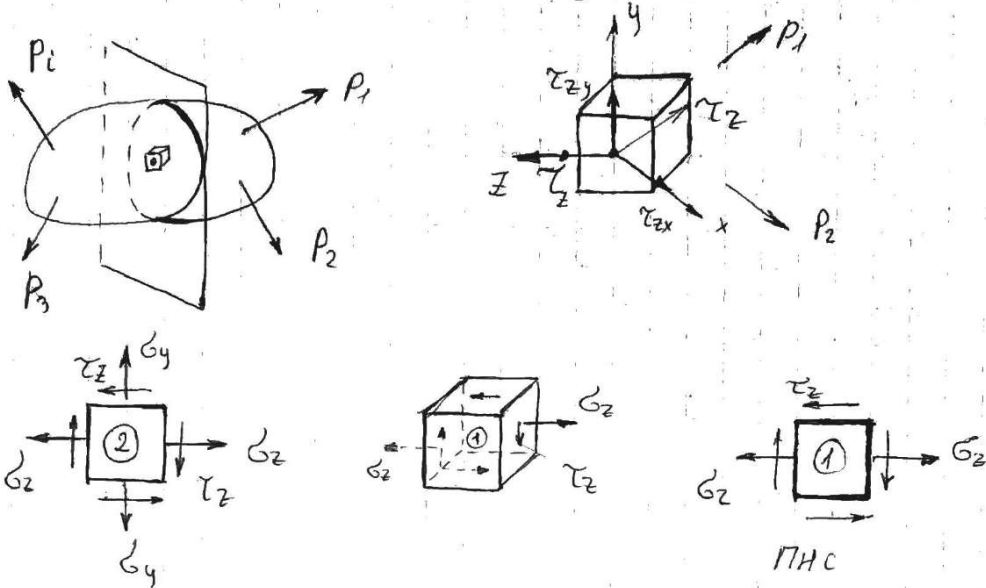


Глава 3

Теория напряженного и деформированного состояния материала.

§ 1 Постановка задачи



Если имеют место внешние силы действующие на брус, возникают нормальные касательные напряжения в любой произвольной т. бруса

Ориентируем эл. \square сфер. образом, можно свести...

Напряженное состояние ① имеет место в брусках в силу гипотезы о том, что смежные волокна не давят друг на друга.

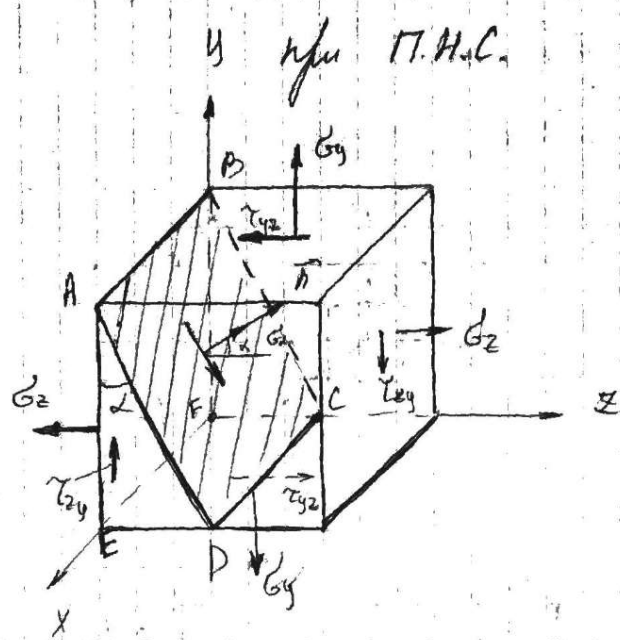
В пластинках и оболочках $\sigma_y \neq 0$ и имеем напряжен. состояние ②

Прочность частиц 1 и 2 определяется

не уровнем их напряж $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, а уровнем главных напряжений.

т. назыв-т

§2. Определение напряжений в произвольных площадках

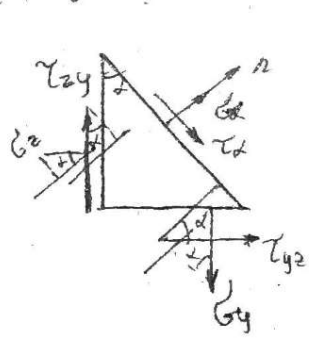


Найдем напряжения площадки \perp к свободной грани (ненагруженной)

G_z - ? τ_z - ?

Рассежем элементарный куб плоскостью проходящей через одно из ребер и проходящей под углом α к одной из нагруженных граней.

Спроецируем все силы на нормаль к данной плоскости.



$$\int_{ABCD} = dA$$

$$\int_{ABEF} = dA \cos \alpha$$

$$\int_{DCFE} = dA \sin \alpha$$

$$\vec{n} \cdot G_z dA - \overbrace{G_z \cos \alpha}^{\text{нормаль}} \cdot \overbrace{dA \cos \alpha}^{\text{площадь}} - G_y \sin \alpha dA \sin \alpha + \tau_{zy} \sin \alpha dA \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \alpha dA \sin \alpha = 0$$

Должна быть в равновесии

После сложных преобразований получим выражение

$$\sigma_x = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha \quad (*)$$

Аналогично сфокусируем все силы на направлении

$$\tau_x \perp \sigma_x \quad \tau_x \perp n$$

$$\tau_x \cdot dA - \sigma_z \sin \alpha \cdot dA \cos \alpha + \sigma_y \cos \alpha \cdot dA \sin \alpha - \tau_{zy} \cos \alpha dA \cdot \cos \alpha + \tau_{zy} \sin \alpha dA \cdot \sin \alpha = 0$$

Итого жееном фоофоу-у:

$$\left[\tau_x = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha \right] (**)$$

Понятие о главных напряжениях и главных площадках.

Если представить σ_x как ф-цию α можно преобразовать тангенс α , чтобы касат. напряжение было = 0

Такая площадка где кас. напряжение = 0, наз-ся главной

Нормал. напряжение, действ-е на такие площадки назыв-ся главными напряжениями. Эти напряжения являются экстремальными среди всех нормальных напряжений.

$$\frac{d\sigma_x}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{d\tau_x}{d\alpha} = 0$$

$$-2 \sigma_z \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + 2 \tau_{zy} \cos 2\alpha_0 = 0$$

$$-2 \left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{zy} \cos 2\alpha_0 + \tau_{zy} \cos 2\alpha_0 \right) = 0$$

Продиф-в. (*) и (**) по α и учесть, что τ_x должна = 0 получим выражение:

$$\left[\tan 2\alpha_0 = \frac{\sin 2\alpha_0}{\cos 2\alpha_0} = \frac{-2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y} \right] (***)$$

Это выражение дает два значения α

$2\alpha_0$ и $2\alpha_0 + 180^\circ$ харак-х направления главных напряжений, расположен-х под α соотв-но α_0 и $\alpha_0 + 90^\circ$.

Правило знаков формулы (***)

Положительн-х α следует откладывать против часовой стрелки, отрицат. по часовой.

Касательное напряжение с +, если \rightarrow повернуть частицу по часовой стрелке относительно центра т. зрения частицы

Норм. напряжение вводятся с \oplus , если оно растягивается, с \ominus если сжимается.

Найдем величину главных напряжений

$$\alpha_0 - I \quad \alpha_0 + 90 - II$$

$$\sigma_{\text{гн}}^I = \sigma_z \cos^2 \alpha_0 + \sigma_y \sin^2 \alpha_0 - \tau_{zy} \sin 2\alpha_0$$

$$\sigma_{\text{гн}}^{II} = \sigma_z \cos^2(\alpha_0 + 90) + \sigma_y \sin^2(\alpha_0 + 90) - \tau_{zy} \sin 2(\alpha_0 + 90)$$

Если в полученном выражении $\sin 2\alpha_0$ и $\cos 2\alpha_0$ выразить через $\tan 2\alpha_0$, а $\tan 2\alpha_0$ взять из формулы (***) , то получим:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}$$

Формула для главных напряжений.

Глав. напряж. обозначаются индексами $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

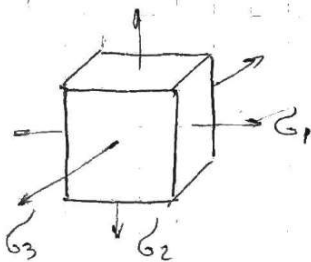
Могут иметь место 3 случая

1. Когда не одно из напряжений $\neq 0$

$$\sigma_1 \neq 0$$

$$\sigma_2 \neq 0$$

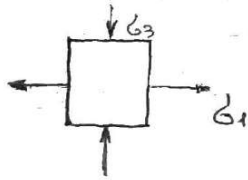
$$\sigma_3 \neq 0$$



О.И.С.

Объемное напряженное состояние.

2. $\sigma_2 = 0$



ПНС

плоское напряженное состояние

3. $\sigma_2 = 0$

$$\sigma_3 = 0$$



ЛНС.

§ 4. Определение гл. напряжений брусьев.

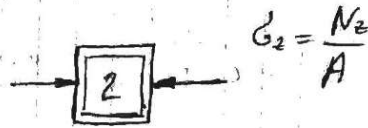
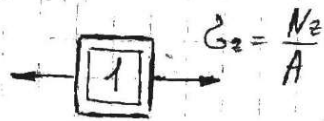
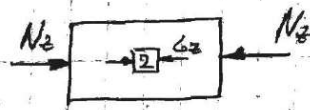
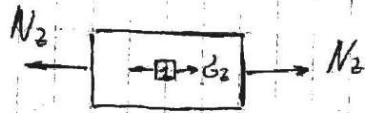
σ_y в брусе $= 0$, т.к. смежные волокна не давят друг на друга.

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_3' = \sigma_z \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_z^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_z}{\sigma_z}$$

Частные случаи:

1) P.-C.



$$\sigma_{rn} = \frac{\sigma_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^2} = \frac{\sigma_2}{2} \pm \frac{\sigma_2}{2}$$

$$\sigma_{rn} = \sigma_{min}^{max} = -\frac{\sigma_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^2}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_2}{2} = \sigma_2$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = -\frac{\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_2}{2} = 0$$

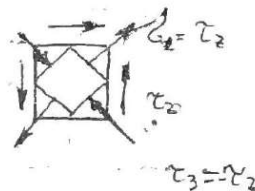
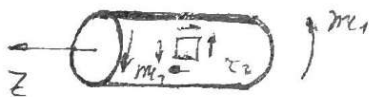
$$\sigma_{min} = \sigma_3 = \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2}{2} = 0$$

$$\sigma_{min} = \sigma_3 = -\frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2}{2} = -\sigma_2$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2 \cdot 0}{\sigma_2} = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2 \cdot 0}{-\sigma_2} = 0$$

2) Kfyzhenue



$$\sigma_{rn} = \sigma_{max}^{min} = \pm \sqrt{\tau_2^2} = \pm \tau_2$$

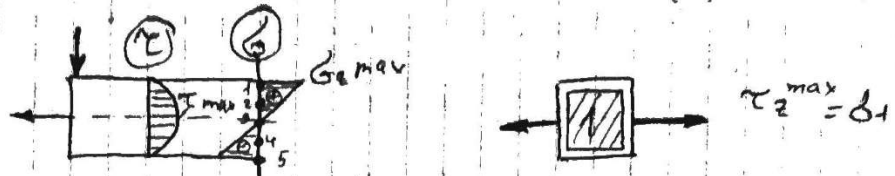
$$\sigma_{max} = \sigma_1 = +\tau_2$$

$$\sigma_{min} = \sigma_3 = -\tau_2$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2 \cdot (-\tau_2)}{0} = \infty$$

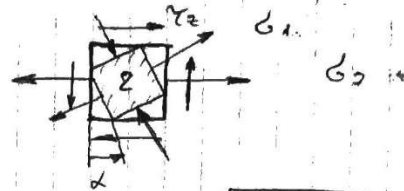
$$2\alpha_0 = 90^\circ \quad \alpha_0 = 45^\circ$$

3) Изгиб



$$\sigma_{rH} = \sigma_{min} = \frac{\sigma_z^{max}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z^{max}}{2}\right)^2}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \sigma_z^{max}$$



$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_z^2}$$

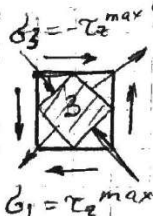
$$\sigma_{min} = \sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_z^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2(-\tau_z)}{\sigma_z} = \frac{2\tau_z}{\sigma_z}$$

$$2\alpha_0 = \arctan\left(\frac{2\tau_z}{\sigma_z}\right)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_z}{\sigma_z}\right)$$

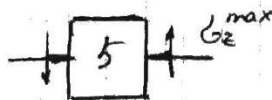
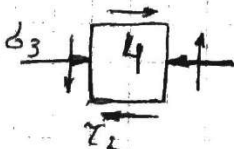
Определим α_0 , выбираем площадку с алгебраически большими норм. напряжениями - это вертикальная площадка, поворачиваем её на α_0 при этом направление наибольшего глав. напряжения всегда будет заключено внутри $\pm 45^\circ$, образованного алгебраически большими исходными норм. напряжениями и диагональю касат. напряжений.



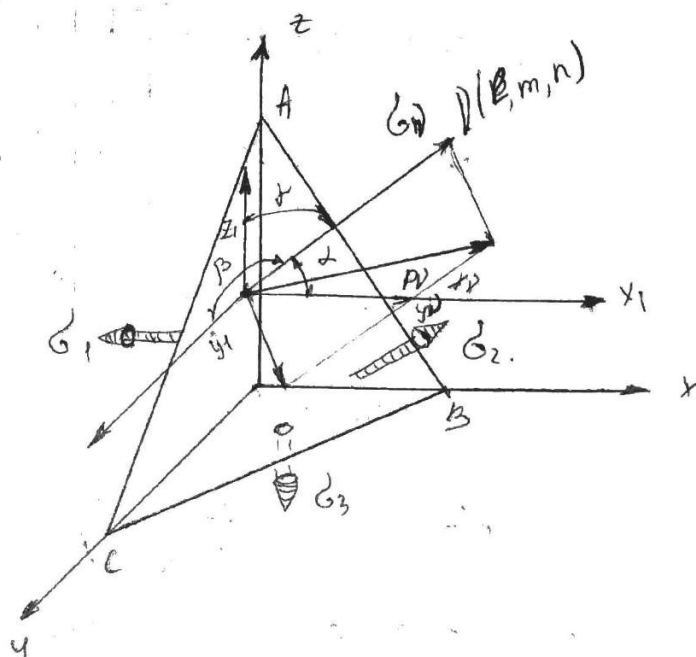
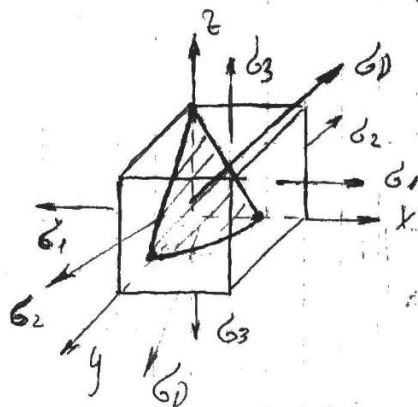
$$\sigma_{rH} = \sigma_{min} = \pm \sqrt{(\tau_z^{max})^2} = \pm \tau_z^{max}$$

$$\sigma_1 = \tau_z^{max}, \quad \sigma_2 = -\tau_z^{max}$$

$$2\alpha_0 = \dots = \infty \quad \alpha_0 = 45^\circ$$



§5. Определение напряжений в произвольно наклонных площадках через главные напряжения



Грани данного тетраэдра являются главными площадками

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos \alpha \\ m &= \cos \beta \\ n &= \cos \gamma \end{aligned} \right\} \text{направляющие косинусы}$$

x_D, y_D, z_D - составляющие полного вектора напряжения

P_D - ~~полный~~ полный вектор напряжения

$$S_{ABC} = dA$$

$$S_{AOC} = dA \cos \alpha$$

$$S_{AOP} = dA \cos \beta$$

$$S_{BOC} = dA \cos \gamma$$

Составим уравнение равновесия

$$x: x_D dA = G_1 dA \cos \alpha$$

$$x_D = G_1 \cos \alpha$$

$$y: y_D dA = G_2 dA \cos \beta$$

$$y_D = G_2 \cos \beta$$

$$z: z_D dA = G_3 dA \cos \gamma$$

$$z_D = G_3 \cos \gamma$$

$$P_D^2 = x_D^2 + y_D^2 + z_D^2$$

$$P_D^2 = G_1^2 \cos^2 \alpha + G_2^2 \cos^2 \beta + G_3^2 \cos^2 \gamma$$

Разложим вектор P_D на нормаль и на \perp к нормали

$$G_D dA = G_1 \cos \alpha (dA \cos \alpha) + G_2 \cos \beta (dA \cos \beta) + G_3 \cos \gamma (dA \cos \gamma)$$

$$G_D = G_1 \cos^2 \alpha + G_2 \cos^2 \beta + G_3 \cos^2 \gamma \quad (*)$$

$$\tau_D = \sqrt{P_D^2 - G_D^2} \quad (**)$$

Представляет интерес следующие частные случаи

1) Ортотропные площадки - площадку равнонаклоненная к главным площадкам

$$\text{значит } l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$G_D = G_{\text{окт}} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{3}$$

$$\tau_D = \tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(G_1 - G_2)^2 + (G_2 - G_3)^2 + (G_3 - G_1)^2}$$

2) Напряжения в площадках, параллельных одной из главных напряжений.

$$\text{Цу } (*) \quad \text{и } (**)$$

$$\sigma_D = \sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha$$

$$\tau_D = \tau_x = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha$$

Если площадка // одной из σ главных напряжений, то это напряжение не оказывает влияния на расчетные формулы.

Максимальное касательное напряжение.

$$\tau_D = \tau_x = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha \quad (***)$$

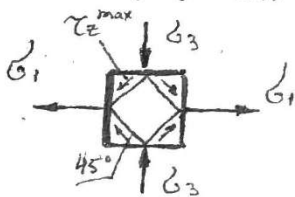
max - при $\sin 2\alpha = 1$

$$\tau_x^{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$2\alpha = 90^\circ$$

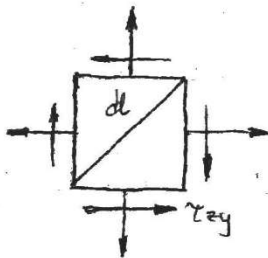
$$\alpha = 45^\circ$$

Таким образом максимальное касательное напряжение будет иметь место в площадках, равнонаклоненных к главным. При этом направление τ^{\max} ($\sigma_3 \rightarrow \sigma_1$)

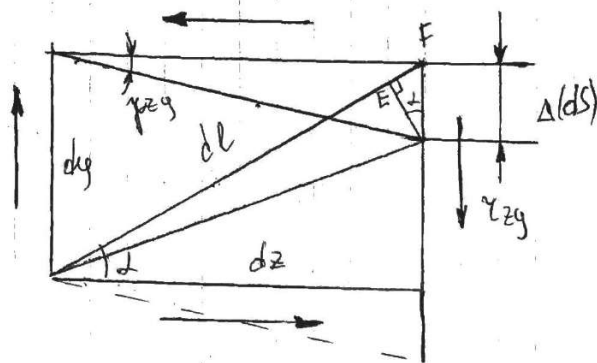
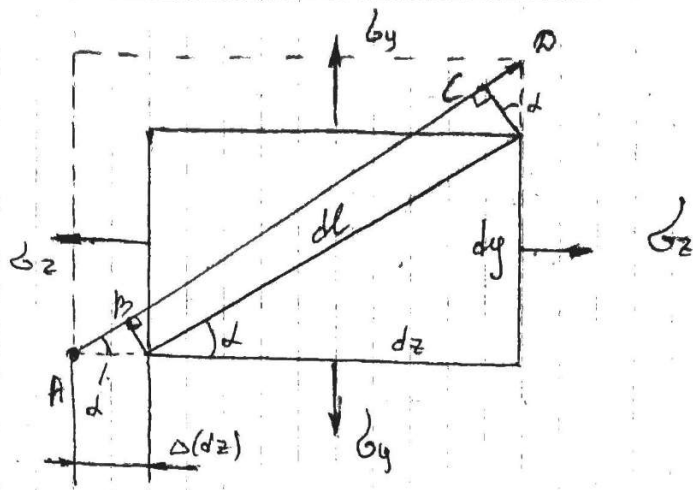


§ 6. Основы теории деформации

Изобразим элемент ПНС и рассмотрим деформации его диагоналей



$$\epsilon_d = \frac{\Delta(d)}{d}$$



Разложим dl упрямоугольником на величину $\Delta(dl) =$
 $= AB + CD + (-EF) = \Delta(dz) \cos \alpha + \Delta(dy) \sin \alpha - \Delta(ds) \sin \alpha =$
 $= E_z dz \cos \alpha + E_y dy \sin \alpha - \tau_{zy} dz \sin \alpha = E_z \left(\frac{dl \cos \alpha}{dz} \right) \cos \alpha +$
 $+ E_y \left(\frac{dl \sin \alpha}{dy} \right) \sin \alpha - \tau_{zy} \left(\frac{dl \cos \alpha}{dz} \right) \sin \alpha = E_z dl \cos^2 \alpha +$
 $+ E_y dl \sin^2 \alpha - \tau_{zy} \frac{1}{2} dl \sin 2\alpha.$

$$E_z = \frac{\Delta(dz)}{dz} \quad E_y = \frac{\Delta(dy)}{dy} \quad \tau_{zy} = \frac{\Delta(ds)}{dz}$$

$$E_d = \frac{\Delta(dl)}{dl} = E_z \cos^2 \alpha + E_y \sin^2 \alpha - \frac{\tau_{zy}}{2} \sin 2\alpha. \quad (****)$$

Выпарение для деформации в произвольном направлении.
 Вспомните понятие тензора напряжений
 и вернем понятие тензора деформации.

$$T_H = \sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$T_D = \epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{\delta_{xy}}{2} & \frac{\delta_{xz}}{2} \\ \frac{\delta_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\delta_{yz}}{2} \\ \frac{\delta_{zx}}{2} & \frac{\delta_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{vmatrix} \quad - \text{тензор деформации.}$$

6 компонентов тензора напряжений (тензора деформации полностью характеризуют напряженное (деформированное) состояние в точке)

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad - \text{свойство симметрии}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad - \text{свойство симметрии}$$

Сравнивая выражение (***) и выражение ранее полученное для σ_x отметим, что формулу для осевых деформаций можно получить из формул для σ заменив компоненты T_H компонентами T_D .

Аналогично получим формулу для угла сдвига

$$\delta_x = (\epsilon_z - \epsilon_y) \sin 2\alpha + \delta_{zy} \cos 2\alpha$$

Осевая главная деформация достигается:

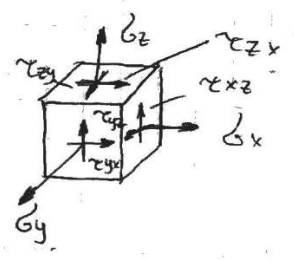
$$\epsilon_{\max} = \epsilon_{\min} = \frac{\epsilon_z + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_z - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_{zy}}{2}\right)^2}$$

§2. Обобщенный закон Гука

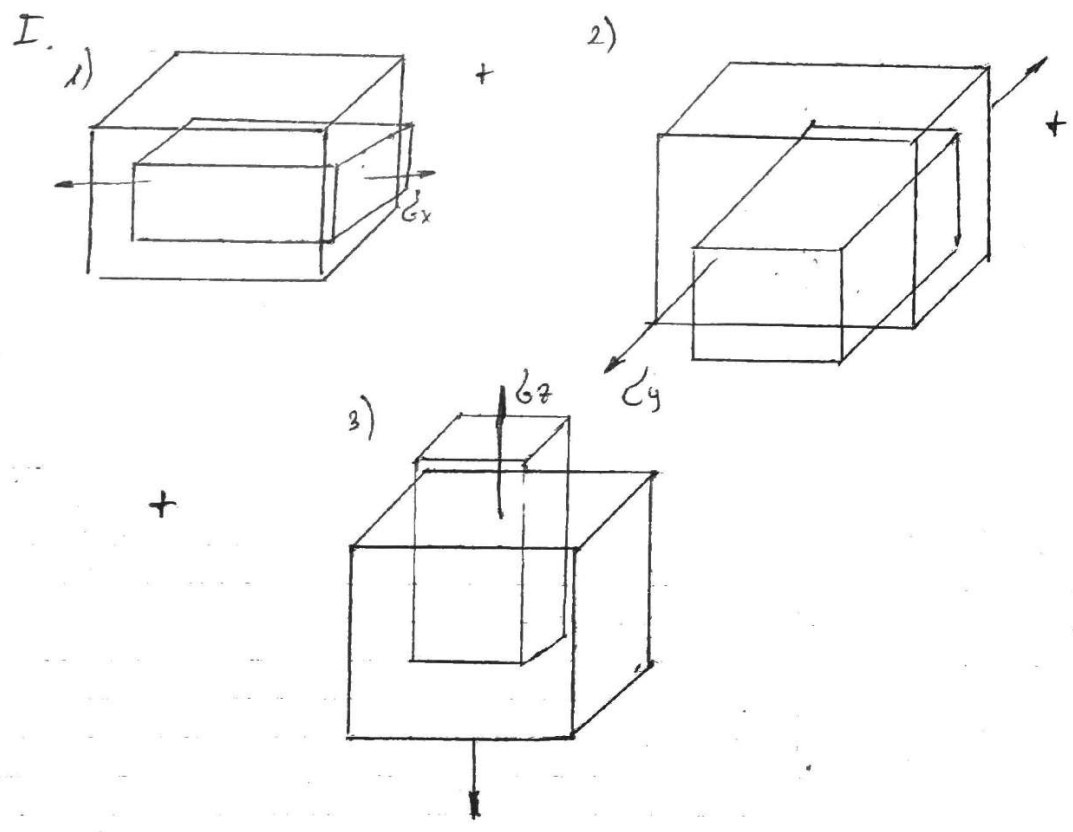
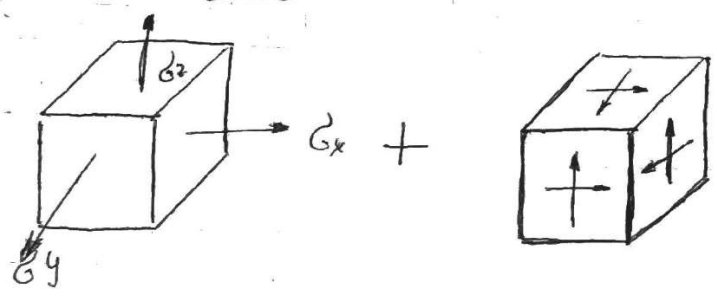
Обобщенным законом Гука называется закон Гука для случая обобщенного напряженного состояния.

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\tau = G \cdot \gamma$$



Рассмотрим элемент параллелепипеда под действием ОН.С



$$\epsilon_x: \epsilon_x' = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \epsilon_y' = -\frac{\sigma_x \nu}{E}; \quad \epsilon_z' = -\frac{\sigma_x \nu}{E}$$

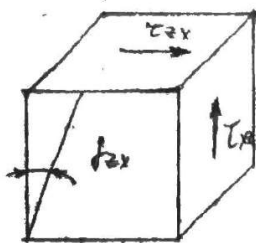
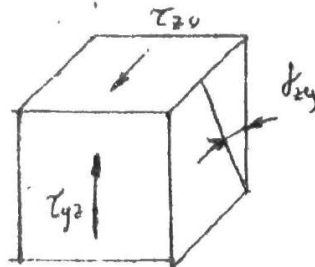
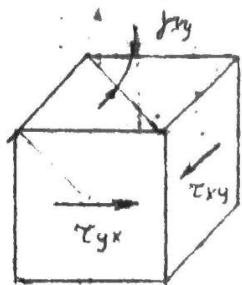
$$\epsilon_y: \epsilon_y'' = \frac{\sigma_y}{E}; \quad \epsilon_x'' = -\frac{\sigma_y \nu}{E}; \quad \epsilon_z'' = -\frac{\sigma_y \nu}{E}$$

$$\epsilon_z: \epsilon_z''' = \frac{\sigma_z}{E}; \quad \epsilon_x''' = -\frac{\nu \sigma_z}{E}; \quad \epsilon_y''' = -\frac{\nu \sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_x = \epsilon_x' + \epsilon_x'' + \epsilon_x''' = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \epsilon_y' + \epsilon_y'' + \epsilon_y''' = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \epsilon_z' + \epsilon_z'' + \epsilon_z''' = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$



$$\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\phi} G$$

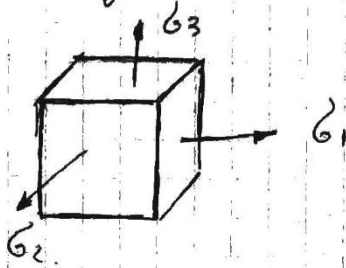
$$\tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{\phi} G$$

$$\tau_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{\phi} G$$

Частный случай.

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\tau = G \gamma$$



Если оси являются главными σ -и Гука принимает вид:

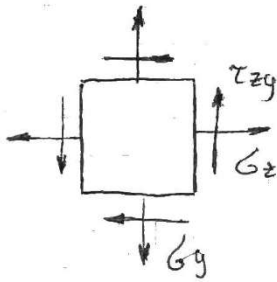
$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Обобщенный σ -и Гука для направленных главных напряжений.

Сдвига нет, касат. напряжения отсутствуют.



$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_z)$$

$$\epsilon_x = -\frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G}$$

σ -и Гука для ПНС.

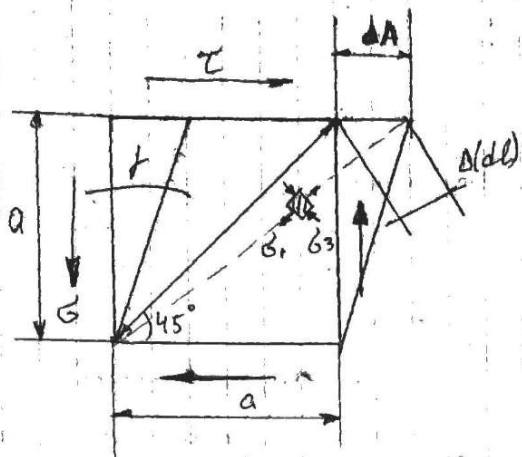
Если величины деформации вдоль оси известны можно определить величины напряжений по формулам напряжений σ (****)

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_z + \nu \epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_z)$$

$$\tau_{zy} = G \gamma_{zy}$$

§8 Вывод зависимости
между 3-мя упругими
показателями



$$\epsilon_1 = \tau$$

$$\epsilon_2 = -\tau$$

Расширение деформируемого элемента:

$$\epsilon = \frac{\Delta(dl)}{dl}$$

$$\Delta(dl) = \Delta a \sin 45^\circ = \tau a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\tau a}{\sqrt{2}} (**)$$

$$\tan \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta a}{a}$$

$$dl = \frac{a}{\cos 45^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

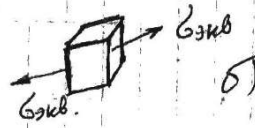
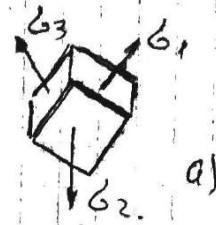
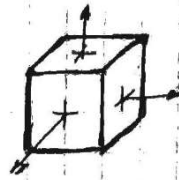
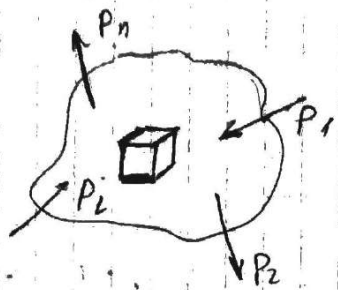
$$\epsilon_i = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{E} [\tau - \nu(-\tau)] =$$

$$= \frac{1}{E} [\tau - \nu(-\tau)] = \frac{\tau}{E} (1 + \nu) (***)$$

$$\epsilon = \epsilon_i \Rightarrow \frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{E} (1 + \nu) = \frac{G\tau}{E} (1 + \nu) \quad / \frac{1}{\tau}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

§9. Периоды времени



① Гипотеза - наибольших нормальных напряжений (автор Раменский)

а) $\sigma_1 \leq [\sigma]$

б) $\sigma_{жв} \leq [\sigma]$

$\sigma_{жв} = \sigma_1 \leq [\sigma]$

" - " Гипотезы:

1. Не учитываются σ_2 и σ_3
2. Эксперим. подтверждается только для хрупких материалов, поэтому в настоящее время для расчетов не применяется.

② Гипотеза наибольших линейных деформаций (Шарль)

а) $\epsilon_{max} = \epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$ } $\alpha = \delta$

б) $\epsilon_{max} = \frac{\sigma_{жв}}{E}$

} $\sigma_{жв} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$

③ Гипотеза наибольших касат. напряжений

а) $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ }

б) $\tau_{max} = \frac{\sigma_{жв}}{2}$ }

$\sigma_{жв} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$

" - " Проверено только для пластичных материалов и не учит. σ_2 .

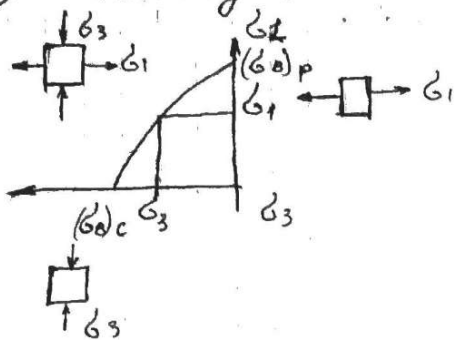
④ Гипотеза макс экстремальных напряжений

$$a) \tau_{\max} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$b) \tau_{\max} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{\text{экс}} - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma_{\text{экс}})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_{\text{экс}}$$

$$\sigma_{\text{экс}} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma]$$

⑤ Гипотеза Отто Мора



кривая предельных состояний

Граф. зависимость σ_1 и σ_3

кривая является механической характеристикой материалов

Для каждого материала своя кривая

$$\frac{(\sigma_1)_p}{n} = [\sigma]_p; \quad \frac{(\sigma_3)_c}{n} = [\sigma]_c$$

$$\frac{\sigma_1}{[\sigma]_p} - \frac{\sigma_3}{[\sigma]_c} = 1 \quad | : [\sigma]_p$$

$$\sigma_1 - \left(\frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_c} \right)^{=k} \sigma_3 = [\sigma]_p$$

$$\sigma_1 - k\sigma_3 = [\sigma]_p$$

Применяется к хрупким и пластичным

материалами, но и тем у кот. $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} < 0$

При $k=1$ (для пласт. материалов) гипотеза Мора совпадает с гипотезой ③