

Численные методы решения задач устойчивости

В основе численных методов, как правило, лежит энергетический подход. Численные методы являются приближёнными, но при правильном подборе аппроксимирующих функций, дающие близкие к точным и удовлетворительные, с инженерной точки зрения, значения.

Метод Ритца

Изогнутая линия стержня при потере устойчивости представляется в виде ряда:

$$W = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \quad (1)$$

$\varphi_i(x)$ – фундаментальная функция, удовлетворяющая граничным условиям

a_i – некоторые неизвестные коэффициенты ряда

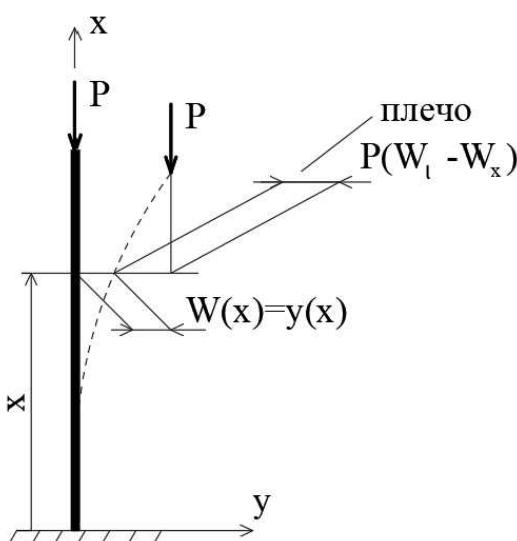
Полная энергия системы:

$$\Pi = \Pi_{\text{деф}} - A_{\text{внеш}} \frac{\text{сил}}{} \quad (2)$$

$$\Pi = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 dx \quad (3)$$

Подставляя (1) в (3) видим, что полная энергия Π оказывается зависящей от параметров прогиба a_i , и эти параметры можно определить из системы:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad (4)$$



В эти параметры входит искомая критическая нагрузка P . Нетривиальное решение данная система имеет если её определитель равен нулю. Раскрывая определитель, получим n – значений критической нагрузки P ($P_1, P_2 \dots P_n$), наименьшая из которых соответствует первой критической силе. Результат, полученный по (3) можно уточнить на практике, если записать его в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ} - \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 dx \quad (5)$$

$$W = ax^2$$

Границные условия:

$$\text{При } x = 0: \begin{cases} W = 0 \\ W' = 0 \end{cases}$$

$$W = ax^2$$

$$W' = 2ax$$

$$W'' = 2a$$

$$(3) \rightarrow \Pi = \frac{EJ}{2} \int_0^l 4a^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^l 4a^2 x^2 dx$$

$$\Pi = 2EJa^2 l - 2Pa^2 \frac{l^3}{3}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 4EJal - \frac{4}{3}Pal^3 = 0$$

$$P = \frac{3EJ}{l^2}$$

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EJ}{l^2} = 2,47 \frac{EJ}{l^2}$$

$$\mu = 2$$

$$\delta = \frac{3 - 2,47}{2,47} \cdot 100\% = 21\%$$

Можем уточнить данный результат, если возьмём два члена ряда:

$$W = a_1 x^2 + a_2 x^4$$

Вычисляя производные и подставляя их в выражение (3), найдём систему (4), решение которой через приравнивание определителя нулю даст нам два значения:

$$P_{1,2} = (22,5 \pm 20,03) \frac{EJ}{l^2}$$

Меньшая из них и даст нам значение критической нагрузки:

$$P = 2,468 \frac{EJ}{l^2}$$

Попробуем применить формулу (5):

$$W = ax^2$$

$$M = P(W_l - W) = Pa(l^2 - x^2)$$

$$(5) \rightarrow \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2(l^2 - x^2)^2 a^2}{EJ} - \frac{1}{2} \int_0^l 4a^2 x^2 dx$$

Раскрывая скобки и интегрируя, получим:

$$\Pi = \dots = \left(\frac{8}{15} \frac{P^2 l^5}{EJ} - \frac{4}{3} P l^3 \right) a^2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 2a \left(\frac{8}{15} \frac{P^2 l^5}{EJ} - \frac{4}{3} P l^3 \right) = 0$$

$$P = \frac{5 EJ}{2 l^2}$$

$$\delta = \frac{2,5 - 2,47}{2,47} \cdot 100\% = 1,2\%$$

Метод Тимошенко

Если стержень находится в безразличном состоянии равновесия, вариация полной энергии будет равна нулю, также, как и вторая вариация:

$$\partial \Pi = 0$$

$$\partial^2 \Pi = 0$$

Так как отклонения малы, можно принять $\Pi = const$ в пределах каждой вариации. Условимся, что нулевой уровень энергии соответствует критической силе:

$$P = P_{kp} \quad \Pi = \Pi_{def} - A_{\text{внеш}} \frac{\text{сил}}{} = 0$$

То есть полагается, что при продольном изгибе потенциальная энергия деформации равна работе внешних сил: $\Pi_{\text{деф}} = A_{\substack{\text{внеш} \\ \text{сил}}}$

Тогда из уравнения (3) следует:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\int_0^l EJ \left(\frac{d^2W}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \left(\frac{d^2W}{dx^2} \right)^2 dx} \quad (7)$$

Метод Бубнова-Галёркина

Изогнутая линия аппроксимируется рядом вида (1), причём фундаментальная функция удовлетворяет не только геометрическим граничным условиям, но и статическим условиям равновесия.

Из принципа возможных перемещений:

$$\delta A_{\substack{\text{внутр} \\ \text{сил}}} + \delta A_{\substack{\text{внеш} \\ \text{сил}}} = 0$$

После интенсивных преобразований, которые здесь приводить не будем:

$$\left[M \delta \left(\frac{dW}{dx} \right) \right]_0^l - \left[\left(Q - P \frac{dW}{dx} \right) \delta W \right]_0^l - \int_0^l \left(EJ \frac{d^4W}{dx^4} + P \frac{d^2W}{dx^2} \right) \delta W dx = 0 \quad (8)$$

Подставляя (1) в (8), заметим, что все внеинтегральные члены, отвечающие статическим граничным условиям, исчезают:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \varphi_i \delta a_i$$

Тогда (8) перепишется в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^n \left(EJ \frac{d^4W}{dx^4} + P \frac{d^2W}{dx^2} \right) \varphi_i \delta a_i dx = 0$$

Если вариации δa_i независимы и произвольны, то получаем систему n – уравнений:

$$\int_0^l \left(EJ \frac{d^4W}{dx^4} + P \frac{d^2W}{dx^2} \right) \varphi_i dx = 0; i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

После интегрирования получаем систему однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i , приравнивая определитель которой нулю, находим критические нагрузки P_i .

Так как уравнения методов Бубнова-Галёркина и Ритца отвечают одним и тем же энергетическим зависимостям, то результаты этих методов должны совпадать.

Можно обобщить и упростить уравнение метода Бубнова-Галёркина, если учесть дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.

$$\int_0^l \left(EJ \frac{d^2W}{dx^2} + PW \right) \varphi_i dx = 0 \quad (10)$$

или:

$$\int_0^l \left(EJ \frac{d^2W}{dx^2} - M \right) \varphi_i = 0 \quad (11)$$

Результаты не будут точно совпадать с методом Ритца.

Пример:



$$W = ax(l - x)$$

$$W' = -2ax$$

$$W'' = -2a$$

$$(10) \rightarrow \int_0^l \left[-2a + \frac{P}{EJ}(l - x) \right] x(l - x) dx = 0$$

После интегрирования получим:

$$P = \frac{10EJ}{l^2}$$

Вспомним точное значение: $P_{\text{т}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$; $\delta < 2\%$