

и введем эти значения в уравнение (5.3.2)

$$\sigma_T F_1 a \cos 45^\circ + \sigma_T 2F_2 (a + b) - P (a + b + c) = 0. \quad (5.3.3)$$

Так как $[P_p] = P_{раз}/n$, найдем из уравнения (5.3.3)

$$P_p = \frac{\sigma_T F_1 a \cos 45^\circ + \sigma_T 2F_2 (a + b)}{(a + b + c)n} = \frac{240 \cdot 500 \cdot 1000 \cdot 0,71 + 240 \cdot 1000 \cdot 2500}{4500} = 133333 \text{ Н.}$$

Отношение допустимой нагрузки, определенной по методу разрушающих нагрузок, к допустимой нагрузке, найденной по допустимым напряжениям, показывает, что метод расчета по разрушающим нагрузкам более эффективен, так как $\frac{[P_p]}{P} = \frac{133333}{61540} = 2,2$.

Несущая способность системы, рассчитанной по этому методу, в 2,2 раза больше, чем несущая способность этой же системы, рассчитанной по допустимым напряжениям.

Одним коэффициентом запаса трудно учесть многочисленные факторы, которые для различных сооружений могут проявляться в различных сочетаниях.

С целью более гибкого учета различных факторов используется метод расчета по предельным состояниям.

Предельным состоянием называется такое состояние конструкции, при котором она перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям.

Различают три вида предельных состояний. Первое наступает тогда, когда исчерпывается несущая способность конструкции. При втором появляются затруднения в эксплуатации конструкции вследствие больших деформаций. При третьем предельном состоянии возникают чрезмерные местные деформации (например, возникновение трещины).

Проверка прочности по предельному состоянию производится по формуле

$$\frac{N}{F} \leq R, \quad (5.3.4)$$

где N — расчетное усилие, возникающее в элементе конструкции;
 F — геометрическая характеристика сечения;
 R — расчетное сопротивление материала.

$$R = R_{нкм}, \quad (5.3.5)$$

где $R_{нкм}$ — нормативное сопротивление материала (предел текучести σ_T или предел прочности σ_B);
 $k < 1$ — коэффициент однородности материала, например, для

стали $k = 0,9 \div 0,85$; для бетона $k = 0,6$; для дерева $k = 0,3 \div 0,9$;

$m < 1$ — коэффициент условия работы, учитывающий возможные отклонения от проектных размеров; $m = 0,9 \div 1,0$.

Глава 6

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

6.1. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

На рис. 6.1.1 показано тело, находящееся в состоянии равновесия. Под действием внешних сил P_1, P_2, \dots, P_n между частями тела возникают внутренние силы взаимодействия. Для исследования этих сил в сечении ab тела возьмем точку A элементарного параллелепипеда. Если размеры параллелепипеда уменьшать, то он стянется в точку. Совокупность напряжений, возникающих во множестве площадок, проходящих через рассматриваемую точку, называется *напряженным состоянием в точке*. При рассмотрении напряженного состояния в точке предполагаем, что тело, на которое действуют внешние силы, однородно, т. е. используем гипотезу о сплошности среды.

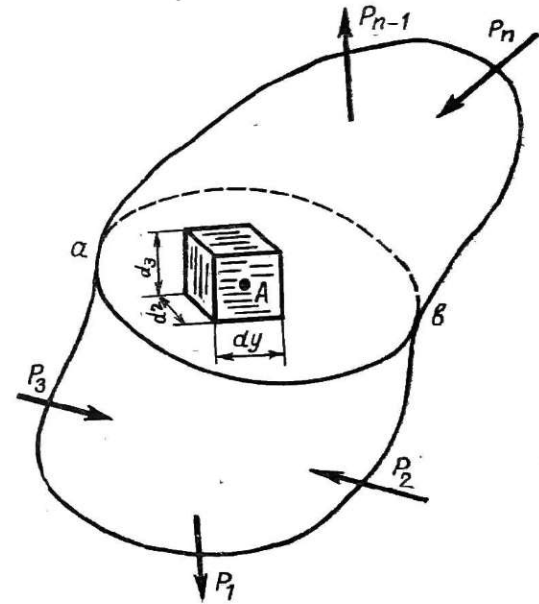


Рис. 6.1.1.

Полное напряжение, возникающее на каждой грани элементарного параллелепипеда со сторонами dx, dy, dz , может быть разложено на три составляющие: одну по нормали к площадке и две по плоскости сечения. Нормальное напряжение обозначается через σ с индексом, соответствующим осям x, y и z (рис. 6.1.2). Касательное напряжение обозначается буквой τ с дву-

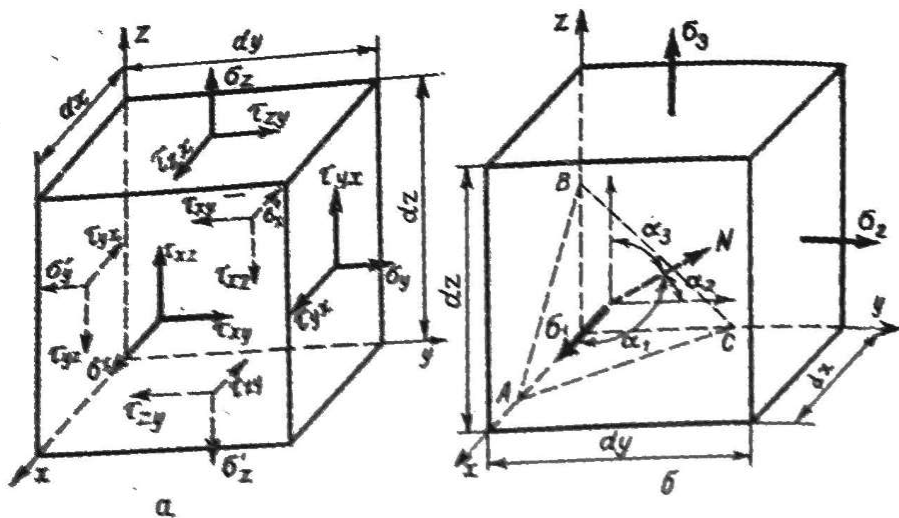


Рис. 6.1.2.

мя индексами: первый соответствует оси, перпендикулярной к площадке, а второй — оси, вдоль которой направлен вектор τ . Ориентация самих осей — произвольная.

Нормальные растягивающие напряжения σ считаются положительными, сжимающие — отрицательными.

Напряжения, возникающие на гранях элемента ($dx, dz; dy, dz; dx, dy$), показаны на рис. 6.1.2. Элемент будет находиться в состоянии равновесия в результате равенства сил, действующих по его граням, и моментов, создаваемых силами относительно осей x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x dydz &= \sigma'_x dydz \\ \sigma_y dx dz &= \sigma'_y dx dz \\ \sigma_z dx dy &= \sigma'_z dx dy \end{aligned} \right\}; \quad (6.1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} dydz dx &= \tau_{yx} dx dz dy \\ \tau_{xz} dydz dx &= \tau_{zx} dx dy dz \\ \tau_{yz} dx dz dy &= \tau_{zy} dx dy dz \end{aligned} \right\}. \quad (6.1.2)$$

На основании (6.1.2)

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (6.1.3)$$

Таким образом, на двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения, перпендикулярные к общему ребру, равны и направлены оба к ребру или от ребра.

Уравнения (6.1.3) отражают очень важный закон, носящий название *закона парности касательных напряжений*.

Закон парности касательных напряжений справедлив для всех точек нагруженного тела, независимо от вида приложенных нагрузок и свойств материала. Следствием этого закона является то, что на гранях выделенного элемента (рис. 6.1.2) имеем не девять, а только шесть независимых компонентов напряжений, поскольку касательные напряжения равны попарно.

Рассматриваемый элемент (рис. 6.1.2) ориентирован в пространстве произвольно. Если его мысленно разворачивать относительно осей x, y, z , то он может занять в какой-то момент положение, когда по его граням будут действовать только нормальные напряжения σ_x, σ_y и σ_z . Нормальные напряжения, соответствующие этому положению элемента, принято называть *главными напряжениями* (рис. 6.1.2, б). Эти напряжения обозначаются $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, т. е. наибольшему алгебраическому значению напряжения соответствует первый индекс и т. д. Например, $\sigma_1 = 80$ МПа; $\sigma_2 = 30$ МПа; $\sigma_3 = -50$ МПа. Площадки или грани элемента, по которым не действуют касательные напряжения, называются *главными площадками*.

Расположим все напряжения, определяющие напряженное состояние в рассматриваемой точке, в виде следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (6.1.4)$$

В первом столбце расположены все компоненты напряжений, имеющие направления, параллельные оси x , во втором — параллельные оси y и в третьем столбце — параллельные оси z . Нормальные напряжения при таком способе построения расположены по главной диагонали, а одинаковые по величине касательные напряжения расположены симметрично относительно этой диагонали.

Эту матрицу (6.1.4) принято называть *тензором напряжений*.

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (6.1.5)$$

6.2. ЛИНЕЙНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

При действии на стержень только растягивающих или сжимающих усилий наблюдается линейное напряженное состояние.

Согласно гипотезе Бернулли в поперечных сечениях при таком нагружении действуют только нормальные напряжения σ .

Рассмотрим, какие напряжения действуют по наклонным и продольным сечениям и как они изменяются в зависимости от угла наклона сечения.

Предположим, что на стержень действуют растягивающие нагрузки. Рассечем этот стержень сечением АВ под произвольным углом α к поперечному сечению и, используя метод сечений, отбросим верхнюю часть стержня. Действие отброшенной части заменим действием внутренних упругих сил, распределенных по сечению равномерно (рис. 6.2.1, а, б). Площадь поперечного сечения АВ₁

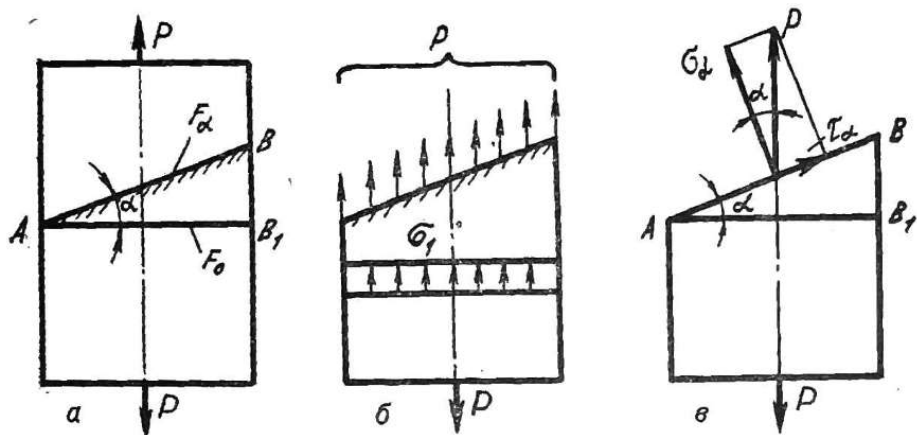


Рис. 6.2.1.

обозначим через F_0 , а наклонного сечения АВ — через F_α . В любом поперечном сечении стержня при таком нагружении, как говорилось выше, в каждой его точке будет возникать напряжение $\sigma_1 = P/F_0$. По наклонному сечению АВ в каждой точке также будет возникать напряжение p . Если предположить, что равнодействующая внутренних упругих сил сосредоточена в центре наклонного сечения, то напряжение, действующее по сечению, найдется как

$$p = P/F_\alpha. \quad (6.2.1)$$

Разложим это напряжение на два составляющих: нормальное σ_α и касательное τ_α :

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha; \quad \tau_\alpha = p \sin \alpha. \quad (6.2.2)$$

Но так как $F_0/F_\alpha = \cos \alpha$, а $p = P/F_\alpha = P/F_0 \cos \alpha$, то

$$\sigma_\alpha = P/F_0 \cos^2 \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = P/F_0 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sigma_1/2 \sin 2\alpha.$$

Таким образом, окончательно нормальное и касательное напряжения, действующие по наклонному сечению, будут определяться по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \quad (6.2.3)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.2.4)$$

Если принять $\alpha = 0$; $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$, то можно проследить, как меняются напряжения при повороте рассматриваемого сечения.

$$\alpha = 0; \quad \sigma_\alpha = \sigma_1;$$

$$\tau_\alpha = 0;$$

$$\alpha = 45^\circ; \quad \sigma_\alpha = \sigma_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\sigma_1}{2}; \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2};$$

$$\alpha = 90^\circ; \quad \sigma_\alpha = 0;$$

$$\tau_\alpha = 0.$$

Из анализа видно, что нормальные напряжения достигают максимального значения в поперечных сечениях ($\alpha = 0^\circ$), а касательные — в сечениях, расположенных под углом 45° к продольной оси. Они и являются причиной текучести материала при растяжении или сжатии.

Нами установлено, что в продольных сечениях ($\alpha = 90^\circ$) не действуют нормальные напряжения, поэтому при линейном напряженном состоянии $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$. В заключение условимся, что угол, откладываемый против часовой стрелки, будет положительным, а по часовой — отрицательным. Касательные напряжения будем считать положительными, если нормаль к сечению, повернутая на 90° против часовой стрелки, будет совпадать с направлением касательного напряжения. На рис. 6.2.1, в касательное напряжение отрицательно.

6.3. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Если мысленно вырезать из нагруженного внешними силами тела элемент в виде параллелепипеда, по граням которого будут действовать только два главных напряжения σ_1 и σ_2 , а $\sigma_3 = 0$, то будем иметь случай плоского напряженного состояния.

На рис. 6.3.1 представлен элемент (пластинка), на грани которого действуют растягивающие напряжения σ_1 и σ_2 , а $\sigma_3 = 0$, т. е. фасадная грань не нагружена. Рассечем этот элемент сечением АВ. По нормали к этому сечению будет действовать напряжение σ_α , а

Рассмотрим, какие напряжения действуют по наклонным и продольным сечениям и как они изменяются в зависимости от угла наклона сечения.

Предположим, что на стержень действуют растягивающие нагрузки. Разложим это напряжение на два составляющих: нормальное σ_α и касательное τ_α :

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha; \quad \tau_\alpha = p \sin \alpha. \quad (6.2.2)$$

Но так как $F_0/F_\alpha = \cos \alpha$, а $p = P/F_\alpha = P/F_0 \cos \alpha$, то

$$\sigma_\alpha = P/F_0 \cos^2 \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = P/F_0 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sigma_1/2 \sin 2\alpha.$$

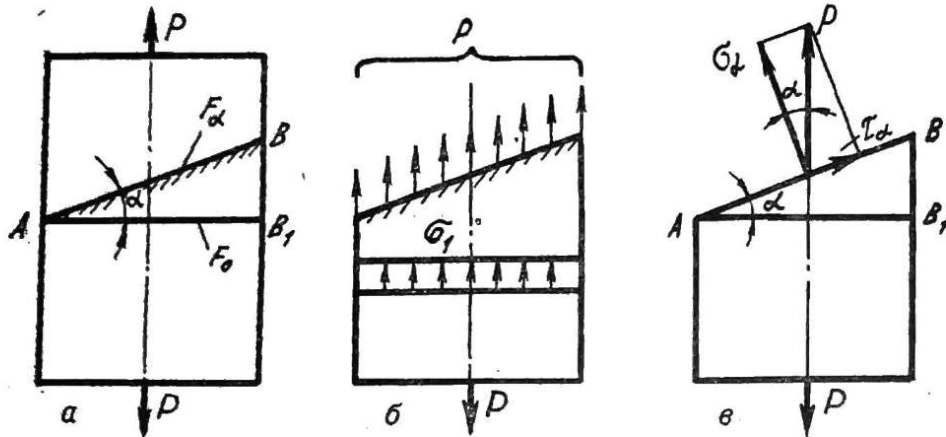


Рис. 6.2.1.

обозначим через F_0 , а наклонного сечения АВ — через F_α . В любом поперечном сечении стержня при таком нагружении, как говорилось выше, в каждой его точке будет возникать напряжение $\sigma_1 = P/F_0$. По наклонному сечению АВ в каждой точке также будет возникать напряжение p . Если предположить, что равнодействующая внутренних упругих сил сосредоточена в центре наклонного сечения, то напряжение, действующее по сечению, найдется как

$$p = P/F_\alpha. \quad (6.2.1)$$

Разложим это напряжение на два составляющих: нормальное σ_α и касательное τ_α :

Таким образом, окончательно нормальное и касательное напряжения, действующие по наклонному сечению, будут определяться по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \quad (6.2.3)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.2.4)$$

Если принять $\alpha = 0$; $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$, то можно проследить, как меняются напряжения при повороте рассматриваемого сечения.

$$\alpha = 0; \quad \sigma_\alpha = \sigma_1;$$

$$\tau_\alpha = 0;$$

$$\alpha = 45^\circ; \quad \sigma_\alpha = \sigma_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\sigma_1}{2}; \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2};$$

$$\alpha = 90^\circ; \quad \sigma_\alpha = 0;$$

$$\tau_\alpha = 0.$$

Из анализа видно, что нормальные напряжения достигают максимального значения в поперечных сечениях ($\alpha = 0^\circ$), а касательные — в сечениях, расположенных под углом 45° к продольной оси. Они и являются причиной текучести материала при растяжении или сжатии.

Нами установлено, что в продольных сечениях ($\alpha = 90^\circ$) не действуют нормальные напряжения, поэтому при линейном напряженном состоянии $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$. В заключение условимся, что угол, откладываемый против часовой стрелки, будет положительным, а по часовой — отрицательным. Касательные напряжения будем считать положительными, если нормаль к сечению, повернутая на 90° против часовой стрелки, будет совпадать с направлением касательного напряжения. На рис. 6.2.1, в касательное напряжение отрицательно.

6.3. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Если мысленно вырезать из нагруженного внешними силами тела элемент в виде параллелепипеда, по граням которого будут действовать только два главных напряжения σ_1 и σ_2 , а $\sigma_3 = 0$, то будем иметь случай плоского напряженного состояния.

На рис. 6.3.1 представлен элемент (пластинка), на грани которого действуют растягивающие напряжения σ_1 и σ_2 , а $\sigma_3 = 0$, т. е. фасадная грань не нагружена. Разложим этот элемент сечением АВ. По нормали к этому сечению будет действовать напряжение σ_α , а

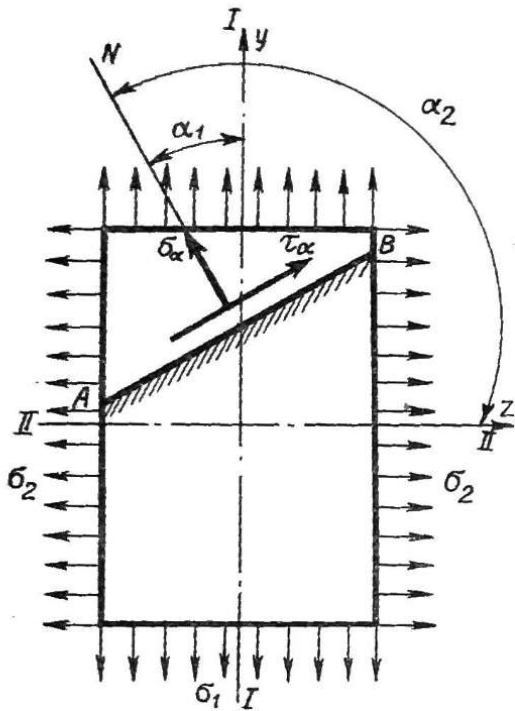


Рис. 6.3.1.

по касательной — τ_α , вызванное действием главных напряжений σ_1 и σ_2 .

Если считать заданными σ_1 , σ_2 и углы α_1 , α_2 , определяющие положение сечения АВ по отношению к осям у (направление σ_1) и z (направление σ_2), то напряжения σ_α и τ_α , действующие по площадке АВ, найдутся как

$$\sigma_\alpha = \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha;$$

$$\tau_\alpha = \tau'_\alpha + \tau''_\alpha,$$

где σ'_α и σ''_α — нормальные напряжения на площадке АВ, вызванные соответственно главными напряжениями σ_1 и σ_2 ; τ'_α и τ''_α — касательные напряжения, возникающие на площадке АВ, вызванные действием на элемент напряжений σ_1 и σ_2 .

Так как $\sigma'_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1$, а $\sigma''_\alpha = \sigma_2 \cos^2 \alpha_2$,

$$\sigma_\alpha = \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 +$$

$$+ \sigma_2 \cos^2 (90^\circ + \alpha_1) = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1,$$

или, принимая $\alpha_1 = \alpha$, имеем

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha. \quad (6.3.1)$$

Касательные напряжения найдутся аналогично:

$$\tau'_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha_1;$$

$$\tau''_\alpha = \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha_1 + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha_2 = \frac{1}{2} [\sigma_1 \sin 2\alpha_1 + \sigma_2 \sin 2(\alpha + 90^\circ)] = \\ &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Окончательное выражение для определения касательных напряжений, действующих на произвольно выбранной площадке АВ, будет следующим:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.3.2)$$

Анализируя выражения (6.3.1) и (6.3.2), видим, что $\sigma_{\alpha \max} = \sigma_1$ при $\alpha = 0$ или $\alpha = 90^\circ$, а $\tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, т. е. при $\alpha = 45^\circ$.

6.4. ОБЪЕМНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Объемное напряженное состояние — это общий случай нагружения тела, встречающийся в практике реже, чем два ранее рассмотренных. Если рассматривать элемент в виде параллелепипеда, размеры граней которого dx , dy и dz , и предполагать, что по граням действуют напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 , то напряжения σ_α и τ_α , действующие по наклонной площадке АВС, могут быть описаны выражениями (рис. 6.1.2, б):

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3, \quad (6.4.1)$$

а

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}, \quad (6.4.2)$$

где α_1 , α_2 и α_3 — углы между нормалью N к площадке АВС и направлением главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 .

Если рассматривается площадка, равнонаклонная к трем главным напряжениям ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$), то напряжения, действующие по ней, находятся из выражений:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \quad (6.4.3)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3} \quad (6.4.4)$$

и называются октаэдрическими напряжениями.

Напряжения на площадках, параллельных одному из главных напряжений, определяются без учета этого напряжения, как при плоском напряженном состоянии.

6.5. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

При исследовании деформаций в случае объемного напряженного состояния предполагаем, что материал подчиняется закону Гука и что деформации малы.

Рассмотрим элемент, размеры граней которого равны $a \times b \times c$, и по этим граням действуют главные напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 (рис. 6.5.1).

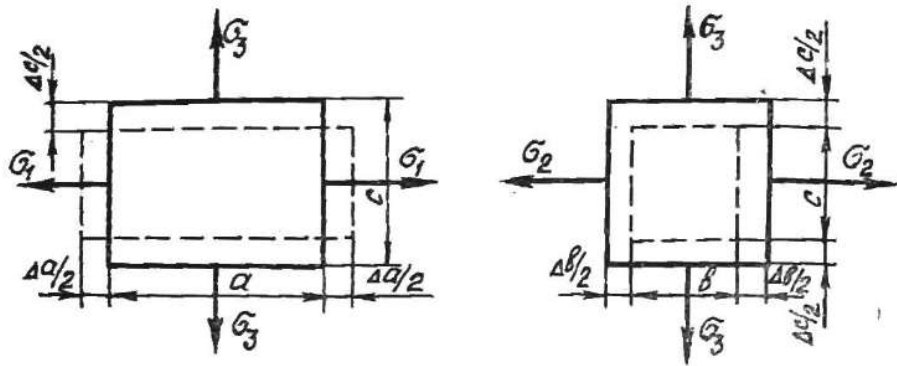


Рис. 6.5.1.

Все напряжения для простоты рассуждений считаем положительными. Вследствие деформации ребра элемента изменяют свою длину и становятся равными $a + \Delta a$; $b + \Delta b$; $c + \Delta c$.

Отношения приращений длин ребер элементов к первоначальной их длине дадут главные относительные удлинения в главных направлениях:

$$\varepsilon_1 = \Delta a/a; \quad \varepsilon_2 = \Delta b/b; \quad \varepsilon_3 = \Delta c/c.$$

Под действием напряжения σ_1 ребро длиной a получит относительное удлинение $\varepsilon_1' = \sigma_1/E$.

Напряжения σ_2 и σ_3 действуют поперек ребра a , поэтому они будут препятствовать его удлинению. Следовательно, деформации, вызываемые действием напряжений σ_2 и σ_3 в направлении ребра a , будут равны:

$$\varepsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Полная относительная деформация элемента $a \times b \times c$ в направлении ребра a выразится как сумма

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Аналогичные рассуждения позволяют найти полные относительные деформации в направлении ребер b и c , следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} \end{aligned} \right\} \quad (6.5.1)$$

Эти три формулы носят название *обобщенного закона Гука*. Что же происходит с объемом элемента при таком его нагружении? До деформации элемент имел объем $V_0 = abc$. В деформированном состоянии его объем

$$V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = abc + ac\Delta b + ac\Delta b + a\Delta b\Delta c + bc\Delta a + b\Delta a\Delta c + c\Delta a\Delta b + \Delta a\Delta b\Delta c.$$

Если освободиться от величин второго и третьего порядка малости, то объем

$$V = abc + ab\Delta c + ac\Delta b + bc\Delta a = abc(1 + \Delta a/a + \Delta b/b + \Delta c/c) = V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Найдем относительное изменение объема:

$$\theta = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{V_0 + V_0\varepsilon_1 + V_0\varepsilon_2 + V_0\varepsilon_3 - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (6.5.2)$$

Из этого выражения видно, что объем элемента в результате внешнего воздействия изменяется.

Подставляя в формулу (6.5.2) значения ε_1 , ε_2 и ε_3 из выражения (6.5.1), получаем

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} + \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} + \frac{\sigma_3}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_1(1 - 2\mu) + \sigma_2(1 - 2\mu) - \sigma_3(1 - 2\mu)] = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \end{aligned}$$

Если предположить, что $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, то

$$\theta = 1 - 2\mu/E \cdot 3\sigma. \quad (6.5.3)$$

Величину $\frac{E}{3(1 - 2\mu)}$ принято называть *модулем объемной деформации*, следовательно, относительное изменение объема, выраженное через K , можно представить как

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3K}. \quad (6.5.4)$$

Из формулы (6.5.4) видно, что изменение объема элемента зависит только от суммы главных напряжений, а не от их соотношения. Таким образом, будут ли по его граням действовать различные по величине главные напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 или одинаковые $\sigma_n = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, изменения объема будут одни и те же.

При действии одинаковых напряжений деформация ребер элемента найдется как

$$\epsilon_n = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3K \cdot 3} = \frac{\sigma_n}{3K}. \quad (6.5.5)$$

6.6. ЧИСТЫЙ СДВИГ. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ МОДУЛЯМИ УПРУГОСТИ ПЕРВОГО E И ВТОРОГО G РОДА

Прямоугольный параллелепипед, на грани которого действуют касательные напряжения, деформируется. Первоначально прямые углы между гранями искажаются, как показано на рис. 6.6.1.

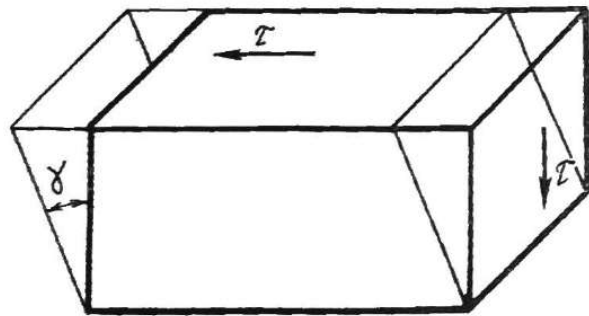


Рис. 6.6.1.

$$\tau = G\gamma. \quad (6.6.1)$$

Формула (6.6.1) носит название закона Гука при сдвиге. Величина G , имеющая размерность напряжения, называется модулем сдвига, или модулем упругости второго рода.

В твердом теле можно создать такое напряженное состояние, когда на поверхностях элементов, определенным образом вырезанных из тела, будут действовать только одни касательные напряжения. Напряженное состояние прямоугольного параллелепипеда, на четырех гранях которого действуют только касательные напряжения, называется *чистым сдвигом*.

Предположим, что на элемент бруса одновременно действуют растягивающие и сжимающие усилия во взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 6.6.2). Напряжения растяжения и сжатия,

вызываемые этими усилиями, равны друг другу, т. е. $\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma$, $\sigma_2 = 0$. На площадках элемента, расположенных под углами 45° и 135° , касательные напряжения будут равны:

$$\tau_{\alpha \max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2} (\sigma + \sigma) = \sigma.$$

Нормальные напряжения по площадкам ab , bc , cd и da действовать не будут, так как при $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 135^\circ$ имеем

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 45^\circ + \sigma_3 \sin^2 45^\circ =$$

$$1/2 \sigma_1 + 1/2 \sigma_3 = \sigma/2 - \sigma/2 = 0;$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 135^\circ + \sigma_3 \sin^2 135^\circ =$$

$$1/2 \sigma_1 + 1/2 \sigma_3 = \sigma/2 - \sigma/2 = 0.$$

Таким образом, грани элемента $abcd$ испытывают только касательные напряжения, т. е. элемент находится в состоянии чистого сдвига.

Под действием напряжений σ_1 и σ_3 точки элемента $abcd$ займут новое положение $a_1b_1c_1$ и d_1 , элемент из квадрата превратится в ромб. Угол при вершине b , который до деформации равнялся $\frac{\pi}{2}$, станет меньше и будет равен $\frac{\pi}{2} - \gamma$, т. е. произойдет сдвиг на величину γ .

Рассмотрим треугольник Ob_1c_1 деформируемого элемента.

До деформации отрезки ob и oc были равны. После приложения нагрузки

$$ob_1 = ob(1 + \epsilon_1), \quad a \quad oc_1 = oc(1 + \epsilon_3).$$

Согласно обобщенному закону Гука (6.8.1) при $\sigma_2 = 0$ и при $\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma = \tau$

$$\epsilon_1 = 1/E(\sigma_1 - \mu\sigma_3) = 1/E(\sigma + \mu\sigma) = \tau/E(1 + \mu),$$

$$\epsilon_3 = 1/E(\sigma_3 - \mu\sigma_1) = 1/E(-\sigma - \mu\sigma) = -\tau/E(1 + \mu).$$

Следовательно,

$$ob_1 = ob[1 + \tau/E(1 + \mu)];$$

$$oc_1 = oc[1 - \tau/E(1 + \mu)].$$

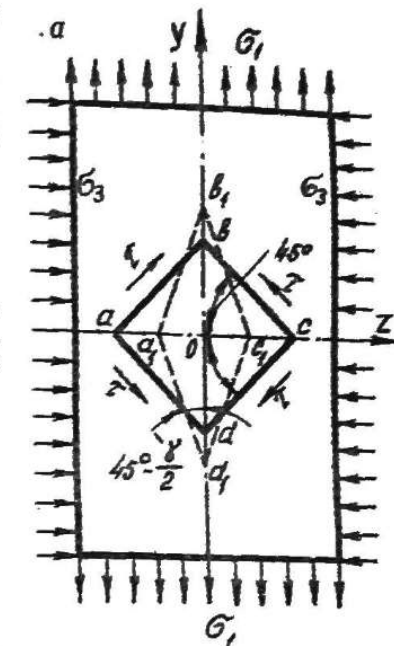


Рис. 6.6.2.

Отношение отрезков oc_1 к ob_1 даст $\operatorname{tg}(45^\circ - \gamma/2)$, т. е.

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \gamma/2) = \frac{oc_1}{ob_1} = \frac{1 - \tau/E(1 + \mu)}{1 + \tau/E(1 + \mu)}. \quad (a)$$

Так как относительный сдвиг γ величина малая ($\operatorname{tg} \gamma/2 \approx \gamma/2$), то

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \gamma/2}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \gamma/2} = \frac{1 - \gamma/2}{1 + \gamma/2}. \quad (б)$$

Приравнивая правые части выражений (а) и (б), имеем

$$\frac{1 - \gamma/2}{1 + \gamma/2} = \frac{(1 - \tau/E)(1 + \mu)}{(1 + \tau/E)(1 + \mu)}.$$

Преобразовав, получим

$$\gamma = 2(1 + \mu)\tau/E.$$

Но $\tau = G\gamma$, тогда

$$\gamma = 2(1 + \mu)G\gamma/E.$$

Окончательно получаем теоретическую зависимость между модулями упругости первого и второго рода:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (6.6.2)$$

Для Ст. 3 $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$, модуль упругости второго рода

$$G = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1 + 0,3)} \approx 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Приближенно для всех материалов можно считать, что между модулями E и G существует зависимость

$$G \approx 0,4E. \quad (6.6.3)$$

Заметим, что при деформации чистого сдвига объем элемента не изменяется, так как $\Theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma - \sigma + 0) = 0$.

В табл. 6.6.1 приведены значения модулей упругости E и G , а также коэффициента Пуассона для различных материалов.

Таблица 6.6.1

Материал	E , МПа	G , МПа	μ
Сталь	$(2,0 \div 2,35) \cdot 10^5$	$(8,0 \div 8,35) \cdot 10^4$	$0,24 \div 0,33$
Чугун	$(0,75 \div 1,6) \cdot 10^5$	$4,5 \cdot 10^4$	—
Медь	$1 \cdot 10^5$	$(4,0 \div 4,9) \cdot 10^4$	—
Бронза	$1,2 \cdot 10^5$	—	0,34
Алюминий	$0,075 \cdot 10^5$	$2,6 \cdot 10^4$	0,35
Дерево (сосна)	$1 \cdot 10^4$	$0,055 \cdot 10^4$	$0,26 \div 0,36$
Текстолит	$(6 \div 10) \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$	—
Капрон	$(1,4 \div 2) \cdot 10^3$	$(0,45 \div 0,48) \cdot 10^3$	—

6.7. ДЕФОРМАЦИЯ ЭЛЕМЕНТА ОБЪЕМА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Рассматривая элементарный параллелепипед (рис. 6.7.1) с ребрами, направленными по координатным осям, его деформацию можно описать следующим образом. Ребра элемента получают относительные деформации ϵ_x , ϵ_y и ϵ_z , одновременно происходят сдвиги, т. е. изменения первоначально прямых двугранных углов между каждой парой координатных плоскостей. Изменение угла между

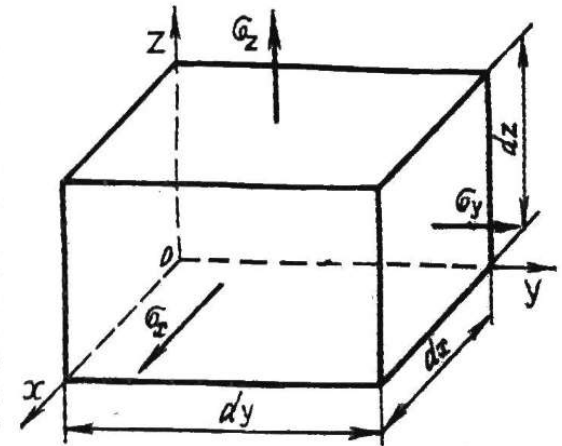


Рис. 6.7.1.

плоскостью xOz и плоскостью yOz обозначим через γ_{xy} , аналогично определяются еще два сдвига γ_{yz} и γ_{zx} . При чистом сдвиге длина ребер элемента не изменяется (§ 6.6, рис. 6.6.2), $ab = a_1b_1$, поэтому сдвиги γ_{xy} , γ_{yz} и γ_{zx} не влияют на удлинение ϵ_x , ϵ_y и ϵ_z . Следовательно относительное изменение объема

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z.$$

Совокупность шести величин ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} , γ_{yz} и γ_{zx} образует тензор деформации. Его записывают обычно следующим образом:

$$T_d = \begin{Bmatrix} \epsilon_x & 1/2 \gamma_{xy} & 1/2 \gamma_{xz} \\ 1/2 \gamma_{yx} & \epsilon_y & 1/2 \gamma_{yz} \\ 1/2 \gamma_{zx} & 1/2 \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{Bmatrix}. \quad (6.7.1)$$

Порядок индексов в обозначении сдвигов безразличен, поэтому $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \dots$. Компонентами тензора являются не сами сдвиги, а половины сдвигов. При этом условии теория деформированного состояния оказывается совершенно подобной теории напряженного состояния. Уравнение закона Гука для произвольных осей имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= 1/E [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \epsilon_y &= 1/E [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; \\ \epsilon_z &= 1/E [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \\ \gamma_{xy} &= 1/G \tau_{xy}; \\ \gamma_{yz} &= 1/G \tau_{yz}; \\ \gamma_{zx} &= 1/G \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (6.7.2)$$

6.8. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

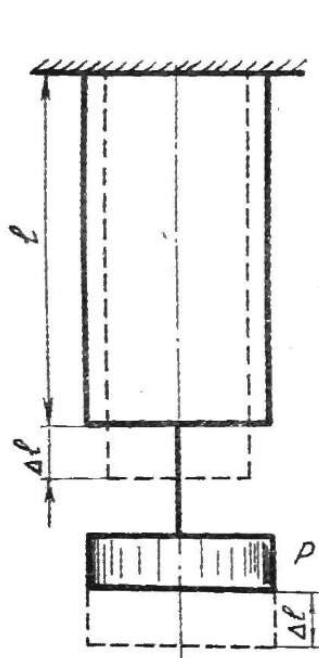


Рис. 6.8.1.

Если нагружать стержень (рис. 6.8.1) силой P , то под действием груза стержень удлинится на величину Δl и сам груз опустится на эту величину, т. е. в стержне накопится упругая деформация, а груз потеряет часть потенциальной энергии за счет перемещения вниз на величину Δl .

На основании закона сохранения энергии: «Энергия не исчезает бесследно, а переходит из одного вида в другой» — можно приравнять энергию упругой деформации, накопленную стержнем, к потере потенциальной энергии груза: $A = U$.

Поскольку $A = P\Delta l/2$, то

$$U = P\Delta l/2. \quad (6.8.1)$$

Но $\Delta l = \frac{Pl}{EF}$, тогда

$$U = P^2 l / 2EF \cdot F/F = \sigma^2 Fl / 2E. \quad (6.8.2)$$

Для определения величины энергии, накапливаемой единицей объема стержня, достаточно поделить правую часть выражения на объем стержня:

$$u = a = \frac{U}{V} = \frac{\sigma^2 Fl}{2EF l} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma \epsilon}{2}. \quad (6.8.3)$$

Таким образом, нами получено выражение для определения удельной потенциальной энергии, расходуемой для накопления упругой удельной деформации в единице объема при линейном напряженном состоянии.

Для расчета количества потенциальной энергии, накапливаемой в единице объема при сложном напряженном состоянии, используем принцип независимости действия сил, т. е.

$$u = a = \frac{\sigma_1 \epsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \epsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \epsilon_3}{2}. \quad (6.8.4)$$

Вводя в это выражение значения ϵ_1, ϵ_2 и ϵ_3 (6.5.1), будем иметь:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left[\sigma_1 \left(\frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} \right) + \sigma_2 \left(\frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} \right) + \right. \\ &+ \left. \sigma_3 \left(\frac{\sigma_3}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} \right) \right] = \frac{1}{(2E)} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \end{aligned}$$

Таким образом, потенциальная энергия упругой деформации при сложном напряженном состоянии определяется как

$$u = 1/2E [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)]. \quad (6.8.5)$$

Энергия, рассчитанная по (6.8.5), расходуется на изменение объема рассматриваемого элемента и его формы, т. е.

$$u = u_V + u_\Phi. \quad (6.8.6)$$

Найдем величину каждой составляющей. Если предполагать, что ребра элемента имеют одинаковую деформацию, то, как нам известно из (6.5.5),

$$\epsilon = \frac{\sigma_n}{3K},$$

$$\text{где } \sigma_n = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3};$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}.$$

Энергия, расходуемая на изменение объема при одинаковых относительных деформациях, может быть определена как

$$u_V = 3 \sigma_n \epsilon_n / 2.$$