§ 3.9. Гипотезы прочности

Ранее (§2.10) были рассмотрены условия прочности для простейших случаев деформирования: при растяжении-сжатии, скручивании и изгибе. Наибольшее напряжение – напряжение в опасной точке бруса – сопоставлялось с допускаемым напряжением для данного материала. Также из §3.2 известно, что прочность частиц при плоском напряженном состоянии (ПНС), когда действуют одновременно касательные и нормальные напряжения, определяется не осевыми, а *главными* напряжениями.

Остался открытым вопрос, как оценить прочность бруса, если действуют несколько главных напряжений? Вопрос этот оказался довольно сложным, и универсальная теория прочности, которая бы давала однозначный ответ о прочности частицы при сложном напряженном состоянии, до сих пор не разработана. Предельные значения главных напряжений невозможно получить экспериментально, так как при этом необходимо исследовать возможные комбинации их соотношений, а число таких комбинаций бесконечно велико. Кроме того, в лабораторных условиях воссоздать некоторые типы напряженных состояний невозможно технически.

Подход к решению этой задачи состоит в допущении, что предельное (опасное) состояние в точке зависит только от напряженного состояния в ней. Экспериментально можно получить результаты для одноосного напряженного состояния, проведя испытания образца на растяжение. Проблема состоит в том, что сопоставляются напряженные состояния разного типа (рис. 3.9.1).

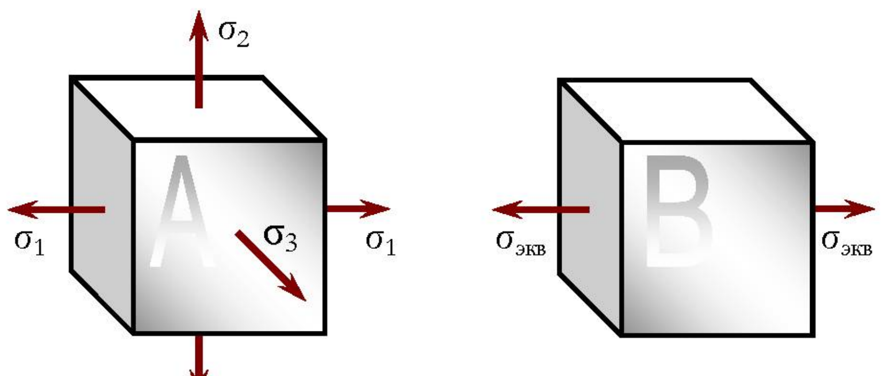

Рис. 3.9.1. К понятию эквивалентного напряжения

Такое сопоставление можно сделать, если найти такое напряжение в одноосно напряженной частице B растянутого (именно растянутого!) образца, при котором состояние её было бы равноопасным сложному напряженному состоянию частицы А. Это напряжение уже можно сравнивать с предельным или допускаемым для оценки прочности. Такое напряжение называют *эквивалентным*. Для вычисления эквивалентного напряжения предлагались различные гипотезы (теории). В одних из них под предельным состоянием (разрушением) подразумевается образование трещин, в других – возникновение пластических деформаций. Такие теории называются, соответственно, теориями прочности и теориями пластичности.

1. Гипотеза наибольших нормальных напряжений

Гипотеза была предложена Г. Галилеем в начале XVII в. В качестве критерия предельного состояния (разрушения) предлагалось наибольшее нормальное напряжение σ_1:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 \le [\sigma]$$

Данная гипотеза применима только для хрупких материалов, не учитывает σ_2 и σ_3 и в настоящее время не используется.

2. Гипотеза наибольших линейных деформаций

Гипотезу предложил Ш. Кулон. За критерий разрушения принимается величина наибольших линейных деформаций.

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

Учитывая закон Гука для одноосного напряженного состояния, получаем условие эквивалентности:

$$\sigma_{экв} = E\varepsilon_{\max} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma].$$

Эта гипотеза также применима только для хрупких материалов.

3. Гипотеза наибольших касательных напряжений

Причиной разрушения считаются максимальные касательные напряжения (которые, как мы знаем, действуют в площадках, расположенными под углом 45° к главным):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Для одноосного напряженного состояния $\tau_{\max} = \sigma_{экв}/2$. Приравнивая эти два выражения получаем критерий эквивалентности:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]$$

Данная теория не учитывает σ_2 и применима только для пластичных материалов. Тем не менее, она хорошо отражает поведение этих материалов при нормальной температуре и невысоких скоростях нагружения. В теории пластичности известна как критерий пластичности Треска–Сен-Венана (вместо допускаемого напряжения [σ] фигурирует предельное $\sigma_т$).

4. Гипотеза октаэдрических касательных напряжений

Согласно гипотезе ответственными за разрушение назначаются касательные напряжения в октаэдрических площадках (площадках, равнонаклонённых к главным). Как известно из §3.5,

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\,.$$

Для одноосного напряженного состояния

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_{\text{экв}}-0)^2+(0-0)^2+(0-\sigma_{\text{экв}})^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_{\text{экв}}\,.$$

Приравниваем выражения, получаем величину эквивалентных напряжений:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \le [\sigma].$$

Данная теория учитывает σ_2, но так же, как и предыдущая, применима только для пластичных материалов. Величина $\sigma_{\text{экв}}$ в данном случае не будет зависеть от того, какому из напряжений присвоить индексы 1-3, что важно при действии нагрузок, меняющихся во времени по различным законам.Если вместо допускаемого напряжения [σ] фигурирует предельное ($\sigma_{\text{т}}$), данное выражение носит название условия пластичности Мизеса (Губера–Мизеса–Генки).

5. Гипотеза прочности О. Мора

Гипотеза основана на обработке и обобщении экспериментальных данных. Полагая $\sigma_2 = 0$ и задаваясь различными соотношениями между σ_1 и σ_3 строится экспериментальная кривая АВ – *кривая предельных состояний* (рис. 3.9.2).

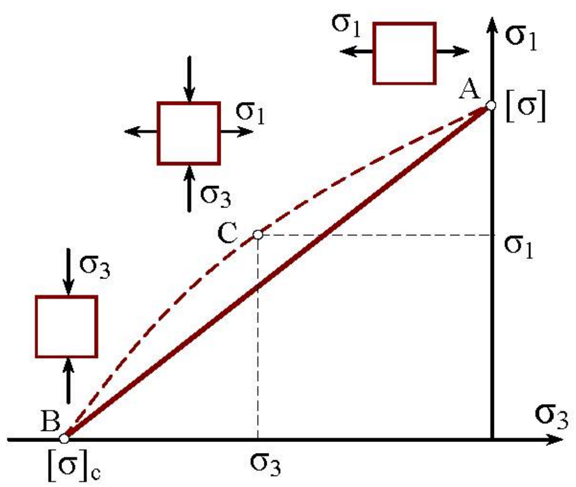

Рис. 3.9.2. Кривая предельных напряженных состояний

Форма кривой предельных состояний определяется свойствами материала и является его механической характеристикой, причем опыты показывают, что наличие напряжения σ_2 не влияет на эту форму. Для простоты на практике кривую заменяют прямой (ошибка в безопасную сторону). Для всех точек, лежащих ниже АВ, условие прочности выполняется. Уравнение этой прямой в отрезках имеет вид ($x/a+y/b = 1$):

$$\frac{\sigma_3}{-[\sigma]_с}+\frac{\sigma_1}{[\sigma]_р}=1.$$

Умножив это выражение на $[\sigma]_р$, можно представить его в виде:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - k\,\sigma_3 = [\sigma]_р,$$

где $k = [\sigma]_р/[\sigma]_с$., то есть условие прочности будет выглядеть как:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - k\,\sigma_3 \le [\sigma]_р.$$

Данная теория применима и для хрупких, и для пластичных материалов. Для пластичных материалов $[\sigma]_р = [\sigma]_с$, то есть, гипотеза Мора совпадает с условием Треска–Сен-Венана.

Применимость приведенных гипотез ограничена конкретными условиями. Например, повышение температуры приводит к увеличению пластичности материала, а увеличение скорости нагружения – к понижению и наоборот. Как и в случае условий прочности для простейших состояний, приближенность результатов, полученных с применением гипотез прочности компенсируется коэффициентом запаса.

Во избежание лишних вычислений удобно выразить главные напряжения через осевые по формулам параграфа 3.4. Тогда условия эквивалентности для последних трех гипотез будут иметь вид:

3-я гипотеза: $\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} \le [\sigma]$;

4-я гипотеза: $\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} \le [\sigma]$;

5-я гипотеза: $\sigma_{экв} = \dfrac{1-k}{2}\sigma_z + \dfrac{1+k}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} \le [\sigma]$.

В случае простых напряженных состояний (ЛНС, НСЧС) эти условия приводятся к знакомым нам соответствующим условиям прочности при простейших случаях деформирования.