

Опытные и теоретические исследования показывают, что действительное распределение напряжений при смятии более сложное и может быть найдено методами теории упругости.

Расчеты на прочность при сдвиге. В соединениях, работающих на сдвиг (заклепочные, болтовые, сварные соединения, врубки), в поперечных сечениях возникают значительные поперечные силы, по сравнению с которыми влияние изгибающих моментов оказываются пренебрежимо малым. Это позволяет расчет на прочность проводить только по касательным напряжениям:

$$\frac{Q_y S_x}{I_x \cdot b} \leq [\tau].$$

В первом приближении можно расчет на сдвиг проводить и по упрощенной формуле, принимая напряжения равномерно распределенными по поперечному сечению:

$$\frac{Q_y}{F} \leq [\tau].$$

ГЛАВА III

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ. ГИПОТЕЗЫ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

§ 3.1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕЧЕНИЯХ БРУСА

Цель исследования. При оценке прочности бруса в § 2.10 мы встретились с необходимостью установления наиболее напряженных его точек. Перед нами сразу же встали вопросы: а как это сделать, по каким признакам можно безошибочно сказать, что вот именно эта точка будет наиболее опасной? Конечно, при этом надо использовать то, что нам уже известно, — напряжения в поперечных сечениях бруса.

Мы полагали, что если в сечениях бруса имеют место одни нормальные или только касательные напряжения, за опасные следует принять точки, в которых напряжения σ_z или τ_z наибольшие. Однако у нас пока еще нет полной уверенности, что именно это напряжение (на площадке, совпадающей с поперечным сечением) и есть самое наибольшее в данной точке. Дело в том, что, помимо поперечного сечения, через эту точку можно провести бесчисленное множество других сечений и по каждому из них будет действовать свое напряжение. Значит, даже в одной и той же точке величина напряжений будет различная в зависимости от того, как ориентирована площадка.

Более трудной является задача установления опасных точек, когда в плоскости сечения действуют и нормальные и касательные напряжения. Естественно предположить, что те точки сечения, в которых одновременно σ_z и τ_z имеют большие значения, и будут опасными. Однако и в этом случае нельзя быть уверенным, что именно эти напряжения являются самыми наибольшими для данной точки. Оказывается, в таких случаях прочность бруса определяется напряжениями, действующими не в поперечном сечении, а в некоторых наклонных сечениях, проходящих через эту точку. Поэтому при оценке прочности в предполагаемой опасной точке необходимо исследовать, как изменяются напряжения с изменением наклона секущей плоскости, и установить экстремальные их значения. Следовательно, задача будет заключаться в исследовании напряженного состояния в данной точке тела.

Исходные напряжения. Во второй главе нами было установлено, что в произвольной точке сечения бруса возникают: при растяжении—нормальное напряжение σ_z , при кручении—касательное напряжение τ_z , при поперечном изгибе— σ_x , τ_{zy} (или τ_{zx}). Для вычисления этих напряжений нами были получены соответствующие формулы.

При более общем случае нагружения в поперечных сечениях бруса возникают нормальное напряжение σ_z и обе составляющие τ_{zy} и τ_{zx} касательного напряжения τ_z . Вычисляются они суммированием напряжений от каждого силового фактора:

$$\sigma_z \text{—от } N_x, M_x \text{ и } M_y;$$

$$\tau_z \text{—от } Q_x, Q_y \text{ и } M_z.$$

Напряжения σ_z , τ_{zy} и τ_{zx} в поперечных сечениях будем считать известными и назовем их *исходными напряжениями*. В продольных сечениях бруса нормальные напряжения σ_x и σ_y или совсем отсутствуют или же настолько малы*, что ими в теории сопротивления материалов пренебрегают. Касательные напряжения τ_{yz} и τ_{zx} в продольных сечениях (рис. 3.1а) в силу закона парности равны напряжениям τ_{zy} и τ_{zx} , действующим в поперечных сечениях. Следовательно, при заданных нагрузках и размерах бруса нам будут известны *все напряжения* по граням элементарной частицы, выделенной из бруса в окрестности исследуемой точки тремя парами плоскостей, параллельных координатным плоскостям. Такой элементарный параллелепипед в дальнейшем будем называть *исходной частицей*.

Плоское напряженное состояние частиц бруса. При наличии в сечении одного касательного напряжения τ_{zy} или τ_{zx} (независимо от того, есть или нет нормального напряжения σ_z) две из шести граней исходной частицы свободны от всяких напряжений (см., например, рис. 2.32). В этом случае исходная частица окажется под действием напряжений, расположенных только в одной плоскости—в плоскости, параллельной оси бруса—и будет испытывать плоское напряженное состояние. При наличии в исследуемой точке сечения обеих составляющих τ_{zy} и τ_{zx} их следует геометрически сложить и изменить наклон (к осям X и Y) продольных секущих плоскостей таким образом, чтобы две боковые грани исходной частицы оказались бы параллельными вектору результирующего касательного напряжения τ_z (рис. 3.1б). А так как нормальные напряжения в площадках, параллельных оси бруса, отсутствуют, то такая частица опять-таки будет испытывать плоское напряженное состояние.

Итак, мы установили, что напряженное состояние частиц, на которые можно рассечь брус в самом общем случае его нагружения, является плоским. Чтобы сделать исследование более

* Напряжения σ_x и σ_y вблизи точек приложения сил могут быть и не малы, но изучаются они в курсах теории упругости.

общим (пригодным, например, для анализа напряженных состояний труб, цилиндрических, сферических и конических оболочек при их осесимметричном деформировании) будем полагать, что нормальное напряжение σ_y на боковой грани не равно нулю.

Таким образом, задача теперь будет заключаться в том, чтобы исследовать напряжения в любых плоскостях, которыми можно рассечь элементарную частицу, изображенную на рис. 3.2.

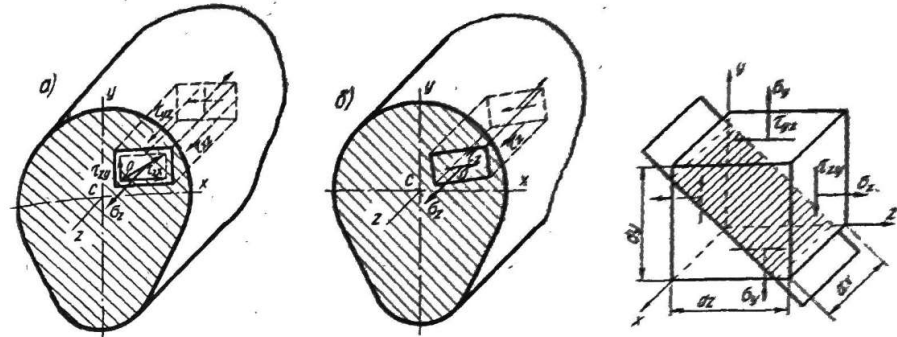


Рис. 3.1

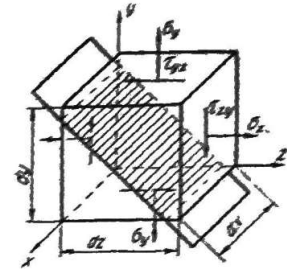


Рис. 3.2

Напряжения в площадках, перпендикулярных свободным граням. Желая найти напряжения σ_x и τ_x в площадках, перпендикулярных к свободным граням, рассечем исходную частицу плоскостью, параллельной оси X и пересекающей ось Z под заданным углом α (рис. 3.3).

Отбрасывая, например, верхнюю правую часть рассеченной частицы, мы ее действие на оставшуюся часть (рис. 3.3б) заменим нормальными и касательными усилиями интенсивности σ_x и τ_x . При дифференциально малых размерах частицы напряжения в любой площадке можно считать равномерно распределенными. Поэтому усилия на каждой грани будут равны произведению напряжения на соответствующую площадь.

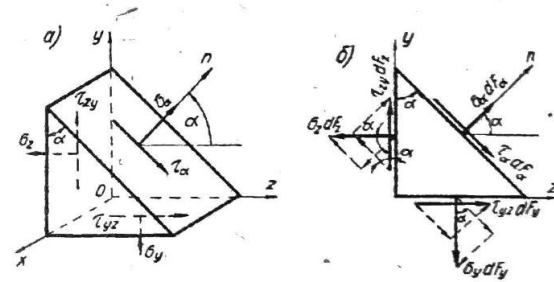


Рис. 3.3

Пусть площадь наклонной грани треугольной призмы равна $dF_n = dF$, тогда площади вертикальной и горизонтальной граней будут соответственно равны

$$dF_z = dF \cos \alpha, \quad dF_y = dF \sin \alpha.$$

Составляя теперь уравнения проекций всех сил на направления неизвестных напряжений σ_n и τ_n , получим

$$\sigma_n dF - \sigma_z dF \cos^2 \alpha - \sigma_y dF \sin^2 \alpha + \tau_{zy} dF \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{yz} dF \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

$$\tau_n dF - \sigma_z dF \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_y dF \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{zy} dF \cos^2 \alpha + \tau_{yz} dF \sin^2 \alpha = 0.$$

Откуда, принимая во внимание равенство $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ и известные зависимости между тригонометрическими функциями одинарного и двойного угла, найдем

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha = \\ &= \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha. \quad (3.2)$$

Этими формулами и устанавливается зависимость между известными напряжениями σ_z и τ_{zy} , σ_y и τ_{yz} и разыскиваемыми напряжениями σ_n и τ_n , действующими в плоскости, наклоненной на заданный угол α^* .

При выводе зависимостей (3.1) и (3.2) исходные напряжения предполагались положительными, а именно: положительные нормальные напряжения σ_z и σ_y вызывают растяжение элемента; положительные касательные напряжения τ_{zy} стремятся вращать исследуемую частицу относительно любой точки внутри ее по часовой стрелке. Положительное направление угла α — угла между напряжением σ_z (осью Z) и нормалью к наклонной площадке, отсчитывается от положительной оси Z в сторону к положительной оси Y (против часовой стрелки).

Полученный при числовом подсчете по формулам (3.1) и (3.2) знак напряжения автоматически определит его направление. Для σ_n знак плюс означает, что это напряжение является растягивающим. Для τ_n знак плюс указывает, что оно стремится вращать рассматриваемую частицу по часовой стрелке.

Главные площадки и главные напряжения. Из формул (3.1) и (3.2) следует, что напряжения σ_n и τ_n являются функциями угла α . При непрерывном изменении этого угла, а следовательно, и положения наклонных площадок, будут также непрерывно из-

* Имеется в виду, что когда размеры dx , dy и dz исходной частицы стремятся к нулю, то поперечные, продольные и наклонная секущие плоскости, которыми была выделена из тела частица, пройдут через одну и ту же точку.

меняться и напряжения на них. Взяв производные от выражений (3.1) и (3.2) по углу α и приравняв их нулю, будем иметь:

$$2 \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - 2 \tau_{zy} \cos 2\alpha = 0, \quad (a)$$

$$2 \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - 2 \tau_{zy} \sin 2\alpha = 0.$$

Решая каждое из этих уравнений относительно угла α , получим формулы, определяющие положение площадок, где действуют экстремальные нормальные (3.3) и экстремальные касательные (3.4) напряжения

$$\operatorname{tg} 2\alpha_n = - \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\tau = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2\tau_{zy}} = - \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_n}. \quad (3.4)$$

Сравнивая выражение (3.2) с уравнением (a), убеждаемся, что на площадках действия экстремальных нормальных напряжений (определяемых углом $\alpha = \alpha_n$) касательные напряжения отсутствуют. Такие площадки называются главными, а действующие на них экстремальные нормальные напряжения — главными нормальными напряжениями.

Так как тангенс является периодической функцией, то формулой (3.3) определяются два направления для главных площадок:

$$\alpha'_n \text{ и } \alpha''_n = \alpha'_n \pm 90^\circ,$$

расположенных перпендикулярно друг к другу.

Величины главных нормальных напряжений найдем по формуле (3.1), подставив в нее значение $2\alpha_n$ согласно (3.3). С целью упрощения получающихся при этом выражений используем определение $\operatorname{tg} 2\alpha_n$ из прямоугольного треугольника (рис. 3.4). Тогда для косинуса и синуса угла ($2\alpha_n$) будем иметь:

$$\cos 2\alpha_n = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{\pm \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}}, \quad \sin 2\alpha_n = \frac{-2\tau_{zy}}{\pm \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}}.$$

Подставляя их в формулу (3.1) и выполняя несложные преобразования, получим:

$$\sigma_{\text{главн}} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}. \quad (3.5)$$

В соответствии с двумя знаками перед радикалом подсчеты по формуле (3.5) дают два значения главных напряжений, соот-

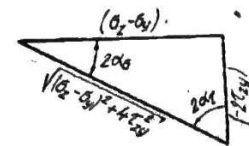


Рис. 3.4

ветствующих двум главным площадкам. А так как при плоском напряженном состоянии одна из граней исходной частицы свободна от всяких напряжений, в том числе и касательных, то она является третьей главной площадкой (ее часто называют нулевой). Следовательно, *третье главное напряжение для частицы тела, испытывающих плоское напряженное состояние, равно нулю*. Принято главные напряжения обозначать $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, руководствуясь условием $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, т. е. чтобы σ_1 было бы алгебраически наибольшим, σ_3 — алгебраически наименьшим напряжением.

Ниже будет показано, что именно по величине главных напряжений в данной точке судят о степени ее опасности.

Если по формуле (3.5) найти оба главных напряжения, принимая перед радикалом при вычислении $\sigma'_{гл}$ знак плюс, а для $\sigma''_{гл}$ — знак минус, и затем полученные выражения сложить, то

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma'_{гл} + \sigma''_{гл} = \text{const.}$$

Следовательно, сумма нормальных напряжений на любых двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через рассматриваемую точку тела, есть величина постоянная, равная сумме главных напряжений.

Практические рекомендации о том, как установить, по какому из двух направлений α'_c или α''_c действует наибольшее из главных напряжений, приведены в [6].

Экстремальные касательные напряжения. Эти напряжения возникают в тех из рассматриваемой серии площадках, нормаль к которым с напряжением σ_z составляет угол α_c , определяемый формулой (3.4). Эта формула дает два значения угла α_c (α'_c и $\alpha''_c = \alpha'_c + 90^\circ$), соответствующих положению двух взаимно перпендикулярных площадок. По одной из них действует наибольшее, а по другой — наименьшее касательное напряжения. Вследствие закона парности абсолютные величины этих напряжений равны между собой. Для их вычисления надо в формулу (3.2) подставить значение угла $2\alpha_c$ из уравнения (3.4) и учесть, что, согласно рис. 3.4,

$$\cos 2\alpha_c = \frac{2\tau_{zy}}{\pm \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}}, \quad \sin 2\alpha_c = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{\pm \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}}.$$

В результате будем иметь:

$$\tau_{\text{экстр}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}. \quad (3.6)$$

Принимая во внимание (3.5), нетрудно сообразить, что радикал этот равен полуразности главных напряжений, т. е.

$$\tau_{\text{экстр}} = \frac{\sigma'_{гл} - \sigma''_{гл}}{2}. \quad (3.7)$$

Таким образом, экстремальные касательные напряжения могут быть вычислены и через исходные напряжения σ_z, σ_y и τ_{zy} и через главные напряжения в данной точке.

Из (3.7) следует, что экстремальные для данной серии наклонных площадок касательные напряжения будут вообще самыми наибольшими в данной точке только в том случае, если $\sigma'_{гл} = \sigma_1$, а $\sigma''_{гл} = \sigma_3$.

Итак, *самое наибольшее касательное напряжение в данной точке равно полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений*

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.8)$$

Учитывая, что $\text{tg } 2\alpha_c = \text{ctg}(90^\circ - 2\alpha_c)$ и $-\frac{1}{\text{tg } 2\alpha_c} = -\text{ctg } 2\alpha_c$, из

формулы (3.4) устанавливаем $\alpha_c = \alpha_z + 45^\circ$, т. е. площадки экстремальных касательных напряжений расположены под углом 45° к главным площадкам.

Главные напряжения в брус. В практических инженерных расчетах часто приходится иметь дело с исследованием напряжений в брус, для которого $\sigma_y = 0$. В этом случае формулы, определяющие положения главных площадок и величины главных напряжений, примут вид:

$$\text{tg } 2\alpha_c = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z}, \quad (3.9)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2},$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}. \quad (3.10)$$

$$\tau_{\text{max}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.11)$$

Рис. 3.5 дает представление в взаимном расположении в брус исходной частицы, частицы, выделенной главными площадками, и частицы, ограниченной площадками действия τ_{max} . Здесь же изоб-

* Ввиду того, что радикал всегда больше, чем $\frac{\sigma_z}{2}$, нулю будет равно напряжение σ_2 .

ражены и проекции этих частиц на координатную плоскость ZOY. Плоское напряженное состояние частиц бруса, определяемое формулами (3.9) + (3.11) и приведенное на рис. 3.5, принято называть упрощенным плоским.

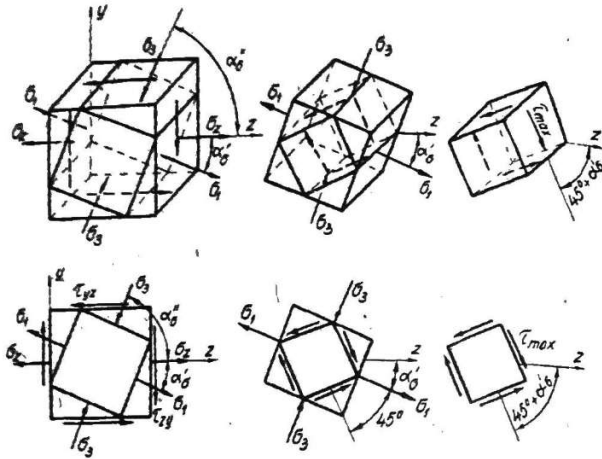


Рис. 3.5

§ 3.2. ГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ С ПОМОЩЬЮ КРУГОВ МОРА

Обоснование метода. Наибольшее распространение при графическом исследовании плоского напряженного состояния получила круговая диаграмма в координатах $\sigma_\alpha - \tau_\alpha$, называемая кругом Мора по имени немецкого ученого Отто Мора, разработавшего этот графический метод. Для обоснования данного метода запишем выражения (3.1) и (3.2) в таком виде:

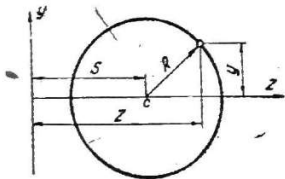


Рис. 3.6

$$\sigma_\alpha - \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha.$$

Возведя обе части каждого из равенств в квадрат и сложив их, получим уравнение связывающее напряжения на трех площадках:

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2. \quad (3.12)$$

Перепишав его в виде $(\sigma_\alpha - S)^2 + \tau_\alpha^2 = R^2$ и сопоставив это выражение с уравнением окружности (рис. 3.6)

$(z - S)^2 + y^2 = R^2$, убеждаемся в том, что уравнение (3.12) представляет собой также уравнение окружности в координатных осях $\sigma_\alpha - \tau_\alpha$. Ось абсцисс является осью нормальных напряжений, ось ординат — осью касательных напряжений. Радиус окружности равен:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}. \quad (3.13)$$

Центр же ее расположен на оси абсцисс и удален от начала координат на расстояние

$$S = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}. \quad (3.14)$$

Окружность (3.12) изображает зависимость между заданными напряжениями и $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ при всевозможных положениях секущей плоскости, проходящей через исследуемую точку тела перпендикулярно к свободным граням исходной частицы.

Построение круга напряжений. Загруженные грани исходной частицы также относятся к рассматриваемому семейству площадок, так как напряжения σ_z и τ_{zy} , σ_y и τ_{yz} , действующие в этих площадках, являются напряжениями σ_α и τ_α для частных случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = 90^\circ$. Поскольку эти выражения нам известны, то построение окружности надо начинать с нанесения на диаграмму двух точек D (σ_z, τ_{zy}) и H (σ_y, τ_{yz}), соответствующих этим двум исходным площадкам. Для определенности примем $\sigma_z > \sigma_y > 0$ и $\tau_{zy} > 0$.

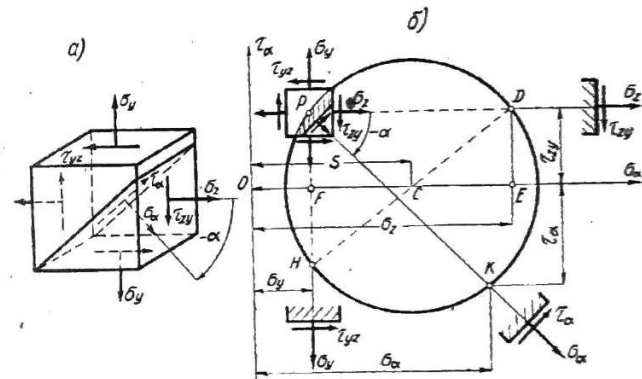


Рис. 3.7

Справа от чертежа исходной частицы расположим координатные оси $\sigma_\alpha - \tau_\alpha$, направив ось абсцисс параллельно напряжению σ_z (рис. 3.7). В принятом масштабе отложим на оси абсцисс вправо от начала координат отрезок OE, численно равный σ_z , и из точки E вверх в направлении положительной оси τ_α отрезок

$ED = \tau_{zy}$. Точка D и будет соответствовать площадке, перпендикулярной оси Z . Площадке, перпендикулярной к оси Y , будет соответствовать точка H . Ее положение на диаграмме определяется абсциссой $OF = \sigma_y$ и ординатой $FH = \tau_{yz}$. Отрезок FH отложен не вверх, а вниз потому, что τ_{yz} является отрицательным, так как стремится исходную частицу вращать (относительно любой точки внутри ее) против часовой стрелки. Точка C пересечения прямой DH с осью абсцисс есть центр искомой окружности, а CD — ее радиус. Действительно, из диаграммы следует, что абсцисса точки C равна:

$$OC = \sigma_y + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} = S,$$

т. е. выражению (3.14), которым и определяется положение центра. Определив из прямоугольного треугольника CED величину отрезка CD , получаем для нее зависимость (3.13). Это указывает на то, что отрезок CD действительно равен радиусу R , которым и описываем искомую окружность.

Полюс круга напряжений*. Полюсом называется точка P пересечения с окружностью прямой, проведенной из той точки окружности, которая соответствует данной площадке в теле, параллельно нормали к этой площадке. Так как площадке действия σ_z на диаграмме соответствует точка D , то для определения полюса P достаточно через точку D провести прямую DP , параллельную оси Z . С целью контроля можно еще из точки H , соответствующей площадке действия σ_y , провести прямую HP , параллельную оси Y . Обе эти прямые пересекутся с окружностью, конечно, в одной точке P .

Применение круга для вычисления напряжений. Зная положение полюса, можно по кругу напряжений весьма просто определять величины и направление напряжений на любой заданной площадке (проходящей через исследуемую точку тела), перпендикулярной к свободным граням исходной частицы.

Исходя из определения полюса, следует, что луч, проведенный через полюс параллельно нормали к той или иной площадке, пересечет окружность в точке, которая соответствует именно этой площадке. (Этот луч явится нормалью к данной площадке, если чертеж исходной частицы совместить с полюсом, как это сделано на рис. 3.7б.) Например, точка K (рис. 3.7б) окружности соответствует такой площадке, нормаль к которой составляет с направлением напряжений σ_z отрицательный угол α . Абсцисса и ордината точки K измеряют соответственно нормальное σ_α (положительное) и касательное τ_α (отрицательное) напряжения на этой площадке. Вектор τ_α направлен так, чтобы соответствовал вращению частицы против часовой стрелки. Направление вектора σ_α соответствует деформации растяжения.

* Строгое обоснование расположения полюса и его свойств см. в курсах сопротивления материалов М. В. Рубинина или А. В. Даркова.

Таким образом, желая установить, какой площадке соответствует данная точка окружности, ее надо соединить с полюсом. Тогда площадка, расположенная перпендикулярно к этому лучу, и будет искомой. Так, точки A и B окружности (рис. 3.8) соответствуют первой и второй главным площадкам, так как только у этих двух точек ординаты (а следовательно, и τ) равны нулю. Абсциссы этих точек являются экстремальными и измеряют соответственно величины главных напряжений σ_1 и σ_2 . Направления PA и PB определяют положение векторов σ_1 и σ_2 , а следовательно, и главных площадок в данной точке тела.

Площадке действия экстремального касательного напряжения соответствует точка M окружности, а прямая MP является нормалью к ней. Величина этого напряжения равна радиусу окружности, аналитическое выражение которого

$$\tau_{\text{экстр}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

совпадает, конечно, с формулами (3.6) и (3.7). Нормальное напряжение на этой площадке, измеряемое абсциссой точки M , равно

$$\frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \sigma_{\text{ср}}.$$

Из чертежа элемента также следует, что площадка действия экстремального касательного напряжения наклонена к главным площадкам на угол 45° , что ранее было доказано теоретическим путем.

Аналитическое и графическое вычисление напряжений в площадках, параллельных одному из главных напряжений. Напомним, что плоское напряженное состояние частицы характеризуется наличием двух граней, свободных от всяких напряжений (мы их назвали нулевыми главными площадками).

Вследствие этого вектора напряжений σ_z и τ_{zy} , σ_y и τ_{yz} на остальных гранях частицы располагаются в одной плоскости — в плоскости YZ .

В этой же плоскости лежат и вектора напряжений σ_α и τ_α , действующих по секущим площадкам, расположенным перпендикулярно к свободным граням частицы. Напряжения эти, как мы установили, определяются формулами (3.1) и (3.2) или кругом Мора. Ими же будут определяться напряжения и в более общем (объемном) случае, но только в тех секущих площадках, которые расположены перпендикулярно к граням, нагруженным одними нормальными напряжениями. В самом деле, если секущая

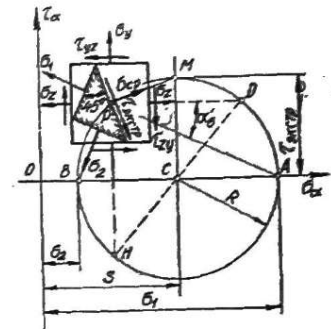


Рис. 3.8

площадка параллельна, например, вектору σ_x (рис. 3.9a), то его проекции на направления n и t равны нулю и выражения для σ_n и τ_{nt} останутся без изменения.

Если же секущая площадка будет перпендикулярна к грани, нагруженной касательными напряжениями τ_{xy} и τ_{xz} (рис. 3.9б), то на основании закона парности в ней возникнет касательное напряжение τ_{yx} , параллельное оси X . Значит, формулой (3.2) будет определяться уже не полное касательное напряжение, а лишь его составляющая τ_x .

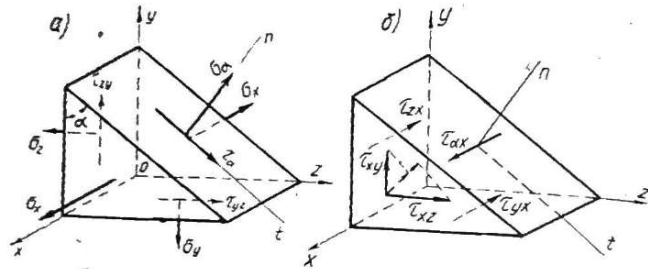


Рис. 3.9

Следовательно, формулы (3.1), (3.2) и круг Мора можно применять для исследования не только плоского, но и объемного напряженного состояния (с учетом только что сделанных оговорок).

В случае полного исследования напряженного состояния в точке, заданной главными напряжениями, обычно определяют напряжения в каждой из трех серий площадок, параллельных трем главным напряжениям. При аналитическом вычислении используют формулы (3.1) и (3.2), в которых τ_{zy} следует приравнять нулю, а нормальные напряжения σ_z и σ_y заменить соответствующими главными напряжениями.

При исследовании графическим способом необходимо по заданным главным напряжениям построить три круга напряжений. На рис. 3.10 приведено такое построение для случая плоского напряженного состояния исследуемой частицы с двумя главными положительными напряжениями σ_1 и σ_2 ($\sigma_3=0$). Окружность 1.2 с центром в точке C_{12} , построенная по значениям главных напряжений σ_1 и σ_2 , определяет напряжения в площадках, параллельных вектору σ_3 .

Точки окружности 2.3 с центром в точке C_{23} , построенной по значениям σ_2 и $\sigma_3=0$, своими координатами измеряют нормальное и касательное напряжения в серии площадок, параллельных направлению σ_1 (в них напряжения не зависят от σ_1). Координаты точек окружности 1.3 с центром в точке C_{13} , построенной по напряжениям σ_1 и $\sigma_3=0$, определяют напряжения в серии

площадок, параллельных вектору σ_2 и потому от него не зависящих.

Из рис. 3.10 также видно, что максимальное касательное напряжение равно $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$. Действует оно в площадке, расположенной параллельно второму главному напряжению σ_2 и наклоненной под углом 45° к σ_1 и σ_3 .

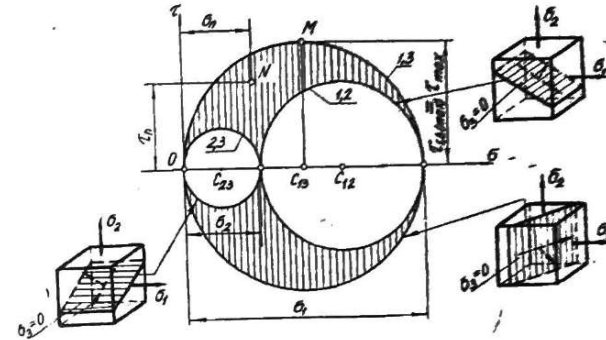


Рис. 3.10

Напряжения в площадках, не параллельных главным напряжениям*, определяются координатами точек, расположенных в области между тремя окружностями (например, точка N на рис. 3.10).

Из всего вышеизложенного следует, что плоское напряженное состояние полностью определяется тремя исходными напряжениями σ_z , σ_y и τ_{zy} , так как через них выражаются напряжения на любых площадках, проходящих через данную точку тела.

§ 3.3. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ БРУСА ПРИ ПРОСТЕЙШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Общие замечания. В параграфе 3.1 было показано, что напряженное состояние любой элементарной частицы бруса при произвольном его нагружении является плоским. Значит, для исследования напряжений в брусике и при простейших его деформациях мы сможем воспользоваться формулами (3.1 – 3.11) и круговыми диаграммами плоского напряженного состояния.

Растяжение бруса. При растяжении бруса в его поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения σ_z , касательные же напряжения $\tau_{zy}=0$. Поэтому площадки, перпендикулярные и параллельные оси бруса, являются главными, а выделенная

* См. об этом в курсе сопротивления материалов Г. С. Глушкова и В. А. Синдеева, а также задачу 35 в работе [6].

ими элементарная частица (рис. 3.11) называется главной. Она испытывает действие только одного главного напряжения $\sigma_1 = \sigma_z$, другие же два σ_2 и σ_3 равны нулю. Такое напряженное состояние называется *одноосным, или линейным*.

Вследствие симметричного по отношению к вектору σ_z расположения наклонных площадок как параллельных X , так и параллельных оси Y (рис. 3.11 в, г), напряжения на них будут одинако-

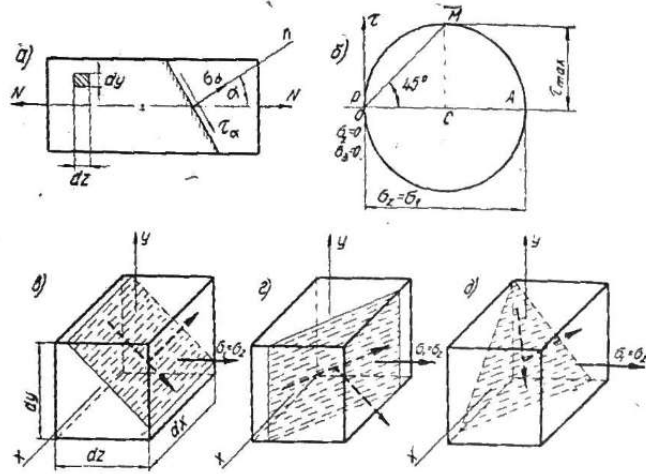


Рис. 3.11

выми. При аналитическом вычислении этих напряжений используются формулы (3.1) и (3.2), которые в данном случае примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_z \cos^2 \alpha, \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_z}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (3.15)$$

При графическом исследовании используем круги Мора. Строятся они по двум точкам на оси абсцисс. Точка A круга (рис. 3.11 б) соответствует грани, перпендикулярной оси бруса, и ее абсцисса равна $\sigma_z = \sigma_1$. Площадкам, параллельным оси бруса и свободным от напряжений, соответствует точка O , абсцисса и ордината которой равны нулю. Окружности, определяющие напряжения в площадках, параллельных оси X и параллельных оси Y , в этом случае совпадают. Третья окружность для напряжений в площадках, параллельных оси бруса, обращается в точку. Поэтому область диаграммы, заключенная между тремя окружностями, выродилась в линию окружности. Отсюда следует, что и напряжения в произвольно наклоненных (косых) площадках (рис. 3.11 д) определяются кругом, построенным по σ_1 и $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Таким образом, при осевом растяжении бруса наибольшими являются напряжения в поперечных сечениях. Ими и определяется прочное сопротивление бруса деформированию (см. § 2. 10).

Касательные напряжения наибольшего значения достигают в площадках, составляющих с осью бруса угол 45° и равны

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}.$$

Кручение бруса круглого сечения. При кручении бруса в его поперечных сечениях возникают только касательные напряжения τ_{xy} (рис. 3.12б). В продольных сечениях, проходящих через ось бруса, согласно закону парности действуют равные им напряжения τ_{yz} . В площадках, совпадающих с цилиндрическими сечениями, всякие напряжения отсутствуют. Следовательно, эти площадки являются главными (нулевыми площадками). Такое плоское напряженное состояние (как уже указывалось ранее (стр.48), носит название *чистого сдвига*.

При чистом кручении брусоев некруглого сечения наиболее напряженные частицы расположены у поверхности бруса и также испытывают плоскую деформацию чистого сдвига.

Аналитические выражения для напряжений, возникающих в площадках, перпендикулярных к свободным граням частицы на угол α , получим из общих формул (3.1) и (3.2), полагая в них $\sigma_z = \sigma_y = 0$.

Положение главных площадок и величины главных нормальных и наибольших касательных напряжений найдем по формулам (3.9), (3.10) и (3.11), положив в них $\sigma_z = 0$.

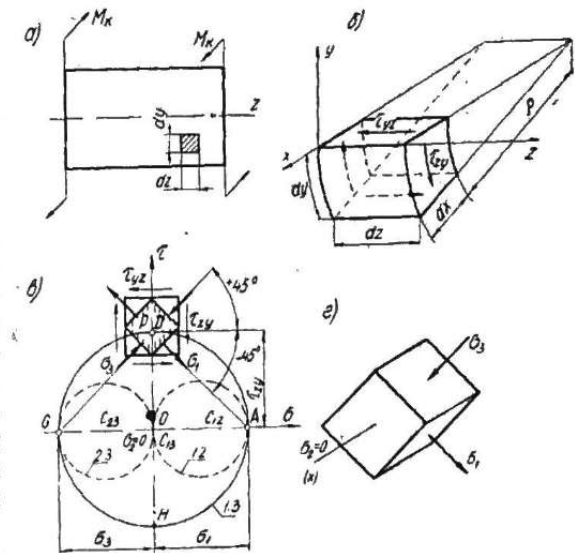


Рис. 3.12

$$\sigma_\alpha = -\tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad (3.16)$$

$$\tau_\alpha = \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

Положение главных площадок и величины главных нормальных и наибольших касательных напряжений найдем по формулам (3.9), (3.10) и (3.11), положив в них $\sigma_z = 0$.

В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= -45^\circ \text{ и } \alpha'_2 = 45^\circ, \\ \sigma_{\max} &= \sigma_1 = \tau_{zy}, \\ \sigma_{\min} &= \sigma_3 = -\tau_{zy}, \\ \tau_{\max} &= \tau_{zy}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Таким образом, в площадках, расположенных под углом 45° к нагруженным касательными напряжениями граням частицы, действуют главные напряжения σ_1 и σ_3 одинаковой с τ_{zy} величины. При этом σ_1 является растягивающим, а σ_3 — сжимающим напряжением (рис. 3.12в, г). Наибольшее для данной точки касательное напряжение τ_{\max} согласно (3.17) равно касательному напряжению τ_{zy} и действует оно в поперечном сечении.

Используемый при графическом исследовании напряжений в указанной серии наклонных площадок (параллельных оси x) круг напряжений 1.3 показан на рис. 3.12в. Построен он по двум точкам $D(\sigma_z, \tau_{zy})$ и $H(\sigma_y, \tau_{yz} = -\tau_{zy})$, расположенным на оси касательных напряжений, так как нормальные напряжения σ_z и σ_y на площадках, соответствующих этим точкам круга, равны нулю. Центр круга C_{13} в этом случае совпадает с началом координат, полюс круга P — с точкой D . В пересечении окружности с осью абсцисс получим точки A и G , соответствующие первой и третьей главным площадкам, так как именно у этих точек координаты (τ) равны нулю. Абсциссы этих точек определяют главные напряжения σ_1 и σ_3 одинаковой величины, но разного знака. Направления σ_1 и σ_3 совпадают с линиями PA и PG .

При необходимости исследовать напряжения в площадках, параллельных вектору σ_1 и вектору σ_3 , по известным главным напряжениям строятся главные круги 1.2 и 2.3. На рис. 3.12в они показаны пунктиром.

Плоский поперечный изгиб бруса. При изгибе бруса, например, в плоскости YOZ , в его поперечных сечениях возникают и нормальные и касательные напряжения, величина которых зависит от расположения исследуемой точки в сечении. Поэтому исходные элементарные частицы (рис. 3.13) в зависимости от их удаления от нейтральной оси находятся в неодинаковом напряженном состоянии. Так, частицы 1 и 5 в брусках с плавным изменением ширины сечения испытывают только сжатие или растяжение в направлении, параллельном оси бруса. Если же ширина сечения у верхнего и нижнего оснований резко изменяется, как, например, в двутавровых балках, то частицы 1' и 5' уже находятся в условиях плоского напряженного состояния. Однако ввиду малой величины напряжений τ_{zx} в полках по сравнению с величиной σ_z в этих точках, ими часто пренебрегают и напряженное состояние этих частиц условно принимают линейным.

Частицы 3 на уровне нейтральной оси испытывают деформацию чистого сдвига. Напряженное состояние таких частиц, как 1, 5 и 3, было исследовано нами выше.

Остальные точки сечения, такие, как 2 и 4, испытывают упрощенное плоское напряженное состояние. Грани исходных частиц, перпендикулярные к оси X , свободны от напряжений и потому являются главными. Напряжения в серии площадок, параллельных оси X , определяются формулами (3.1) и (3.2), которые в данном случае (при $\sigma_y = 0$) принимают вид:

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha, \quad (3.18)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha.$$

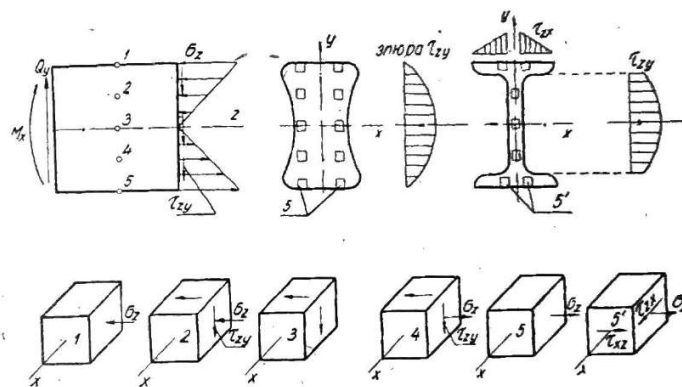


Рис. 3.13

Среди этой серии наклонных площадок две являются главными. Их положение определяется формулой (3.9), а величины главных напряжений подсчитываются по (3.10). Причем одно из главных напряжений является растягивающим (σ_1), другое — сжимающим (σ_3). Напряжения $\sigma_2 = 0$. Самое наибольшее касательное напряжение $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ действует в площадках этой же серии, именно в тех, которые расположены под углом 45° к главным.

Круг Мора, характеризующий напряжения в площадках этого семейства, представлен на рис. 3.14 сплошной линией и обозначен 1.3. Построен он по двум точкам $D(\sigma_z, \tau_{zy})$ и $H(\sigma_y = 0, \tau_{yz} = -\tau_{zy})$. Чертеж исходной (частицы 4) и главной частицы, для удобства совмещен с полюсом круга. Кроме того, частица выделена главным площадками, изображена еще и отдельно.

Круги 1.2 и 2.3, определяющие напряжения в площадках, параллельных соответственно вектору σ_3 и вектору σ_1 , показаны

на рис. 3.14 пунктиром. Напряжения в этих площадках не являются наибольшими и не определяют прочность частицы.

Итак, при изгибе бруса наиболее напряженные крайние от нейтральной оси частицы 1 и 5 испытывают одноосное растяжение (сжатие), характеризуемое одним главным напряжением $\sigma_1 = \sigma_x$ ($\sigma_2 = -\sigma_x$), действующим в поперечных площадках. Промежуточные точки сечения находятся в условиях плоского напряженного состояния, характеризуемого наличием двух главных

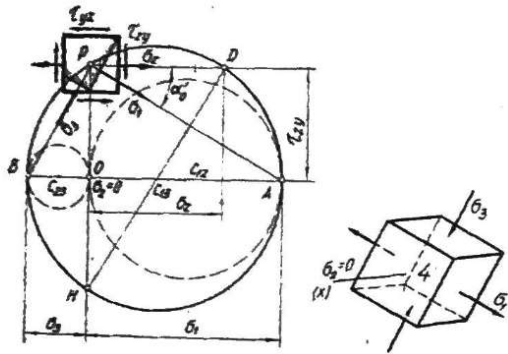


Рис. 3.14

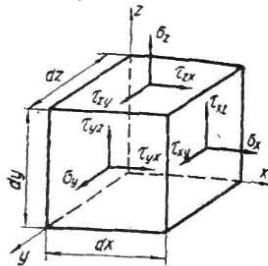


Рис. 3.15

напряжений σ_1 и σ_2 , действующих в наклонных площадках. Эти главные напряжения в точках, для которых σ_z и τ_{zy} являются одновременно большими, могут достигать примерно такой же величины, что и напряжение σ_x в крайних точках сечения. Этого следует ожидать только в пустотелых, двутавровых и швеллерных балках в местах резкого изменения ширины сечения.

§ 3.4. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Объемное напряженное состояние. Рассмотренное в предыдущих параграфах плоское напряженное состояние характерно тем, что одно из трех главных напряжений равно нулю. При исследовании прочности деталей встречаются, однако, и такие случаи, когда в опасной точке все три главных напряжения отличны от нуля. Такое напряженное состояние называется объемным, или пространственным.

Целью исследования объемного состояния и является определение величины главных напряжений и расположения площадок их действия.

Исходные напряжения. На рис. 3.15 изображен элементарный параллелепипед, выделенный в окрестности исследуемой точки тремя парами плоскостей, параллельных координатным. По гра-

ням этого исходного параллелепипеда будут действовать и нормальные и касательные напряжения в количестве восемнадцати. Но так как нормальные напряжения на противоположных гранях равны, а касательные напряжения подчиняются закону парности, то независимых остается всего шесть напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, действующих по трем взаимно перпендикулярным граням. При стремлении размеров ребер dx, dy и dz к нулю параллелепипед стягивается в точку, через которую и пройдут все его грани. Напряжения, действующие по этим граням, принимаются за исходные напряжения в исследуемой точке и в дальнейшем полагаются известными. Причем на площадках с положительной внешней нормалью они направлены в сторону положительных координатных осей; на площадках с отрицательной нормалью — в сторону отрицательных координатных осей (рис. 3.16б).

Напряжения в произвольной (косой) площадке. Для того чтобы вычислить главные напряжения, необходимо уметь определять напряжения на любой площадке, произвольно наклоненной к трем исходным (рис. 3.16а). Положение этой площадки будем определять направляющими косинусами

$$\cos \alpha = l,$$

$$\cos \beta = m,$$

$$\cos \gamma = n.$$

Разрезая исходный параллелепипед плоскостью, содержащей рассматриваемую (косую) площадку, выделим из него элемен-

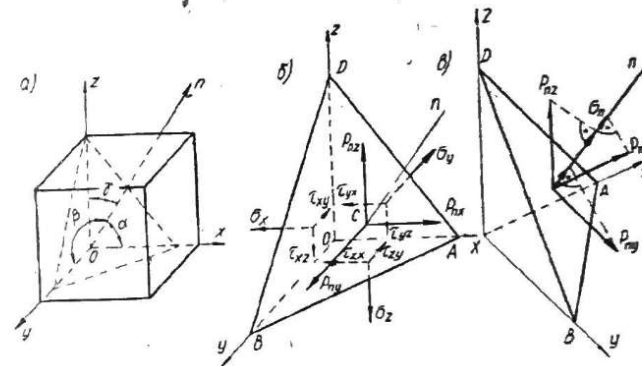


Рис. 3.16

тарную частицу в форме тетраэдра (рис. 3.16б). Искомое полное напряжение на косой площадке обозначим через P_n . Его направление не совпадает с нормалью n к данной площадке. Поэтому удобнее разложить его на составляющие P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} в направлении координатных осей и найти их из условий равновесия тетраэдра.

Усилия, действующие по граням тетраэдра, равны произведениям напряжений на соответствующие площади* и приложены в центре тяжести каждой грани.

Обозначим через dF площадь наклонной грани ABD . Тогда площади dF_x , dF_y и dF_z граней, перпендикулярных координатным осям X , Y и Z , будут равны:

$$dF_x = dFl; \quad dF_y = dFm; \quad dF_z = dFn. \quad (a)$$

Проектируя на ось X все силы, действующие на тетраэдр, получим:

$$p_{nx}dF - \sigma_x dF_x - \tau_{yx}dF_y - \tau_{zx}dF_z = 0,$$

откуда после подстановки значений dF_i согласно (a) и сокращения dF будем иметь:

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n, \\ p_{ny} &= \tau_{xy}l + \sigma_y m + \tau_{zy}n, \\ p_{nz} &= \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Последние два выражения получены из сумм проекций на оси Y и Z .

Зная составляющие, нетрудно найти и само полное напряжение из соотношения

$$p_n^2 = p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2. \quad (3.20)$$

Три остальные уравнения равновесия тетраэдра — уравнения моментов — дадут уже известные под названием закона парности соотношения между касательными напряжениями на двух взаимно перпендикулярных площадках.

Проектируя теперь известные составляющие p_{nx} , p_{ny} и p_{nz} вектора полного напряжения p_n на нормаль n к данной косоугольной площадке (рис. 3.16**) и алгебраически складывая эти проекции, найдем нормальное напряжение на ней

$$\sigma_n = p_{nx}l + p_{ny}m + p_{nz}n.$$

Подставляя сюда значения p_{nx} , p_{ny} , и p_{nz} согласно (3.19) и принимая во внимание парность касательных напряжений, получим после приведения подобных членов следующее выражение:

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl. \quad (3.21)$$

Касательное напряжение τ_n на этой же косоугольной площадке найдется из соотношения

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = p_n^2. \quad (3.22)$$

* Ввиду малой площади граней распределение напряжений по ним можно принять равномерным.

** Во избежание затемнения чертежа здесь и на рис. 3.17 напряжения на трех исходных площадках не показаны.

Из зависимостей (3.21) и (3.22) можно, как частный случай, получить формулы (3.1) и (3.2) плоского напряженного состояния, если принять $\sigma_x = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0$, положить $\alpha = 90^\circ$ и учесть, что $\gamma + \beta = 90^\circ$.

Главные площадки и главные напряжения. Мы установили, что в случае произвольного расположения косоугольной площадки по ней возникают как нормальное, так и касательное напряжения. Попытаемся теперь отыскать главную площадку, т. е. площадку, по которой бы действовало только нормальное напряжение.

Предположим, что грань ABD тетраэдра (рис. 3.17), нормаль к которой определяется направляющими косинусами l , m , n , является именно такой площадкой. Тогда вследствие отсутствия на ней касательного напряжения из (3.22) следует $p_n = \sigma_n$, т. е. полное напряжение совпадает по величине и направлению с нормальным напряжением на этой площадке. Обозначим это напряжение пока просто σ и найдем его проекции на оси X , Y , Z (рис. 3.17):

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma \cos \alpha = \sigma l, \\ p_{ny} &= \sigma \cos \beta = \sigma m, \\ p_{nz} &= \sigma \cos \gamma = \sigma n. \end{aligned}$$

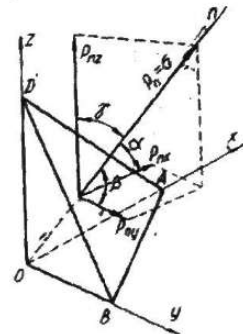


Рис. 3.17

Подставляя эти значения в уравнения равновесия (3.19) и перенося все члены в одну сторону, будем иметь:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0, \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Эти уравнения совместно с известным соотношением

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (б)$$

и служат для определения главного напряжения σ и трех направляющих косинусов l , m , и n нормали к площадке действия этого напряжения.

Система трех однородных линейных уравнений (3.23) с неизвестными l , m и n будет иметь нулевое решение только в случае равенства нулю определителя этой системы

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Раскрыв этот определитель, получим следующее кубическое уравнение:

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0, \quad (3.24)$$

где

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2.$$

Три корня этого уравнения и дают значения трех главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 . После того как определены величины главных напряжений в исследуемой точке тела, можно по уравнениям (3.23) установить и расположение в ней главных площадок. Так, например, желая определить направляющие косинусы l_1 , m_1 и n_1 для нормали к площадке действия первого главного напряжения, необходимо в (3.23) вместо σ подставить известное значение σ_1 и решить полученную систему трех уравнений

$$(\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{yx}m_1 + \tau_{zx}n_1 = 0,$$

$$\tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{zy}n_1 = 0,$$

$$\tau_{xz}l_1 + \tau_{yz}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1 = 0.$$

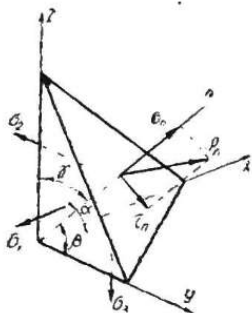


Рис. 3.18

Итак, мы установили, что пространственное напряженное состояние в исследуемой точке тела полностью определяется шестью напряжениями на трех взаимно перпендикулярных площадках σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} и τ_{zx} , поскольку напряжения, возникающие на любой площадке, проходящей через данную точку, оказались выраженными в функции от этих шести параметров.

Выражения для p_n , σ_n и τ_n в функции от главных напряжений.

Если три взаимно перпендикулярные грани элементарного тетраэдра являются главными (рис. 3.18), то выражения для напряжения на косой площадке значительно упрощаются. Полагая в формулах (3.19) + (3.22) $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$ и $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, будем иметь:

$$p_{nx} = \sigma_1 l, \quad p_{ny} = \sigma_2 m, \quad p_{nz} = \sigma_3 n,$$

$$p_n^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2,$$

$$\sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2, \quad (3.25)$$

$$\tau_n^2 = p_n^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2. \quad (3.26)$$

Напряжения на октаэдрической площадке. Октаэдрическими называются такие косые площадки, которые равно наклонены к трем главным ($\alpha = \beta = \gamma$). Из условия (б) будем иметь:

$$l = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \alpha = 54^\circ 45'.$$

Тогда на основании формул (3.25) и (3.26) найдем:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}. \quad (3.27)$$

Октаэдрическое касательное напряжение близко по величине к наибольшему касательному напряжению (3.8) для той же точки тела и находится в пределах:

$$\tau_{\text{окт}} = (0,816 + 0,941) \tau_{\text{мах}}.$$

Знание октаэдрических касательных напряжений необходимо для оценки прочности материалов в условиях плоского и объемного напряженных состояний.

§ 3.5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Постановка задачи. Линейная деформация в каком-либо направлении и угол сдвига между любыми двумя взаимно перпендикулярными направлениями, проходящими через заданную точку тела, будут, очевидно, изменяться с изменением их ориентации. В этом наглядно убеждает простой пример осевого растяжения бруса, на боковой поверхности которого изображены прямоугольные квадраты так, что одна из диагоналей перпендикулярна, а другая параллельна оси бруса (рис. 3.19). После деформации бруса прямые углы между сторонами квадрата искажаются, а сами стороны удлиняются и квадрат обращается в ромб; диагонали же квадрата испытывают только линейную деформацию.

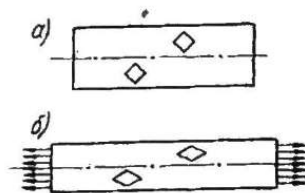


Рис. 3.19

Совокупность векторов деформации по всевозможным направлениям, проходящим через рассматриваемую точку тела, называется деформированным состоянием в этой точке.

Для исследования деформированного состояния необходимо вычислить линейную деформацию в данной точке для произвольного направления.

Удлинение отрезка, наклоненного к оси Z на заданный угол α . Рассмотрим деформацию элементарной частицы с размерами ребер dz и dy , нагруженную нормальными и касательными усилиями указанного на рис. 3.20a направления.

Используя принцип независимости действия сил, найдем удлинение диагонали ab длиной dl , вызванное только нормальными

и только касательными напряжениями, а затем сложим полученные результаты.

При действии только нормальных напряжений элементарная частица сохраняется прямоугольной, а длина ребер $dz = dl \cos \alpha$ и $dy = dl \sin \alpha$ и диагонали dl изменится соответственно на величину (рис. 3.20б):

$$\Delta(dz) = \epsilon_z dz = \epsilon'_z \cos \alpha dl,$$

$$\Delta(dy) = \epsilon_y dy = \epsilon'_y \sin \alpha dl,$$

$$\Delta(dl) = a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

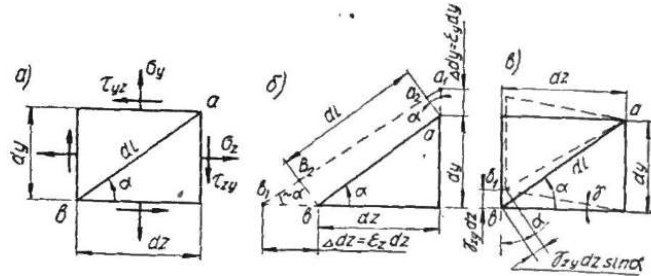


Рис. 3.20

Из геометрии рисунка с учетом только что полученных значений для $\Delta(dz)$ и $\Delta(dy)$ найдем:

$$b_1 b_2 = \Delta(dz) \cos \alpha = \epsilon_z \cos^2 \alpha dl,$$

$$a_1 a_2 = \Delta(dy) \sin \alpha = \epsilon_y \sin^2 \alpha dl.$$

Тогда $\Delta(dl) = (\epsilon_z \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha) dl$ и относительное удлинение ϵ'_α отрезка ab , наклоненного к оси Z на угол α , окажется равным

$$\epsilon'_\alpha = \frac{\Delta(dl)}{dl} = \epsilon_z \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha. \quad (a)$$

При действии только касательных напряжений элементарная частица испытывает деформацию чистого сдвига (рис. 3.20в). В результате этого диагональ ab станет короче (при указанном направлении τ'_{zy}) на величину

$$\Delta(dl) = \tau_{zy} dz \sin \alpha.$$

А так как $dz = dl \cos \alpha$, то

$$\Delta(dl) = \tau_{zy} \cos \alpha \sin \alpha dl,$$

и относительное изменение длины отрезка ab будет равно

$$\epsilon'_\alpha = - \frac{\Delta(dl)}{dl} = - \frac{\tau_{zy}}{2} \sin 2\alpha. \quad (б)$$

При одновременном действии нормальных и касательных напряжений относительное удлинение ϵ_α в направлении заданного

угла α будет определяться алгебраической суммой ϵ'_α и ϵ''_α :

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_z \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha - \frac{\tau_{zy}}{2} \sin 2\alpha = \frac{\epsilon_z + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_z - \epsilon_y}{2} \cos 2\alpha - \frac{\tau_{zy}}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.28)$$

Последнее выражение получается заменой тригонометрических функций одинарного угла функциями двойного угла.

Математическая аналогия между деформированным и напряженным состояниями. Сравнение выражения (3.28) с формулой (3.1) из теории напряженного состояния позволяет установить, что относительное удлинение ϵ_α в направлении угла α и нормальное напряжение σ_α , действующее в этом же направлении, выражаются аналогичными математическими зависимостями с той лишь разницей, что в формуле (3.1) коэффициентами при тригонометрических функциях являются σ_z , σ_y и τ_{zy} , а в формуле (3.28) — соответственно ϵ_z , ϵ_y и $\frac{1}{2} \tau_{zy}$. В теории упругости доказывается,

что вообще деформированное состояние в точке для изотропного тела обладает свойствами, совершенно аналогичными свойствам напряженного состояния, причем аналогом нормального напряжения является линейная деформация, а аналогом касательного напряжения — половина угла сдвига в соответствующей плоскости. Это делает возможным все формулы из теорий деформаций записать по аналогии с формулами теории напряжений. В частности, угол сдвига для любых двух взаимно перпендикулярных направлений, одно из которых составляет с осью Z угол α по аналогии с (3.2), будет равен

$$\tau_{\alpha, 90+\alpha} = (\epsilon_z - \epsilon_y) \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha. \quad (3.29)$$

Используя указанную аналогию, можно подобно кругу напряжений построить круг деформаций и с его помощью установить направление главных осей деформации и величину главных линейных деформаций. Главными осями деформаций называются такие взаимно перпендикулярные направления, для которых относительный сдвиг равен нулю, а относительные удлинения в этих направлениях — главные деформации — достигают экстремальных значений. Очевидно, для изотропного тела направления главных напряжений и главных деформаций будут совпадать, так как нет никаких причин к тому, чтобы элементарный прямоугольный параллелепипед под действием только главных напряжений превратился бы в косоугольный. Для частиц, испытывающих плоское напряженное состояние, главные деформации определяются через известные относительные удлинения ϵ_z , ϵ_y и относительный сдвиг τ_{zy} по формуле, аналогичной (3.5):

$$\epsilon_{гл} = \frac{\epsilon_z + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_z - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \tau_{zy}^2}.$$

Таким образом, деформациями ϵ_z , ϵ_y и τ_{zy} полностью определяется плоское деформированное состояние.

§ 3.8. ЗАКОН ГУКА ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОМ И ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЯХ

Постановка задачи. В § 1.10 было показано, что линейные деформации ребер сопровождаются возникновением нормальных напряжений, а угловые деформации (сдвиг) — возникновением касательных напряжений. Задачей данного исследования является получение зависимости между упругими деформациями и напряжениями в случаях пространственного и плоского напряженных состояний.

В пределах малых деформаций указанная зависимость для изотропных материалов устанавливается на основе закона Гука (2.1) и (2.2) и принципа независимости действия сил.

Выражение деформаций через напряжения. Рассмотрим самый общий случай напряженного состояния элементарной частицы (рис. 3.21). Согласно принципу независимости действия сил это напряженное состояние можно представить как сумму двух более простых напряженных состояний, показанных на рис. 3.21а; в свою очередь каждое из них можно разложить еще на три простейших напряженных состояния (рис. 3.21б, в).

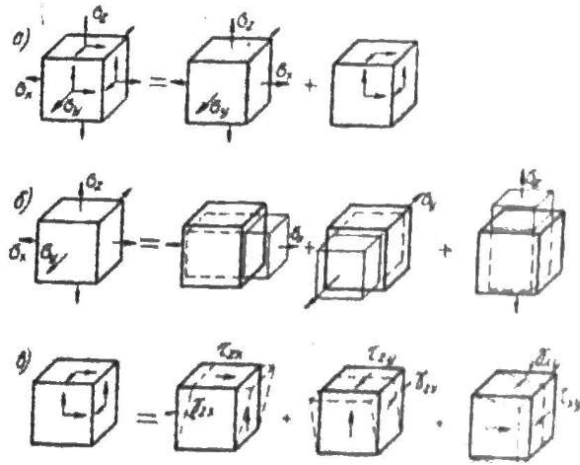


Рис. 3.21

При действии только напряжений σ_x (рис. 3.21б) ребра, параллельные вектору этого напряжения, удлиняются согласно закону Гука (2.1) на величину $\epsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$. Одновременно с этим поперечные по отношению к этому вектору размеры частицы уменьшаются и соответствующие деформации в направлении осей Y и Z будут равны:

$$\epsilon'_y = \epsilon'_z = -\mu \epsilon'_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E}.$$

Аналогично могут быть вычислены деформации и при действии только σ_y и только σ_z (таблица 2).

Таблица 2

Действующее напряжение	Относительные деформации		
	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z
σ_x	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_x}{E}$
σ_y	$-\mu \frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_y}{E}$
σ_z	$-\mu \frac{\sigma_z}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_z}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$

Суммируя составляющие деформаций в направлении каждой из осей, получим для полных линейных деформаций при одновременном действии всех трех нормальных напряжений следующие выражения:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Угловая деформация в любой из координатных плоскостей определяется только соответствующим касательным напряжением. Так, сдвиг γ_{xy} в плоскости XY (рис. 3.21в) зависит только от касательных напряжений τ_{xy} (и τ_{yx}); другие пары касательных напряжений не будут влиять на величину γ_{xy} . Поэтому при одновременном воздействии всех касательных напряжений:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \quad (3.31)$$

При наличии напряжений только в одной плоскости, например в плоскости ZY , зависимости между напряжениями и деформациями принимают вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu\sigma_y), \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_z), \\ \epsilon_x &= -\frac{\mu}{E} (\sigma_z + \sigma_y), \\ \gamma_{zy} &= \frac{\tau_{zy}}{G}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Выражения (3.30) → (3.32) носят название обобщенного закона Гука соответственно при объемном и плоском напряженных состояниях.

Разрешая уравнения (3.32) относительно напряжений, найдем:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu\epsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu\epsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Этими выражениями широко пользуются для вычисления напряжений по экспериментально замеренным деформациям. Величины напряжений и деформаций в формулах (3.30) → (3.33) вводятся со своими знаками.

Связь между тремя упругими константами. Физические свойства упругих изотропных материалов при постоянной температуре характеризуются тремя константами E , G и μ . При этом только две из них являются независимыми, а третья связана с двумя определенным соотношением. Для установления этой связи воспользуемся уравнением (3.29). Так как у изотропных материалов величины упругих констант E , G и μ не зависят от выбора направления, то для упрощения вывода положим $\alpha = 45^\circ$. Заменив в (3.29) деформации напряжениями по формулам (3.32) и учитывая, что $\gamma_{\alpha, 90+\alpha}$ согласно закону Гука при сдвиге и зависимости (3.2) может быть (при $\alpha = 45^\circ$) представлен в виде

$$\gamma_{\alpha, 90+\alpha} = \frac{\tau_\alpha}{G} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2G},$$

получим следующее равенство:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2G} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)(1 + \mu)}{E}.$$

Откуда и устанавливаем

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.\quad (3.34)$$

Определив из опыта на растяжение или кручение любые две константы, третью можно вычислить по установленному соотношению (3.34).

§ 3.7. ОЦЕНКА ОПАСНОСТИ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ МЕТОДОМ СРАВНЕНИЯ. КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Постановка задачи. В § 2.10 была рассмотрена оценка прочности материала при одноосном растяжении—сжатии и чистом сдвиге. Делалось это просто сопоставлением наибольшего напря-

жения в опасной точке бруса с допускаемым напряжением для данного материала:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &\leq \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n} = [\sigma], \\ \tau_{\max} &\leq \frac{\tau_{\text{пред}}}{n} = [\tau].\end{aligned}\quad (3.35)$$

Там же было обращено внимание на то, что напряженные состояния частиц бруса, проверяемого на прочность, и частиц испытанных образцов, на которых были установлены предельные значения напряжений, всегда должны быть однотипными. Тогда же остался открытым вопрос оценки прочности бруса в тех его точках, для которых по площадкам, совпадающим с поперечными сечениями, действуют одновременно и σ_x и τ_{xy} . Теперь мы уже знаем, что напряженное состояние этих точек характеризуется главными напряжениями, представляющими экстремальные значения напряжений в точке.

Как же оценить прочность материала тех частиц, по граням которых действуют два или все три отличные от нуля главные напряжения, т. е. частиц, испытывающих сложное напряженное состояние? Первое, что напрашивается по аналогии с оценкой прочности частиц в линейном напряженном состоянии, — это установить из опыта для данного материала предельные значения всех трех напряжений (σ_1)_{пред}, (σ_2)_{пред}, (σ_3)_{пред} и, сравнив их с главными напряжениями в опасной точке исследуемого тела, определить коэффициент запаса. При этом надо иметь в виду, что в условиях сложной деформации опасное состояние тела наступает при вполне определенных величинах σ_1^* , σ_2^* , σ_3^* , свойственных лишь данному телу и зависящих как от соотношения между напряжениями, так и от их знака. Поэтому установленные опытом предельные для данного материала значения главных напряжений (σ_1)_{пред}, (σ_2)_{пред}, (σ_3)_{пред} будут пригодны для оценки прочности только в тех опасных точках, для которых между величинами σ_1 , σ_2 и σ_3 имеет место такое же соотношение, что и между предельными напряжениями. А так как количество возможных соотношений между главными напряжениями в опасных точках тел неисчерпаемо, то физически невозможно экспериментальным путем установить для всех их предельные значения. Кроме того, опыты по созданию в образцах плоского, а тем более объемного напряженного состояния практически трудно осуществимы и под силу лишь отдельным научно-исследовательским, но не производственным лабораториям. Из всего изложенного следует, что чисто эмпирический подход к оценке прочности материала при сложном напряженном состоянии является неприемлемым. Необходимо создание *общего метода оценки прочности*, позволяющего теоретическим путем установить условия наступления опасного (предельного) состояния.

Эквивалентное напряжение. При современном состоянии науки о прочности пока еще не представляется возможным построить теорию, объясняющую процессы деформации и разрушения тел исходя из атомного их строения. Поэтому приходится делать допущение о том, что *предельное состояние*, при котором происходит качественное изменение свойств материала в *опасной точке тела, определяется только напряженным состоянием в этой точке.* Значит, для суждения о степени опасности того или иного напряженного состояния надо найти возможный сравнить его с предельным (опасным) состоянием.

Невозможность получения непосредственно из опыта предельных величин главных напряжений для сложного напряженного состояния приводит к необходимости и в этом случае использовать экспериментальные результаты, полученные при одноосном растяжении или сжатии. Но как сравнить, сопоставить частицы А и В (рис. 3.22), если их напряженное состояние неоднотипно? Такое сравнение можно сделать, но только по величине того

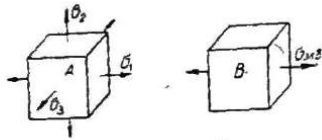


Рис. 3.22

фактора, который обуславливает наступление опасного состояния в обеих частицах. Причем за эталон (эквивалент) сравнения принимается величина выбранного фактора в линейно напряженной частице в опасном ее состоянии текучести или разрушения. В связи с этим главное напряжение в этой частице называется *эквивалентным* напряжением. Таким образом, $\sigma_{\text{экв}}$ можно рассматривать как такое напряжение в растянутом образце, при котором его напряженное состояние было бы равноопасно с рассматриваемым напряженным состоянием.

Два вида разрушения твердых тел. Критерии прочности и пластичности. Факторы, позволяющие сравнивать прочность тел, находящихся в различных напряженных состояниях, называются *критериями прочности и пластичности.* Выбор критерия зависит от того, из-за какой причины происходит наступление текучести у пластичных материалов и разрушение хрупких материалов.

Встречаются в основном два вида разрушения — хрупкое и пластическое (вязкое). Первому предшествует возникновение трещин и разрыв волокон, второе же начинается с возникновения и развития пластических (остаточных) деформаций. Установлено, что пластическая деформация происходит путем скольжения, сдвига одних частиц материала относительно других и, следовательно, теснейшим образом связана с касательными напряжениями.

Если данный материал лучше сопротивляется разрыву волокон, то нарушение его прочности выразится в возникновении пластических деформаций, обусловленных действием максимальных или октаэдрических касательных напряжений.

Если же материал сопротивляется сдвигу лучше, чем разрыву волокон, то при достаточно высокой напряженности возникнут трещины, вследствие чего разрушение наступит внезапно и будет носить хрупкий характер. Очевидно, в этом случае за критерий прочности надо взять величины главных напряжений и наибольших линейных деформаций.

Указанные факторы: $\sigma_{\text{тах}}$, $\sigma_{\text{окт}}$, $\sigma_{\text{главн}}$, $\epsilon_{\text{тах}}$ и принимаются за критерии пластичности и прочности.

После того как выбор критерия сделан, его выражают через главные напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 исследуемого напряженного состояния и через $\sigma_{\text{экв}}$ эквивалентного напряженного состояния. Приравняв эти два выражения, находят $\sigma_{\text{экв}}$, составляют условие прочности $\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma]$ и делают заключение о достаточной или малой прочности исследуемого напряженного состояния.

Каждое обоснованное предложение критерия, определяющего условия перехода материала в опасное состояние, называют гипотезой прочности.

Поскольку предлагаемые критерии не отражают существа внутренних процессов, происходящих в материале при переходе его в предельное состояние, а лишь позволяют установить признаки для сравнения прочности при различных напряженных состояниях, то, естественно, они не являются универсальными для всех материалов и видов разрушения. Бывает так, что гипотеза, пригодная для одного материала и хорошо подтверждаемая контрольными испытаниями, оказывается неприемлемой для другого, так как расходится с результатами опытов.

Поэтому не следует удивляться тому, что в настоящее время имеется целый ряд гипотез прочности, и все они лишь в той или иной степени могут считаться приемлемыми.

§ 3.8. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

1. **Первая гипотеза** была высказана еще в начале XVII века знаменитым итальянским ученым Галилеем. В качестве критерия предельного состояния (разрушения) хрупких материалов им предлагалось наибольшее нормальное напряжение σ_1 . Основанием к тому послужило разрушение хрупких материалов путем отрыва одной части от другой. Согласно этой гипотезе два напряженных состояния А и В, показанные на рис. 3.22, являются равноопасными, если наибольшие главные напряжения у них одинаковы, т. е. если $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1$. Влияние на прочность двух других главных напряжений по этой гипотезе во внимание не принималось, что не соответствует действительности. В настоящее время эта гипотеза в расчетах не используется.

2. **Вторая гипотеза** в качестве критерия хрупкого разрушения выдвигает наибольшую положительную линейную деформацию. Основанием для такого предложения послужило разрушение

путем отрыва вследствие чрезмерного увеличения расстояния между частицами. Согласно этой гипотезе два напряженных состояния — исследуемое объемное и простое одноосное — являются равноопасными, если наибольшие линейные деформации у них одинаковы. Отсюда следует, что напряженное состояние в исследуемой точке будет предельным при достижении наибольшим удлинением $(\epsilon_{\max})_{\text{иссл}}$ в ней такой величины $(\epsilon_{\max})_{\text{экр}}$, при которой происходит разрушение растягиваемого образца из данного материала.

Учитывая, что для хрупких материалов формулы обобщенного закона Гука (3.30) с некоторым приближением могут быть применены вплоть до разрушения, условие эквивалентности в деформациях

$$(\epsilon_{\max})_{\text{иссл}} = (\epsilon_{\max})_{\text{экр}} \quad (3.36)$$

выразим через напряжения

$$\frac{1}{E} \left[\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) \right] = \frac{\sigma_{\text{экр}}}{E} \quad (3.37)$$

Откуда условие эквивалентности и прочности будет иметь вид:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (3.38)$$

Для хрупких материалов эта гипотеза удовлетворительно подтверждается опытами только при напряженных состояниях смешанного типа, когда σ_1 и σ_3 разного знака, причем $\sigma_1 > |\sigma_3|$. При двухосных растяжениях согласно условию эквивалентности (3.38)

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \mu \sigma_2$$

оказывается меньше эквивалентного напряжения одноосного растяжения $\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1$. Значит, и прочность материала в первом случае, казалось бы, должна быть выше, чем во втором. На самом же деле это не так. Вследствие этого и других недостатков расчеты на прочность по второй гипотезе практически не производятся.

3. Третьей по счету принято называть гипотезу наибольших касательных напряжений. Эта гипотеза предложена для пластичных материалов, разрушение которых происходит после значительных пластических деформаций, обусловленных касательными напряжениями. Опасным (предельным) для таких материалов является переход из упругого состояния в пластическое, вследствие чего критерии предельного состояния называются критериями пластичности. В качестве критерия пластичности третьей гипотезой предлагается наибольшее касательное напряжение (3.8)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Согласно этой гипотезе два напряженных состояния считаются равноопасными, если максимальные касательные напряжения для них одинаковы, т. е.

$$(\tau_{\max})_{\text{иссл}} = (\tau_{\max})_{\text{экр}}$$

Учитывая, что при одноосном растяжении, принятом за эквивалент сравнения, наибольшее касательное напряжение равно

$$(\tau_{\max})_{\text{экр}} = \frac{\sigma_{\text{экр}}}{2}$$

будем иметь следующую формулу эквивалентности и прочности

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (3.39)$$

Следовательно, пластические деформации в исследуемой точке со сложным напряженным состоянием возникнут в том случае, когда величина эквивалентного напряжения в ней достигнет предела текучести σ_T , установленного при простом растяжении образца из данного материала. Это утверждение достаточно хорошо подтверждается опытами с пластичными материалами в условиях плоского напряженного состояния.

4. Гипотеза октаэдрических касательных напряжений. Как следует из самого названия, этой гипотезой в качестве критерия пластичности выдвигается касательное напряжение на октаэдрической площадке (3.27)

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (3.27)$$

Согласно данной гипотезе сложное напряженное состояние будет равноопасно одноосному растяжению, принятому за эквивалент сравнения, только при условии соблюдения следующего равенства:

$$(\tau_{\text{окт}})_{\text{иссл}} = (\tau_{\text{окт}})_{\text{экр}}$$

Подставляя сюда значение (3.27) октаэдрического напряжения для исследуемого объемного состояния и значение

$$(\tau_{\text{окт}})_{\text{экр}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{\text{экр}}$$

при одноосном растяжении (получаемое из (3.27) подстановкой $\sigma_1 = \sigma_{\text{экр}}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), устанавливаем следующую формулу эквивалентности и прочности:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma] \quad (3.40)$$

К такому же выражению для эквивалентного напряжения можно было прийти, если в качестве критерия пластичности принять потенциальную энергию, накопленную в единице объема элементарного кубика при его деформации, сопровождающейся только изменением формы (см., например, [1]).

Опытная проверка этой гипотезы на пластичных материалах в условиях плоского напряженного состояния дала хорошие результаты. Совпадение расчетных данных с опытными оказалось

более лучшим, чем по третьей гипотезе, расчет по которой приводит к завышенному запасу прочности.

Однако обе эти гипотезы не могут быть рекомендованы при напряженном состоянии, близком к всестороннему равномерному растяжению. В самом деле, для напряженного состояния с $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ эквивалентное напряжение по этим гипотезам равняется нулю и, следовательно, должно быть равноценно состоянию ненагруженного образца, что не соответствует действительности.

5. Теория предельных состояний, предложенная О. Мором. В предложенном Мором подходе к вопросу оценки прочности сложного напряженного состояния по сути не содержится гипотезы о критерии предельного состояния. Его теория основана на графическом изображении зависимости между предельными напряжениями σ_1 и σ_3 , полученными опытным путем при различных напряженных состояниях, и логическом обобщении этих результатов. Единственным допущением в этой теории является пренебрежение влиянием промежуточного главного напряжения σ_2 .

Предположим, что мы располагаем возможностью провести опыты с образцами из исследуемого материала, неодинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию при различных видах напряженных состояний.

Допустим, что пропорциональным увеличением всех напряжений нам удалось довести образцы с напряженными состояниями А и В, указанными на рис. 3. 23, до предельного состояния, например, до разрушения.

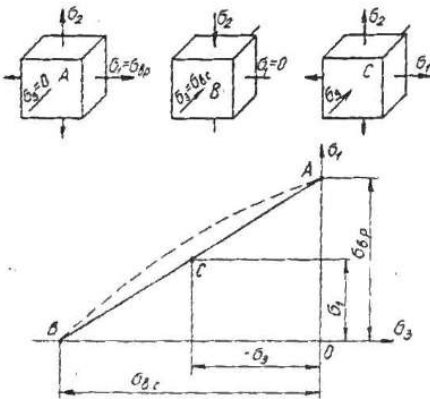


Рис. 3.23

Пренебрегая влиянием главного напряжения σ_2 , изображаем эти состояния на диаграмме в координатах $\sigma_1 - \sigma_3$. Напряженному состоянию А на диаграмме соответствует точка А с ординатой, равной пределу прочности при растяжении $(\sigma_B)_p$, и абсциссой $\sigma_3 = 0$. Напряженному состоянию В на диаграмме соответствует точка В с координатами $\sigma_3 = (-\sigma_B)_c$ и $\sigma_1 = 0$. Для точного построения графика предельных напряжений (пунктирная кривая АВ на рис. 3. 23) понадобилось бы провести большое число экспериментов с образцами из данного материала при различных соотношениях между σ_1 и σ_3 (рис. 3. 23). Опыты показывают, что для каждого материала кривая предельных напряженных состояний является единственной независимо от величины напряжения σ_2 . Форма этой кривой определяется свойствами материала и является его механической характеристикой. Имея такую кривую, нетрудно путем ее аппроксимации получить аналитиче-

ское уравнение предельных состояний или хотя бы графически установить коэффициент запаса для заданного напряженного состояния.

Практически поступают проще: в запас прочности кривую АВ заменяют прямой АВ, уравнение которой

$$\frac{\sigma_1}{(\sigma_B)_p} + \frac{\sigma_3}{(-\sigma_B)_c} = 1 \quad \text{или} \quad \sigma_1 - \frac{(\sigma_B)_p}{(\sigma_B)_c} \sigma_3 = [(\sigma_B)_p]$$

и будет определять предельные состояния для данного материала. Левая часть этого уравнения представляет собой эквивалентное напряжение по теории Мора. Обозначая отношение предела прочности при растяжении к пределу прочности при сжатии через

$$\nu = \frac{(\sigma_B)_p}{(\sigma_B)_c},$$

будем иметь условие эквивалентности и прочности

$$\sigma_{экр} = \sigma_1 - \nu \sigma_3 \leq [\sigma]_p. \quad (3.41)$$

Для материалов, предельным состоянием которых является переход из упругого в пластическое состояние, при вычислении ν следует брать отношение условных пределов текучести

$$\nu = \frac{(\sigma_T)_p}{(\sigma_T)_c}.$$

У пластичных материалов эти напряжения одинаковы ($\nu = 1$) и формула эквивалентности (3.41) переходит в (3.39). Таким образом, третью теорию можно рассматривать как частный случай теории Мора. Следует обратить внимание на границы применимости полученной формулы эквивалентности (3.41). Она пригодна как для пластичных, так и хрупких материалов, находящихся в условиях напряженного состояния смешанного типа, т. е. при

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} \leq 0.$$

Напряженное состояние брусьев относится именно к этому типу, вследствие чего теория Мора в инженерных расчетах нашла большое признание.

О выборе гипотезы прочности. Третья и четвертая гипотезы прочности за опасное состояние принимают наступление текучести, поэтому они используются только для пластичных материалов, причем с экспериментальными данными лучше согласуется гипотеза октаэдрических касательных напряжений.

Гипотеза прочности Мора применима как для пластичных, так и для хрупких материалов, но только для тех напряженных состояний, у которых $\frac{\sigma_3}{\sigma_1} < 0$.

Возможность применения указанных гипотез при трехосном (объемном) напряженном состоянии экспериментально не доказана. Гипотез, пригодных для проверки прочности материала, находящегося в состоянии, близком к всестороннему растяжению или сжатию, пока еще не имеется.

§ 3.9. ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ БРУСА

В § 2. 10 был рассмотрен вопрос об оценке прочности при простейших деформациях бруса, когда опасные частицы находятся в условиях одноосного растяжения (сжатия) или чистого сдвига. Теперь имеется возможность оценить прочность любых частиц бруса.

В § 3. 1 было установлено, что даже в самом общем случае деформирования бруса (при нагрузке произвольного направления) напряженное состояние частиц, у которых по граням, совпадающим с поперечным сечением бруса, одновременно действуют σ_z и τ_z , является упрощенным плоским. Такое напряженное состояние характеризуется главными напряжениями σ_1 , σ_3 и $\sigma_2=0$, связанными с напряжениями σ_z и τ_z зависимостями (3. 10), и оценка его прочности выполняется по соответствующей гипотезе прочности путем вычисления эквивалентного напряжения $\sigma_{экр}$ и сравнения его величины с допускаемым напряжением.

Главные напряжения в выражениях для $\sigma_{экр}$ при расчете бруса удобнее, во избежание лишних вычислений, заменить напряжениями σ_z и τ_z в поперечных сечениях согласно (3. 10). Выполнив такие преобразования для трех последних гипотез, будем иметь следующие условия прочности:

по гипотезе наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{экр} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} \leq [\sigma], \quad (3. 42)$$

по гипотезе октаэдрических касательных напряжений

$$\sigma_{экр} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} \leq [\sigma], \quad (3. 43)$$

по теории Мора

$$\sigma_{экр} = \frac{1-\nu}{2}\sigma_z + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} \leq [\sigma]_p. \quad (3. 44)$$

Следует заметить, что условие прочности в случае одноосного напряженного состояния, характеризуемого одним главным напряжением $\sigma_1=\sigma_z$ при растяжении и $\sigma_3=-\sigma_z$ при сжатии, по любой гипотезе приводится к одному и тому же виду ($\tau_z=0$)

$$\sigma_z \leq [\sigma]. \quad (a)$$

В частном случае плоского напряженного состояния—чистом сдвиге, когда по граням элемента действуют только касательные

напряжения $\tau_z = \tau_{max}$, все гипотезы также приводят к одному и тому же условию прочности*

$$\tau_{max} \leq [\tau]. \quad (b)$$

Выполненный в § 3. 3 анализ напряженного состояния бруса при простейших деформациях позволяет теперь сделать заключение по оценке его прочности при этих деформациях.

При растяжении частицы бруса находятся в линейном напряженном состоянии с главными напряжениями σ_1 , равными напряжениям $\sigma_z = \frac{N_z}{F}$ в поперечных сечениях. Им и определяется

по условию (a) прочное сопротивление бруса деформированию, о чем указывалось на стр. 89.

При кручении частицы бруса испытывают деформацию чистого сдвига. А так как наибольшие касательные напряжения возникают в поперечных сечениях, то согласно только что сказанному условию прочности

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_p} \leq [\tau]$$

остается таким же, каким мы его приняли на стр. 89. При этом брусья из пластичных материалов при достижении предельного состояния могут разрушиться от сдвига по плоскости поперечного сечения (рис. 3. 24 a), а брусья из хрупких материалов—от разрыва под действием $\sigma_1 = \tau_{max}$ по винтовой поверхности (рис. 3. 24 б),

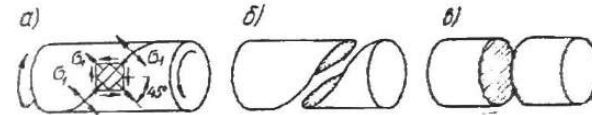


Рис. 3.24

наклоненной к оси бруса под углом примерно 45°. Это объясняется тем, что пластичные материалы сопротивляются сдвигу хуже, чем растяжению; хрупкие же материалы сопротивляются растяжению много хуже, чем сжатию и даже сдвигу.

При поперечном изгибе брусьев напряженное состояние частиц в зависимости от их расположения по высоте сечения оказывается неодинаковым, и потому для установления опасной точки сечения и проверки ее прочности приходится рассматривать несколько точек. Из них наиболее вероятными оказываются следующие.

1. Наиболее удаленные от нейтральной оси точки сечения, в котором изгибающий момент имеет наибольшую величину (см., например, точки I в сечении I—I, рис. 3. 25). Здесь напряженное

* Выбор той или иной теории прочности скажется лишь на величине $[\tau]$.

состояние является одноосным, или приближенно может быть принято за одноосное ввиду малой величины τ_z по сравнению с σ_z . Поэтому условие прочности при симметричности сечения относительно нейтральной оси по любой гипотезе будет иметь вид:

$$\sigma_1 = (\sigma_z)_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]_p,$$

$$\sigma_3 = (\sigma_z)_{\min} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]_c,$$

т. е. такой, каким он был принят ранее на стр. 89.

2. Точки, расположенные на нейтральной оси сечения, в котором поперечная сила имеет наибольшую величину (например, точка 3 в сечении I—I, рис. 3.25). Частицы материала в этих

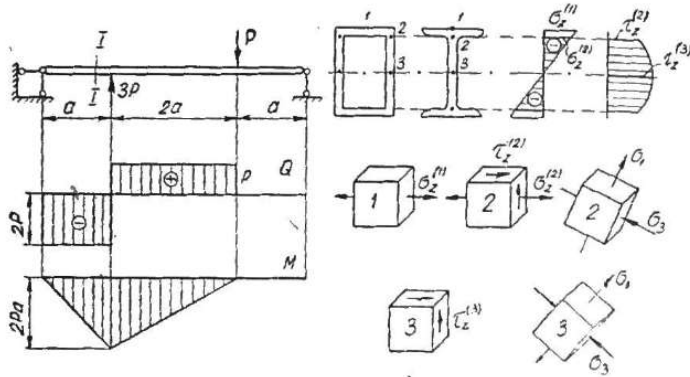


Рис. 3.25

точках испытывают деформацию чистого сдвига и потому условие прочности записывается в виде (2.62z):

$$(\tau_{zy})_{\max} = \frac{Q(S_x)_{\max}}{I_x b} \leq [\tau].$$

3. Промежуточные точки сечения находятся в условиях упрощенного плоского напряженного состояния и проверка их прочности выполняется по одному из уравнений (3.42), (3.43), (3.44) в зависимости от механических свойств материала.

Из этих выражений следует, что $\sigma_{\text{экт}}$ в брусках будет достигать максимальных значений только в тех точках сечения, для которых и σ_z и τ_z являются одновременно большими.

При поперечном изгибе такие случаи могут встретиться в двутавровых и прямоугольных пустотелых брусках в тех сечениях, где одновременно изгибающий момент M и поперечная сила Q достаточно велики. Опасными в таких сечениях могут оказаться точки в местах резкого изменения ширины сечения, например, на границе между полкой и стенкой двутавра (точка 2 в сечении I—I, рис. 3.25).

Пример такого расчета бруса двутаврового сечения рассмотрен в задаче 38 на стр. 107 [6].

Отметим, что расчеты на прочность по эквивалентным напряжениям в промежуточных точках сечения, равно как и по τ_{\max} на нейтральной оси, являются обычно поверочными и выполняются они после того, как требуемая величина W_x определена по формуле $W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]}$ и выбраны размеры сечения. В случае неудовлет-

ворительных результатов такой проверки размеры сечения следует увеличить.

После изучения этой главы следует разобрать решение задач 31-38 пособия [6].