

Глава 3

Устойчивость пластин.

Классификация пластин. Дифференциальные уравнения изгиба пластин.

Вывод дифференциального уравнения изгиба пластин даётся в курсе строительной механики.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F = E \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] & (a) \\ D \frac{\partial^2}{\partial y^2} W = p + h \underbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)}_{\xi} & (b) \end{cases} \quad (1) - \text{уравнения Кармана}$$

(1) – основная система разрешающих уравнений теории изгиба пластин

E – модуль Юнга

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жёсткость

p – поперечная распределённая нагрузка (давление)

h – толщина

F – функция напряжений (через неё выражаются все усилия, отнесённые к средней линии пластины)

$$T_1 = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz$$

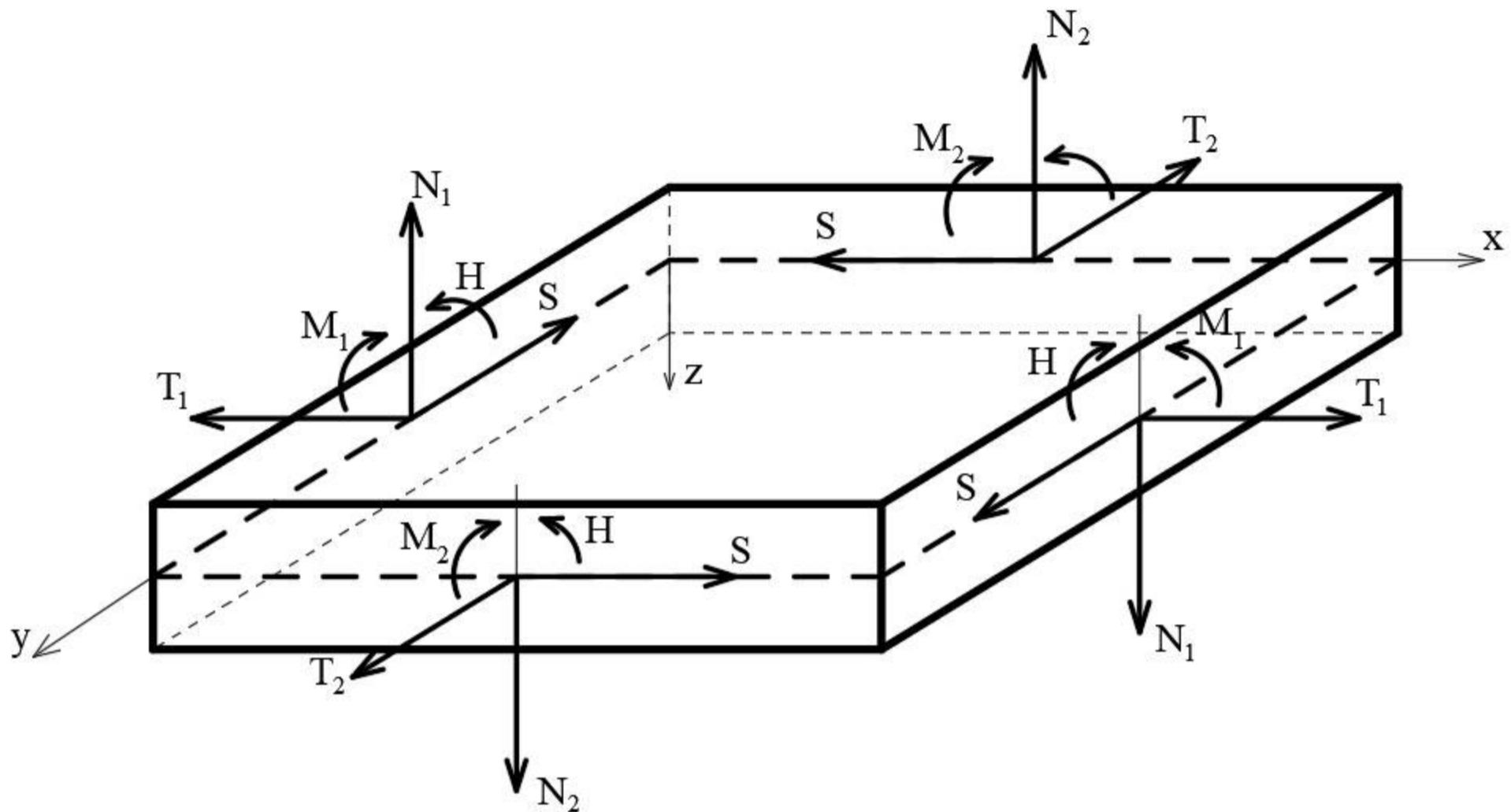
$$T_2 = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz$$

$$S = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz$$

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz$$

$$M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz$$

$$H = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz$$



Границные условия:

Для свободно опёртой кромки:

$W = 0$ – прогиб

$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$ – момент

Для жёсткой заделки:

$W = 0$ – прогиб

$\frac{\partial W}{\partial x} = 0$ – угол поворота

Для абсолютно свободной кромки:

$M_1 = 0$ – момент

$H = 0$ – момент в другой плоскости

$N_1 = 0$ – перерезывающая сила

При изучении изгиба пластин и, как следствие, задачи устойчивости, независимо друг от друга решаются две задачи:

- 1) Отыскание усилий в срединной поверхности (то есть плоской задачи теории упругости)
- 2) Задача изгиба срединной поверхности под действием этих усилий

Исходя из этих уравнений и особенностей поведения пластин под нагрузкой, пластины условно можно разделить на:

1. Жёсткие пластины

Прогиб мал, влиянием цепных усилий на прогиб можно пренебречь (T_1, T_2, S). Тогда уравнение (16) примет вид:

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p(x, y) \quad (2)$$

В этом случае прогиб определяется независимо от функции напряжений и этим уравнением можно пользоваться во всех случаях отсутствия цепных усилий в срединной поверхности. К этой категории относят пластины днища морских судов.

2. Гибкие пластины малого прогиба

Из-за малости прогиба можно пренебречь нелинейными выражениями для прогиба в уравнении (1a) как величинами второго порядка малости

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} F = 0 \quad (3)$$

Функция F определяется независимо от прогибов, а прогиб определяется по формуле (16).

Интегрирование уравнения (16) вызывает трудности, так как оно хоть и линейно относительно W , но имеет переменные коэффициенты.

Система уравнений (3) и (16) представляет особый интерес для исследования устойчивости пластины в малом, то есть в линейной теории устойчивости.

3. Гибкие пластины большого прогиба

В этом случае влияние прогиба и цепных усилий значительно, используется полная система уравнений Кармана (1) в чистом виде). К таким пластинаам относятся пластины, несущие значительную поперечную нагрузку при наличии распоров.

4. Абсолютно гибкие пластины (мембранны)

Их изгибная жёсткость пренебрежимо мала, то есть воспринимаются только цепные усилия. Уравнение (16) запишется следующим образом:

$$\xi = -\frac{P}{h} \quad (4)$$

В судовых конструкциях абсолютно гибких пластин не встречается. Условно к ним можно отнести пластину, всесторонне растянутую равномерными усилиями, где поперечная нагрузка P вызывает малые прогибы.

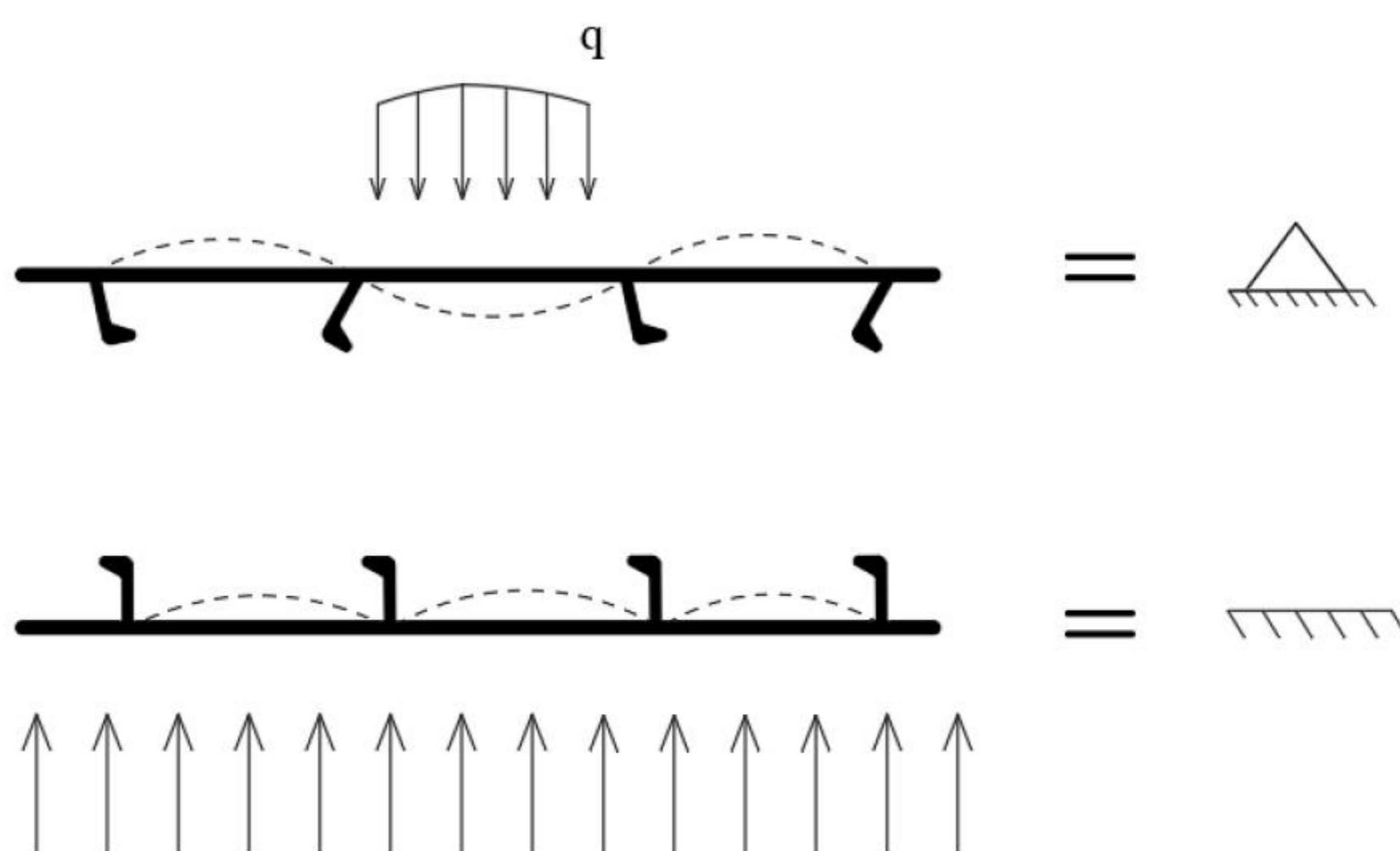
Тогда уравнение **(1а)**, в результате пренебрежения нелинейной частью, удовлетворяется тождественно, а **(4)** примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{P}{h}$$

В судостроении имеют место жёсткие пластины и гибкие небольшого прогиба. Строительная механика корабля изучает именно эти типы пластин. Классификация условна, строго тип пластины можно установить только после решения системы **(1)**, но иногда на практике можно предположить тип заранее и соответственно упростить уравнение Кармана.

Устойчивость прямоугольных пластин.

Судовые пластины преимущественно являются прямоугольными, кроме того, преимущественный характер нагрузок для пластин палубы и днища – одноосное растяжение-сжатие, для пластин борта – изгиб в своей плоскости и сдвиг. В зависимости от расположения и поперечной нагрузки пластины, граничные условия на её кромках варьируются от свободного опирания до жёсткого защемления.



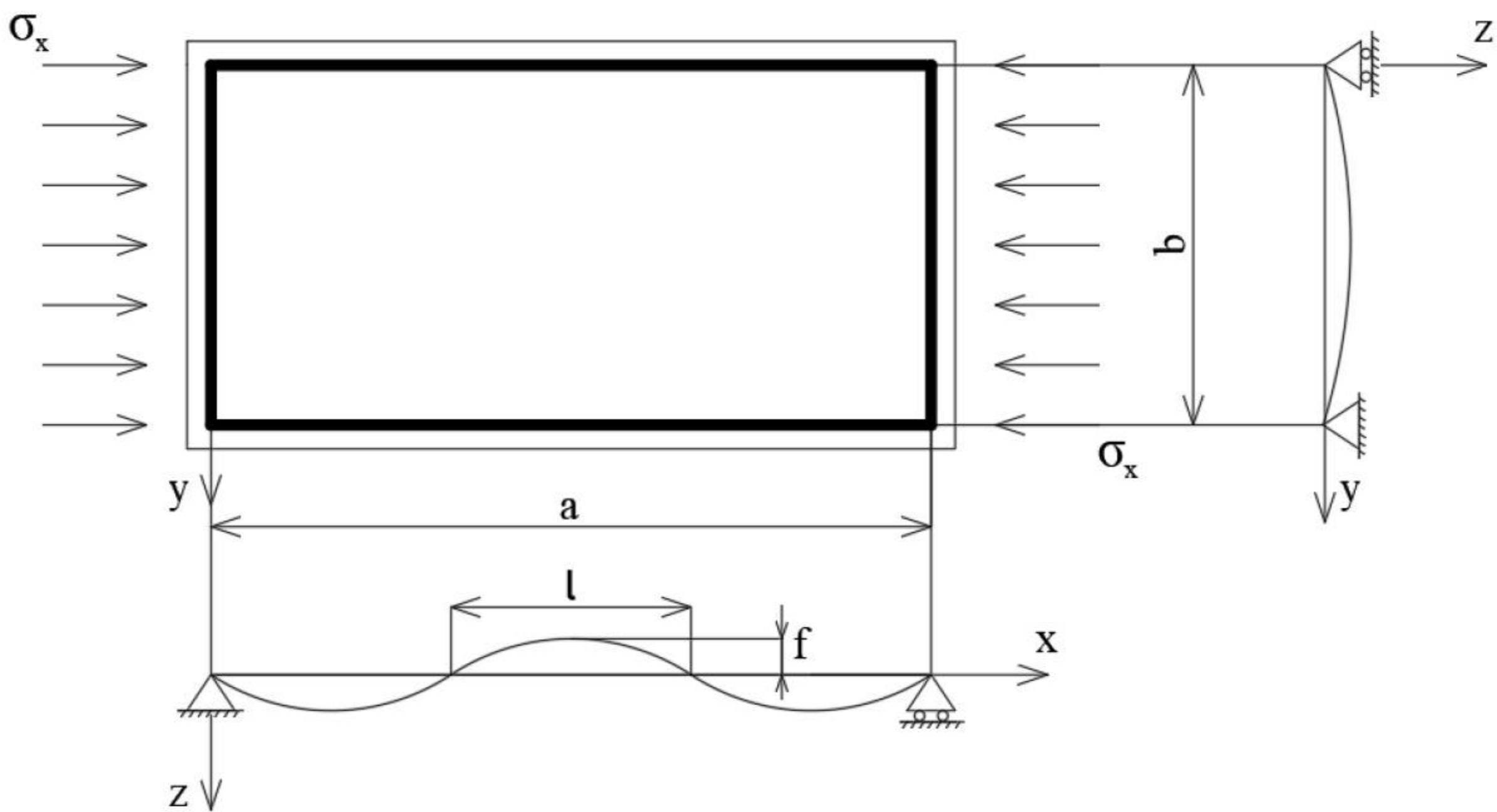
Решение для прямоугольной свободно опёртой бесконечной пластины было предложено в 1888 году Брайаном. Бубнов расширил это решение, разобрав случай всесторонне сжатой пластины (например, пластины обшивки днища). С точки зрения строительной механики корабля, решение Брайана представляет особый интерес, как часто встречающийся случай работы пластины в составе судового перекрытия с балками, обладающими малой жёсткостью на скручивание.

Свободно опёртая прямоугольная пластина при одноосном сжатии $a \gg b$.

Основной метод определения эйлеровой нагрузки пластин, как и в случае стержней, базируется на определении дифференциального уравнения нейтрального равновесия.

Алгоритм решения задачи:

1. Составляем дифференциальное уравнение равновесия, придав пластине малое отклонение от плоского положения равновесия;
2. Задаёмся формой прогиба $W = W(x, y)$, удовлетворяющей граничным условиям и подставляем её в дифференциальное уравнение;
3. Находим наименьшую из нагрузок, при которой удовлетворяется дифференциальное уравнение равновесия.



$$l = \frac{a}{m}$$

m – число полуволн вдоль длинной стороны

Уравнение равновесия будет иметь вид:

$$D \frac{\partial^2}{\partial x^2} W + h\sigma_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{D}{h} \frac{\partial^4}{\partial x^4} W + \sigma_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

Прогиб представляем в виде ряда:

$$W = f \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6)$$

n принята за единицу, так как это будет соответствовать наименьшему значению критической нагрузки, а m и n должны быть выбраны таким образом чтобы нагрузка $T_1 = h\sigma_x$ была минимальной. В рамках одной полуволны вдоль длинной стороны выражение (6) будет выглядеть следующим образом:

$$W = f \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6a)$$

(6) и (6a) удовлетворяют всем граничным условиям.

Граничные условия:

$$\text{При } \begin{cases} y = 0 \\ y = b \end{cases} : W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{При } \begin{cases} x = 0 \\ x = c \end{cases} : W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$$

В случае удлинённой пластины эти граничные условия не имеют значения. Вычисля производные от W вплоть до четвёртого порядка и подставляя их в уравнение (5) получим:

$$\begin{aligned} & \frac{D}{h} \left[f \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} + 2 \frac{f n^2 \pi^2}{b^2 l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} + \frac{f n^4 \pi^4}{b^4} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} \right] + \\ & + \sigma_x \left[-\frac{f \pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b} \right] = 0 \end{aligned}$$

Сокращая данное выражение на произведение синусов, неравное нулю, а также на $f \neq 0$ и на π^2 , получим:

$$\frac{D\pi^2}{h} \left[\frac{1}{l^4} + 2 \frac{n^2}{b^2 l^2} + \frac{n^4}{b^4} \right] - \sigma_x \frac{1}{l^2} = 0$$

$$\frac{D\pi^2}{h} \left[\frac{1}{l^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2 - \sigma_x \frac{1}{l^2} = 0$$

Выразим σ_x :

$$\sigma_x = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \left(\frac{b}{l} + \frac{n^2 l}{b} \right)^2 \quad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой выражение для определения критической нагрузки (критического напряжения) пластины в “классическом” виде.

Выражение (7) нужно исследовать на минимум так как нам необходимо знать минимальное значение σ_x .

1) Из выражения (7) видно, что оно примет минимальное значение при $n = 1$.

2) Найдём отношение $\frac{l}{b}$, при котором σ_x минимально:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \left(\frac{l}{b}\right)} = 0$$

$$\left(\frac{l}{b}\right)^4 \rightarrow \frac{l}{b} = 1, \text{ то есть } l = b$$

То есть изогнутая поверхность удлинённой пластины при свободном опирании продольных кромок в момент потери устойчивости разбивается на квадратные участки размером $b \times b$. В пределах каждого участка образуется одна полуволна синусоиды.

Из уравнения (7):

$$\sigma_x = \sigma_e = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \left(\frac{b}{l} + \frac{l}{b} \right)^2 = 4 \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \quad (8)$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$\sigma_x = 4 \frac{\pi^2 E h^3}{b^2 h \cdot 12(1 - \nu^2)} = 3,6 E \left(\frac{h}{b} \right)^2 \quad (8a)$$

Выражения (8) и (8a) точные, если $\frac{a}{b}$ – целое число. При решении задач устойчивости следует помнить, что критическое напряжение не должно превышать предельного (σ_T).

Устойчивость прямоугольных свободно опёртых пластин при произвольном a/b .

Принимая форму изогнутой поверхности по “расширенному” варианту (по формуле (6)) и выполняя аналогичные, предыдущему параграфу, преобразования:

$$\frac{D \pi^2}{h} \left[\frac{m^4}{a^4} + 2 \frac{n^2 m^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right] - \sigma_x \frac{m^2}{a^2} = 0$$

$$\frac{a}{b} = \gamma \rightarrow \sigma_x = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \left[\frac{m}{\gamma} + \frac{\gamma}{m} n^2 \right]^2 \quad (7a)$$

Принимаем $n = 1$, так как именно при нём σ_x будет минимальным. Исследуем на минимум выражение в скобке. Пусть при каком-то γ образовалось m – полуволны, и σ_x при

этом минимально. Тогда при любом другом числе полуволн это выражение будет больше.

Получаем следующее неравенство:

$$\frac{m-1}{\gamma} + \frac{\gamma}{m-1} > \frac{m}{\gamma} + \frac{\gamma}{m} < \frac{m+1}{\gamma} + \frac{\gamma}{m+1}$$

Левое неравенство можно преобразовать к виду: $\sqrt{m(m-1)}$, а правое, аналогичным образом, будет: $\sqrt{m(m+1)}$. А в итоге получим: $\sqrt{m(m-1)} < \gamma < \sqrt{m(m+1)}$.

Задаваясь числом полуволн m , можно получить соответствующий этому числу диапазон отношений сторон γ .

При $m = 1$: $0 < \gamma < \sqrt{2}$

При $m = 2$: $\sqrt{2} < \gamma < \sqrt{6}$

При $m = 3$: $\sqrt{6} < \gamma < \sqrt{12}$

При $m = 4$: $\sqrt{12} < \gamma < \sqrt{20}$

При $m = 5$: $\sqrt{20} < \gamma < \sqrt{30}$

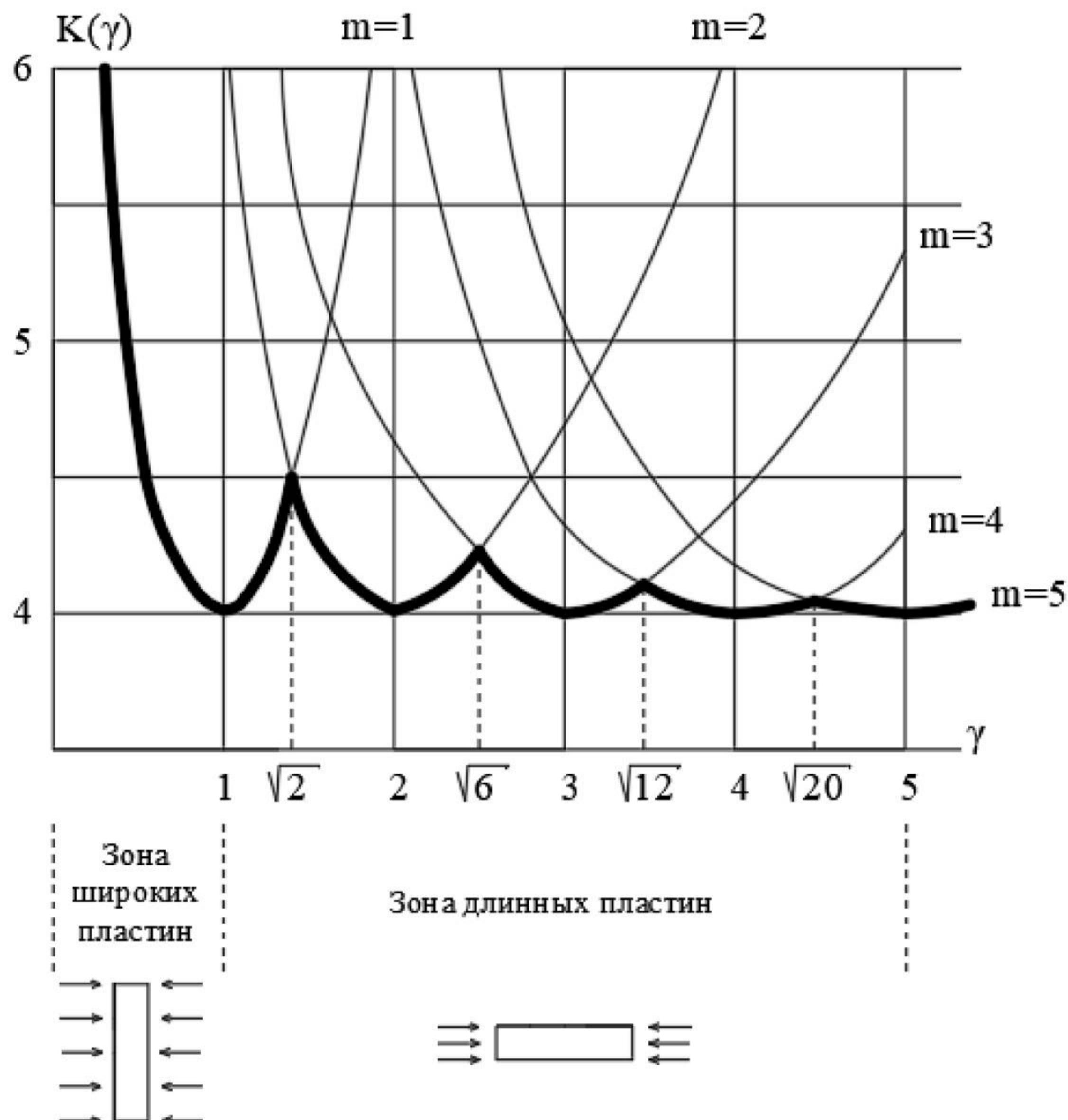
Таким образом, переход на новое число полуволн происходит между целыми значениями γ .

$$K(\gamma) = \left(\frac{m}{\gamma} + \frac{\gamma}{m} \right)^2 = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2$$

$$\sigma_e = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \quad (86)$$

Коэффициенты K для различного отношения сторон можно найти в справочной литературе. Его можно вычислить самостоятельно, построив график $K(\gamma)$.

$$K(\gamma) = \left(\frac{m}{\gamma} + \frac{\gamma}{m} \right)^2$$



Максимальное отклонение от значения 4, к которому стремится данная функция при $\gamma \rightarrow \infty$, имеет место при $\gamma = \sqrt{2}$ ($K = 4,5$). Таким образом, если мы будем пользоваться для всех случаев коэффициентом $K = 4$, мы будем совершать ошибку в безопасную сторону.

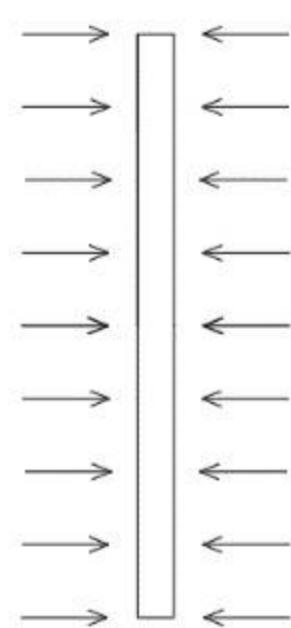
Широкие пластины.

$$\gamma < 1 \quad m = 1$$

$$\sigma_e = (1 + \gamma^2)^2 K \frac{\pi^2 D}{a^2 h}$$

$$\gamma \ll 1 \quad K \rightarrow 1$$

$$\sigma_e \frac{\pi^2 D}{a^2 h}$$



То есть эйлеровы усилия определяются как для свободно опёртой балки-полоски, длиной a и изгибной жёсткостью D .

В СНК применяют также следующие формулы, исходя из характеристик основного конструкционного материала – стали 3 сп: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и $\nu = 0,3$

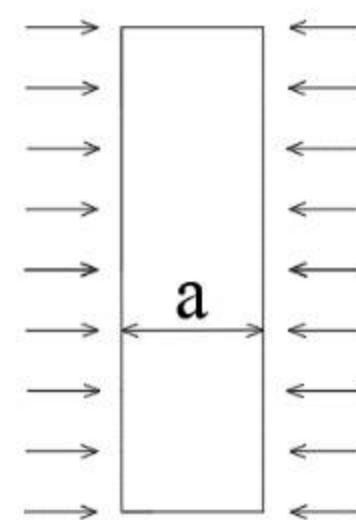
Продольная пластина

$$\sigma_{\vartheta} = 80 \left(\frac{100h}{b} \right)^2, [\text{МПа}]$$



Поперечная пластина

$$\sigma_{\vartheta} = 19 \left(\frac{100h}{a} \right)^2 (1 + \gamma^2)^2, [\text{МПа}]$$



В настоящее время РРР предлагает следующие формулы для определения критических напряжений пластин, сжатых вдоль длинной стороны.

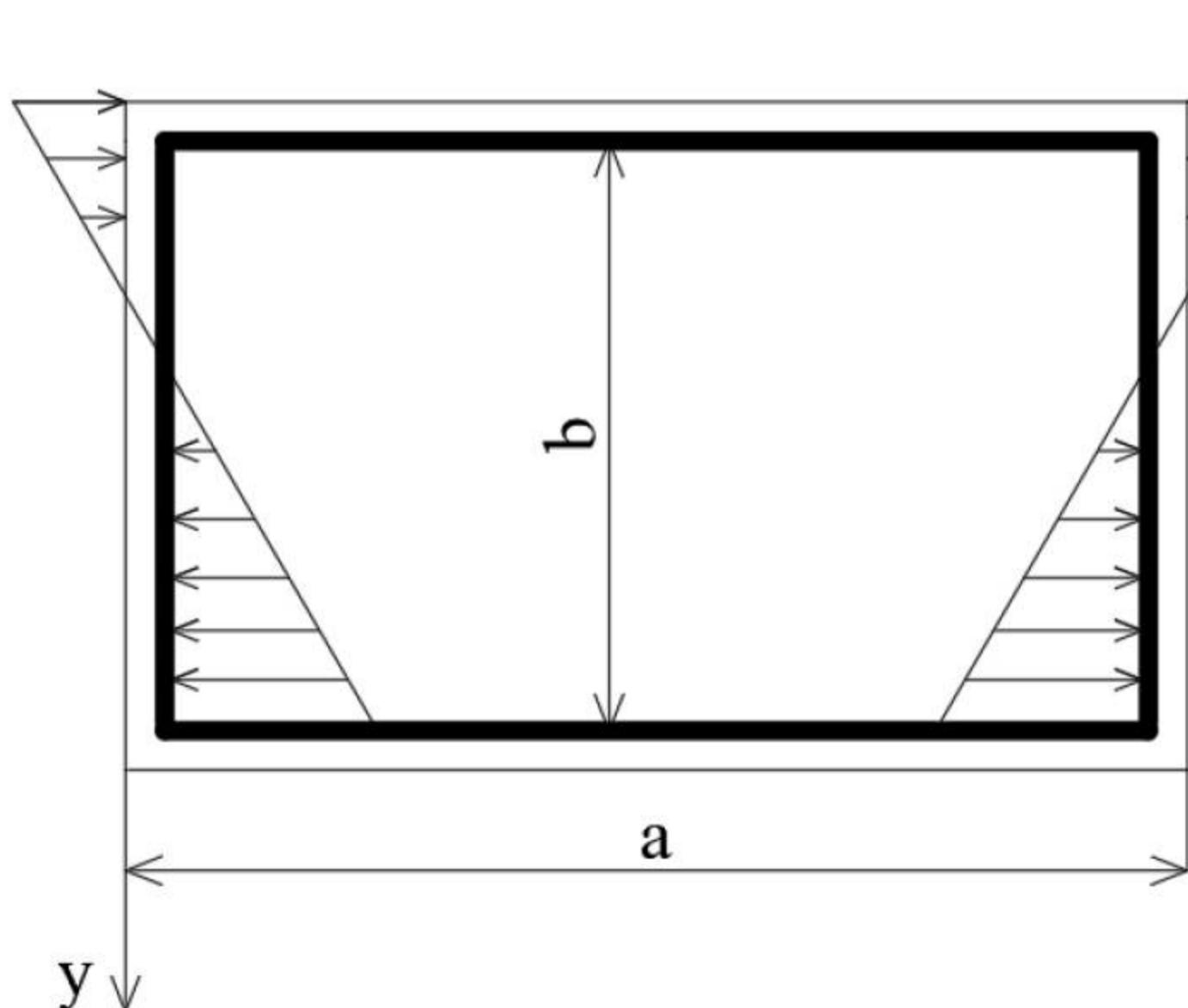
$$\sigma_{kp} = \sigma_{\vartheta} = 78,5 \left(\frac{100h}{b} \right)^2 \quad \sigma \leq 0,6 \sigma_t$$

$$\sigma_{kp} = 1,63 - 0,8 \sqrt{\frac{\sigma_t}{\sigma_{\vartheta}}} \quad 0,6 \sigma_t < \sigma_{\vartheta} < 1,6 \sigma_t$$

$$\sigma_{kp} = \sigma_t \quad \sigma_{\vartheta} > 1,6 \sigma_t$$

Для пластин с различными условиями опирания, в том числе отличных от шарнирного, коэффициенты K приведены в справочной литературе в виде таблиц и графиков. (Один из таких графиков см. сайт sopro.nnewer.ru).

Устойчивость прямоугольной свободно опёртой пластины при линейном распределении сжимающих напряжений.



$$\sigma_x = f(y) = \sigma_o (1 - \beta \frac{y}{b})$$

$\beta = 0$ 	$\beta = 1$ 	$\beta = 2$
-----------------	-----------------	-----------------

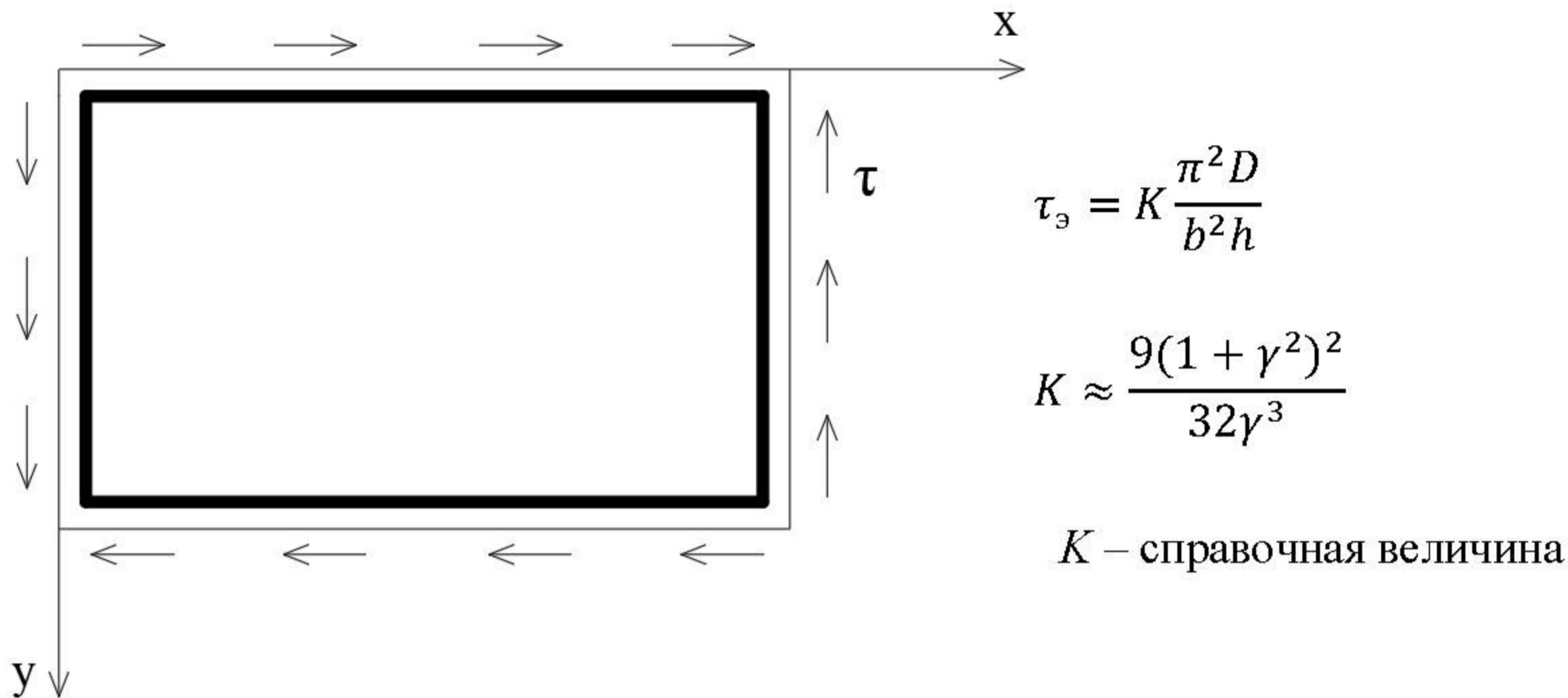
или $\alpha = \frac{1}{\beta}$

$$\sigma_{o\vartheta} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$$

$$K \approx \frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{m} \frac{a}{b} + m \frac{b}{a} \right)^2$$

K – справочная величина

Устойчивость прямоугольной свободно опёртой пластины при чистом сдвиге.



Устойчивость пластин, подкреплённых рёбрами жёсткости.

- а) продольными рёбрами жёсткости
- б) поперечными рёбрами жёсткости

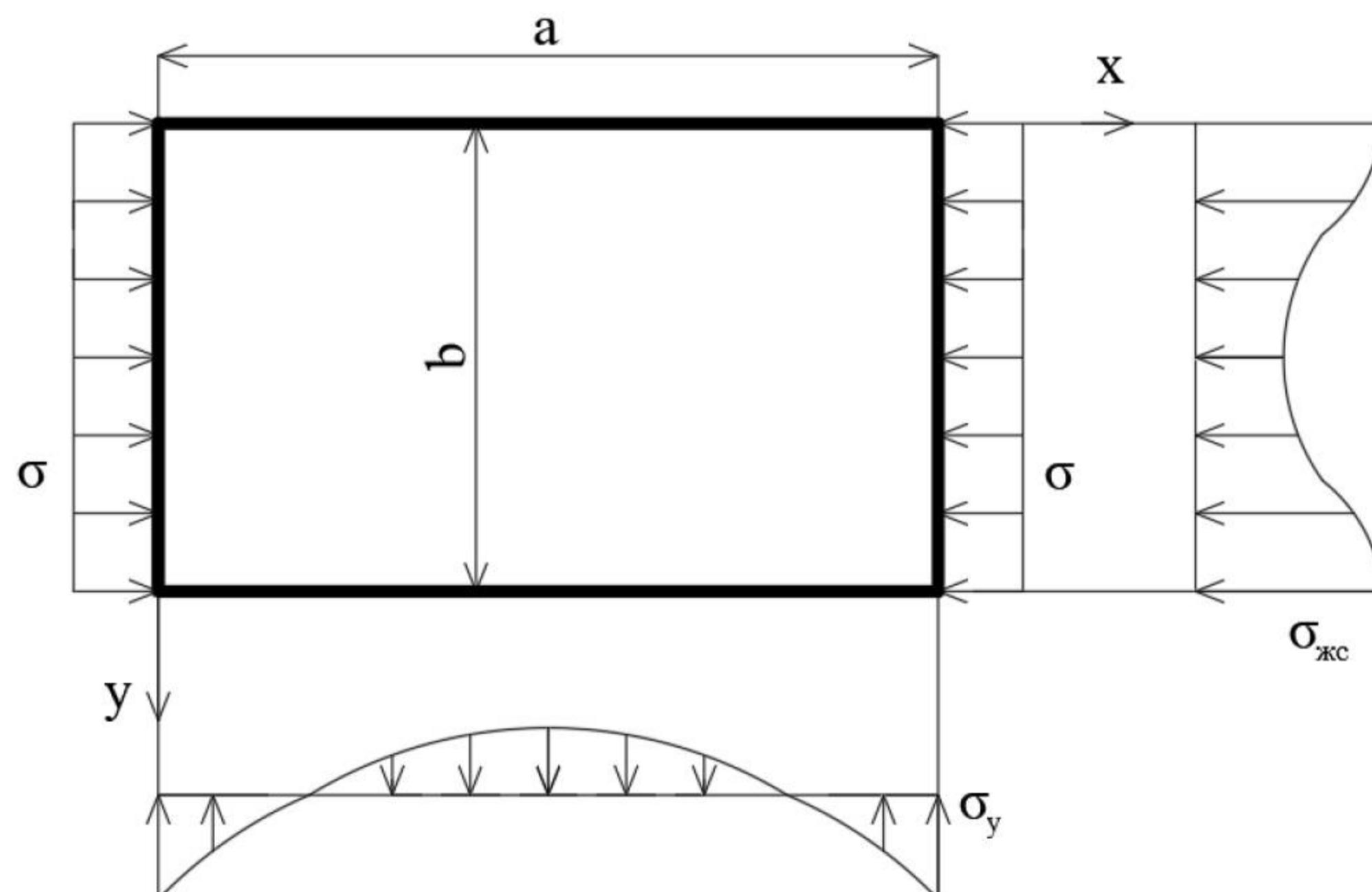
Влияние отступлений от закона Гука на устойчивость пластин.

Учёт ведётся через редукционные коэффициенты.

$$\sigma_{kp} = \varphi \sigma_3$$

Так как при расчёте прочности связи корпуса, как правило, не допускается превышение напряжениями предела текучести, а до предела текучести φ мало отличается от единицы, то в практике расчётов устойчивости пластин отступление от закона Гука, как правило, не учитывается.

Участие пластин, теряющих устойчивость в восприятии сжимающей нагрузки. Редукционный коэффициент пластин.



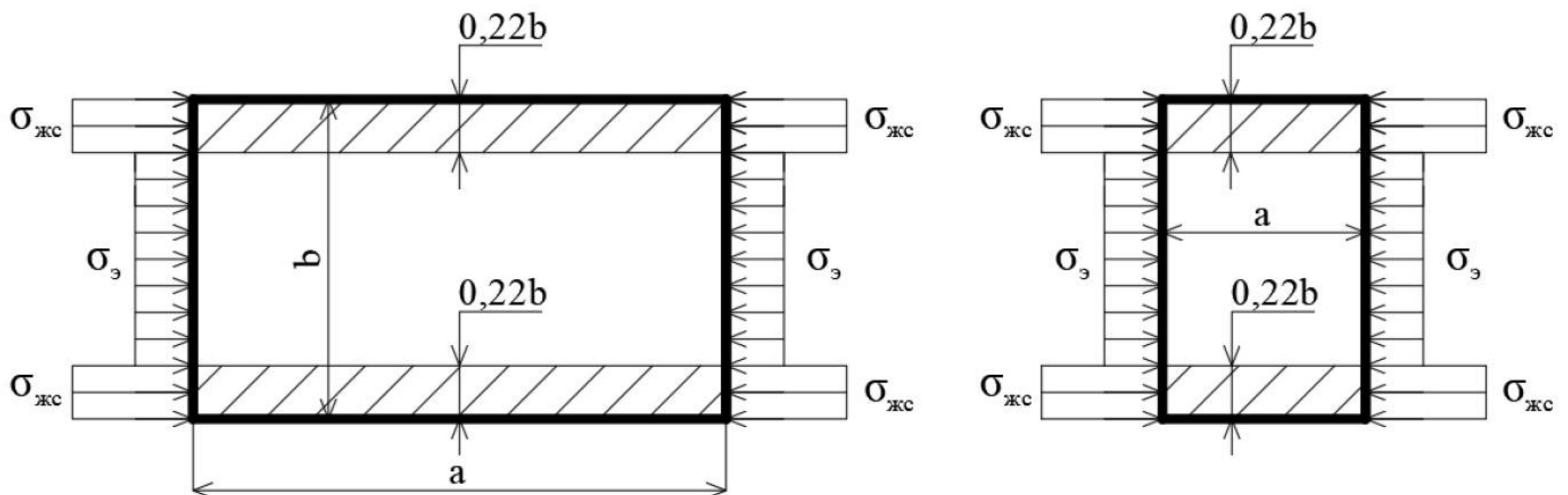
Так как при работе пластины в составе перекрытия, её кромки не могут искривиться, появляются дополнительные напряжения по её ширине, то есть σ_y . Таким образом пластина в составе перекрытия испытывает ПНС и изгиб в результате потери устойчивости плоской формы либо действия поперечной нагрузки. При отсутствии поперечной нагрузки используется полная система уравнений Кармана (1), где $P=0$. В результате потери устойчивости, напряжения, воспринимаемые нагруженными кромками пластины, перераспределяются как показано на рисунке выше, и часть нагрузки передаётся на жёсткие связи.

Впервые задачу для пластин, сжатых вдоль коротких сторон, с использованием полной системы уравнений Кармана решил П.А. Соколов. Основываясь на его результатах, П.Ф. Папкович предложил относить часть пластины, потерявшей устойчивость, к жёстким связям, а оставшуюся часть редуцировать по формуле:

$$\varphi = \frac{\sigma_\varepsilon}{|\sigma_{\text{жс}}|} \quad (*)$$

$$0 \leq \varphi \leq 1$$

Фактически редукционный коэффициент является отношением приведённой площади пластины (то есть работающей как жёсткая связь) к реальной площади.



Продольная система набора:

$$\sigma b = 0,44b\sigma_{\text{жс}} + 0,56b\sigma_\varepsilon$$

Поперечная система набора:

$$\sigma b = 0,44a\sigma_{\text{жс}} + (b - 0,44a)\sigma_\varepsilon$$

Поделив на $b\sigma_{\text{жс}}$ и учтя выражение (*):

$$\varphi = 0,44 + 0,56\varphi^*$$

$$\varphi = \frac{0,44}{\gamma} + \left(1 - \frac{0,44}{\gamma}\right)\varphi^*$$

$$\gamma = \frac{b}{a}$$

$$\varphi^* = \frac{\sigma_{\exists}}{\sigma_{\text{жс}}}$$

На практике вместо 0,22 принимают 0,25 и формулы записываются следующим образом:

Продольная система набора: $\varphi = 0,5(1 + \varphi^*)$

Поперечная система набора: $\varphi = \frac{0,5}{\gamma}(1 - \varphi^*) + \varphi^*$