

§. 6.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. СТЕПЕНЬ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ

Связи, накладываемые на систему. Используемые в инженерной практике системы должны удовлетворять требованиям геометрической неизменяемости. Система называется *геометрически неизменяемой*, если взаимные перемещения точек системы возможны лишь за счет деформации ее элементов.

Система называется *статически определимой*, если внутренние усилия в элементах ее и реакции опор можно определить из условий равновесия (из уравнений статики). Все связи, наложенные на статически определимую систему, необходимы для обеспечения ее геометрической неизменяемости.

На рис. 6.1а показана шарнирно опертая плоская рама. При наличии трех линейных связей система статически определима и геометрически неизменяема. Все три реакции R_A , H_A , и R_B определяются из трех уравнений равновесия плоской системы сил, приложенных к раме. Статически определимая система не

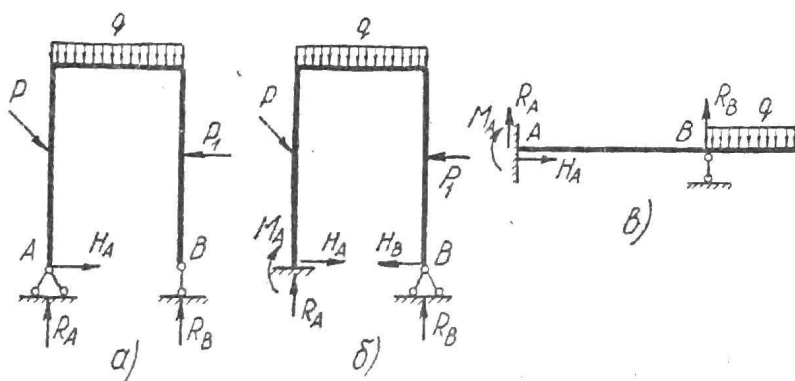


Рис. 6.1

имеет ни одной лишней связи, так как удаление из нее хотя бы одной внешней связи в опорных закреплениях превращает ее в геометрически изменяемую систему (механизм).

Добавим к связям, наложенным на раму (рис. 6.1а), еще две связи, например угловую связь в сечении A и линейную связь в сечении B (рис. 6.1б). В результате этого рама стала прочнее и жестче, хотя с точки зрения геометрической неизме-

приемости эти связи и являются дополнительными (лишними). Благодаря наложению дополнительных связей число реактивных факторов возрастает, и рама становится статически неопределимой. Теперь из трех уравнений равновесия плоской системы сил нельзя определить пять реактивных факторов (R_A , H_A , M_A , R_B , H_B).

● **Статически неопределимой системой** называется геометрически неизменяемая система, в которой для определения внутренних усилий в элементах и реакций опор недостаточно одних лишь уравнений статики.

Причиной статической неопределимости является наличие в системе связей сверх необходимых для ее равновесия и геометрической неизменности.

Когда система статически неопределима только относительно опорных реакций, то ее принято называть *внешне статически неопределимой системой*. В такой системе лишними связями являются *внешние связи* в опорных закреплениях. Примеры таких систем даны на рис. 6.1б, в.

В любой системе, кроме внешних связей, имеются *внутренние или взаимные связи*, накладывающие ограничения на взаимные перемещения элементов. Так, если какой-либо нагруженный брус разрезать сечением $m-n$ на две части (рис. 6.2а), то

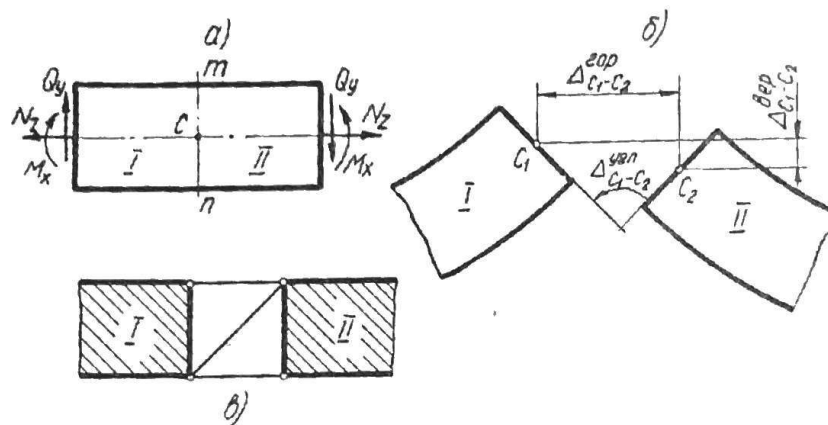


Рис. 6.2

образовавшиеся сечения переместились бы одно относительно другого (рис. 6.2б). Чтобы обе части не перемещались относительно друг друга, необходимо наложить на них связи, препятствующие взаимным горизонтальным, вертикальным и угловым перемещениям. Это позволяет считать, что в случае плоской задачи в любом сечении бруса имеются три внутренние связи, препятствующие трем взаимным перемещениям—двум линейным и одному угловому. Эти внутренние связи, схематически показанные в виде трех стержней на рис. 6.2в, являются необходимыми для равновесия системы.

Причиной статической неопределимости может быть также наличие в системе дополнительных (лишних) внутренних связей.

Так, например, для плоской рамы, изображенной на рис. 6.3а опорные реакции легко определяются из уравнений статики. Так что внешним образом система статически определима. Для определения внутренних усилий в элементах рамы разрежем стержень AB рамы на две части и действие отброшенных связей в сечении заменим тремя силовыми факторами: продольной силой N_1 , поперечной Q_1 и изгибающим моментом M_1 . Отметим, что устранение одной внешней связи требует приложения одной реактивной силы, а устранение одной внутренней связи требует приложения двух равных обратно направленных силовых факторов (рис. 6.3б). Эти внутренние силовые факторы и неизвестные реакции опор не могут быть определены из трех независимых уравнений равновесия статики, т. е. данная рама статически неопределима (внутренним образом).

Если система статически неопределима только относительно усилий в ее элементах, то она называется внутренне статически неопределимой системой (рис. 6.3а). Недостаток внутренних связей приводит к нарушению условий равновесия, а избыток их делает систему статически неопределимой.

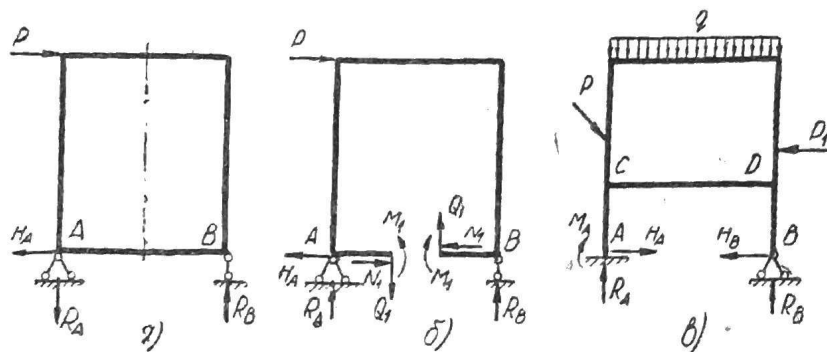


Рис. 6.3

Наряду с системами внешне и внутренне статически неопределимыми встречаются комбинированные системы, которые одновременно внешне и внутренне статически неопределимы (рис. 6.3в).

Степень статической неопределимости. Общее число дополнительных (лишних) связей (как внешних, так и внутренних) называется *степенью, или числом статической неопределимости системы*. Степень внешней статической неопределимости системы определяется числом избыточных опорных связей, а степень внутренней статической неопределимости — числом дополнительных внутренних связей.*

* Степень статической неопределимости системы можно определить также по разности между числом неизвестных (реакций опор и внутренних усилий) и числом независимых уравнений равновесия статики, которые можно составить для данной системы.

В зависимости от числа лишних связей системы разделяются на один, два, три, ..., n раз статически неопределимые. Так, система на рис. 6.1*в* один раз статически неопределима, система на рис. 6.1*б* два раза статически неопределима.

Всякий замкнутый (бесшарнирный) контур является трижды статически неопределимой системой, так как для превращения его в статически определимую систему необходимо разрезать один из его элементов и в разрезе приложить три силовых фактора N , Q и M (рис. 6.4*а, б*). Очевидно, рама, показанная на рис. 6.3*в*, пять раз статически неопределима (два раза внешним образом и три раза внутренним).

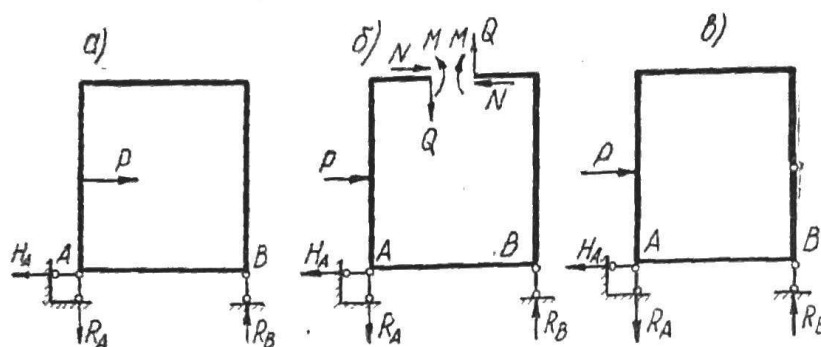


Рис. 6.4

Дополнительные внутренние связи могут быть устранены также путем введения шарниров. Шарнир, соединяющий два стержня (одиночный шарнир), снижает общую степень статической неопределимости на единицу, так как в этом случае можно составить одно дополнительное уравнение равновесия, приравняв нулю моменты сил, действующих на одну из частей системы, соединяемых шарниром. Например, система, изображенная на рис. 6.4*в*, два раза статически неопределима.

Шарнир, включенный в узел, где сходится n стержней (рис. 6.5*а*), снижает степень статической неопределимости на единицу меньше числа сходящихся в нем стержней, так как заменяет собой $n-1$ одиночных шарниров (рис. 6.5*б*).

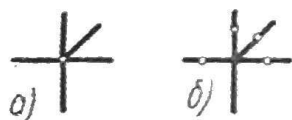


Рис. 6.5

Свойства статически неопределимых систем. Статически неопределимые системы обладают следующими общими свойствами.

1. Распределение усилий между элементами статически неопределимой системы зависит от количества и качества (жесткости) дополнительных связей. Чем больше жесткость какого-либо элемента системы, тем большее усилие он принимает на себя и наоборот. Это следует учитывать при проектировании статически неопределимых конструкций.

2. В статически неопределимых системах в общем случае нельзя получить одновременно во всех элементах напряжения,

равные допускаемым, и некоторые элементы системы остаются недогруженными.

3. В элементах статически неопределимых систем могут возникать так называемые начальные усилия и напряжения, обусловленные неточностью изготовления отдельных элементов, смещением опор и изменением температуры. Усилия в элементах статически определимых систем возникают только от действия внешней нагрузки.

Начальные напряжения, вызванные неточностью изготовления, называют монтажными напряжениями, а от изменения температуры — температурными напряжениями.

4. Статически неопределимые системы оказывают большее сопротивление разрушению, чем статически определимые системы, так как последние имеют только необходимые связи.

5. Перемещения статически неопределимых систем меньше перемещений статически определимых систем, из которых они могут быть получены. Это связано с наличием в статически неопределимых системах лишних работающих связей, повышающих жесткость системы.

Методы расчета статически неопределимых систем. В строительной механике разработано много эффективных методов расчета статически неопределимых систем. Основным методом раскрытия статической неопределимости машиностроительных конструкций является *метод сил*. При этом способе расчета за неизвестные принимают силы, действующие по направлению отброшенных связей.

Кроме метода сил широко применяется также *метод перемещений*, в котором за исходные неизвестные принимаются линейные и угловые перемещения системы.

В некоторых случаях для раскрытия статической неопределимости систем весьма рациональными являются *комбинированный и смешанный методы*, представляющие собой синтез метода сил и метода перемещений. Эти методы не исключают, а наоборот, дополняют друг друга.

При расчете любой системы нужно выбирать тот способ, который легче и скорее позволяет получить окончательный результат.

§ 6.2. МЕТОД СИЛ. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Основная и эквивалентная системы. Общим методом раскрытия статической неопределимости систем в машиностроении является *метод сил*.

Рассмотрим простейшую раму (рис. 6.6а), являющуюся трижды статически неопределимой (заданная система). Для расчета статически неопределимых систем при любых видах деформации сначала выбирают основную систему. Основной системой

называется статически определяемая и геометрически неизменяемая система, полученная из заданной статически неопределимой системы путем освобождения ее от дополнительных связей (внешних и внутренних) и заданных нагрузок.

Для каждой статически неопределимой системы, как правило, можно подобрать сколько угодно основных систем. Один из возможных вариантов основной системы для рассматриваемой рамы показан на рис. 6.6б.

После того как дополнительные связи удалены и система превращена в статически определяемую, действие отброшенных связей заменяется неизвестными силовыми факторами X_1, X_2, X_3 .

В тех сечениях, где запрещены линейные перемещения, вводятся силы, а там, где запрещены угловые перемещения — моменты.

Выбор направления неизвестных сил и моментов может быть сделан произвольно. Истинное направление неизвестных определяется их знаком. Получение результата расчета со знаком плюс показывает, что действительное направление искомого усилия соответствует принятому в расчете; отрицательный же знак по-

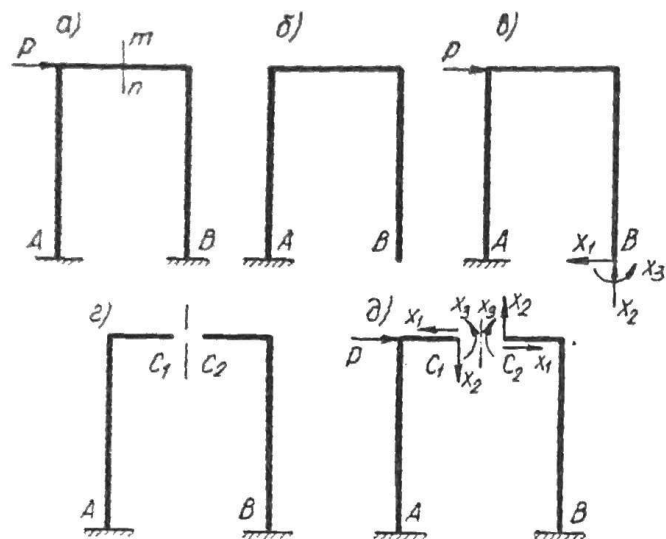


Рис. 6.6

казывает, что принятое в расчете направление следует изменить на обратное.

Основная система, к которой приложены все внешние силы, а действие отброшенных связей заменено неизвестными усилиями X_i , называется *эквивалентной системой*. На рис. 6.6в показан вариант эквивалентной системы для схемы рис. 6.6а. В месте отброшенной заделки в сечении B приложено три реактивных воздействия X_1, X_2, X_3 .

Канонические уравнения метода сил. В заданной системе рис. 6.6а в направлениях имеющих связей перемещений быть не может. Поэтому, чтобы эквивалентная система работала как заданная, необходимо, чтобы перемещения, возникающие по направлениям отброшенных связей от совместного действия заданных нагрузок и неизвестных силовых факторов, равнялись нулю.

Обозначим линейные перемещения точки B по направлению неизвестных X_1 и X_2 и угол поворота по направлению неизвестного X_3 соответственно через Δ_1, Δ_2 и Δ_3 . В эквивалентной системе перемещения в направлении отброшенных связей равняются нулю, т. е.

$$\Delta_1=0, \quad \Delta_2=0, \quad \Delta_3=0. \quad (6.1)$$

Для определения перемещений по направлению отброшенных связей будем пользоваться принципом сложения действия сил. Так, для перемещения Δ_1 можно записать:

$$\Delta_1 = \Delta_{1x_1} + \Delta_{1x_2} + \Delta_{1x_3} + \Delta_{1p} = 0, \quad (6.2)$$

где Δ_{1x_1} , Δ_{1x_2} , Δ_{1x_3} — перемещения от неизвестных X_1 , X_2 , и X_3 — по направлению неизвестного X_1 ;

Δ_{1p} — перемещение от нагрузки (грузовое перемещение) по направлению неизвестного X_1 .

Перемещения от каждого неизвестного можно выразить еще в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta_{1x_1} &= \delta_{11} X_1; \\ \Delta_{1x_2} &= \delta_{12} X_2; \\ \Delta_{1x_3} &= \delta_{13} X_3, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где δ_{11} , δ_{12} , δ_{13} — так называемые единичные перемещения, т. е. перемещения по направлению неизвестного X_1 от соответствующей единичной силы.

Подставляя значения (6.3) в уравнение (6.2), получим:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1p} = 0. \quad (6.4)$$

На рис. 6.7 показаны перемещения, входящие в уравнение (6.4).

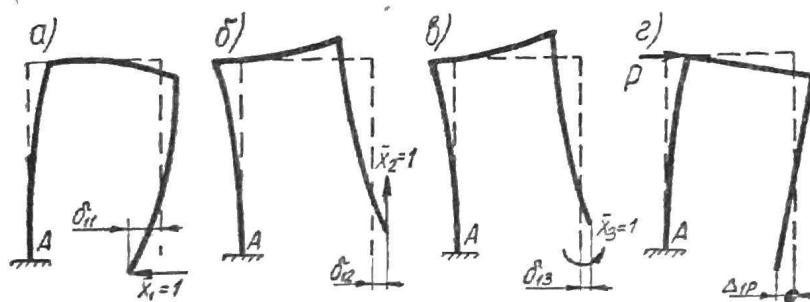


Рис. 6.7

Проведя подобные рассуждения по отношению к оставшимся двум перемещениям, в итоге получим три уравнения:

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2p} &= 0, \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Уравнения перемещений (6.5) называются *каноническими уравнениями метода сил* для системы три раза статически неопределимой. При этом методе расчета уравнения пишутся по определенному правилу (канону), а за неизвестные принимаются силы (моменты), поэтому и сам метод называется *методом сил*. Ана-

В случае системы n раз статически неопределимой канонические уравнения метода сил сведутся к следующей системе n линейных уравнений:

Каждое из канонических уравнений (6.6) выражает условие отсутствия перемещения по направлению отброшенной связи, вызванного действием заданных сил и лишних неизвестных. Число канонических уравнений равно числу отброшенных связей, поэтому все неизвестные могут быть определены и статическая неопределимость системы будет раскрыта. Коэффициентом при каждом неизвестном X_i в канонических уравнениях является единичное перемещение δ_{ik} , т. е. перемещение по направлению силы X_i , вызванное единичной силой $\bar{X}_k=1$.

Так, для рамы, изображенной на рис. 6.6а, в качестве лишних связей примем внутренние связи, разрезая сечением mn раму на две части. На рис. 6.6г, д показаны возможные при этом основная и эквивалентная системы. Взаимное действие двух частей друг на друга в данном сечении заменено силами X_1 , X_2 и моментом X_3 . Поскольку для внутренних связей силы являются взаимными, то к каждой из частей системы прикладываются равные и противоположно направленные друг другу силы и моменты (рис. 6.6д).

Так как в заданной системе в сечении mn нет взаимных линейных перемещений по горизонтали и по вертикали и нет взаимного поворота сечения, то и в эквивалентной системе *взаимные перемещения* сечений C_1 и C_2 по направлению трех неизвестных равны нулю (рис. 6.2):

или в развернутом виде:

184

Верещагина неприменимо на криволинейных участках. В этом случае рекомендуется применять формулу Мора.

Из рассмотрения выражений (6.10—6.12) можно заключить, что главные перемещения всегда положительны; побочные, грузовые и температурные перемещения могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Чем больше побочных перемещений обращается в нуль, тем проще решаются уравнения перемещений и, следовательно, тем удачнее выбрана основная система.

Порядок расчета статически неопределимых систем. Порядок расчета статически неопределимой системы в своей сущности остается одинаковым, независимо от того, работает ли конструкция на растяжение (сжатие), кручение, изгиб или на то, другое и третье совместно:

1. Устанавливают степень статической неопределимости системы (число дополнительных связей).

2. Путем удаления в заданной системе дополнительных связей выбирают основную статически определимую систему. Из нескольких вариантов основной системы выбирается тот, при котором расчет совершается проще.

3. Переходят от основной системы к эквивалентной системе, а именно: основная система нагружается заданной нагрузкой и дополнительными неизвестными силовыми факторами, заменяющими действие отброшенных связей.

4. Для эквивалентной системы составляют канонические уравнения метода сил, выражающие условия, при которых эта система равноценна заданной.

5. Вычислив коэффициенты и свободные члены, решают канонические уравнения и определяют дополнительные неизвестные усилия.

6. Загрузив основную систему заданными нагрузками и всеми найденными лишними неизвестными обычным способом, как для статически определимой системы, определяют внутренние усилия в элементах системы, строят окончательные эпюры для заданной статически неопределимой системы и делают проверку решения.

Построение окончательной эпюры изгибающих моментов M_p иногда удобно выполнять методом сложения грузовой эпюры M_p с единичными эпюрами $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$, предварительно умноженными на значения $X_1, X_2, \dots, X_n$.

В заключение заметим, что отличие в расчете статически неопределимых систем от статически определимых заключается лишь в раскрытии статической неопределимости. После определения дополнительных неизвестных усилий вычисление реакций, построение эпюр внутренних силовых факторов, определение напряжений и перемещений, проверка прочности и жесткости производится так же, как и для статически определимых систем.

Примеры расчета статически неопределимых плоских систем рассмотрены в § 35, 36 работы [6].