

Тогда $\sigma_{\max} = \frac{10Ph}{bh^2} = \frac{60P}{bh}$; $\tau_{\max} = \frac{3P}{2bh}$, т.е. $\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 40$ или τ_{\max} составляет лишь 2,5% от σ_{\max} .

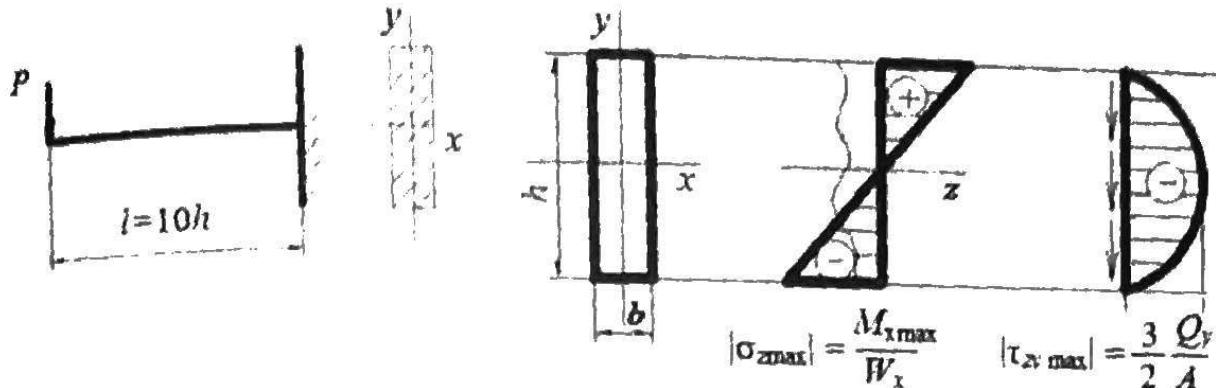


Рис. 5.32

Таким образом, в балках *сплошного* сечения при поперечном изгибе влиянием поперечной силы по сравнению с изгибающим моментом можно при расчете на прочность пренебречь.

Примечание. Если сечение имеет тонкостенный профиль, то τ_{\max} от силы Q_y велико, и в этом случае следует находить τ_{\max} и проводить расчет на прочность по касательным напряжениям.

5.4.5. Определение перемещений при изгибе. Формула О. Мора для определения перемещений в стержневых системах

При деформации изгиба поперечные сечения в балках получают перемещения. Различают линейные и угловые, абсолютные и взаимные перемещения (рис. 5.33). Линейное перемещение центра тяжести сечения называют прогибом и обозначают его Δ_i или по-другому y_i, v_i , где индекс « i » указывает адрес сечения, перемещение которого определяется. Прогиб вверх считается положительным, вниз – отрицательным. Угловое перемещение, которое получает сечение при изгибе, называют углом *поворота* и обозначают θ_i . Угол поворота против часовой стрелки считают положительным, а по часовой стрелке – отрицательным.

На рис. 5.33 Δ_i, Δ_k – абсолютные линейные перемещения (прогибы) сечений « i » и « k »; Δ_{ik} – взаимное линейное перемещение двух сечений: « i » и « k »; θ_i, θ_k – углы поворота сечений « i » и « k »; θ_{ik} – взаимный угол поворота двух сечений.

Решение по определению перемещений для общего случая деформаций стержневых систем было получено О. Мором. Рассмотрим вывод формулы О.Мора на примере изгиба балки.

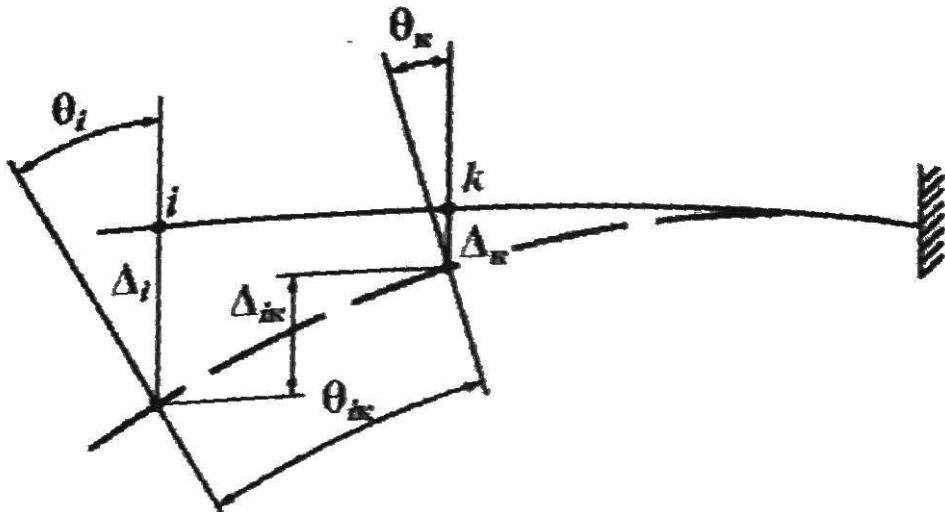


Рис. 5.33

Пусть балка (рис. 5.34, а) изгибается внешними нагрузками и подвергается температурному воздействию, при котором во всех сечениях температура изменяется по линейному закону от t_h - в нижних волокнах до t_b - в верхних волокнах (рис. 5.34, б). Перепад температуры по высоте сечения $\Delta t = t_b - t_h$.

Исходное состояние балки назовем *грузовым* (ГС). Пунктиром показем изогнутую ось балки. Требуется определить вертикальное перемещение (прогиб) сечения k .

Рядом с грузовым покажем *единичное состояние*. Оно получается прикладыванием к балке в сечении k , перемещение которого нужно определить, безразмерной единичной силы $\bar{P} = 1$ в направлении искомого перемещения (рис. 5.34, в). Все величины в единичном состоянии будем писать с чертой вверху, например: $\bar{R}_A, \bar{M}_x, \bar{Q}_y$ и т.д.

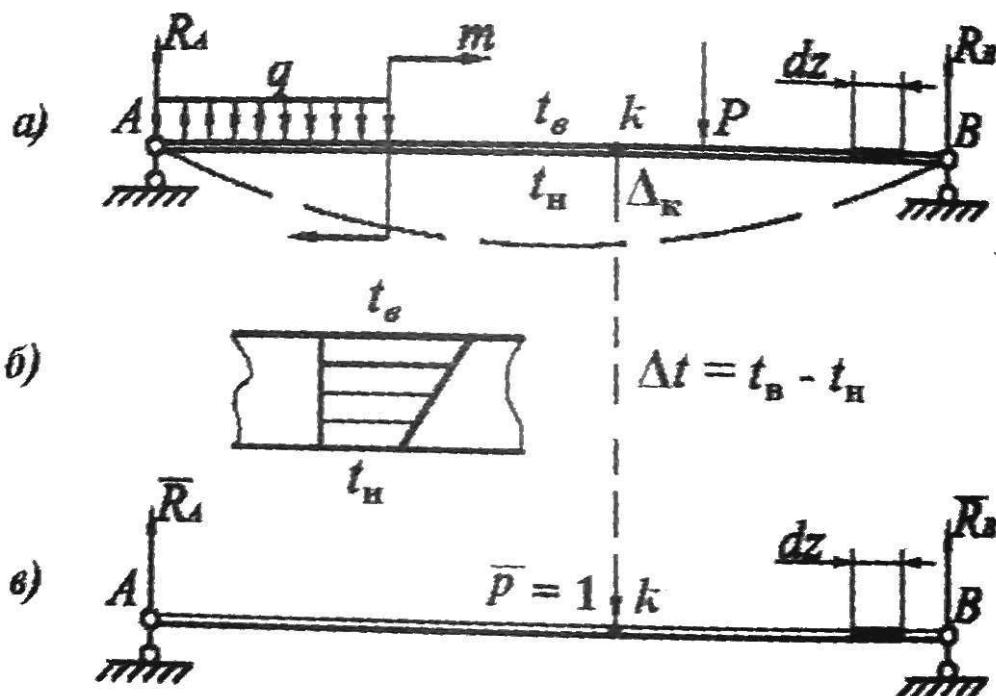


Рис. 5.34

Далее воспользуемся известным из теоретической механики *принципом возможных перемещений*: если система взаимосвязанных материальных точек под действием всех сил (внешних и внутренних) находится в равновесии, то работа этих сил на возможных для данной системы перемещениях точек их приложения равна нулю.

Балку в единичном состоянии можно принять за систему материальных частиц (точек), находящуюся в равновесии под действием внешних сил $\bar{p}, \bar{R}_A, \bar{R}_B$ и внутренних силовых факторов \bar{M}_x, \bar{Q}_y . Применим к ней принцип возможных перемещений:

$$\bar{A}_{\text{внеш}} + \bar{A}_{\text{внут}} = 0. \quad (1)$$

В качестве возможных перемещений примем реальные перемещения в грузовом состоянии, на которых совершают работу силы единичного состояния.

Работа внешних сил будет равна

$$\bar{A}_{\text{внеш}} = \bar{p} \Delta_k = 1 \cdot \Delta_k = \Delta_k. \quad (2)$$

При определении работы внутренних сил влиянием поперечной силы \bar{Q}_y по сравнению с \bar{M}_x можно пренебречь. Рассмотрим элементарную частицу dz , вырезанную из обеих балок в произвольном месте (рис. 5.35).

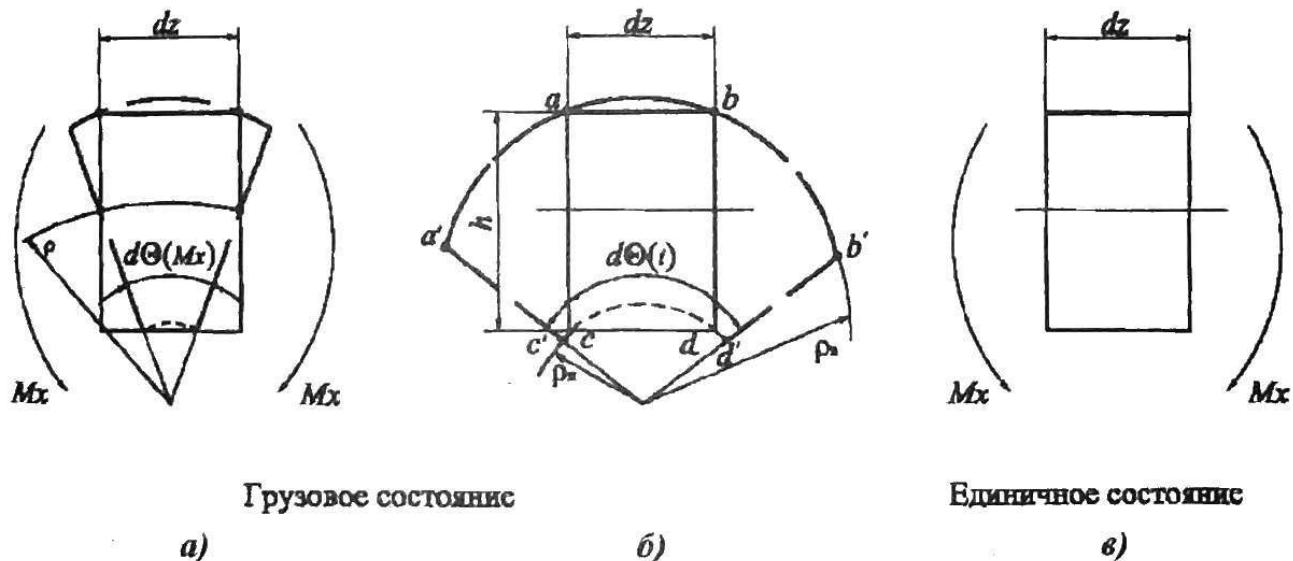


Рис. 5.35

Взаимный угол поворота сечений в грузовом состоянии от изгибающих моментов $d\theta(M_x)$ - рис. 5.35, а - равен

$$d\theta(M_x) = \frac{dz}{\rho}, \quad (a)$$

где ρ - радиус кривизны нейтрального волокна.

Из синтезирующего уравнения изгиба (5.47) имеем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (5.47)$$

Из совместного решения выражений (а) и (5.47) следует

$$d\theta(M_x) = \frac{M_x dz}{EI_x}. \quad (6)$$

Взаимный угол поворота сечений в грузовом состоянии от перепада температур (Δt) по высоте балки $d\theta(\Delta t)$ определился из картины деформаций (рис. 5.35, б):

$$d\theta(\Delta t) = \frac{a'b' - c'd'}{\rho_v - \rho_n}, \quad (в)$$

где $a'b'$ - удлинение верхнего волокна при изменении температуры на t_v ; $c'd'$ - удлинение нижнего волокна при изменении температуры на t_n ,

$$a'b' = at_v dz, \quad c'd' = at_n dz, \quad t_v - t_n = \Delta t; \quad (г)$$

ρ_v и ρ_n - радиусы кривизны при деформации верхнего и нижнего волокна соответственно,

$$\rho_v - \rho_n = h. \quad (д)$$

Подставляя зависимости (г) и (д) в выражение (в), получим

$$d\theta(\Delta t) = \frac{at_v dz - at_n dz}{h} = \frac{a\Delta t dz}{h}. \quad (е)$$

На угловых перемещениях совершает работу изгибающий момент в единичном состоянии \bar{M}_x (рис. 5.35, в):

$$d\bar{A}_{внутр} = \bar{M}_x d\theta(M_x) + \bar{M}_x d\theta(\Delta t) = \bar{M}_x \frac{M_x dz}{EI_x} + \bar{M}_x \frac{a\Delta t dz}{h}. \quad (ж)$$

Для определения работы внутренних сил всей балки следует проинтегрировать выражение (ж) на каждом участке, а затем просуммировать интегралы по всем силовым участкам:

$$\bar{A}_{внутр} = - \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_{xi} M_{xi} dz_i}{EI_{xi}} + \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_{xi} a\Delta t dz_i}{h} \right]. \quad (3)$$

Знак минус в выражении (3) поставлен потому, что направления внутренних усилий в единичном состоянии и внешних перемещений Δ , на которых эти усилия совершают работу, всегда противоположны.

Подставляя выражения (2) и (3) в уравнение (1), получим формулу перемещений при изгибе по методу Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{l_i} \bar{M}_{xi} \frac{M_{xi} dz_i}{EI_{xi}} + \int_0^{l_i} \bar{M}_{xi} \frac{a \Delta dz_i}{h} \right], \quad (5.57)$$

где Δ – искомое перемещение (линейное или угловое);

M_{xi} – изгибающий момент в произвольном сечении i -го участка балки от заданной нагрузки (в грузовом состоянии);

\bar{M}_{xi} – изгибающий момент в том же сечении балки от единичной нагрузки (в единичном состоянии);

EI_x – жесткость балки при изгибе [$MN \cdot m^2$];

l_i – длина i -го участка балки;

n – число участков, определяемое с учетом места приложения единичной силы $\bar{p}=1$.

Аналогично можно получить формулы перемещений:

при растяжении-сжатии:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \bar{N}_{zi} \frac{N_{zi} dz_i}{EA_i}, \quad (5.58)$$

где N_{zi} – выражение для нормальной силы в произвольном сечении i -го участка стержня в грузовом состоянии; \bar{N}_{zi} – выражение для нормальной силы в том же сечении стержня в единичном состоянии;

при кручении:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \bar{M}_{zi} \frac{M_{zi} dz_i}{GI_{ki}}, \quad (5.59)$$

где M_{zi} и \bar{M}_{zi} – выражения для крутящих моментов в произвольном сечении i -го участка грузового (M_{zi}) и единичного (\bar{M}_{zi}) состояний.

Замечания к формулам (5.57) – (5.59) о выборе единичной нагрузки и знаке перемещения:

1. Если определяется линейное перемещение какого-либо сечения, то в единичном состоянии в данном сечении прикладывается сила $\bar{p}=1$ в направлении искомого перемещения.

2. Если определяется угловое перемещение сечения, то в единичном состоянии в этом сечении прикладывается единичный момент $\bar{m}=1$.

3. При определении взаимного перемещения двух сечений в единичном состоянии в обоих сечениях прикладываются противоположно направленные силы $\bar{p}=1$, если перемещение линейное, или моменты $\bar{m}=1$, если перемещение угловое.

4. Если перемещение получается со знаком плюс, это означает, что оно происходит по направлению единичной нагрузки $\bar{p} = 1$ или $\bar{m} = 1$. Знак минус показывает, что направление перемещения и направление единичной нагрузки не совпадают.

5.4.6. Графоаналитический способ вычисления перемещений (способ А. Верещагина)

Расчетная формула для определения перемещений способом

А. Верещагина

Для прямолинейных стержней (или их участков), имеющих постоянное поперечное сечение, интегралы в формуле О. Мора можно вычислить, используя эпюры внутренних силовых факторов, построенные для грузового и единичного состояний.

Вывод формулы приведем на примере изгиба балки (рис. 5.36, а). Допустим, требуется определить прогиб свободного конца балки – сечения O . Приняв заданную балку за грузовое состояние (ГС), выберем единичное состояние ($\bar{E}\bar{C}$), приложив в сечении O силу $p = 1$ (рис. 5.36, б).

Для обеих балок построим эпюры изгибающих моментов – M_x и \bar{M}_x (рис. 5.36, в и 5.36, г).

Запишем интеграл О. Мора для определения прогиба сечения O :

$$\Delta = \int_0^l \bar{M}_x \frac{M_x dz}{EI_x}. \quad (a)$$

Из рис. 5.36, в, г видно, что $M_x dz$ представляет собой элементарную площадь $d\omega$ эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки, а $\bar{M}_x = \bar{p}z = z$. Тогда интеграл (а) перепишется в таком виде:

$$\Delta = \int_{\omega_{Mx}} \frac{z d\omega}{EI_x}. \quad (b)$$

Числитель подынтегрального выражения есть статический момент площади ω_{Mx} (рис. 5.36, в) относительно вертикальной оси y , проходящей через точку O . Если площадь ω_{Mx} и координата ее центра тяжести z_c известны, то $\int_{\omega_{Mx}} z d\omega = \omega_{Mx} z_c$, где из рис. 5.36, г ясно, что $z_c = \bar{M}_{xc}$. Приравнивая интегралы (а) и (б), получим

$$\Delta = \int_0^l \frac{\bar{M}_x M_x dz}{EI_x} = \frac{\omega_{Mx} \bar{M}_{xc}}{EI_x}. \quad (b)$$

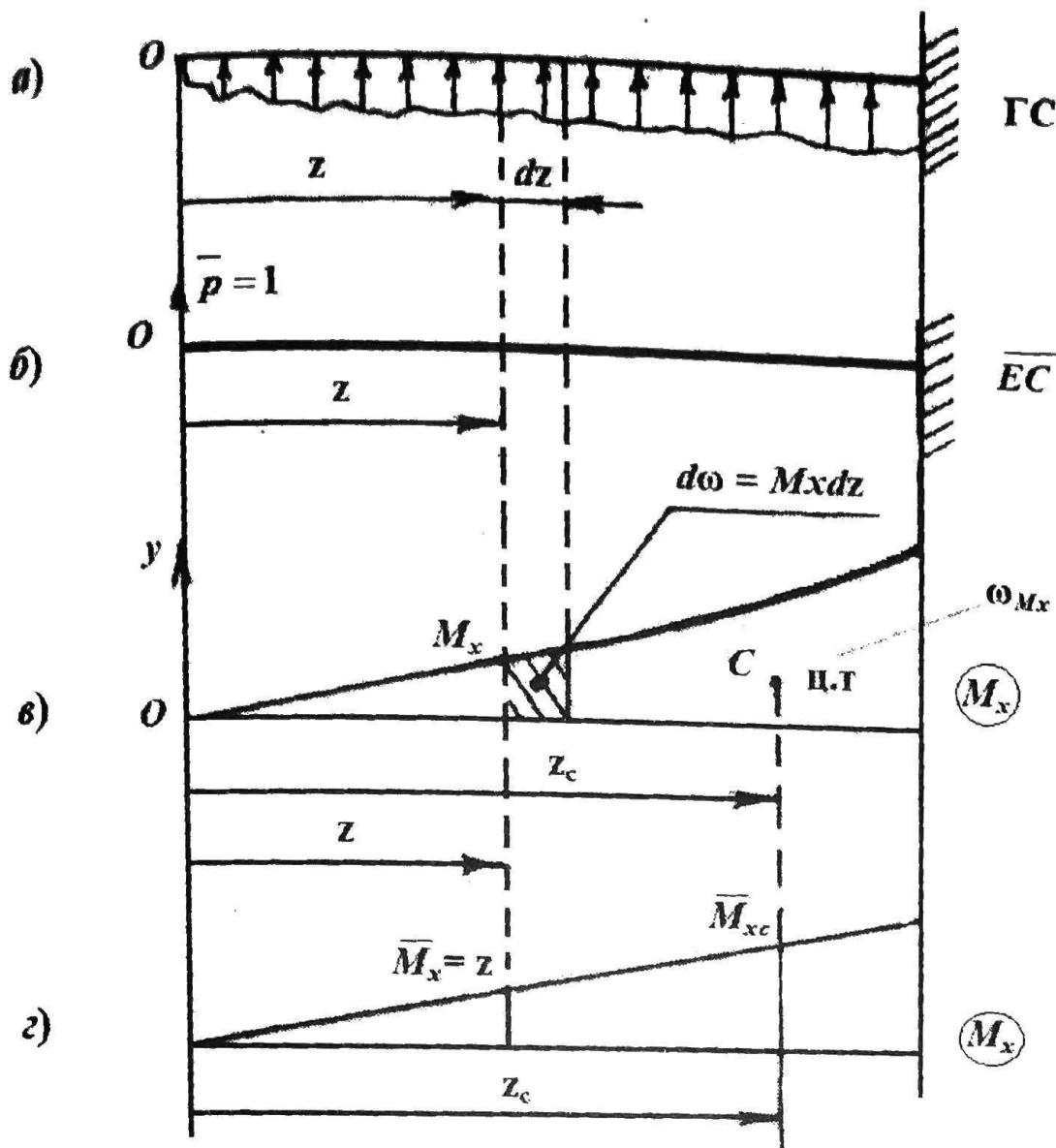


Рис. 5.36

Распространяя выражение (в) на каждый из интегралов (5.57-5.59), можно записать расчетную формулу для определения перемещений в стержневых системах способом А.Верещагина в следующем виде:

$$\Delta = \sum \frac{\omega_N \bar{N}_c}{EA} + \sum \frac{\omega_{M_x} \bar{M}_{xc}}{EI_x} + \sum \frac{\omega_{M_z} \bar{M}_{zc}}{GI_{p(k)}} + \sum \frac{\alpha \omega_{\Delta t} \bar{M}_{xc}}{h}. \quad (5.60)$$

Здесь ω_N , ω_{M_x} , ω_{M_z} , $\omega_{\Delta t}$ - площади эпюров нормальных сил, изгибающих и крутящих моментов, перепада температур по высоте сечения от заданных нагрузок и действия температуры (грузовые эпюры); \bar{N}_c , \bar{M}_{xc} , \bar{M}_{zc} - ординаты эпюров нормальных сил, изгибающих и крутящих моментов от единичной силы (момента), приложенной в направлении искомого перемещения, взятые под центром тяжести грузовой эпюры.

Вычисление площадей эпюров внутренних силовых факторов с указанием положения их центров тяжести

Любую сложную грузовую эпюру внутренних усилий на участке стержня путем разбивки или дополнения можно представить в виде совокупности фигур, имеющих форму прямоугольника, треугольника или квадратной параболы, для которых известны площадь и положение центра тяжести — точка C (рис. 5.37).

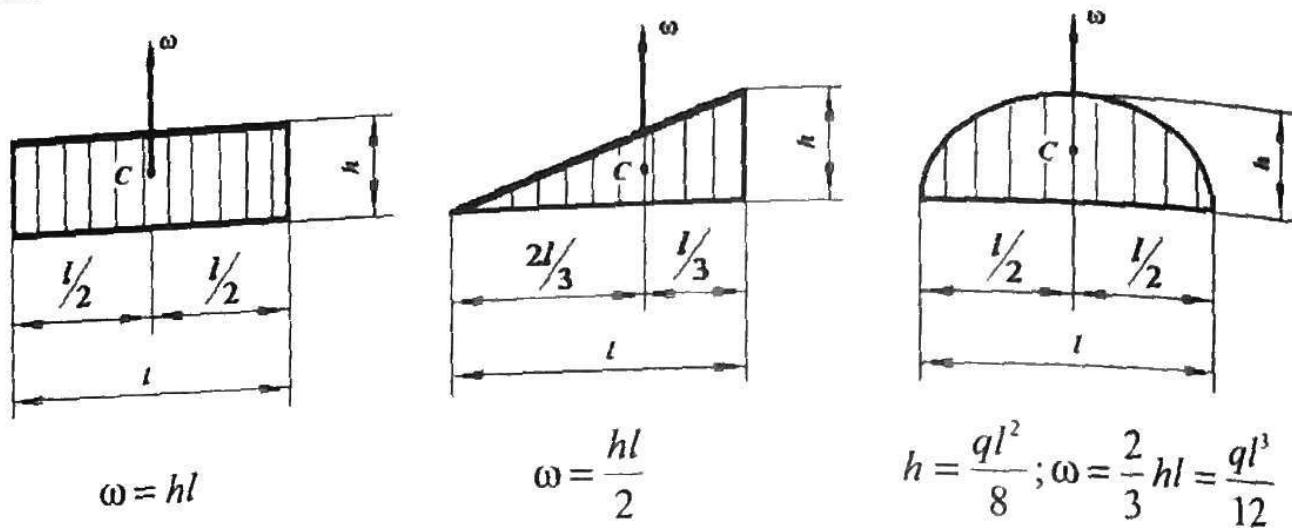


Рис. 5.37

Основные способы разбивки грузовых эпюр представлены на рис. 5.38. Площади фигур обозначены ω , а стрелки, указывающие на знак площадей, направлены в сторону сжатых волокон.

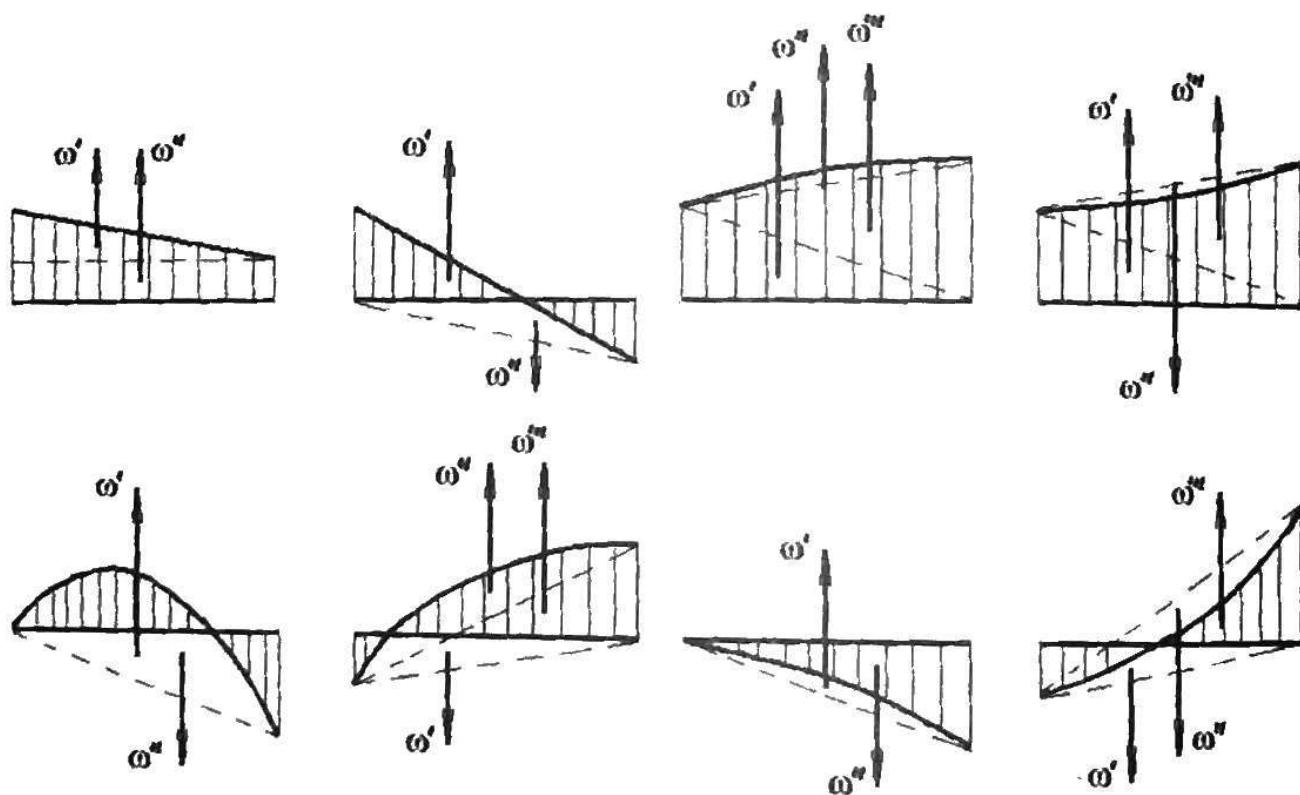


Рис. 5.38

5.4.7. Примеры расчета балок при изгибе

Пример 5.5. Для балки (рис. 5.39) из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать размеры постоянного поперечного сечения в форме круга, прямоугольника ($h/b = 2$) и двутавра. Материал – сталь Ст. 3. Обосновать, какая из указанных форм поперечных сечений наиболее экономична. Вычислить максимальное касательное напряжение в балке двутаврового сечения. Определить по формуле Мора прогиб свободного конца балки.

Дано: $q = 0,02 \text{ МН/м}$; $a = 0,5 \text{ м}$; $\sigma_r = 240 \text{ МПа}$; $n_r = 1,5$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение

1. Балка имеет два силовых участка. Находим выражения на каждом участке, используя метод сечений (1.8).

Первый участок ($0 \leq z_1 \leq a$)

$$Q_{y_1} = 0.$$

$M_{x_1} = qa^2 \uparrow (\text{const})$. Балка испытывает чистый изгиб.

Второй участок ($0 \leq z_2 \leq a$)

$Q_{y_2} = P + (4qz_2) = qa + 4qz_2$, Q_{y_2} меняется по линейному закону.

При $z_2 = 0$ $Q_{y_2} = qa$, при $z_2 = a$ $Q_{y_2} = 5qa$.

$M_{x_2} = qa^2 \uparrow + Pz_2 \uparrow + (4qz_2) \frac{z_2}{2} \uparrow = qa^2 \uparrow + qaz_2 \uparrow + 2qz_2^2 \uparrow$ - парабола.

При $z_2 = 0$ $M_{x_2} = qa^2 \uparrow$; при $z_2 = a$ $M_{x_2} = 4qa^2 \uparrow$.

Так как на участке поперечная сила не равна нулю, парабола M_{x_2} не имеет экстремума.

2. Строим эпюры поперечных сил (рис. 5.39, б) и изгибающих моментов (рис. 5.39, в). При построении эпюры M_{x_2} учтено, что парабола выпукла вниз (навстречу направлению распределенной нагрузки).

3. Подбираем поперечные сечения балки.

По эпюре M_x находим положение опасного сечения - это сечение I-I, где $M_{x_{\max}} = 4qa^2 = 4 \cdot 0,02 \cdot (0,5)^2 = 0,02 \text{ МН}\cdot\text{м}$.

Записываем условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям и определяем осевой момент сопротивления поперечного сечения W_x :

$$\sigma_{z_{\max}} = \frac{M_{x_{\max}}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma] = \frac{\sigma_r}{n_r} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа (МН/м}^2)$.

$$W_x \geq \frac{M_{x\max}}{[\sigma]} = \frac{0,02}{160} = 125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 125 \text{ см}^3.$$

Вычисляем размеры сечений разной формы.

Круглое сечение

$$W_{x_{\text{кр}}} = \frac{\pi D^3}{32} \rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{32W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 125}{3,14}} = 10,85 \text{ см.}$$

Принимаем $D = 10,9$ см.

Находим максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{z\max} = \frac{M_{x\max}}{W_{x_{\text{кр}}}} = \frac{0,02}{\frac{\pi(0,109)^3}{32}} = 157,4 \text{ МПа.}$$

$$\text{Площадь круга } A_{\text{кр}} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot (10,9)^2}{4} = 93,3 \text{ см}^2.$$

Прямоугольное сечение ($h/b = 2$)

$$W_{x_{\text{кр}}} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3} b^3 \rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{3}{2} W_x} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 125} = 5,72 \text{ см.}$$

Принимаем $b = 5,7$ см; $h = 2b = 2 \cdot 5,7 = 11,4$ см.

Находим максимальное нормальное напряжение:

$$\sigma_{z\max} = \frac{M_{x\max}}{W_{x_{\text{кр}}}} = \frac{0,02}{\frac{2}{3}(0,057)^3} = 162 \text{ МПа.}$$

Видим, что $\sigma_{z\max}$ больше допускаемого напряжения $[\sigma] = 160$ МПа.

Вычислим перенапряжение:

$$\Delta\sigma\% = \frac{\sigma_{z\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{162 - 160}{160} \cdot 100\% = 1,25\% < 5\%,$$

что допустимо. Оставляем принятые размеры прямоугольного сечения.

Вычислим площадь прямоугольника:

$$A_{\text{пр}} = bh = 5,7 \cdot 11,4 = 65 \text{ см}^2.$$

Двутавровое сечение

По ГОСТ 8239-89 выбираем двутавр № 18 с $W_x^I = 143 \text{ см}^3$.

Выписываем из таблицы размеры площади сечения и осевого момента инерции относительно оси x .

$$A_{\text{дв}} = 23,4 \text{ см}^2; I_x = 1290 \text{ см}^4.$$

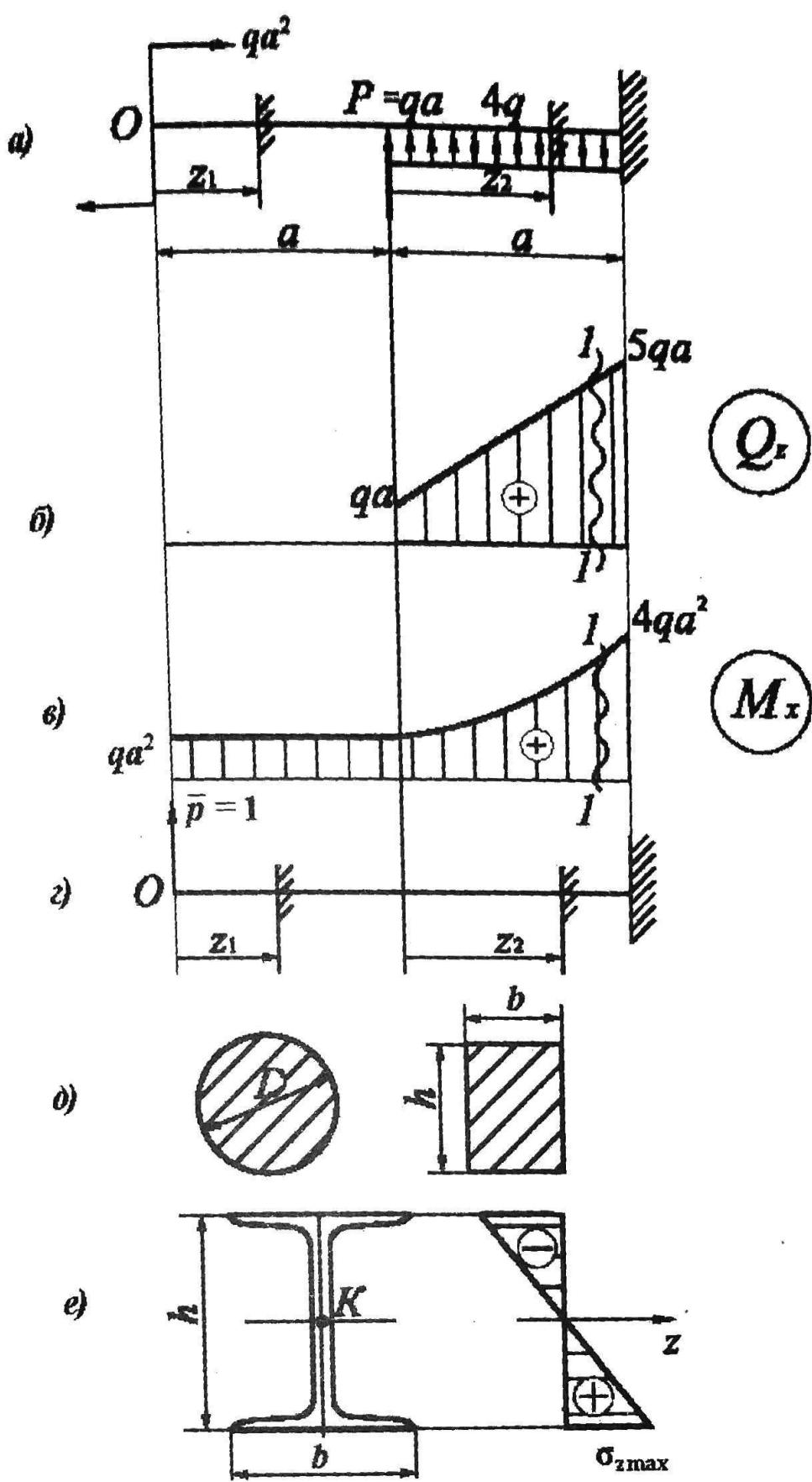


Рис. 5.39

Найдем максимальное нормальное напряжение:

$$\sigma_{z\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x^1} = \frac{0,02}{143 \cdot 10^{-6}} = 139,9 \text{ МПа.}$$

Покажем эпюру нормальных напряжений на рис. 5.39, *е* справа.
 4. Определим, какая форма сечения более экономична, вычислив отношение масс балки с поперечными сечениями разной формы. Так как масса балки равна $m = \rho V$, где ρ - плотность материала, V - объем балки, $V = Al$ (l - длина балки), то отношение масс балки пропорционально отношению площадей сечений балки, то есть

$$M_{\text{сп}} : M_{\text{тр}} : M_{\text{дв}} = A_{\text{сп}} : A_{\text{тр}} : A_{\text{дв}} = 93,3 : 65 : 23,4 = 4 : 2,78 : 1.$$

Ясно, что наиболее экономична при изгибе двутавровая форма сечения.

1. Вычислим прогиб свободного конца балки двутаврового сечения.

Заданную балку (рис. 5.39, *a*) назовем грузовым состоянием. Выберем единичное состояние, приложив в концевом сечении балки *O* единичную силу $\bar{p} = 1$ (рис. 5.39, *г*). Запишем выражения для изгибающего момента \bar{M}_{x_i} на участках балки в единичном состоянии.

Первый участок ($0 \leq z_1 \leq a$)

$$\bar{M}_{z_1} = \bar{p}z_1 \uparrow = z_1 \uparrow.$$

Второй участок ($0 \leq z_2 \leq a$)

$$\bar{M}_{z_2} = \bar{p}(a + z_2) \uparrow = a \uparrow + z_2 \uparrow.$$

Находим прогиб сечения *O* по формуле Мора (5.57):

$$\Delta_O = y_O = \sum_{i=0}^{2/2} \int \frac{\bar{M}_{z_i} M_{z_i} dz}{EI_x} = \int_0^a \frac{z_1 q a^2 dz_1}{EI_x} + \int_0^a \frac{(a + z_2)(q a^2 + q a z_2 + 4 q a^2)}{EI_x} dz_2 =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left[\frac{q a^4}{2} + q a^4 + \frac{q a^4}{2} + 4 q a^4 + \frac{q a^4}{2} + \frac{q a^4}{3} + 2 q a^4 \right] = \frac{53}{6} \frac{q a^4}{EI_x} =$$

$$= \frac{53}{6} \cdot \frac{0.02 \cdot (0.5)^4}{2 \cdot 10^3 \cdot 1290 \cdot 10^{-6}} = 55.2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 5.52 \text{ мм.}$$

Так как прогиб получился со знаком плюс, то сечение переместилось по направлению силы $\bar{p} = 1$, т. е. вверх.

2. Определим максимальное касательное напряжение в двутавровой балке.

По эпюре поперечных сил определяем величину максимальной силы Q_y :

$$Q_{y_{\max}} = 5qa = 5 \cdot 0.02 \cdot 0.5 = 0.05 \text{ МН.}$$

По формуле Журавского (5.55) находим

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y_{\max}} S_x}{I_x b}, \text{ где по ГОСТ 8239-89 } S_x = 81,4 \text{ см}^3;$$

$$b_y = s = 5,1 \text{ мм} = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

$$\text{Тогда } \tau_{\max} = \frac{0,05 \cdot 81,4 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 5,1 \cdot 10^{-3}} = 63,1 \text{ МПа.}$$

Пример 5.6. Для балки, поперечное сечение которой задано (рис. 5.40, а), подобрать из условия прочности по нормальным напряжениям допустимую нагрузку. Материал – сталь Ст. 3. Вычислить величину максимального касательного напряжения в балке. Определить методом Мора и способом Верещагина прогиб в точке С и способом Верещагина прогиб в точке D и угол поворота на правой опоре балки.

Дано: $a = 1 \text{ м}$; $\sigma_r = 240 \text{ МПа}$; $n_r = 1,5$.

Решение

1. Находим реакции опор (рис. 5.40, а).

$$\sum M_A = 0 \quad qaa - (3q2a)2a + R_B 3a - qa^2 = 0 \rightarrow R_B = 4qa.$$

$$\sum M_B = 0 \quad -qa^2 + (3q2a)a - qa2a - R_A 3a = 0 \rightarrow R_A = qa.$$

$$\text{Проверка: } \sum y = 0 \quad R_A + qa - (3q2a) + R_B = qa + qa - 6qa + 4qa = 0.$$

2. Находим выражения для поперечных сил и изгибающих моментов на трех силовых участках балки (рис. 5.40, а).

Первый участок ($0 \leq z_1 \leq a$)

$$Q_{y_1} = R_A = qa(\text{const}).$$

$M_{x_1} = R_A z_1 \uparrow = qa z_1 \uparrow$, M_{x_1} изменяется по линейному закону; при $z_1 = 0$ $M_{x_1} = 0$, при $z_1 = a$ $M_{x_1} = qa^2 \uparrow$.

Второй участок ($0 \leq z_2 \leq 2a$)

$$Q_{y_2} = -R_B + (3qz_2) = -4qa + 3qz_2 \text{ – линейный закон.}$$

$$\text{При } z_2 = 0 \quad Q_{y_2} = -4qa, \text{ при } z_2 = 2a \quad Q_{y_2} = 2qa.$$

Обращаем внимание, что поперечная сила на участке изменяет знак.

$$M_{x_2} = -qa^2 \downarrow + R_B z_2 \uparrow - (3qz_2) \frac{z_2}{2} \downarrow = -qa^2 \downarrow + 4qaz_2 \uparrow - \frac{3}{2} qz_2^2 \downarrow \text{ – пар-}$$

бала.

$$\text{При } z_2 = 0 \quad M_{x_2} = -qa^2 \downarrow, \text{ при } z_2 = 2a \quad M_{x_2} = qa^2 \uparrow.$$

$$\text{Найдем } \frac{dM_{x_2}}{dz_2} = 4qa - 3qz_{20} = 0 \rightarrow z_{20} = \frac{4}{3}a.$$

Вычислим максимальный изгибающий момент:

$$M_{x_{2\max}} = -qa^2 \downarrow + 4qa \frac{4}{3}a \uparrow - \frac{3}{2}a \left(\frac{4}{3}a \right)^2 \downarrow = \frac{5}{3}qa^2 \uparrow.$$

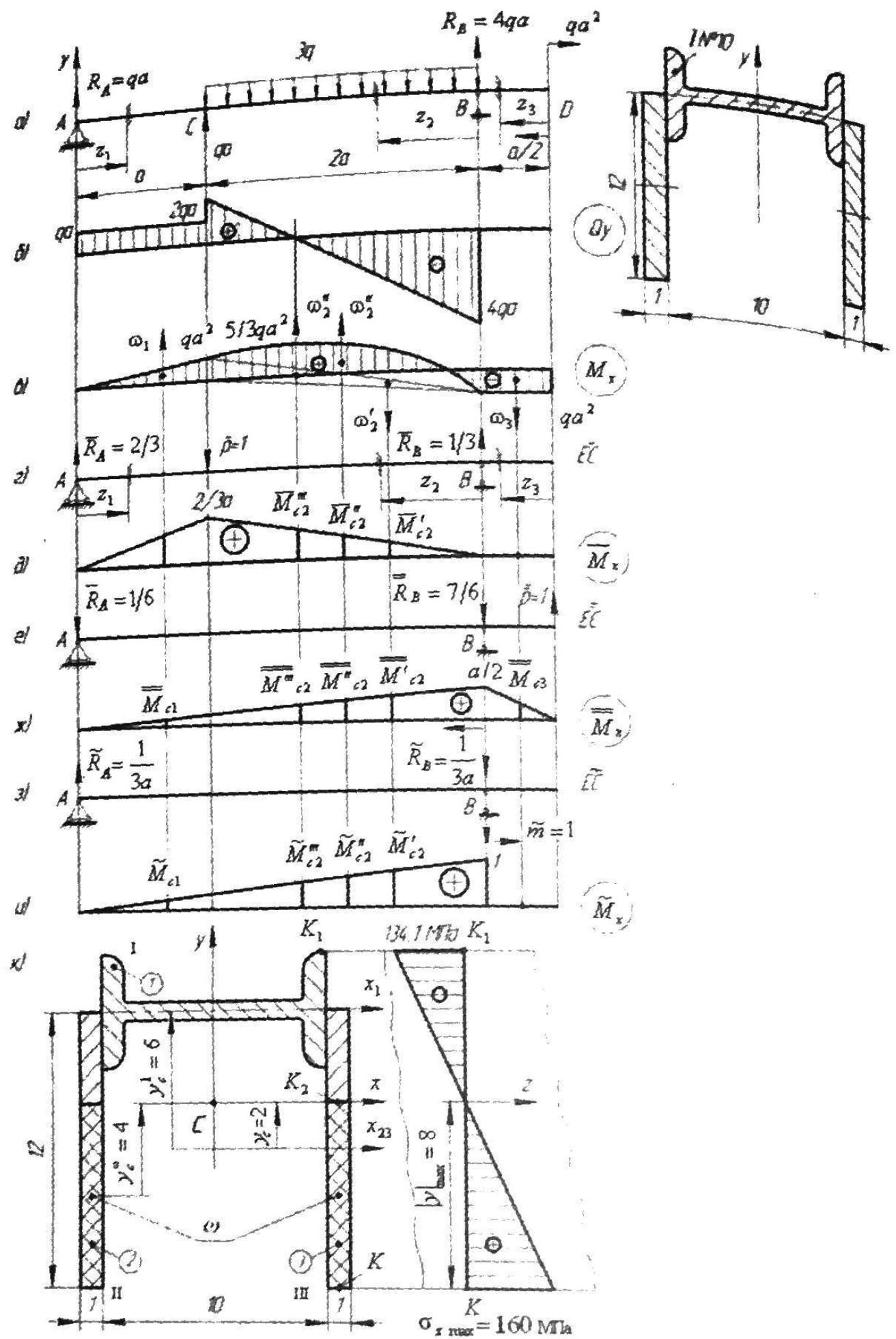


Рис. 5.40

Третий участок ($0 \leq z_3 \leq a$)

$$Q_{y_3} = 0.$$

$M_{x_3} = -qa^2 \downarrow (\text{const})$. На третьем участке балка испытывает чистый изгиб.

3. Строим эпюры поперечных сил (рис. 5.40, б) и изгибающих моментов (рис. 5.40, в).

4. Рассчитываем заданное поперечное сечение балки.

Вычертим сечение в масштабе М 1:2 (рис. 5.40, к); разобьем его на составляющие элементы: двутавр №10-І, полосы 12×1 – II и III. Во всех элементах проведем центральные оси x_i .

Из ГОСТ 8239-89 для двутавра №10 выписываем необходимые расчетные данные – площадь сечения и осевой момент инерции относительно оси x_i :

$A^I = 12 \text{ см}^2; I_{x_1} = I_y^{\text{ГОСТ}} = 17,9 \text{ см}^4$ (обращаем внимание на расположение двутавра в ГОСТе и на рис. 5.40, к).

Те же расчетные данные вычисляем для полос:

$$A^{II} = A^{III} = 1 \cdot 12 = 12 \text{ см}^2; I_{x_2} = I_{x_3} = \frac{1 \cdot 12^3}{12} = 144 \text{ см}^4.$$

Найдем положение центральной оси x поперечного сечения, вычислив ординату центра тяжести сечения y_c относительно вспомогательной оси x_{23} :

$$y_c = \frac{\sum y_c^k A^k}{\sum A^k} = \frac{y_c^I A^I + y_c^{II} A^{II} + y_c^{III} A^{III}}{A^I + A^{II} + A^{III}},$$

$$\text{где } y_c^I = \frac{12}{2} = 6 \text{ см}; y_c^{II} = y_c^{III} = 0.$$

$$y_c = \frac{6 \cdot 12}{12 + 12 \cdot 2} = 2 \text{ см.}$$

Откладываем y_c от оси x_{23} и проводим через центр тяжести C центральную ось сечения x .

5. Вычислим осевой момент инерции сечения относительно оси x :

$$I_x = \sum I_{xi}^k = I_x^I + I_x^{II} + I_x^{III} = \left(I_{x_1} + (y_c^I - y_c)^2 A^I \right) + \left(I_{x_2} + y_c^2 A^{II} \right) + \left(I_{x_3} + y_c^2 A^{III} \right) = \\ = (17,9 + 4^2 \cdot 12) + (144 + 2^2 \cdot 12) \cdot 2 = 593,9 \text{ см}^4.$$

6. Вычислим осевой момент сопротивления относительно оси x .

$$W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|},$$

где $|y_{\max}|$ - расстояние от оси x до самой удаленной точки сечения - точки K ; $|y_{\max}| = y_c + \frac{12}{2} = 2 + 6 = 8$ см.

$$\text{Итак, } W_x = \frac{593,9}{8} = 74,24 \text{ см}^3.$$

7. Определим величину допустимой нагрузки на балку.

По эпюре изгибающих моментов (рис. 5.40, в) найдем максимальный изгибающий момент:

$$M_{x\max} = \frac{5}{3}qa^2.$$

Запишем условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{z\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

$$\text{где } [\sigma] = \sigma_T / n_T = 240 / 1,5 = 160 \text{ МПа} \left(\frac{\text{МН}}{\text{м}^2} \right).$$

Из условия прочности имеем

$$M_{x\max} \leq [\sigma] W_x \text{ или } \frac{5}{3}qa^2 \leq [\sigma]W_x,$$

$$\text{откуда } q_{\text{доп}} = \frac{3[\sigma]W_x}{5a^2} = \frac{3 \cdot 160 \cdot 74,24 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 1^2} = 0,71 \cdot 10^{-2} \text{ МН/м.}$$

8. Построим эпюру нормальных напряжений в опасном сечении балки.

Найдем $M_{x\max}$ при нагрузке $q_{\text{доп}}$:

$$M_{x\max} = \frac{5}{3}q_{\text{доп}}a^2 = \frac{5}{3} \cdot 0,71 \cdot 10^{-2} \cdot 1^2 = 1,18 \cdot 10^{-2} \text{ МН}\cdot\text{м.}$$

Запишем формулу для нормальных напряжений:

$$\sigma_z = \frac{M_{x\max}}{I_x} y = \frac{1,18 \cdot 10^{-2}}{593,9 \cdot 10^{-8}} y = 1987 y. \quad (1)$$

В формулу (1) y следует подставить в метрах.

Вычислим напряжения в точках K и K_1 , наиболее удаленных от оси x в зонах растяжения и сжатия.

Для точки K имеем:

$$y_K = |y_{\max}| = 8 \text{ см} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \sigma_z^K = 1987 \cdot 8 \cdot 10^{-2} = 159 \text{ МПа} \approx [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Для точки K_1 имеем:

$$\sigma_z^{K1} = 1987 \cdot 6,75 \cdot 10^{-2} = 134,1 \text{ МПа.}$$

Построим эпюру нормальных напряжений (рис. 5.40, к справа).

9. Вычислим максимальное касательное напряжение в балке.

По эпюре Q_y (рис. 5.40, б) находим максимальную поперечную силу и вычислим ее величину при найденном значении допустимой нагрузки:

$$|Q_{y\max}| = 4q_{\text{доп}}a = 4 \cdot 0,71 \cdot 10^{-2} \cdot 1 = 2,84 \cdot 10^{-2} \text{ МН.}$$

Запишем формулу Журавского для точки K_2 , расположенной на нейтральной оси x :

$$\tau_{\max} = \tau_{zy}^{K_2} = \frac{|Q_{y\max}| S_x^\omega}{I_x b_y},$$

где S_x^ω - статический момент части площади поперечного сечения, лежащей ниже оси x (рис. 5.40,к), - площадь ω на рисунке имеет крестообразную штриховку;

$$S_x^\omega = (\omega)y_C = (1 \cdot |y_{\max}| \cdot 2) \cdot \frac{|y_{\max}|}{2} = 8^2 = 64 \text{ см}^3;$$

b_y - ширина сечения на нейтральной оси, $b_y = 2$ см.

$$\text{Тогда } \tau_{\max} = \frac{2,84 \cdot 10^{-2} \cdot 64 \cdot 10^{-6}}{593,9 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 30,6 \text{ МПа.}$$

10. Вычислим прогибы сечений C и D и угол поворота сечения B .

Приняв заданную балку (рис. 5.40, а) за грузовое состояние, выберем единичные состояния для определения перемещений характерных сечений (рис. 5.40, г, е, з).

Находим реакции опор для балок в единичном состоянии.

Для \overline{EC} (рис. 5.40, г) имеем:

$$\sum \bar{M}_A = 0 \quad \bar{R}_B 3a - \bar{p}a = 0 \rightarrow \bar{R}_B = \frac{1}{3};$$

$$\sum \bar{M}_B = 0 \quad -\bar{R}_A 3a + \bar{p}2a = 0 \rightarrow \bar{R}_A = \frac{2}{3}.$$

Для $\overline{\overline{EC}}$ (рис. 5.40, е) запишем:

$$\sum \overline{\overline{M}}_A = 0 - \overline{\overline{R}}_B 3a + \overline{\overline{p}} \frac{7}{2}a = 0 \rightarrow \overline{\overline{R}}_B = \frac{7}{6};$$

$$\sum \overline{\overline{M}}_B = 0 - \overline{\overline{R}}_A 3a + \overline{\overline{p}} \frac{1}{2}a = 0 \rightarrow \overline{\overline{R}}_A = \frac{1}{6}.$$

Для EC (рис. 5.40, з) найдем:

$$\tilde{R}_A = \tilde{R}_B = \frac{\tilde{m}}{3a} = \frac{1}{3a}.$$

Запишем выражения для изгибающего момента на силовых участках для балки в \overline{EC} (рис. 5.40, г).

Первый участок ($0 \leq z_1 \leq a$)

$$\bar{M}_{x_1} = \bar{R}_A z_1 \uparrow = \frac{2}{3} z_1 \uparrow.$$

Второй участок ($0 \leq z_2 \leq 2a$)

$$\bar{M}_{x_2} = \bar{R}_B z_2 \uparrow = \frac{1}{3} z_2 \uparrow.$$

Третий участок ($0 \leq z_3 \leq \frac{a}{2}$)

$$\bar{M}_{x_3} = 0.$$

Вычислим прогиб сечения C методом Мора.

$$\Delta_C = y_C = \sum_{i=0}^3 \int \frac{\bar{M}_{x_i} M_{x_i} dz_i}{EI_x} = \int_0^a \frac{2/3 z_1 q a z_1 dz_1}{EI_x} + \int_0^{2a} \frac{1/3 z_2 (-qa^2 + 4qa z_2 - 3/2 q z_2^2) dz_2}{EI_x} + \\ + \int_0^{a/2} 0 = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{2}{9} qa^4 + \left(-\frac{2}{3} qa^4 + \frac{32}{9} qa^4 - 2qa^4 \right) \right] = \frac{qa^4}{EI_x} \left(\frac{2}{9} + \frac{8}{9} \right) = \frac{10}{9} \frac{qa^4}{EI_x} \downarrow y_C. (*)$$

Сечение C переместились по направлению силы $\bar{p} = 1$ (вниз).

Построим эпюры изгибающих моментов для трех единичных состояний (рис. 5.40, д, ж, и).

Вычислим перемещения сечений C, D и B способом Верещагина.

Запишем формулы для определения перемещений:

$$y_C = \sum_{i=1}^3 \frac{(\omega_i) \bar{M}_{C_i}}{EI_x}, \quad y_D = \sum_{i=1}^3 \frac{(\omega_i) \bar{\bar{M}}_{C_i}}{EI_x}, \quad \theta_B = \sum_{i=1}^3 \frac{(\omega_i) \tilde{M}_{C_i}}{EI_x},$$

где ω_i - площади эпюр изгибающих моментов на каждом силовом участке для грузового состояния (рис. 5.40, в); \bar{M}_{C_i} , $\bar{\bar{M}}_{C_i}$, \tilde{M}_{C_i} - ординаты эпюр единичных состояний, вычисленные под центрами тяжести площадей ω_i (рис. 5.40, д, ж, и).

Величины ω_i , \bar{M}_{C_i} , $\bar{\bar{M}}_{C_i}$, \tilde{M}_{C_i} , входящие в формулы для y_C , y_D , θ_B , приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2. Величины, входящие в формулы Верещагина

№ с.у.	ω_i	\bar{M}_{C_i}	$\bar{\bar{M}}_{C_i}$	\tilde{M}_{C_i}
1	$\omega_1 = \frac{1}{2} qa^2 a = \frac{1}{2} qa^3$	$\bar{M}_{C_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} a = \frac{4}{9} a$	$\bar{\bar{M}}_{C_1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} a = \frac{a}{9}$	$\tilde{M}_{C_1} = \frac{1}{3a} \cdot \frac{2}{3} a = \frac{2}{9}$
2	$\omega_2 = \frac{1}{2} qa^2 2a = qa^3$	$\bar{M}_{C_2}'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} a = \frac{4}{9} a$	$\bar{\bar{M}}_{C_2}''' = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{3} a = \frac{5a}{18}$	$\tilde{M}_{C_2}''' = \frac{1}{3a} \cdot \frac{5}{3} a = \frac{5}{9}$

№ с.у.	ω_i	\bar{M}_{C_i}	$\bar{\bar{M}}_{C_i}$	\tilde{M}_{C_i}
	$\omega_1'' = \frac{3q(2a)^3}{12} a = 2qa^3$	$\bar{M}_{C_2}'' = \frac{1}{3} \cdot a = \frac{1}{3}a$	$\bar{\bar{M}}_{C_2}'' = \frac{1}{6} \cdot 2a = \frac{a}{3}$	$\tilde{M}_{C_2}'' = \frac{1}{3a} \cdot 2a = \frac{2}{3}$
	$\omega_2' = -\frac{1}{2}qa^2 \cdot 2a = -qa^3$	$\bar{M}_{C_2}' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}a = \frac{2}{9}a$	$\bar{\bar{M}}_{C_2}' = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{3}a = \frac{7a}{18}$	$\tilde{M}_{C_2}' = \frac{1}{3a} \cdot \frac{7}{3}a = \frac{7}{9}$
3	$\omega_3 = -qa^2 \cdot a = -qa^3$	$\bar{M}_{C_3} = 0$	$\bar{\bar{M}}_{C_3} = 1 \cdot \frac{a}{4} = \frac{a}{4}$	$\tilde{M}_{C_3} = 0$

Вычислим прогиб y_C .

$$\begin{aligned}
 y_C &= \frac{(\omega_1)\bar{M}_{C_1}}{EI_x} + \frac{(\omega_2'')\bar{M}_{C_2}'' + (\omega_2')\bar{M}_{C_2}'}{EI_x} + \frac{(\omega_3)\bar{M}_{C_3}}{EI_x} = \\
 &= \frac{1}{EI_x} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}qa^3 \right) \frac{4}{9}a \right] + \left[(qa^3) \frac{4}{9}a + (2qa^3) \frac{1}{3}a + (-qa^3) \frac{2}{9}a \right] + 0 \right\} = \\
 &= \frac{qa^4}{EI_x} \left[\frac{2}{9} + \frac{8}{9} \right] = \frac{10}{9} \frac{qa^4}{EI_x} \downarrow y_C. \tag{**}
 \end{aligned}$$

Сравнивая величины прогиба y_C , вычисленные методом Мора (*) и способом Верещагина (**), видим, что они совпадают как для всей балки, так и для каждого силового участка.

Вычислим прогиб y_D .

$$\begin{aligned}
 y_D &= \frac{(\omega_1)\bar{\bar{M}}_{C_1}}{EI_x} + \frac{(\omega_2'')\bar{M}_{C_2}'' + (\omega_2')\bar{M}_{C_2}'}{EI_x} + \frac{(\omega_3)\bar{\bar{M}}_{C_3}}{EI_x} = \\
 &= \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{2}qa^3 \right) \left(\frac{a}{9} \right) + (qa^3) \left(\frac{5a}{18} \right) + (2qa^3) \left(\frac{a}{3} \right) + (-qa^3) \left(\frac{7a}{18} \right) + (-qa^3) \left(\frac{a}{4} \right) \right] = \\
 &= \frac{qa^4}{EI_x} \left(\frac{1}{18} + \frac{5}{18} + \frac{2}{3} - \frac{7}{18} - \frac{1}{4} \right) = \frac{13}{36} \frac{qa^4}{EI_x} \uparrow y_D.
 \end{aligned}$$

Сечение D переместилось по направлению силы $p = 1$, то есть вверх.

Вычислим угол поворота θ_B .

$$\begin{aligned}
 \theta_B &= \frac{(\omega_1)\tilde{M}_{C_1}}{EI_x} + \frac{(\omega_2'')\bar{M}_{C_2}'' + (\omega_2')\tilde{M}_{C_2}'}{EI_x} + \frac{(\omega_3)\tilde{M}_{C_3}}{EI_x} = \\
 &= \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{1}{2}qa^3 \right) \frac{2}{9} + (qa^3) \frac{5}{9} + (2qa^3) \frac{2}{3} + (-qa^3) \frac{7}{9} + 0 \right] = \\
 &= \frac{qa^3}{EI_x} \left(\frac{1}{9} + \frac{5}{9} + \frac{4}{3} - \frac{7}{9} \right) = \frac{11}{9} \frac{qa^3}{EI_x}.
 \end{aligned}$$