

§ 5.1. ПОНЯТИЕ О ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Деформации и перемещения. Под нагрузкой брус меняет свои размеры и форму, т. е. деформируется. При этом все его точки получают некоторые перемещения.

Понятие перемещения нельзя смешивать с понятием деформации. Под деформацией подразумевается изменение размеров и формы только элементарного параллелепипеда, выделенного из бруса в какой-либо его точке. Перемещение представляет результат совместной деформации всех элементарных параллелепипедов, заполняющих тело.

До деформации бруса заметим на нем короткий отрезок прямой A_1A_2 и произвольную точку a на нем (рис. 5.1). В результате деформации бруса отрезок переместится в положение $A'_1A'_2$, а точка a — в положение a' .

Расстояние $aa' = \Delta a$ называется *линейным перемещением* точки a .

Перемещения, связанные с поворотом отрезков и плоскостей (сечений), называются *угловыми перемещениями*, например, угол $\theta_{A_1A_2}$ есть угловое перемещение отрезка A_1A_2 (рис. 5.1).

Так как согласно допущению о плоских сечениях поперечные сечения брусьев при деформации перемещаются как одно целое, то, очевидно, перемещения любой точки бруса легко определяются, если известны угловое перемещение произвольного поперечного сечения и линейные его центра тяжести.

В дальнейшем под перемещением бруса всегда будем подразумевать именно эти линейные и угловые перемещения.

На рис. 5.2 a показано линейное перемещение Δl при растяжении, а на рис. 5.2 b — угловое перемещение φ при кручении. При изгибе сечение бруса совершает одновременно два перемещения: линейное (прогиб) — u и угловое (угол поворота) — θ .

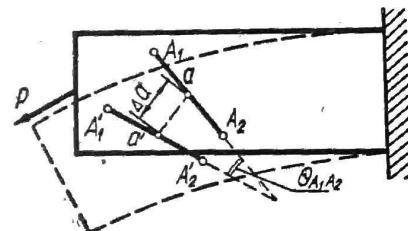


Рис. 5.1

(рис. 5.2в).* Как видно из рис. 5.2в, при изгибе угол поворота поперечного сечения θ равен углу наклона, составляемого касательной с недеформированной осью балки. Тангенс этого угла можно найти по первой производной от функции $y = f(z)$, представляющей уравнение изогнутой оси бруса:

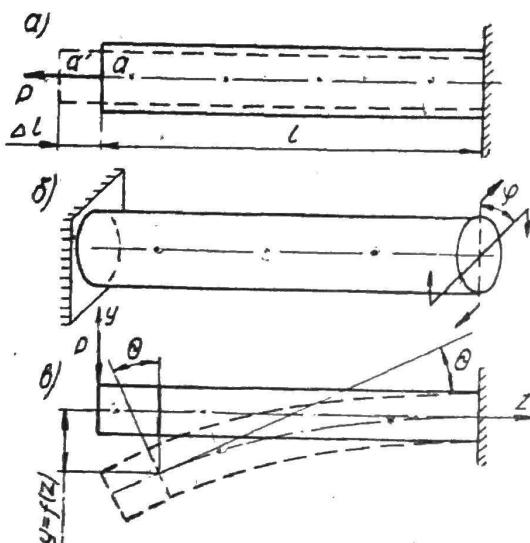


Рис. 5.2

быть уверенным только в их прочности. Необходимо убедиться также и в том, что возникающие в деталях и узлах конструкции перемещения не помешают ее нормальной работе. При конструировании двигателей внутреннего сгорания, например, нужно правильно задать зазоры между подвижными элементами машины, иначе при нагреве детали возникающие у них перемещения могут вызвать перекрытие зазора, остановку, и даже разрушение машины.

Поэтому при конструировании часто необходимо ограничивать упругие перемещения Δ деталей и узлов определенными допустимыми перемещениями $[\Delta]$:

$$\Delta \leq [\Delta]. \quad (5.1)$$

Допустимые линейные перемещения определяются условиями эксплуатации и назначением конструкции и задаются обычно как часть какого-либо основного ее размера. При этом самые высокие требования жесткости предъявляют к точным механизмам. Для передаточных валиков, например, допустимый прогиб устанавливается равным $\frac{1}{3000}$ пролета.

Допускаемые угловые перемещения могут задаваться в радианах или в радианах на погонный метр: *рад/пог. м.*

* При кручении и изгибе происходит также перемещение поперечного сечения вдоль оси бруса, однако в силу малости этого перемещения им обычно пренебрегают.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dz}.$$

В инженерных конструкциях прогибы балок обычно малы по сравнению с пролетом, поэтому θ бывает очень мало (не больше $0,02 \text{ rad}$), это позволяет принять при изгибе

$$\operatorname{tg} \theta \approx \theta = \frac{dy}{dz}.$$

Условие жесткости. Определение перемещений необходимо при расчете деталей машин и целых конструкций на жесткость. Действительно, для оценки новой машины или конструкции недостаточно

При кручении валов, например, практикой выработаны следующие допустимые пределы, которые нельзя переходить, чтобы не нарушить работу машины:

в обычных условиях $[\Delta] = [\varphi] = 0,005 \text{ рад/пог. м.}$,

при переменных нагрузках $[\varphi] = 0,004 \text{ рад/пог. м.}$,

для ударных нагрузок $[\varphi] = 0,0025 \text{ рад/пог. м.}$.

Три типа задач. Расчеты на жесткость, как и расчеты на прочность, могут проводиться по формуле (5.1) в трех вариантах:

1. *Конструктивный расчет.* По известной длине бруса, форме поперечного сечения и действующей на него нагрузке подбираются такие размеры поперечного сечения, при которых перемещение заданного сечения не превышает нормативной величины $[\Delta]$.

2. *Определение грузоподъемности.* По известным размерам бруса и схеме нагрузки находится величина внешней силы (или системы сил), вызывающей перемещения заданного сечения на величину $[\Delta]$.

3. *Проверочный расчет на жесткость.* Заключается в определении перемещения заданного сечения бруса по известным размерам бруса и действующей на него нагрузке. Полученное в этом случае перемещение сравнивается с допускаемым и делается вывод о достаточной или недостаточной жесткости рассматриваемого бруса.

Следует заметить, что расчеты на жесткость в ближайшее время будут неизбежно приобретать все большее значение. Это происходит потому, что непрестанное совершенствование технологических процессов позволяет получать материалы с все более высокими механическими характеристиками — пределом прочности, пределом текучести. При возросших механических характеристиках размеры деталей, определяемые из условия прочности, удается значительно уменьшить. Уменьшение размеров поперечного сечения деталей приводит к резкому увеличению их перемещений.

Таким образом, конструктор должен решить [4], следует ли придать деталям, изготавляемым из высококачественных материалов, те размеры, которые вызываются только требованиями прочности, и получить гибкие детали (например, применяемые в авиации гибкие валы) или более целесообразно отказаться от применения таких качественных материалов, с тем, чтобы к детали можно было бы в той или иной мере предъявить требования жесткости. В последнем случае размеры детали находятся в результате двух расчетов — на прочность и жесткость, и из двух полученных величин берется больший.

Однако определение перемещений необходимо не только при расчетах на жесткость. Умение определять перемещения необходимо также при расчете статически неопределенных систем, которые имеют широкое распространение в машиностроении

(см. главу VI). Расчеты на прочность брусьев, испытывающих действие ударных и вибрационных нагрузок, также основываются на определении перемещений [1]. Все это подчеркивает большую актуальность изучаемых в этой главе вопросов.

18

§ 5.2. МЕТОД О. МОРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Общие замечания. Метод определения упругих перемещений, предложенный О. Мором, является самым общим методом, так как он основан на общем принципе механики — принципе возможных перемещений. Однако, прежде чем перейти к выводу формулы О. Мора, необходимо предварительно рассмотреть вспомогательную теорему о взаимности работ и перемещений.

Теоремы о взаимности работ и перемещений. Рассмотрим сущность этих теорем на примере бруса, находящегося под действием статически приложенных в точках i и k сил P_i и P_k (рис. 5.3).

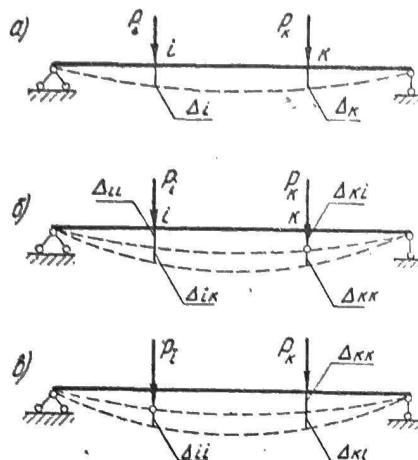


Рис. 5.3

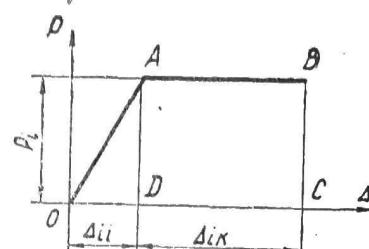


Рис. 5.4

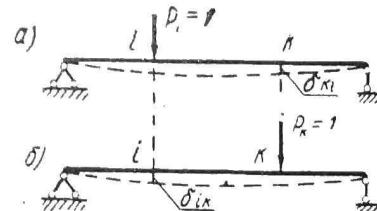


Рис. 5.5

Предположим, что первоначально к брусу (рис. 5.3б) была статически приложена сила P_i , под действием которой точки i и k получили некоторые упругие перемещения Δ_{ii} и Δ_{ki} (первый индекс у Δ показывает точку, которая получила перемещение, второй — силу, вызвавшую это перемещение).

Величины перемещений Δ_{ii} и Δ_{ki} , очевидно, зависят от действующей силы и при упругих деформациях будут прямо пропорциональны ей. На рис. 5.4 показана графическая зависимость между силой P и перемещением, вызванным этой силой, — Δ (диаграмма сил). Поскольку площадь диаграммы сил численно равна работе, затраченной на деформацию системы [8], работа силы P_i на перемещениях Δ_{ii} согласно рис. 5.4 будет равна

$$A_1 = \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii}.$$

На деформированный силой P_i брус приложим теперь также статически в точке k силу P_k , при этом перемещения точек i и k соответственно увеличатся на Δ_{ik} и Δ_{kk} .

Так как сила P_k прикладывалась на балку статически, то работа этой силы на перемещение Δ_{kk} , как и в предыдущем случае, будет равна:

$$A_2 = \frac{1}{2} P_k \Delta_{kk}.$$

В то же время некоторую работу совершает и сила P_i , точка приложения которой получила дополнительное перемещение Δ_{ik} . Так как сила P_i в этом случае не меняла своей величины (участок AB на рис. 5.4), работа ее на перемещениях Δ_{ik} будет определяться площадью прямоугольника $ABCD$:

$$A_3 = P_i \Delta_{ik}.$$

Полная работа при последовательном нагружении бруса силами P_i и P_k равна:

$$A = \frac{1}{2} P_k \Delta_{kk} + \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + P_i \Delta_{ik}. \quad (a)$$

Но порядок приложения сил P_i и P_k можно изменить, приложив сначала силу P_k и затем P_i (рис. 5.3в). При этом полную работу всех сил можно записать по аналогии с предыдущим случаем в следующем виде:

$$A = \frac{1}{2} P_k \Delta_{kk} + \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + P_k \Delta_{ki}. \quad (b)$$

Согласно принципу независимости действия сил величина работы, затраченной на деформацию бруса, не будет зависеть от последовательности приложения сил. Поэтому, приравнивая выражения (a) и (b), получим:

$$P_i \Delta_{ik} = P_k \Delta_{ki}. \quad (5.2)$$

Таким образом, работа сил первого состояния P_i на перемещениях по их направлению, вызванных силами второго состояния Δ_{ik} , равна работе сил второго состояния P_k на перемещениях по их направлению, обусловленных силами первого состояния Δ_{ki} . Этот вывод и носит название теоремы о взаимности работ, или теоремы Бетти.

Если силы $P_i = P_k = 1$, то, обозначая перемещения от единичной силы буквой δ , получим на основании выражения (5.2)

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (5.3)$$

Это равенство выражает теорему о взаимности перемещений (теорему Максвелла), согласно которой единичная сила (или единичный момент), приложенная в точке i , создает такое перемещение в точке k , которое перемещение получается в точке i от приложенной единичной силы в точке k (рис. 5.5).

Формула О. Мора для плоской системы сил. На рис. 5.6 изображена плоская рама, находящаяся под действием заданной нагрузки и равномерного нагрева — грузовое состояние. Под влиянием внешних воздействий произойдет деформация рамы и все точки ее получат некоторые перемещения. Найдем перемещение Δ_{ki} произвольной точки k рамы, для этого воспользуемся известным из теоретической механики принципом возможных перемещений. Напомним формулировку принципа возможных перемещений: если система связанных между собой точек находится под воздействием каких-либо сил и сохраняет при этом равновесие, то работа этих сил на любых возможных для системы точек перемещениях равна нулю*.

Всякое уравновешенное тело можно рассматривать как множество связанных между собой материальных точек, находящихся под воздействием внешних и внутренних сил. Следовательно, можно заключить, что сумма работ всех сил (внешних и внутренних), приложенных к точкам уравновешенного тела, на любых возможных упругих перемещениях этих точек равна нулю.

Всякое уравновешенное тело можно рассматривать как множество связанных между собой материальных точек, находящихся под воздействием внешних и внутренних сил. Следовательно, можно заключить, что сумма работ всех сил (внешних и внутренних), приложенных к точкам уравновешенного тела, на любых возможных упругих перемещениях этих точек равна нулю

$$A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}} = 0. \quad (5.4)$$

В качестве возможного перемещения системы выберем

перемещение, которое получит заданная система под действием *безразмерной* силы $P_k = 1$, приложенной в направлении искомого перемещения, в той точке k , перемещение которой определяется. В дальнейшем заданную систему, загруженную такой единичной силой, будем называть единичным состоянием, а перемещения, которые получит эта система под действием единичной силы, — единичными перемещениями (рис. 5.6б).

Согласно теореме о взаимности работ вместо отыскания работы всех сил грузового состояния на перемещениях единичного

* Под возможными перемещениями в упругих системах понимают линейные и угловые перемещения поперечных сечений бруса.

состояния можно отыскать работу всех сил (внешних и внутренних) единичного состояния на перемещениях грузового состояния.

Работа внешних сил единичного состояния на перемещениях грузового состояния согласно рис. 5.6 будет равна:

$$A_{\text{внеш}} = 1 \cdot \Delta_H. \quad (6)$$

Найдем теперь работу внутренних сил единичного состояния на перемещениях грузового состояния. Для этого вычислим вначале, какую работу совершают эти силы на элементарном участке длиной dz , а затем просуммируем эти работы по всей длине рамы.

На рис. 5.6в показан элемент рамы, вырезанный в ее произвольном сечении из каждого состояния (грузового и единичного). Действие отброшенных частей рамы заменено внутренними усилиями*, при этом поперечная сила на чертеже условно не показана, так как влияние ее на перемещения системы пренебрежимо мало.

Для элемента, принадлежащего грузовому состоянию, на рис. 5.6в показаны отдельно деформация от нормальной силы N_x , изгибающего момента M_x и равномерного температурного нагрева.

Под действием силы N_x элементарная частица бруса получит удлинение

$$\Delta dz = \frac{N_x dz}{E F}.$$

Момент M_x вызовет поворот сечения на угол $\frac{d\varphi}{2}$. Согласно формуле (2.36) $\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_x}{EI_x}$, и, следовательно, $d\varphi = \frac{M_x dz}{EI_x}$.

Наконец, перемещение от равномерного температурного нагрева составит величину

$$\Delta dz' = \alpha t dz.$$

Поскольку на линейных перемещениях будет совершать работу только нормальная сила \bar{N}_x , а на угловых перемещениях — изгибающий момент \bar{M}_x , то

$$dA_{\text{внутр}} = \bar{N}_x \Delta c_1 + \bar{N}_x \Delta c_2 + \bar{N}_x \Delta c_1 + \bar{N}_x \Delta c_2 + \bar{M}_x \frac{d\varphi}{2} + \bar{M}_x \frac{d\varphi}{2}$$

или:

$$dA_{\text{внутр}} = \bar{N}_x \Delta dz' + \bar{N}_x \Delta dz + \bar{M}_x d\varphi = \bar{N}_x \alpha t dz + \frac{\bar{N}_x \bar{N}_x dz}{EF} + \frac{\bar{M}_x \bar{M}_x dz}{EI_x}.$$

* Внутренние усилия вспомогательного состояния условимся в дальнейшем склонять горизонтальным штрихом.

Для определения работы всех внутренних сил просуммируем сначала элементарные работы в пределах каждого отдельного участка, а затем по всем участкам, тогда:

$$dA_{\text{внутр}} = \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_z \bar{N}_z dz}{EF} + \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_x \bar{M}_x dz}{EI_x} + \sum \int_0^l \bar{N}_z \alpha \Delta t dz. \quad (2)$$

Теперь подставим выражения (в) и (г) в уравнение (5.4). При этом необходимо учесть, что согласно (5.4) работы внешних и внутренних сил противоположны по знаку, поэтому их следует вводить с разными знаками.

Подстановка дает:

$$\Delta_{ki} = \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_z \bar{N}_z dz}{EF} + \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_x \bar{M}_x dz}{EI_x} + \sum \int_0^l \bar{N}_z \alpha \Delta t dz. \quad (5.5)$$

Формула О. Мора для пространственной системы сил. В поперечных сечениях брусьев, загруженных пространственной системой сил, возникает шесть внутренних усилий \bar{N}_z , \bar{Q}_x , \bar{Q}_y , \bar{M}_x , \bar{M}_y , \bar{M}_z .

Пренебрегая влиянием поперечных сил и записывая по аналогии члены, учитывающие влияние изгибающего M_y и крутящего M_z моментов на перемещения бруса, будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta = & \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_z \bar{N}_z dz}{EF} + \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_x \bar{M}_x dz}{EI_x} + \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_y \bar{M}_y dz}{EI_y} + \\ & + \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_z \bar{M}_z dz}{GI_k} + \sum \int_0^l \bar{N}_z \alpha \Delta t dz. \end{aligned} \quad (5.6)$$

В этой формуле \bar{N}_z , \bar{M}_x , \bar{M}_y , \bar{M}_z —внутренние усилия в произвольном сечении бруса, определяемом координатой z , от заданной нагрузки; \bar{N}_z , \bar{M}_x , \bar{M}_y , \bar{M}_z —внутренние усилия в том же сечении бруса, нагруженного только одной единичной безразмерной силой, приложенной в сечении, перемещение которого определяется. Природа этой силы и ее направление должны соответствовать искомому перемещению: если искомым является угол поворота сечения, то в единичном состоянии прикладывается момент $m_k = 1$, если определяется линейное перемещение—прикладывается сила $\bar{P}_k = 1$;

E , G —продольный модуль упругости и модуль сдвига;
 F , I_x (I_y), I_k —соответственно площадь, главный центральный момент инерции сечения бруса, геометрическая характеристика бруса при кручении на рассматриваемом участке (в случае круглого бруса $I_k = I_p$);

Δt —перепад температур при нагреве (охлаждении).

Порядок расчета. Определение перемещений по методу Мора выполняется в такой последовательности:

1. Рядом с заданной грузовой системой, нагруженной внешними силами, изображается единичная система, т. е. такая же система, как и заданная, но нагруженная в сечении, перемещение которого определяется, единичной безразмерной силой, приложенной в направлении искомого перемещения.

2. Определяются реакции опор рассматриваемой системы для заданного и единичного состояний.

3. Брус разбивается на участки, после чего составляются выражения внутренних усилий по участкам для заданной (N_z, M_x, M_y, M_z) и единичной ($\bar{N}_z, \bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_z$) систем. При разбиении бруса на участки следует помнить, что граница распределенной нагрузки, каждая сосредоточенная сила (в том числе и единичная), каждое резкое изменение сечений всегда служат границей участка.

4. Подставляя под интеграл Мора выражения для внутренних усилий от заданной и единичной нагрузок, производят интегрирование по длине каждого участка и вычисляют искомое перемещение.

В брусьях с плавно меняющимся сечением $F, I_x(I_y), I_k$ будут также меняться по длине участка, поэтому в интеграл Мора их следует вводить в этом случае как функции координаты z .

О знаке перемещения. При определении перемещений направление единичной силы выбирается произвольно. Положительный знак результата вычисления будет свидетельствовать о совпадении найденного перемещения с направлением приложенной единичной силы.

Частные случаи. Рассмотрим частные случаи нагружения бруса.

1. *Брус испытывает осевое растяжение (сжатие).* При этом в поперечном сечении появляется только продольная сила N_z , поэтому

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{N_z \bar{N}_z dz}{EF}. \quad (5.7)$$

Если на некотором участке бруса N_z, E, F постоянны, а $\bar{N}_z = 1$ (рис. 5.7a), то согласно (5.7) перемещения на этом участке можно определять, не прибегая к интегрированию, по формуле

$$\Delta = -\frac{N_z l}{EF}.$$

2. *Брус испытывает деформацию кручения.* При кручении в поперечных сечениях возникают только крутящие моменты M_z , поэтому перемещение сечений (углы поворота) при кручении можно определять по выражению

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_z \bar{M}_z dz}{GJ_k}. \quad (5.8)$$

Если на рассматриваемом участке жесткость GI_k сечения и крутящий момент M_z постоянны (рис. 5.7б), то согласно (5.8) перемещения на этом участке можно определять, не прибегая к интегрированию, по формуле

$$\Delta = -\frac{M_z l}{GI_k}. \quad (5.9)$$

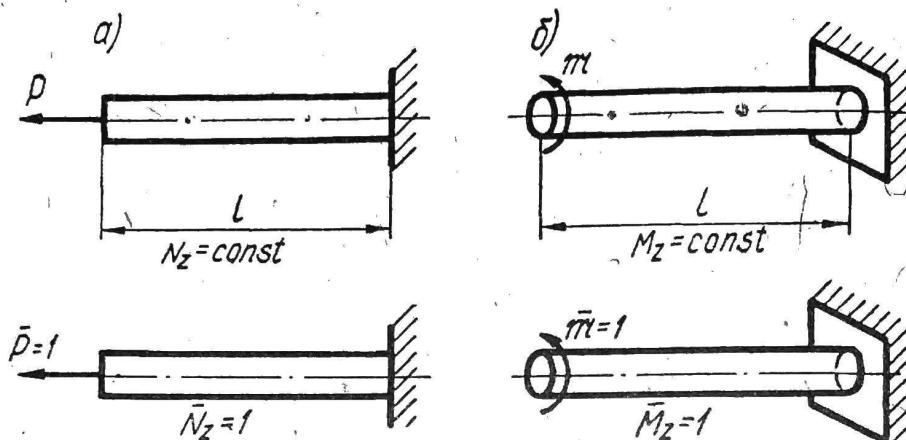


Рис. 5.7

3. *Брус работает на изгиб.* При изгибе плоских балочно-рамных систем влияние N_z при подсчете Δ оказывается очень незначительным по сравнению с влиянием M_x и M_y , это позволяет в (5.6) не учитывать член, содержащий N_z , и вычислять при прямом изгибе перемещения по формуле

$$\Delta = \sum_0^l \int \frac{M_x \bar{M}_x dz}{EI_x}. \quad (5.10)$$

Для систем с криволинейными элементами малой кривизны перемещения при изгибе равны

$$\Delta = \sum_0^s \int \frac{M_x \bar{M}_x ds}{EI_x}, \quad (5.11)$$

где $ds = R d\varphi$ — элемент геометрической оси криволинейного участка радиуса R .

4. *Брус испытывает равномерный нагрев на Δt° .* Так как в статически определимых системах связи не препятствуют их деформации, то в этих системах при нагревании не появляется никаких внутренних усилий и

$$\Delta = \sum_0 \int \bar{N}_z \alpha \Delta t dz \quad (5.12)$$

Под знак суммы в (5.12) вводятся те стержни системы, которые подверглись влиянию температуры и испытывают продоль-

ное усилие под действием единичной силы. Произведение $N_z \bar{a} \Delta t dz$ берется со знаком плюс, если усилие N_z и температура Δt одновременно укорачивают или удлиняют элемент стержня.

Пример.

Подобрать диаметр вала, изображенного на рис. 5.8, из условия прочности и жесткости, если $[\tau] = 14 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$, $[\varphi] = 0,005 \text{ рад/пог.м}$, $G = 7,35 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$.

Построив эпюру крутящих моментов, подбираем диаметр вала по условию прочности при кручении

$$[\tau] = \frac{[(M_z)_{\max}]}{W_p} = \frac{3m \cdot 16}{\pi d^3} \leq [\tau], \text{ откуда}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{48m}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{48 \cdot 200}{3,14 \cdot 14 \cdot 10^7}} = 0,028 \text{ м} = 28 \text{ мм.}$$

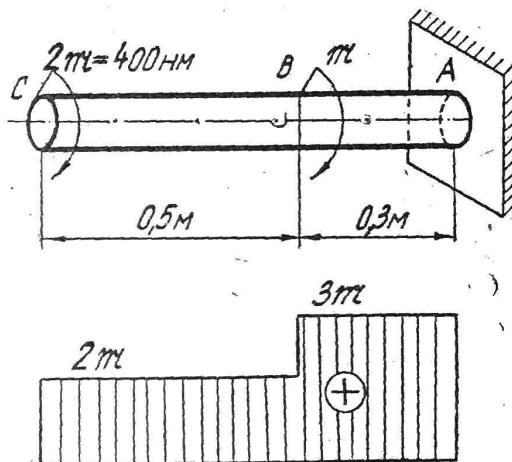
Так как по условию задачи ограничен угол закручивания одного метра по длине вала, надо найти деформацию одного погонного метра на наиболее напряженном участке. Таким участком будет участок AB вала, для него согласно (5.9)

$$\varphi_{\text{пог. м}} = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_z}{GI_p} = \frac{3m \cdot 32}{G\pi d^4}$$

Подставив это значение в (5.1), найдем диаметр вала, отвечающий условию жесткости:

$$\varphi_{\text{пог. м}} = \frac{3m \cdot 32}{G\pi d^4} \leq [\varphi],$$

Рис. 5.8



$$d \geq \sqrt[4]{\frac{3m \cdot 32}{G\pi[\varphi]}} = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 200 \cdot 32}{7,35 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,005}} = 0,063 \text{ м} = 63 \text{ мм.}$$

В соответствии с ГОСТом принимаем $d = 65 \text{ мм}$, отвечающий одновременно условиям прочности и жесткости.

§ 5.3. ВЗАИМНЫЕ (ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ) ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Понятие о взаимных перемещениях. В § 5.2 рассматривался порядок определения перемещений того или иного поперечного сечения из его начального положения в новое. Такие перемещения принято называть абсолютными перемещениями. В некоторых случаях приходится находить перемещение какого-либо сечения по отношению к другому сечению, также переместившемуся вследствие деформации конструкции, т. е. необходимо

установить величину взаимного линейного сближения (удаления) и взаимного углового перемещения.

Так, например, в раме, изображенной на рис. 5.9, сечения C_1 и C_2 в начальном положении, когда рама была не загружена, примыкали друг к другу. Вследствие воздействия системы сил рама деформировалась и приняла вид, показанный на рис. 5.9 пунктиром (сечения C_1 и C_2 разошлись и повернулись). Взаимные линейные ($\Delta_{C_1-C_2}^{\text{гор}}$, $\Delta_{C_1-C_2}^{\text{вер}}$) и угловые перемещения ($\Delta_{C_1-C_2}^{\text{угл}}$) этих сечений показаны на рисунке.

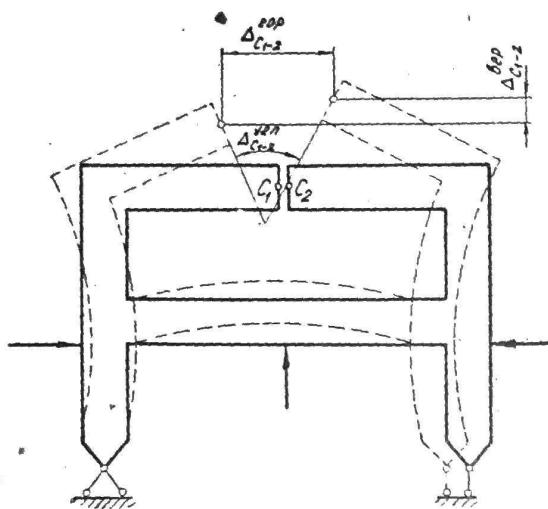


Рис. 5.9

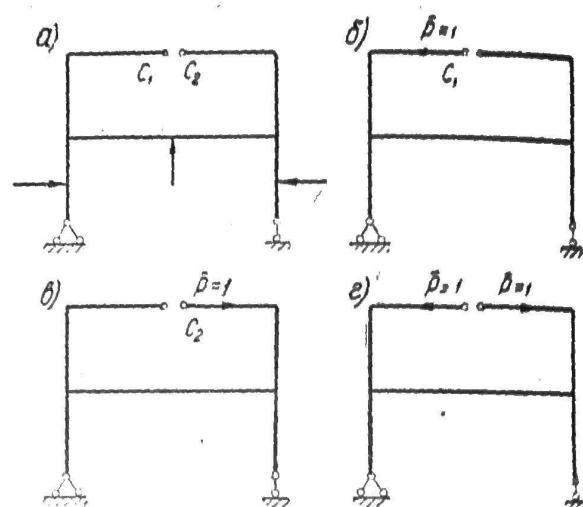


Рис. 5.10

Определение взаимных перемещений. Вычислим взаимное горизонтальное перемещение точек C_1 и C_2 рамы, изображенной на рис. 5.10a. Для этого найдем предварительно абсолютные перемещения каждой из этих точек, приложив вначале единичную силу в точке C_1 , а затем в точке C_2 (рис. 5.10б, в).

Тогда искомое перемещение

$$\Delta_{C_1-C_2} = \Delta_{C_1} + \Delta_{C_2} = \sum_0^l \frac{M_x(\bar{M}_x)_{C_1} dz}{EI_x} + \sum_0^l \frac{M_x(\bar{M}_x)_{C_2} dz}{EI_x}.$$

Так как сумма интегралов равна интегралу суммы, то

$$\Delta_{C_1-C_2} = \sum_0^l \frac{M_x[(\bar{M}_x)_{C_1} + (\bar{M}_x)_{C_2}] dz}{EI_x}.$$

Из этой формулы следует, что взаимное перемещение можно вычислить с помощью такого вспомогательного состояния (рис. 5.10г), в котором изгибающий момент складывается из суммы изгибающих моментов, соответствующих состояниям, показанным на рис. 5.10б, в.

Обозначая

$$\overline{M}_x = (\overline{M}_x)_{C_1} + (\overline{M}_x)_{C_2},$$

получим

$$\Delta_{C_1-C_2} = \sum \int_0^l \frac{M_x \overline{M}_x dz}{EI_x}.$$

Аналогично решается задача и при вычислении других взаимных перемещений. На рис. 5.11 показано, как следует прикладывать силы во вспомогательном состоянии при определении взаимно-вертикального и взаимно-углового перемещения сечений.

Правило знаков. Направляя силы во вспомогательном состоянии друг от друга, мы тем самым предполагаем, что расстояние между точками должно увеличиваться. Положительный результат вычисления будет свидетельствовать о том, что наше предположение оказалось верным.

После проработки § 5.2, 5.3 рекомендуется просмотреть задачи 45—53 [6].

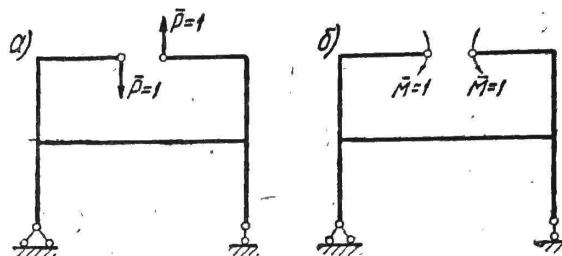


Рис. 5.11

§ 5.4. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА О. МОРА (способ А. Верещагина)*

Основная формула. В тех случаях, когда ось бруса прямолинейна и жесткость поперечного сечения в пределах отдельных участков постоянна, при вычислении перемещений бруса интеграл Мора целесообразно вычислять, не прибегая к интегрированию, по способу А. Верещагина.

Способ А. Верещагина распространяется на любое из слагаемых формулы (5.6). Для теоретического обоснования этого правила рассмотрим один из интегралов, например,

$$\int_0^l \frac{M_x \overline{M}_x dz}{EI_x},$$

относящийся к случаю изгиба бруса.

Определим вертикальное перемещение (прогиб) конца бруса (рис. 5.12а). Эпюры M_x и \overline{M}_x для этого случая показаны на рис. 5.12а, б.

Из рисунка видно, что произведение $M_x dz$ представляет собой элементарную площадь $d\omega$ эпюры изгибающих моментов от

* Этот способ неприменим для брусьев с криволинейной осью.

заданной нагрузки. А так как $\bar{M}_x = 1 \cdot z$, формулу (5.10) можно переписать в следующем виде:

$$\Delta = \int_0^l \frac{d\omega \cdot z}{EI_x}.$$

Числитель этого подынтегрального выражения представляет статический момент площади ω_{M_x} относительно вертикальной оси, проходящей через точку B (рис. 5.12а).

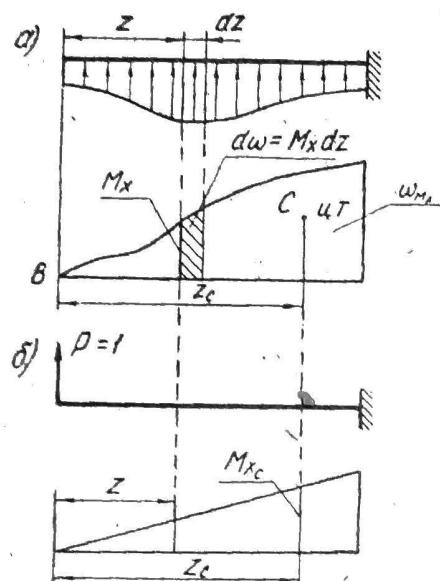


Рис. 5.12

Если площадь ω и координаты ее центра тяжести z_c известны, то статический момент может быть найден без непосредственного интегрирования:

$$\int z d\omega = \omega_{M_x} z_c, \text{ поскольку } 1 \cdot z_c = \bar{M}_{x_c},$$

то

$$\Delta = \int_0^l \frac{M_x \bar{M}_x dz}{EI_x} = \frac{\omega_{M_x} \bar{M}_{x_c}}{EI_x}.$$

Таким образом, вычисление интеграла Мора может быть выполнено перемножением площади эпюры от заданной нагрузки на ординату единичной эпюры, взятую под центром тяжести первой эпюры.

Аналогично могут быть найдены и остальные интегралы, входящие в формулу Мора (5.6), при этом сама формула может быть представлена в следующем виде:

$$\Delta = \sum \frac{\omega_N \bar{N}_C}{EF} + \sum \frac{\omega_{M_x} \bar{M}_{x_c}}{EI_x} + \sum \frac{\omega_{M_y} \bar{M}_{y_c}}{EI_y} + \sum \frac{\omega_{M_z} \bar{M}_{z_c}}{GI_p} + \sum \omega_t \bar{N}_C. \quad (5.13)$$

Здесь ω_N , ω_{M_x} , ω_{M_y} , ω_{M_z} — площади эпюр нормальных сил, изгибающих и крутящих моментов от заданной нагрузки (грузовые эпюры);

\bar{N}_C , \bar{M}_{x_c} , \bar{M}_{y_c} , \bar{M}_{z_c} — ординаты эпюр нормальных сил, изгибающих и крутящих моментов от единичной силы (момента), приложенной в направлении искомого перемещения, взятые под центром тяжести грузовой эпюры;

EF , EI_x , EI_y , GI_p — жесткости сечения при растяжении, изгибе, кручении;

$\omega_t = \int_0^l \Delta t dz$ — площадь эпюры приращения температуры на данном участке.

Порядок расчета. Определение перемещений по способу А. Верещагина выполняется в следующей последовательности:

1. Рядом с заданной системой, нагруженной внешними силами, изображается такая же система, как и заданная, но нагруженная в сечении, перемещение которого определяется единичным силовым фактором, приложенным в направлении искомого перемещения. Если ищется линейное перемещение — прикладывается сила $\bar{P} = 1$, если искомым является угол поворота, то прикладывается единичный момент $\bar{m} = 1$.

2. Определяются реакции опор для грузового и единичного состояний и строятся для них эпюры внутренних силовых факторов.

3. Брус разбивается на участки, после чего вычисляются на каждом участке площади эпюр внутренних усилий, построенных для грузового состояния, и определяются координаты их центра тяжести. При разбивке бруса на участки следует помнить, что граница распределенной нагрузки, каждая сосредоточенная сила, в том числе и единичная, каждое резкое изменение сечения всегда служит границей участков.

4. Под центром тяжести грузовых эпюр находят ординаты соответствующих эпюр, построенных для единичного состояния.

5. Вычисляются жесткости на каждом участке и по (5.13) определяется величина искомого перемещения. При перемножении грузовых и единичных эпюр одинакового знака произведение $\varphi_N \bar{N}_C$, $\varphi_{M_x} \bar{M}_{x_C}$... получается положительным, а для эпюр разного знака — отрицательным. При этом отрицательный ответ результата свидетельствует только о том, что направление искомого перемещения не совпадает с направлением единичной силы,

Общие замечания. Вычисление площадей эпюры и ее центра тяжести на каждом участке значительно облегчается, если эпюру на этом участке разбить на простейшие фигуры (см. задачу 56 работы [6]).

В случае сложной эпюры целесообразно расслоить ее путем построения нескольких эпюр — от каждой нагрузки в отдельности. Искомое перемещение в этом случае находится путем суммирования результатов перемножения каждой отдельной эпюры на единичную (см. задачу 55 [6]).

При жесткости сечений, непрерывно изменяющейся по длине участка (брюсья с плавно меняющимся поперечным сечением), величина EI_x (или EF , GI_p) не может быть вынесена за знак интеграла, поэтому в этом случае вместо грузовой эпюры строится эпюра

$$\frac{M_x}{EI_x} = f(z).$$

[6]. После проработки этого параграфа просмотрите задачи 54—59

Частные случаи. 1. Для систем, испытывающих только растяжение — сжатие ($M_x = M_y = M_z = \Delta t = 0$), перемещения определяются по формуле:

$$\Delta = \Sigma \frac{\omega_N \bar{N}_c}{EF}. \quad (5.14)$$

2. Для систем, участки которых испытывают только деформацию кручения:

$$\Delta = \Sigma \frac{\omega_M z \bar{M}_{zc}}{GI_p}. \quad (5.15)$$

3. Для плоских балочно-рамных систем, у которых влияние N_z на деформацию мало:

$$\Delta = \Sigma \frac{\omega_{M_x} \bar{M}_{x_c}}{EI_x}. \quad (5.16)$$

4. При равномерном температурном нагреве:

$$\Delta = \Sigma \alpha \omega_t \bar{N}_c. \quad (5.17)$$

§ 5.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ИЗГИБАЕМЫХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ БРУСЬЕВ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Постановка задачи. С помощью интеграла О. Мора и способа А. Верещагина можно сравнительно просто определять перемещения какого-либо определенного сечения бруса. В то же время при изгибе балок часто необходимо знать величину максимального перемещения, при этом указать заранее сечение, в котором перемещение будет максимальным, оказывается не всегда возможным. Эту задачу легко разрешить, составив дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки. Для того чтобы определить в любой точке балки (рис. 5.13) прогиб и угол поворота, воспользуемся выражением (2.36):

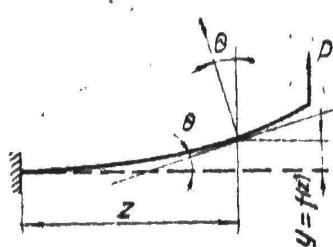


Рис. 5.13

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}.$$

Из математики известна формула для определения кривизны $\frac{1}{\rho}$ кривой, заданной уравнением $y = f(z)$:

$$\left| \frac{1}{\rho} \right| = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$