_2^2/2$.

При составлении выражения M_{x_2} положительными приняли моменты, сжимающие правые волокна II участка,

при $z_2 = 0$ $\quad M_{x_2} = 3\,qa^2$ (т.е. сжаты правые волокна),

при $z_2 = 2a$ $\quad M_{x_2} = -qa^2$ (т.е. сжаты левые волокна).

Парабола выпукла навстречу нагрузке q, т.е. вправо, и экстремальна в сечении, где $Q_{y_2} = 0$, т.е. за пределами II участка.

III участок: $0 \le z_3 \le a$; $M_{x_3} = R_{\text{В}}^{\text{В}} z_3 = (qa)z_3$ (сжаты нижние волокна)

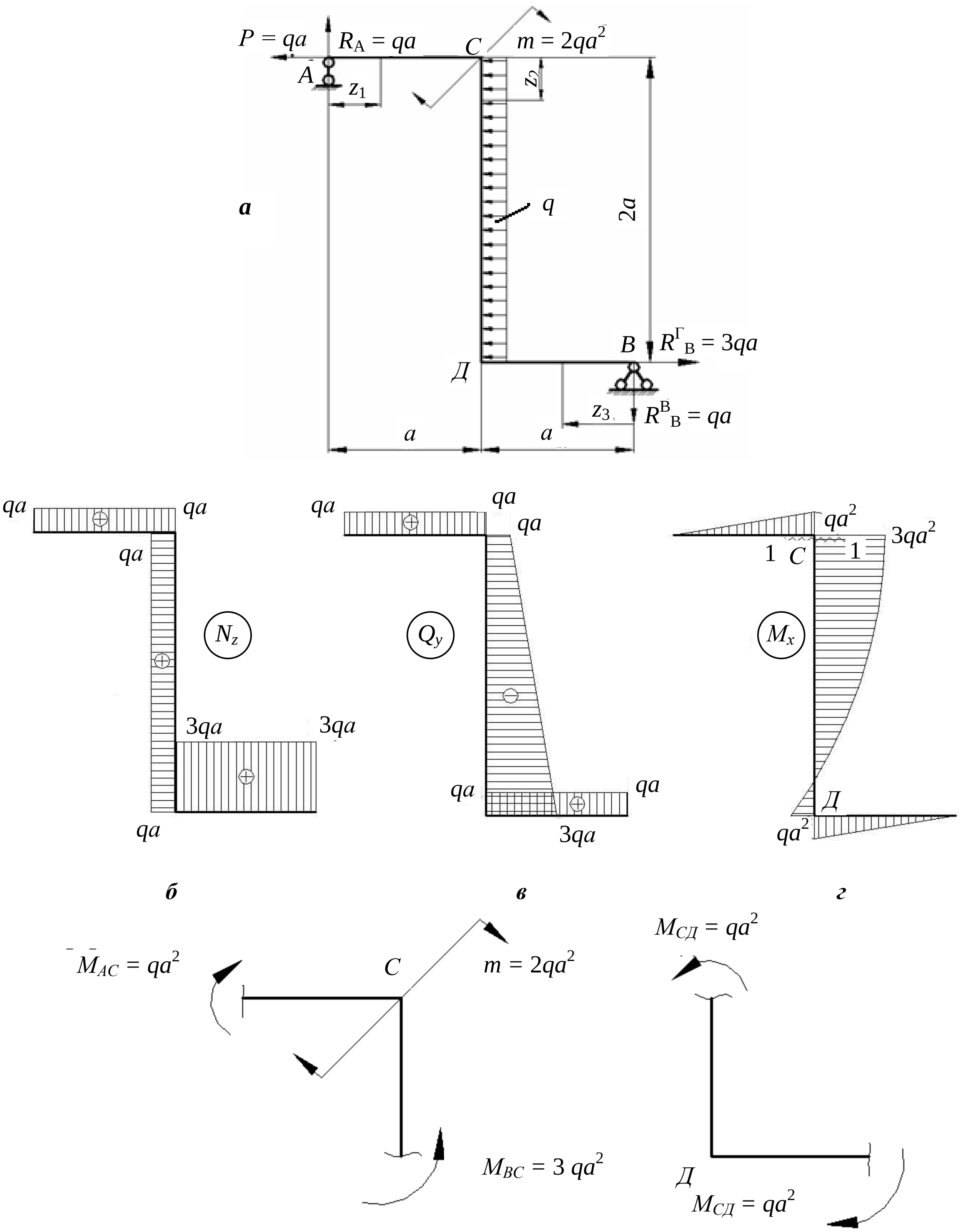
при $z_3 = 0$ $\quad M_{x_3} = 0$;

при $z_3 = a$ $\quad M_{x_3} = qa^2$.

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 98, *г*.

Влиянием N_z и Q_y на прочность в рамах можно пренебречь.

Поэтому опасным будет сечение *1-1*, где $M_x = |\, M_x^{\max} \,| = 3\,qa^2$.



д – узловая проверка эпюры M_x

$$\Sigma M_C = qa^2 + 2qa^2 - 3qa^2 = 0 \qquad \Sigma M_D = qa^2 - qa^2 = 0$$

Рис. 98

Схема 13 (рис. 99, *а*).

Дано: $P = qa$; $a = 10d$; $m = qa^2 = 10\,P\,d$.

Брус имеет один силовой участок. Влиянием поперечных сил пренебрегаем.

$0 \le z \le 10\,d$, $N_z = -20\,P = \text{const}$.

$$M_x = (20P)\frac{d}{2} = 10Pd = \text{const}$$ (сжаты задние волокна);

$M_y = 2\,Pz$ (сжаты левые волокна),

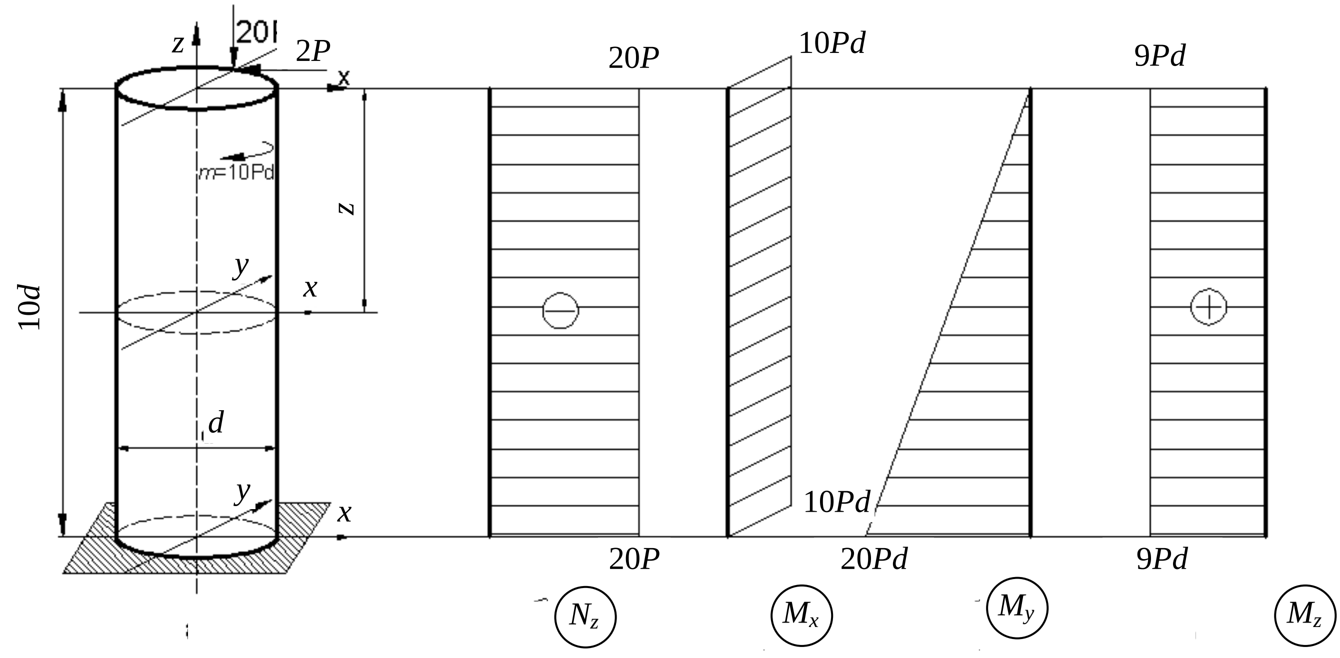
при $z = 0$ $\qquad M_y = 0$;

при $z = 10\,d$ $\qquad M_y = 20\,Pd$.

$$M_z = -(2P)\frac{d}{2} + m = -Pd + 10Pd = 9Pd\,.$$

Эпюры внутренних силовых факторов показаны на рис. 99, *б*, *в*, *г*, *д*.

Опасным будет сечение на нижнем конце бруса, где все внутренние силовые факторы одновременно достигают наибольших значений $N_z = -20\,P$; $M_x = 10\,Pd$; $M_y = 20\,Pd$; $M_z = 9\,Pd$.



в

Рис. 99

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

Задача 2.1

Подобрать из условия прочности размеры квадратного сечения деревянного бруса. Материал – дерево.

Исходные данные: $(\sigma_{в})_{р} = 80$ МПа; $(\sigma_{в})_{с} = 40$ МПа; $n_{в} = 8$; $q = 0{,}1$ МН / м; $a = 1$ м.

Решение

1. По эпюре N_z определяем опасное сечение (рис. 101, *б*), так как $(\sigma_{в})_{р} \neq (\sigma_{в})_{с}$, рассмотрим отдельно две зоны – растяжения и сжатия (сечение *I-I* и сечение *II-II*).

Зона растяжения – $N_{z_1}^{\max} = 3qa = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}3$ МН.

Зона сжатия – $N_{z_1}^{\max} = -2qa = -2 \cdot 0{,}1 \cdot 1 = -0{,}2$ МН.

2. Для каждой зоны составляем условие прочности.

Зона растяжения:

$$\sigma_{z_1}^{\max} = \frac{N_{z_1}^{\max}}{A_1} \le [\sigma]_{р};$$

Зона сжатия:

$$\sigma_{z_2}^{\max} = \frac{N_{z_2}^{\max}}{A_2} \le [\sigma]_{с}.$$

3. Определяем допускаемые напряжения

$$[\sigma]_{р} = \frac{(\sigma_{в})_{р}}{n_{в}} = \frac{80}{8} = 10 \text{ МПа}; \quad [\sigma]_{с} = \frac{(\sigma_{в})_{с}}{n_{в}} = \frac{40}{8} = 5 \text{ МПа}.$$

4. Из условия прочности определяем размеры поперечного сечения

Зона растяжения:

$$A_1 \ge \frac{N_{z_1}^{\max}}{[\sigma]_{р}} = \frac{0{,}3}{10} = 0{,}03\,\text{м}^2 = 300 \text{ см}^2;$$

Зона сжатия:

$$A_2 \ge \frac{N_{z_2}^{\max}}{[\sigma]_{с}} = \frac{0{,}2}{5} = 0{,}04\,\text{м}^2 = 400 \text{ см}^2.$$

Размер стороны квадрата

$$B_1 = \sqrt{A_1} = \sqrt{300} = 17{,}3 \text{ см}; \quad B_2 = \sqrt{A_2} = \sqrt{400} = 20 \text{ см}.$$

Для бруса постоянного сечения условию прочности отвечает больший размер, следовательно, $B = 20$ см, $A = 400$ см^2.

5. В опасном сечении каждой зоны построим эпюру σ_z и покажем напряженное состояние элемента в опасной точке (рис. 101, *в*, *г*).

При растяжении-сжатии опасной является любая точка опасного сечения

$$\sigma_{z_1}^{\max} = \frac{N_{z_1}^{\max}}{A} = \frac{0{,}3}{0{,}04} = 7{,}5 \text{ МПа}; \quad \sigma_{z_2}^{\max} = \frac{N_{z_2}^{\max}}{A} = \frac{-0{,}2}{0{,}04} = -5 \text{ МПа}.$$

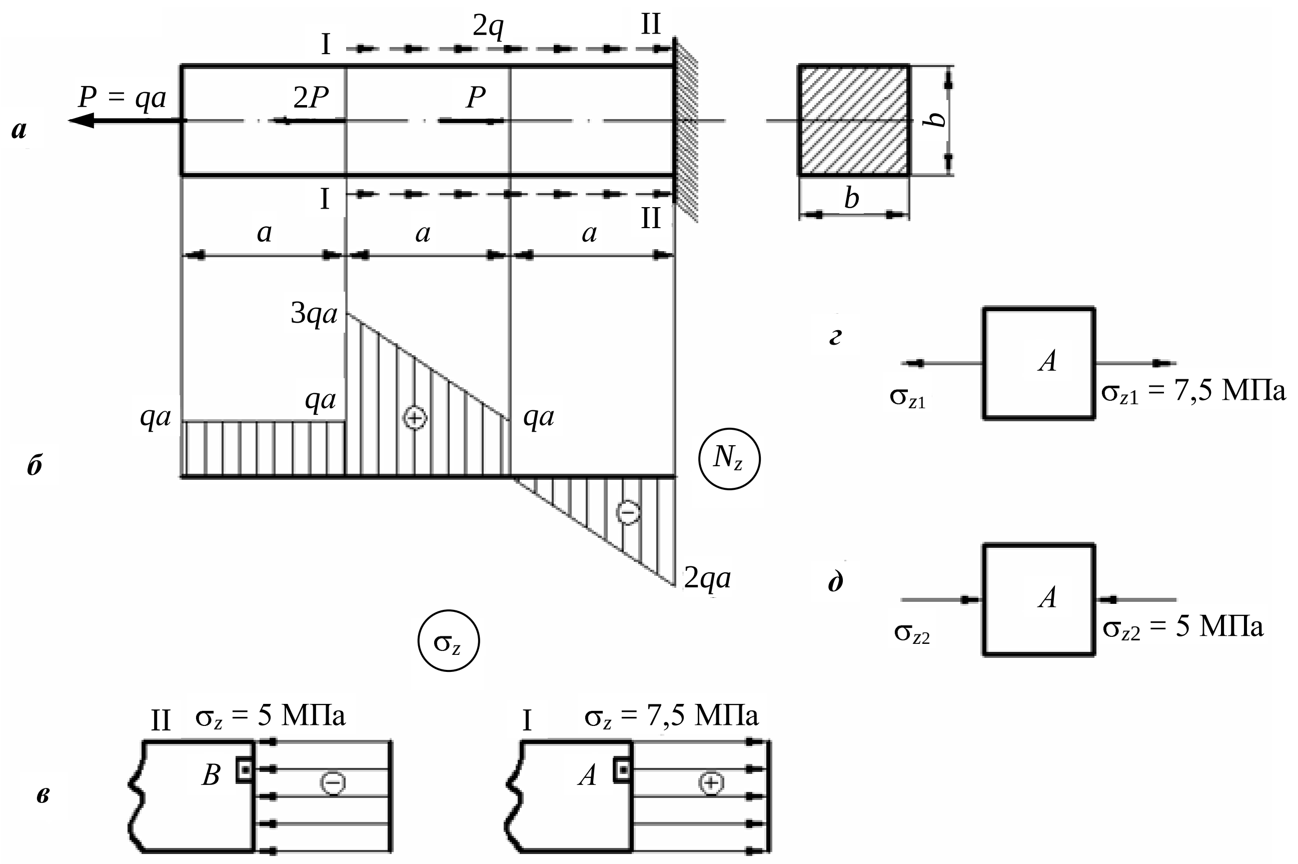


Рис. 101 (к задаче 2.1)

Задача 2.2

Подобрать из условия прочности размеры круглого, кольцевого (d / D = 0,5) и квадратного сечения скручиваемого стального бруса. Материал бруса – Ст. 3.

Исходные данные: $\sigma_т$ = 220 МПа; $n_т$ = 1,5; a = 1 м; m = 0,1 МН·м.

Решение

1. По эпюре M_z определяем опасное сечение (сечение *I-I*, рис. 101, *б*, где $M_z = M_z^{\max} = 2m = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$ МН·м.

2. Составляем условие прочности при кручении

$$\tau_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_{p\ к}} \le [\tau].$$

3. Определяем допустимое касательное напряжение

$$[\tau] = (0{,}5 \div 0{,}6)\frac{\sigma_т}{n_т} = (0{,}5 \div 0{,}6)\frac{220}{1{,}5} = 75 \text{ МПа}.$$

4. Из условия прочности подбираем размеры сечения

$$W_{p\ к} = \frac{M_z^{\max}}{[\tau]}.$$

– Круглое сечение

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16},\ d \ge \sqrt[3]{\frac{16 M_z^{\max}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0{,}2}{3{,}14 \cdot 75}} = 0{,}239 \text{ м} = 23{,}9 \text{ см}.$$

Площадь сечения

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 23{,}9^2}{4} = 448{,}4 \text{ см}^2.$$

– Кольцевое сечение: ($\alpha = d/D = 0{,}5$), $W_\rho = \dfrac{\pi D^3 (1 - \alpha^4)}{16}$,

$$D \ge \sqrt[3]{\frac{16 M_z^{\max}}{\pi [\tau] (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0{,}2}{3{,}14 \cdot 75 \cdot (1 - 0{,}5^4)}} = 0{,}244 \text{ м} = 24{,}4 \text{ см}.$$

Площадь сечения

$$A = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2) = \frac{3{,}14 \cdot 24{,}4^2}{4}(1 - 0{,}5^2) = 350{,}5 \text{ см}^2.$$

– Квадратное сечение

$$W_к = ab^3 = 0{,}208\, b^3;\ B \ge \sqrt[3]{\frac{M_z^{\max}}{0{,}208 [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{0{,}2}{0{,}208 \cdot 75}} = 0{,}234 \text{ м} = 23{,}4 \text{ см}.$$

Площадь сечения $A = b^2 = 23{,}4^2 = 547{,}6$ см^2.

Более экономичным является кольцевое и менее экономичным – квадратное сечение скручиваемого бруса, так как при одинаковом $W_{p(к)}$

$$A_{квадрата} > A_{круга} > A_{кольца}.$$

5. Эпюры касательных напряжений и напряженное состояние в опасной точке показаны на рис. 105 *в*, *г*. При кручении бруса круглого или кольцевого сечения опасной является любая точка на поверхности сечения; для квадратного сечения – точка *A* в середине стороны квадрата. Для круглого сечения

$$\tau_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_p} = \frac{0,2}{\dfrac{3,14 \cdot 0,239}{16}} = 74,6\ МПа \approx 75\,\text{МПа}.$$

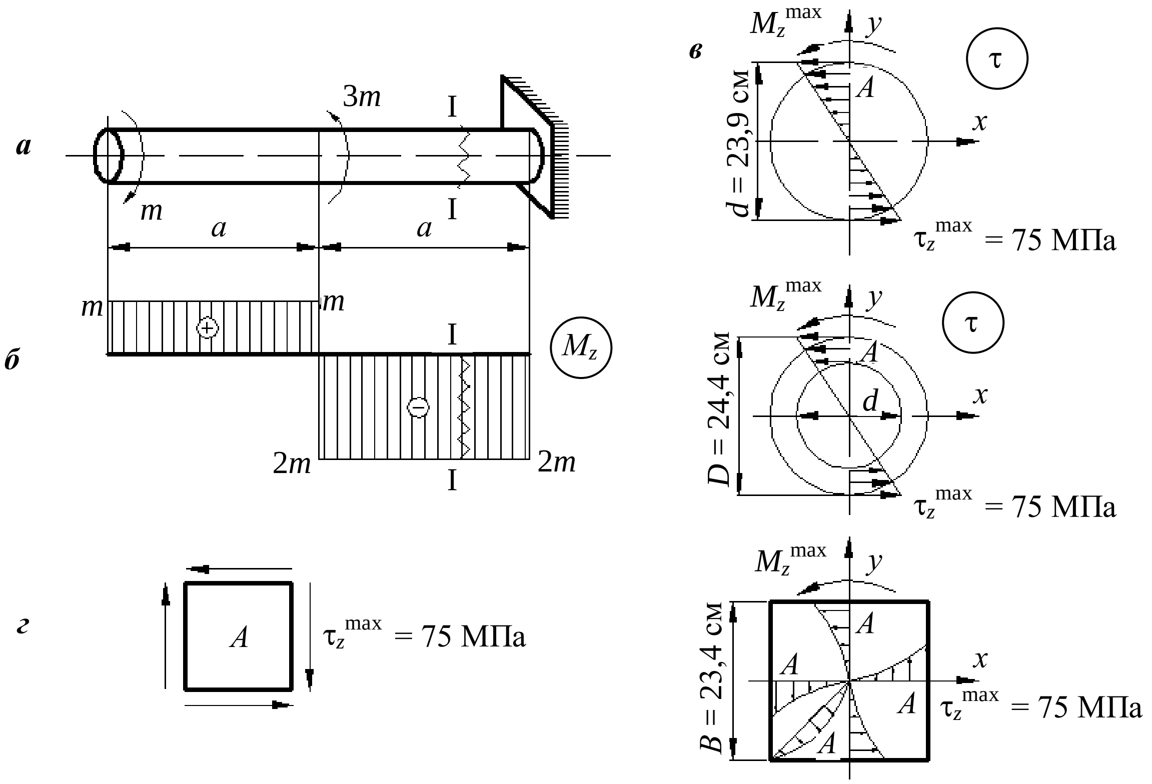


Рис. 102 (к задаче 2.2)

Задача 2.3

Подобрать из условия прочности размеры круглого, прямоугольного (h / b = 2) и двутаврового сечения стальной балки. Материал – Ст 3.

Исходные данные: $\sigma_т$ = 220 МПа; $n_т$ = 1,5; a = 1 м; m = 0,1 МН·м.

Решение

1. По эпюре M_x определяем опасное сечение (рис. 103, *б*, *в*), где $M_z = M_z^{\max} = 1{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot 1^2 = 0{,}15$ МН · м (сечение *I-I*, рис. 103, *а*).

2. Составляем условие прочности при изгибе

$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_x} \le [\sigma].$$

3. Определяем допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_т}{n_т} = \frac{220}{1{,}5} = 146{,}7 \text{ МПа}.$$

4. Из условия прочности определяем размеры поперечного сечения

$$W_x \ge \frac{M_x^{\max}}{[\sigma]}.$$

– Круглое сечение

$$W_x = \frac{\pi d^3}{16} \to d \ge \sqrt[3]{\frac{32 M_x^{\max}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0{,}15}{3{,}14 \cdot 146{,}7}} = 0{,}218 \text{ м} = 21{,}8 \text{ см}.$$

Площадь сечения $A = \dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{3{,}14 \cdot 21{,}8^2}{4} = 373{,}1$ см^2.

– Прямоугольное сечение (h / b = 2)

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b^3}{3} \to b \ge \sqrt[3]{\frac{3 M_x^{\max}}{2 [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0{,}15}{2 \cdot 146{,}7}} = 0{,}115 \text{ м} = 11{,}5 \text{ см};$$

$h = 2\,b = 2 \cdot 11{,}5 = 23$ см.

Площадь сечения $A = b \cdot h = 11{,}5 \cdot 23 = 264{,}5$ см^2.

– Двутавровое сечение

$$W_x \ge \frac{M_x^{\max}}{[\sigma]} = \frac{0{,}15}{146{,}7} = 0{,}001022 \text{ м}^3 = 1022 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента выбираем двутавр

№ 45 с W_x = 1231 см^3; A = 84,7 см^2 (ГОСТ 8239-89),

h = 45 см, b = 16 см.

Более экономичным является двутавровое сечение и менее экономичным – круглое сечение изгибаемого бруса, так как при одинаковом W_x

$$A_{круга} > A_{прямоугольника} > A_{двутавра}.$$

5. Эпюра нормальных напряжений и напряженное состояние в опасной точке показаны на рис. 103, *г*, *д*.

При изгибе опасной является точка опасного сечения, наиболее удаленная от нейтральной линии (точка A или B)

Для двутаврового сечения

$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} = \frac{0{,}15}{1231 \cdot 10^{-6}} = 121{,}9 \text{ МПа.}$$

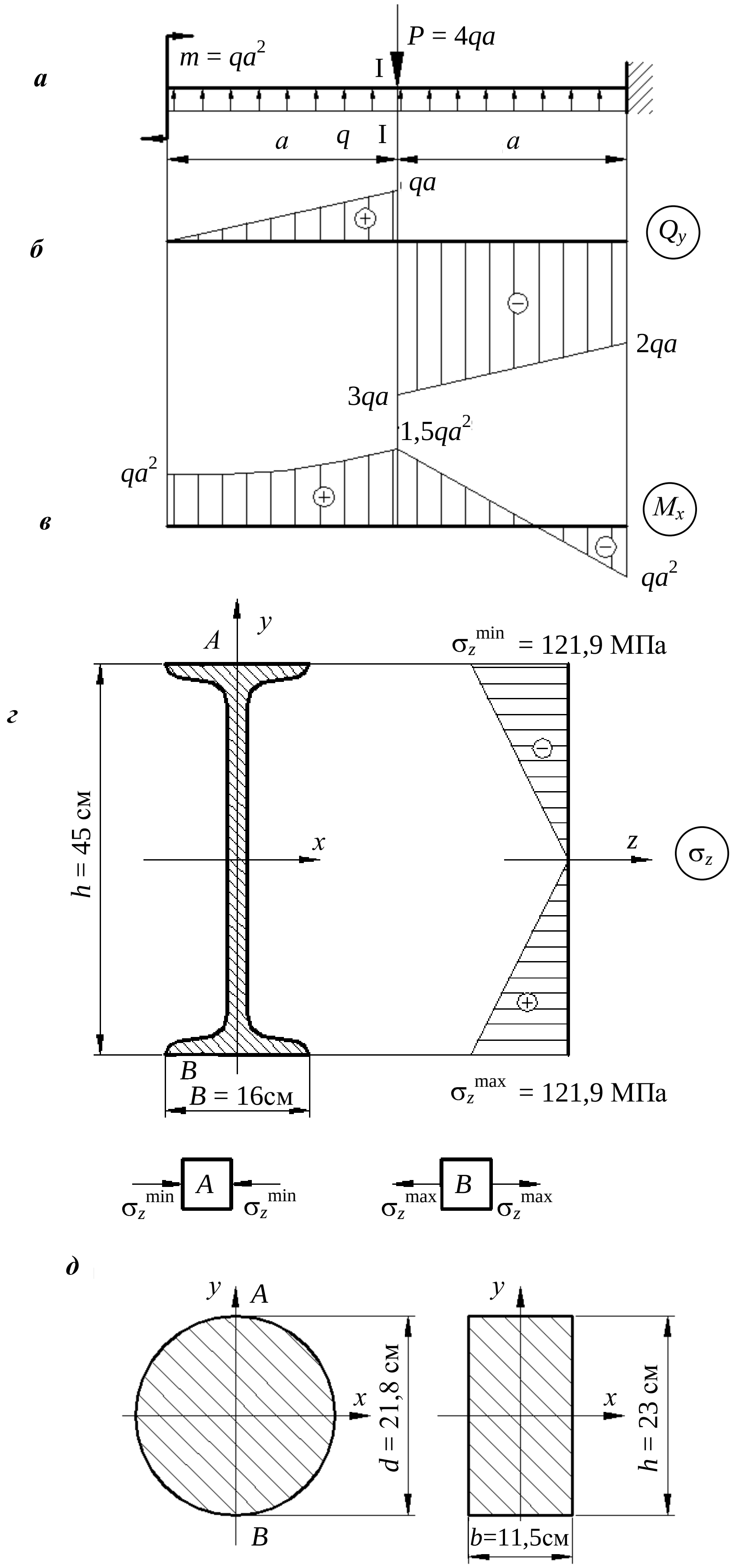


Рис. 103 (к задаче 2.3)

Задача 2.4 (*а*)

Прежде, чем решать задачу 2.4, полезно научиться определять положение главных центральных осей и вычислять главные моменты инерции сложных сечений.

Например, для сечения, показанного на рис. 104, *а*, главные центральные оси совпадают с осями симметрии *X* и *Y* сечения. Главные моменты инерции сечения относительно этих осей будут (сечение рассматриваем как два прямоугольника (*I*), вырезанные из прямоугольника (*II*)

$$I_x = I_x^{II} - 2I_x^{I} = I_x^{II} - 2\left(I_{x_1}^{I} + a_1^2 A^{I}\right) = \frac{b_2^2 h_1^3}{12} - 2\left(\frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2 A^{I}\right) =$$

$$= \frac{6 \cdot 12^3}{12} - 2\left[\frac{3 \cdot 4^3}{12} + 3^2 (3 \cdot 4)\right] = 616\,\text{см}^4;$$

$$I_y = I_y^{II} - 2I_y^{I} = \frac{h_2 b_2^3}{12} - 2\frac{h_2 b_1^3}{12} = \frac{12 \cdot 6^3}{12} - 2\frac{4 \cdot 3^3}{12} = 198\ \text{см}^4.$$

Для сечения, показанного на рис. 104, *б*, одна из главных центральных осей совпадает с осью симметрии *Y*. Вторая главная центральная ось *X* пройдет через центр тяжести сечения перпендикулярно оси *Y*.

Исходные данные для элементов, составляющих сечения:

– по ГОСТ 8239-89 для двутавра № 20 $A^{I} = 26{,}8$ см^2, $I_x^{I} = 1840$ см^4, $I_y^{I} = 115$ см^4;

– по ГОСТ 8240-89 для швеллера № 16а $A^{II} = 19{,}5$ см^2, $I_x^{I} = 78{,}8$ см^4, $I_y^{I} = 823$ см^4.

Если за исходные данные принять оси X_2Y, то координаты центра тяжести сечения будут

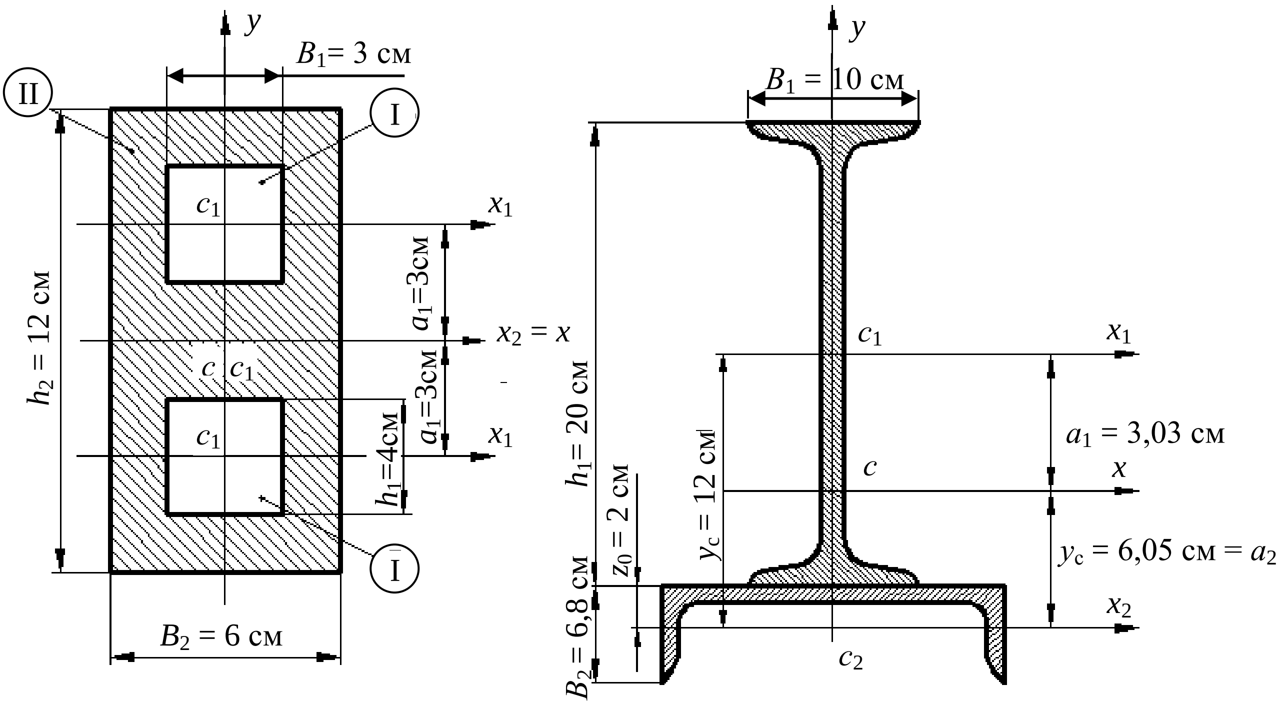
$$x_c = 0;\ y_c = \frac{\Sigma S_{x_2}}{\Sigma A} = \frac{A^{I} y_c^{I} + A^{II} y_c^{II}}{A^{I} + A^{II}} = \frac{26{,}8 \cdot 12 + 19{,}5 \cdot 0}{26{,}8 + 19{,}5} = 6{,}95\ \text{см}.$$

Главные моменты инерции сечения

$$I_x = I_x^{I} + I_x^{II} = \left(I_{x_1}^{I} + a_1^2 A^{I}\right) + \left(I_{x_2}^{II} + a_2^2 A^{II}\right) = \left(1840 + 5{,}05^2 \cdot 26{,}8\right) +$$

$$+ \left(78{,}8 + 6{,}95^2 \cdot 19{,}5\right) = 3544\,\text{см}^4;$$

$$I_y = I_y^{I} + I_y^{II} = 115 + 823 = 938\ \text{см}^4.$$



б

Рис. 104 (к задаче 2.4, *а*)

Задача 2.4

Подобрать из условия прочности величину допустимой нагрузки для стальной балки, имеющей заданное сечение. Материал балки – Ст.3.

Исходные данные: $\sigma_т = 220$ МПа; $n_т = 1{,}5$; $a = 1$ м; швеллер № 16; лист 1,5 × 20 см.

Решение

1. По эпюре M_x определяем опасное сечение (сечение *I-I*), рис. 106, *а*, *б*, *в*, где $M_x = M_x^{\max} = 2qa^2$.

2. Для заданного сечения определяем геометрические характеристики (рис. 106, *г*).

– Положение центра тяжести сечения в исходных осях X_2Y

$$x_c = 0;\ y_c = \frac{\Sigma S_{x_2}}{\Sigma A} = \frac{A^I y_c^I + A^{II} y_c^{II}}{A^I + A^{II}} = \frac{19{,}5 \cdot 8 + (1{,}5 \cdot 20) \cdot 0}{19{,}5 + 2 \cdot (1{,}5 \cdot 20)} = 1{,}96 \text{ см}.$$

– Через центр точки сечения проводим ось X и определяем осевой момент I_x

$$I_x = (I_{x_1} + a_1^2 A_1) + 2(I_{x_2} + a_2^2 A_2) = (78{,}8 + 6{,}04^2 \cdot 19{,}5) +$$

$$+ 2\left(\frac{1{,}5 \cdot 20^3}{12} + 1{,}96^2 \cdot 30\right) = 2941{,}9 \text{ см}^4.$$

– Определяем осевой момент сопротивления

$$W_x = \frac{I_x}{Y_{\max}} = \frac{2941{,}9}{11{,}96} = 246 \text{ см}^3 = 246 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

3. Составляем условие прочности и определяем величину допустимой нагрузки

$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} \le [\sigma];$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_т}{n_т} = \frac{220}{1{,}5} = 146{,}7 \text{ МПа};$$

$$q \le \frac{[\sigma] W_x}{2a^2} = \frac{146{,}7 \cdot 246 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1^2} = 0{,}018 \text{ МН / м}.$$

4. В опасном сечении строим эпюру σ (рис. 106, *д*).

$$\sigma_z^A = \frac{M_x^{\max}}{I_x} y_A = \frac{2 \cdot 0{,}018 \cdot 1^2}{2941{,}9 \cdot 10^{-8}} \cdot 8{,}04 \cdot 10^{-2} = 98{,}3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_z^B = \frac{M_x^{\max}}{I_x} y_B = \frac{2 \cdot 0{,}018 \cdot 1^2}{2941{,}9 \cdot 10^{-8}} \cdot 11{,}96 \cdot 10^{-2} = 146{,}7 \text{ МПа}.$$

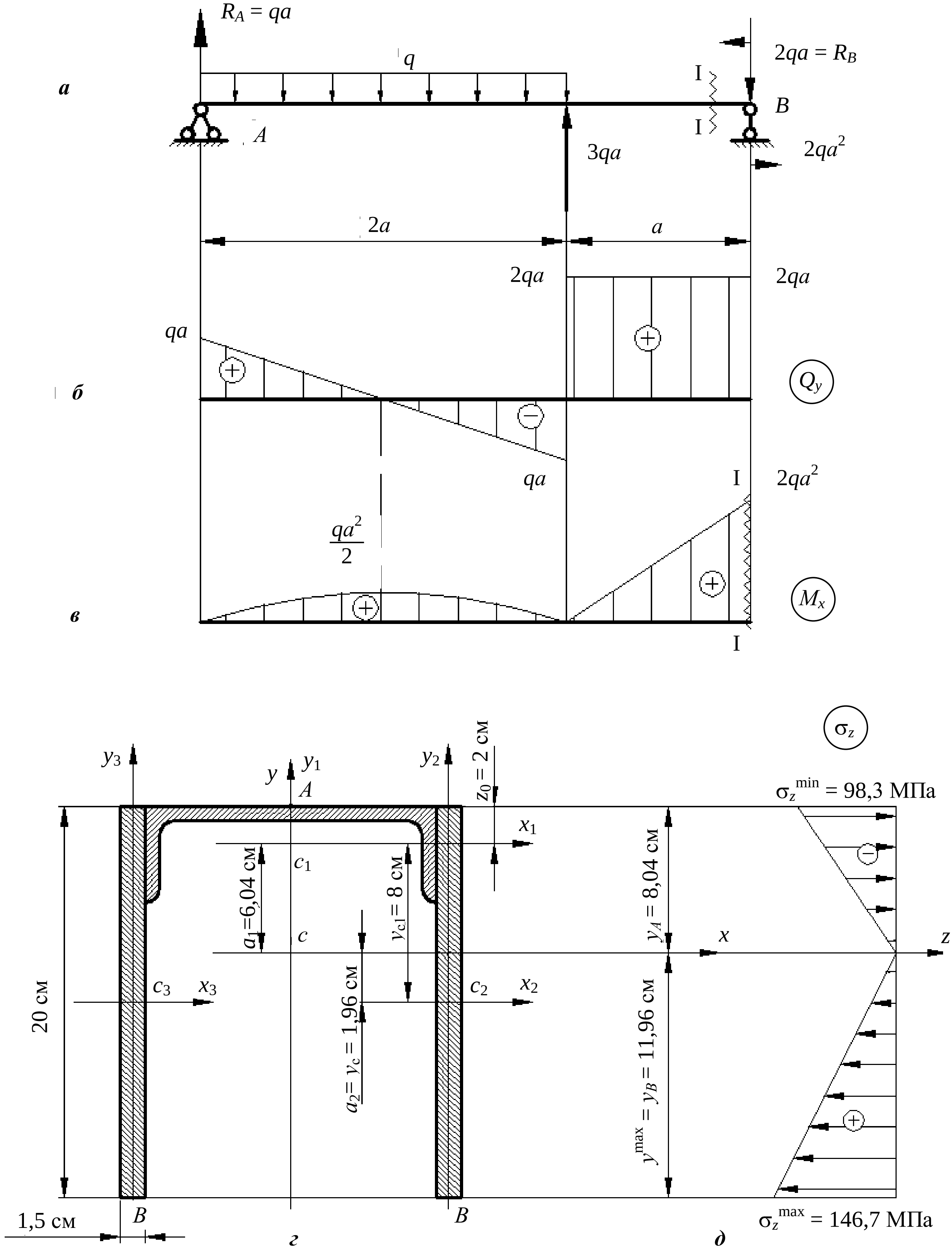


Рис. 106 (к задаче 2.4)

Задача 2.5

Для плоской рамы подобрать двутавровое сечение из условия прочности. Материал рамы – Ст.3.

Исходные данные: $q = 0{,}02\dfrac{\text{МН}}{\text{м}}$; $a = 0{,}8$ м; $\sigma_т = 220$ МПа; $n_Т = 1{,}5$.

Решение

1. По эпюре M_x (рис. 105) определяем опасное сечение рамы (сечение *I-I* или *II-II*), где $M_x = M_x^{\max} = 2qa^2 = 2 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}026$ МН·м.

2. Из условия прочности на изгиб определяем необходимый двутавр

$$\sigma = \frac{\sigma_т}{n_т} = \frac{220}{1{,}5} = 146{,}7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} \le [\sigma];$$

$$W_x \ge \frac{M_x^{\max}}{[\sigma]} = \frac{0{,}026}{146{,}7} = 177{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 177{,}2 \text{ см}^3.$$

По справочнику подбираем двутавр № 20

$M_x = 184$ см^3 (ГОСТ 8239-89).

3. Определяем $\sigma_z^{\max}$ и строим эпюру σ для сечения *I-I*

$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} = \frac{0{,}026}{184 \cdot 10^{-6}} = 141{,}3 \text{ МПа}.$$

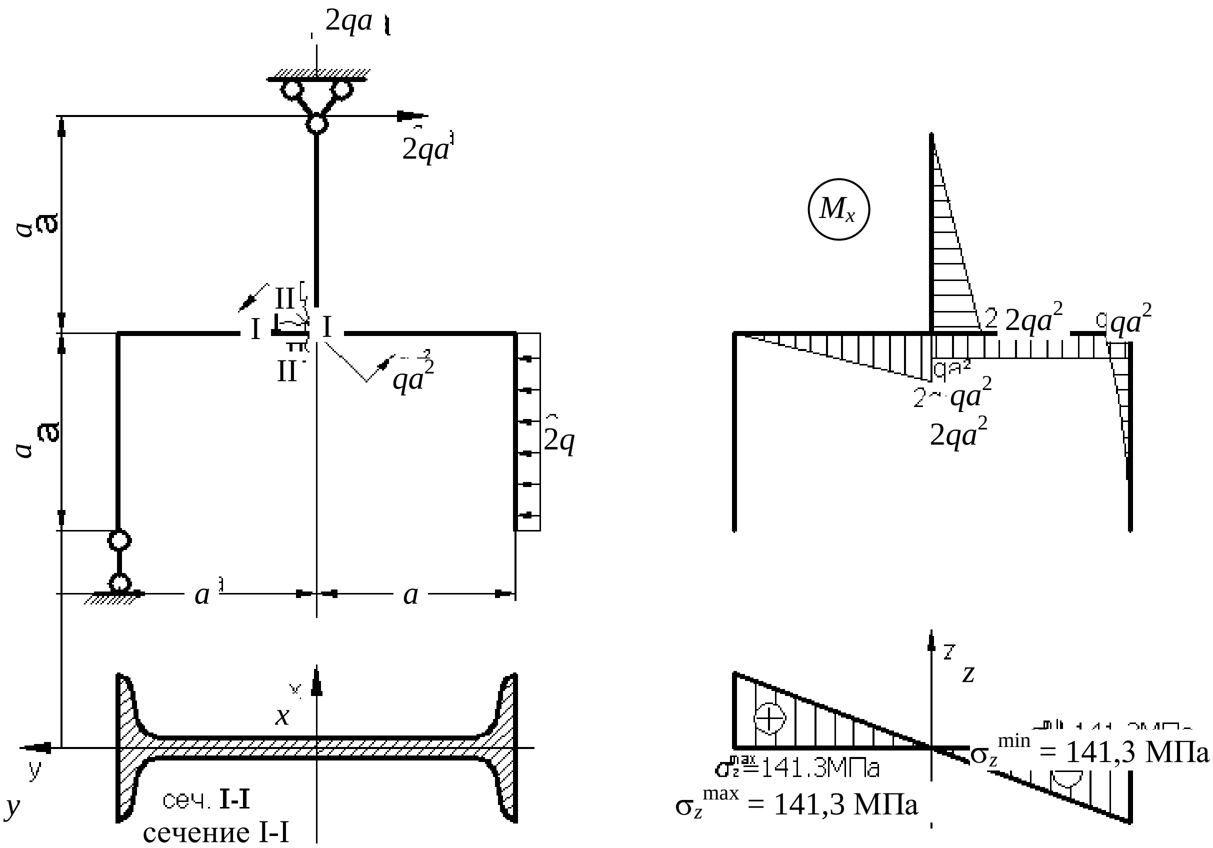


Рис. 105 (к задаче 2.5)

Задача 2.6

Для стального бруса круглого поперечного сечения определить из условия прочности допустимую нагрузку. Вычислить величину нормальных, касательных и эквивалентных напряжений в опасной точке. Материал бруса – сталь 30ХГСА.

Исходные данные: a = 1 м; $\sigma_т$ = 1400 МПа; $n_т$ = 1,5.

Решение

По эпюрам ВСФ определяем опасное сечение (где все ВСФ достигают наибольших значений) – сечение в заделке,

где N_z = – 20 P (сжаты все волокна сечения);

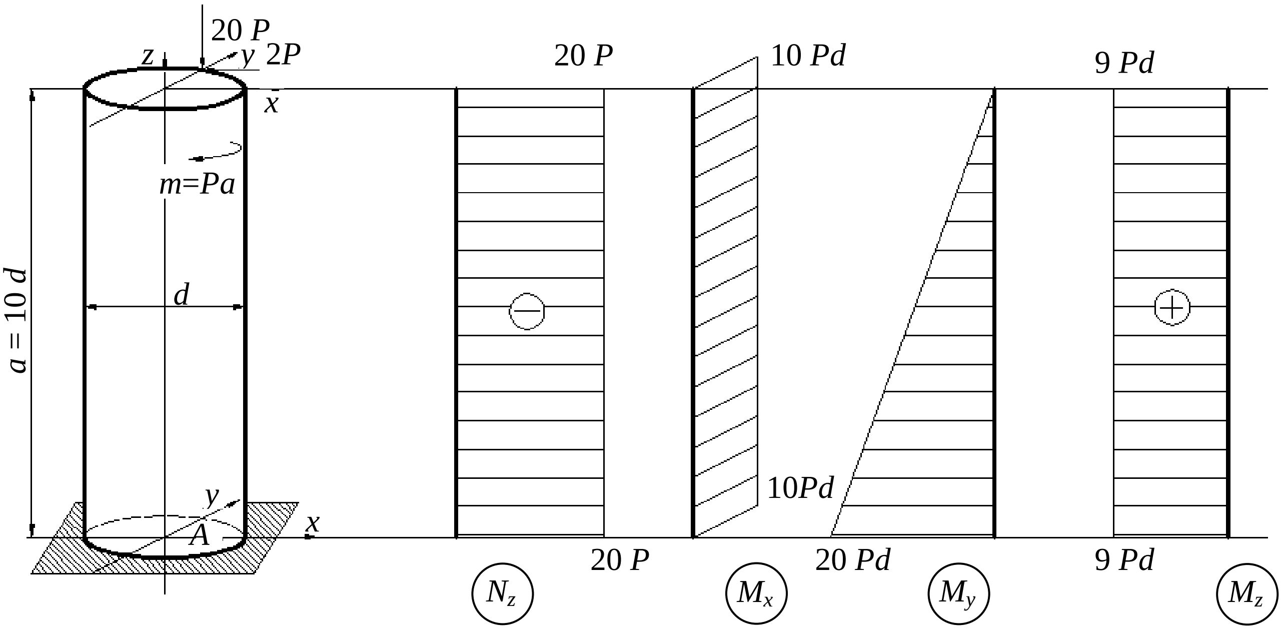
M_x = 10 Pd (сжаты задние волокна сечения);

M_y = 20 Pd (сжаты левые волокна сечения);

M_x = 9 Pd (hис. 110, *б*, *в*, *г*, *д*).

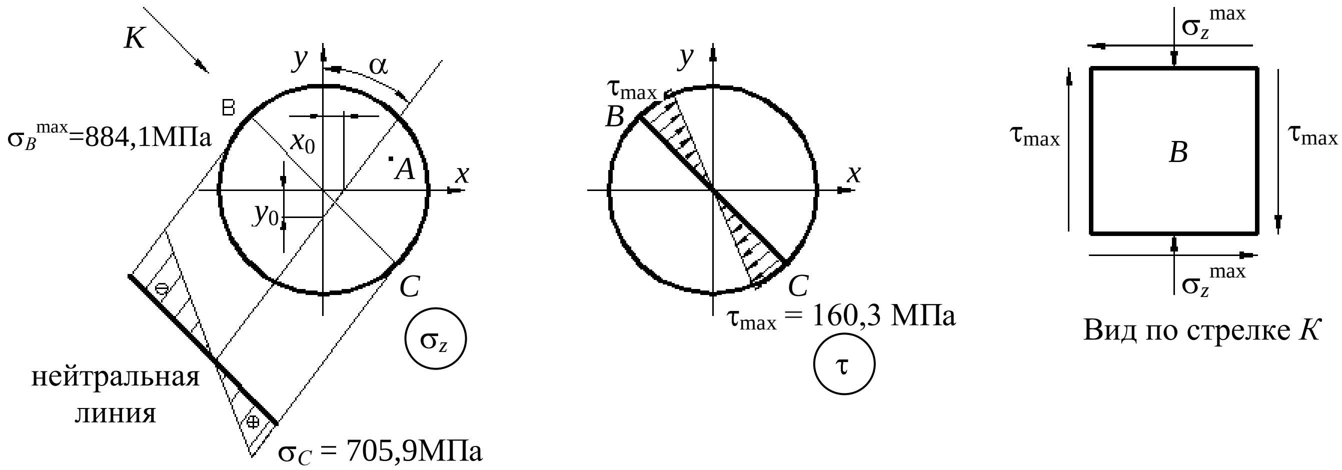
Строим эпюру нормальных напряжений в опасном сечении (рис. 107, *е*). Для этого определяем знаки напряжений по четвертям опасного сечения, составляем выражение σ_z^A для произвольной точки A в первой четверти сечения и, приравнивая его нулю, получаем уравнение нейтральной линии (рис. 108).

$$\sigma_z^A = -\frac{N_z}{A} - \frac{M_x}{I_x} y_0 + \frac{M_y}{I_y} x_0 = 0.$$



а *б* *в* *г* *д*

В



е ***ж*** ***з***

Рис. 107 (к задаче 2.6)

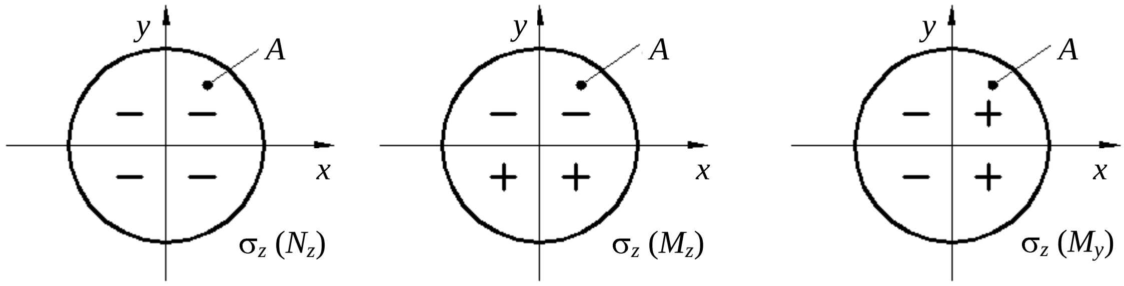


Рис. 108

Найдем координаты точек пересечения нейтральной линии с осями координат

$$y_0 = 0 \rightarrow x_0 = \frac{N_z I_y}{A M_y} = \frac{20P\dfrac{\pi d^4}{64}}{\dfrac{\pi d^2}{4}20Pd} = \frac{d}{16};$$

$$x_0 = 0 \rightarrow y_0 = -\frac{N_z I_y}{A M_y} = -\frac{20P\pi d^4 \cdot 4}{64\pi d^2 \cdot 10Pd} = -\frac{d}{8}.$$

Проводим нейтральную линию (рис. 106, *е*).

Находим координаты наиболее удаленной от нейтральной линии точки *B* и определяем нормальное напряжение в ней. Это напряжение и будет максимальным

$$\sigma_z^{max} = -\frac{N_z}{A} - \frac{M_x}{I_x} y_в + \frac{M_y}{I_y} x_в;$$

координаты точки *B*

$$\text{tg}\alpha = \left| \frac{x_0}{y_0} = \frac{d \cdot 8}{16d} = \frac{1}{2} \right| \rightarrow \alpha = 26^0 34';$$

$\sin\alpha$ = 0,45; $\cos\alpha$ = 0,89;

$$y_B = \frac{d}{2}\sin\alpha = 0{,}225d;\ \ x_B = \frac{d}{2}\cos\alpha = 0{,}445d;$$

$$\sigma_B^{\max} = -\frac{20P}{\frac{\pi d^2}{4}} - \frac{10P}{\frac{\pi d^2}{64}}0{,}225d - \frac{20Pd}{\frac{\pi d^2}{64}}0{,}445d = -252{,}6\frac{P}{d^2}.$$

Нормальное напряжение в точке C

$$\sigma_C = -\frac{20P}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{10P}{\frac{\pi d^2}{64}}0{,}225d + \frac{20Pd}{\frac{\pi d^2}{64}}0{,}445d = 201{,}1\frac{P}{d^2}.$$

Эпюра σ_z в опасном сечении показана на рис. 107, *е*.

Строим эпюру касательных напряжений τ в опасном сечении (рис. 107, *ж*)

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{9Pd}{\frac{\pi d^3}{16}} = 45{,}8\frac{P}{d^2}.$$

4. Определяем опасную точку в опасном сечении (в которой и нормальное, и касательное напряжения максимальны) – точка B.

5. Покажем напряженное состояние элемента в опасной точке B (рис. 107, *з*).

6. Из условия прочности по III гипотезе прочности находим допустимую нагрузку

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_в^2 + 4\tau_в^2} \le [\sigma];\ \ [\sigma] = \frac{\sigma_т}{n_т} = \frac{1400}{1{,}5} = 933{,}3\ \text{МПа};$$

$$\sqrt{\left(-252{,}6\frac{P}{d^2}\right)^2 + 4\left(45{,}8\frac{P}{d^2}\right)^2} \le 933{,}3;$$

$$252{,}6\frac{P}{d^2} \le 933{,}3;\ \ P \le \frac{933{,}3\cdot 0{,}1^2}{268{,}7} = 0{,}036\ \text{МН}.$$

7. Определим напряжения в точках B и C и проставим их на эпюрах (рис. 107, *е*, *ж*)

$$\sigma_B^{\max} = -252{,}6\frac{P}{d^2} = -252{,}6\frac{0{,}035}{0{,}1^2} = -884{,}1\ \text{МПа};$$

$$\sigma_C = 201{,}1\frac{P}{d^2} = 201{,}7\frac{0{,}035}{0{,}1^2} = 705{,}9\ \text{МПа};$$

$$\tau_{\max} = 45{,}8\frac{P}{d^2} = 45{,}8\frac{0{,}035}{0{,}1^2} = 160{,}3\ \text{МПа};$$

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_в^2 + 4\tau_в^2} = \sqrt{(884{,}1)^2 + 4(160{,}3)^2} = 940{,}4\ \text{МПа}.$$

Задача 2.7

Для плоско-пространственного бруса круглого поперечного сечения подобрать величину допустимой нагрузки из условия прочности. Диаметр бруса $d = a / 20$, Материал – Ст. 3.

Исходные данные: $a = 1$ м; $d = 0{,}05$ м; $P = qa$; $\sigma_т = 220$ МПа; $n_т = 1{,}5$.

Решение

1. По эпюрам M_z и M_x определяем опасное сечение – одно из 2^х сечений *I-I* или *II-II* (рис. 109, *а*).

Сечение *I-I*:

$$M_x^{\max} = 2qa^2,$$

$$M_z = -1{,}5qa^2.$$

Сечение *II-II*:

$$M_x = 1{,}5qa^2,$$

$$M_z^{\max} = -2qa^2.$$

2. Для каждого сечения строим эпюры нормальных и касательных напряжений.

Сечение *I-I* (рис. 109, *г*, *д*)

$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} = \frac{2qa^2}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{2q(20d)^2 \cdot 32}{\pi d^3} = 8148{,}7\frac{q}{d};$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{1{,}5qa^2}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{1{,}5q(20d)^2 \cdot 16}{\pi d^3} = 3055{,}8\frac{P}{d}.$$

Сечение *II-II* (рис. 109, *ж*, *з*)

$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{1{,}5qa^2}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{1{,}5q(20d)^2 \cdot 32}{\pi d^3} = 6111{,}5\frac{q}{d};$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_p} = \frac{2qa^2}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{2q(20d)^2 \cdot 16}{\pi d^3} = 4074{,}4\frac{P}{d}.$$

3. По эпюрам σ и τ определяем опасные точки в каждом сечении и изображаем напряженное состояние элементов в этих точках (рис. 109, *е*, *и*).

В сечении *I-I* опасными точками будут точки *А* и *В*, а в сечении *II-II* – точки *С* и *Д*.

4. В опасных точках определяем величину эквивалентных напряжений по III гипотезе прочности.

Сечение *I-I*

$$\sigma_{экв.A} = \sqrt{\sigma_3^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(8148{,}7\frac{q}{d}\right)^2 + 4\left(3055{,}8\frac{q}{d}\right)^2} = 10186\frac{q}{d}.$$

Сечение *II-II*

$$\sigma_{экв.C} = \sqrt{\left(6111{,}7\frac{q}{d}\right)^2 + 4\left(4074{,}4\frac{q}{d}\right)^2} = 10186\frac{q}{d}.$$

Таким образом, оба сечения равноопасны.

5. Из условия прочности определяем величину допустимой нагрузки

$$\sigma = \frac{\sigma_т}{n_т} = \frac{220}{1{,}5} = 146{,}7 \text{ МПа};$$

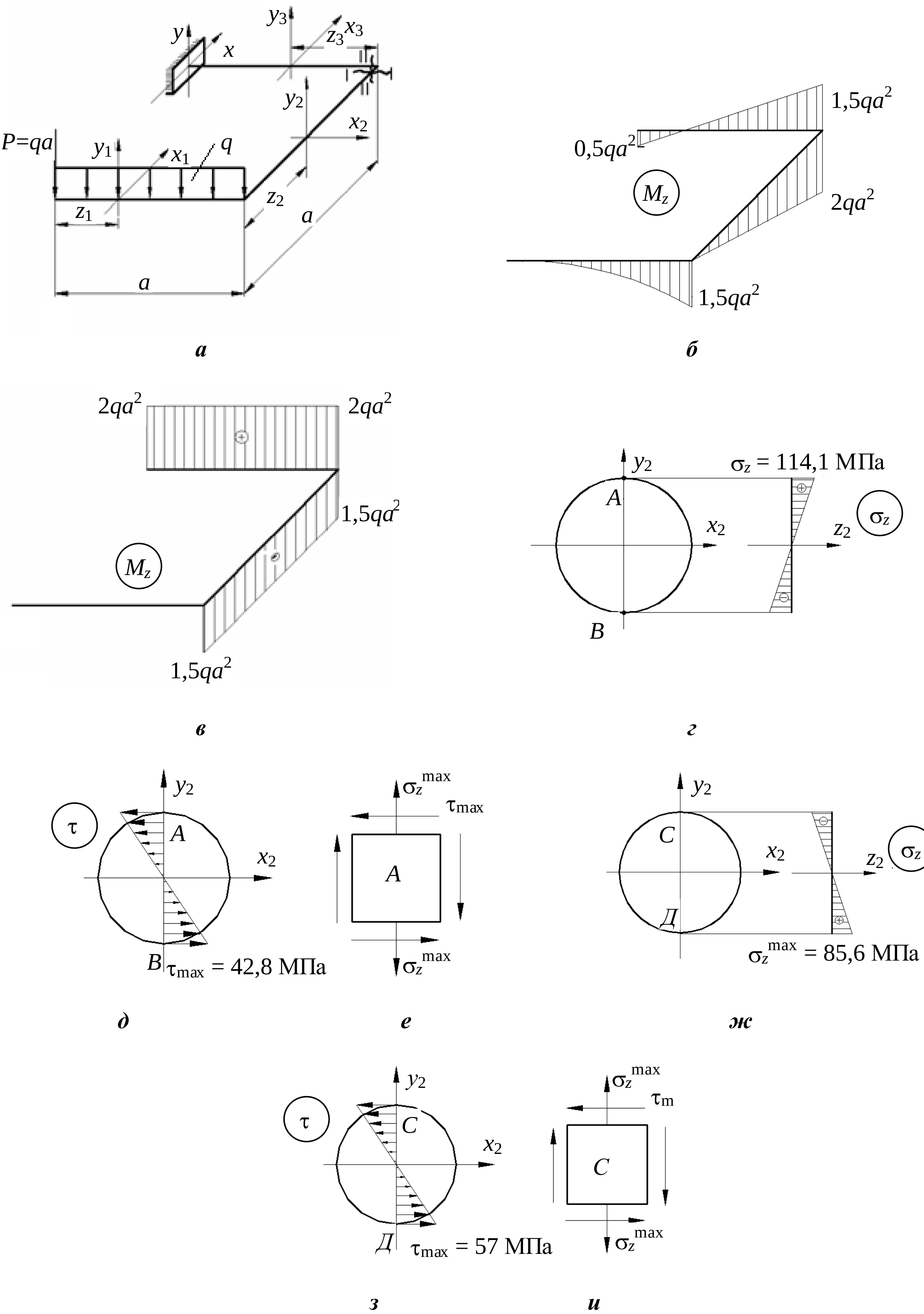
$\sigma_{экв} \leq [\sigma]$;

$10186\dfrac{q}{d} \leq 146{,}7$; $q \leq \dfrac{146{,}7 \cdot 0{,}005}{10186} = 0{,}0007\,\dfrac{\text{МН}}{\text{м}}$.

6. В опасных точках подсчитываем напряжения

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z^{max} &= 8148{,}7\frac{q}{d} = 8148{,}7\frac{0{,}007}{0{,}05} = 114{,}1\ \text{МПа};\\ \tau_{max} &= 3055{,}8\frac{q}{d} = 3055{,}8\frac{0{,}007}{0{,}05} = 42{,}8\ \text{МПа}; \end{aligned}\right\}$$ сечение *I-I* (рис. 109, *г*, *д*);

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z^{max} &= 6111{,}5\frac{q}{d} = 6111{,}5\frac{0{,}007}{0{,}05} = 85{,}6\ \text{МПа};\\ \tau_{max} &= 4074{,}4\frac{q}{d} = 4074{,}4\frac{0{,}007}{0{,}05} = 57{,}0\ \text{МПа}; \end{aligned}\right\}$$ сечение *II-II* (рис. 109, *ж*, *з*).



P=qa
y
x
y3
z3
x3
y2
x2
y1
x1
q
z1
z2
a
a
а
1,5qa2
0,5qa2
Mz
2qa2
1,5qa2
б
2qa2
2qa2
1,5qa2
Mz
1,5qa2
в
y2
σz = 114,1 МПа
A
x2
z2
σz
B
г
y2
τ
A
x2
B
τmax = 42,8 МПа
д
σz max
τmax
A
σz max
е
y2
C
x2
z2
σz
Д
σz max = 85,6 МПа
ж
y2
τ
C
x2
Д
τmax = 57 МПа
з
σz max
τm
C
σz max
и

Рис. 109

Задача 2.8

В опасной точке конструкции, выполненной из дюраля, установлены три тензорезистора под углом π / 4 (рис. 110, *а*). По отсчетам, снятым с помощью тензостанции с ценой деления $n = 10^{-6}$:

а) найти величину нормальных и касательных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках и показать напряженное состояние исходной частицы материала в опасной точке;

б) определить положение главных площадок и величину главных нормальных напряжений, показать напряженное состояние частицы материала, вырезанной главными площадками;

в) определить, как далека конструкция от опасного состояния (т.е. вычислить коэффициент запаса прочности).

Исходные данные:

$\Delta_z = 1000$; $\Delta_y = -800$; $\Delta_\alpha = 600$; $E = 0{,}75 \cdot 10^5$ МПа;

$G = 2{,}8 \cdot 10^4$ МПа; $\mu = 0{,}33$; $\sigma_T = 340$ МПа.

Решение

1. Определим относительную линейную деформацию

$\varepsilon_z = \Delta_z\, n = 1000 \cdot 10^{-6} = 10^{-3}$;

$\varepsilon_y = \Delta_y\, n = -800 \cdot 10^{-6} = -0{,}8 \cdot 10^{-3}$;

$\varepsilon_\alpha = \Delta_\alpha\, n = 600 \cdot 10^{-6} = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$.

2. Определим угловую деформацию в данной точке

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_z \cos^2\alpha + \varepsilon_y \sin^2\alpha - \frac{1}{2}\gamma_{zy}\sin 2\alpha;$$

при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ $\quad \gamma_{zy} = \varepsilon_z + \varepsilon_y - 2\,\varepsilon_\alpha = 10^{-3} - 0{,}8 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-3} = -10^{-3}$.

3. Определим напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках (рис. 110, *б*)

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_z + \mu\varepsilon_y\right) = \frac{0{,}75\cdot 10^5}{1-0{,}33^2}\left(10^{-3} - 0{,}33\cdot 0{,}8\cdot 10^{-3}\right) = 62\ \text{МПа};$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_z\right) = \frac{0{,}75\cdot 10^5}{1-0{,}33^2}\left(-0{,}8\cdot 10^{-3} + 0{,}33\cdot 10^{-3}\right) = -39{,}6\ \text{МПа};$$

$$\tau_{zy} = G\gamma_{zy} = 2{,}8\cdot 10^4 \cdot \left(-10^{-3}\right) = -28\ \text{МПа}.$$

4. Найдем величину главных нормальных напряжений и положение главных площадок

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{62 - 39{,}6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{62 + 39{,}6}{2}\right)^2 + \left(-28\right)^2} = 11{,}2 \pm 58{,}0;$$

$\sigma_1 = 69{,}2$ МПа; $\sigma_3 = -46{,}8$ МПа;

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y} = \frac{-2 \cdot -26}{62 + 39,6} = 0,55;$$

$2\alpha_0 = 28°48'$; $\alpha_0 = 14°24'$.

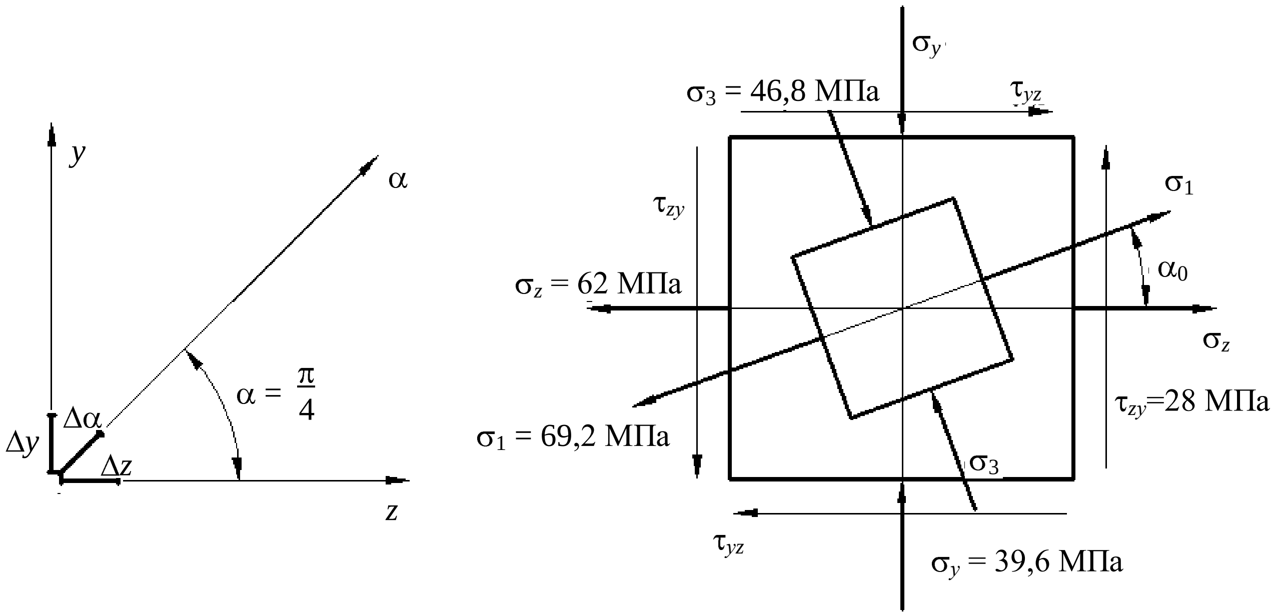
Положительный угол откладываем против хода часовой стрелки, под углом α_0 к направлению σ_z (так как $\sigma_z > \sigma_y$) проходит главное нормальное напряжение σ_1.

5. По III гипотезе прочности подсчитываем величину эквивалентных напряжений в данной точке

$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = 69,2 + 46,8 = 116$ МПа.

6. Определим коэффициент запаса прочности конструкции

$$n_т = \frac{\sigma_т}{\sigma_{экв}} = \frac{340}{116} = 2,93.$$



а *б*

Рис. 110